

КНИЖКА С КАРТИНКАМИ ПО ТОПОЛОГИИ

М.: Мир, 1991.-240 с.

Книга американского математика, посвящённая одному из необычных аспектов современной топологии: умению иллюстрировать рисунками топологические работы. Автор разработал специальную графическую технику, которая проста и удобна в обращении и может применяться и в педагогической практике. На многочисленных примерах автор объясняет ряд важных топологических идей, которые оказываются интересными не только в топологии, но и в других областях математики. Элементарный характер изложения позволяет использовать книгу при первом знакомстве с топологией.

Для математиков и физиков разного уровня подготовки, для преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

Содержание

От редактора перевода	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ГЛАВА 1. Начертательная топология	15
Седло в коробке (картинка 1)	16
Седло в барабане (картинка 2)	17
Зонтик Уитни (картинка 3)	18
Сборка Кэли (картинка 4)	22
Точка пинча-точка ветвления (картинка 5)	25
ГЛАВА 2. Идея и воплощение	27
Кубическая метафора (картинка 1)	27
Основные примеры поверхностей (картинка 2)	30
Трезубр (картинка 3)	30
Сглаживание полиэдрального седла (картинка 4)	33
Шутовской колпак (картинка 5)	34
Яйцо Дунса (картинка 6)	36
Лента Мёбиуса (картинка 7)	38
Тушь и бумага	40
Мел и доска	40
Слайды и прозрачки	44
Компьютер и чертёжный стол	44
Графики функций (картинка 8)	45
Взаимоуничтожение точек пинча: проволочные каркасы (картинка 9)	47
Взаимоуничтожение точек пинча: удаление скрытых линий (картинка 10)	48
Взаимоуничтожение точек пинча: дальнейшая проработка рисунков	49

(картинка 11)	
Выкручивание штанов (картинка 12)	50
Расслаивание сферы и узел "восьмёрка" (картинка 13)	52
Кабельный узел и компаньон узла (картинка 14)	52
Кабельные шаблоны (картинка 15)	56
ГЛАВА 3. Рисунки в перспективе	60
Линейная перспектива (картинка 1)	61
Горизонт и зенит (картинка 2)	63
Рецепт построения куба (картинка 3)	67
Куб в трёх-, двух- и одноточечной перспективах (картинка 4)	69
В поисках куба (картинка 5)	69
Диагонали (картинка 6)	73
Колесо и ось (картинка 7)	75
Аксонометрия (картинка 8)	77
Светотень (картинка 9)	80
ГЛАВА 4. Невозможный угольник	86
Угольник Пенроузов (картинка 1)	86
Невозможный четырёхугольник (картинка 2)	88
Трубопровод (картинка 3)	89
Игральные кости (картинка 4)	90
Фундаментальная группа (картинка 5)	92
Кубическая решётка (картинка 6)	95
Человек в кубе (картинка 7)	95
ГЛАВА 5. Тени из других измерений	99
Самопересечение жёлоба (картинка 1)	100
Коноид Плюккера (картинка 2)	103
Как вылепить римскую поверхность (картинка 3)	106
Гауссово отображение и скрещённый колпак (картинка 4)	109
Поверхность Боя (картинка 5)	112
Срез и тень (картинка 6)	116
Бутылка Уитни (картинка 7)	118
Римбойская деформация (картинка 8)	120
ГЛАВА 6. Выворачивания сферы наизнанку	125
Золотой прямоугольник (картинка 1)	125
Скрещённый колпак и ручка (картинка 2)	127

Запрещённое выворачивание (картинка 3)	130
Преобразование теннисного мяча (картинка 4)	132
Шляпные диаграммы (картинка 5)	137
Астроида-дельтоида (картинка 6)	138
Монтаж погружений (картинка 7)	139
Выворачивание наизнанку по Морэну (картинка 8)	141
Кисеты (картинка 9)	144
Семейство астроиды (картинка 10)	147
Машина катастроф (картинка 11)	151
Морэновское скручивание (картинка 12)	152
ГЛАВА 7. Групповые картинки	157
Застегивание кренделя на все молнии (картинка 1)	158
Как сплести гомеоморфизм (картинка 2)	163
Артинов переворот (картинка 3)	165
Сферические косы (картинка 4)	165
Фокус с тарелкой (картинка 5)	168
Завиток и дымовая труба (картинка 6)	170
Переворот ручки (картинка 7)	174
Диаграммы переворота (картинка 8)	174
Скручивание Ликориша (картинка 9)	178
Печать царя Соломона (картинка 10)	180
ГЛАВА 8. Узел "восьмёрка"	186
Различные проекции "восьмёрки" (картинка 1)	187
Шестигранное дополнение "восьмёрки" (картинка 2)	188
Шестигранная диаграмма склейки (картинка 3)	190
Натягивание на "восьмёрку" поверхности Зейферта (картинка 4)	193
Шесть поверхностей Хакена (картинка 5)	195
Наглядно-символическое изображение расслоения (картинка 6)	197
Сова и киска (картинка 7)	199
Изотопные поверхности Зейферта (картинка 8)	201
Тривиальное расслоение (картинка 9)	203
Крендельная восьмёрка (картинка 10)	204
Тетраэдральная восьмёрка I (картинка 11)	204
Тетраэдральная восьмёрка II (картинка 12)	207
Торическая изотония сдвига (картинка 13)	208

Цилиндрическая изотопия сдвига (картинка 14)	209
Вычисление монодромии (картинка 15)	211
Расслоение Хопфа (картинка 16)	213
Постскриптум	216
Литература	221
Указатель картинок и фото	226
Именной указатель	228
Предметный указатель	231

Предметный указатель

автоморфизм (automorphism) 199	(plumbing) 135
- псевдоаносовский (pseudo-Anosov mapping) 199	вольность речи (abus de langage (франц.)) 103
антифарезис (anthyphaereisis) 125	- рисунка (~ de dessin (франц.)) 102
Артина соотношение (Artin's relator) 165	воротник (-чок) (collar) 168, 174
артинов переворот (Artin swap) 166	восьмёрка велосипедная (wobbly hoop) 107
астроида (astroid) 138, 148	восьмёрка (узел) (figure eight knot) 52, 53, 187, 188, 205, 207
базовая плоскость (base plane) 116	вполне непрерывная деформация (completely continuous deformation) 130
баночка (pill box) 152	вращения индекс (winding number) 132
бифуркация камертона (pitchfork bifurcation) 24	временное направление (temporal direction) 116
блеска точка (brilliant point, Glanzpunkt (нем.)) 82	выворачивание наизнанку (eversion) по Максу (Max ~) 45, 143
блик 82	- - по Морэну (Morin ~) 45, 136, 142
борромеево орбиобразии (Borromean orbifold) 58	- - по Пти (Petit ~) 137
Борромео кольца 59	- - по Филлипсу (Phillips ~) 137
Боя поверхность (Boy surface) 30, 31, 113, 145	- - по Шапиро (Shapiro ~) 131
бутылка (bottle)	- - сферы (sphere ~) 131, 143
- Клейна (Klein ~) 30, 31	высоты функция (height function) 184
- - проколота (punctured ~ ~) 196	гармонически сопряжённый (harmonic conjugate) 66
- Уитни (Whitney ~) 119	гаструла (gastrula) 143, 145
велосипедная восьмёрка (wobbly hoop) 107	Гаусса-Бонне формула 127
Веронезе поверхность (Veronese surface) 106	гауссова кривизна (Gauss curvature) 110
вид спереди или сбоку (elevation) 60	- отображение (~ map) 770
визуально-устойчивый (visually stable) 25	геометрия (geometry)
вложенный (embedded) 21	
водопроводное соединение	

- аналитическая (analytical ~) 99
- начертательная (descriptive ~) 15
- синтетическая (synthetic ~) 99
- гептаэдр (heptahedron) 109
- гессиан (Hessian (determinant)) 111
- гессиана принцип (Hessian principle) 109
- гипотеза Морэна (Morin's conjecture) 156
- Пуанкаре (Poincare ~) 36, 157, 158
- Уитни (Whitney's ~) 120
- гипоциклоида (hypocycloid) 146
- голономии линейная группа (linear holonomy group) 95
- гомеотопий группа (homeotopy group) 177
- гомотопия регулярная (regular homotopy) 120, 132
- римбойская (Romboy ~) 218
- улиткина (Limacon) 218, 219
- горизонт (horizon) 63, 64
- горлышко (neck) 130
- гранично-несжимаемая поверхность (boundary incompressible surface) 195
- группа (group) голономии линейная (linear holonomy ~) 95
- гомеотопий (homeotopy ~) 177
- классов преобразований (mapping class ~) 157, 158
- кос (braid ~) 165
- - сферическая (spherical ~ ~) 168
- ортогональная (orthogonal ~) 77
- первая гомотопическая (first homotopy ~) 157
- фундаментальная (fundamental ~) 93, 157
- двойной (double)
- кривая (~ curve) 20
- линия (~ line) 20
- обруч (~ hoop) 112
- отношение (cross-ratio) 66
- точка (~ point) 20
- - (мерной, поверхности, node, 4, 115

- двусторонняя окружность (two-sided circle) 178
- дельтоида (deltoid) 25, 115, 138
- Дена скручивание (Dehn twist) 154, 172
- деформация (deformation)
- вполне непрерывная (completely continuous ~) 130
- римбойская (Romboy ~) 121
- диаграмма (diagram) 100, 137
- диск Мёбиуса (Möbius disc) 103
- Дунса яйцо (Duns egg) 36, 37, 42
- дымовая труба (chimney) 171, 173
- единичный вектор нормали (unit normal) 110
- элемент (identity element) 157
- завиваться (извиваться) (writhe) 88
- завиток (whorl) 162, 163, 165, 183, 777
- задний свет (backlight) 83
- закон косинусов (cosine law) 82
- обратных квадратов (inverse square) 82
- закручиваться (перекручиваться)(twist) 88
- затягивать (span) 160
- зацепление расслоённое (fibred ~) 213
- Хопфа (Hopf ~) 214
- зецепления коэффициент (linking number) 200, 201
- звезда вершины 36
- Зейферта поверхность (Seifert surface) 135, 194, 202
- преобразование (— move) 199
- зенит (zenith) 64, 65
- зеркальный поворот (turn-reflection) 188
- золотой прямоугольник (golden rectangle) 125, 126
- идеальная плоскость (ideal plane) 63
- прямая (~ line) 63
- тетраэдр (~ tetrahedron) 187
- точка (~ point) 63

извивания индекс (writhing number) 200
извивающаяся лента (~ ribbon) 199
изоморфизм Майера-Вьеториса (Meyer-Vietoris isomorphism) 215
изотония (isotopy) 22, 158
- сдвига (shear ~) 211
- - торическая (toroidal ~ ~) 208
- - цилиндрическая (cylindrical ~ ~) 210
изофота (isophote) 83
иллюзия кубов Неккера (Necker cube illusion) 32
индекс вращения касательной (tangent winding number) 132
- извивания (writhing number) 200
- перекручивания (twisting ~) 200
индикатор (indicator) 163
индикаторный путь (~ path) 163
интегральная кривизна (integral curvature) 130
исчезающая точка (vanishing point) 63
кабельный узел (cable knot) 52, 54, 56, 145
кардиоида (cardioid) 219
каркас линейный (line pattern) 28, 29
- отсчёта (reference frame) 27, 28
- проволочный (wire frame) 45, 47, 48
Картана зонтик 21
картинка (picture (~), figure) 7, 14
- многокрасочная (polychrome ~) 42
- штопорная (corkscrew ~) 165
каспидальная особенность (cusp singularity) 118
катастроф машина (catastrophe machine) 152, 757
катастрофа (catastrophe) 24
- гиперболическая омбилическая (hyperbolic umbilic ~) 124
- эллиптическая омбилическая (elliptic umbilic ~) 25
киль (keel) 101
кисет (tabacco pouch) 144
кисета преобразование (~ ~ move) 144
класс преобразований (mapping class) 158
Клейна бутылка (Klein bottle) 30, 31
- - проколота (punctured ~ ~) 196
кодоскоп (overhead projector) 44
колпак скрещённый (cross cap) 38, 112, 128, 770
- шутовской (dunce hat) 34
кольца Борромео 59
компаньон (companion) 52, 54, 56
коноид Плюккера (Plucker conoid) 103, 104
контрольная кривая (marker curve) 197
контур (contour) 22
контурный рисунок (line drawing) 24, 28, 29
коразрез (co-slit) 172
кос группа (braid group) 165
коса (braid) 164
- сферическая (spherical ~) 767
коса-произведение (product ~) 165
коэффициент зацепления (linking number) 200, 201
кратная перспектива (multiple perspective) 105
крендель (double torus) 158, 159
кривая (curve) двойная (double ~) 20
- контрольная (marker ~) 197
- параболическая (parabolic ~) 109
кривизна (curvature)
- гауссова (Gauss ~) 110
- интегральная (integral ~) 130
- нормальная (sectional ~) 111
- отрицательная (negative ~) 109
- положительная (positive ~) 109
- секционная (sectional ~) 111
- средняя (mean ~) 111
Кroneckera-Дикка формула (Kronecker-Dyck formula) 127
круг фокальный (focal disc) 65
Кэли поверхность (Cayley surface) 23, 24

Ламберта закон косинусов (Lambert's cosine law) 82
 ласточкин хвост (swallowtail) 30, 145
 левый (left-handed) 24, 139
 лента (band (~), ribbon (*))
 - извивающаяся (writhing *) 199
 - Мёбиуса (Möbius -) 36, 37, 38, 39
 - Морэна (Morin ~) 150
 - перекрученная (twisting *) 199
 - свернувшаяся (curling *) 199
 ленточная окрестность (ribbon neighborhood)
 Ликориша скручивание (Lickerish twist) 178
 линейный каркас (line pattern) 28, 29
 линия (line) горизонта (horizon ~) 63, 64
 - двойная (double ~)
 - невидимая (hidden ~) 29
 - скрытая (hidden ~) 29, 45
 линк вершины (vertex link) 36
 луч-проектор (projector) 60
 Майера-Вьеториса изоморфизм (Meyer-Vietoris isomorphism) 215
 матрица (matrix) ортогональная (orthogonal ~) 77
 - - специальная (special ~ ~) 78
 - ортонормальная (orthonormal ~) 77
 Маха линия (Mach line) 85
 - принцип (~'s principle) 84
 - эффект (~ effect) 82
 машина катастроф (catastrophe machine) 152, 757
 меридиан (meridian) 135, 160
 Мёбиуса диск (Möbius disc) 103
 - лента (~ band) 36, 37, 38, 39
 многообразие (manifold) 56, 93
 модель (model) 100
 монодромия (monodromy) 199
 Морса функция (Morse function) 115, 185
 Морэна гипотеза (Morin's conjecture) 156

- лента (Morin band) 150
 - наушники (~'s earphones) 136
 - поверхность (~'s surface) 30, 31, 139, 142, 143
 - преобразование кисета (~ tobacco pouch move) 144, 154
 - скручивание (~ twist) 153
 Мурасуги сумма (Murasugi sum) 214
 наложение (superposition) 160
 направление временное (temporal direction) 116
 - цветное (chromatic ~) 116
 натягиваться (be spanned) 160
 наушники Морэна (Morin's earphones) 136
 начертательная геометрия (descriptive geometry) 15
 - топология (~ topology) 15
 невидимая линия '(hidden line) 29
 Неккера иллюзия (Necker illusion) 32
 несжимаемая поверхность (incompressible surface) 195
 нить (косы) (strand) 164
 нормали единичный вектор (unit normal) 110
 нормаль (normal) 110
 нормальная кривизна (sectional curvature) 111
 - поверхность (normal surface) 20
 область значений (target space) 20
 - определения (source plane) 20
 образующая окружность (generating circle) 201
 обрамляющий треугольник (framing triangle) 67
 обратная петля (inverse loop) 157
 обратных квадратов закон (~ square law) 82
 обруч двойной (double hoop) 112
 обруч-восьмёрка (wobbly ~) 107
 общего положения (in general position) 15
 односторонняя окружность (one-sided circle) 178

окно (window) 19, 201
 окружность (circle) 160
 - двусторонняя (two-sided $\sim$) 178
 - образующая (generating $\sim$) 201
 - односторонняя (one-sided $\sim$) 178
 - очевидная (obvious $\sim$) 172
 - скручивания (twisting $\sim$) 172
 омбилическая гиперболическая
 катастрофа (hyperbolic umbilic
 catastrophe) 124
 - эллиптическая катастрофа (elliptic
 $\sim$) 25
 опираться (be supported) 109
 орбиобразие (orbifold) 58
 орт нормальный (unit normal) 110
 ортоцентр (orthocenter) 68
 оснащение (framing) 214
 особая точка (singular point) 20
 особенность (singularity) 22
 - каспидальная (cusp $\sim$) 118
 - типа складки (fold $\sim$) 22
 остриё (cusp) 24, 118
 отделка (decorations) 28, 29
 отмеченная точка (base point) 43, 157
 отображение (map(ping))
 - гауссово (Gauss $\sim$) 110
 - гладкое (smooth $\sim$) 20
 - первого возвращения (first-return $\sim$)
 199
 - превосходное (excellent $\sim$) 146
 - Пуанкаре (Poincare $\sim$) 199
 - собственное (proper $\sim$) 20
 - тождественное (identity $\sim$) 158
 - устойчивое (stable $\sim$) 20
 - δ -близкое (δ -close $\sim$) 20
 очевидная окружность (obvious
 circle) 172
 параболическая кривая (parabolic
 curve) 109
 параллель (longitude) 135, 160
 параметризация овалами (ovalesque
 parametrization) 219
 Паскаля трисектриса (Pascal's
 trisectrix) 218, 219

- улитка ($\sim$ limaçon (франц.)) 218
 Пеано седло (Peano saddle) 112
 Пенроузов угольник (Penrose tribar)
 86, 87
 первая гомотопическая группа (first
 homotopy group) 157
 первого возвращения отображение
 (first-return map) 199
 переворот (swap) 161, 182
 - артинов (Artin $\sim$) 166
 - ручки ($\sim$ ping handle cores) 174, 175,
 176
 перекачивание сборки (cusp rolling)
 115, 122, 124
 переключение (switching) 210
 перекрученная лента (twisting ribbon)
 199
 перекручивания индекс ($\sim$ number)
 200
 переход (over crossing) 43, 116
 перспектива (perspective) 60
 - воздушная (aerial $\sim$) 60
 - двухточечная (two-point $\sim$) 69, 70
 - китайская (Chinese $\sim$) 153
 - кратная (multiple $\sim$) 105
 - линейная (linear $\sim$) 60, 61
 - обратная 153
 - односточечная (one-point $\sim$) 69, 70
 - трёхточечная (three-point $\sim$) 69, 70
 перспективная химера (perspective
 chimera) 105
 петля (loop) 157
 - гомотопная нулю (null homotopic)
 157
 - обратная (inverse $\sim$) 157
 - тривиальная (trivial $\sim$) 157
 печать царя Соломона (King Solomon
 seal) 181, 184
 пиксел (pixel) 18
 пиктограмма (pictograph) 41
 пинч (pinch) 20, 26
 план (plan) 60
 плоскость (plane)
 - базовая (base $\sim$) 116

- идеальная (ideal ~) 63
- предметная (object ~) 66
- проективная (projective ~) 63
- рисунка (picture ~) 19
- управления (control ~) 152
- плотность линий (line density) 27
- площадка регулярная (regular patch) 19
- Плюккера коноид (Plucker conoid) 103, 104
- плюмбинг (plumbing) 135, 213
- поверхность (surface)
 - Боя (Boy ~) 30, 31, 113
 - Веронезе (Veronese ~) 106
 - гранично-несжимаемая (boundary incompressible ~) 195
 - дважды линейчатая (doubly ruled ~) 16
 - Зейферта (Seifert ~) 135, 194, 202
 - линейчатая (ruled ~) 16
 - Морэна (Morin's ~) 30, 31, 139, 142, 143
 - несжимаемая (incompressible ~) 195
 - нормальная (normal ~) 20
 - порождённая кривой (generated by a curve) 16
 - римская (Roman ~) 30, 31, 107, 108
 - Хакена (Haken ~) 195, 196
 - Эннепера (Enneper's ~) 149
 - этруская (Etruscan ~) 219
- поворот зеркальный (turn-reflection) 188
- погружённый (immersed) 21
- подзорный конус (sight cone, visual cone) 65, 67
- подложка (underlay) 29
- поднять (elevate) 145
- подрезка (undercut) 84
- полутон (half-tone) 83
- поперечный разрез (cross cut) 153, 154, 172
- правый (right-handed) 24, 77, 139
- превосходное отображение (excellent map) 146

- предметная плоскость (object plane) 66
- преобразование (self-map) 158
- Зейферта (Seifert move) 199
- кисета (tobacco pouch move) 144, 154
- рельефное (relief ~) 61
- теннисного мяча (baseball move) 133, 135
- принцип гессiana (Hessian principle) 109
- Фалеса (Thales' ~) 108, 123
- причёсывание ежа 118
- проволочный каркас (wire frame) 45, 47
- проворот (roll) 182
- продольный разрез (slit) 172
- проективное пространство (projective space) 63
- проекция (projection) 60
- аффинная (affine ~) 60
- изометрическая (isometric ~) 79
- кабинетная (cabinet ~) 77
- кавальерная (cavalier ~) 77
- косоугольная (oblique ~) 60
- - фронтальная диметрическая 77
- ортогональная (orthographic ~) 60
- параллельная (parallel ~) 60
- прозрачка (transparency) 42, 44
- произведение кос (product brade) 165
- петель (~ loop) 157
- проколотый (punctured)
 - бутылка Клейна (~ Klein bottle) 196
 - тор (~ torus) 197
- проплешина (bald spot) 118
- прорисовка (profiling) 28, 29
- пространство образов (target (space)) 20
- прообразов (source (space)) 20
- проход (under crossing) 43, 116
- прямая идеальная (ideal line) 63
- псевдоаносовский автоморфизм (pseudo-Anosov mapping) 199
- Пуанкаре гипотеза (Poincare

- conjecture) 36, 157, 158
- отображение ($\sim$ map) 199
- путь индикаторный (indicator path) 163
- рабочий рисунок (working figure) 41
- развернуть (uncurl) 218
- разрез поперечный (cross cut) 153, 154, 172
- продольный (slit) 172
- разрезов система (cut system) 184
- раскраска (painting) rendering, 114, 217
- распарывание шва (seam splitting) 190, 195, 197
- расслоение (fibration) 186, 197, 198
- тривиальное (trivial $\sim$) 199, 203
- Хопфа (Hopf $\sim$) 213
- расслоённое зацепление (fibred link) 213
- ребро (edge) контурное (contour $\sim$) 32
- фасадное (face $\sim$) 32
- регулярная гомотопия (regular homotopy) 120, 132
- площадка ($\sim$ patch) 19
- точка ($\sim$ point) 19
- режем-поворачиваем-клеим (cut-turnglue) 173
- рекомбинация (recombination) 116
- рельефное преобразование (relief transformation) 61
- римбойская гомотопия (Romboy homotopy) 218
- деформация ($\sim$ deformation) 121
- римская поверхность (Roman surface) 30, 31, 107, 108
- рисунка плоскость (picture plane) 19
- сфера ($\sim$ sphere) 139
- рисунок (figure ($\sim$), drawing (*), picture) контурный (line *) 28, 29
- рабочий (working $\sim$) 41
- род (genus) 127
- ручка (handle) 127, 128, 175
- сборка (cusp) 22, 23
- левая (left-handed $\sim$) 24, 139
- правая (right-handed $\sim$) 24, 139
- свернувшаяся лента (curling ribbon) 199
- светотень (chiaroscuro) 80, 81
- сдавливаемый (collapsible) 35, 36
- сдавливать (collapse) 35
- сдвига изотопия (shear isotopy) 211
- Пеано (Peano $\sim$) 112
- секционная кривизна (sectional curvature) 111
- серендипность (serendipity) 9, 43
- система разрезов (cut system) 184
- скелет (spine) 34, 35
- складка (fold) 22
- скрещённая (crossed cusp) 116
- складываться (fold) 149
- скрещённый колпак (cross cap) 38, 110, 112, 128
- складка ($\sim$ ed cusp) 116
- труба ($\sim$ ed tube) 118
- скручивание (twist) 161
- Дена (Dehn $\sim$) 154, 172
- Ликориша (Lickorish $\sim$) 178
- Моржа (Morin $\sim$) 153
- скручивания окружность (twisting circle) 172
- скрытая линия (hidden line) 29, 45
- Смейла теорема (Smale's theorem) 132
- совмещение (superposition) 160
- соломонова печать (Solomon's seal) 181, 184
- соотношение Аршина (Artin's relator) 165
- сохраняющий ориентацию (sense-preserving) 78
- спайн (spine) 35
- спелёнутый трилистник (diapered trefoilknot) 43
- спиралька (coil) 162, 163, 165, 183
- сращивание (plumbing) 213
- средняя кривизна (mean curvature) 111
- срез (slice) 117

стабильный элемент (stable element) 94
 стебель (stalk) 102
 стереопара (stereograph) 47
 стереоскоп (stereoscope) 47
 стирание (occlusion) 28
 стягиваемый (contractible) 36
 сумма Мурасуги (Murasugi sum) 214
 - по краю (border $\sim$) 129
 - связная (connected $\sim$) 129
 сфера рисунка (picture sphere) 139
 сферическая группа кос ($\sim$ braid group) 168
 - коса ($\sim$ braid) 167
 теннисного мяча преобразование (baseball move) 133, 135
 тень (shadow) 117
 теорема Смейла (Smale's theorem) 132
 - Уитни-Грауштайна (Whitney-Graustein $\sim$) 132
 Тёрстона треножник (Thurston's tripus) 192
 типичный (generic) 21
 тождественное отображение (identity map) 158
 тор (torus) 30, 31
 - преобразования (mapping $\sim$) 199
 - проколотый (punctured $\sim$) 197
 торический узел 56
 точка (point) ветвления (branch $\sim$) 25, 26
 - двойная (double $\sim$) 20
 - зенита (zenith $\sim$) 64, 65
 - идеальная (ideal $\sim$) 63
 - исчезающая (vanishing $\sim$) 63
 - особая (singular $\sim$) 20
 - острия (cusp.) 24
 - отмеченная (base $\sim$) II, 43, 157
 - пинча (pinch $\sim$) 20, 26
 - регулярная (regular $\sim$) 19
 - схода (vanishing $\sim$) 63
 - тройная (triple $\sim$) 20
 трезубр (triprongs) 31, 32
 треножник Тёрстона (Thurston

tripus) 192
 тривиальное расслоение (trivial fibration) 199, 203
 трилистник (trefoil knot) 43
 - спелёнутый (diapered $\sim \sim$) 43
 трисектриса Паскаля (Pascal's trisectrix) 218, 219
 тройная точка (triple point) 20
 тройник (tee) 192
 тупого угла условие (obtuse angle condition) 79
 угольник Пенроузов (Penrose tribar) 86, 87
 узел (knot ($\sim$), node ($*$))
 - "восьмёрка" (figure eight $\sim$) 52, 53, 187, 188
 - (двойная точка мерной, поверхности, $*$, 4, 115
 - кабельный (cable $\sim$) 52, 54, 56, 145
 - торический 56
 Уитни бутылка (Whitney bottle) 119
 - гипотеза ($\sim$'s conjecture) 120
 - зонтик ($\sim$ umbrella) 21, 102
 - теорема 118
 - топология ($\sim$ topology) 20
 Уитни-Грауштайна теорема (Whitney-Graustein theorem) 132
 улитка Паскаля (limacon of Pascal) 218
 улиткина деформация (гомотопия) (Limason) 218, 219
 управления плоскость (control plane) 152
 управляющая переменная ($\sim$ variable) 28
 ус (whisker) 49, 102
 условие тупого угла (obtuse angle condition) 79
 устойчивый (stable) 15, 20
 - визуально (visually $\sim$) 25
 Фалеса принцип (Thales' principle) 108, 123
 - треугольник ($\sim$ triangle) 72
 фасет (facet) 217

фокальный (focal) круг ($\sim$ disc) 65
 - множество ($\sim$ set) 133
 - расстояние ($\sim$ distance) 61, 65
 - центр ($\sim$ center) 65, 77
 фокус (focus) 66
 фундаментальная группа
 (fundamental group) 93, 157
 функция высоты (height function) 184
 - Морса (Morse $\sim$) 115, 185
 Хакена поверхность (Haken surface)
 195, 196
 характеристика эйлера (Euler
 characteristic) 118, 127, 185
 химера перспективная (perspective
 chimera) 105
 Хопфа зацепление (Hopf link) 214
 - расслоение ($\sim$ fibration) 213
 цветовое направление (chromatic
 direction) 116
 центр поля зрения (center of vision) 65
 - фокальный (focal $\sim$) 65
 четвертьтон (quarter-tone) 84
 шляпа (Морэна) (chapeau) 130
 штаны (pair of pants) 51
 Штейнера скрещенный колпак

(Steiner cross cap) 38, 110, 112,
 128
 штопорная картинка (corkscrew
 picture) 165
 шутовской колпак (dunce hat) 34
 Эйлера нормальное число 118
 эйлера характеристика (Euler
 characteristic) 118, 127, 185
 элемент (element) единичный (identity
 $\sim$) 157
 - стабильный (stable $\sim$) 94
 Эннепера поверхность (Enneper's
 surface) 149
 этруская поверхность (Etruscan $\sim$)
 219
 якобиан (Jacobian (determinant)) 24,
 110
 HNN-расширение (HNN -extension)
 94
 δ -близкое отображение (δ -close map)
 20
 сдавливаемый, collapsible, 1, 1, 36
 тона, tone, 3/4, 3/4, 84

От редактора перевода

Книжка Дж. Франсиса – одна из немногих «книжечек с картинками» по математике. Её отличительной чертой является то, что в ней не рисунки поясняют текст, а текст объясняет и комментирует рисунки. Подобный характер имеет ещё, пожалуй, пока только книга Х.-О. Пайтгена и П.-Х. Рихтера «Красота фракталов», русский перевод которой выходит в этом году в издательстве «Мир». Вместе с тем эти две книги мало похожи друг на друга: такие иллюстрации, как в книге Пайтгена и Рихтера, могут быть изготовлены лишь компьютером, в то время как почти все рисунки в книге Франсиса сделаны от руки и могут быть воспроизведены даже мелом. В действительности Франсис видит свою задачу именно в том, чтобы научить (и побудить!) математиков рисовать картинки для своих книг, статей и лекций. Им разработана специальная графическая техника, основанная отчасти на элементарной теории особенностей, отчасти на классических принципах перспективы и не в последнюю очередь на ряде специально разработанных приёмов. Изложению этой техники посвящены первые три главы, а в остальных она применяется к ряду содержательных и красивых явлений. Средства, описанные в книжке Франсиса, доступны и математику с минимальной склонностью и способностью к рисованию. Специальное внимание уделено воспроизведению рисунков на доске. Цветной мел приводит к необычайно выразительным картинкам, в чём легко убедиться, посмотрев на включённые в книгу фотографии реальных рисунков. Однако и рисунки обычным мелом не менее эффективны.

Вместе с тем нужно подчеркнуть, что книжка Франсиса интересна не только тем, кто собирается рисовать какие-нибудь математические картинки. Как и всякую книжку с картинками, её можно просто перелистывать, задерживаясь на заинтересовавших рисунках. Разобравшись в рисунках с помощью сопровождающих их пояснений, можно познакомиться со многими замечательными топологическими объектами и теоремами. В действительности несколько рисунков с пояснениями могут служить доказательством весьма нетривиальной теоремы – такой, как теорема Смейла о выворачивании сферы наизнанку из главы 6. Разумеется, такой способ изложения доказательств довольно далёк от

господствующего и часто побуждает автора опускать детали. Восстановление этих деталей естественно рассматривать как упражнения для читателя. При этом надо сказать, что книжка не предполагает никаких систематических познаний в топологии.

Основной темой книги и её рисунков является топология малых размерностей, в первую очередь размерностей 2 и 3. Понятно, что именно в этих размерностях можно рассчитывать на точное отображение математических явлений рисунками, а не просто на схематическое описание. С другой стороны, именно эти размерности, наряду с размерностью 4 (которой автор слегка касается в главе 5), вызывают сейчас наибольший интерес у топологов. В значительной степени этот интерес вызван работами и идеями У. Тёрстона, первые из которых появились чуть более десяти лет назад. Его идеи связали трёхмерную топологию с рядом других разделов математики – теорией клейновых групп, теорией пространств Тайхмюллера, теорией представлений. При этом они опираются на красивые зрительные образы и дают хорошую возможность для содержательных иллюстраций. Как рассказывает автор в своём предисловии, происхождение двух последних глав непосредственно связано с работами Тёрстона.

В книге Франсиса топология предстаёт как часть гораздо более широкого, чем обычно, культурного контекста. Оторвавшись от потока статей и препринтов, математику стоит осознать, что его деятельность имеет отношение не только к компьютерам, но и к произведениям Эшера, Дюрера и Дали. Книжка Франсиса предоставляет такую возможность, и в этом – ещё одно её достоинство.

Свободный стиль книги – стиль расширенных подписей к рисункам и неформальных бесед с читателем – доставил немало трудностей переводчику и редактору. Вероятно, попытки согласовать вольности речи автора с нормами русского языка были не всегда удачными. Однако главное содержание книги – её рисунки – не нуждается в переводе и предстаёт перед русским читателем в своём исходном виде.

Н. В. Иванов

Предисловие

Die Kräftigung des räumlichen Vorstellungsvermögens und der räumlichen Gestaltungskraft gehört unbestritten zu den wichtigsten Zielen eines jeden geometrischen Unterrichts.

[Развитие способности к пространственному воображению и мысленному созданию пространственных образов безусловно относится к числу важнейших целей всякого геометрического обучения. (нем.)]

Артур Шёнфлис, 1908 г.

Моя книга — о том, как рисовать математические картинки. Разумеется, можно спросить, а нужно ли вообще рисовать картинки в математике. Некоторые дисциплины требуют иллюстраций. Вообразите греву «Анатомию» без иллюстраций. Некоторые лучше обходятся без них. Вообразите попытку проиллюстрировать «Principia» Рассела и Уайтхеда.

Десятилетний период созревания этой книги начался с того, что я провёл свой отпускной семестр в нашей библиотеке в обществе великих геометров прошлого столетия. На страницах *Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften*¹ и собрания трудов Феликса Клейна я начал видеть глазами математиков, живших сто лет назад, то, что выучил студентом в середине этого века.

У них был удивительно прямой способ смотреть на весьма сложные вещи, особенно на римановы поверхности и геометрические конструкции над комплексными числами. Они рисовали картинки, строили модели и писали руководства, как это делать. И тем самым оставили нам живую летопись математики своего времени. Я решился на попытку сделать то же самое для математики моих современников.

В своей собственной работе я всегда сильно опирался на эскизы и диаграммы. Всерьёз ценить этот экспериментальный способ занятий математикой я научился в те дни, когда писал диссертацию в Анн Арборе. Чак Тайтус умело руководил моей работой, рисуя сотни картинок. Я также усвоил его исторический подход к геометрическому анализу, ведущий к гармонии между логически-абстрактной и визуально-конкретной математикой. Ободряемый лидерами в моей области, в особенности Моррисом Марксом, я занимал аудиторию на лекциях и

¹ Энциклопедии математических наук (нем.). — Прим. перев.

семинарах сложными рисунками на доске и раздавал слушателям картинки «на память». В конце концов я начал работать над рисунками тех вещей, в изображении которых возникала надобность у других. Я имел удовольствие иллюстрировать статью Берштейна и Эдмондза [Berstein – Edmonds 1979], вышедшую в шпрингеровской серии монографию Билла Абикоффа [Abikoff 1980] и его очерк в Monthly [Abikoff 1981], две работы Билла Тёрстона [Thurston 1982; 1986] и его так до сих пор и неопубликованный учебник «Геометрия и топология трёхмерных многообразий». И, кроме всего этого, я стал активно изводить коллег, заставляя их рассказывать о своих тайных видениях и обещая взамен показать им простой способ эскизно изобразить их в случае надобности.

Когда я впервые решил формализовать процедуры, разработанные мною для рисования полезных математических картинок, то собирался назвать трактат «Графическим исчислением». Я и теперь полагаю, что имеется определённый набор правил, основанных на дифференциальной геометрии, из которых можно извлечь практические процедуры «вычисления» того, как рисовать картинку. Однако с течением времени я стал склоняться к тому, что при изложении каких угодно правил должно быть поменьше дидактики и побольше конкретных рекомендаций. Можете рассматривать эту книгу как описание моего собственного графического исчисления и как приглашение модифицировать и усовершенствовать его, чтобы оно годилось для ваших собственных целей.

Рисунки в этой книге определённо предназначены для воспроизведения и размножения, предпочтительно от руки. Их можно также переносить на «прозрачку»¹. Большинство карандашных рисунков прекрасно «работают» и без штриховки, нанесённой для большего эффекта. Каждый рисунок имеет «линейный каркас», на основе которого он был построен. Во многих случаях я включал этот каркас в картинки явным образом. В других вы можете восстановить его, анализируя законченный рисунок. Эти каркасы обычно достаточно просты, чтобы их можно было запомнить или зарисовать, конспектируя лекцию. Рисунки испытывались и на доске, дабы удостовериться в том, что осуществим и такой способ представления. Даже наиболее сложные из них, для которых требуются цветные мелки, можно воспроизвести за полчаса. Всё же, хотя педагогический эффект, достигаемый, когда вы на глазах у зрителей строите рисунок на доске, стирая скрытые линии, выявляя выпуклости и вогнутости штриховкой и используя цветные мелки для разметки деталей, и велик, но творения эти очень недолговечны, а отнимают массу времени. Единственный эффективный способ использовать такие рисунки на доске во время выступлений – это показывать сделанные с них слайды. Поэтому в книге речь идёт в основном о том, как делать контурные рисунки тушью, которые достаточно устойчивы, чтобы выдержать несколько последовательных ксерокопий, и достаточно просты, чтобы воспроизводить их от руки.

¹ См. раздел «Слайды и прозрачки» в гл. 2. – *Прим. изд. ред.*

Несколько слов о структуре книги и о том, отчего у этой книжки «рассказов в картинках» по топологии такое название. У меня до сих пор хранится Märchen-Bilderbuch¹, подаренная мне дедушкой по случаю моего трёхлетия. Он сам переплёл её. Моё самое старое имущество, этот превосходно иллюстрированный том сказок братьев Гримм [Grimm 1942] пережил бомбы военного времени и послевоенную неразбериху. Я всегда любил этот литературный жанр. Так что когда мой терпеливый и великодушный редактор из издательства «Шпрингер» Вальтер Кауфманн-Бюлер предложил мне расширить пояснительный текст, мне показалось естественным сочетанием показывать картинки и рассказывать топологические истории.

Вот так каждая глава стала «рассказом в картинках» про что-нибудь из определённой области математики. Каждая обязана своим появлением моим знающим друзьям, которые так или иначе рассказывали мне о своей территории. Подобно принцам Серендипа, я подобрал эти темы на своём пути². Однако ответственность за текст и рисунки со всеми их достоинствами и недостатками лежит целиком на мне.

Глава 1 устанавливает связь между принадлежащей Уитни и Тому теорией общего положения и устойчивых особенностей отображений в малых размерностях и начертательной топологией. Первоначально рисунок, вошедшие в эту главу, были подготовлены для семинара по границам прикладной геометрии, проведённого Робинот Маклеодом в Лас-Крусесе (штат Нью-Мексико) в 1980 г. С тех пор я много раз выступал с этой лекцией, адресуя её главным образом тем, кто рисует картинки для своих собственных лекций.

Технические приёмы, используемые в этой и следующей главах, первоначально сложились в результате моих усилий объяснить на картинках, что такое, собственно, теория катастроф. При помощи таких приёмов визуализации мне удавалось «объяснить» интригующее изобретение Тома и Зимана также и нетопологам – в том смысле, что я был в состоянии возбудить и удовлетворить любопытство слушателей. Все мои курсы для учителей математики старших классов в Пеории и студентов-биологов Иллинойского университета и доклады перед коллегами – физиками и физиологами – основывались на *lingua franca*³ аккуратно выполненных картинок. Я разыскал эти картинки в литературе и научился воспроизводить их, изучая рисунки Джима Каллахана, Тима Постаона и Леса Ландера в [Callahan 1974; 1977], [Poston – Stewart 1978] и [Bröcker – Lander 1975] соответственно.

¹ Книга сказок с картинками (нем.). – Прим. перев.

² Три принца с Серендипа (Серендип – древнее название острова Цейлон), персонажи сказки английского писателя и политического деятеля Хорса Уолпола (1717–1797), обладали способностью делать неожиданные и счастливые открытия и находки. С лёгкой руки Уолпола эта способность передается в английском языке одним словом *serendipity*. *Серендипность* встретится читателю ещё раз в разделе «Мел и доска» из главы 2. – Прим. ред.

³ Здесь: универсальном языке (лат.). – Прим. перев.

Глава 2 – это раздел, посвящённый методам и средствам их реализации. Эту форму изложения я заимствовал у экспериментальных наук. Топологи обычно рисуют для себя картинки, чтобы легче было формулировать определения и оформлять доказательства. По дороге к публикации эти визуальные подпорки слишком часто пропадают. В связи с этим топологу предлагается здесь неплохой выбор разных способов изготовления картинок, пригодных для публикации. Эта глава представляет собой скорее сборник топологических «анекдотов», нежели связный рассказ в картинках. Большая часть картинок была первоначально подготовлена для долговечного и досточтимого «Риманова семинара» Билла Абикоффа, где мы, кроме всего прочего, изучали работы Тёрстона. Последние пять рисунков этой главы были выполнены «на заказ» по наброскам Тёрстона.

Меня часто спрашивают, не нарисованы ли мои картинки компьютером. Пока нет! Мои первые попытки изучить этот сложный инструмент, с тем чтобы поставить его потом на службу топологии, относятся к той же поре, когда возник проект этой книжки с картинками. В тексте объясняется, как я использовал компьютер для своих рисунков. Я хочу поблагодарить своих наставников Джуди и Бруса Шервудов, посвятивших меня в электронные мистерии системы PLATO. Лишь в самое последнее время я научился использовать компьютер хотя бы примерно с той же лёгкостью и свободой, что и перо. На вклейке помещён ряд цветных фотографий поверхностей, нарисованных компьютером в стиле, намеченном в этой книге. Они были получены Донной Кокс и Реєм Идашаком на машинах, предоставленных в их распоряжение фирмой «Электроник имиджинг лаборатории» и Национальным центром по приложениям суперкомпьютеров при Иллинойском университете. В постскрипуме в конце книги, носящем несколько технический характер, рассказана история этих картинок.

Глава 3 даёт обзор принципов рисования в перспективе с точки зрения проективной геометрии. Её сжатый и дидактический стиль позаимствован из начертательной геометрии. В центре внимания – три элементарные задачи, с которыми сталкивается рисовальщик, рисуя в перспективе от руки. Об этих задачах и о различных их решениях я узнал от Нормы Макфарланда в рамках Программы изучения второго предмета для сотрудников Иллинойского университета. Будучи в течение семестра гостем на Факультете промышленного дизайна, руководимом Эдом Загорским, я познакомился с художественной дисциплиной, состоящей в тесном родстве с начертательной топологией. Бесценные уроки черчения, преподанные мне Вивиян Фолкнер-Кинг, побудили меня перерисовать большую часть моих старых рисунков, а некоторые из них вообще скомпоновать заново.

Для полноты я добавил раздел о неперспективном, так называемом «инженерном» черчении, которое – к сожалению – до сих пор доминирует в руководствах по математическим дисциплинам. Этот стиль с его нелогичными искажениями был когда-то разработан для передачи мет-

рической информации от конструктора к рабочему у станка. Системы автоматизированного проектирования справляются сегодня с этим гораздо лучше, а с появлением компьютерной графики получение перспективных изображений стало занятием, доступным каждому. С некоторыми колебаниями я также включил в книгу раздел о светотени. Несмотря на многие часы внимательного изучения работ Эшера, Дюрера и Дали, я не думаю, что овладел техникой светотени настолько хорошо, чтобы обучать ей.

В этой главе больше, чем в остальных, я пытался говорить на языке художников и дизайнеров. Хотя главная цель этой книги состоит в том, чтобы убедить собратьев-топологов рисовать картинки, иллюстрирующие их работы, я надеюсь, что она вдохновит и художников на изучение топологии и приложение своих талантов к этой удивительно зрелищной дисциплине.

Глава 4—это краткий рассказ об оптической иллюзии, на которой основаны некоторые из наиболее известных гравюр Морица Эшера. Здесь она служит введением в дифференциальную геометрию пространств постоянной кривизны. Вначале я распространял эти рисунки как геометрические диковины. Долгое время я думал, что естественным жилищем для невозможного угольника служит линзовое пространство. Приведённым в книге правильным рассказом я обязан многим коллегам, которые указывали мне на подобные ошибки и предлагали различные усовершенствования,—особенно Вольфгангу Хакену, Аллану Хэтчеру, Дейву Фриду и Джону Стиллвеллу.

Глава 5—это алгебраическая геометрия в наиболее элементарном и практическом смысле: просто спрашивается, как должна выглядеть картинка, изображающая алгебраическую операцию вроде возведения в квадрат или умножения. Опираясь на известные уже старшеклассникам факты из аналитической геометрии, позволяющие получить ответ над полем вещественных чисел, я изобразил тени четырёхмерных фигур, которые дают ответы над полем комплексных чисел. Здесь следует сказать, сколь многим я обязан классическим компьютерным мультфильмам Тома БэнчOFFа и Чарлза Страусса [Banchoff—Strauss 1977].

Особенно сильное влияние на эту главу оказала их трактовка поверхности Веронезе и графиков комплексных функций. Однако педагогический принцип, на котором основана вся книга и который здесь проявился особенно выпукло, принадлежит Бернару Морэну из Страсбурга. Рисунки без формул вводят в заблуждение, формулы без рисунков приводят в замешательство. Не знаю, выбрал ли бы Бернар именно эти слова, но так я понимаю его работы.

Глава завершается двумя приложениями изложенной выше графической и математической техники. Первое состоит в том, что я предлагаю иллюстрации к редко цитируемой и весьма наглядной части знаменитого трактата Уитни [Whitney 1941], в которой он даёт конкретное истолкование своей теории характеристических классов. Во втором

речь идёт о великолепной диссертации ученика Морэна Франсуа Аперы [Apery 1987]. Она перебрасывает мост от традиционной ручной графики к мощной компьютерной. К этому предмету я возвращаюсь в пост-криптуме.

Глава 6 – это в некотором смысле наш первый рассказ в картинках. В ней, который раз, повествуется – с новой расстановкой акцентов – об истории одной знаменитой задачи визуализации из дифференциальной топологии. Когда в 1977 г. я впервые попытался объяснить на своём топологическом семинаре для начинающих, как вывернуть сферу наизнанку, в моём распоряжении уже были статья Тони Филлипса в *Scientific American*¹ [Phillips 1966], рисунок из которой украшал обложку журнала, и снятый при поддержке Национального научного фонда компьютерный мультфильм Нелсона Макса [Max 1977]. Тем не менее для того, чтобы показать моим студентам то, что они фактически уже видели, потребовались значительные усилия и многократные обсуждения у доски. Через некоторое время, однако, выяснилось, что для того, чтобы продемонстрировать выворачивание, хватает нескольких рисунков тушью, уместающихся на одной странице, см. картинки 13 и 8 в этой главе.

Замысел этих картинок возник из целой совокупности теорем о классификации превосходных (в смысле Уитни) отображений [Francis–Troyer 1977; 1982]. Поэтому показ выворачивания киста наизнанку можно сделать настолько строгим, насколько того требует ваш вкус. В конце концов Бернар сам предложил аналитическую параметризацию для этой замечательной деформации поверхности (см. [Morin 1978]). Надеюсь, и вы признаете наличие тесной связи между топологией, изобразительным искусством и аналитической геометрией, по крайней мере в этом необыкновенном случае.

Глава 7 была сперва сиротой. В ходе изучения предложенной Хэтчером и Тёрстоном схемы поиска образующих и соотношений в группе классов преобразований произвольной поверхности я нарисовал несколько картинок для нашего «Риманова семинара». Они иллюстрировали некоторые детали из докладов Андрэ Марэна [Marin 1977], циркулировавших в то время в математическом самиздате². Уже и в первом, препринтном и уж, несомненно, в окончательном варианте статьи [Hatcher–Thurston 1980] из-за проведённой Хэтчером и Тёрстоном ревизии своих рассуждений мои рисунки стали по большей части ненужными. Тогда я решил, что возьмусь вместо этого за иллюстрирование топологии, стоящей за хорошо известным заданием группы классов преобразований кренделя (двойного тора). Комбинаторная теория групп – самая далёкая от моих талантов область из всех, куда я когда-либо рисковал забираться. Успехом этого предприятия я обязан своим наставникам Биллу Абикоффу, Джоун Бирман, Джону Рэтклиффу, Паулю Шуппу и особенно Вильгельму Магнусу, который щедро подарил

¹ Этот журнал издаётся у нас под названием «В мире науки». – *Прим. изд. ред.*

² В оригинале: samizdat. – *Прим. изд. ред.*

мне собрание своих трудов, сопроводив его бесчисленными часами терпеливых объяснений. Надеюсь, что рисунки, приведённые в этой главе, — лишь первая попытка обогатить в визуальном отношении эту абстрактную, но красивую математическую дисциплину и что за ней последуют попытки других.

Глава 8 рассказывает об одном расслоённом узле и тем самым принадлежит к геометрической топологии. Так как этот узел — главный герой рукописи Тёрстона [Thurston 1977; 1982], мой рассказ относится и к более широкой области геометрии и топологии малых размерностей. Во всяком случае, этот рассказ снова перед вами, с теми рисунками и отступлениями, которые не вошли в его первую публикацию в журнале *Monthly* [Francis 1983]. Эта статья была пробным шаром, поиском стиля изложения, пригодного для книжки с картинками. Превосходные советы главного редактора журнала Пола Халмша и четырёх рецензентов моей статьи (два из которых мне известны, а два — нет) и доброжелательные замечания читателей помогли выкристаллизоваться тому жанру, который я называю *рассказом в картинках о топологии*.

Не думаю, что рукопись этой книжки с картинками была бы когда-нибудь закончена, если бы не подбадривание и конструктивная критика друзей, читавших её, и не настойчивость моего издателя. Она осталась бы сплошной невразумительной путаницей, если бы не настоящий поток красных чернил, за который я буду вечно благодарен Иэну Стюарту. С этой книгой связаны и мои более старые долги. Ранние и неуклюжие варианты представленных здесь идей я подсовывал участникам семинара «Геометрическое попури», которые добросовестно их анализировали: Ралфу и Стефани Александерам, Феликсу Альбрехту, Дику Бишопу и Дейву Бергу. Весьма необычную поддержку, заслуживающую особого упоминания, оказал мне Херманн Рюсиус из Энсхеды (Голландия). Торговец тканями по профессии, геометр-самоучка и конструктор математических моделей, он прибыл в Урбану в буран зимой 1979 года и уехал со следующим бураном. В промежутке он фотографировал пыльные гипсовые модели алгебраических поверхностей, изготовленные в прошлом столетии лейпцигским издательством «Шиллинг» и лежащие сейчас погребёнными в стеклянных ящиках Альтгелда Халля. Мы провели вместе много вечеров, обсуждая наши дела. Впоследствии, когда подошло время писать о моих картинках, а я никак не мог выбрать для себя подходящую аудиторию, я мысленно усадил перед собой г-на Рюсиуса и адресовал свои объяснения ему.

И, разумеется, я не смог бы заниматься подобным делом, требующим полной сосредоточенности, в течение столь долгого времени, если бы не кроткое терпение и ободряющая поддержка жены и детей.

Когда при подготовке этой книги к печати возникали критические моменты, квалифицированную помощь оказывали мне многие старые и новые друзья из цеха книгопечатников. Особая моя благодарность — редакторам Робу Торопу и Барбаре Томпкинз из издательства «Шпрингер», Кэрол Эппел — старшему редактору издательства Иллинойсского

университета, а также Ларри Лутцу, Карлу Киблеру и их коллегам из типографии Иллинойского университета, где отблески электронных печатающих устройств мерцают на почтенных монотипах и запах фотохимикалий смешивается с ностальгическим ароматом расплавленного свинца.

Урбана, Иллинойс
сентябрь 1986 г.

Джордж К. Франсис



[На этой живописной фотографии, присланной Дж. Франсисом переводчику, автор книги запечатлён в своей компьютерной лаборатории. По стенам развешены гравюры Эшера и собственные творения Франсиса. Перев.]

Начертательная топология

Начертательная топология, тёзка *начертательной геометрии*¹, точно так же служит современной топологии, как её предшественница служила геометрии девятнадцатого столетия. В одиннадцатом издании «Британской энциклопедии» Хенричи определяет начертательную геометрию как ветвь геометрической науки, «которая занимается методами задания тел и других трёхмерных фигур при помощи рисунков, лежащих в одной плоскости». Тщательность, с которой этот предмет когда-то преподавали, оправдывалась тем, что он применялся при выполнении точных архитектурных и инженерных чертежей. Сначала фотография, а затем современные системы автоматизированного проектирования резко уменьшили надобность его изучения в учебных заведениях. В то же время широкое распространение топологии в нашем столетии, как чистой, так и прикладной, привело к накоплению довольно солидного запаса основных примеров и разных способов их описания. «Начертательная топология» – подходящее название для науки, занимающейся их систематическим изучением.

Отрывать эти примеры от аналитических истоков и подавать их под видом «геометрии куска резины» – значит оказывать плохую услугу единству математики. Со времён Декарта запись геометрической информации на таком универсальном математическом языке, как алгебра, была необычайно полезным средством точного выражения мысли и «экономии мышления». Тем не менее в такой записи что-то безвозвратно теряется. Задача начертательной топологии состоит в том, чтобы раскрывать допускающие наглядную демонстрацию «секреты», столь часто запрятанные в алгебраических стенограммах. Для иллюстрации того, как это делать систематически, я дам набросок теории Уитни и Тома, изучающей типичные виды поверхностей, расположенных в пространстве или отображённых на плоскость. Графическими элементами моего метода будут изображения канонических алгебраических форм, ассоциированных с поверхностями *общего положения*. Они *устойчивы* в том смысле, что небольшие возмущения («швеления») их аналитического задания или физического представления, например на экране компью-

¹ В оригинале descriptive topology и descriptive geometry соответственно. Поскольку второй термин традиционно переводится на русский как «начертательная геометрия», мы решили и первый перевести таким же образом. – *Прим. перев.*

тера, не меняют их качественно. Обстоятельное введение в математическую теорию устойчивых отображений и их особенностей вы найдёте в книжке Голубицкого и Гийемина [Golubitsky–Guillemin 1973].

Седло в коробке (картинка 1)

Первая наша задача будет заключаться в том, чтобы графически изобразить *гиперболический параболоид*, заданный уравнением $Z - XY = 0$. Эта поверхность, имеющая форму седла, постоянно подвергается испытанию художественные способности преподавателей математического анализа. Вот несколько подходов к этой задаче. Первый: перепишите уравнение, придав ему более повелительное наклонение: пусть $Z = XY$. Этим координате Z точки приписывается значение произведения её координат X и Y . Теперь подойдите к этому произведению асимметрично, рассматривая первый сомножитель как параметр гладкого перехода от одной наклонной прямой в пространстве к другой. Иначе говоря, представьте себе, что прямая $Z = tY$ в плоскости $X = t$ поворачивается вокруг оси X , в то время как эта плоскость движется, оставаясь параллельной самой себе, в направлении X . На рис. 1(11) и 1(12) седло изображено «подвешенным» внутри куба. Вытяните масштаб в направлении X по сравнению с двумя другими, и у вас получится лента, перекрученная на четверть оборота, как на 1(21) и 1(22). [Напомним, что сокращение $n(ij)$ отсылает к части картинки n (текущей главы), находящейся в i -й строке и j -м столбце. При ссылке на картинку из другой главы сначала идёт номер главы (отделённый от номера рисунка двоеточием). Таким образом, лента Мёбиуса в правом нижнем углу картинки 9 гл. 6 именуется 6:9(34).]

Если поверхность можно рассматривать как множество последовательных положений некоторой кривой, движущейся в пространстве, то говорят, что она *порождена* этой кривой. Польза от такого понятия при геометрическом представлении поверхности – на рисунке или в виде модели – тем больше, чем меньше сложность порождающей кривой и её движения. Если порождающая кривая – это прямая линия, то поверхность называется *линейчатой*. Так как в предыдущем анализе вы можете поменять местами X и Y , то получить гиперболический параболоид посредством движения прямой можно двумя способами. Это *дважды линейчатая поверхность*.

Переверните уравнение так: $XY = Z$, и вы скажете, что точка (X, Y) обязана лежать на гиперболе, форма которой определяется текущим значением Z . Когда Z меняется от -1 до $+1$, две ветви гиперболы сближаются, затем соприкасаются, образуя в этот момент две пересекающиеся прямые, и вновь расходятся, вписываясь в асимптоты «с другой стороны» (рис. 1(31)). Будучи «замороженным» в пространстве-времени, это движение образует седло 1(32). Обратите внимание на четыре места (показанные стрелками), где контур поверхности касается лежащих на ней кривых.

Седло в барабане (картинка 2)

Чтобы изобразить гиперболический параболоид другим способом, перейдем к полярным координатам:

$$X = r \cos t,$$

$$Y = r \sin t,$$

$$Z = 0.5 r^2 \sin(2t) = a(t) r^2 = b(r) \sin(2t).$$

Эти формулы описывают два пути порождения седла в зависимости от того, какой из циклов – по r или по t – будет внутренним, а какой – внешним¹. Если в качестве параметра взять t , то коэффициент a при r^2 меняется по синусоиде от -0.5 до $+0.5$, когда t растёт от 0 до π . Следовательно, вертикальная парабола делает своими ветвями «мах» сверху вниз, совершая полуоборот вокруг своей оси симметрии. Обратите внимание на то, что на предварительном каркасе 2(11) имеется нежелательная тройная точка. Понятно, как я избавился от этого совпадения, срисовывая 2(12) с 2(11)?

Если в качестве параметра взять r , то масштабный коэффициент b для погнутого обруча на цилиндре (рис. 2(21)) уменьшается до нуля по параболическому закону. Стрелки показывают на важные точки касания (пунктиром помечен контур поверхности). При своём стягивании к началу координат обруч замечает нашу поверхность (рис. 2(22)).

От выбора координат и способа записи аналитических выражений и уравнений существенно зависит, с какой скоростью и точностью читатель воспримет именно то, что автор хочет ему описать. Зачастую эффективность изложения требует отхода от общепринятого стиля аналитической геометрии. Особенно это верно в случае трёхмерных объектов и явлений. Возьмём, например, множество точек, удовлетворяющих полиномиальному уравнению $XY - Z = 0$. Если ваш читатель не распознает сразу эту поверхность по её уравнению или не примется переписывать уравнение, то он скорее всего представит себе следующий ломаный путь: идём от начала системы координат вдоль первой оси в точку на расстоянии X (алгебраическом, со знаком) от начала, затем вдоль отрезка, параллельного второй оси, и наконец, выходя из плоскости в пространство, – вдоль отрезка, параллельного третьей оси. Делаем это так, чтобы попасть в точку, координаты которой удовлетворяют требуемому соотношению.

Задача визуализации упрощается на одно измерение, если просто-напросто разделить переменные таким образом: $XY = Z$. Это наводит на мысль о семействе плоских гипербол, уложенных друг на друга так, что получается поверхность. Трюк с расщеплением размерности объемлющего пространства становится существенным при описании четырёхмерных явлений, как мы увидим позже, особенно в гл. 5.

¹ Речь идёт о соответствующей машинной программе. – Прим. перев.

Уравнение еще больше упростится, если «перевернуть» его: $Z = XY$. Теперь ясно, что поверхность представляет собой график числовой функции, заданной на плоскости. Тем самым также решена нетривиальная часть задачи параметризации поверхности. При рисовании поверхности набор параметрических уравнений заметно удобнее, чем её неявное задание. Это тем более справедливо, когда мы рисуем при помощи такого инструмента, как компьютер. Если ещё, может быть, и реально проверить каждый *пиксел* (pixel, от picture element – элемент картинки) в двумерной сетке, чтобы узнать, удовлетворяет он требуемому условию или нет, то в трёхмерном случае подобное требует уже героических быстродействия и памяти или очень изощрённого программирования.

С традиционным взглядом на трёхмерную декартову систему координат связана ещё одна проблема. Она касается нашего личного пространственного опыта, который ничего не говорит нам о телах, пронизанных в трёх направлениях тонюсенькими стержнями или тонко нарезанных тремя семействами параллельных плоскостей. Нетрудно представить себе двумерную фигуру, которую изобразили на миллиметровой бумаге и рассматривают сверху, как географическую карту. В пространстве же мы более склонны ориентироваться по наружным границам, например стенам комнаты, чем проследживать своё местонахождение от угла комнаты вдоль ломаной с прямыми углами. Поэтому в начертательной топологии гораздо лучше считать координаты функциями, измеряющими удаление точек от известных поверхностей отсчёта (кубов, цилиндров, сфер), заключающих в себе изучаемый объект, чем адресами в трёхмерной решётке.

Алгебраические манипуляции с формулами обычно позволяют перейти от «векторной» точки зрения к «позиционной». Вот два примера. Первый: тождество $A + t(B - A) = A(1 - t) + tB$ описывает « t -ю точку» на отрезке как точку, в которую мы приходим при движении вдоль вектора $V = B - A$, и как место, делящее путь от A до B в отношении $t:(1 - t)$. Во втором примере речь идёт о различных способах описания двукружного вращения:

$$x \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Левая часть говорит, что новое местоположение точки с исходными координатами (x, y) можно найти традиционным способом при помощи координатного репера, повернутого на угол t . Правая говорит, что точку (x, y) нужно сдвинуть на угол t в сторону точки $(-y, x)$ вдоль соединяющей эти две точки дуги окружности с центром в начале.

Зонтик Уитни (картинка 3)

Чтобы создать хороший «проект» топологической картинки, нужно представить себе в трёхмерном пространстве «штуковину», воплоща-

ющую ту математическую идею, которую вы хотите проиллюстрировать. Затем нужно нарисовать её таким образом, чтобы зритель мог без труда воспринять вашу идею. Картинка должна вызывать у зрителя представление о том же самом объекте без помощи длинного словесного описания.

Объекты, которые я имею в виду, устроены так: они состоят из кусков поверхностей, соединённых друг с другом вдоль кривых трёх видов. Одни кривые лежат целиком на картинке и замыкаются на себя или оканчиваются в особых точках. Относительно других подразумевается, что они продолжаются за границы рисунка. Проблема изображения на ограниченной картине неограниченных объектов возникает и в искусстве. Однако художественное решение, состоящее в продолжении всех линий вплоть до рамы картины, для топологии не вполне годится. Здесь лучше изобразить на картине лишь часть объекта, как бы заключив её в прозрачный контейнер. Представьте себе кусочек поверхности, лежащий в некоторой окрестности своей центральной точки. Для указания на то, что поверхность продолжается дальше, часто рисуют «рваные края». Но, во-первых, их труднее рисовать, а во-вторых, такие края чересчур выделяются и привлекают к себе слишком много внимания. Я предпочитаю пользоваться объемлющими окрестностями в форме прямоугольных коробок, сфер и цилиндров.

В конечном счёте любая картинка, нарисована она от руки или при помощи компьютера, состоит из (кривых или прямых) линий, соединяющих какие-то точки на плоскости, которую мы назовём *плоскостью рисунка*. Пусть P — точка на плоскости рисунка, соответствующая точке P' изображённого предмета (объекта), а D — маленький кружок в плоскости рисунка с центром в P . Если кусок нашего предмета, изображаемый этим кружком, сам выглядит наподобие круга, то говорят, что P — *регулярная точка*. Более точно, у вас должна быть возможность считать D' графиком некоторой гладкой (дифференцируемой) функции $u = f(x, y)$, где x, y — локальные координаты на D , а u измеряет расстояние от плоскости рисунка до объекта. Очевидно, все остальные точки внутри D также регулярны, и разумно говорить о *регулярной площадке* D' на объекте, соответствующей своему образу D на рисунке.

Для сложных объектов часто невозможно найти ракурс, при котором никакая важная деталь структуры объекта не была бы скрыта от глаз за видимой частью его поверхности. Одно из средств борьбы с этим состоит в том, чтобы удалить из объекта подходящий регулярный участок и создать тем самым *окно*, сквозь которое эта деталь будет видна на рисунке¹. Удаляемый участок должен быть регулярным для того, чтобы вы легко могли установить соответствие между кривыми, нарисованными на D , и кривыми на D' . Разумеется, если координаты на D и функция $f(x, y)$ не заданы явно, то априори нет никакого способа восстановить точное расположение участка D' в пространстве. Оно

¹ По поводу окон см. также пункт, посвящённый картинке 8:8. — *Прим. перев.*

должно быть ясным из всего контекста рисунка.

Позвольте мне теперь довольно подробно описать, с какого рода поверхностями мы можем «в норме» встретиться в пространстве. Это облегчит описание отклонений от нормы. Каждая точка *нормальной поверхности* является центром сферической окрестности, внутри которой поверхность представляет собой образ соответствующего отображения $(X, Y, Z) = F(r, t)$ плоскости в пространство. Здесь X, Y, Z — это (локальные) координаты в *пространстве образов (области значений)*, r, t — координаты в *плоскости прообразов (области определения)*, а F — *гладкое, собственное и устойчивое* отображение, определённое на одном или на не более чем конечном числе дизъюнктивных кругов (дисков) в плоскости прообразов. Напомню, что компоненты *гладкого отображения* имеют сколь угодно много непрерывных частных производных. В пространстве образов каждая предельная точка P' последовательности $\{F(P_i)\}$ точек-образов *собственного отображения* сама является образом $P' = F(P)$ некоторой предельной точки последовательности $\{P_i\}$ в плоскости прообразов.

Точное определение устойчивого отображения (см. [Golubitsky — Guillemin 1973]) опирается на понятие *топологии Уитни* в множестве всех гладких отображений одного данного пространства в другое. Неформально говоря, пусть $\delta(P)$ непрерывным образом сопоставляет всем точкам первого пространства (области определения) положительные вещественные числа. Два гладких отображения δ -*близки*, если в каждой точке P их значения, а также значения всех их частных производных отличаются не более чем на $\delta(P)$. *Устойчивое отображение* — это такое отображение, которое отличается от всех достаточно близких к нему отображений лишь на диффеоморфизм в пространстве образов и диффеоморфизм в пространстве прообразов.

Для наших теперешних целей достаточно знать, как выглядит образ устойчивого отображения поверхности в пространство в окрестности каждой точки. Если ни в какой (даже очень малой) окрестности данной точки он не выглядит как несильно изогнутый диск, то это *особая точка*. У устойчивого отображения могут быть три вида особых точек. В окрестности *двойной точки* поверхность выглядит как два куска листового материала, пересекающихся по так называемой *двойной кривой*. Окрестность *тройной точки* выглядит как три трансверсально пересекающихся «листа». Следовательно, тройные точки являются изолированными. «Четверные» точки, как легко понять, *неустойчивы*. После небольшого «шевеления» одного из листов четыре листа будут, пересекаясь, образовывать маленький тетраэдр. Двойные кривые либо замкнуты, либо уходят на бесконечность, либо обрываются на крае поверхности, либо же просто оканчиваются в точках весьма специального вида, которые называются *точками пинча*¹. Около точки пинча

¹ От английского pinch (шипик). Точки пинча называют также *вершинами*. — Прим. изд. ред.

поверхность выглядит как *зонтик Уитни*¹, изображённый на рис. 3(12). Стрелки на линейном каркасе 3(11) указывают на важные точки касания на контуре зонтика Уитни. Пинч – это третий вид устойчивой особой точки. Устойчивые отображения образуют плотное и открытое (в топологии Уитни) подмножество пространства гладких отображений поверхностей в пространство. Поэтому такие отображения считаются «общими», «типичными».

Нормальная поверхность имеет непрерывно поворачивающуюся (при движении точки по поверхности) касательную плоскость, определяемую следующим образом. Для точки P , не являющейся точкой пинча, и каждой из пар (r, t) параметров (числом до трёх) касательные векторы $\partial F/\partial r$ и $\partial F/\partial t$ в точке $P' = F(r, t)$ линейно-независимы и, следовательно, порождают плоскость. В тройных точках имеется три, а вдоль двойных кривых – два линейно-независимых нормальных направления к поверхности.

Сложнее дело обстоит около точек пинча, но и здесь ситуацию нетрудно описать, если воспользоваться канонической формой зонтика $(X, Y, Z) = (rt, r, t^2)$, которая выглядит примерно так, как изображено на рис. 3(22). Когда r переходит через нуль, парабола $r^2 Z - X^2 = 0$ в вертикальной плоскости «складывается», проходя через двойную линию, и снова раскрывается, по мере того как её плоскость движется вперёд вдоль оси Y . Можно посмотреть на дело и с другой точки зрения. В момент времени t мы имеем прямую $X - tY = 0$ в горизонтальной плоскости $Z = t^2$. При движении этой плоскости вдоль оси Z вниз и снова вверх прямая поворачивается. Зонтик также является линейчатой поверхностью.

Теперь ясно, что у касательных плоскостей к зонтику в точках, приближающихся к точке пинча, есть много предельных положений. На рис. 3(31) показано, как изготовить соответствующую бумажную модель, изогнув квадрат с разрезом и «сомкнув» края разреза через лист бумаги. На рис. 3(32) показано окно, которое «устраняет» точку пинча. Обратите внимание, что точка пинча находится на краю этого окна и что окно нельзя «продолжить» за точку пинча, поскольку вблизи неё наша поверхность изгибается в противоположных направлениях.

На языке топологии поверхность (или её часть) называется *вложенной* (в пространство), если она не имеет двойных точек. Поверхность 3(31) (вся) вложенная, равно как и взятые по отдельности плоскость и параболический цилиндр на рис. 3(21). Поверхность называется *погружённой* (в пространство), если каждая точка на ней находится внутри по крайней мере одного диска, лежащего на поверхности и вложенного в пространство². Этот случай имеет место во всех точках зонтика, кроме точки пинча. Поверхности 3(21) и 3(32) являются погружёнными. Более обстоятельно мы займемся этими вопросами в пятой главе.

¹ Другое название – *зонтик Картана*. – Прим. перев.

² Имеются в виду точки и диски в плоскости преобразов. – Прим. перев.

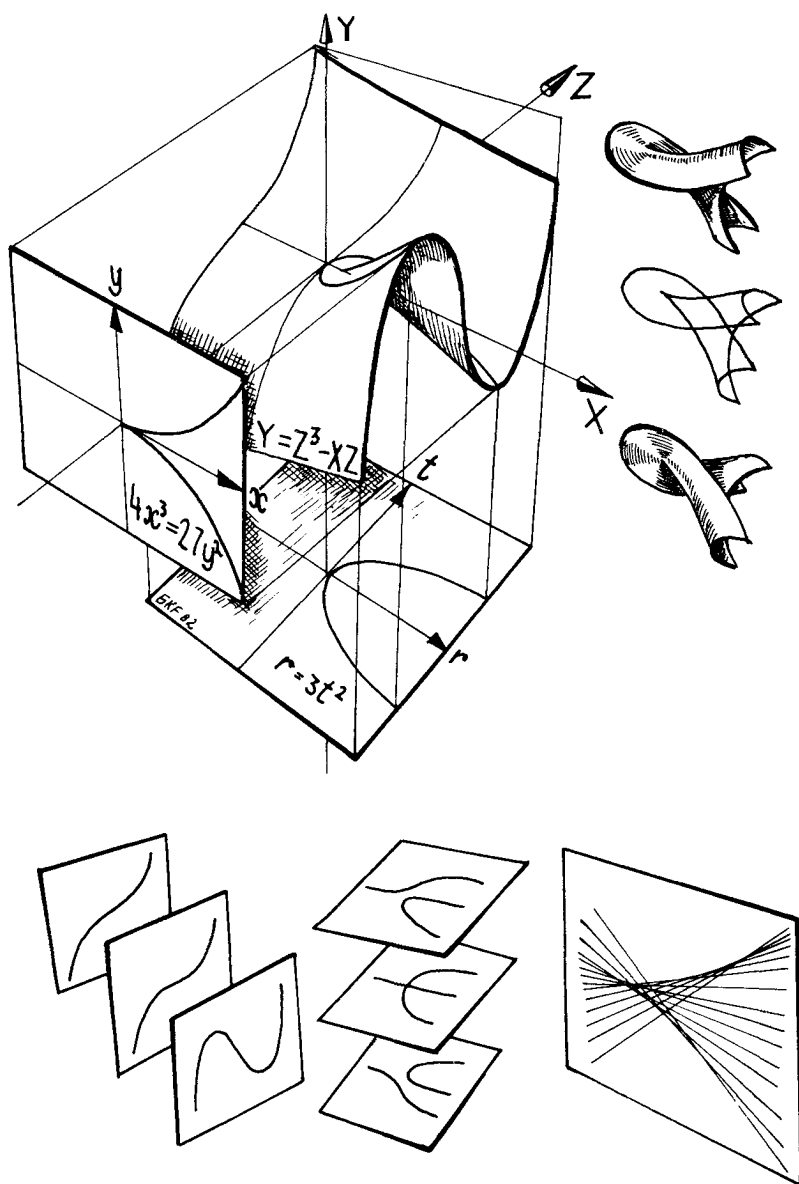
Сборка Кэли (картинка 4)

На то чтобы принять при рисовании в качестве основных форм нормальные поверхности, есть две топологические причины. Любое достаточно малое искажение устойчивого отображения, задающего такую поверхность, можно вернуть к его исходному виду при помощи *изотопии* объемлющего пространства. Другими словами, существует однопараметрическое семейство замен координат, устраняющее искажение. Кроме того, для любого гладкого отображения существует сколь угодно близкая устойчивая аппроксимация. Практический способ убедиться в неустойчивости какого-нибудь свойства поверхности состоит в том, чтобы устранить его при помощи малых возмущений параметризации поверхности.

Рассматривая изображения нормальных поверхностей в плоскости рисунка, также уместно привлечь теорию особенностей. Отображение F плоскости в пространство, задающее поверхность, взятое в композиции с проекцией на плоскость рисунка, становится отображением плоскости в плоскость, $(x, y) = \Phi(r, t)$. В зависимости от того, рассматриваете вы Φ как отображение плоскости rt параметров непосредственно в плоскость $xу$ рисунка или же как отображение, «пропущенное» через проекцию поверхности в пространстве, получаются технически несколько разные понятия устойчивости. Но для практических целей мы можем игнорировать это различие.

Там, где поверхность, изгибаясь, уходит из виду, мой взгляд (луч зрения) касается поверхности. Эта «кривая касания» называется *контуром*. На контуре отображение Φ имеет *особенность* типа *складки*. Сам контур тоже может пропадать из виду одним из следующих способов. Он может пройти под более близкой к наблюдателю частью поверхности. В таком случае контур следует рисовать трансверсальным (некасательным) к кромке этой более близкой части независимо от того, край это или тоже контур. Далее, контур может подойти к краю или к двойной кривой на поверхности; в таком случае он исчезнет, в последней своей точке касаясь этой кривой. Пример подобного пропадания контура из виду указан маленькой стрелкой на рис. 3 (21). На рисунках труднее всего изображать именно такие соединения двух разных типов кривых. Чтобы помочь глазу, представьте, что рассматриваемая поверхность обладает конечной толщиной. В таком случае на рисунке при слиянии контура с краем мы имеем линии разной толщины. Существует ещё «пуантилистский» стиль рисования, используемый, например, Тимом Постоном и Изном Стюартом [Poston–Stewart 1978], когда поверхность представляется множеством равномерно распределённых на ней точек. Контуры образуются там, где резко изменяется плотность точек на рисунке. Стиль Постона оказался очень удобен для моего рис. 2: 12 (12).

Наконец, контур может пропадать из виду в точке *сборки*, называемой так потому, что проекция контура на плоскость рисунка имеет



Картинка 4. Сборка Кэли.

остриё¹. Каноническую форму этой особенности иллюстрирует рис. 4(11). Кубическая поверхность $Y = Z^3 - XZ$ (поверхность Кэли) допускает параметризацию $F(r, t) = (r, t^3 - rt, t)$, если вы отождествите X с r , а Z с t . Ортогональная проекция на плоскость рисунка xy даёт отображение плоскости в плоскость $\Phi(r, t) = (r, t^3 - rt)$, у которого определитель матрицы первых частных производных (якобиан) равен

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (r, t)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -t & 3t^2 - r \end{vmatrix}.$$

Это отображение теряет регулярность вдоль параболы $r = 3t^2$, где его якобиан обращается в нуль. Эта кривая критических точек имеет своим образом $(x, y) = (3t^2, -2t^3)$ в плоскости рисунка полукубическую параболу $4x^3 - 27y^2 = 0$. Полукубическую параболу впервые изучал в 1660 г., на заре исчисления бесконечно малых, Уильям Нейль, который с помощью инфинитезимальных методов нашёл её длину.

То что расположение контура на поверхности зависит от вашей точки зрения, ясно видно из рис. 4(11).

Последовательные сечения кубической поверхности параллельными плоскостями во всех трёх направлениях обладают интересными двумерными интерпретациями. Плоскости, ортогональные к оси X (рис. 4(21)), демонстрируют элементарную «катастрофу» превращения функции с двумя экстремумами в функцию без экстремумов. В горизонтальных сечениях, ортогональных оси Y (рис. 4(22)), вы видите *бифуркацию камертона* из механики. Вертикальные сечения, параллельные плоскости рисунка, представляют собой прямые линии (рис. 4(21)), огибающая которых имеет остриё. Таким образом, эта кубическая поверхность — тоже линейчатая.

Последний пример важен для восстановления поверхности Кэли по её линейному каркасу в плоскости рисунка. На рис. 4(12) изображены правая (сверху) и левая (снизу) сборки, отвечающие одному и тому же «контурному рисунку» (в центре). У нашей кривой с остриём есть поле касательных к ней ненулевых векторов $\langle 1, -t \rangle$. Равномерно «развернув» эту структуру во временном направлении и растянув каждый вектор в $s = r - t^2$ раз, мы придём к такому отображению в трёхмерное пространство:

$$F(s, t) = (3t^2, -2t^3, t) + s \langle 1, -t, 0 \rangle.$$

Оно получается из исходной параметризации кубической поверхности Кэли при помощи замены координат в плоскости параметров: $(s, t) = (r - 3t^2, t)$. Это подсказывает нам, как, изогнув поверхность Кэли (при помощи изотопии), придать ей форму стандартного седла. Про-

¹ Буквальное значение английского термина cusp (сборка) — это «остриё». — Прим. перев.

деформируем координату X , заменив её на $X - hZ^2$, $0 \leq h \leq 1$. Когда h примет значение 1, выражение $Y + XZ - Z^3$ превратится в $Y + XZ$.

Точка пинча – точка ветвления (картинка 5)

Итак, вот элементы начертательной топологии: нормальные поверхности со своими граничными кривыми и двойными линиями, тройными точками и точками пинча и их рисунки с контурами и остриями. Визуально-устойчивые соотношения между парами этих элементов в большинстве своём уже были отмечены выше. Остальные вам следует рассмотреть самостоятельно. Например, как изображать на плоскости рисунка кривую на поверхности, пересекающую её контур?

Часто упускают из виду ещё вот какой момент. В случае общего положения точки пинча находятся в обыкновенных точках контура. Чтобы увидеть это, параметризуйте окрестность точки контура следующим образом: $F(r, t) = (r, t^2, u(r, t))$ и вспомните, что на зонтике Уитни нормальный вектор обращается в нуль только в точке пинча. Вычислим нормальный вектор, взяв векторное произведение двух касательных векторов к поверхности:

$$\frac{\partial F}{\partial r} \times \frac{\partial F}{\partial t} = \langle -2tu_r, -u_t, 2t \rangle.$$

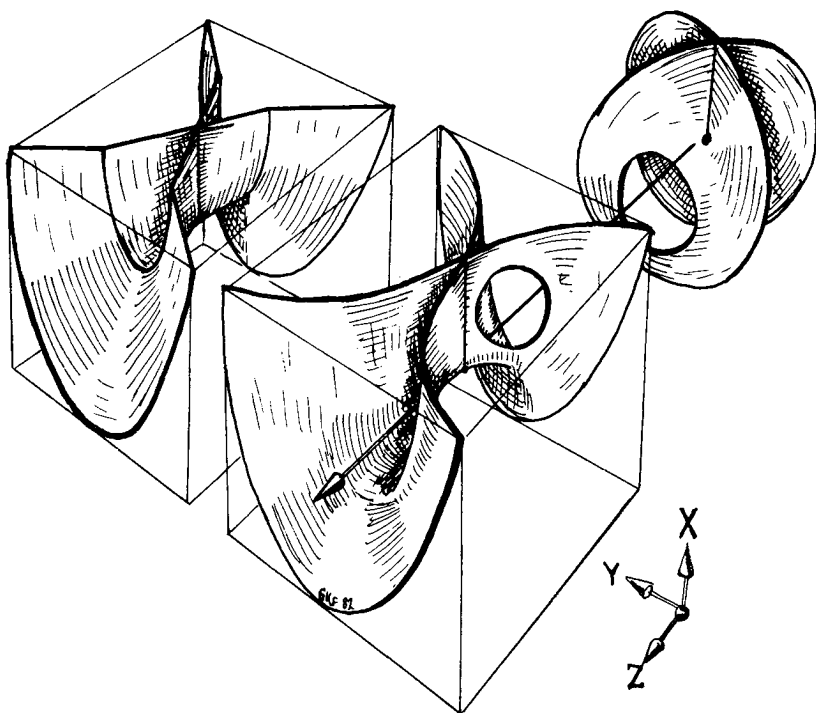
Отсюда следует, что если в множестве значений функции F появляется точка пинча, то это происходит при $t = 0$, а значит, она лежит также на контуре¹.

В стандартных картинках, изображающих точки ветвления, имеющиеся на графиках комплексных функций, это правило почти всегда нарушено. Понять, как точки пинча связаны с точками ветвления и, в частности, убедиться, что точками пинча обладают тени римановых поверхностей типа $z = \operatorname{Re} \sqrt{x + iy}$, можно следующим образом. Изотопия

$$(X(t), Y(t), Z(t)) = (X + tZ^2, Y - \frac{1}{2}tY, Z)$$

переводит график $(X, Y, Z) = (u^2 - v^2, 2uv, v)$ в канонический зонтик (u^2, uv, v) (при $t = 1$). Стандартное изображение точки ветвления приведено на заднем плане нашей составной картинки (рис. 5(13)). Этот рисунок не является визуально-устойчивым. Должен ещё присутствовать маленький контур с тремя остриями, имеющий форму *дельтоиды*, характерной для *эллиптической омбилической катастрофы* Ренэ Тома [Thom 1972]. Если вы продолжите поверхность 5(12) вверх, то её контур замкнётся в

¹ Но отсюда ещё не следует, что эта точка контура – обыкновенная. – Прим. перев.



Картинка 5. Точка пинча -- точка вствления.

третьей из точек острия дельтоиды. Недифференцируемая поверхность 5(11) демонстрирует переход от зонтика к римановой поверхности. Она послужила моделью для изображения гладкой поверхности в центре.

Здесь, а также на других рисунках этой главы я оставил на виду часть вспомогательных линий. О том, как их целесообразно проводить и как затем превращать линейный каркас в рисунок, рассказывается в следующей главе.

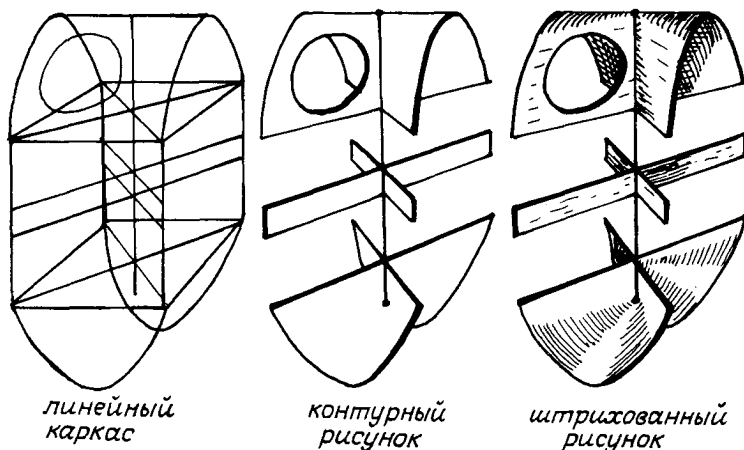
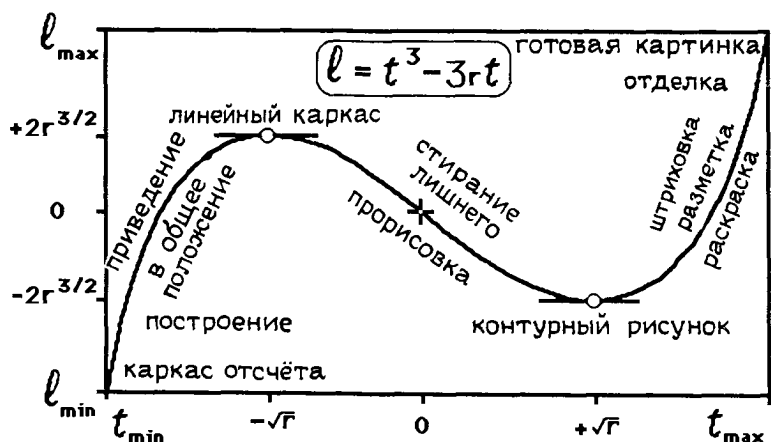
Идея и воплощение

Эта глава — о разработанном мною методе, с помощью которого нарисованы все картинки в этой книге. Разумеется, он представляет собой сплав многих технических приёмов, которым я научился у других иллюстраторов. На первые попытки рисовать поверхности меня вдохновила теория катастроф. Многие её модели, предложенные Томом и Зиманом, были чисто описательными: они представляли собой метафоры и другие фигуры речи¹, опирающиеся на геометрию тех или иных многочленов. Такие модели очень привлекательны — они экономичны и с ними просто работать. Поэтому, описывая свой метод рисования, я воспользуюсь подобной геометрической метафорой. Если вы знакомы с историей исчисления бесконечно малых в том виде, в каком её излагает, например, Карл Бойер [Boyer 1949], то вы также заметите, что я в долгу перед схоластами Суинсетом и Оремом. В своей теории форм, предтече декартовой геометрии, они строили графики некоторых неточных «интенсивностей», откладывая их по широте (ординате) против соответствующей долготы (абсциссы), измерявшей продолжительность или протяжённость.

Кубическая метафора (картинка 1)

Эта модель имеет форму кубика $l = t^3 - 3rt$ в промежутке $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$. Коэффициент 3 и тот факт, что кубика проходит через начало координат $l = t = 0$, не имеют особого значения и лишь упрощают арифметику. Широта $l - l_{\min}$ качественно измеряет плотность линий, проведённых на рисунке на каждый данный момент времени; при этом мы начинаем с *каркаса отсчёта* (при $l_{\min} < 0$) и кончаем готовой картинкой (при $l_{\max} > 0$). Каркас отсчёта представляет собой какую-нибудь хорошо знакомую фигуру (куб, цилиндр, сферу, тор) или, для очень простых рисунков, просто контур изображаемого предмета. Хорошего определения *плотности линий*, измеряемой шириотой, пока нет. Эта плотность отвечает интенсивности субъективного впечатления; например, две линии разной толщины воспринимаются как имеющие меньший вес, чем две линии равной толщины.

¹ Точнее, в работах Тома речь идёт о языковых универсалиях. *Прим. ред.*



Картинка 1. Кубическая метафора.

Последовательные стадии создания картинки «нумеруются» продолжительностью $t - t_{\min}$. Управляющая переменная r задаёт общие усилия, потребные для выполнения рисунка. Простые картинки кодируются «скучными» кубиками с $r \leq 0$. В этом случае точка перегиба в начале координат представляет рисунок, который как раз отвечает своему предназначению. Точки на графике, находящиеся справа, а значит выше, соответствуют рисункам с дополнительной *отделкой*: штриховкой, прорезанными окнами, разметкой, раскраской. Чем меньше значение управ-

ляющего параметра r , тем короче полное время $t_{\max} - t_{\min}$, которое требуется, чтобы закончить рисунок.

Интересные картинки моделируются «интересными» кубиками с $r > 0$. На поверхности Кэли 1:4(11) мы тем самым сдвинулись вправо. По производной $dl/3dt = t^2 - r$ видно, что количество линий, добавляемых к каркасу, возрастает с положительной скоростью, пока мы не приходим – в точке локального максимума – к *линейному каркасу*. Кроме вспомогательных линий этот каркас включает в себя все граничные кривые, контуры, двойные линии, тройные точки, острия и точки пинча, окна и, наконец, линии, которые в конце будут служить направляющими линиями штриховки. Все эти линии и точки должны быть общего положения (если это в принципе возможно), чтобы в дальнейшем избежать визуально двусмысленных совпадений. Линейный каркас служит также «подложкой» при копировании рисунков. В случае когда изменяющийся объект иллюстрируется серией рисунков, линейный каркас используется как шаблон. Непрерывность зрительного впечатления, достигаемая за счёт использования общего линейного каркаса, гарантирует, что все различия между последовательными рисунками имеют непосредственное отношение к делу.

На следующей стадии плотность линий вновь уменьшается. Со схемы удаляют вспомогательные линии. *Скрытые (невидимые)* линии стирают или дают пунктиром (точками или чёрточками), либо же выделяют видимые линии, утолщая их по сравнению со скрытыми. Это иногда называют *прорисовкой*. При желании вы можете остановиться в точке перегиба кубической модели, сохранив несколько «лишних» линий, помогающих глазу воспринять рисунок. Или же вы переходите к точке локального минимума, представляющей *контурный рисунок*. Хороший контурный рисунок состоит из минимального числа линий, ещё достаточных для узнавания предмета. Контурный рисунок в известном смысле лучше всего годится в качестве математической иллюстрации, поскольку на нём имеется максимум свободного места для «отделки», которую будет производить пользователь.

По мере того как конструкция данной конкретной картинки упрощается, становится более стилизованной и более запоминающейся, подготовительные шаги постепенно становятся излишними и контурный рисунок делается несколькими росчерками пера. Понаблюдайте, как специалист по теории узлов тремя безошибочными линиями рисует узел-трилистник. Соблазнительно применить зиманову диалектику из теории катастроф также и к моей кубической модели рисования картинок. Рассмотрим, например, петлю гистерезиса. Часто уже при первых пробных карандашных набросках происходит скачок: от запутанного линейного каркаса – к первому приближению к искомой картинке, минуя формальный контурный рисунок. А именно, добавляя к каркасу линию за линией, намечая тени, которые создают впечатление кривизны и «гасят» скрытые линии, я внезапно могу увидеть удовлетворительный набросок. Я обвожу его чернилами, не стирая пока вспомогательных

линий, чтобы вместе с ними не исчез и сам рисунок. Затем копирую полученное первое приближение к контурному рисунку. Если оно оказывается неудовлетворительным, то совершаю прыжок обратно, с тем чтобы построить лучший линейный каркас,— и петля замкнулась.

Основные примеры поверхностей (картинка 2)

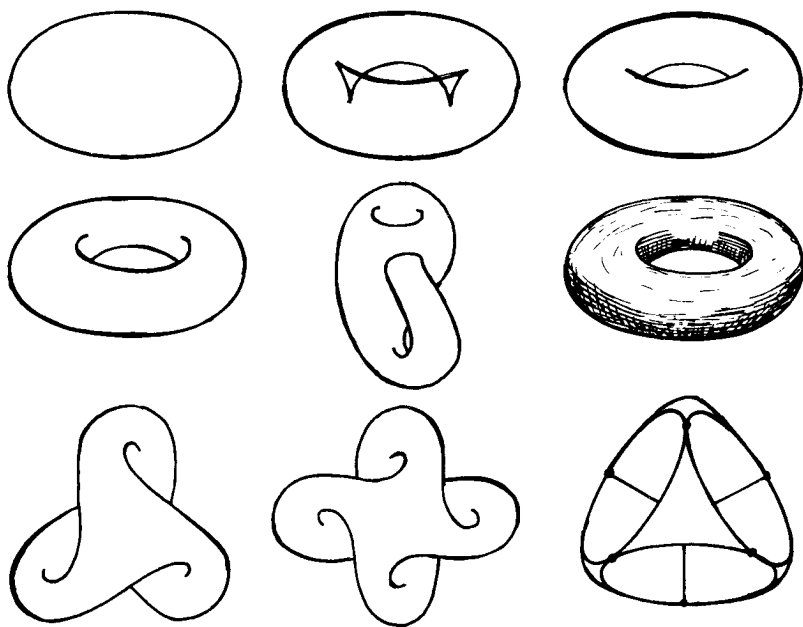
Более счастливый разрыв случается при обращении петли гистерезиса (анастрофа¹). Простой набросок позволяет иногда перепрыгнуть к хорошему контурному рисунку. Примером может служить рекомендация Джона Стиллауэлла, как рисовать сборки (см., например, с. 57 его книги [Stillwell 1980]). Овал 2(11) превращается в элегантный тор 2(21) при помощи всего лишь двух дополнительных линий. На линейном каркасе 2(12) контур, соответствующий дырке тора, есть замкнутая кривая с двумя «ласточкиными хвостиками». Если убрать у каждого из этих ласточкиных хвостов невидимое остриё, то получится другой линейный каркас—2(13). Обратите внимание на то, что более длинная из двух контурных линий Стиллауэлла на рис. 2(21) продолжается за острия, подсказывая, как нужно делать штриховку. Это соглашение хорошо работает, например, в случае характерных изображений бутылки Клейна 2(22), поверхности Боя 2(31), поверхности Морэна 2(32) и римской поверхности 2(33). Вы должны сделать эти контурные рисунки «объёмными» при помощи карандашной штриховки, «углубив» соответствующие области около сборок, как это подсказывается завитушками Стиллауэлла.

Трезубр (картинка 3)

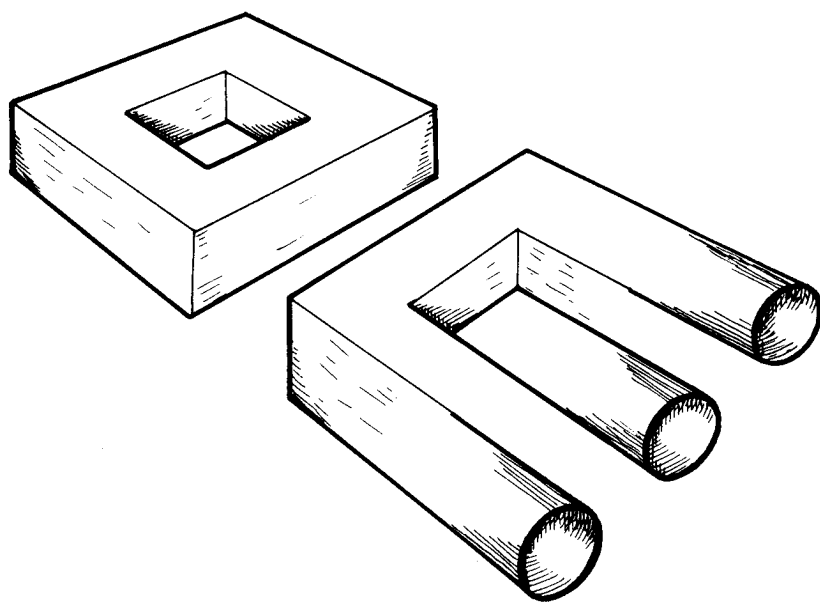
При построении линейного каркаса для поверхности бывает так, что, уверенно наметив граничные кривые, вы никак не можете сообразить, где же должны пройти контуры. Чтобы получить правдоподобный ответ, я беру кусочно-плоский вариант поверхности и затем сглаживаю углы. Каждая линия каркаса для такой *многогранной поверхности* представляет собой ребро, ограничивающее какую-то грань или разделяющее две и более грани. Будучи плоской, каждая грань такого многогранника либо целиком видима, либо целиком невидима. Простое ребро разделяет только две грани, одна из которых может быть скрытой.

Преподаватели черчения рекомендуют для изображения видимых рёбер, принадлежащих скрытым граням, использовать более жирные линии, чем для рёбер, которые просто разделяют две видимые грани. Я

¹ Анастрофа (или инверсия)—это обращение обычного синтаксического порядка слов для усиления выразительности речи.—Прим. изд. ред.



Картинка 2. Основные примеры поверхностей.



Картинка 3. Трезубр.

буду называть их соответственно *контурными* и *фасадными рёбрами* многогранника. Указанное графическое соглашение моделирует одно явление из практической оптики. Когда наблюдатель подносит реальный предмет поближе к глазам, чтобы лучше видеть его, или пристально вглядывается в неподвижный объект, контурные рёбра сильнее воздействуют на сетчатку глаз, чем фасадные. Дело в том, что первые отделяют друг от друга передний план и фон, световой контраст между которыми больше, чем разница в освещённости смежных видимых граней. При сглаживании углов кусочно-плоской поверхности контурные рёбра превращаются в контурные линии, а фасадные исчезают. Однако они полезны как ориентиры при штриховке.

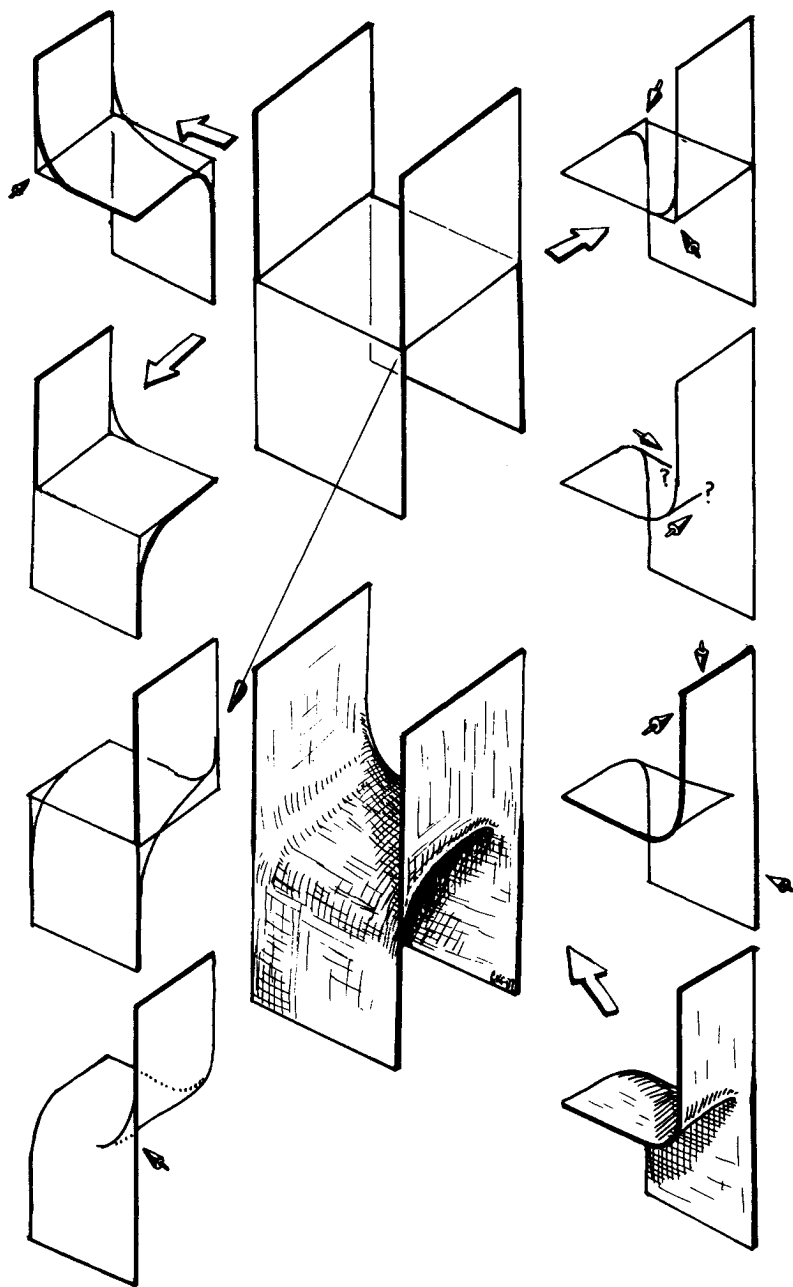
Прекрасным резюме этого урока служит забавная оптическая иллюзия – *трезубр*¹ (см. картинку). Анализ контуров выявляет три пары контурных отрезков, которые касаются граничных окружностей. Лишь четыре из этих шести отрезков являются контурными рёбрами изображённого слева многогранника; по двум из них стыкуются видимые грани, что невозможно. Два оставшихся контурных отрезка вопреки логике являются продолжением фасадных рёбер.

Сглаживание полиэдрального седла (картинка 4)

Представленное на этом рисунке графическое преобразование кусочно-плоского седла (в центре сверху) в гладкую поверхность, натянутую на ту же граничную рамку (в центре снизу), даёт пример, в котором фигурируют нетривиальные контуры. У квадрата – горизонтальной грани седла 4(12) – имеются два фасадных ребра (слева) и два контурных (справа). В правой колонке показано, как при «слиянии» этих двух контурных рёбер образуется сборка. Сначала выделим фрагмент 4(13) рассматриваемого угла и скруглим (новые) края. При этом появятся два контура (рис. 4(23)), которые в данном случае не могут плавно слиться с краем или друг с другом. Поэтому, смыкаясь, они образуют остриё (рис. 4(33)). Для простоты и визуальной согласованности различных частей рисунка я не пользовался здесь перспективой. Однако линейные каркасы, основанные на прямоугольных каркасах в аффинной проекции, страдают тем недостатком, что приводят к иллюзии кубов Неккера: «Что спереди, а что сзади?». Утолщая передние линии, как на рис. 4(33), можно дать понять, какое видение подразумевается.

С другими тремя углами (см. левую колонку) графических проблем меньше. Там, где соединяются два фасадных ребра, вообще не образуется контуров (рис. 4(21)). На каждом из рисунков 4(11), 4(31) появляется

¹ В оригинале неологизм *triprong*, смысл которого легко читается: «tri-» означает «трёх-», а «prong» – «зубец». В заключительном же «gong» явственно слышится «wong» – ложный, неправильный. Передающий игру слов русский перевод придуман С. В. Чудовым. – *Прим. изд. ред.*



Картинка 4. Сглаживание полиэдрального седла.

лишь одна контурная линия, и в обоих случаях она плавно сливается с граничной линией. На предварительных набросках я иногда умышленно заменяю такие соединения контура с краем сборками (рис. 4(41)), чтобы избежать невозможностей в духе Эшера.

Шутовской колпак (картинка 5)

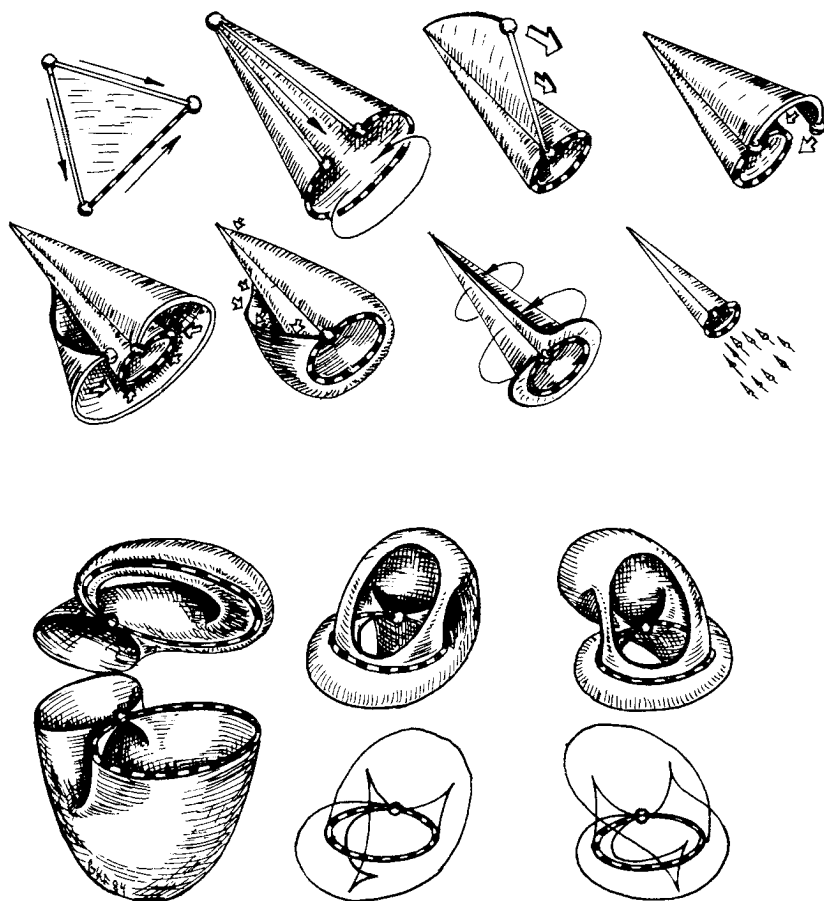
Приём построения рисунка по частям полезен также и в том случае, когда вы не знаете заранее, как будет выглядеть то, что у вас получится. Хорошим примером будет попытка изобразить *шутовской колпак*¹. Эта топологически полиэдральная поверхность является абстрактным клеточным комплексом с одной вершиной, одним ребром и одной гранью, который получается, если отождествить между собой все три стороны какого-нибудь треугольника, ориентированные (несогласованно!), как показано на рис. 5(11). Две из трёх пар сторон в этом треугольнике легко сшиваются друг с другом и образуют конический колпак 5(12), обычно связываемый с именем великого схоласта Дунса Скота². Чудакам-топологам хочется, чтобы вы ещё приклеили круглый край колпака к прямому шву.

Из этой инструкции совершенно неясно, однако, как выглядит такой шутовской колпак, как не очевидно и то, что он вообще «обитает» в трёхмерном пространстве. Наша первая визуализация использует лишь обычные топологические ингредиенты. Предположим, вы подтащили шов в ту же плоскость, в которой лежит край колпака, вытянув при этом треугольный клапан в виде «паруса» (рис. 5(13)). Оберните «парус» вокруг конуса (рис. 5(14)) и завершите склеивание (рис. 5(21)). Получившийся в результате 2-комплекс 5(22) – ещё не дурацкий колпак. У него два лишних ребра – то, вдоль которого парус пришит к конусу, и свободное ребро паруса. Чтобы получить шутовской колпак, представьте, что парус двухслойный и открыт со стороны конуса, но зашит вдоль свободного ребра. Накачивая воздух в основание конуса, вы можете раздуть шутовской колпак до чего-то вроде 5(32). К сходной форме вы придёте, если согнёте конус 5(12) так, чтобы его вершина стала перекрестьем плоской восьмёрки (рис. 5(31)). (Колпаку 5(32) соответствует загиб в другую сторону.) Две граничные петли соединяет стандартная графическая конструкция – полусфера, которую, «защепив» посередине, превратили в полутор 5(41) с нулевым внутренним диаметром.

Теперь ясно, каким образом шутовской колпак оказывается *скеле-*

¹ По-видимому, такой перевод уже устоялся, хотя правильнее было бы «дурацкий колпак»: в оригинале – *dunce hat*. Это конический бумажный колпак, который надевали неуспевающим ученикам в виде наказания. – *Прим. перев.*

² Игра слов: по-английски первая часть фамилии великого схоласта Иоанна Дунса Скота (1264–1311) – *Duns* – произносится так же, как *dunce* (болван); см. предыдущее примечание. – *Прим. перев.*



Картинка 5. Шутовской колпак.

том¹ для трёхмерного шара. Если вы станете слой за слоем покрывать краской эту поверхность, нанося внутри похожего на улитку углубления слой потоньше, чтобы заполнить его побыстрее, то в конце концов получится гладкий круглый шар. Говоря техническим языком, шар *сдавливается* на шутовской колпак. Однако сам шутовской колпак, очевидно, уже несдавливаем – нет ребра, с которого можно было бы начать «отъедать» грань. Фальшивый же шутовской колпак 5(22) с

¹ Топологи обычно употребляют термин «спайн» – транслитерацию (используемого в оригинале) английского spine (позвоночник, хребет). – Прим. перев.

однослойным парусом сдвливаем. Представьте себе, что он сделан из бумаги, которая не горит, а только тлеет. Подожгите колпак вдоль свободного конца паруса, чтобы он начал тлеть. Сначала он «съёжится» в конус (рис. 5(23)). Тот в свою очередь, начав тлеть со свободного ребра вдоль края (рис. 5(24)), через какое-то время съёжится в свою вершину.

Хотя полная биография шутовского колпака неуместна в этой главе, о некоторых его свойствах стоит упомянуть. Он является стягиваемым, но не сдвливаемым скелетом трёхмерного шара. Однако же шутовской колпак *1-сдвливаем*; это значит, что его декартово произведение на «одномерный шар» сдвливаемо. Вы можете представлять себе это произведение как «утолщение» поверхности в четвёртое измерение. Зиман высказал гипотезу, что всякий стягиваемый 2-комплекс 1-сдвливаем [Zeeman 1964]. Маршалл Коэн показал, что многомерные аналоги гипотезы Зимана неверны [Cohen 1977]. Гиллман и Ролфсен доказали логическую эквивалентность гипотезы Зимана в случае «стандартных» скелетов знаменитой гипотезе Пуанкаре [Gillman–Rolfsen 1983]. Причудливое строение шутовского колпака возле вершины делает его примером «нестандартного» скелета трёхмерного шара.

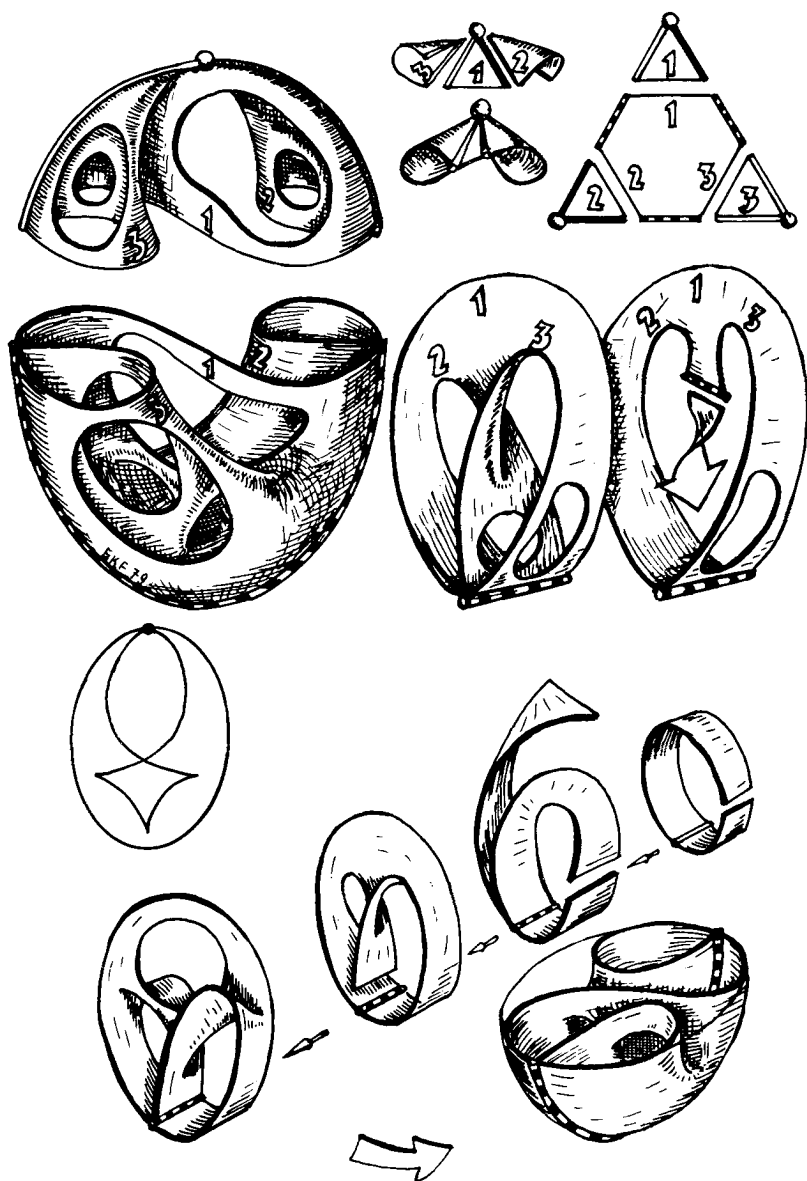
Я обязан Маршаллу Коэну, подсказавшему мне конструкцию $5(31) + 5(41)$ и следующий способ стянуть шутовской колпак D в точку. Поместите D внутрь какого-нибудь шара B^3 с центром в вершине колпака V . Пусть $R: B^3 \rightarrow D$ обозначает ретракцию, сдвливающую шар на его скелет, и пусть $G_t(X) = (1 - t)X + tV$ – радиальное стягивание шара. Применение G в композиции с R стягивает D в V . Чтобы представить себе маршрут в D точки X колпака D , ретрагируйте радиальный отрезок XV на D и синхронно стягивайте две эти кривые.

Яйцо Дунса¹ (картинка 6)

Контурные рисунки 5(42) или 5(43) улиткообразного шутовского колпака слишком сложны для запоминания. Вот более систематический способ рисовать шутовской колпак, обладающий большей симметрией, а также более простым контуром 6(31). Кроме того, он иллюстрирует, в случае размерности два, конкретный способ разрезать и склеивать топологические объекты, который ещё более полезен в случае трёх измерений. Выделите окрестность вершины нашего шутовского колпака, отделив от исходного треугольника три треугольничка (рис. 6(13)). Составьте из них конус 6(12) над *линком* («поясом») этой вершины в нашем комплексе². Две стороны оставшегося шестиугольника, противоположные разрезам 2 и 3, склеиваются, как стороны прямоугольника при изготовлении ленты Мёбиуса (рис. 6(23)). Затем сторона, противо-

¹ Происхождение названия можно понять, вернувшись к первому абзацу предыдущего пункта и подстрочным примечаниям к нему [прямой связи с упомянутым там схоластом Дунсом не видно. – *Ред.*]. – *Прим. перев.*

² Такой конус называется *звездой* рассматриваемой вершины. – *Прим. перев.*



Картинка 6. Яйцо Дунса.

положная разрезу 1, опускается вниз, как штора, но при этом перекручивается, чтобы правильно примкнуть к двум другим рёбрам (рис. 6(22)).

Осталось увидеть, как звезда вершины 6(12) может быть состыкована с 6(22). Я пришёл к яйцеобразному решению 6(11) + 6(21) примерно таким образом. Вытолкните малые петли (разрезы 2 и 3) из плоскости разреза 1¹, при этом контурные сборки (острия) изменяются с 6(42) на 6(41). Затем круто изогните ребро в «киль» полусферы так, чтобы край оказался в её экваториальной плоскости (рис. 6(43)).

Лента Мёбиуса (картинка 7)

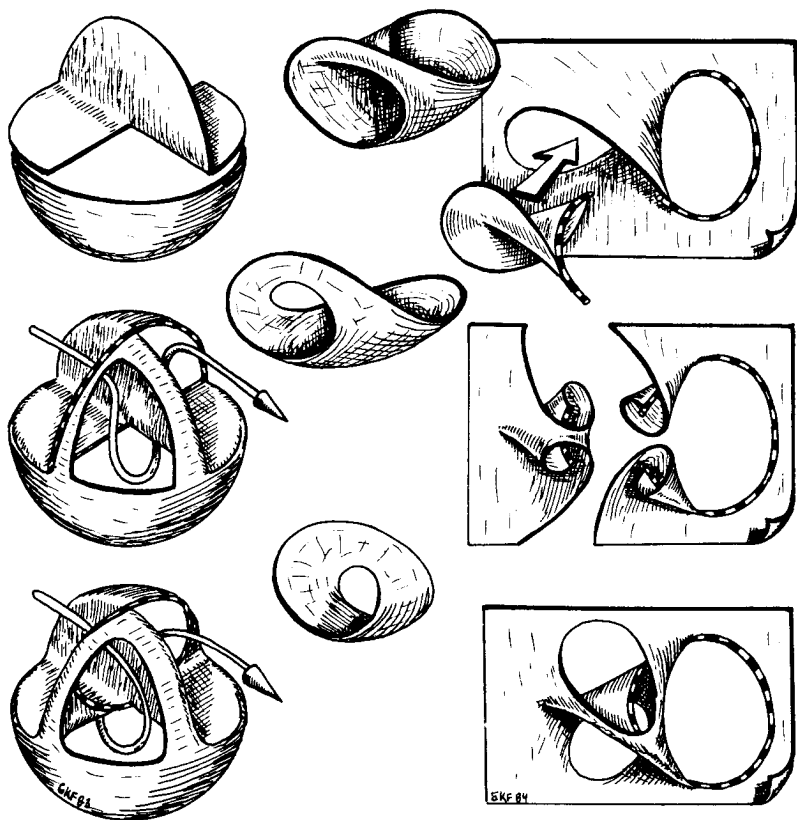
Эта картинка демонстрирует два подхода к моделированию заданных форм на примере решения проблемы визуализации ленты Мёбиуса, у которой край представляет собой плоскую окружность. Она также иллюстрирует два различных графических приёма построения таких визуализаций. Оба начинаются с того, что ленту Мёбиуса рассматривают как диск с перекрученной ручкой 7(12), край которого выглядит как (почти) плоская восьмёрка. Деформация этого диска к ленте Мёбиуса обычного вида 7(32) намечена при помощи переходной формы 7(22).

Первый трёхмерный подход показан слева. Используются куски стандартных поверхностей, которые легко нарисовать и легко словесно описать. В данном случае (рис. 7(11)) к полусфере прикрепляется диск, у которого две четверти, разделённые радиальным разрезом, отогнуты в противоположные стороны. Край такого объекта по расположению в пространстве напоминает закрученную восьмёрку на рис. 7(12). Вы можете убрать эту закрутку, повернув полуокружность, ограничивающую вертикальный «плавник» на рис. 7(11), на четверть оборота, так чтобы она «затянула» две осьмушки сферы (рис. 7(21)). Разогнутый край, состоящий из полуокружности и её диаметра, можно теперь «ужать» в плоскую окружность (рис. 7(31)). Поставив круглую заплату, вы получите замкнутую поверхность — *скрещённый котак Штейнера*, — о которой нам ещё предстоит говорить в гл. 5.

Хотя поверхность 7(21) легко изготовить из чашки и бумаги, её трудно убедительно изобразить, не используя штриховки. Однако я оставил внутреннюю часть поверхности незаштрихованной, чтобы усилить контраст. Проволока, проходящая сквозь дыру в поверхности (её путь виден через окно), тоже должна усиливать ощущение объёмности.

Второй, двумерный, подход представлен справа. Прежде всего уменьшим число слоёв поверхности, переведя какую-нибудь её точку в бесконечность. Скажем, представьте себе стереографическую проекцию из южного полюса поверхности 7(12) на плоскость бумаги. Вместо этого можно непосредственно рассмотреть плоскость с дыркой и соединить противоположные края дырки перекрученной на пол-оборота ленточкой

¹ Строго говоря, они и не лежат в этой плоскости. — *Прим. перев.*



Картинка 7. Лента Мёбиуса.

(рис. 7(13)). Чтобы перевести получающийся край, имеющий форму восьмёрки, в исходную плоскость, вам нужно «раскрутить» одну из двух петель восьмёрки, таща вслед за ней и поверхность. Вместо этой деформации можно с тем же успехом пришить к поверхности сборку Кэли, как показано стрелкой. То, что получится, будет после прорубания двух окон выглядеть примерно так, как показано на рис. 7(33). Анатомию этой поверхности поясняет рис. 7(32). Два куска поверхности, изображённые на этом рисунке, не пригоняются вплотную друг к другу. Сначала вы должны вытянуть соответствующие граничные дуги в плоскость, перпендикулярную плоскости рисунка. Поверхность 7(33) напоминает картинку из «Суданской ленты Мёбиуса» Дэна Азимова – компьютерного мультфильма о ленте Мёбиуса, представленной как минимальная поверхность в четырёхмерном пространстве.

Тушь и бумага

Теперь будет уместно сказать несколько слов о рисовальных принадлежностях, которыми я пользуюсь. Во главе списка идут мягкий карандаш, блок линованной в синюю линейку рисовальной бумаги и пластичная резинка для стирания¹. Синие линии на бумаге – удобный ориентир для горизонтального направления; при копировании на большинстве копировальных машин они не воспроизводятся. Пластичная резинка поглощает неограниченное количество графита, не оставляет после себя крошек и попутно играет роль подручной глины для моделей. Затем идут тушь, перья, пластмассовая доска с зажимом и рулон кальки. Тушь должна быть чёрной, доска – прозрачной, а в качестве кальки можно использовать тонкую («папиросную») бумагу для пишущей машинки.

Чтобы изготовить копию, пригодную для публикации, прекрасно подойдёт чертёжная тушь на высококачественной кальке. Набор чертёжных инструментов – ценное приобретение; правда, держать рейсфедеры чистыми довольно хлопотно. Мелкие исправления я делаю белой акварельной краской при помощи очень тонкой кисточки. Небольшая чертёжная доска, рейсшина, прозрачные пластмассовые угольники и трафарет для рисования эллипсов завершают основной список. Бумагу к доске прикрепляйте не кнопками, а липкой лентой (скотчем). Маленькие окружности получаются более убедительными, если рисовать их по трафарету, а не циркулем. Лекала, хотя ими и мудро пользоваться, – спасение для нетвёрдой руки. Чтобы добиться плавности кривой, есть неплохой способ – поочередно прикладывать лекало к последовательным тройкам точек на кривой. В остальном вас ограничивают только небеса, а в художественных салонах всегда можно получить щедрые консультации по поводу таких изощрённых средств, как трафареты для букв, точилки для карандашей, электрические ластики и тому подобное.

При уменьшении, вплоть до двукратного, получаются прелестные оттиски. По этой причине я, как правило, для обычных линий использую перья размера 0 или 1, для краевых линий, а также букв – размера 2 или 3, а для штриховки и вспомогательных линий – размера 00 или 000, в общем с весьма приличными результатами.

Мел и доска

Юрий Райнич, первым посвятивший меня в чудесные тайны проективной геометрии, утверждал, что присутствие вращений в евклидовой группе конгруэнций отражает греческий обычай преподавать геометрию: геометрические фигуры рисовались на земле, а ученики стояли по кругу. Даже если это и так, то в наши дни главным инструментом преподавателя математики является вертикально стоящая доска. Самые обширные

¹ На жаргоне отечественных художников именуемая «клячкой». У нас она не выпускается. Её с успехом заменяет мякиш белого хлеба. – *Прим. изд. ред.*

объяснения, сопровождающие законченный рисунок в книге, не могут сравниться с той информацией, которую вы сообщаете, создавая тот же рисунок на доске и всё время рассуждая при этом. Лёгкость, с которой добавляются и убираются детали, исправляются ошибки и вносятся поправки, хорошо знакома всем преподавателям.

В то же время слушателям вести записи по ходу такого «представления» у доски бывает довольно трудно. Нередко студентам вообще не удаётся распознать изображённый объект из-за торопливости или неумелости лектора. Чтобы студенты могли записать на лекции достаточно для того, чтобы дома восстановить и завершить рисунок, я обычно строю изображение начиная с самого начала, а не воспроизвожу на доске законченную работу по памяти или по бумажкам. Дабы фиксировать стереометрический контекст, я рисую каркас отсчёта. Зрителю становится ясным, что я хочу нарисовать что-то в пространстве. Линейный каркас, который я держу в памяти, не только помогает избежать элементарных ошибок в перспективе и касаниях, но также даёт рецепт воспроизведения рисунка. Последующее удаление невидимых линий проясняет форму. Одно-два окна возвращают «на место» нужную деталь. Подсветка, выполненная плоской стороной мелка, усиливает впечатление объёмности. Уверенное владение этими приёмами должно быть у топологов такой же обычной добродетелью, как бойкое владение языком теории множеств и системой обозначений символической логики.

На доске рисуют картинки разных типов, в зависимости от назначения. Во-первых, лектору бывают нужны *пиктограммы*, цель которых – акцентировать изложение на каком-то моменте. Здесь существенны скорость и простота, а не качество исполнения. В принципе вполне можно было бы обойтись и без такой картинки. Простота пиктограммы вовсе не означает скудости воображения. Выбранный вами конкретный объект должен вызывать у аудитории богатый набор ассоциаций. Сравните, например, два рисунка, которые могут сопровождать фразу: «Пусть E – расслоение с базой B и слоем F ...». Общепринятый прямоугольник E с основанием B и вертикальным отрезком F , торчащим из некоторой точки этого основания, иллюстрирует локальную структуру произведения, но при этом упускается возможность указать на глобальную топологию. А ведь чтобы изобразить ленту Мёбиуса, нужно провести всего-то на одну линию больше. Если пометить саму ленту буквой E , её экваториальную окружность – буквой B и поперечный отрезок – буквой F , то получится хорошая пиктограмма для нетривиального расслоения.

Во-вторых, возможен *рабочий рисунок*, представляющий собой часть изложения и заменяющий громоздкое теоретико-множественное описание рассматриваемой топологической процедуры. При принятом сейчас стиле математической строгости предпочитают в печатных текстах обходиться без картинок. Хороший рабочий рисунок полезен для того, чтобы сочинять подобную риторику и следить за её логикой. Поскольку

к рабочему рисунку по ходу изложения добавляются новые детали, здесь существенны графическая точность и визуальная ясность.

В-третьих, на доске можно нарисовать цветными мелками законченную *многокрасочную картинку*. Несмотря на то что этот жанр труден и поглощает много времени, у него есть своё очарование и свои преимущества. Картинка, тщательно нарисованная на боковой доске, служит хорошей рекламой для предстоящего доклада на семинаре. Потом, когда мой рабочий рисунок на главной доске разрушается в пылу лекции, я освежаю внимание аудитории, обращаясь к картинке сбоку. После того как рисунок детально разработан в домашней обстановке, его полнокрасочный вариант при необходимости можно воспроизвести довольно быстро. При таком воспроизведении я последовательно прохожу все обычные этапы – черчу каркас отсчёта, линейный каркас, привожу линии в общее положение. Затем на контурном рисунке соответствующие куски поверхности закрашиваются сплошь плоской стороной мелка. Лекторский мел, хотя он более пыльный, чем обычный цветной мелок, даёт более богатые тона. (Не оставляйте такие рисунки на доске, если только это не настоящая грифельная доска¹. Красители, содержащиеся в меле, таковы, что через некоторое время рисунок становится почти несмываемым.) После этого я ещё раз прохожусь по линиям. Чёрный мел очень хорош для штриховки и получения контрастного фона, белый мел – для подсветки. Удивительно, как мало краски нужно, чтобы поверхность казалась равномерно окрашенной.

Увы, такие хрупкие творения можно сохранить лишь при помощи фотографии. Чтобы с гарантией иметь хотя бы какую-то копию, можете взять фотоаппарат типа «Поляроида». Однако 35-миллиметровые слайды лучше по качеству и, кроме того, их можно показать большей аудитории. Некоторые примеры цветных картинок представлены на фото I и II на вклейке. На фото I для одного из ранних вариантов яйца Дунса 6(11) показаны три стадии: контурный рисунок, одноцветный вариант и многокрасочная картинка. Цветом я пользовался как средством разметки соответствующих друг другу деталей поверхности.

Что касается подготовки и демонстрации цветных картинок, то здесь у 35-миллиметровых слайдов есть некоторые очевидные преимущества перед прозрачками². Для изготовления слайда мне нужны только грифельная доска, высокочувствительная плёнка и фотоателье, где бы эту плёнку достаточно быстро проявили. Во время доклада я могу смотреть и показывать на то же самое изображение, которое видит аудитория. Моим глазам не приходится переключаться с ярко освещённого верха диапроектора на затемнённую комнату и обратно.

Доска является бесценным инструментом также на стадии конструирования рисунка. Крупный масштаб рисунков мелом и лёгкость, с

¹ Имеется в виду так называемая аспидная доска. – Прим. перев.

² См. следующий раздел. – Прим. изд. ред.

которой их можно исправлять, очень помогали мне решать те задачи из начертательной топологии, решения которых вы видите в этой книге. Иногда время, нужное для того, чтобы нарисовать картинку по ходу лекции, тоже проходит с пользой. В связи с этим стоит рассказать небольшую историю трёх снимков *спелёнутого трилистника* (фото II). Она началась с того, что Билл Тёрстон попросил меня нарисовать диск, натянутый на некоторую заданную кривую, лежащую в дополнении к узлу-трилистнику. Кривая была зацеплена с трилистником таким образом, чтобы реализовывалось определяющее соотношение копредставления Виртингера группы этого узла.

Хотя здесь у меня нет возможности дать обзор теории узлов, позвольте напомнить вам, как найти указанное соотношение. Дальнейшие сведения об узлах вы можете почерпнуть в классическом учебнике Кроуэлла и Фокса [Crowell–Fox 1963]. Ориентируйте проекцию узла на рисунке и пометьте какими-либо метками отрезки между последовательными «проходами»¹. (У трилистника три таких отрезка, но достаточно пометить два – одна метка является излишней.) Выберите какую-нибудь точку в дополнении к узлу («отмеченная точка») и для каждого отрезка, кроме «излишнего», нарисуйте, отправляясь от этой точки, обходящую его ориентированную петлю. Обхватите пальцами правой руки помеченный отрезок узла так, чтобы пальцы шли по направлению петли. Метка, соответствующая петле, получает положительный показатель, если ваш большой палец указывает в том же направлении, что и узел, и отрицательный – в противном случае. Таким образом каждое слово в свободной группе, порождённой метками отрезков, задаёт замкнутую кривую в дополнении узла. Поскольку у группы нашего узла имеется задание с одним-единственным определяющим соотношением, то найдётся слово, такое что на отвечающую ему кривую натягивается диск, вложенный в дополнение узла.

Решение поставленной задачи показано на верхнем снимке справа. Слева – промежуточная стадия, вспомогательный диск, который я нарисовал в надежде, что это как-то поможет мне визуализировать искомый диск. И тут мне неожиданно повезло². Вспомогательная картинка уже сама по себе даёт решение задачи, если использовать соотношение, сопряжённое к данному. Это сделано на синей картинке (средний снимок). Отмеченной точкой служит английская булавка. Пока «пелёнка» сколота булавкой, она не может соскользнуть с узла. Эта картинка была уже достаточно простой для того, чтобы её можно было запомнить и воспроизвести, как только потребуется. Зелёная картинка, представленная на нижнем снимке, была нарисована «в режиме реального времени»

¹ Так в теории узлов называют точки, где рассматриваемая ветвь узла проходит *под* другой его ветвью (а точки, где *над*, – «переходами»). – *Прим. изд. ред.*

² Буквально в оригинале сказано: «Но тут в дело вмешалась серединность» (см. подстрочное примечание редактора перевода в предисловии к книге). – *Прим. перев.*

на семинаре Бенно Артманна в Дармштадте. Рука у меня уже была набита, и для того, чтобы нарисовать эту картинку, потребовалось меньше времени, чем для того, чтобы объяснить связанные с ней топологию, теорию групп и начертательную топологию.

Слайды и прозрачки

Для большинства публичных математических выступлений, особенно если время ограничено и нужны безукоризненные иллюстрации, ничто не может заменить добрый надёжный диапроектор (*кодоскоп*). Это средство показа оставляет много места для изобретательности и индивидуальной свободы. При подготовке диапозитива, или *прозрачки*, у вас есть некоторая возможность выбора.

Несмотря на технический прогресс, изготовленные на прозрачной плёнке ксерокопии ваших рисунков тушью или карандашом потребуют некоторой доработки. Для этого очень хороша чертёжная тушь, а можно ещё улучшить картинку, разумно используя цветную тушь. Последняя бывает двух сортов: растворимая в воде (и потому стираемая) и нестираемая. Для повторно используемых прозрачек полезно их комбинировать. Обычная тушь тоже легко стирается. Безнадёжные ошибки не соскребайте, а вырезайте при помощи бритвочки – на дырки чудесно ставятся заплатки. Самые сложные части рисунка я наношу на прозрачку заранее, а во время доклада лишь добавляю детали на саму прозрачку или на накладку. Не забывайте, что для рисования годятся обе стороны плёнки.

Рисунок можно рисовать прямо на плёнке, используя линейный каркас или законченную картинку в качестве подложки. Хотя годится и обычная чертёжная тушь, всё же тушь, специально предназначенная для рисования на плёнке, держится дольше. Но и такую тушь можно удалить при помощи подходящего растворителя. При этом способе картинки получаются обычно аккуратнее, чем при ксерографировании, но уходит больше времени. Поскольку из-за растворителя, содержащегося в туши, при нанесении новых линий могут смазываться уже нанесённые, я иногда при раскрашивании чередую стороны плёнки. При использовании нескольких слоёв плёнок их стоит загодя скрепить вместе так, чтобы они правильно налегали один на другой.

Компьютер и чертёжный стол

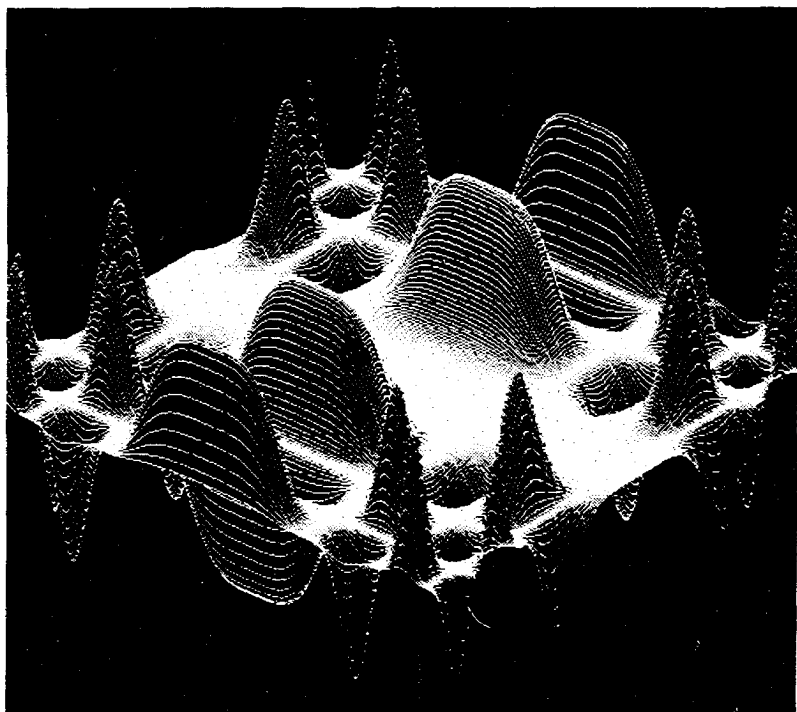
Изображения, получаемые на экране компьютера, – бесспорно, великолепное подспорье для воображения. Этим захватывающим новым средством воспользовались Том БэнчOFF [Banchoff 1977] и Нелсон Макс [Max 1977], которые создали с его помощью очень красивые и понятные фильмы по геометрии и топологии соответственно. В конце концов компьютерная графика станет таким же важным орудием в начертательных геометрии и топологии, как тушь и грифельная доска. Но ещё не

сейчас. Созданный Нелсоном Максом цветной мультфильм с полной закраской кадра, со светотенью и стиранием невидимых линий, «ожививший» выворачивание сферы наизнанку по Морэну, — шедевр компьютерной графики. Чтобы его изготовить, потребовались лучшие компьютеры и всё программистское мастерство тех дней. Как и высадка на Луну, с момента которой прошло уже два десятка лет, дорогостоящее достижение Макса до сих пор не получило продолжения. Пройдёт еще порядочно времени, пока такая технология будет доступна рядовому топологу.

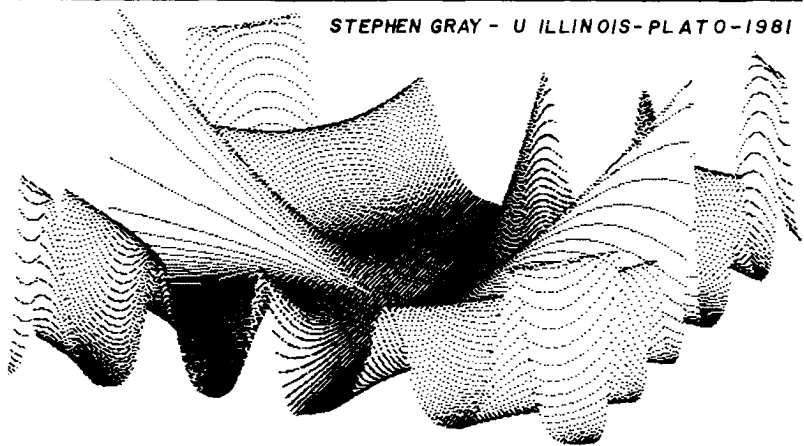
Применённый Томом БэнчOFFом способ изображения поверхностей при помощи *проволочных каркасов* с технической стороны более прост. Такие каркасы легче программировать и проще выводить на дисплей, но также и труднее визуализовать. Здесь все порождающие кривые видны целиком. Иллюзия глубины частично восстанавливается, если всё время поворачивать поверхность при деформациях. Но даже в таком случае пассивность, присущая просмотру фильма, видеозаписи или изображения на дисплее, идущих по фиксированному временному графику, затрудняет понимание увиденного. То обстоятельство, что приходилось после просмотра объяснять студентам, что же именно они видели в фильмах БэнчOFFа и Макса, привело меня к изобретению жанра топологического рассказа в картинках, представленного в главах 5 и 6 соответственно.

Графики функций (картинка 8)

Проблема *скрытых линий*, в других случаях легко разрешимая при помощи резинки или кальки, становится нетривиальным препятствием для скоростного или дешёвого компьютерного черчения. Алгоритм, которым воспользовался Стивен Грей для получения приведённых на рисунке графиков тригонометрических многочленов, весьма прост и хорошо, хотя и медленно, работает на бейсике на компьютере Эппл. В первый раз это заняло десять торжественных минут глухой ночью на большом компьютере Cyber 73/CDC 650 системы PLATO с разделением времени. Именно из-за удобств системы PLATO и непривычно «дружелюбной», ориентированной на пользователя среды я начал программировать на этой установке, а не на какой-нибудь собственно графической системе. Моё компьютерное ученичество, таким образом, было похожем на то, что ожидает теперешних новичков в программировании на микрокомпьютерах. Я развил гибридный подход, при котором компьютерная выдача служит вам подложкой для рисунка пером. Этот подход до сих пор верно служит мне в мире микрокомпьютеров с их пониженным разрешением и качеством печати на грани приемлемого.



STEPHEN GRAY - U ILLINOIS-PLATO-1981



Картинка 8. Графики функций.

Взаимоуничтожение точек пинча: проволочные каркасы (картинка 9)

Следующие три картинки представляют проведённое при помощи компьютера исследование того, как взаимно уничтожается пара точек пинча. Программа использует параметризацию Морэна соответствующей гомотопии:

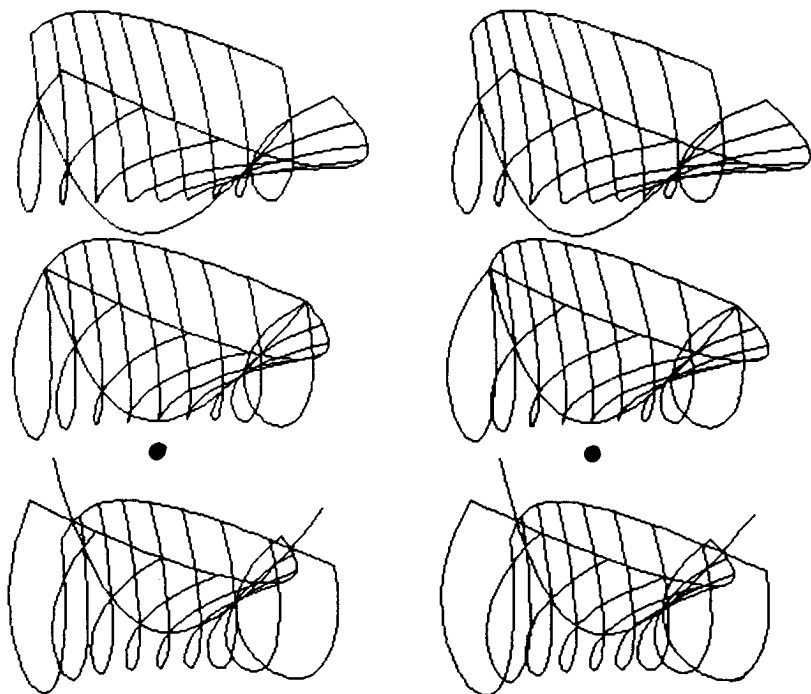
$$(X, Y, Z) = (x, y^3 + (t - x^2)y, y^2).$$

На картинке 9 вы видите три стереопары «проволочных» каркасов, соответствующих переходу t через нуль от положительных значений к отрицательным. Вы можете выделить параболу двойных точек, разложив уравнение $Y = 0$ на множители $y = 0$ и $y^2 = x^2 - t$. В пространственных координатах они примут вид $Z = 0$ и $Z = x^2 - t$. Следовательно, вершина параболы находится в точке $(0, 0, t)$.

Стереопара представляет собой пару изображений одного и того же предмета, трёхмерный образ которого возникает, если на каждое из них смотреть соответствующим глазом. Обычно изображения располагают так, чтобы через призматический оптический инструмент, называемый *стереоскопом*, левый (правый) глаз смотрел на левый (правый) рисунок. Приведённые же здесь стереопары предназначены для рассматривания без стереоскопа и потому «обращены»: вид слева (справа) находится справа (слева) от центра пары. Чтобы увидеть стереоизображение, вы должны скосить глаза и со скошенными глазами вновь сфокусировать взгляд. Чтобы овладеть этим приёмом, посмотрите на кончик карандаша, находящийся примерно на полпути между вашим носом и стереопарой¹. Приблизьте или отдалите кончик настолько, чтобы два из четырёх размытых изображений слились в одно. Сначала это центральное изображение тоже будет размытым. Не пытайтесь сфокусировать взгляд на странице. Продолжайте смотреть на кончик карандаша и думайте о поверхности до тех пор, пока среднее изображение не станет резким. После небольшой практики вы сможете без всякого труда воспринимать реверсированные стереопары как на бумаге, так и на экране компьютера.

Если у вас есть стереоскоп или болит голова от скашивания глаз, то сделайте ксерокопию реверсированной стереопары, разрежьте её и склейте, поменяв местами левую и правую стороны. При условии что центры двух изображений пары разведены друг от друга не дальше, чем ваши глаза, а сами изображения не перекрываются, вы можете воспринимать и обычную («параллельную») стереопару без стереоскопа. Для этого сначала уткнитесь в неё носом между двумя центрами изображений; полезно пометить их точками. Расслабьте глаза и подождите, пока (чрезвычайно сильно) размытые образы не сольются в один.

¹ Стереопара при этом может находиться довольно далеко от глаз. - *Прим. перев.*



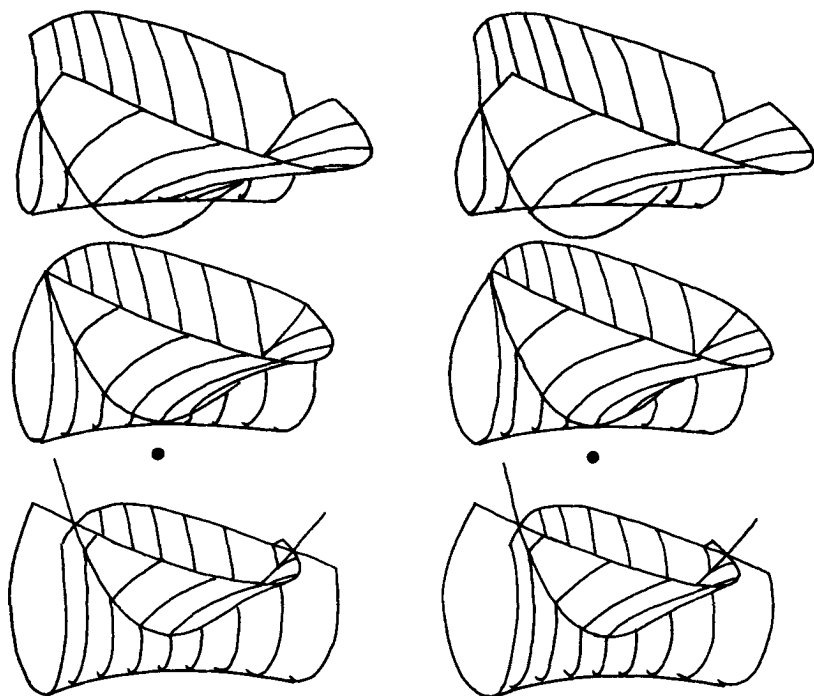
Картинка 9. Взаимоуничтожение точек пинча: проволочные кар-
касы.

Теперь медленно отодвигайтесь, следя за тем, чтобы они оставались слившимися, до тех пор пока средняя картинка не окажется в фокусе.

Для рассматривания стереопар без стереоскопа, особенно на экране микрокомпьютера, я предпочитаю реверсированный метод, при котором глаза скашиваются, традиционному. Поскольку при этом два изображения могут находиться дальше друг от друга, они могут быть больше. Кроме того, скошенные глаза, по-видимому, более терпимы к геометрическим неточностям в двух изображениях стереопары.

Взаимоуничтожение точек пинча: удаление скрытых линий (картинка 10)

Эта картинка получается, если перенести на кальку видимые части кривых с предыдущей картинки и интерполировать линии контура. В верхней части картинки две точки пинча находятся там, где двойная



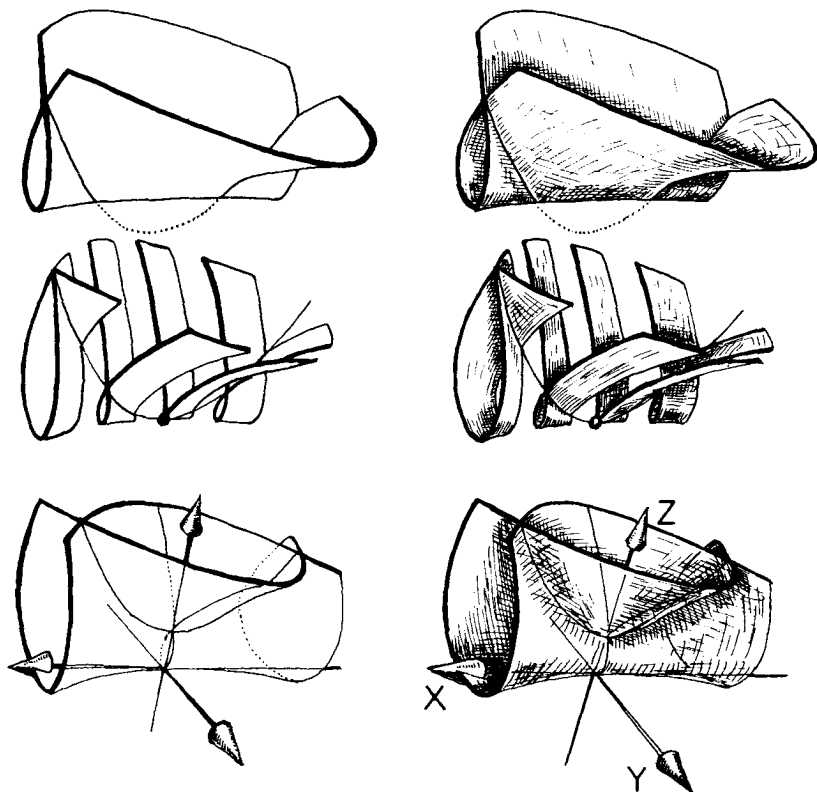
Картинка 10. Взаимоуничтожение точек пинча: удаление скрытых линий.

кривая – парабола – покидает поверхность. В середине двойная кривая лишь касается «наружного пространства». В нижней части поверхность уже является погружённой. Любопытно, что небольшие неточности, допущенные при перерисовывании на кальку, мешают при стереооптическом восприятии больше, чем дрожание линий проволоочного каркаса на распечатке картинке с экрана.

Взаимоуничтожение точек пинча: дальнейшая проработка рисунков (картинка 11)

Данная картинка демонстрирует различные возможности того, как добиться объёмного впечатления, не опасаясь перенапрячь глаза. Фрагмент 11(11) – это контурный рисунок. Пунктирный участок двойной кривой называется *усом*. Он является частью алгебраического многообразия, уравнение которого после исключения параметров имеет вид

$$Y^2 - (Z + (t - X^2))^2 Z = 0.$$

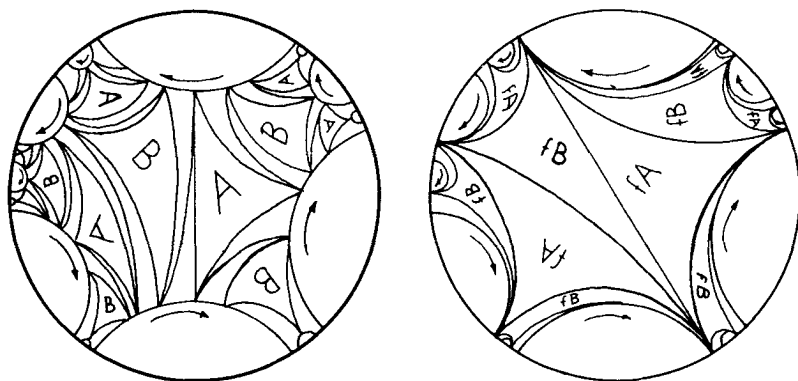
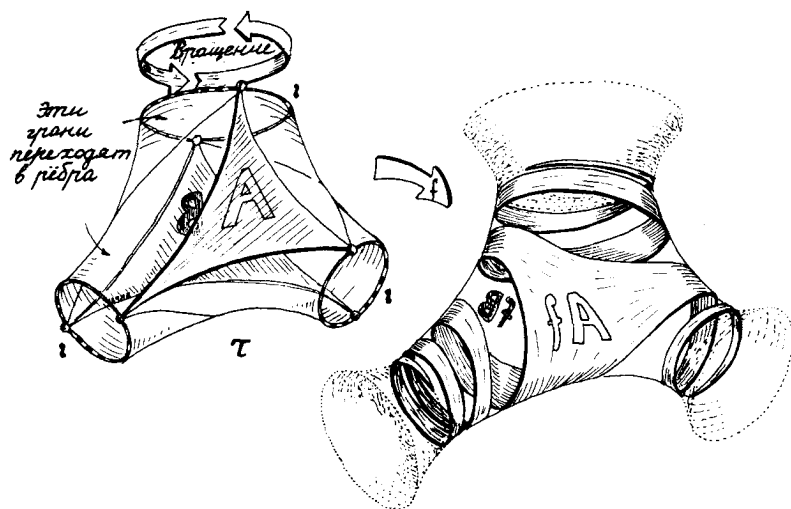


Картинка 11. Взаимоуничтожение точек пинча: дальнейшая проработка рисунков.

В пределах ограничений, налагавшихся доступным мне компьютерным оборудованием, достигнутым мною уровнем программистского мастерства и собственно трудностью решаемой графической задачи, я превратил компьютер в своего рода чертёжный инструмент, в «шаблон» для изготовления рисунков от руки. И часто рука побеждала.

Выкручивание штанов (картинка 12)

Некоторые компоненты моего графического редактора PLATO очень пригодились мне, когда пришлось рисовать картинки для других. Специальная подпрограмма автоматически переводит линии, нарисованные в одной из моделей гиперболической плоскости, в любую другую модель. Те из линий, задающих триангуляцию части модели Пуанкаре (рис. 12(21) и 12(22)), которые выходят на граничную окружность, были



Картинка 12. Выкручивание штанов.

получены таким способом из прямых линий в модели Бельтрами-Клейна. Остальные дуги было быстрее нарисовать от руки. Эта иллюстрация к статье Тёрстона [Thurston 1986] решает одну интересную графическую задачу. На рис. 12(11) показана триангуляция трижды проколотой сферы, или *штанов*, накрываемая триангуляцией 12(21). Если в накрытии сдвигать всё, расположенное на граничных линиях, в

одну сторону¹, то края накрываемой римановой поверхности будут прокручиваться вокруг себя бесконечное число раз. При этом все треугольники триангуляции, за исключением двух, сожмутся в отрезки. Фокус в том, что в конечном положении задний симплекс, помеченный буквой *B*, занимает всё место, не занятое симплексом *A* в его конечном положении. Важно было дать понять, что поверхность продолжается за «пояски», но сделать это так, чтобы не отвлечь внимания от самих «штанов». Здесь очень уместным оказался пуантилистский стиль Тима Постона.

Расслаивание сферы и узел «восьмёрка» (картинка 13)

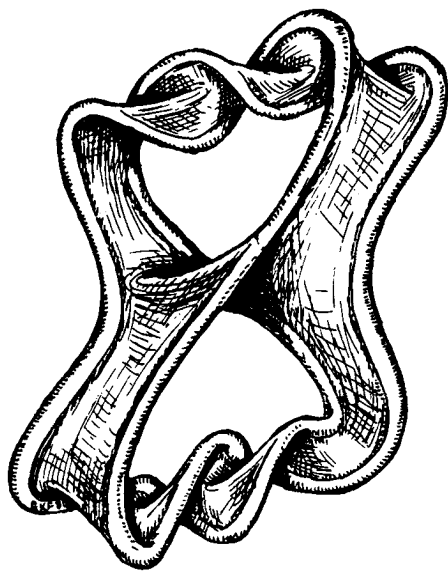
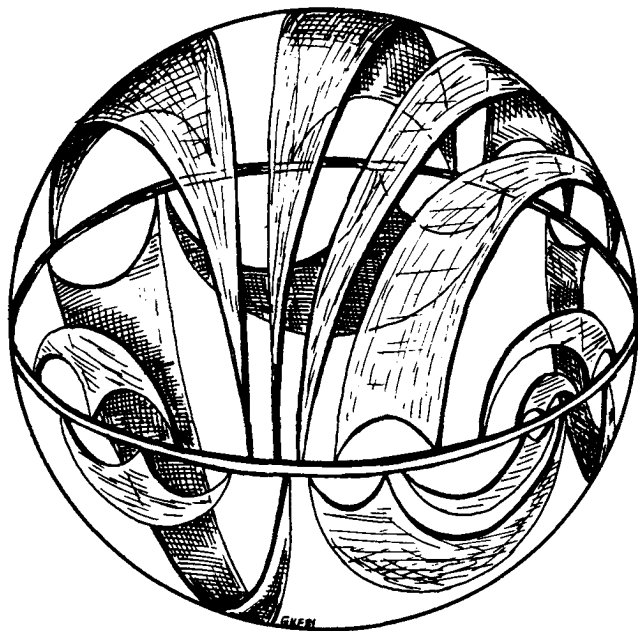
Пакет программ, позволяющий работать с гиперболической плоскостью, оказал мне великую помощь в работе над этой иллюстрацией к другой статье Тёрстона [Thurston 1972]. Верхний рисунок призван дать представление о том, как можно заполнить две полусферы, непрерывно рисуя всё новые и новые сферические треугольники с вершинами на экваторе. При этом никакие две вершины северного треугольника не должны попасть между двумя вершинами южного. Сначала я заставил машину нарисовать целую пропасть таких треугольников, гораздо больше, чем нужно для хорошего рисунка. Затем, последовательно перерисовывая их, я нашёл те несколько треугольников, которые, как мне показалось, выглядели нужным образом.

Зато компьютер мало помог в случае изображённой в нижней части картинки поверхности, натянутой на узел «восьмёрка». Стремление во что бы то ни стало добиться того, чтобы этот объект выглядел правильно, привело меня к длительным занятиям с поверхностями, натянутыми на узлы, из которых родился в конце концов заключительный рассказ в картинках из этой книги. Может быть, уверенное рисование штопоров, вдохновлённое бесчисленными спиралями, виденными мною на дисплее, помогло мне нарисовать картинку настолько «крепкую», что она выдержала репродукцию в газетной статье Нила [Kneale 1983].

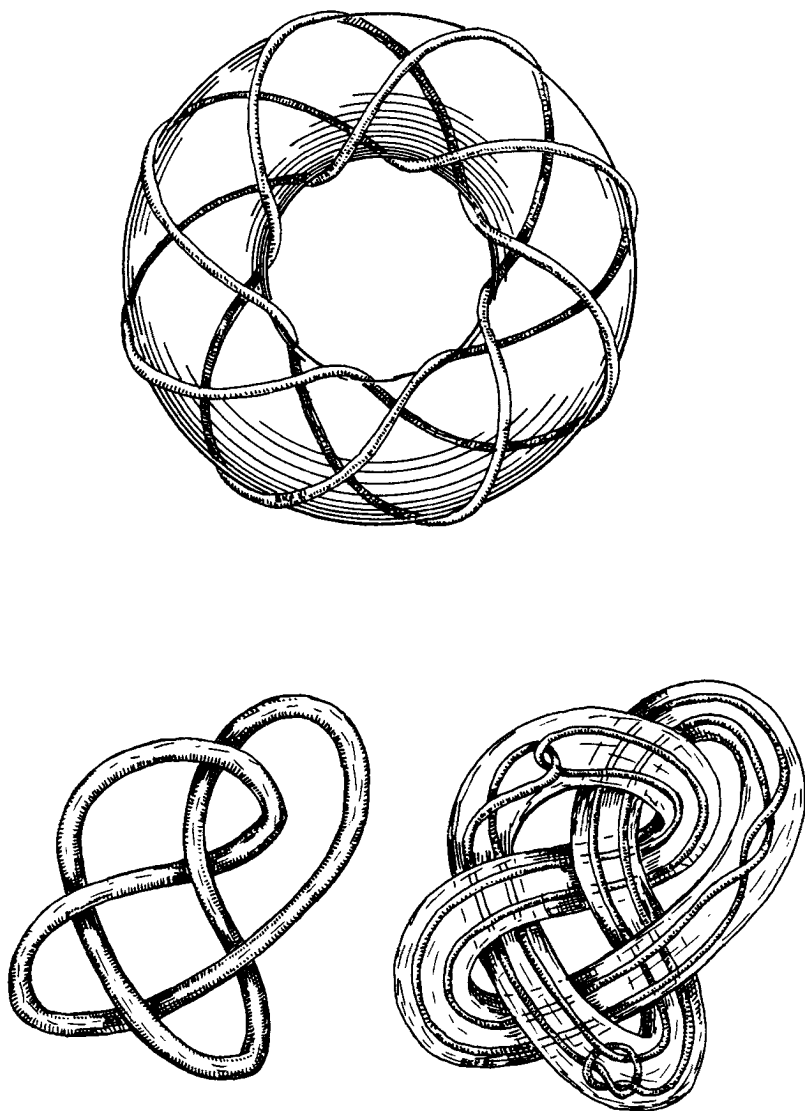
Кабельный узел и компаньон узла (картинка 14)

Для той же самой статьи Тёрстона нужно было нарисовать и другие узлы. Компьютер изготовил замечательные стереопары изображений узла, который наматывается на тор восемь раз, обходя его при этом трижды. Но взятое в отдельности ни одно из них не годилось. На

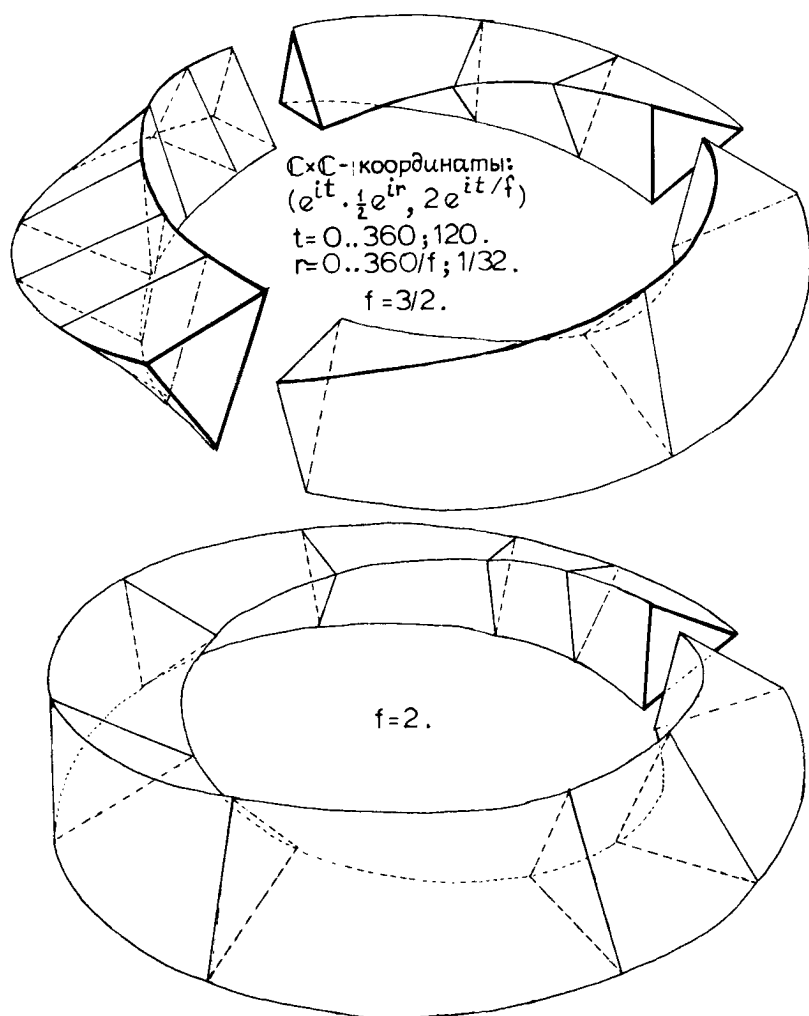
¹ По стрелкам.— Прим. изд. ред.



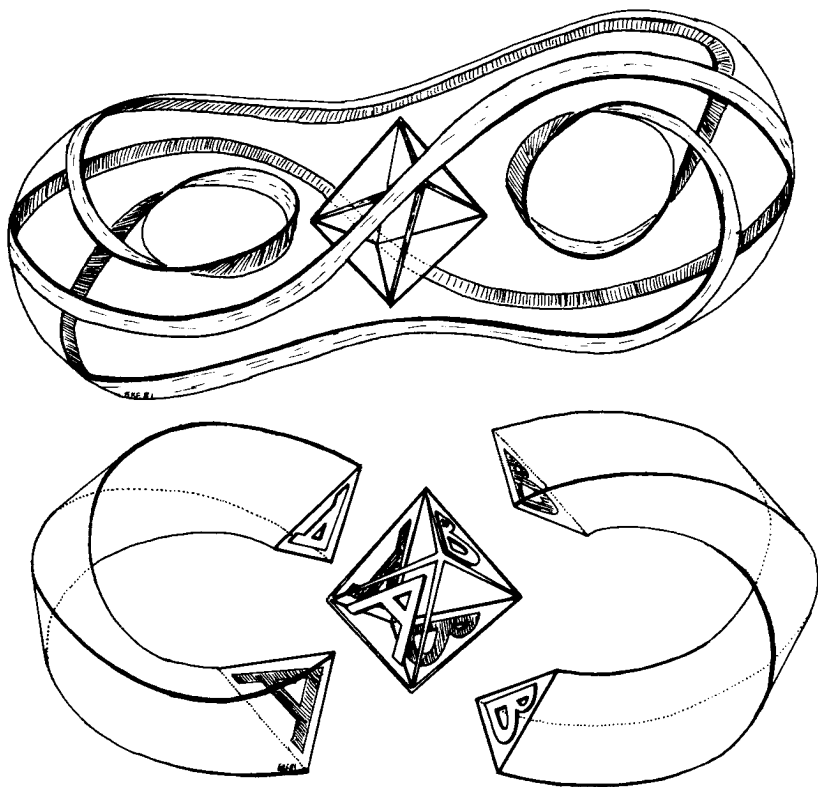
Картинка 13. Расслаивание сферы и узел «восьмёрка».



Картинка 14. Кабельный узел и компаньон узла.



Картинка 15. Кабельные шаблоны.



Картинка 16. Октаэдральное гиперболическое многообразие.

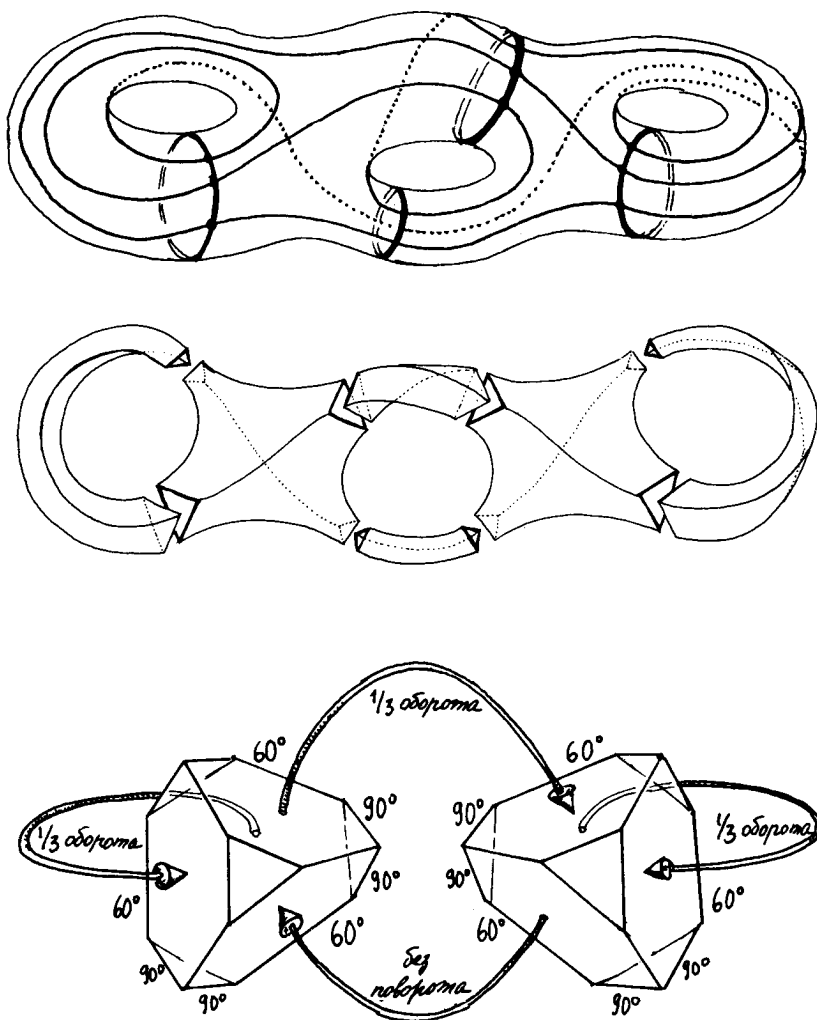
рисунке в верхней части картинке нужный эффект достигается при помощи традиционной штриховки.¹

Рисуя пару узлов внизу, я пользовался только пером. Кроме того, мне помогло внимательное изучение графики Эшера. Существенно было изобразить узел внутри узла. Окна или поперечные сечения нарушили бы непрерывность. Мне ничего не оставалось, как попробовать свои силы в изображении прозрачного узла – сделать внешний узел прозрачным, как и предлагал в рукописи Тёрстон.

Кабельные шаблоны (картинка 15)

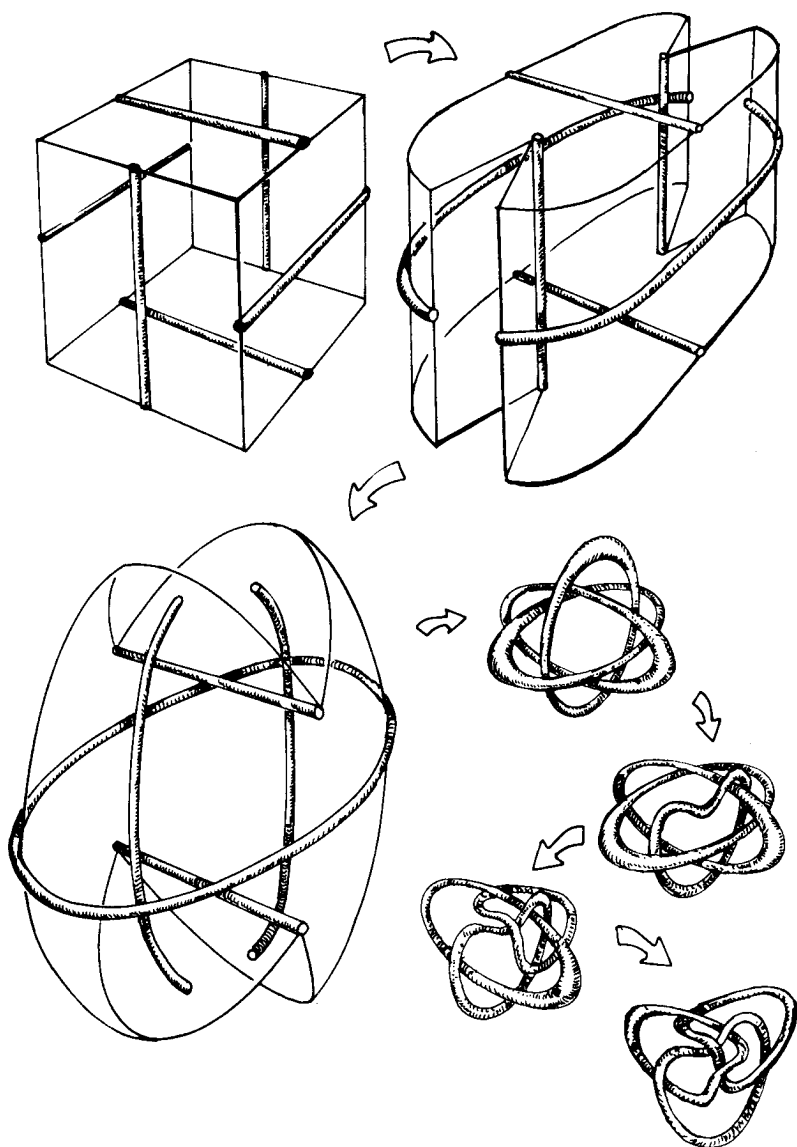
Стандартный способ строить трёхмерные многообразия состоит в том, чтобы подходящим образом отождествить грани сплошного многогран-

¹ Узел, изображённый на рис. 14(11), называется *торическим*. Если заузить тор, на поверхности которого он находится, то получится *кабельный узел* 14(21). Этот узел является *компаньоном* узла 14(22)). – Прим. перев.



Картинка 17. Тетраздральное гиперболическое многообразие.

ника. Эта идея восходит к Пуанкаре, и в гл. 4 мы рассмотрим простой пример, в котором строительные блоки имеют нашу обычную евклидову геометрию. В мире Тёрстона геометрия исходного полиэдра обычно неевклидова. В случае когда эта геометрия является гиперболической, никакие действительно достоверные рисунки невозможны. Надеяться можно только на то, что тем или иным способом удастся создать



Картинка 18. Борромеево орбиобразие.

впечатление отрицательной кривизны. Во многих случаях мне приходилось изображать операцию приклеивания одной треугольной грани многогранника к другой с *подкручиванием*. Удивительно трудно представить себе, как вращающийся треугольник замечает в пространстве трёхмерную дорожку. В конце концов я заставил компьютер изготовить подложку для этих двух рисунков трёхжильных кабельных узлов. Эти рисунки послужили моделью для двух следующих, выполненных от руки, иллюстраций к статье [Thurston 1987] (картинки 16 и 17). Они изображают ацилиндрические трёхмерные многообразия, на которых гиперболическая структура существует, но не единственна. У вас будет возможность исследовать геометрию этих странных трёхмерных пространств в главах 6 и 8. А в следующей главе речь пойдёт о геометрии перспективы, с которой все мы знакомы ещё по детским комиксам.¹

¹ Скажем пару слов по поводу помещённой в конце главы без всяких комментариев картинка 18. Кольцами Борромео называют три кольца, изображённые на гербе итальянского рода Борромео. Они соединены таким образом, что никакие два кольца не сцеплены, но разнять их нельзя. [См. гл. 3 книжки Мартина Гарднера «Математические досуги» (М.: Мир, 1972).] Отмеченные окружности показанного на картинке трёхмерного орбиобразия расположены так же, как кольца Борромео. Отсюда название картинки. [С понятием орбиобразия можно познакомиться по книге П. Скотта «Геометрии на трёхмерных многообразиях» (М.: Мир, 1986).] – *Прим. перев.*

Рисунки в перспективе

Перспектива представляет собой простейший и самый прямой способ создать иллюзию глубины на картинке, изображающей пространственно протяжённые объекты. Более или менее правильно расположенные точки схода параллельных линий, рассчитанное сближение точек, равномерно распределённых на прямой, эллиптически сжатые окружности – все эти приёмы перспективы не просто приятны для глаза. Они ещё помогают зрителю понять, как по замыслу художника предметы должны располагаться относительно друг друга. Например, даже умеренное перспективное схождение линий не даст вам ошибиться и принять трёхмерный рисунок за двумерную диаграмму.

Здесь я говорю о *линейной перспективе*, в отличие от *воздушной*. В случае последней для создания иллюзии глубины в большей степени используются штриховка и тени. Рисунки в линейной перспективе отличаются также от чертежей, основанных на *аффинной проекции*, при которой точки изображаемого пространственного объекта проецируются на плоскость рисунка вдоль параллельных друг другу прямых – *лучей-проекторов*. При аффинной проекции схождения параллельных линий нет: прямые, параллельные в пространстве, остаются параллельными и на рисунке. Часто в таком случае говорят о «параллельной» проекции, но следует избегать этого термина в обществе художников и чертежников. Для них *параллельная проекция* – это такая перспективная проекция, в которой главная плоскость изображаемого объекта параллельна плоскости рисунка. Аффинную проекцию, лучи-проекторы которой перпендикулярны плоскости рисунка, мы будем называть *ортогональной*, в противном случае – *косоугольной*. Это – исходное значение термина «ортогональная проекция», хотя сегодня его обычно относят к совместному изображению двух или более «параллельных» проекций, лучи-проекторы которых образуют между собой прямые углы (пример: *план* здания и его *вид спереди* или *сбоку*). Мы бросим беглый взгляд на аффинную и воздушную перспективы в конце главы. Ясное и полное изложение всех этих предметов имеется в классическом руководстве по инженерному черчению Томаса Френча и Чарлза Вирка [French–Vierck 1911].

Линейная перспектива (картинка 1)

Основной принцип рисования в перспективе обманчиво прост. Рисуя с натуры, художник наносит пятнышко краски на холст в том месте, где глаз, находящийся в фиксированном положении по отношению к картине, должен видеть изображаемую точку. Геометрически это та точка, где линия взгляда, соединяющая глаз и объект, пересекает плоскость рисунка. Со времен Альбрехта Дюрера и Возрождения постоянно изобретались всё более остроумные механические приспособления, помогающие осуществить эту проекцию. Сегодня фотографическая камера позволяет без труда получать безупречно перспективные снимки реальных объектов — ландшафтов, зданий, комнат, моделей. Недорогие, ориентированные на графику микрокомпьютеры выполняют эту задачу в случае мысленных образов, точки которых существуют лишь как математические объекты.

Выберем декартовы координаты, по отношению к которым глаз находится в точке $(0, 0, -\delta)$ — на расстоянии δ (называемом *фокальным расстоянием*) от плоскости рисунка xy . Перспективный образ $(X, Y, 0)$ точки (x, y, z) задаётся формулами

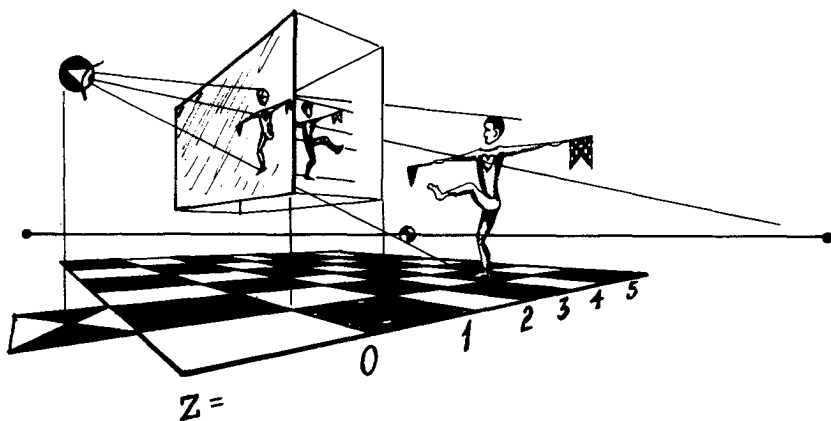
$$X = xZ,$$

$$Y = yZ,$$

где

$$Z = \frac{\delta}{\delta + z}.$$

Тем самым мы сжали изображаемое полупространство, где $z > 0$, в область, где $0 < Z < 1$. Это — (*отражённое*) *рельефное преобразование*.



Картинка 1. Линейная перспектива.

Например, при $\delta = 1\frac{1}{2}$ глаз 1(11) ($z = -1\frac{1}{2}$) видит картинку 1(12) ($z = 0$), изображающую объект 1(14) ($z = 3$), рельефный образ которого 1(13) ($z = \frac{1}{3}$) зажат, как в сэндвиче, между плоскостью рисунка и параллельной ей плоскостью $z = 1$. Рельефное преобразование обратимо:

$$\begin{aligned}x &= X/Z, \\y &= Y/Z, \\z &= (1 - Z)\delta/Z,\end{aligned}$$

и есть основания предполагать, что распознавание изображённого на рисунке включает в себя подсознательные заключения о масштабном параметре перспективы Z .

До появления фотографии, и особенно до появления компьютерной графики, у конструктора, чтобы выполнить рисунок в перспективе, не было другого выбора, кроме как воспользоваться методами классической начертательной геометрии. Но даже и теперь, учитывая, насколько утомительно и скучно изготовлять физические модели, которые надо будет фотографировать, или параметризовать нерегулярно искривлённые поверхности и вводить в компьютер мириады точек, нужных ему в качестве данных, современные дизайнеры по-прежнему предпочитают выполнять рисунки традиционным способом. Из-за удобства пользования и быстроты изготовления набросок, сделанный в перспективе, является лучшим вариантом и для начертательных топологов.

Инструкции по рисованию в перспективе можно найти во вводных курсах для изучающих архитектуру, изящные искусства и промышленный дизайн (в порядке возрастания полезности курса). Архитектор по-новому располагает знакомые объекты в знакомом мире, художник большей частью рисует с натуры. Только дизайнер сталкивается с проблемами, похожими на проблемы тополога, — (вос)создать объект в процессе рисования одного. И промышленный дизайнер, и дизайнер-тополог стремятся передать визуальную информацию с минимальной неоднозначностью и максимальной экономией средств. Разница между их подходами заложена в природе самих изображаемых объектов. Чайник или автомобиль являются в конце концов элементами повседневного опыта зрителя, и рисунок нового объекта такого рода служит в основном для того, чтобы задать «новые параметры» для понятия, имеющегося в воображении. На рисунках тополога большей частью изображаются незнакомые объекты. Лишь изредка они соответствуют какой-нибудь физической реальности. Хотя ленту Мёбиуса легко склеить из полоски бумаги, тому, как пришить к её краю диск, в школе не учат.

Умение рисовать в перспективе от руки играет в начертательной топологии особую роль. Поскольку перспективные кубы, цилиндры и конусы, используемые на рисунках в качестве каркасов, можно скопировать с дисплея, оно не является абсолютно необходимым. Однако оно помогает топологу визуализовать и, самое главное, конструировать объекты, а тут все средства хороши. Наконец, я обнаружил, что обучать

проективной геометрии, особенно художников и дизайнеров, лучше всего в терминах перспективного рисования.

Здесь, однако, я буду предполагать, что вы уже знакомы с элементарными математическими фактами, касающимися хитроумного творения Понселе, и воспользуюсь ими для объяснения перспективы. Напомню, что *проективное пространство* – это обычное трёхмерное пространство, дополненное *идеальной точкой* для каждого класса параллельных друг другу прямых. Идеальная точка соединяется с заданной «настоящей» точкой своим представителем, проходящим через эту точку. Две идеальные точки, представленные двумя непараллельными прямыми, соединяются *идеальной прямой*, отвечающей классу параллельных друг другу плоскостей, определяемому двумя исходными прямыми. Эти идеальные прямые и точки располагаются на *идеальной плоскости*, которую можно также представлять себе как «плоскость на бесконечности». По аналогии с *проективной плоскостью*, точки которой соответствуют антиподальным парам точек на сфере, проективное пространство обладает евклидовой моделью в четырёхмерном пространстве, построенной из антиподальных пар точек трёхмерной сферы.

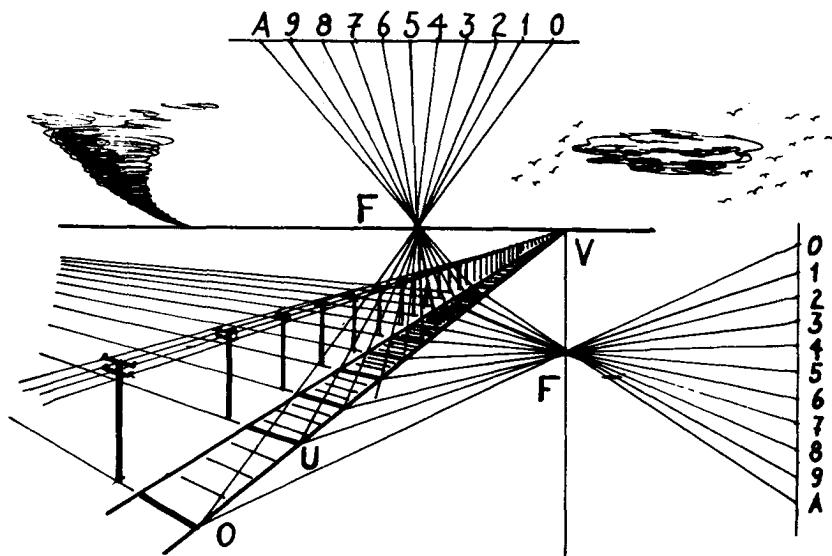
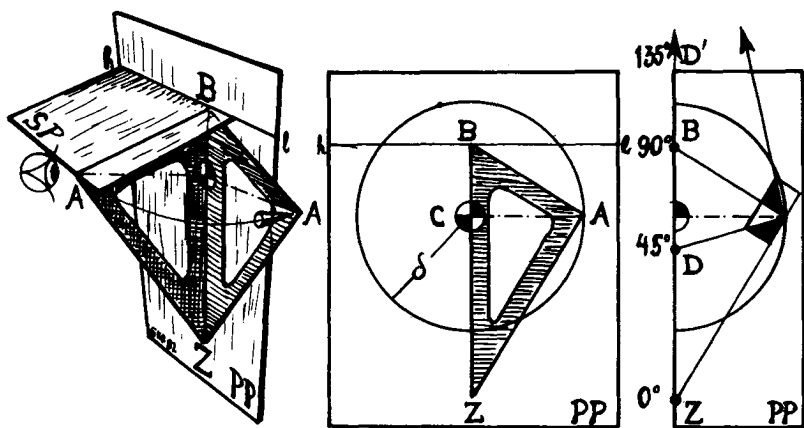
То что параллельные прямые «сходятся на бесконечности», а параллельные плоскости имеют общую «бесконечно удалённую прямую», допускает следующую перспективную интерпретацию. Когда точечный объект на конце линии взгляда удаляется от наблюдателя по прямой в пространстве, след этого объекта на плоскости рисунка движется вдоль некоторого прямолинейного отрезка, пока не «остановится» в *исчезающей точке*; линия взгляда параллельна теперь прямой, по которой двигался объект. По этой причине исчезающая точка в плоскости рисунка остаётся на месте, если сдвигать прямолинейную траекторию объекта в пространстве параллельно самой себе¹. Если эту траекторию вращать в некоторой плоскости, то исчезающая точка будет двигаться по прямой, которая называется *линией горизонта* (или просто *горизонтом*) для этой плоскости. Таким образом, проекция вдоль линий взгляда устанавливает взаимно-однозначное соответствие между плоскостью рисунка² и идеальной плоскостью. Для прямых, параллельных плоскости рисунка, исчезающими точками служат идеальные точки плоскости рисунка. Её идеальная прямая служит горизонтом для плоскостей, ей параллельных.

Горизонт и зенит (картинка 2)

Позвольте мне теперь преподавать вам несколько легко запоминаемых уроков перспективы. Даже если аккуратное выполнение этих чертёжных процедур не всегда практично, я считаю, что приближённое их выполне-

¹ Этот факт выражают, говоря, что исчезающая точка прямой является *точкой схода* всех прямых, ей параллельных. – *Прим. изд. ред.*

² Точнее, соответствующей проективной плоскостью. *Прим. перев.*



Картинка 2. Горизонт и зенит.

ние заведомо полезно, когда набрасываешь рисунок от руки. При описании этих процедур я познакомлю вас на конкретных примерах с рядом очень красивых геометрических теорем. Они группируются вокруг следующих трёх задач на построение:

1. Дана линия горизонта. Найти соответствующую точку зенита, которая представляет собой точку схода прямых, перпендикулярных какой-либо плоскости с заданным горизонтом. Это частный случай перспективного измерения углов и расстояний.

2. Выполнить рисунок куба, начав с заданных отрезка и линии горизонта в плоскости рисунка, представляющих одно из рёбер и плоскость одной из граней куба. В известном смысле все традиционные методы перспективы начинаются с решения этой задачи. Мой вариант появился в результате изучения монографии Джея Доблина [Doblin 1958] о рисовании в перспективе и обнаружения там геометрических ошибок, сделанных из эстетических соображений. Я благодарен Бену Хэлперну, объяснившему мне это.

3. На рисунке заданы квадрат и перпендикуляр к нему. Извлечь отсюда информацию о перспективе и, используя эту информацию, нарисовать другие стандартные фигуры, такие как круглые кольца с перпендикулярными к ним осями («колёса»).

Чтобы решить первую задачу, проанализируем ситуацию с точки зрения третьего лица (рис. 2(11)). Между изображением и наблюдателем (лицом, строящим перспективу) помещён прямоугольный треугольник. Его гипотенуза $B-Z$ находится в плоскости рисунка¹ PP . Вершина прямого угла A треугольника находится у глаза наблюдателя, а один из катетов, $A-B$, лежит в плоскости взгляда SP , отвечающей заданной линии горизонта hl . Высота $A-C$ прямоугольного треугольника соединяет глаз с ближайшей точкой C плоскости PP . Точку C я называю *фокальным центром* (или *центром поля зрения*). Длина высоты $A-C$ — это *фокальное расстояние* δ . Круг с центром C радиуса δ в плоскости рисунка представляет собой *фокальный круг*. Ему отвечает «подзорный» конус (с вершиной в точке A) с углом раствора 90° . Очевидно, второй катет $A-Z$ прямоугольного треугольника представляет собой линию взгляда, перпендикулярную плоскости SP ; следовательно, Z и есть искомый зенит.

Чтобы реализовать эту конструкцию в плоскости рисунка, повернём треугольник вокруг его гипотенузы (рис. 2(12)). Сейчас я буду считать, что фокальный круг задан, а потом объясню вам, как найти его по другим характерным деталям, имеющимся на данном рисунке. Для произвольной линии горизонта hl постройте прямоугольный треугольник с острым углом в точке B — основании перпендикуляра, опущенного

¹ Здесь и дальше полезно учитывать очевидную мнемонику: Z (zenith) — зенит; PP (picture plane) — плоскость рисунка; SP (sight plane) — плоскость взгляда; hl (horizontal line) — линия горизонта; C (center) — центр и т. п. — Прим. перев.

из C на hl -и вершиной прямого угла на фокальной окружности¹. Другой конец Z гипотенузы и будет зенитом для прямой hl . Аналогичным образом прямые, торчащие из некоторой «предметной» плоскости под произвольным углом θ ,² изображаются прямыми, проходящими через отвечающую θ точку на оси $B-Z$. Наиболее важны точка D , отвечающая $\theta = 45^\circ$, и точка D' , отвечающая $\theta = 135^\circ$, поскольку это исчезающие точки диагоналей квадрата, стороны которого сходятся соответственно в точках B и Z .

Геометры узнают в D' точку, *гармонически сопряжённую* точке D относительно пары точек Z - B . Последнее означает, что двойное отношение³ $CR(D'; Z, D, B) = -1$. Поскольку двойное отношение является «масштабной линейкой перспективы», оно заслуживает краткого отступления. Для тройки O - U - V точек, лежащих на одной прямой, ориентированной от O к V , формула

$$CR(X; O, U, V) = \frac{\langle X - O \rangle \langle U - V \rangle}{\langle X - V \rangle \langle U - O \rangle}$$

сопоставляет число каждой точке X этой прямой, если под выражением типа $\langle X - Q \rangle$ понимать взятое со знаком расстояние от Q до X . Обратите внимание на то, что функция CR принимает значения $0, 1, \infty$ при $X = O, U, V$. Мнемоника здесь такова: O —origin (начало); U —unit (единица); V —vanishing point (исчезающая точка). Двойное отношение отрицательно в точках, находящихся по ту же сторону от начала, что и наблюдатель, или за горизонтом. Если в качестве V взята идеальная точка прямой, то надо «сократить» два бесконечных члена; в результате получится равномерная шкала с единицей $\langle U - O \rangle$.

Математическая причина полезности двойного отношения заключается в его проективной инвариантности. Предположим, что две тройки O - U - V расположены на двух прямых так, что три прямые, проходящие через соответствующие точки этих троек, пересекаются в одной и той же точке. Назовём её их *фокусом* F . Связанные с этими тройками функции двойного отношения принимают равные значения в соответствующих точках X . Если, например (рис. 2(21)), даны два первых столба O и U телефонной линии вдоль железной дороги, идущей по степи и исчезающей в точке V , то вы можете «размножить» столбы следующим способом. Выберите любой удобный фокус F и точку A , не лежащую на прямой V - F . На прямой, проходящей через точку A параллельно V - F , шкала, порождаемая тройкой O - U - V при помощи F , будет равномерной, поскольку V переходит в идеальную точку.

Советую вам убедиться в указанной инвариантности двойного отношения, проделав соответствующее упражнение по тригонометрии.

¹ Гипотенуза этого треугольника должна лежать на прямой BC .—Прим. перев.

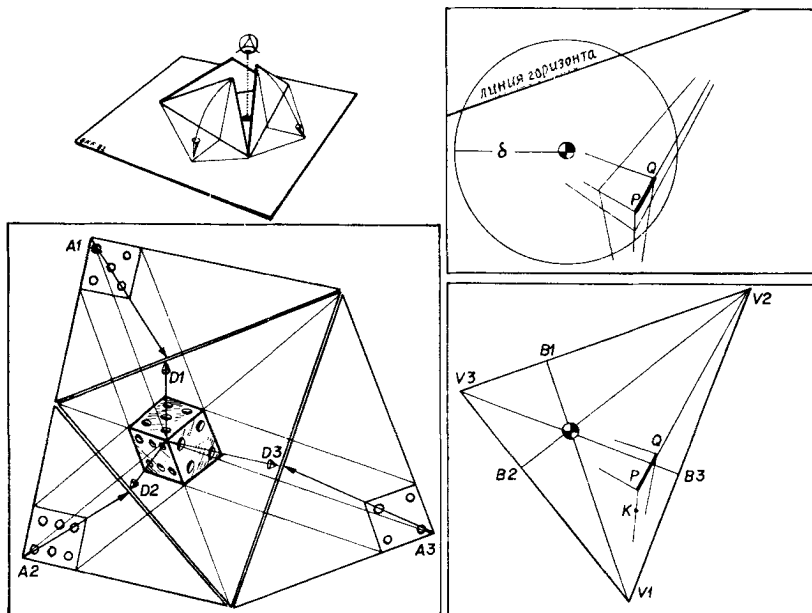
² К перпендикуляру к этой плоскости.—Прим. изд. ред.

³ По-английски cross-ratio, откуда используемая далее аббревиатура CR .—Прим. перев.

которое того стоит. Воспользовавшись теоремой синусов, покажите, что в двойном отношении член вида $\langle X - Q \rangle$ можно заменить на синус направленного угла QFX . Если F является идеальной точкой, то упомянутое выше соответствие осуществляется при помощи параллельных прямых. Следовательно, $\langle X - Q \rangle$ можно также заменить на разность координат x , если только рассматриваемая прямая не перпендикулярна оси x . Это упрощает машинное вычисление двойных отношений.

Рецепт построения куба (картинка 3)

Вторую задачу – дополнить ребро и грань до куба – тоже можно истолковать в терминах опрокидывания прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы в плоскость рисунка. Предположим, вы смотрите на угол куба, расположенного в пространстве, причём видны три грани. Вообразите, что эти грани бесконечно продолжены от угла, и затем придвиньте полученную треугольную пирамиду, перемещая её параллельно самой себе, к своему глазу. Этот «подзорный» конус, отвечающий кубу, пересекает плоскость рисунка по *обрамляющему треугольнику*, вершины которого представляют собой три точки схода рёбер куба. Три стороны обрамляющего треугольника являются линиями горизонта для граней куба. Теперь опрокиньте каждый из прямоугольных треугольников



Картинка 3. Рецепт построения куба.

ков, отсекаемых плоскостью рисунка от подозрного конуса, в плоскость рисунка. На рис. 3(11) вы видите, как подозрный конус раскрывается подобно створкам раковины, когда его грани откидываются наружу обрамляющего треугольника. Можно было бы сложить подозрный конус и внутрь обрамляющего треугольника.

Минутное размышление открывает ряд замечательных геометрических совпадений. Если продолжить три высоты откинутых треугольников внутрь обрамляющего треугольника (рис. 3(21)), то на своём пути к зенитам, находящимся в вершинах, они пройдут через фокальный центр. Точка, в которой встречаются высоты треугольника, — это его *ортоцентр*. Другими словами, ортоцентр остроугольного треугольника (рис. 3(22)) является также фокальным центром перспективного изображения, причём противолежащие вершины и стороны служат зенитами и горизонтами трёх взаимно ортогональных плоскостей. На рис. 3(21) в ортогональной проекции изображён игральный кубик, помещённый в вершину подозрного конуса. Снаружи обрамляющего треугольника показаны положения трёх видимых граней куба, после того как их опрокинули в плоскость рисунка. Обратите внимание, что для трёх указанных на рис. 3(21) диагоналей граней куба местоположение их исчезающих точек на обрамляющем треугольнике можно найти, продолжив диагонали трёх маленьких «откинутых» квадратов от AI до DI , $I = 1, 2, 3$.

Когда всё это стало понятным, вы готовы к рецепту, позволяющему построить куб 4(11), если на плоскости рисунка заданы местоположения ближайшей к наблюдателю вершины куба P , ребра $P-Q$ и линии горизонта для одной из граней, содержащих это ребро (рис. 3(12)). Постройте зенит VI для заданного горизонта (рис. 3(22)) при помощи фокального круга, как это было рассказано выше. Продолжите заданное ребро $P-Q$ до пересечения с линией горизонта в исчезающей точке $V2$. Продолжив перпендикуляр $B3-C$ к ребру $VI-V2$ за фокальный центр C , найдите третью вершину $V3$ обрамляющего треугольника. Четыре луча $P-V1$, $P-V3$, $Q-V1$ и $Q-V3$ изображают угол бесконечной плиты, имеющей толщину, равную длине ребра нашего куба. Чтобы вытесать из неё искомый куб, нам нужна ещё одна вершина K , например ближайшая к VI . Но K находится там, где $P-V1$ пересекает прямую, проходящую через $V2$ и ту вершину куба, в которой $Q-V1$ пересекает диагональ $P-D3$ (здесь-то нам и пригодились исчезающие точки диагоналей!). При этом получается бесконечный брус с квадратным сечением. Как только вы найдёте ещё одну вершину, скажем при помощи второй диагональной исчезающей точки, все оставшиеся построения становятся очевидными¹.

¹ На картинках 3 и 4 фокальный центр C помечен клетчатым кружком. Вообще советую читателю карандашиком перенести на картинку 4 обозначения из текста (ср. с картинкой 3). — *Прим. перев.*

Куб в трёх-, двух- и одноточечной перспективах (картинка 4)

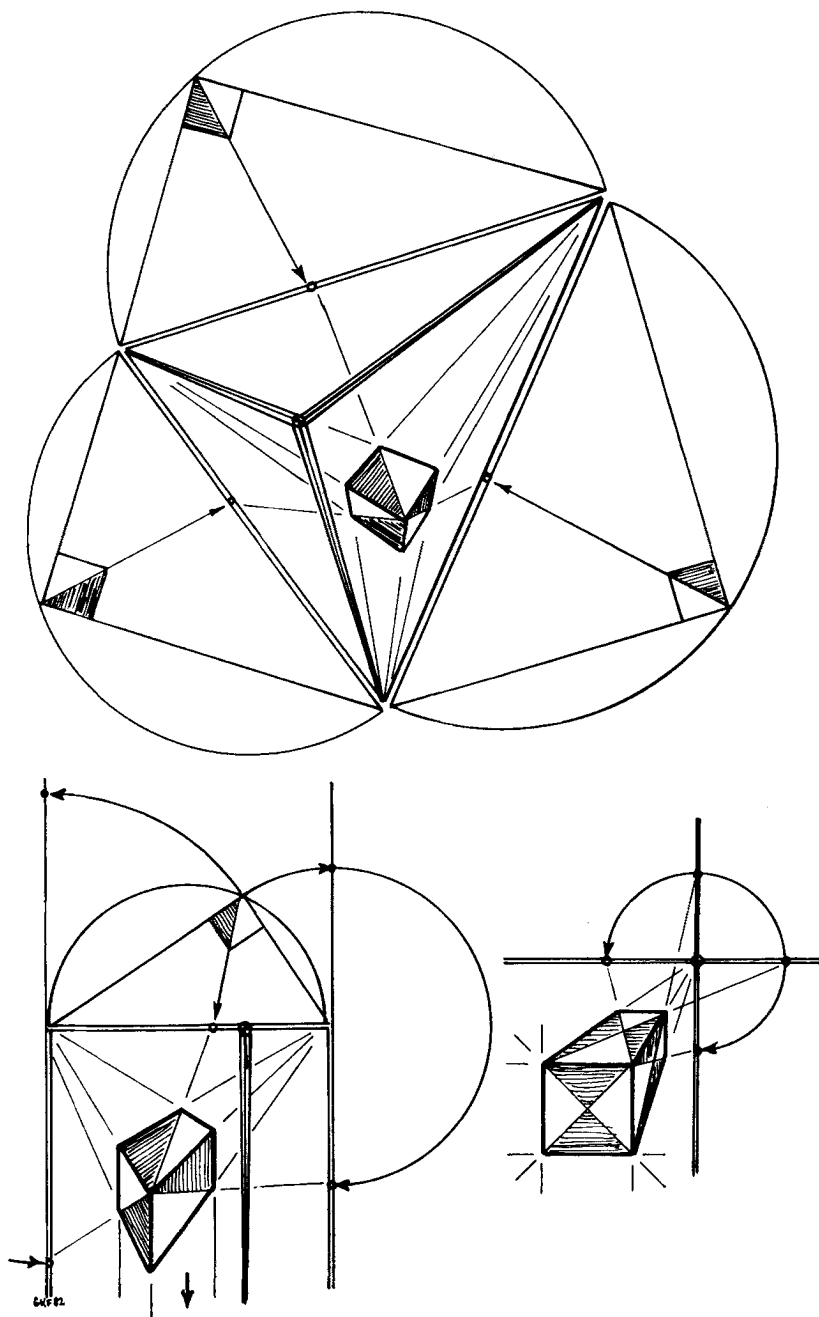
Чертёж 4(11) подводит итог этому рецепту в том случае, когда обрамляющий треугольник располагается в конечной части плоскости рисунка. Для того чтобы проверить, что вы поняли рецепт, вам надо пометить точки на этом чертеже в соответствии с рисунками 3(21) и 3(22). Затем аналогично пометьте точки на чертежах 4(21) и 4(22). Когда одна из граней рассматриваемого куба перпендикулярна плоскости рисунка (рис. 4(21)), линия горизонта этой грани проходит через фокальный центр, а её зенит является идеальной точкой плоскости рисунка. В таком случае говорят, что куб нарисован в *двухточечной перспективе*, поскольку только две из трёх исчезающих точек находятся в конечной части плоскости. Как и прежде, продолжите $P-Q$, чтобы найти $V2$. Поскольку показанный на рисунке прямоугольный треугольник был повернут на 90° , его можно восстановить, проведя отрезок $A1-C$, перпендикулярный к линии горизонта и по длине равный фокальному расстоянию. Затем постройте прямой угол $V2-A1-V3$ и так же, как и раньше, найдите местоположение диагональной исчезающей точки $D1$.

Диагональные исчезающие точки $D3$ и $D2$ можно найти более быстрым способом. Заметьте, что грань $A-V2-V1$ подозрительного конуса представляет собой прямоугольную полосу $V1-A-V2-V1$, опрокинутую в плоскость рисунка. Поскольку $A3-V2$ и $A1-V2$ получаются откидыванием одного и того же ребра подозрительного конуса, обе диагональные исчезающие точки $D3$ и $D'3$ лежат на окружности с центром $V2$, проходящей через $A1$ и $A3$.

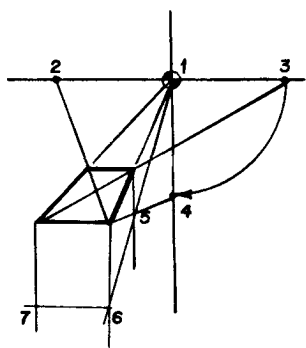
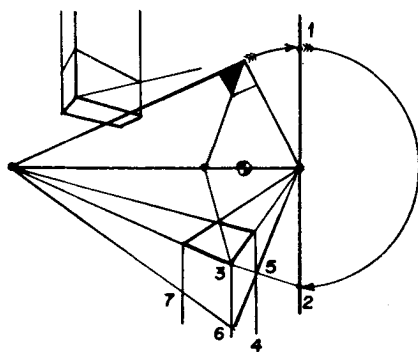
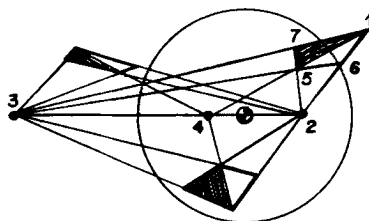
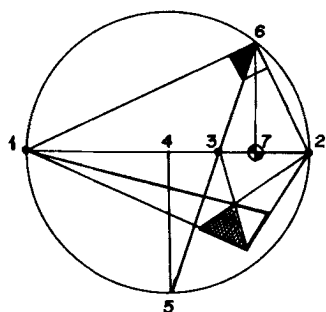
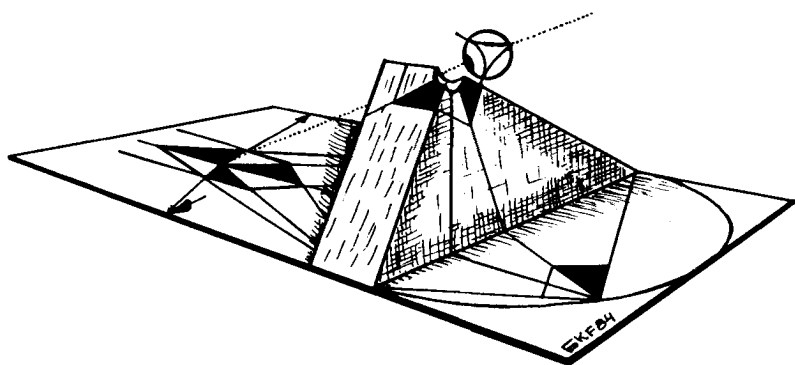
У куба в *одноточечной перспективе* одна из видимых граней параллельна плоскости рисунка. Следовательно, одна четверка рёбер сходится в фокальном центре, а точки схода двух других четвёрок уходят на бесконечность. Так как одно ребро подозрительного конуса перпендикулярно плоскости рисунка, то фокальная окружность проходит через все четыре диагональные исчезающие точки, находящиеся на двух взаимно перпендикулярных линиях горизонта. Третий горизонт представляет собой идеальную прямую плоскости рисунка. В традиционных курсах на основе этих специальных свойств одно- и двухточечной перспектив разрабатывают стратегии вычерчивания куба, которые значительно эффективнее, но и значительно сложнее моей.

В поисках куба (картинка 5)

Для того чтобы гарантировать, что все конечные исчезающие точки не вылезут за пределы рисунка, я выбирал маленькие фокальные расстояния. Трёхточечный куб на рис. 4(11) выглядит прекрасно, оба же других куба кажутся искажёнными. Несмотря на острый угол куба 4(21) и квадратную грань куба 4(22), оба они нарисованы в правильной перспективе. Необычайно близорукий наблюдатель увидел бы их «правильными» с



Картинка 4. Куб в трёх-, двух- и одноточечной перспективах.



Картинка 5. В поисках куба.

расстояния нескольких сантиметров над фокальным центром. Если вы постройте куб на том же рис. 4(11), но начав с ребра $P-Q$, расположенного вне обрамляющего треугольника, то куб будет выглядеть столь же искажённым.

Чтобы рассеивать сомнения скептиков в правильности перспективы, я пользуюсь картонным приспособлением, показанным на рис. 5(11). На этом рисунке изображена часть подозрительного конуса со смотровым глазком в вершине. Непрозрачный конус нужен для того, чтобы изолировать вас от окружающих визуальных ориентиров, когда вы будете смотреть на изображение куба в двухточечной перспективе, находящееся за пределами фокального круга. Поскольку это изображение может находиться довольно далеко от смотрового глазка, нет никакой необходимости делать фокальное расстояние, а значит, и модель большими.

Позвольте мне теперь применить мой рецепт, построив перспективу, в которой произвольный выпуклый четырёхугольник выглядит как квадрат. Идея этого построения принадлежит Бену Хэлперну. Продолжите противоположные стороны заданного четырёхугольника (рис. 5(21)), чтобы найти положение точек схода и горизонта 1-2. Продолжите диагональ четырёхугольника до её исчезающей точки 3 на горизонте. Постройте на отрезке 1-2 как на диаметре окружность и проведите её радиус 4-5, перпендикулярный к этому диаметру. Продолжите отрезок 5-3 до точки 6. Это будет биссектриса треугольника Фалеса 126. (Каждый из прилежащих углов равен 45° , поскольку «смотрит» на дугу в 90° .) Следовательно, фокальный центр S должен находиться где-то на высоте 6-7 или на её отражении 7-6' относительно диаметра. Поскольку фокальное расстояние является средним геометрическим отрезков 6- S и S -6', то оно будет максимальным в случае двухточечной перспективы, ибо тогда S лежит на диаметре, как нарисовано. Произвольные квадраты, параллельные данному, строятся так (рис. 5(22)): соедините какую-либо точку 1 с исчезающими точками 2, 3 и 4. Выберите на диагонали строящегося квадрата точку 5 и найдите оставшиеся вершины квадрата 6 и 7. Четырёхугольник выглядит всё менее «квадратным» по мере удаления от фокального круга. Чтобы построить куб 5(31), найдите диагональные исчезающие точки 1, 2 на горизонте грани, зенит которой совпадает с точкой схода перпендикулярных этой грани рёбер. Проведите отрезок 2-3 и, используя его точку пересечения 5 с одним из вертикальных рёбер, найдите точку 6, а затем и точку 7 на двух других вертикальных рёбрах. Построить куб в трёхточечной перспективе я предоставляю вам.

Если исходный «квадрат» является трапецией (рис. 5(32)), то примените рецепт для одноточечной перспективы. Однако когда обе исчезающие точки находятся на бесконечности, т.е. когда исходный четырёхугольник является параллелограммом, для того чтобы «увидеть» квадрат, вам придётся искать аффинную проекцию. Одно исключение запрячано на рис. 5(32).

Диагонали (картинка 6)

Масштаб, в котором большинство из нас склонно рисовать, соответствует фокальному расстоянию от 20 до 30 сантиметров. В этом случае большинство исчезающих точек попадает за пределы чертежа. Поэтому приходится выбирать между безукоризненно точной, но неестественно выглядящей перспективой и более естественными аппроксимациями, в которых положение точек и линий определяется приблизительно. Вот простой способ нарисовать третью прямую, перспективно параллельную двум данным, в случае когда точка схода V этих прямых недоступна. Пусть даны две прямые l_1 и l_2 , сходящиеся к V , и точка O . Построим прямую, проходящую через O по направлению к V . Проведём три параллельные прямые, пересекающие данные прямые, причём так, чтобы одна из крайних прямых проходила через O . Для случая когда O лежит внутри угла (с вершиной в V), образованного заданными прямыми (рис. 6(11)), в качестве одной из параллелей я воспользовался краем листа бумаги. Найдите точку 5, проведя прямую от O через точку пересечения диагоналей четырёхугольника 1324. Подобным же образом найдите точку 8, воспользовавшись точкой 5 и четырёхугольником 2467. Поскольку для длин отрезков выполняются такие пропорции:

$$|1O| : |O3| = |25| : |54| = |68| : |87|$$

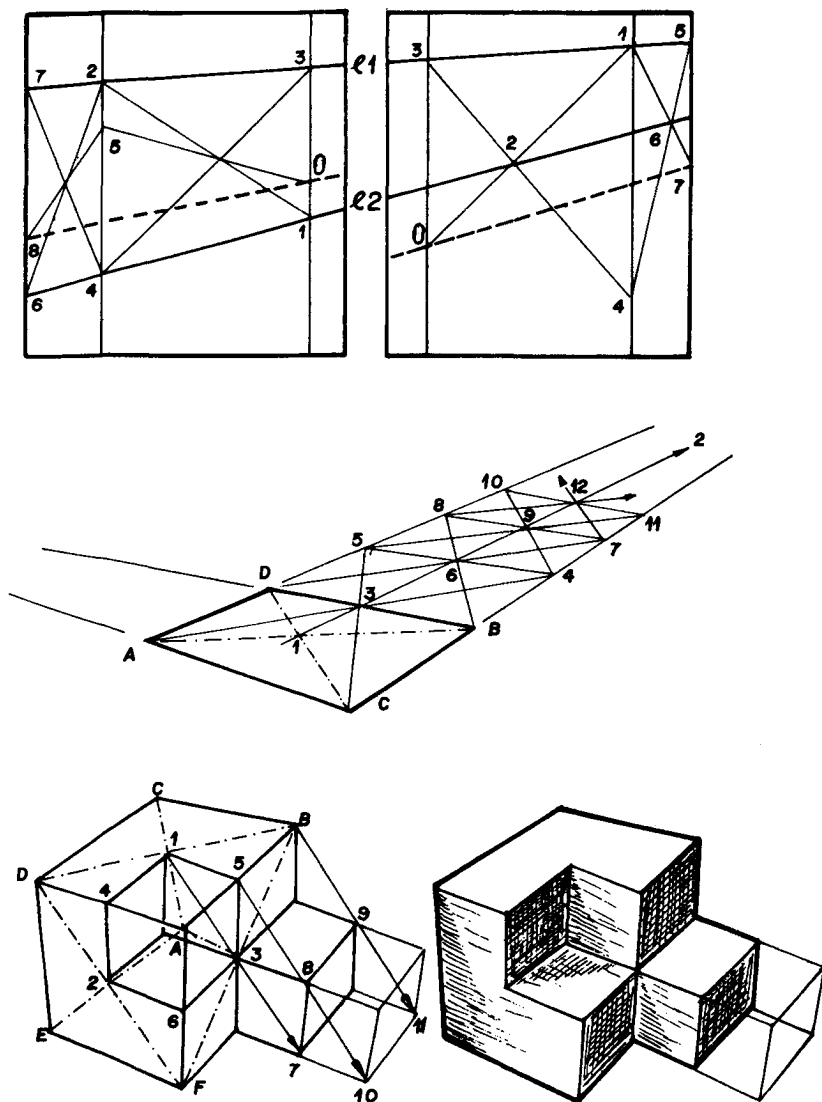
продолжение отрезка 8- O проходит через V . Для того случая, когда O находится снаружи указанного угла (рис. 6(12)), воспользуйтесь ближайшим к V краем бумаги в качестве одной из параллельных, найдите точку 2 на отрезке $O-1$, продолжите отрезок 3-2 до точки 4, найдите точку 6 на отрезке 4-5 и продолжите отрезок 1-6 до точки 7. Аналогичные пропорции показывают, что продолжение отрезка $O-7$ пройдёт через V .

Подразделение и «размножение» квадратов и кубов в перспективе при помощи точек пересечения диагоналей представляет собой удобный способ прикинуть положение характерных точек без сложного аппарата перспективных измерений. Например, рис. 6(21) показывает, как построить шахматную доску по исходному квадрату $ACBD$, не используя двойных отношений. Продолжите две противоположные стороны квадрата и проведите на глазок среднюю линию 1-2 этой «железнодорожной колеи» через точку пересечения диагоналей 1 и (недоступную) точку схода рельсов¹. Продолжите $A-3$ до точки 4 и постройте шпалу 4-5, на глазок прикинув положение точки схода двух первых шпал². Это даёт первый дубль квадрата. Продолжайте не останавливаясь.

В пространстве (рис. 6(31)) проведите диагонали в трёх видимых гранях данного перспективного куба $ABCDEF$. Через полученные центры 1, 2, 3 этих граней проведите на глаз, как и выше, средние линии. Тем

¹ Это можно сделать и точно, как было только что объяснено.—Прим. перев.

² В действительности на рис. 6 (21) используется другой способ нахождения точки 5, а именно тот же, что и для точки 4!—Прим. перев.



Картинка 6. Диагонали.

самым вы нашли середины рёбер, такие как 4, 5, 6. Этого достаточно, чтобы «вынуть» из куба кубик-восьмушку (рис. 6(32)). Продолжив 1-3 до средней линии основания, найдите точку 7, и вы уже можете пристроить к кубу восьмушку.

Колесо и ось (картинка 7)

Второе диагональное подразбиение перспективного квадрата на 16 плиток (рис. 7(11)) даёт удобный способ приближённо вписать в квадрат окружность. На рис. 7(12) показан соответствующий метрический квадрат. От каждой из четырёх вершин проведите по две диагонали в бордюрных четырёхплиточных прямоугольниках. Точки, в которых эти вспомогательные линии выходят из угловой плитки, лежат почти точно на вписанной окружности (снаружи от неё). Эти восемь точек являются симметричными отражениями, скажем, точки $(1/2, 7/8)^1$, а

$$(7/8)^2 + (7/8)^2 = (65/64) \approx (8/8)^2.$$

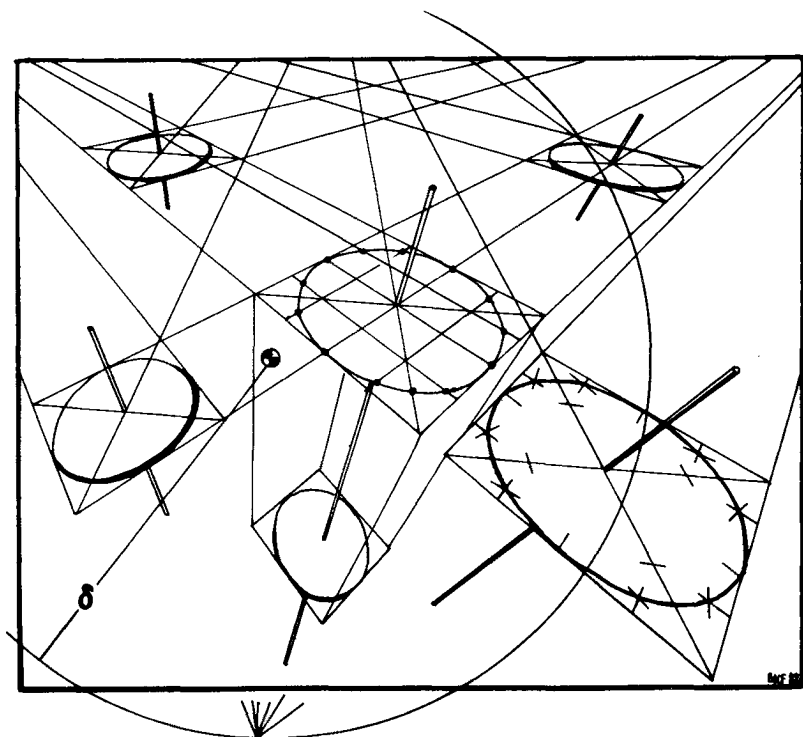
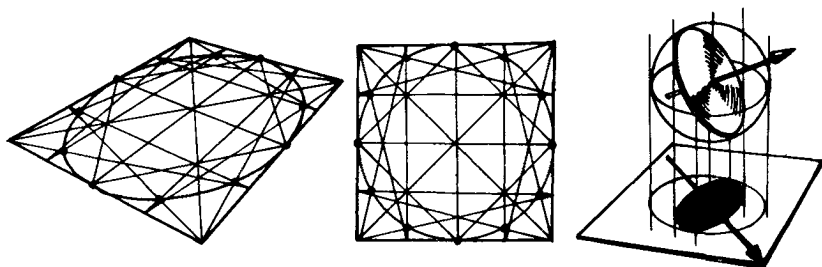
Теперь вместе с перспективными серединами сторон квадрата у вас есть 12 точек, через которые вы можете провести эллипс от руки или с помощью лекала.

Хорошим приближением для оси «колеса» будет отрезок, проходящий через центр перспективного квадрата в направлении меньшей оси эллипса, изображающего вписанную окружность. Это тем вернее, чем ближе изображение колеса к фокальному центру, поскольку там вид в перспективе практически совпадает с видом в ортогональной проекции. А в самый «полдень» (рис. 7(13)) ось колеса проецируется точно на малую ось эллиптической тени колеса на земле. По мере удаления изображения от фокального центра возрастает видимое искажение – если мы смотрим на рисунок с неподходящей точки зрения. На рис. 7(21) вы видите шесть параллельных колёс. Два верхних получаются из центрального переносом в двух перпендикулярных направлениях в его плоскости. Между прочим, эта плоскость наклонена к плоскости рисунка под углом примерно 45° , в чём вы можете убедиться, заметив, что её зенит лежит почти точно на фокальной окружности. Два более близких к зрителю колеса в той же плоскости имеют диаметры $1/2$ и $3/4^2$ соответственно. Нижнее колесо получается из центрального переносом вдоль его оси. Вы можете уменьшить искажения, если будете смотреть на рисунок через глазок (продырявьте перфокарту) с расстояния δ над фокальным центром.

Есть много других полезных способов рисовать от руки в перспективе, которые можно найти в монографии Джея Доблина [Doblin 1956]. Он предлагает остроумный метод, позволяющий свести к минимуму краевые искажения, которые возникают, если смотреть на рисунок с расстояния, намного большего, чем фокусное. Например, чтобы на-

¹ В очевидной системе координат, связанной с квадратом. – *Прим. перев.*

² Диаметра центрального колеса. – *Прим. перев.*



Картинка 7. Колесо и ось.

рисовать шахматную доску, он фиксирует две точки схода¹ на линии горизонта, но для каждого квадрата доски берёт свои диагональные исчезающие точки. При этом фокальный центр каждого квадрата помещается на вертикальной линии, проходящей через ближайший угол доски. Блуждающий фокальный центр Доблина напоминает панорамную фотографию и живопись 15-го века тем, что «потакает» привычке зрителя внимательно рассматривать детали, поднося рисунок прямо к глазам.

Аксонометрия (картинка 8)

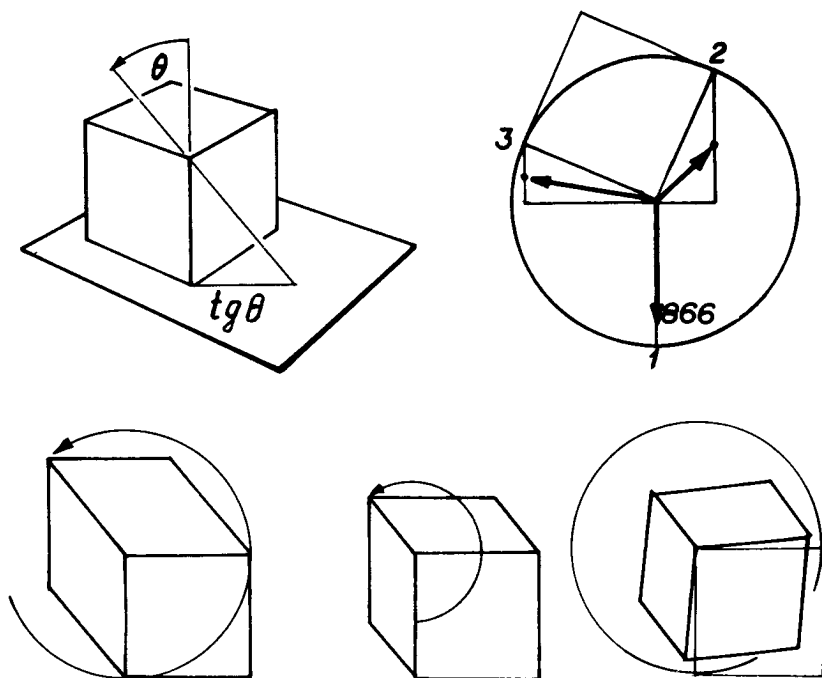
Математик, собирающийся нарисовать трёхмерный рисунок, обычно начинает с системы координатных осей. Как правило, он рисует прямой угол, а затем проводит через его вершину третью ось той или иной длины в некотором направлении. Для удобства рассказа дополним этот прямой угол до квадрата. Чтобы определить положение пространственной точки (x, y, z) на плоскости рисунка, нужно отметить точку (x, y) в сетке, порождённой указанным квадратом, и сдвинуть эту точку параллельно третьей оси на расстояние, равное z -кратной длине этой оси. То что при этом непременно получится косоугольная проекция, можно понять следующим образом. Представьте себе куб, построенный над лежащим в плоскости рисунка координатным квадратом (рис. 8(11)). Тогда третья координатная ось будет тенью ребра куба, перпендикулярного этой плоскости. Если лучи-проекторы отклоняются от нормали к плоскости рисунка на угол θ , то отношение длины тени к длине ребра равно $\operatorname{tg} \theta$.

В *кавалерной проекции*² все оси в плоскости рисунка имеют одну и ту же длину и две образуют прямой угол (рис. 8(21)). Следовательно, лучи-проекторы отклоняются от нормали на 45° . Чтобы уменьшить искажение, свойственное этой очень косою проекции, в *кабинетной проекции* длину третьей оси берут равной половине стороны квадрата (рис. 8(22)). Это соответствует отклонению лучей-проекторов от нормали на $26^\circ 34'$. Немного расширив прямой угол кабинетной проекции, можно получить ортогональную проекцию куба (рис. 8(23)).

Вот поучительный способ, позволяющий исследовать условия, при которых заданный набор осей в плоскости рисунка соответствует ортогональной проекции какого-нибудь куба в пространстве. Напомним, что 3×3 -матрицы P , у которых транспонированная матрица равняется обратной ($P^T = P^{-1}$), называют *ортогональными*. (Они образуют *ортогональную группу*.) Строго говоря, их следовало бы называть *ортонормальными*, поскольку условие $PP^T = I$ означает, что три вектора-столбца являются взаимно перпендикулярными единичными векторами. Обычно мы предпочитаем *правые* тройки векторов, для которых

¹ Для её горизонталей и вертикалей.—Прим. изд. ред.

² Другое её название — *косоугольная фронтальная диметрическая*.—Прим. ред.



Картинка 8. Аксонометрия.

$\det(P) = +1$ и третий вектор-столбец является векторным произведением первых двух. Такие матрицы образуют группу $SO(3)$ специальных (или сохраняющих ориентацию) ортогональных преобразований в трёхмерном пространстве. Далее, ясно, что три вектора-строки матрицы P тоже «ортонормированны», так как они являются столбцами транспонированной матрицы. Теперь предположим, что ваш выбор осей в плоскости рисунка описывается 2×3 -матрицей

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда проекция будет ортогональной в том и только в том случае, если

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad (1)$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \quad (2)$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0. \quad (3)$$

Чтобы привести матрицу M к канонической форме, повернём плоскость рисунка так, чтобы $y_1 = 0$, а x_1 равнялось косинусу C_1 угла θ_1 ,

образуемого первым ребром куба с плоскостью рисунка. Тогда уравнение (2) говорит, что $y_2 = S_2$, а $y_3 = C_2$, где S_2 и C_2 — синус и косинус некоторого подходящего угла θ_2 . Уравнение (3) утверждает теперь, что числа (x_2, x_3) пропорциональны числам $(C_2, -S_2)$. Поэтому, в силу уравнения (1), матрица M должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} C_1 & S_1 C_2 & -S_1 C_2 \\ 0 & S_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Геометрическая интерпретация этой канонической формы дана на рис. 8(12). Выберем для первой оси направление, помеченное точкой 1 на единичной окружности, и начертим квадрат с диагональю 2-3, вторая диагональ которого образует угол θ_2 с направлением первой оси. (Здесь $\theta_2 = 155^\circ$ без какой-либо особенной причины.) Если первая ось подверглась сжатию с коэффициентом C_1 , то у двух других должны подвергнуться сжатию с коэффициентом S_1 их компоненты, параллельные первой оси. В примере 8(12) угол θ_1 равен 30° , так что $S_1 = 1/2$ и ортогональная коррекция выглядит, как показано на рисунке. Поскольку проекция 8(23) получена небольшим изменением кабинетной, то $C_1 = 1/2$ по определению. Поэтому сдвиг, превращающий прямой угол в тупой, укорачивает соответствующие компоненты лишь примерно на 13%. Следовательно, кабинетная проекция действительно близка к ортогональной.

С другой стороны, если любой ценой нужно сохранить три заданных заранее направления, то подобрать длины осей так, чтобы получилась ортогональная проекция, можно при выполнении некоторого условия¹. Вычтите соотношение (2) из (1), удвойте соотношение (3) и перейдите к комплексной арифметике, положив $z = x + iy$. Тогда условие ортогональности проекции принимает такой вид:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0,$$

т.е. комплексные квадраты трёх осей «сбалансированы»: их центр тяжести лежит в начале координат.

Ортогональная проекция называется *изометрической*, если все три оси имеют равную длину. Из последнего квадратного уравнения следует, что существует только одна изометрическая проекция. Её оси расходятся под углами 120° , и контур куба представляет собой правильный шестиугольник. Менее очевидным, но настолько же непосредственным следствием является *условие тупого угла*, которому должны удовлетворять три заданных направления, чтобы соответствовать какой-нибудь ортогональной проекции. Можно предположить, что заданные направления порождают всю плоскость², т.е. что мы рисуем ближайшую к нам

¹ Речь идёт об условии тупого угла (см. ниже).— *Прим. перев.*

² При образовании линейных комбинаций с *неотрицательными* коэффициентами.— *Прим. перев.*

вершину куба. Допустим, что наименьший из трёх углов между заданными направлениями – это угол между z_1 и z_2 и что $z_1 = 1$. Тогда, в силу нашего предположения, z_3 находится в третьем квадранте. Следовательно, его квадрат лежит в верхней полуплоскости. Если бы z_2 находилось в первом квадранте, то все три квадрата одновременно лежали бы в верхней полуплоскости и условие на сумму квадратов было бы нарушено. Обратно, если все три угла являются тупыми, то z_2 находится во втором квадранте, его квадрат лежит в нижней полуплоскости и при подходящих положительных коэффициентах всё уравнивается¹.

Всякие ограничения на выбор осей в плоскости рисунка снимаются, если вы ничего не имеете против безобразных косоугольных проекций. Наклон лучей-проекторов можно найти алгебраически следующим образом. Для всякой 2×3 -матрицы M ранга 2 существуют ортогональная 2×2 -матрица P (вращение) и диагональная 2×2 -матрица Q (преобразование масштабов), такие что

$$I = QPMM^T P^T Q^T.$$

Вектор-столбцы матрицы P – это единичные собственные векторы положительно-определённой симметричной 2×2 -матрицы MM^T . Квадратные корни q_1, q_2 ($q_1 < q_2$) из соответствующих собственных значений являются диагональными элементами матрицы Q . Лучи-проекторы отклоняются от нормали к плоскости рисунка на угол $\arccos(q_1/q_2)$ в направлении большего собственного значения матрицы MM^T . Вам стоит поупражняться в искусстве обращения с матрицами и проверить это утверждение для первого рассмотренного нами случая (рис. 8(11)).

Оси, обычно выбираемые математиками, задаются матрицей вида

$$M = \begin{pmatrix} rC & 1 & 0 \\ rS & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что $r = \tan \theta$, где θ – угол отклонения лучей-проекторов от нормали к плоскости рисунка в направлении единичного вектора $\langle C, S \rangle$.

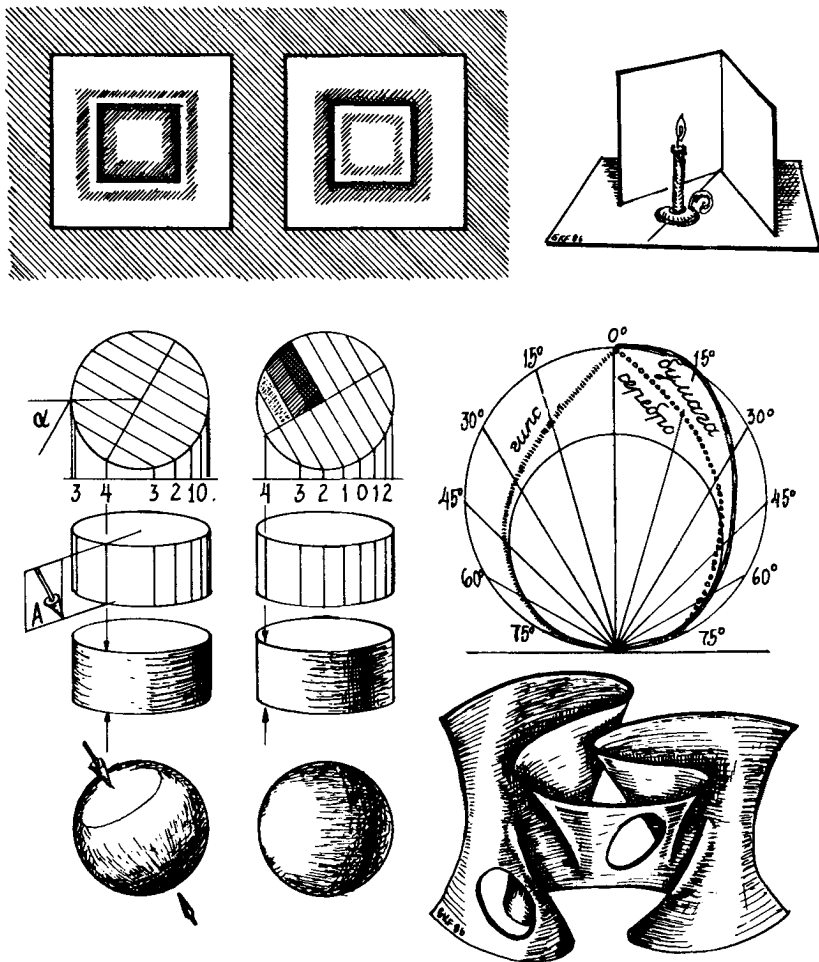
Светотень (картинка 9)

Геометрическая теория светотени берёт свое начало в двух трактатах восемнадцатого века. Трактат Иоганна Ламберта «*Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum at umbrae*»² появился в 1760 г., и в том же году было опубликовано написанное в 1729 г. сочинение Пьера Буве «*Traité d'optique sur la gradation de la lumière*»³ (см. [Rohn – Pappe-

¹ Здесь, по сути дела, объясняется тот факт, что если три комплексных числа попарно образуют тупые углы, то то же верно и для их квадратов. – *Прим. перев.*

² «Фотометрия, или об измерении и градациях света, цвета и тени» (лат.). – *Прим. изд. ред.*

³ «Трактат по оптике о градациях света» (франц.). – *Прим. изд. ред.*



Картинка 9. Светотень.

ritz 1906, с. 193]). Здесь меня не будет интересовать проблема изображения теней, отбрасываемых одним предметом на другой. Форма такой тени подчиняется тем же объективным законам линейной перспективы (см. [Крылов–Лобандиевский–Мэн 1968]). Вопрос, который я хочу рассмотреть, заключается в том, какие части изображённого объекта нужно рисовать темнее, чем другие, и насколько именно. Градации видимой яркости на искривлённой поверхности зависят в конечном счёте и от физиологии человеческого глаза – фактора, значение которого было вполне понято лишь с появлением работы Эрнста Маха [Mach 1886].

Поскольку штриховка рисунков в этой книге преследует исключительно дидактические цели, а набор используемых мною изобразительных средств весьма ограничен, в своём обзоре теории я буду совсем краток. Говоря об оптических иллюзиях при восприятии изображений, вроде той иллюзии, о которой идёт речь в следующей главе, Скотт Ким [Kim 1978 с. 210] называет «зрение... приобретенным умением. При переводе двумерных образов в трёхмерные объекты используется специальный словарь – накопленный запас возможных моделей». Поэтому применяемая мною техника штриховки не претендует на точность или реализм. Она всего лишь кодирует информацию о взаимном расположении точек и помогает отличать закруглённые контуры от острых краёв. В её основе лежат несколько оптических принципов.

Первый принцип – это *закон обратных квадратов*, которым объясняется то наблюдение, что свет от 4 свечей на расстоянии 2 метров кажется таким же ярким, как от 1 свечи на расстоянии 1 метра. Следовательно, при прочих равных условиях, если две поверхности частично перекрываются, то видимая часть дальней поверхности должна быть темнее ближней¹.

Однако непрактично использовать столько оттенков серого, сколько их требуется при строгом соблюдении этого принципа. Вместо этого я полагаюсь на следующую оптическую иллюзию. *Эффект Маха* состоит в том, что мы видим яркую линию, параллельную белому полю, на прилегающем тёмном поле, и наоборот. Это результат латерального торможения клеток сетчатки глаза. Убедительно иллюстрированное объяснение этого эффекта (а также других иллюзий) вы найдёте в статье Колина Блэкмора в сборнике [Gombrich–Gregory 1973]. Чтобы одна из двух смежных одинаково серых областей рисунка казалась в целом более яркой, чем другая, Блэкмор использует резкий локальный перепад яркости вдоль границы. Вот пример реализации этого принципа. Легче увидеть, что в большом квадрате 9(11) имеется квадратная дыра, а перед большим квадратом 9(12) висит маленький квадратик, чем наоборот. А между тем эти два фрагмента отличаются лишь последовательностью оттенков серого на границе маленького квадратика.

Такие правила для штриховки, как *закон косинусов Ламберта*, должны были бы объяснять тот факт, что светящиеся сферы вроде Солнца, а также освещённые сферы вроде Луны кажутся равномерно яркими. Обе выглядят как плоские диски. Рассмотрим совсем коротко случай Луны. Если бы она была совершенным зеркалом, то мы бы видели Солнце отраженным ровно в одной точке, так называемой *точке блеска* (Glanzpunkt²). Но имеющиеся «дефекты» поверхности, очевидно, рассеивают непоглощённые лучи света во всех направлениях. Далее, для элемента

¹ В том, разумеется, случае, когда мы смотрим со стороны источника света. – *Прим. перев.*

² Это немецкий термин, калькой с которого является английское brilliant point. Отечественные художники говорят в таких случаях о *блике*. – *Прим. изд. ред.*

поверхности, видимого под углом β к направлению его нормали, площадь его образа на сетчатке пропорциональна $\cos \beta$. Предположим вместе с Ламбертом, что и сила света, излучаемого элементом поверхности в направлении β , тоже пропорциональна $\cos \beta$. Тогда сетчатка будет получать одинаковое количество света с единицы площади от каждого участка светящейся сферы. Она будет казаться плоской. Однако же энергия на единицу площади, получаемая поверхностью, когда она освещена одним удалённым источником (Солнцем), пропорциональна косинусу угла падения. Таким образом, степень видимой яркости искривлённой поверхности, подчиняющейся закону Ламберта, пропорциональна косинусу угла падения света и не зависит от угла, под которым она видна. Иллюзия полной луны должна иметь какое-то другое объяснение.

Об одном из экспериментов Ламберта, описанном у Кристиана Винера [Wiener 1884, с. 394], даёт представление рис. 9(13). Две грани бумажного двугранного угла, одинаково освещённые источником света, который расположен на биссектрисе угла, выглядят одинаково яркими и проецируются через линзу в одинаково яркие образы на экране независимо от того, чему равен угол зрения β .

Кривые равной освещённости на данной поверхности называются *изофотами*. На цилиндрической поверхности изофотами служат её образующие¹ (рис. 9(31) и 9(32)); на сфере ими будут окружности, перпендикулярные оси, проходящей через точку блеска. На рисунках 9(21)–9(51) эта ось наклонена под углом A к базовой горизонтальной плоскости, а содержащая её вертикальная плоскость образует угол 60° с плоскостью рисунка. Пусть α – угол падения в плане (см. вид сверху 9(21)). Тогда косинус действительного угла падения равен² $\cos A \cos \alpha$, и с помощью вида сверху можно находить положение изофот (рис. 9(31)). Разделите диаметр, проходящий через точку блеска, на 8 равных частей – 4 для освещённой половины и 4 для теневой. Освещённость на изофоте, помеченной цифрой 3, составляет $3/4$ освещённости на изофоте, помеченной цифрой 4. На рисунках 9(22)–9(52) источник света смещён.

С каждым источником света принято связывать *задний свет*. Это свет меньшей силы, идущий навстречу свету от источника. На рис. 9(51) задний свет (маленькая стрелка) мало что меняет, а вот шар 9(52) становится при подсветке сзади гораздо объёмнее. Убедитесь в этом, зачернив на ксерокопе рисунков 9(42) и 9(52) их теневую часть.

Как вы, вероятно, уже заметили, я предпочитаю выполнять штриховку при помощи сеток параллельных кривых на поверхности. Рисовать их быстрее, чем наносить случайные точки, и они лучше выдерживают ксерокопирование, чем сплошные серые или чёрные поля. Не так очевидны два дополнительных преимущества. Штриховка с «длиной волны» в две ширины пера даёт *полутон* (рис. 9(22)). Если нанести

¹ В случае бесконечно удалённого источника света. – Прим. перев.

² Для цилиндра. Для сферы – пропорционален. – Прим. изд. ред.

поверх такой сетки ещё одну с той же длиной волны, то яркость уменьшится ещё вдвое и получится *четвертьтон*. Далее, «полутоновая» штриховка пунктиром дает впечатление $\frac{3}{4}$ тона. Направление линий штриховки тоже имеет значение. Единство направления линии создаёт впечатление целостности листа поверхности, частично скрытого от глаз наблюдателя более низким листом, как на рис. 9(12). На рис. 9(11) направление сетки в окошке не такое, как на общем для рис. 9(11) и 9(12) заднем плане. Неясно, что вы видите – задний план или ещё один, третий, уровень. Чтобы проверить эту иллюзию, замените на ксерокопии рисунка маленький квадратик квадратиком, заштрихованным в том же направлении, что и задний план.

Наблюдаемые отклонения освещённости матовых поверхностей от закона Ламберта объясняются разными факторами. Посмотрите на диаграмму (9.23), представляющую собой воспроизведение рисунка 273 из книги [Wiener 1884], суммирующего результаты экспериментов Буге. Три материала – гипс, матированное серебро и чертёжная бумага – освещались под нулевым углом падения (солнце за спиной), и измерялся свет, отражаемый в разных направлениях. (Понять диаграмму легче, если представлять себе сферу и неподвижного наблюдателя.) Две окружности на диаграмме описывают закон Ламберта при двух уровнях отражательной способности. (Меньший диаметр составляет 74% от большего, который соответствует освещённости в точке блеска.) Например, при угле отражения 60° соответствующая хорда равна половине диаметра, так как $\cos 60^\circ = 1/2$. Ближе к краю освещённой части сферы все три материала оказываются более тусклыми, чем предсказывает закон Ламберта. С другой стороны, можно считать, что более яркими вблизи точки блеска они кажутся из-за того, что не вполне матовые и отражают часть света как зеркало.

Опытные преподаватели рисования, такие как Кимон Николаидес [Nicolaidēs 1975], полагаются в основном на эмпирические правила, которые отражают только качественную сторону законов геометрической фотометрии. В уроке, посвящённом изображению драпировок, он резюмирует эти правила следующим образом. У каждой складки надо различать (по крайней мере) три участка. Обращённая к вам верхушка должна оставаться белой. Правая и левая стороны – серые (закон Ламберта). Основание, с которого складка поднимается, – тёмно-серое, но не чёрное (закон обратных квадратов). Чёрный цвет резервируется для *подрезки* (принцип Маха). Заимствуя этот термин у скульпторов, Николаидес [Nicolaidēs 1975, с. 112 и далее] говорит: «Там, где сторона подворачивается и становится невидимой, под краем складки возникает подрезка... [Её] нужно показывать при помощи чёрной линии, которая сходит на нет при удалении от края складки, создавая впечатление, что карандаш был подsunут под подвёрнутую складку с полным нажимом, а выходит оттуда уже с меньшим нажимом. Так же как скульптор уменьшает нажим резца при выходе из-под подрезки.» Расположение этих деталей на вашем рисунке «должно быть настолько ясным, чтобы

резчик по дереву мог вырезать его из куска дерева без дополнительных объяснений».

Я приспособил правила Николаидеса к изогнутым поверхностям начертательной топологии. У поверхности 9(53) имеются 4 сборки и два окна. На затемнение заднего плана, как на рис. 9(11), уходит слишком много времени. Поэтому контуры складок просто сделаны пожирнее, кроме тех мест, где они переходят в подрезку. Там контраст ещё усиливает линия Маха.

Такие эмпирические правила неизбежно вступают в противоречие друг с другом, и в таком случае для начертательного тополога самым лучшим будет позаимствовать графическое решение у художника-мастера. Сокровищницей решённых проблем из области линейной и воздушной перспективы служат работы Морица Эшера. Следующая глава, мой первый рассказ в картинках,— об одном из самых драгоценных среди этих сокровищ Эшера.

Невозможный угольник

Мало кто из математиков никогда не размышлял о великолепном «Водопаде» Морица Эшера. На этой гравюре убедительно изображено наливное и одновременно подливное водяное колесо, которое приводится в движение нескончаемым замкнутым потоком воды. Вода стекает от основания колеса по зигзагообразному мельничному лотку, поддерживаемому двумя башнями, и снова выливается из него двумя этажами выше колеса.

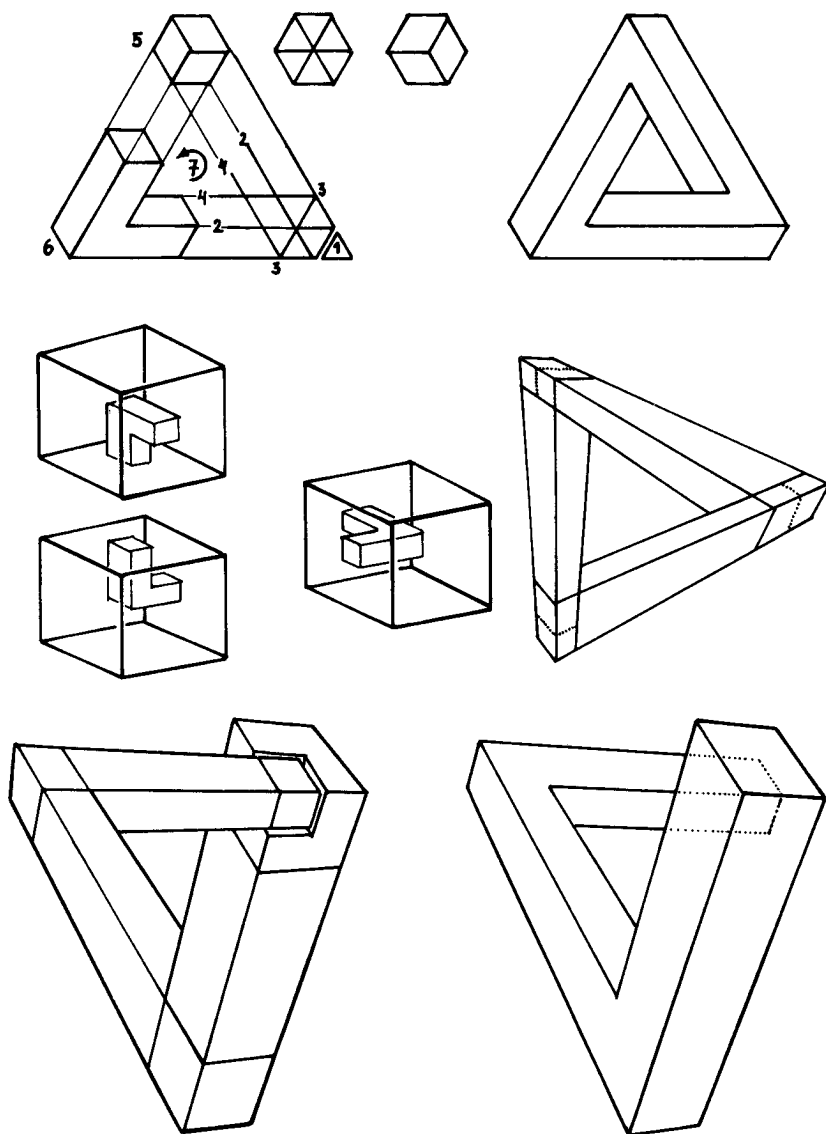
Угольник Пенроузов (картинка 1)

Графический принцип, скрывающийся за этой иллюзией, обязан своей формулировкой психологу Л. С. Пенроузу и его сыну Роджеру, физику [Penrose – Penrose 1958]. *Угольник*¹ Пенроузов состоит из трёх брусков квадратного сечения, расположенных в трёх взаимно перпендикулярных направлениях; каждый соединяется со следующим под прямым углом; всё это помещается в трёхмерном пространстве (рис. 1(12)). Вот простой рецепт, как нарисовать эту изометрическую проекцию угольника Пенроузов (см. рис. 1(11)). 1) Обрежьте уголки у равностороннего треугольника по линиям, параллельным сторонам; 2) проведите внутри обрезанного треугольника параллели к сторонам; 3) ещё раз «обкорнай-те» углы и 4) ещё раз проведите внутри параллели; 5) представьте себе в одном из углов какой-нибудь из двух возможных кубов; 6) продолжите его до L-образной «штуки» и 7) «прогоните» эту конструкцию по кругу. Если бы вы выбрали другой куб (второй «довесок» к рис. 1(11)), то угольник был бы «закручен» в другую сторону.

Хотя изометрическая форма этой иллюзии² самая удобная, в качестве исходного годится любой треугольник. Так, неравносторонний треугольник использован на рис. 1(21), который изображает угольник Пенроузов, разорванный на три L-образных куса, заключённых в кубические окрестности. Точно так же необязательно при построении невозможного рисунка пользоваться аффинной проекцией (ортогональ-

¹ В оригинале английский неологизм *tribar* (буквально: трёхбрусник, трёх-полосник). – *Прим. изд. ред.*

² Речь идёт об изометрической проекции из гл. 3. – *Прим. ред.*



Картинка 1. Угольник Пенроузов.

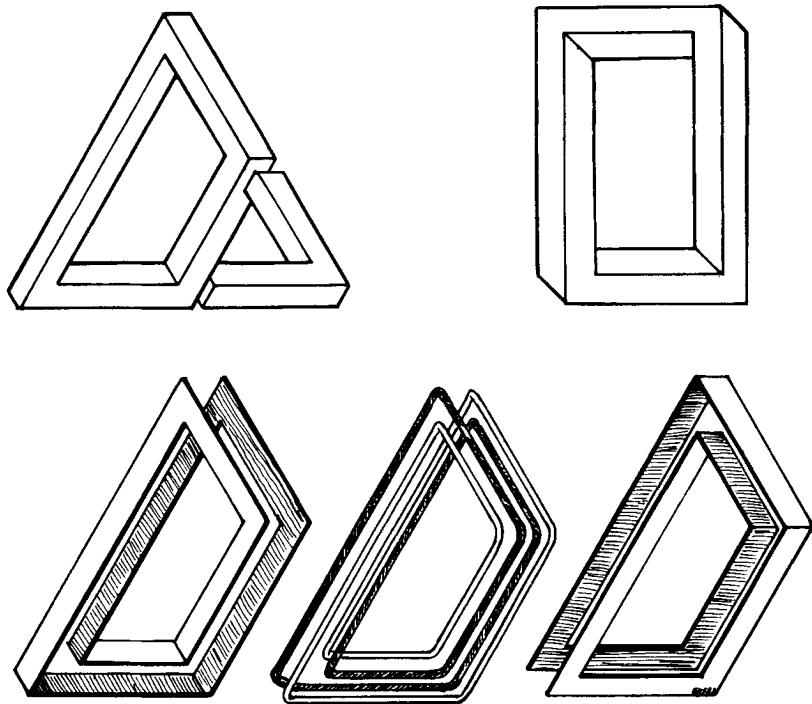
ной или косой). Сами Пенроузы нарисовали треугольник, у которого каждый брусок имеет свою точку схода (рис. 1(22)), но глобальная перспектива на рисунке отсутствует. В трёхточечной перспективе угольник 1(22), обладающий вращательной симметрией, очевидно, не может сохранять постоянное сечение. У угла его поперечное сечение выглядит как прямоугольник с отношением сторон 2:1, а посередине сжимается в квадрат, чтобы на другом конце правильно примкнуть к следующему бруску. При аффинной проекции параллельные прямые остаются параллельными и предмет не сокращается в размерах при удалении от наблюдателя. При изображении же в перспективе угольник, «выходящий» из углового кубика, замыкается посредством кубика, меньшего, чем исходный. Иллюзия 1(31) нарисована правильно в смысле перспективы, но замыкается «неправильно». Правильное замыкание 1(32) показывает, почему угольник Пенроузов в действительности невозможен в трёхмерном пространстве.

Невозможный четырёхугольник (картинка 2)

Одну родственную иллюзию исследовал Таддиус Кауан [Cowan 1974]. Если «усечь» изометрический угольник Пенроузов, то получится невозможный четырёхугольник (рис. 2(11)). Менее убедительную, но более симметричную косоугольную проекцию 2(12) можно нарисовать с помощью «утроенного» прямоугольника (надо добавить 4 диагонали и стереть 26 сторон у 16 маленьких квадратиков в углах). Закодировав информацию об углах в терминах теории групп кос, Кауан нашёл 27 способов сборки таких фигур, из которых 21 изображают невозможные в трёхмерном пространстве объекты. Проследите за порядком граней при обходе вокруг (кажущегося) многогранника 2(11) и обратите внимание на то, как его тороидальная поверхность распадается вдоль рёбер на две ленточки 2(21) и 2(23). Каждая ленточка *закручивается* на один оборот и один раз *завивается*¹, а два её края зацеплены с коэффициентом 2. Итак, мы получаем прелестный пример к теореме Джима Уайта, гласящей: «Коэффициент зацепления равняется числу закручиваний плюс число витков» [White 1969]. Я ещё вернусь к этому соотношению в последнем рассказе в картинках.

Тонкий анализ угольника Пенроузов, вскрывающий глубинную природу этой иллюзии, позволил Скотту Киму [Kim 1978] построить её четырёхмерный аналог. В сущности Ким сконструировал трёхмерный полиэдр, который обитателю четырёхмерного пространства показался бы рисунком невозможного четырёхмерного объекта, выполненным в изометрической проекции со скрытыми «гранями».

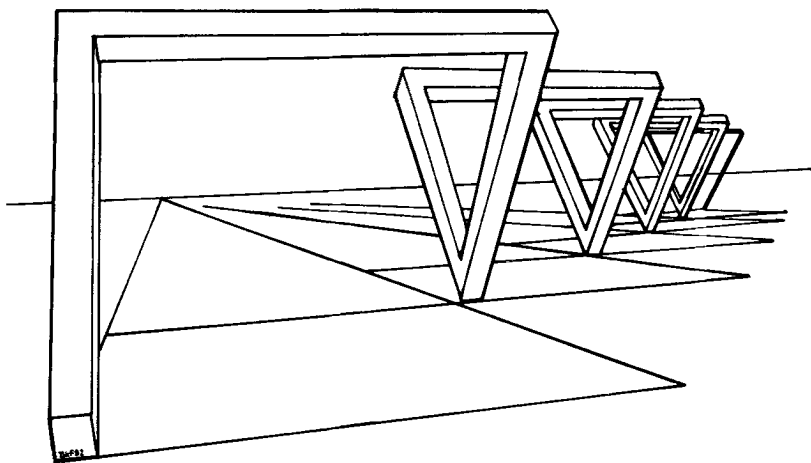
¹ Смысл этих терминов поясняется при обсуждении картинки 7 в гл. 8.— *Прим. перев.*



Картинка 2. Невозможный четырёхугольник.

Трубопровод (картинка 3)

Мой рассказ об угольнике Пенроузов отличается от остальных тем, что начинается с принятия на веру утверждения, что рисунок несёт информацию о некотором многограннике, помещающемся если и не в знакомом нам трёхмерном пространстве, то в каком-то другом евклидовом многообразии. Если правильно интерпретировать рисунок, из него можно извлечь способ построения настоящего жилища для невозможного угольника. Простейший, предложенный мне Джоном Стиллуэллом, состоит в том, чтобы сначала расположить три последовательных бруска так, как указано на картинке, при этом концевая точка (в горизонтальной плоскости) будет отстоять от начальной на расстоянии в $\sqrt{3}$ раз большем длины бруска. Повторение этой процедуры порождает бесконечный спиральный «трубопровод». Бесконечная циклическая группа Z , порождённая сдвигом трубопровода на один «шаг», действует на всём евклидовом трёхмерном пространстве R^3 . Факторпространство R^3/Z топологически есть не что иное, как трёхмерный цилиндр $S^1 \times R^2$.



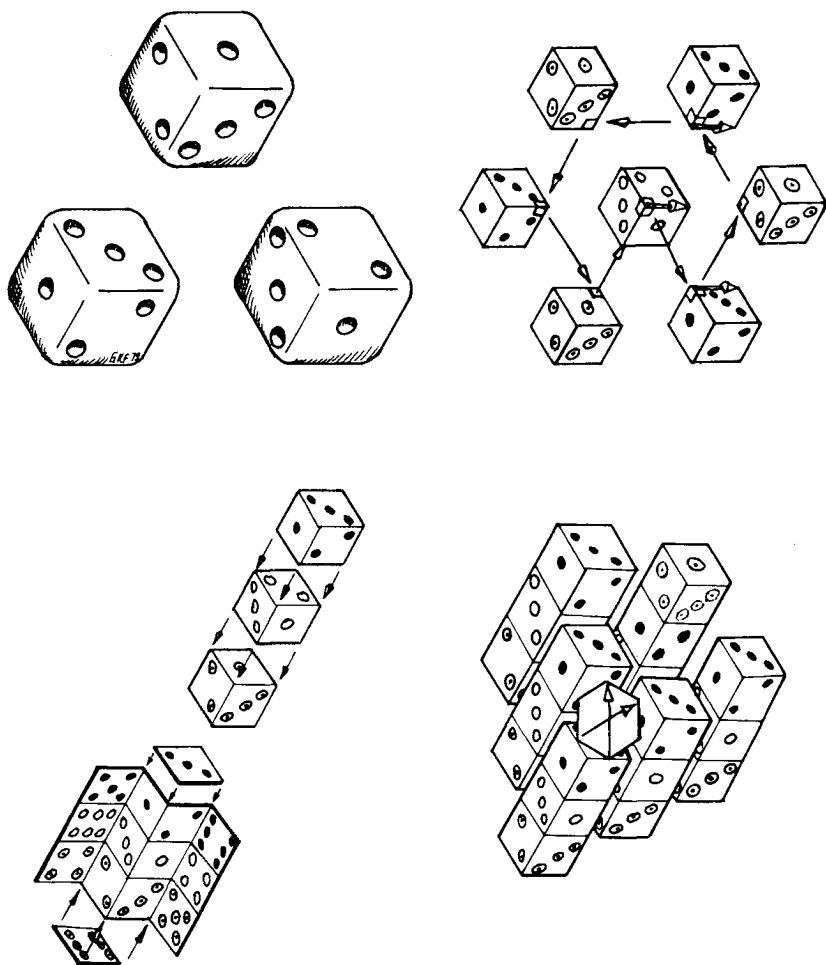
Картинка 3. Трубопровод.

Оно наследует от R^3 (прямолинейную) евклидову геометрию. «Свёрнутое» пространство вы можете мыслить себе как пространство между двумя зеркалами, только без обращения ориентации в «соседней» комнате. Поскольку каждое четвёртое колено в трубопроводе отождествляется с первым, он должным образом замыкается и образует угольник Пенроузов¹.

Игральные кости (картинка 4)

В иллюзии Пенроузов зашифрован ещё один рецепт построения некоторого трёхмерного многообразия. Заключите каждый угол угольника в кубическую окрестность, как на рис. 1 (21). Когда вы по кругу переводите взгляд с одного кубика на другой, он каждый раз переворачивается на 120° вокруг диагонали, соединяющей ближний угол кубика с дальним. В изометрической проекции (рис. 4(11)) эта ось будет перпендикулярна плоскости рисунка. Пометьте грани каждого кубика, как на игральной кости, — так, чтобы сумма очков на противоположных гранях равнялась семи. Все три способа, которыми можно попарно состыковывать кубики, подсказывают, что надо склеить между собой грани 3 и 6. Чтобы понять, как попарно отождествить остальные двенадцать граней, представьте себе, что рассматриваемая конфигурация бесконечно много раз повторена во всех направлениях. При этом образуется кубическая решётка, как

¹ Угольник Пенроузов, конечно, можно поместить в R^3/Z . Однако не увидит ли наблюдатель, оказавшийся в R^3/Z , тем не менее *бесконечный* трубопровод? Читатель должен подумать над этим вопросом. — Прим. ред.



Картинки 4. Игральные кости.

на рис. 6(11), но спроецированная изометрически, как на рис. 6(21) и 4(12).

Я поместил очки на кубиках чёрным, белым и серым цветом, чтобы каждому из трёх положений кубика на рис. 4(11) соответствовал свой цвет. Рис. 4(12) позволит вам выписать схему склейки видимых граней белого кубика (кубика с белыми точками). Если вы доверяете своему чувству симметрии, то для получения схемы склейки остальных граней вам достаточно циклически переставить цвета: $Б \rightarrow Ч \rightarrow С \rightarrow Б$. Вот как

стыкуются грани:

$$\begin{array}{lll} B1 \rightarrow C5, & C1 \rightarrow C5, & C1 \rightarrow B5, \\ B2 \rightarrow C4, & C2 \rightarrow C4, & C2 \rightarrow B4, \\ B3 \rightarrow C6, & C3 \rightarrow C6, & C3 \rightarrow B6. \end{array}$$

Чтобы выяснить, как прилегают друг к другу вершины и рёбра, сдвинем кубики вместе, как подсказывает иллюзия. Пометим (направленные) рёбра соответствующими двугранными углами, а вершины – телесными углами, образованными прилегающими гранями. Так, ребро $B12$ направлено от вершины $B123$ к $B142$, а $B21$ ориентировано в противоположном направлении. На рис. 4(12) вы видите, как ребро $B12$ и его «хвост» 123 путешествуют по своим классам эквивалентности, следуя по пути, указанному первыми тремя стрелками и всеми семью соответственно. Заключительная вершина $B456$ на белом кубике в центре диаметрально противоположна исходной:

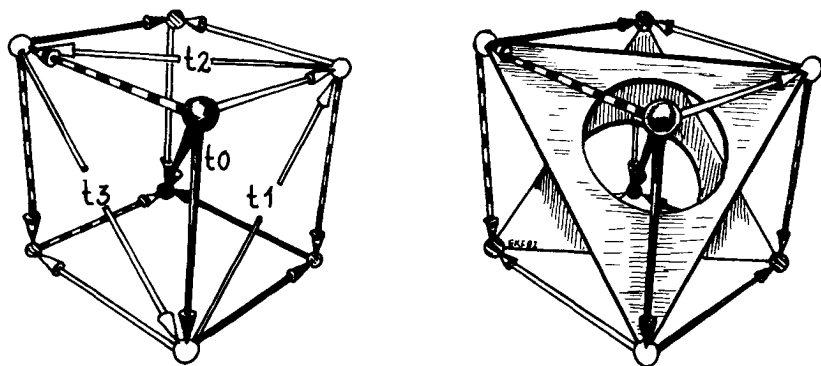
$$\begin{array}{l} B12 - C35 - C46 - C42, \\ B123 - C135 - C246 - C142 - C365 - C263 - C154 - B456. \end{array}$$

Таким способом можно найти ещё восемь наборов рёбер и ещё два набора вершин. Эйлерова характеристика получающегося в результате трёхмерного комплекса равна нулю, поскольку у него по три кубические камеры и вершины и по девять граней и рёбер.

Это трёхмерное многообразие наследует евклидову геометрию кубиков. Обратите внимание на то, как четыре камеры прилегают друг к другу у каждого ребра без изгибов и зазоров. (Разумеется, две из четырёх этих камер обязаны совпадать, т. е. ребро дважды примыкает к одной из камер.) Восемь кубиков аккуратно сходятся в вершине. Чтобы выяснить топологию этого многообразия, сдвиньте три кубика вместе (рис. 4(21)). Поверхность получившейся «коробки» на рисунке развёрнута, чтобы была видна схема склейки. Эта коробка представляет собой фундаментальную область действия на трёхмерном пространстве группы Z^3 , порождённой тремя независимыми переносами. Кроме переноса на $\sqrt{3}$ (длина измеряется в рёбрах кубиков) по нормали к плоскости рисунка имеются два независимых переноса на $\sqrt{2}$ параллельно плоскости рисунка. Эти последние порождают симметричный узор из правильных шестиугольников, на чём и основана иллюзия (рис. 4(22)). Следовательно, угольник Пенроузов живёт в геометрически плоском трёхмерном торе $T^3 = R^3/Z^3$, на котором естественно действует циклическая группа Z_3 порядка три, «вращающая» угольник.

Фундаментальная группа (картинка 5)

Чтобы бросить на угольник Пенроузов заключительный взгляд, определим с помощью иллюзии игральные кубики правило склейки, относящееся к поверхности одного-единственного куба. А именно, забудем о



Картинка 5. Фундаментальная группа.

цветовых пометках Ч, Б, С. отождествим, как и выше, грани: 1–5, 2–4, 3–6. Чтобы было видно, какие рёбра при этом соответствуют друг другу, я раскрасил их на рис. 5(11) и 5(12) в чёрный, белый и серый цвет. (Вы можете отождествить этот кубический каркас с белым кубиком на рис. 4(12).) Вершины раскрашены лишь «для красоты», поскольку все вершины склеиваются в одну. Так как получающееся многообразие M имеет одну-единственную камеру и одну вершину, для вычисления его фундаментальной группы можно применить метод рёберных путей, принадлежащий Пуанкаре. Фундаментальная группа $G = \pi_1(M)$ порождена тремя петлями¹ b , w и g , соответствующими чёрным, белым и серым рёбрам. Грани дают соотношения

$$b^2 = wg, \quad w^2 = gb, \quad g^2 = bw. \quad (1)$$

Диагонали граней удовлетворяют соотношениям

$$t_1 = bg^{-1} = b^{-1}w, \quad t_2 = wb^{-1} = w^{-1}g, \quad t_3 = gw^{-1} = g^{-1}b. \quad (2)$$

Можно рассмотреть определяемые ими три элемента в абстрактной группе, заданной образующими b , w , g и соотношениями (1). Дальнейшее представляет собой геометрическую иллюстрацию некоторых основных понятий комбинаторной теории групп. В изометрически нарисованной кубической решётке любые два из векторов t_i задают переносы в плоскости рисунка, порождающие шестиугольную мозаику, или, точнее, связанную с ней правильную треугольную решётку, которой я и пользовался для вычерчивания изометрических рисунков. Следующие соотно-

¹ Ниже b , w , g от английских слов black (чёрный), white (белый), grey (серый).— Прим. перев.

шения легко проверить алгебраически:

$$1 = t_3 t_2 t_1 = t_1 t_2 t_3 = [t_1, t_2] = [t_2, t_3] = [t_3, t_1]. \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} t_2 &= b t_1 b^{-1} = w t w^{-1} = g t_1 g^{-1}, \\ t_3 &= g t_2 g^{-1} = b t_2 b^{-1} = w t_2 w^{-1}, \\ t_1 &= w t_3 w^{-1} = g t_3 g^{-1} = b t_3 b^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Главная диагональ куба соответствует элементу t_0 группы G , коммутирующему со всеми её элементами, поскольку

$$t_0 = b^3 = w^3 = g^3 = w g b = g b w = b w g. \quad (5)$$

Если вы вспомните алгебру, то заметите, что в силу (3) и (5) элементы t_i порождают свободную абелеву группу K ранга три. Из (4) следует, что K является нормальной подгруппой в G . Из (2) и (5) видно, что факторгруппа H группы G по K представляет собой циклическую группу порядка три, реализуемую смежными классами K, sK, s^2K , где s – любой из элементов b, w, g . Итак,

$$K \cong Z^3, \quad K \triangleleft G, \quad G/K = H, \quad H \cong Z_3.$$

Группа G может служить для иллюстрации двух фундаментальных теорем о «решении уравнений» над группами (по аналогии с классической теорией расширений полей), обсуждаемых на стр. 49 книги [Lyndon–Schupp 1977]¹. Первая теорема принадлежит Бернарду Нойманну и касается существования корней (в данном случае кубического корня из t_0), а вторая является отправной точкой теории Грейама Хигмана, Бернарда Нойманна и Ханны Нойманн. Эта вторая теорема утверждает, что для любого изоморфизма между двумя подгруппами данной группы существуют вложения этой группы в большие группы (называемые её *HNN-расширениями*), в которых отвечающие друг другу при изоморфизме элементы подгрупп будут сопряжены с помощью так называемого *стабильного элемента* расширения. Хорошее введение в этот предмет вы найдёте в учебнике Джо Ротмана [Rotman 1984].

Начнём со свободной абелевой группы K , введённой выше. Перестановка

$$t_3 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1 \rightarrow t_3, \quad t_0 \rightarrow t_0 \quad (6)$$

сохраняет определяющие соотношения (3) и, следовательно, задаёт автоморфизм порядка 3 группы K . Теперь добавим к K новый элемент s вместе с соотношениями

$$t_2 = s t_1 s^{-1}, \quad t_3 = s t_2 s^{-1}, \quad t_1 = s t_3 s^{-1}, \quad s^3 = t_0. \quad (7)$$

Проверьте сами, что это расширение группы K изоморфно нашей исходной группе G . Последнее из соотношений (7) вместе с (5) наводит на мысль перевести s в один из элементов b, w, g . Эти три выбора связаны между собой автоморфизмом группы G , переставляющим

¹ В русском переводе – на стр. 77. – Прим. перев.

образующие по правилу $g \rightarrow w \rightarrow b \rightarrow g$. Как вы можете убедиться при помощи соотношений (2), сужение на K этого автоморфизма группы G совпадает с автоморфизмом, заданным перестановкой (6).

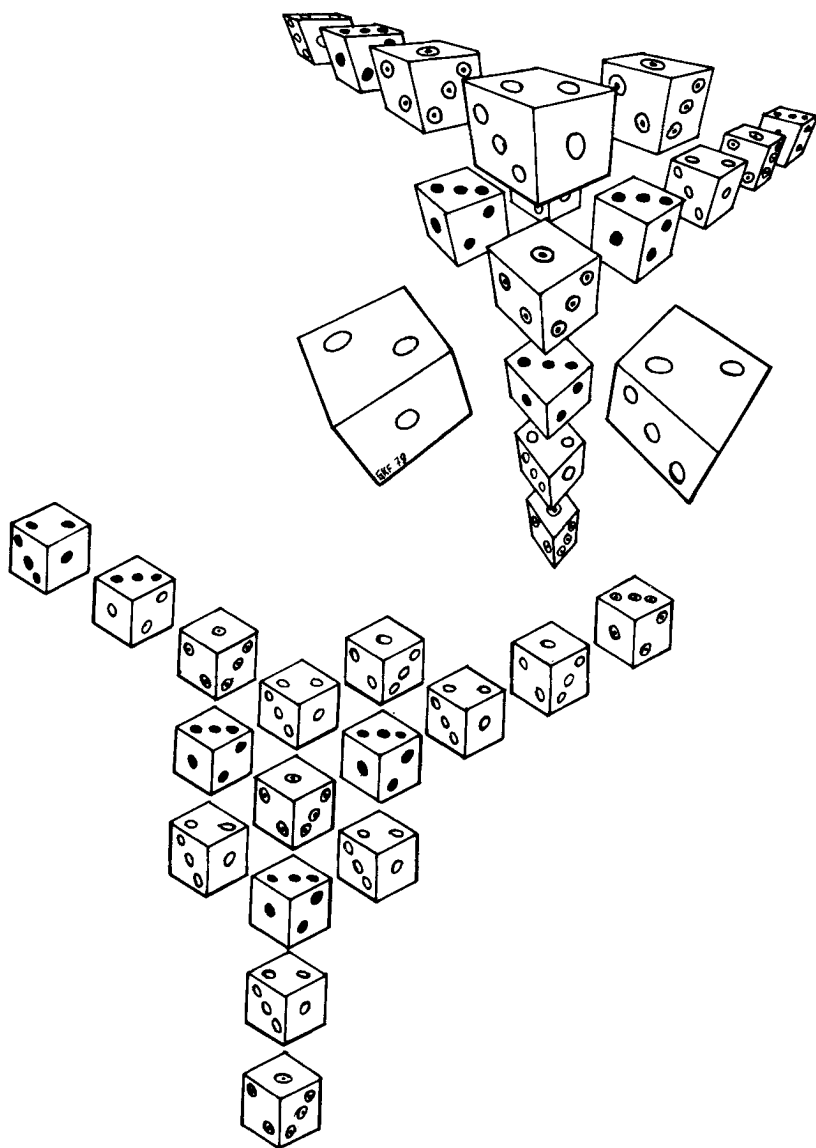
Кубическая решётка (картинка 6)

Геометры, без сомнения, уже распознали в G одну из кристаллографических групп, а в M — одну из шести компактных ориентированных евклидовых пространственных форм. Эти плоские трёхмерные римановы многообразия классифицируются своей *линейной группой голономии* H . Об этом предмете вы можете прочитать в книге [Wolf 1977]. В таком контексте фундаментальная группа G многообразия M действует на его универсальном накрывающем пространстве, в данном случае представляющем собой трёхмерное евклидово пространство, как группа евклидовых движений, сохраняющих кубическую решётку 6(11). Обратите внимание, как рисунок в перспективе рассеивает таинственную иллюзию, создаваемую изометрическим изображением 6(21). Интерпретируйте t_i как переносы, а s — как винтовое движение с углом поворота 120° , шагом $\sqrt{3}/3$ длин ребра и тем же направлением, что у t_0 . На рис. 4(11) винтовая ось проходит через центр тяжести трёх кубиков, а на рис. 6(11) — посередине, в зазорах между серыми, чёрными и белыми кубиками.

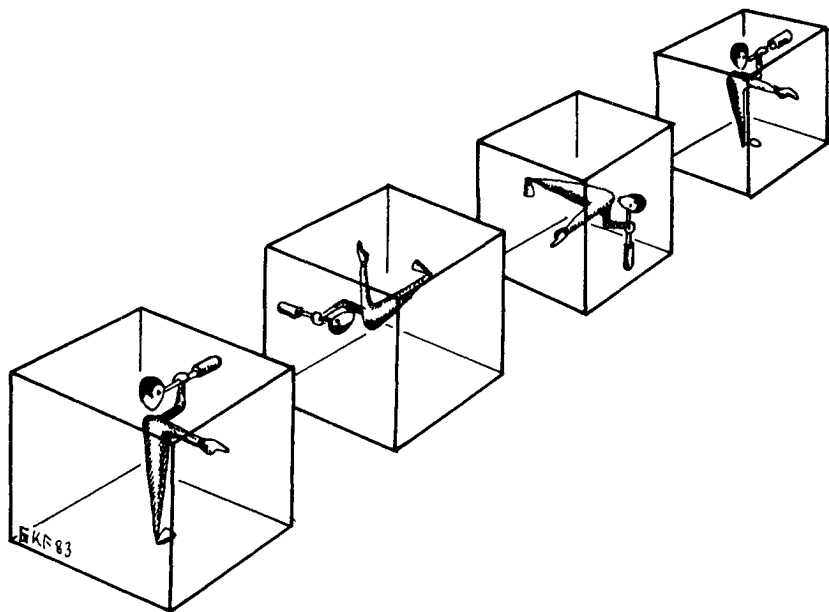
Отдельная факторизация по действию подгруппы переносов даёт «трёхкомнатный дом» угольника Пенроузов — трёхмерный тор с евклидовой геометрией. Его фундаментальная группа есть $K \cong Z^3$. Факторизация тора по действию группы голономии $H \cong Z_3$ даёт евклидову пространственную форму M , фундаментальной группой которой служит G , расширение группы K при помощи H .

Человек в кубе (картинка 7)

Открытый нами трёхмерный мир M в одних отношениях в точности похож на наш, в других очень странный. Углы плоских треугольников всё так же дают в сумме 180° , и все привычные построения евклидовой геометрии по-прежнему выполнены. Но это конечный мир, имеющий объём одного-единственного куба. Как бы беспорядочно вы ни летали по нему, найдутся точки, в окрестность которых вы будете возвращаться бесконечное число раз, «до скончания времён». (Это пространство компактно.) Глядя в определённых направлениях, вы увидите отстоящие друг от друга на фиксированные расстояния сперва свою макушку, потом правый бок, потом спину. Можете ли вы указать такое направление в кубе? Таким образом, существует прямая линия, замыкающаяся на себя под прямым углом. И эту петлю нельзя стянуть в точку! Она «застревает» в топологии многообразия. В то же время «трёхбрусник» Пенроузов в трёхлистном тороидальном накрытии многообразия M



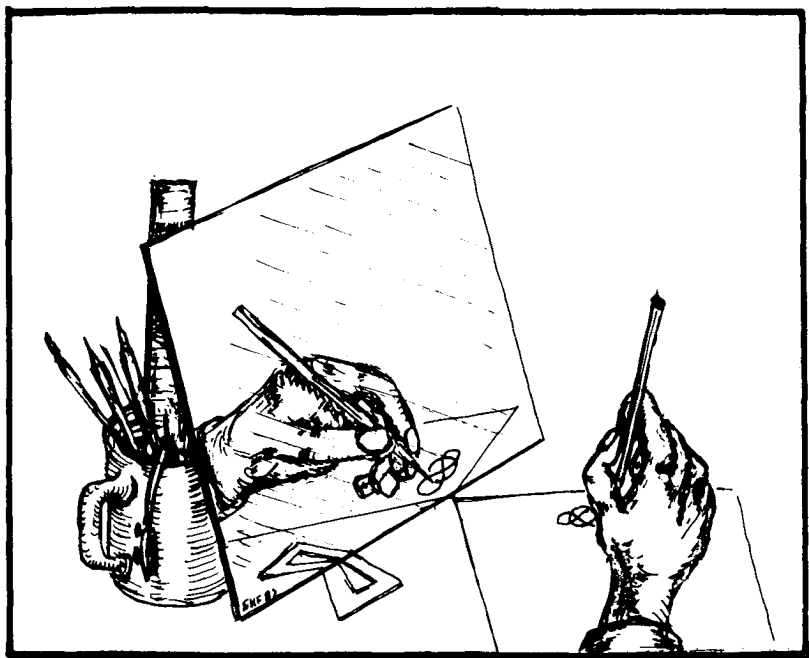
Картинка 6. Кубическая решётка.



Картинки 7. Человек в кубе.

«складывается» в M в «однобрусник» с одним-единственным углом. Можете ли вы построить его в M заново, уже с тремя углами?

Поскольку мы трёхмерные существа, нам трудно представить себе такое пространство и ещё труднее изучать его свойства. Для того и существует топология. С двумерными мирками, отличными от евклидовой плоскости, иметь дело легче, так как мы можем моделировать их при помощи поверхностей. Но даже и в этом случае трёх измерений иногда не хватает. Об этом мой следующий рассказ в картинках.



Картинка 8. Левая рука - правая рука.

Тени из других измерений

У полусферической чашки один-единственный круглый край. Такой же и у круга. Если вы пришьёте круг к полусфере, то получите замкнутую двустороннюю поверхность; у неё есть наружная и внутренняя части. Топологи и такую поверхность называют тоже сферой, и при желании вы можете раздуть её до «настоящей» сферы. Теперь возьмите длинную узкую полоску бумаги, закрутите на пол-оборота и склейте концы. Получившаяся поверхность имеет всего одну сторону, более того, у неё всего один (замкнутый) край. Что произойдёт, если пришить его к краю круга?

Изучение разнообразных ответов на этот вопрос, впервые поставленный астрономом Августом Мёбиусом [Möbius 1867], служило вратами в топологию для многих поколений студентов. Геометрия – та ветвь математики, где «любят» рисовать картинки, по крайней мере так было сто лет назад. Современники Мёбиуса нашли модель для его поверхности среди многочисленных блестяще задуманных, но недостаточно «документированных» геометрических конструкций Штейнера. Якоб Штейнер, выпускник школы-приюта Песталоцци¹, релетитор и школьный учитель, коллега Абеля, Крелля и Якоби, занимавший в конце жизни профессорскую должность в Берлинском университете, специально учреждённую для него братьями Гумбольдтами, является «дедушкой» *синтетической геометрии*. Она была реакцией на господствовавшую в те времена *аналитическую геометрию*. Штейнер оставил после себя тома мучительно ускользающих от понимания текстов. В конце концов теоремы Штейнера были доказаны Кремоной и Веронезе при помощи тех самых методов анализа и алгебраической геометрии, к которым он питал такое отвращение. До конца 19-го столетия лучшим ответом на вопрос Мёбиуса была поверхность, которую Штейнер назвал «своей римской поверхностью» в память об особенно плодотворном пребывании в этом романтическом городе.

В 1900 г. единственный ученик Гильберта, написавший диссертацию по геометрии, Вернер Бой [Boy 1901] нашёл «более простую» поверхность. Это было погружение проективной плоскости в трёхмерное

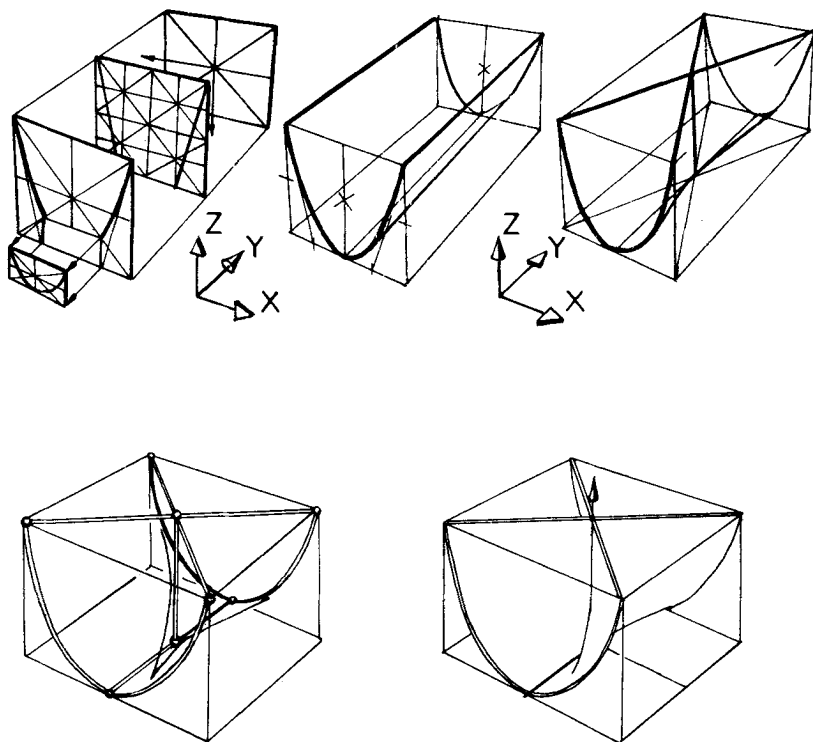
¹ Иоган Генрих Песталоцци (1746–1827), один из крупнейших педагогов, разработавший теорию предметного обучения. – *Прим. изд. ред.*

пространство, но Бой не смог найти для своей поверхности алгебраического уравнения. Только недавно Франсуа Апері [Aperi 1987] преуспел в этом деле. Апері – ученик корифея топологической визуализации Бернара Морэна из Страсбурга, которому начертательная топология обязана в наибольшей степени. Живым и наглядным описанием своих конструкций Морэн вдохновил уже очень многих на их реализацию в виде рисунков, моделей, компьютерной графики и фильмов. Однако он настаивает на том, что в конечном счёте и описание при помощи картинок должно быть тоже облачено в аналитические одеяния традиционной математики. Последующее представляет собой введение в начертательный метод Морэна.

Данная глава – об искривлённых поверхностях в пространстве; о том, как они выглядят и как их рисовать, и об алгебре, проявляющейся в их построении. Я также надеюсь научить вас тому, как рисовать пространственно протяжённые формы на бумаге и на доске. Использование двумерных *графиков* и *диаграмм* – чётко размеченных и объяснённых в тексте плоских конфигураций, составленных из точек и линий, – прочно утвердилось в математике, и ему учат в школе. Другое дело трёхмерные *модели*. Конечно, цилиндры, шары и конусы, правильные многогранники, а изредка и лента Мёбиуса – всё это входит в математический багаж выпускника школы. Названия этих фигур являются вполне надёжными ссылками, не требующими никакой зрительной опоры. Но для чуть более сложных фигур это уже не так. Здесь мы часто ограничиваемся тем, что показываем обучающемуся готовый объект, сделанный из бумаги, проволочек, верёвочек или гипса, а то и вообще его фотографию. Однако подлинное пространственное понимание приходит только в процессе изготовления модели, или рисования её узнаваемого изображения, или, в наши дни, программирования интерактивной графики на микрокомпьютере. Оно приходит, когда видишь, как модель порождается более простыми и знакомыми объектами, например как поверхность порождается кривыми.

Самопересечение жёлоба (картинка 1)

Мой рассказ начинается с жёлоба – параболического цилиндра, порождаемого параболой, вписанной в прямоугольник. Парабола проходит через две соседние вершины прямоугольника и касается противоположной стороны в её середине. На рис. 1 (11) изображён способ вписать от руки такую кривую в заданный перспективный прямоугольник. Проведите диагонали четырёхугольника (задняя «филёнка»), чтобы найти его центр, и соедините этот центр с точками схода сторон (на них указывают стрелки). При этом стороны прямоугольника разделятся пополам, а сам он – на четыре равные части. Найдите центры нижних четвертей, проведя дополнительные диагонали (средняя филёнка) или же на глаз. Эти точки лежат на интересующей нас параболе; кроме того, они позволяют найти



Картинка 1. Самопересечение жёлоба.

середины половинок нижнего основания прямоугольника. Прямые, проходящие через эти середины и верхние вершины, касаются нашей параболы. Теперь легко нарисовать дуги параболы, изображённые на передней филёнке. При необходимости предыдущую процедуру можно повторить в новом, маленьком, прямоугольнике, определяемом центрами нижних четвертей. Для наглядности он выдвинут из передней филёнки.

Теперь перенесите прямоугольник, лежащий в плоскости XZ , вместе со вписанной в него параболой в направлении (перпендикулярной ему) оси Y . При этом образуется коробка, заключающая в себе жёлоб (рис. 1(12)). Чтобы нарисовать жёлоб в произвольной заданной коробке, постройте на её противоположных гранях параллельные параболы и соедините соответствующие точки парабол прямыми линиями. Обратите внимание, что линия, соединяющая вершины парабол, — назовём ее *килем*, — вообще говоря, не совпадает с видимым контуром поверхности. На рис. 1(12) и 1(13) я изобразил координатные реперы XYZ отдельно от начала координат. Начало координат лежит на киле (а не на контуре

жёлоба, как это часто рисуют!). Заметьте, как конструкция стрелок на осях (их «наконечников») помогает рассказу. Так, второй репер XYZ подсказывает, что изображённая поверхность служит графиком функции двух переменных.

Теперь, обращая параметризацию передней параболы, заставьте поверхность пересечь саму себя (рис. 1 (13)). Иначе говоря, *линейно* соедините

$$\left\{ \begin{array}{l} X = -x \\ Y = -1 \\ Z = x^2 \end{array} \right\} \text{ с } \left\{ \begin{array}{l} X = +x \\ Y = +1 \\ Z = x^2 \end{array} \right\} \text{ при помощи } \left\{ \begin{array}{l} X = xy \\ Y = y \\ Z = x^2 \end{array} \right\}.$$

Третий столбец здесь представляет собой каноническую параметризацию зонтика Уитни, топология которого была описана на картинке 1:3. Чтобы нарисовать зонтик, вспомним, что он прикреплен к своей коробке вдоль киля. Когда мы движемся от киля вверх, киль «расщепляется» на две пересекающиеся прямые, которые по достижении грани, противоположной килю, превращаются в её диагонали (рис. 1 (13)). Линия двойных точек – назовём её *стеблем* – ортогональна килю в точке пинча. В известном смысле стебель продолжается за точку пинча, образуя «ручку зонтика», называемую также его *усом*. Алгебраический геометр исключил бы параметры и рассмотрел многообразие (= множество нулей уравнения) $X^2 - Y^2Z = 0$ над комплексными числами. Отрицательная полуось Z в нашем «вещественном» пространстве находится там, где «мнимый» и потому невидимый лист поверхности пересекает сам себя. На картинке 2:11 вы уже познакомились с более сложным примером уса в связи с преобразованием Морэна, устраняющим точки пинча. Оно играет важную роль также в рассказе об Аперии, завершающем эту главу. Но вернёмся к нашему уроку рисования.

Киль соединяет вершины двух парабол. Вы можете найти точное местоположение контура жёлоба, соединив остальные отвечающие друг другу точки парабол вспомогательными прямыми и проведя их огибающую. Можно изготовить соответствующую верёвочную модель внутри прозрачной пластмассовой коробки и при помощи отбрасываемых ею теней проиллюстрировать эту конструкцию. Вот несколько эмпирических правил, которые помогут вам угадать правдоподобное расположение контура. Никакая кривая на поверхности не может пересекать контур, поскольку там поверхность изгибается и уходит из виду. Таким образом, контур касается парабол и касается киля в точке пинча. Следовательно, он трансверсально пересекает стебель. Вам следует попрактиковаться, рисуя зонтики Уитни для различных расположений коробки. Заметьте, что в случае коробки 1 (21) контур обязательно образует сборку, а тогда точка пинча становится невидимой (рис. 1 (22)).

Вы, возможно, заметили «вольность рисунка»¹ на рис. 2:1 (23), где я

¹ В оригинале abus de dessin (франц.) – Прим. перев.

один и тот же прямолинейный отрезок использовал для изображения как килья, так и контура верхнего зонтика, а нижний зонтик нарисовал вовсе без контура. Этот графический двойник бурбаковой «вольности речи»¹ вполне безобиден, если «неточности» легко исправить и они не вводят зрителя в заблуждение. На рис. 2:1(23) изображены два зонтика, соединенные крест-накрест так, что они образуют «сингулярную» ленту Мёбиуса, которую правильнее было бы назвать *диск*ом Мёбиуса. Эта поверхность является односторонней, если условиться считать двойную линию в известном смысле проницаемой. Моя следующая картинка объясняет, как всё это осуществить.

Коноид Плюккера (картинка 2)

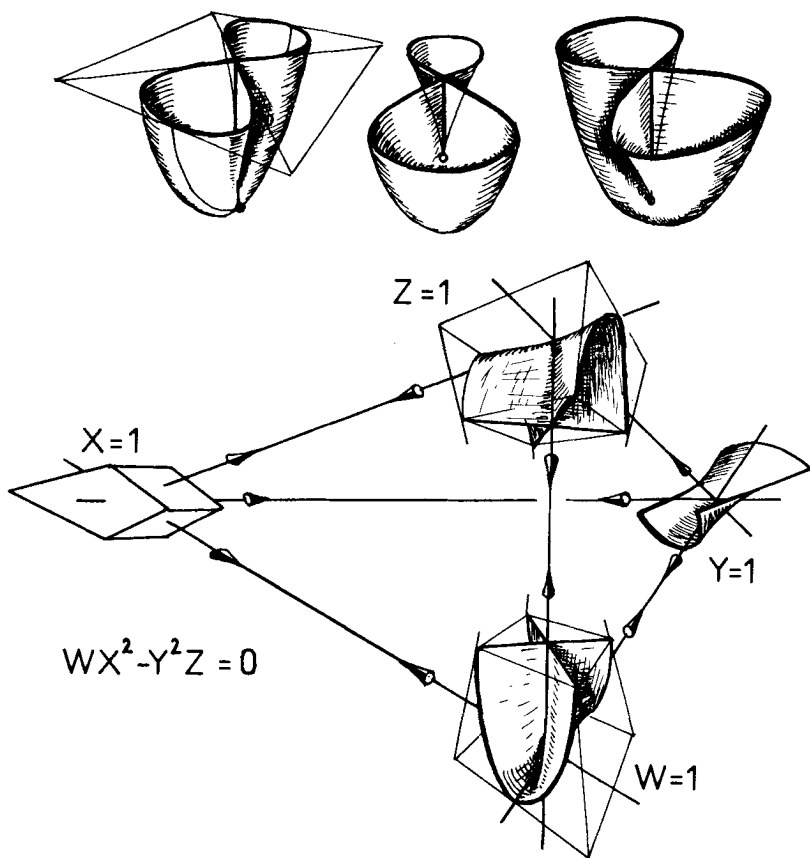
Когда вы рисуете точки пинча на более общих, «изогнутых» поверхностях, важно различать два случая: первый, когда зонтик изогнут в сторону уса и потому пересекает касательную плоскость в точке пинча (трансверсальную стеблю), и второй, когда это не так. Чтобы смоделировать ситуацию, изогните киль в параболу в плоскости киль–стебель, заменив $Z = x^2$ на $Z = x^2 \pm y^2$. После исключения параметров получается уравнение $X^2 - Y^2Z + Y^4 = 0$, и вы можете изучать сечения новой фигуры, полагая $Z = \text{const}$. В случае знака «минус» результат выглядит, как тень точки ветвления, изображенная на рис. 1:5(12). Обратите внимание на то, как на контуре вблизи точки пинча появляются две сборки. Если бы поверхность «раскрылась» ещё пошире, то контур замкнулся бы третьим остриём и вы бы увидели стебель изнутри жёлоба.

В случае знака «плюс», когда зонтик находится целиком по одну сторону от касательной плоскости в точке пинча, сечения $Z = \text{const}$ представляют собой восьмерки $X^2 = Y^2(Z - Y^2)$. Некоторые стандартные ракурсы представлены на рис. 2(11)–2(13). В действительности то, что острия контура изображены на рис. 2(11) и 2(12) на стебле, а не вблизи точки касания стебля с контуром, является ещё одной вольностью рисунка. У рис. 2(13) более серьёзный дефект: в нём нарушено правило, согласно которому точки пинча лежат на линиях контура. Можете ли вы определить, какова топология этой поверхности? Это не диск.

Давайте вернёмся к «прямому» зонтику и «гомогенизируем» кубический многочлен $X^2 - Y^2Z$, полученный нами ранее, следующим образом: $WX^2 - Y^2Z = 0$. Это – уравнение *коноида Плюккера*. Он представляет собой поверхность в трёхмерном проективном пространстве с однородными координатами $W: X: Y: Z$. Если проинтерпретировать декартово пространство XYZ как его конечную часть, получающуюся, если положить $W = 1$, то мы придём к тому, с чего начали.

Напомним, что проективное пространство двух, трёх и т. д. измерений можно определить как совокупность всех прямых, проходящих через

¹ В оригинале abus de langage (франц.). – Прим. перев.



Картинка 2. Коноид Плюккера.

начало координат в евклидовом пространстве на единицу большей размерности. Чтобы зримо представить себе, на что похож проективный зонтик в «конце» стебля и в «конце» кия, рассмотрим другую «картинку» проективного пространства. На этот раз будем следить за прямыми, проходящими через начало координат четырёхмерного пространства, по их точкам пересечения с трёхмерным поперечным сечением, заданным уравнением $W + X + Y + Z = 1$. Координатные оси четырёхмерного пространства пересекают эту «гиперплоскость» в вершинах некоторого тетраэдра, и мы можем толковать W, X, Y, Z как соответствующие барицентрические координаты. Изображение этого тетраэдра занимает нижнюю часть картинка 2; приведённые фрагменты поверхности показывают, на что она похожа у четырёх «краёв света». Этот рисунок

представляет собой *перспективную химеру*, поскольку я использовал в нём не одну, а сразу несколько различных троек точек схода. Особый эффект, достижимый при помощи «кратной перспективы», хорошо знаком поклонникам рисунков Эшера. Здесь я нарисовал зонтик у нижней вершины тетраэдра так, как будто плоскость $W = 1$ содержит целую кубическую окрестность. Поэтому я использовал три другие вершины в качестве точек схода рёбер этого куба; аналогичным образом обстоит дело в остальных вершинах¹.

Далее, каждая прямая, проходящая через начало координат в евклидовом пространстве, протыкает единичную гиперболу в двух антиподальных точках. Таким образом, сфера двусторонне накрывает проективное пространство. Полусфера накрывает проективное пространство однолистно всюду, кроме своего экваториального края. Если бы удалось гладко зашить этот край, стянув вместе каждую пару антиподальных точек, то получилась бы модель проективного пространства. В размерности два такая поверхность была предложена Мёбиусом [Möbius 1867] в качестве примера замкнутой односторонней поверхности. Он представлял её себе в виде замкнутой ленты, закрученной на нечётное число полуоборотов и пришитой к кругу вдоль края. Конечно, такое шитьё не под силу трёхмерному портному – для этого нужно ещё одно измерение.

Рассмотрим сперва параметризацию коноида, полученную гомогенизацией соответствующих формул для зонтика:

$$W = z^2, \quad X = xy, \quad Y = yz, \quad Z = x^2.$$

Предположим, что областью изменения параметров служит единичная сфера, и пусть две точки (x, y, z) и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ на этой сфере отобразились в одну и ту же точку четырёхмерного пространства. Чтобы показать вам, когда же эти две точки должны быть антиподами на сфере, позвольте мне выписать девять соотношений:

$$\begin{aligned} x^2 &= \bar{x}^2, & yz &= \bar{y}\bar{z}, & \bar{x} &= \pm x, \\ y^2 &= \bar{y}^2, & zx &= \bar{z}\bar{x}, & \bar{y} &= \pm y, \\ z^2 &= \bar{z}^2, & xy &= \bar{x}\bar{y}, & \bar{z} &= \pm z. \end{aligned}$$

Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ следует, что любые два из соотношений в первом столбце влекут за собой третье. Далее, каждое из них влечёт соответствующее соотношение из третьего столбца. Но пока мы не можем ещё утверждать, что все три знака в последующих соотношениях будут совпадать. Воспользуемся арифметикой комплексных чисел. Из равенства $xy = \bar{x}\bar{y}$ следует, что $(x + iy)^2 = (\bar{x} + i\bar{y})^2$, а отсюда, – что $(x + iy) = \pm (\bar{x} + i\bar{y})$. Значит, первый и второй знаки в третьем столбце совпадают. Аналогичное рассуждение показывает, что второй и третий

¹ На рис. 2(21) не приведён фрагмент $X = 1$. Он выглядит аналогично фрагменту $Y = 1$. – *Прим. перев.*

знаки тоже совпадают, а следовательно, совпадают все три, если только $y \neq 0$. (Заметим, что если для симметрии привлечь и последнее оставшееся соотношение из второго столбца, то мы получим, что знаки совпадают всегда.)

Итак, мы параметризовали проективную плоскость, погружённую в четырёхмерное евклидово пространство, и показали, что в нём можно найти поверхность, описанную Мёбиусом. Это тень *поверхности Веронезе*, представляющей собой результат вложения проективной плоскости в пятимерное проективное пространство, задаваемого формулой

$$x : y : z \mapsto x^2 : y^2 : z^2 : yz : zx : xy.$$

(Во втором тираже книги в последние два абзаца были внесены исправления, которыми я обязан Дж. Уиксу.)¹

Как вылепить римскую поверхность (картинка 3)

Вот другая, более красивая, проекция поверхности Веронезе на четырёхмерное пространство. Для удобства записи я удвою размеры поверхности и дам её параметризацию в декартовых, цилиндрических и сферических координатах, используя сокращения S , C для синусов и косинусов (через θ и α обозначаются соответственно соответственно долгота и широта²):

$$\begin{aligned} W &= x^2 - y^2 = r^2(2\theta) &= C^2(\alpha)C(2\theta), \\ X &= 2xz &= 2rC(\theta)z = S(2\alpha)C(\theta), \\ Y &= 2yz &= 2rS(\theta)z = S(2\alpha)S(\theta), \\ Z &= 2xy &= r^2S(2\theta) = C^2(\alpha)S(2\theta). \end{aligned}$$

Чтобы убедиться, что это – вложенная проективная плоскость, проверьте, действуя, как и раньше, что две точки, отображающиеся в одну и ту же точку четырёхмерного пространства, являются антиподами³. Для этого воспользуйтесь вторым столбцом и заметьте, что

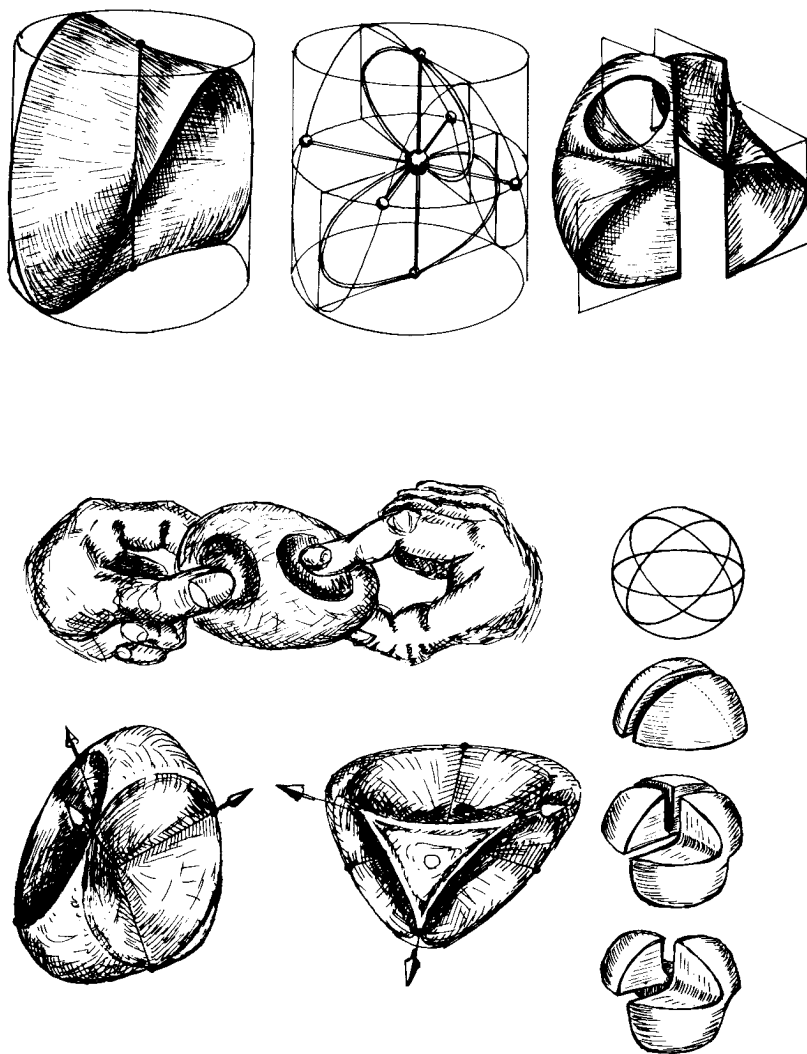
$$\begin{aligned} (x + iy)^2 &= (\bar{x} + i\bar{y})^2, \\ (x + iy) &= \pm(\bar{x} + i\bar{y}), \\ (x + iy)z &= (\bar{x} + i\bar{y})\bar{z}, \\ (x, y, z) &= \pm(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{aligned}$$

Давайте сперва рассмотрим XYZ -тень этой поверхности. Начнём с единичной θ -окружности в горизонтальной плоскости XY . Зафиксируем $r = 1$, $z = 1/2$ и заметим, что координата $Z = S(2\theta)$ дважды «прыгает»

¹ Описанное на предыдущей странице отображение является погружением всюду, кроме двух точек, $1:0:0$ и $0:0:1$. Образы этих точек служат концами двойного отрезка на нашей поверхности. – *Прим. перев.*

² Так что $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r = \cos \alpha$, $z = \sin \alpha$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние до оси z . – *Прим. перев.*

³ Далее эти точки по-прежнему обозначаются (x, y, z) и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. – *Прим. перев.*



Картинка 3. Как вылепить римскую поверхность.

вверх-вниз, при этом окружность изгибается в «велосипедную восьмёрку» – так, как на рис. 1:2(21). Диаметально противоположные точки окружности переходят в точки одинаковой высоты на обруче-восьмёрке, и эти четыре точки¹ задают вертикальный прямоугольник, свой для

¹ На окружности и на обруче. – Прим. перев.

каждой пары $\pm \theta$. При вращении прямоугольника внутри вертикального цилиндра его высота меняется по синусоиде (рис. 3(12)). Дважды он вырождается в диаметр единичной окружности.

Подвижное ребро прямоугольника, соединяющее противоположные точки на обруче-восьмёрке, порождает линейчатую поверхность 3(11), состоящую из двух зонтиков Уитни, соединённых, как на рис. 2:1(23). (Этот диск Мёбиуса является специальной проекцией коноида Плюккера; выписать соответствующие формулы я предоставляю вам.) Чтобы получить эту поверхность, воспользуйтесь цилиндрической параметризацией (третий столбец), зафиксировав $r = 1$ и изменяя z от $+1/2$ до $-1/2$. Если вместо этого зафиксировать z и менять r , то вы впишете в прямоугольник «гибкую» параболу, которая порождает седловую поверхность (рис. 1:2(22)). Вместе¹ эти две поверхности образуют топологическую модель *римской поверхности*. Чтобы получилась алгебраическая поверхность, нужно скруглить вращающийся прямоугольник до эллипса (рис. 3(12)). Зонтики при этом изгибаются, а параболическое седло уплощается.

Чтобы убедиться в этом, разложите сферическую параметризацию в сумму

$$\begin{pmatrix} C(\theta) \\ S(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} S(2\alpha) + C^2(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Переменные коэффициенты $A = S(2\alpha)$, $B = C^2(\alpha)$ этой интерполяции между двумя векторами удовлетворяют уравнению полуэллипса, вписанного в единичный квадрат: $A^2 = B(1 - B)$. Чтобы понять это геометрически, заметьте, что уравнение $(A/2)^2 = (1 - B)(B - 0)$, получающееся из указанного выше изменением масштаба, выражает *принцип Фалеса*: когда точка B движется по диаметру полуокружности, длина перпендикуляра, восстановленного из этой точки до пересечения с окружностью, равняется среднему геометрическому расстояний от B до концов диаметра. Поскольку при аффинной проекции окружности переходят в эллипсы, такая интерполяция между произвольными двумя векторами даёт полуэллипс, вписанный в натянутый на них параллелограмм. Таким образом, эта интерполяция – промежуточная между более привычными тригонометрической и линейной интерполяциями (основанными на соотношениях $A^2 + B^2 = 1$ и $A + B = 1$), которые так полезны в сферической и проективной координатных записях.

Описанная процедура создаёт четыре новых зонтика (рис. 3(13)), стеблями которых служат два вырожденных эллипса. Три двойные линии пересекаются в тройной точке и оканчиваются в шести точках пинча. Вот несколько способов изготовить модель римской поверхности. Возьмите комок глины, выдавите на противоположных сторонах ямочки (рис. 3(21)) и наметьте место для шести точек пинча. Последовательно

¹ Будучи помещены в одну «баночку». – Прим. перев.

вылепите точки пинча, поворачивая модель каждый раз на треть оборота. Кусочно-линейную модель, так называемый *гептаэдр*, можно построить из трёх взаимно ортогональных квадратов, пересекающихся друг друга по диагоналям. Представьте внутри октаэдра координатные плоскости и закройте октанты через один треугольными «крышками» или взгляните на рисунок 288 в книге Гильберта и Кон-Фоссена [Hilbert – Cohn-Vossen 1932]. Быстрый способ сделать из пластичной резинки («клячки») что-то среднее между гептаэдром и гладкой поверхностью показан на рис. 3(33). Возьмите две четвертушки шара и надрежьте их посредине почти до конца. Затем разверните осьмушки и склейте два куска друг с другом. То, что получится, напоминает шар, у которого удалены октанты через один.

Гауссово отображение и скрещённый колпак (картинка 4)

Моделируя или рисуя римскую поверхность, помните, что она помещается внутри тетраэдра, соприкасаясь с каждой из его граней по окружности. Возле этих четырёх окружностей кривизна поверхности меняется (рис. 3(31) и 3(32)). Выражаясь неформально, в окрестности точки *положительной кривизны* поверхность изогнута в одну сторону от своей касательной плоскости, и говорят, что поверхность *опирается* на эту плоскость. В точке *отрицательной кривизны* поверхность пересекает свою касательную плоскость.

Проверим алгебраически утверждение, высказанное в первой фразе этого пункта. Рассмотрим пересечение нашей поверхности с какой-нибудь гранью тетраэдра. Например,

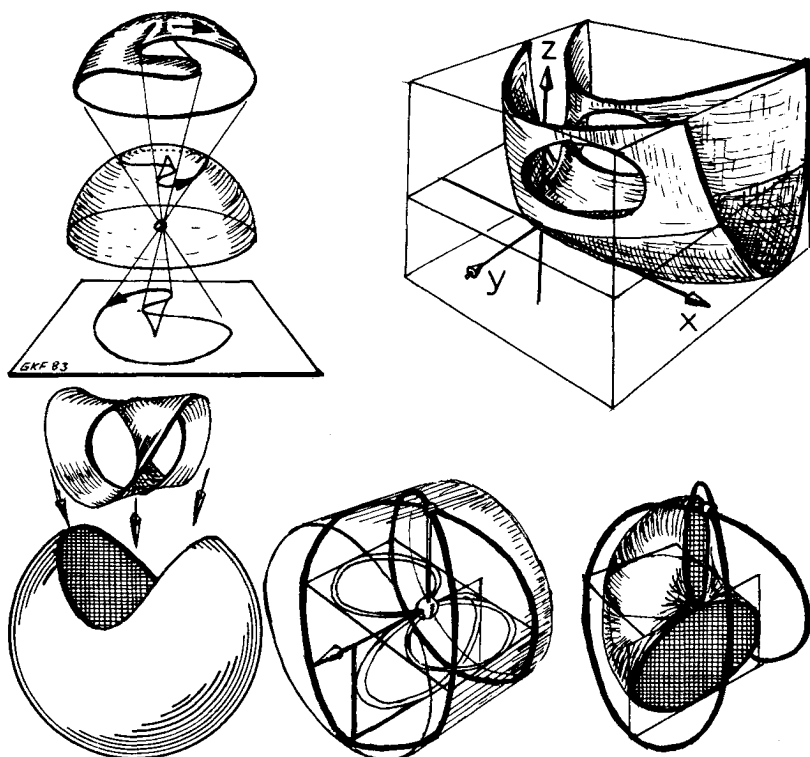
$$\begin{aligned} 1 + Z - X - Y &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz \\ &= (x + y - z)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку последнее выражение неотрицательно, поверхность опирается на грань вдоль некоторой кривой – образа окружности, высекаемой на параметризующей сфере плоскостью $z = x + y$. Чтобы выяснить форму этой кривой, проведём такое вычисление:

$$\begin{aligned} 1 = (X + Y - Z)^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2 + 8xyz(z - x - y)^2 \\ &= X^2 + Y^2 + Z^2. \end{aligned}$$

Оно показывает, что расстояние от исследуемой плоской кривой до начала координат в пространстве XYZ постоянно; следовательно, это окружность.

Кривизна меняет знак вдоль так называемых *параболических кривых* на поверхности. Существует удобный способ, позволяющий в некоторых случаях находить параболические кривые на данной поверхности; назовём его *принципом гесссиана*. Я воспользуюсь им, чтобы доказать второе сделанное выше утверждение. Пусть $F: R^2 \rightarrow R^3$ – параметризация лежащей в пространстве поверхности. Векторное произведение $N = F_x \times F_y$



Картинки 4. Гауссово отображение и скрещённый колпак.

двух касательных векторов даёт вектор нормали к поверхности. При замене координат вектор N умножается на якобиан (определитель матрицы Якоби):

$$F_u \times F_v = (F_x \times F_y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Следовательно, *нормальный орт* (единичный вектор нормали) $N/|N|$ не зависит от параметризации¹ и определяет отображение поверхности в единичную сферу, которое называется *гауссовым отображением*. Якобиан гауссова отображения² называется *гауссовой кривизной* поверхности. Вот менее сложный способ представить себе, что это такое. Для каждой

¹ Разумеется, только при заменах с положительным якобианом, т. е. речь идёт об ориентированной поверхности.— *Прим. перев.*

² Координаты на сфере и на поверхности выбираются согласованным образом.— *Прим. перев.*

плоскости, проходящей через нормаль к поверхности в данной точке, кривизна кривой пересечения поверхности с этой плоскостью¹ называется *нормальной (секционной) кривизной* поверхности¹. Гауссова кривизна равна произведению максимальной и минимальной нормальных кривизн в данной точке. (Средняя нормальная кривизна называется *средней кривизной* поверхности; она тождественно равна нулю на поверхностях, локально минимизирующих площадь, например на мыльных плёнках².)

Чтобы нарисовать поверхность или изготовить её модель, обычно достаточно знать, где кривизна положительна, а где отрицательна, и найти параболические кривые на поверхности. Предположим на время, что поверхность локально задана как график функции $z = f(x, y)$. Поверхность расположена по одну сторону от своей касательной плоскости там, где *гессиан* (определитель матрицы Гессе) $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ положителен, и пересекает касательную плоскость там, где гессиан отрицателен. Хотя вы можете вывести это, используя разложение Тэйлора (до членов второго порядка включительно), я предпочитаю следующее геометрическое рассуждение. Вектор $N = \langle -f_x, -f_y, +1 \rangle$ нормален к поверхности, и гауссово отображение $(x, y) \mapsto N/|N|$ принимает свои значения в верхней половине единичной сферы. Так как центральная проекция сохраняет ориентацию (рис. 4(11)), вам нужно лишь проследить за тем, как ведёт себя ориентация при отображении $(x, y) \mapsto (f_x, f_y)$ плоскости в себя. Якобиан сохраняющего (обращающего) ориентацию отображения положителен (отрицателен). Следовательно, якобиан гауссова отображения и гессиан имеют одинаковые знаки.

Применим этот принцип к более общей модели – куску поверхности (рис. 4(12)), полученному изгибанием кия U -образного жёлоба $z = u(x)$, $u'' > 0$, в горизонтальном направлении: $y = a(x)$, $a'' > 0$, а, возможно, также и в вертикальном: $z = b(x)$. (У всех этих функций первая производная в начале координат равна нулю.) Имеем

$$\begin{aligned} z &= f(x, y), \\ f &= u(y - a(x)) + b(x), \\ \text{grad } f &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' - a'u' \\ u' \end{pmatrix}, \\ \begin{vmatrix} f_{xx}f_{xy} \\ f_{yx}f_{yy} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b'' - a''u' + (a')^2u'' & -a'u'' \\ -a'u'' & u'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'' - a''u' & 0 \\ 0 & u'' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В случае римской поверхности изогнутый киль остаётся в горизонтальной плоскости; поэтому $b'' = 0$ в этой модели. Следовательно, кривизна меняет знак в точности на киле $y = a(x)$. В общем случае параболическая кривая сдвигается в ту или иную сторону от кия в соответствии со знаком $b''(x)$. На поверхности 4(12) параболическая

¹ В рассматриваемой точке. – Прим. перев.

² Натянутых на проволочные контуры. – Прим. перев.

кривая сдвигается наружу, так как $b'' < 0$. Например, у *седла Пеано*, задаваемого формулой

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2) = (y - 2x^2)^2 - x^4,$$

кривизна меняет знак в точках параболы $2y = x^2$, на которой $\text{grad}(f) = (8x^3, -3x^2)$. Другими словами, гауссово отображение даёт сборку Уитни, обсуждавшуюся в гл. 1. Очень информативное изложение этого вопроса вы найдёте в монографии Бэнчоффа, Гаффни и Маккрори [Banchoff–Gaffney–McCrogy 1982], посвящённой сборкам гауссовых отображений.

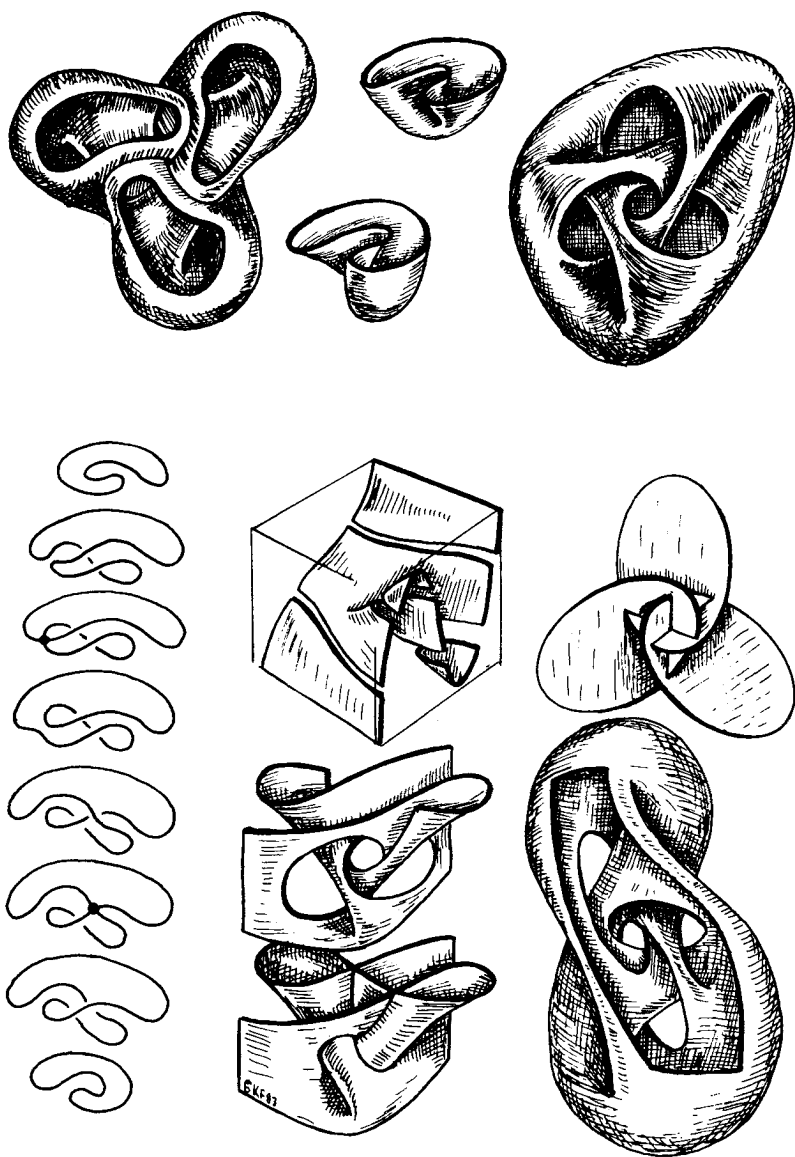
YZW -тень поверхности Веронезе из четырёхмерного на трёхмерное пространство представляет собой другую важную поверхность Штейнера – *скрещённый колпак*. На этот раз θ -окружность $(S(\theta), S(2\theta), C(2\theta))$ дважды оборачивается вокруг оси Y , образуя *двойной обруч* (рис. 4(22)). Двойной обруч обычно ассоциируется с функцией возведения в квадрат на комплексной плоскости. Используя указанную мною выше декартову параметризацию поверхности Веронезе, вы можете визуализовать отвечающую этой функции риманову поверхность в пространстве $XYZW$, зафиксировав $z = 1/2$ и позволив $x + iy$ пробегать комплексную плоскость.

Как и раньше, соединим между собой каждые две точки на обруче, отвечающие $\pm\theta$, прямолинейным отрезком, параллельным оси Y , и построим его до прямоугольника. На этот раз прямоугольник вращается вокруг одной из своих сторон и вырождается один раз – когда «протискивается» сквозь положительную полуось W . Разрешив теперь меняться параметру α , мы впишем в прямоугольник эллипс, в соответствии с принципом Фалеса (рис. 4(22)). Часть получающейся поверхности показана на рис. 4(23). Полная поверхность выглядит как диск Мёбиуса, вклеенный в сферическую оболочку (рис. 4(21)).

Скрещённый колпак «опирается» на двугранный угол $W \pm \sqrt{2}Y = 1$, накрывающий его сверху как крыша. В силу принципа гессiana кривизна меняет знак в точках двух эллипсов, по которым скрещённый колпак касается крыши. Более подробное описание скрещённого колпака с многочисленными иллюстрациями вы найдёте в гл. VI книги [Hilbert–Cohn-Vossen 1932]. Компьютерный мультфильм Бэнчоффа и Страусса [Banchoff–Strauss, 1977] показывает переход от римской поверхности к скрещённому колпаку, осуществляемый при помощи вращения в четырёхмерном пространстве. Захватывающий фильм Бэнчоффа и Страусса демонстрирует много замечательных теней, отбрасываемых этой красивой поверхностью в наше пространство.

Поверхность Боя (картинка 5)

Во второй половине девятнадцатого столетия теория поверхностей расцвела и созрела. Её влияние на топологию многообразий прекрасно освещено в историко-математическом исследовании Шольца [Scholz



Картинка 5. Поверхность Боя.

1980]. К концу столетия, однако, всё ещё оставался нерешённым дразнящий вопрос о том, как бы могла выглядеть проективная плоскость, если бы удалось её погрузить (без точек пинча) в трёхмерное пространство. Топологическое решение проблемы было найдено учеником Гильберта Вернером Боем [Boy 1901], но он не сумел удовлетворить традиционному для того времени требованию – предъявить аналитические формулы для своей поверхности. Только в последнем десятилетии Бернару Морэну и его сотрудникам удалось справиться с этой задачей. Но мы забежали в нашей истории вперёд. Модель поверхности Боя, сделанную из проволоочной сетки, вы можете увидеть на фотографиях, приведённых в книге [Hilbert – Cohn-Vossen 1932, рис. 321a–d], и там же вы найдёте введение в топологию этой поверхности, которое я не буду здесь повторять.¹

Естественно спросить, не является ли и поверхность Боя, подобно двум поверхностям Штейнера, трёхмерной тенью проективной плоскости, вложенной в четырёхмерное пространство. Ответ отрицателен, как показывает следующее элегантно-рассуждение, которое я узнал от Бена Хэлперна и Джеффа Бойера. Прообраз C двойной кривой K погружения $F: RP^3 \rightarrow R^3$ связан, поскольку K обладает тройной точкой. Пусть $f: S^1 \rightarrow RP^2$ (при $f(S^1) = C$) – параметризация этой погружённой окружности, удовлетворяющая условию $F(f(\theta)) = F(f(\theta + \pi))$. Разность $w(\theta) = W(f(\theta + \pi)) - W(f(\theta))$, где W – четвёртая координата предполагаемого вложения $RP^2 \rightarrow R^4$, нигде не обращается в нуль. Но если где-то $w(\theta) > 0$, то $w(\theta + \pi) = -w(\theta) < 0$. По непрерывности функция $w(\theta)$ в промежутке между θ и $\theta + \pi$ должна обращаться в нуль. Пришли к противоречию.

Поскольку подходящего вложения не существует, давайте ослабим наше требование и просто посмотрим, насколько «чисто» можно вложить проективную плоскость в четырёхмерное пространство, чтобы при этом её тенью была поверхность Боя. Для наблюдения за четырёхмерной фауной в отсутствие удобных аналитических формул нам нужны некоторые «начертательные инструменты». Наблюдатели двумерных теней в платоновой пещере много выиграли бы от использования перспективных рисунков для кодирования трёхмерного наружного мира. Давайте предоставим в распоряжение мастера, изготавливающего трёхмерные модели, все цвета радуги, чтобы он мог наносить на модель красками четвёртую координату своей поверхности. К сожалению, книжные страницы и доски – плоские и большинство рисунков на них нарисовано одним цветом. Поэтому вам придётся довольствоваться окнами и инструкциями по раскраске.

Чтобы уменьшить сложность линейного каркаса, продеформируем

¹ Как показал БэнчOFF [Banchoff 1974], число тройных точек у погружённой поверхности сравнимо с её эйлеровой характеристикой по модулю 2. В частности, отсюда следует, что проективную плоскость нельзя погрузить в трёхмерное пространство без тройных точек. – Прим. перев.

традиционный вариант поверхности Боя 5(11), «перекатив» сборки вперёд, как показано на рис. 5(22) и 5(12)¹. При этом контур поверхности 5(11), обладающий тремя точками острия и тремя точками самопересечения, распадается на две кривые – *дельтоиду* внутри *овала*, как на рис. 6:6(11). Двойная кривая – букет из трёх петель, связанных в тройной точке, – останется при этом прежней, как это видно из рис. 5(13) (если, конечно, заделать прорубленные в поверхности окна). Я отклонил дельтоиду от вертикали так, чтобы горизонтальное седло находилось вблизи одной из сборок. Устранив на поверхности 5(11) лишнее седло вместе с локальным максимумом при помощи небольшого поворота, мы увидим, что на этой поверхности тоже существует функция Морса, у которой только три критические точки.

Покрасим поверхность 5(13) в зелёный цвет, соответствующий нулевому уровню, а верхнее окно подкрасим², чтобы за счёт выхода в четырёхмерное пространство ликвидировать верхнюю петлю двойной кривой. Подсинив теперь оба нижних окна, мы совсем «очистим» зелёную поверхность³. Поскольку ободки этих двух дисков (нижних окон) сцеплены в трёхмерном пространстве, прообраз их пересечения (вертикальная двойная линия на рис. 5(23)) является дугой, идущей на каждом диске от края внутрь. В то время как на правом диске цвет этой дуги «поднимается» от фиолетового внутри до синего у края, на левом он «падает» от синего до фиолетового. По непрерывности существует точка посередине, в которой обе дуги окрашены в индиго одного оттенка. Она отвечает *двойной точке* («узлу») поверхности в четырёхмерном пространстве. Заметьте, что если бы в соответствии с вращательной симметрией третьего порядка верхнее окно тоже было «выдавлено» в синем направлении, то образовались бы ещё две двойные точки цвета индиго, по одной на каждое из морэзовских взаимоуничтожений точек пинча на римской поверхности, поднятой в четырёхмерное пространство⁴.

Другой способ «наращивания» размерности заключается в том, чтобы уложить стопкой последовательные трёхмерные сечения. Нарежьте поверхность 5(13) горизонтальными ломтиками и проинтерпретируйте каждый срез как горизонтальную тень трёхмерного среза четырёхмерной поверхности. Восемь таких сечений уложены в стопку в левом столбце – от 5(21) до 5(91). Я пользовался соглашением, принятым для диаграмм узлов, прерывая линию при её прохождении под другой. Заметьте, что красный цвет соответствует «низу» в каждой из этих восьми копий трёхмерного пространства. (Я не стал рисовать очевидную точку в самом верху стопки и следующий за ней овал, а также овал и точку в самом низу.) Если считать, что плоскость, рассекающая поверх-

¹ Подробнее это будет показано на картинке 8. – *Прим. перев.*

² Плавно меняя цвет. Здесь будет полезно вспомнить порядок цветов на хроматической шкале: красный, зелёный, синий. – *Прим. перев.*

³ От двойных точек. – *Прим. перев.*

⁴ Подробнее это обсуждается ниже в связи с картинкой 8. – *Прим. перев.*

ность 5(13), равномерно движется вниз, то наша стопка будет изображать восемь мгновенных положений $T_1, \dots, T_8$ некоторой кривой, движущейся в трёхмерном пространстве. Эта кривая простая и замкнутая, за исключением двух моментов. В момент времени T_3 имеет место *рекомбинация*, как в молекулярной генетике, сигнализирующая о седле, ортогональном плоскости *время* $\times$ *цвет* в четырёхмерном пространстве. На рис. 5(32) это седло имеет вид кубической поверхности, образующей сборку в плоскости рисунка. Позднее, в момент T_6 , кривая пересекает сама себя, и это означает, что на поверхности в четырёхмерном пространстве есть двойная точка.

Тень этой кажущейся кривой на плоскости рисунка (заполните промежутки) изображает регулярную гомотопию погружённой окружности, если исключить точку рекомбинации. Уложив все временные слои в пространственную стопку, мы воссоздадим поверхность Боя «сверху вниз». В действительности именно этот метод и был первоначально использован Боем. К моменту T_1 на контуре поверхности появляется остриё. К моменту T_2 возникает кривая двойных точек. После того как мы миновали седло, у этой кривой имеются две петли, смотрящие в разные стороны (момент T_4). Вторая двойная кривая и тройная точка возникают, когда где-то между T_4 и T_5 через левую петлю «перемахивает» отрезок. Последняя петля двойной кривой исчезает между T_7 и T_8 , и сборка позволяет поверхности замкнуться. Стопка от T_4 до T_8 представляет собой *скрещённую складку*, показанную с окнами на рис. 5(42) и без них на рис. 5(52). Эти окна образуют тройную точку, см. 5(23), как и на рисунке поверхности Боя 5(33), взятом из [Francis–Morin 1979].

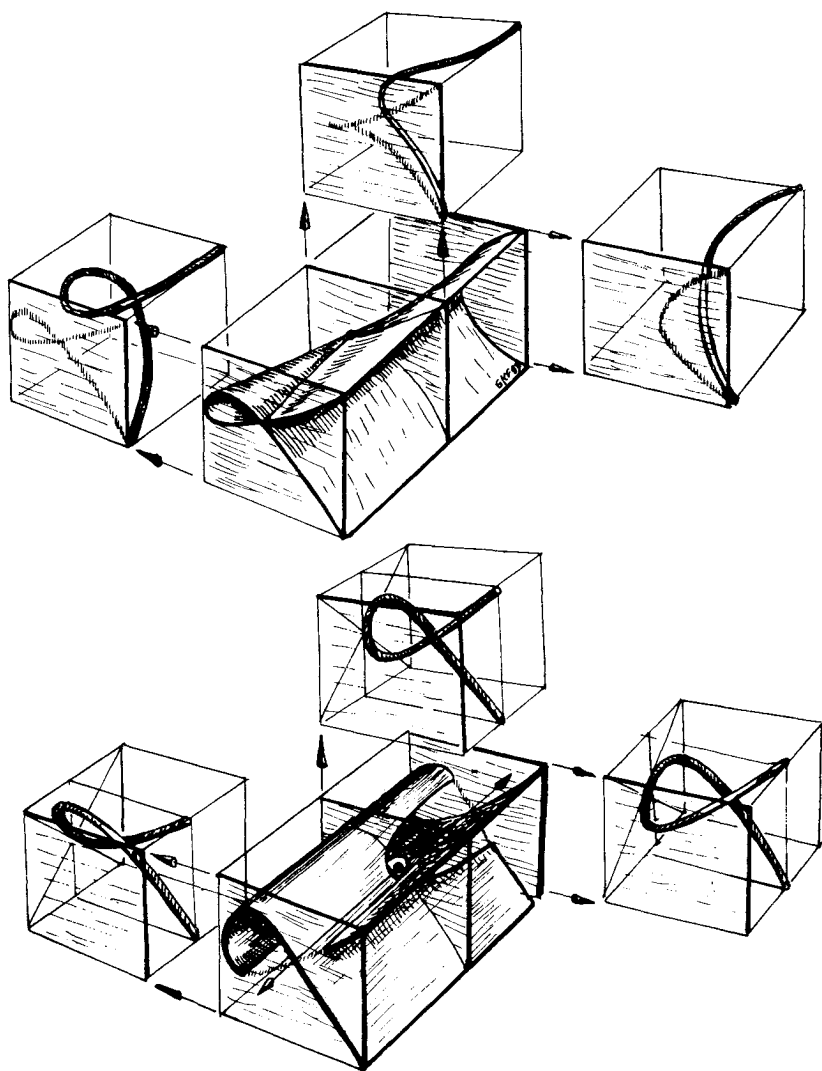
Срез и тень (картинка 6)

Позвольте мне ещё раз бросить взгляд на эту хроматическую технику визуализации поверхностей в четырёхмерном пространстве, применив её к первичным формам трёхмерных поверхностей – точке пинча 6(22) и двойной линии 6(42). Рассмотрим четырёхмерное пространство, разложенное в произведение $R^2 \times R^1 \times R^1$ трёх ортогональных подпространств: *базовой плоскости* и *временного* и *цветового направлений*. На практике базовая поверхность обычно совпадает с плоскостью рисунка. Для ясности я наклонил базовую поверхность по отношению к плоскости рисунка. Она представлена передней гранью каркасных коробок.

Если вы нарежете слоями поверхность в четырёхмерном пространстве, поступательно перемещая хроматический куб во временном направлении, то увидите кривую, движущуюся в пространстве. Например, движение 6(21)–6(12)–6(23) расправляет видимую петлю, а 6(41)–6(32)–6(43) меняет местами *переход* и *проход*¹, сигнализируя о двойной точке, представляющей собой одноточечное самопересечение поверхности в четырёхмерном пространстве². Если спроецировать первое

¹ То есть верхнюю и нижнюю ветви. – Прим. изд. ред.

² Это точка самопересечения кривой 6(32). – Прим. перев.



Картинка 6. Срез и тень.

движение на базовую плоскость, то оно будет выглядеть, как распрямление упругой петли, которая при этом проходит через каспидальную особенность — острёй. Проекция второго движения неподвижна.

Если уложить эти базовые кривые в стопку¹, то получатся зонтик Уитни 6(22) и *скрещённая труба* 6(42) соответственно. Точка пинча на зонтике соответствует острю тени на базовой плоскости. С другой стороны, как вы можете убедиться, немного подифференцировав, видимое острёй на базовой проекции петли указывает на то, что поверхность в четырёхмерном пространстве касается цветового направления. У второй поверхности в четырёхмерном пространстве имеется двойная точка, что связано с зацепленностью окон на рис. 6(42), использованных для устранения двойной линии.

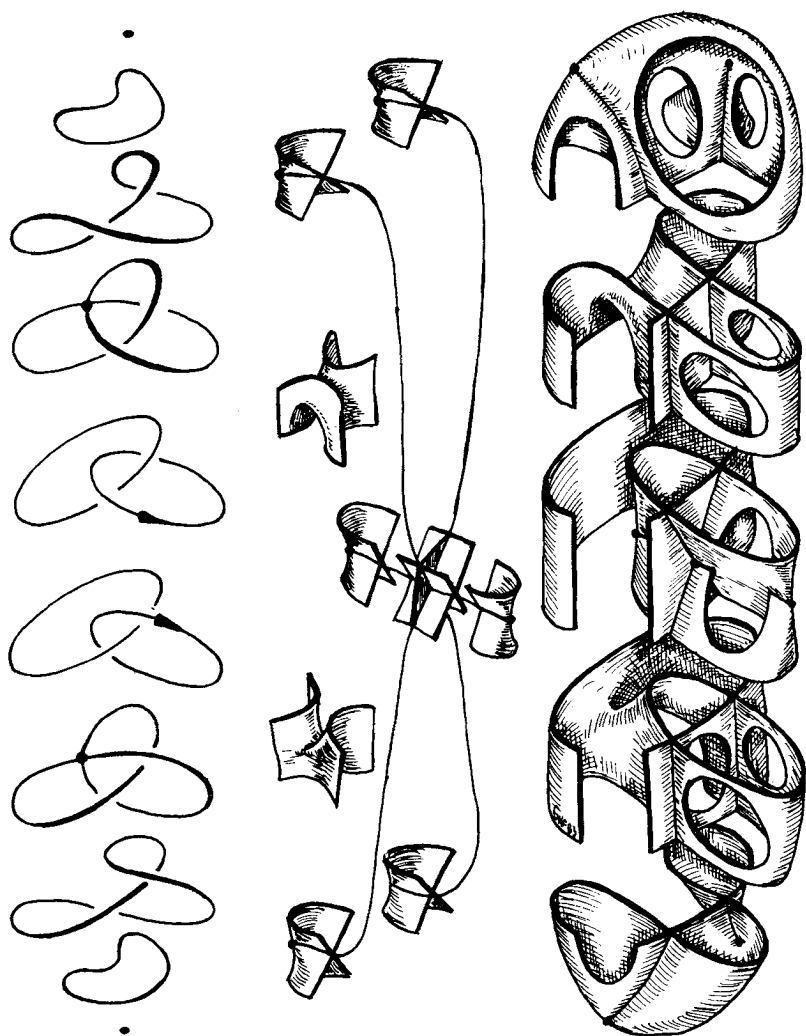
Бутылка Уитни (картинка 7)

Тот факт, что ни одна из кривых, получающихся при сечении поверхности Боя горизонтальными плоскостями (см. рис. 5(21)–5(91)), не отбрасывает на базовую поверхность тени с острём, означает, что единичный красный вектор нигде не касается соответствующей поверхности в четырёхмерном пространстве. Другими словами, это четырёхмерное погружение проективной плоскости несёт на себе непрерывное поле нормальных векторов, что невозможно ни для какого погружения неориентируемой (односторонней) поверхности в трёхмерное пространство. Вопрос о *вложении* таких поверхностей в четырёхмерное пространство, при котором их можно без «проплешинок» покрыть меховой шкурой², в ходе развития теории характеристических классов изучал Уитни [Whitney 1941]. Он доказал, что в случае нечётной эйлеровой характеристики (например, для P^2) таких вложений не существует³. Следовательно, устранить самопересечение посредством гладкой де-

¹ То есть спроецировать поверхность на произведение *базовая плоскость* $\times$ *время*. — *Прим. перев.*

² Этот вопрос напоминает популярную задачу о «причёсывании ежа». Только возможность «причесать ежа» означала бы тривиальность касательного расслоения сферы, а возможность покрыть поверхность меховой шкурой, у которой шерсть стояла бы дыбом, соответствует тривиальности нормального расслоения. Вообще, у замкнутой поверхности (необязательно ориентируемой!), регулярно погружённой в R^4 , определено *нормальное число Эйлера*, равное алгебраическому количеству нулей нормального векторного поля. Для вложенных ориентируемых поверхностей оно всегда равно нулю, в случае неориентируемой поверхности оно равно нулю тогда и только тогда, когда у поверхности существует нормальное векторное поле. — *Прим. перев.*

³ Теорема Уитни гласит, что у вложенной поверхности нормальное число Эйлера сравнимо с удвоенной эйлеровой характеристикой по модулю 4. В частности, у P^2 эйлерова характеристика равна 1 и, следовательно, нормальное число Эйлера не равно 0. — *Прим. перев.*



Картинка 7. Бутылка Уитни.

формации, состоящей из погружений, (т.е. посредством регулярной гомотопии) в четырёхмерном пространстве невозможно¹.

Для случая чётной эйлеровой характеристики из доказанной Масси [Massey 1969] гипотезы Уитни² следует, в частности, что бутылка Клейна допускает только три неэквивалентных вложения³. Одно из них покрывается меховой шкурой без проплешинки. Вы можете построить для него уитневскую стопку, нарезав на слои обычное погружение бутылки Клейна в трёхмерное пространство. Для того чтобы изобразить бутылку Клейна без нормального поля, описанную Уитни в работе [Whitney 1941, рис. 4], поступите следующим образом.

Заметьте сначала, что если бы к моменту времени T_4 в стопке Боя (рис. 5(51)) мы просто раскрутили две маленькие петли, то в результате получилось бы вложение проективной плоскости. Временная тень⁴ этой проективной плоскости имела бы отрезок из двойных точек с концами в двух точках пинча. Другими словами, это изотоп скрещённого колпака Штейнера. В качестве упражнения вам следует сконструировать стопку Уитни, тенью которой служит римская поверхность. Во временном сечении бутылки Уитни, читаемом сверху вниз на рис. 7(11)–7(91), появляются две петли, которые при проходе через седло рекомбинируют, образуя два сцепленных овала. Перекиньте один из них на другую сторону и обратите процесс. Схему сборки фрагментов тени этой поверхности (второй столбец) можно нарисовать, глядя на стопку Уитни. Не оставьте без внимания тот факт, что самопересекающееся кольцо, дающее в пересечении с плоскостью тройную точку, соответствует перевороту овала. Полная схема сборки тени, разбитая на пояса, показана справа (рис. 7(13)–7(53)) с использованием окон.

Римбойская деформация (картинка 8)

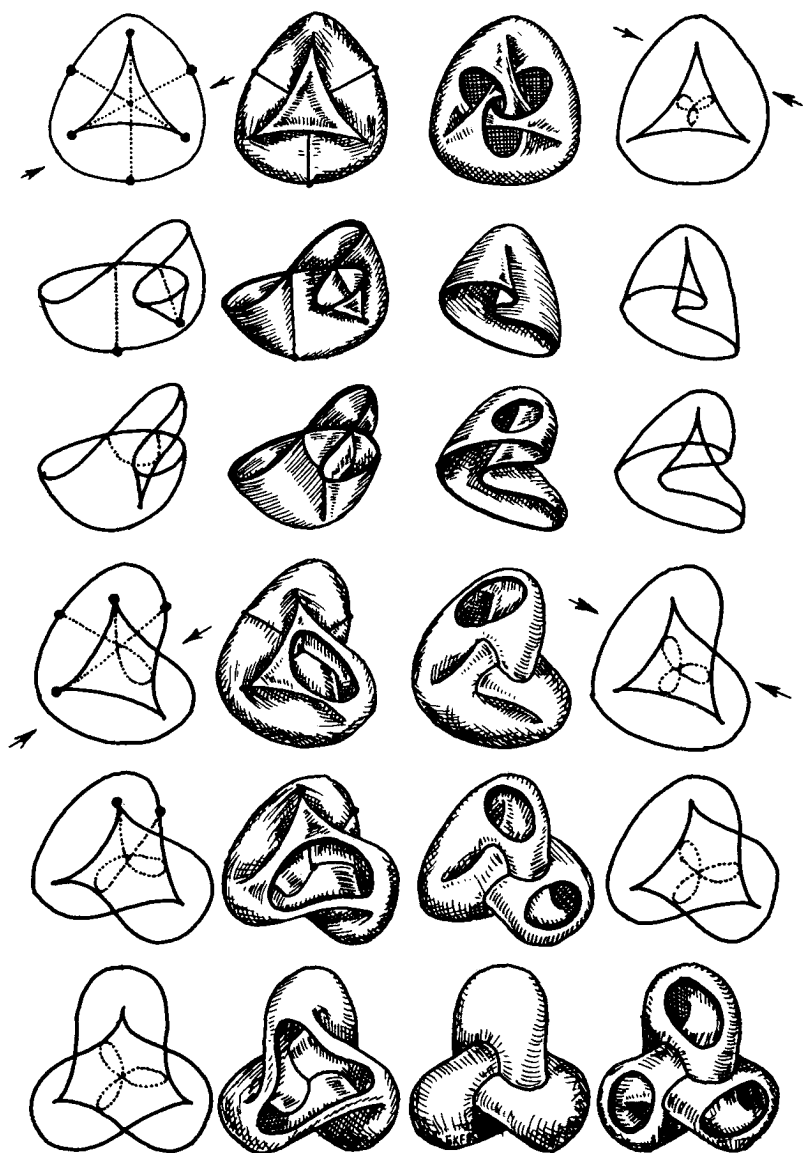
Существует топологический переход от римской поверхности Штейнера к поверхности Боя, основанный на устранении смежных точек пинча (см. картинки 2:9–2:11). Вполне возможно, что эта деформация была известна Бою и помогла ему открыть погружение проективной плоскости, носящее его имя. Я узнал о ней от Тима Постона в 1977 г., а он – от Бернара Морзна. Чтобы поверхности было удобнее сравнивать, я воспроизвел на картинке несколько видов, уже встречавшихся нам, вместе с линейными каркасами.

¹ Мы получаем ещё одно доказательство того, что поверхность Боя не является проекцией поверхности, вложенной в R^4 . – Прим. перев.

² Речь идёт о том, что нормальное число Эйлера вложенной в R^4 сферы с g плёнками по модулю не превосходит $2g$. – Прим. перев.

³ С нормальными числами Эйлера 0, +4, –4 соответственно. Вложения с одинаковыми числами Эйлера в силу теории Хирша–Смейла регулярно гомотопны, хотя, разумеется, могут быть не изотопны. – Прим. перев.

⁴ То есть тень на произведении *пространство* $\times$ *цвет*. – Прим. перев.



Картинка 8. Римбойская деформация.

Начнём с обычного вида римской поверхности 8(12). На её линейном каркасе 8(11) имеются два контура (сплошные линии), три двойные кривые (пунктирные линии), одна тройная точка (в центре), шесть точек пинча и стрелки, указывающие на место разреза поверхности. Отрезанный кусок 8(22) содержит южную и юго-восточную точки пинча, которые взаимоуничтожаются первыми (рис. 8(32)). Присоединяя деформированный нижний кусок обратно к верхнему, приходим к линейному каркасу 8(41), по которому вы можете нарисовать поверхность 8(42). Затем устраняются западные точки пинча (рис. 8(51) и 8(52)). Вы можете также считать поверхность 8(52) результатом раскручивания одной за другой двух маленьких петель на второй сверху кривой 5(31) в стопке сечений поверхности Боя 5(13). Как только взаимоуничтожились две последние точки пинча (рис. 8(62)), перед вами оказывается вид сзади на поверхность 5(11), но только в зеркале. Следовательно, поверхность 8(63) является зеркальным отражением поверхности 8(62). Будучи снабжена тремя окнами (рис. 8(64)), она выглядит точно так же, как поверхность Боя на рис. 5(11) (повернутом на 45°).

В третьем столбце изображена аналогичная последовательность, переводящая поверхность Боя из «плоской» формы 5(13) в традиционную «круглую». Северная сборка перекачивается через контур (рис. 8(23), 8(33); это уже знакомые вам рис. 5(12), 5(22), только вверх ногами). Можете ли вы сказать, глядя на рис. 8(44) и 8(54), какую сборку нужно перекатить, чтобы получить поверхность 8(53)? Перекатывание сборок представляет собой изотопию в трёхмерном пространстве, но взаимоуничтожение точек пинча необязательно является тенью изотопии в четырёхмерном пространстве. Как мы видели выше, в отличие от римской поверхности поверхность Боя не может быть тенью вложенной в четырёхмерное пространство проективной плоскости.

Две колонки нашей картинке-таблицы дают также качественный портрет двух методов, с помощью которых Франсуа Апері получил явные параметризации поверхности Боя [Apery 1987]. Прежде всего вспомним, что римская поверхность Штейнера порождается эллипсами. Скульптор Макс Зауце изготовил такую модель для Бернара Морэна. Он предпочёл воспользоваться плоскими овалами также и при конструировании проволочной модели поверхности Боя. Это вдохновило физика и математического художника Жана-Пьера Пти и его сотрудника Жерома Сурьо смоделировать поверхность Боя эллипсами на компьютере «Эппл» [Petit-Souriau 1982]. Их эллипс меняет свою форму и плоскость, но всё время касается базовой плоскости в «южном полюсе» поверхности. На нашей картинке южный полюс располагается для поверхности 8(62) на окне, а для поверхности 8(63) – в наиболее удалённой от вас точке. У поверхности 8(12) это ближайшая к вам точка у поверхности 8(13) – точка, видимая сквозь три окна. Пти и Сурьо эмпирическим путём вывели формулы для расположения эллипса в его плоскости и наклона этой плоскости в каждый момент движения.

Апері же начинает с римской поверхности. Его способ порождения

поверхности эллипсами отличается от использованного мною выше. У Апери овалы всё время касаются опорной плоскости в южном полюсе. Рассмотрите две точки: «верхнюю», движущуюся по горизонтальной окружности радиуса r_1 на высоте 1, и «нижнюю», движущуюся вдвое медленнее в противоположном направлении по горизонтальной окружности радиуса r_0 в базовой плоскости. Южный полюс находится в начале координат. Образуйте линейную комбинацию

$$\begin{pmatrix} r_1 C(2\theta) \\ r_1 S(2\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2} \begin{pmatrix} +r_2 C(\theta) \\ -r_2 S(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

с переменными коэффициентами $A = 1/(1+t^2)$ и $B = tA$. Апери берёт южную окружность радиуса $2/3$, а северную – радиуса $\sqrt{2}/3$. Для каждого θ обозначим через $J(\theta)$ вектор, идущий из начала координат в «верхнюю» точку, и через $K(\theta)$ – горизонтальный вектор в базисной плоскости, идущий из начала координат в «нижнюю» точку. Переменные коэффициенты A и B удовлетворяют принципу Фалеса. Следовательно, овалы, заданные параметризацией $J(\theta)A(t) + B(t)K(\theta)$, являются эллипсами, касающимися горизонтальной плоскости в начале координат. Три компоненты этой параметризации представляют собой квадратичные многочлены от декартовых координат на единичной сфере. Параметр t равняется тангенсу широты на сфере.

Апери искусно возмущает переменные коэффициенты A , B , деформируя их общий знаменатель в $1 - 2\beta t + t^2$, где $\beta = (b/\sqrt{2})\sin(3\theta)$. В результате при $b = 1/\sqrt{3}$ замечательным образом устраняются все шесть точек пинча. Демонстрируя чудеса алгебраической ловкости, он исключает параметры и получает для поверхности Боя полиномиальное уравнение шестого порядка.

По причинам, объясняемым в классической алгебраической геометрии, поверхность Боя должна иметь порядок не ниже шести. В своём опубликованном в 1955 г. обзоре проблемы Боя Хайнц Хопф высказал гипотезу, что полиномиальная параметризация поверхности Боя тоже должна иметь порядок не ниже шести (см. [Norf 1983, с. 104]). Апери, однако, нашёл для этой поверхности параметризацию однородными многочленами степени четыре. Здесь его подход непосредственно примыкает к способу, применённому Морэном для нахождения параметризаций выворачиваний сферы наизнанку [Morin 1978]. Визуализация этих сложных регулярных гомотопий поверхности с помощью как графических, так и аналитических средств составляет предмет следующей главы. А эту я закончу тем, что дам краткий набросок второго метода Апери.

Способ Морэна является аналитическим аналогом графических приёмов, описанных мною в гл. 2. Отправляясь от контура и беря его в качестве «шаблона», поверхность строят по этому двумерному шаблону.

Апери начинает со стабилизации сингулярного отображения сферы в плоскость, при котором образ критических точек выглядит, как на рис. 8(14) за вычетом пунктирной кривой. Вы, возможно, заметили, что контурный образ движения, перекатывающего сборки, напоминает последовательность картинок, обычно связываемых с *гиперболической омбилической катастрофой* Тома. Это сходство, которое отнюдь не является случайным, обильно проиллюстрировано и терпеливо разьяснено Джимом Каллаханом в его статьях [Callahan 1974; 1977].

Облачив процедуру перекатывания складок в алгебраические одежды и придав ей симметрию третьего порядка, Апери получает путь от 8(14) к 8(61). Последний шаг состоит в том, чтобы «накачать воздухом» это однопараметрическое семейство отображений сферы в плоскость. Аккуратно выбирая третьи координаты так, чтобы отображение проективной плоскости в трёхмерное пространство всё время оставалось погружением, он получает регулярную гомотопию от 8(13) к 8(63).

Тот приятный факт, что все эти поверхности и их деформации можно теперь кодировать на простых языках типа бейсика и разглядывать на экранах недорогих и простых в обращении графических компьютеров, таких как «Эппл», позволяет отнести этот жанр математической живописи к тому же элементарному уровню, что и рисунки от руки в этой книжке с картинками. Потому-то я и сделал особое ударение на аналитических двойниках некоторых графических приёмов. Тем не менее при ограниченном разрешении, низкой скорости и скромной гибкости компьютерной графики у всех нынешних машин, кроме самых экстра-классных, дело сильно выигрывает от умения программиста быстро и хорошо набрасывать от руки виды, которые должен воспроизвести компьютер.

Выворачивания сферы наизнанку

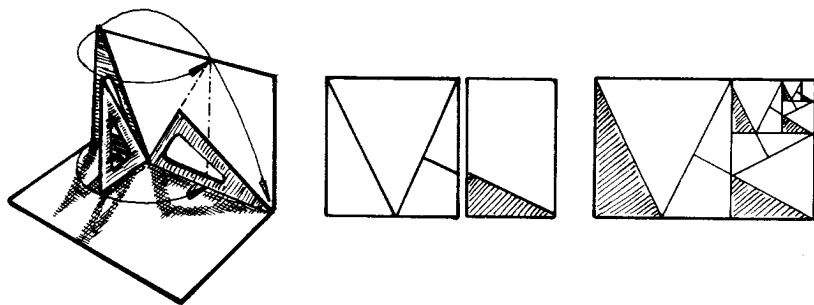
Рассказ о выворачивании наизнанку сферы в трёхмерном пространстве при помощи регулярных гомотопий – это история нетривиальной проблемы визуализации, проблемы удивительно сложной и неотразимо красивой. Задача состоит в том, чтобы показать такое движение сферической поверхности в пространстве, при котором она, пересекая саму себя, выворачивается внутренней стороной наружу, но не мнётся и не разрывается. То обстоятельство, что к одной и той же проблеме применялось так много различных графических методов, в то время как математикам более свойственно демонстрировать универсальность одного метода, применяя его к множеству разнообразных проблем, превращает эту проблему в парадигму начертательной топологии. Пока ещё преждевременно формулировать правила игры, позволяющие сравнивать многочисленные решения этой графической задачи. Вместо этого позвольте мне для начала рассказать очень короткую историю о «золотом» прямоугольнике¹. Хотя существование золотых прямоугольников не имеет прямого отношения к выворачиваниям наизнанку, популярность этой темы среди математиков позволит мне наглядно продемонстрировать на этом примере принципы «графического критицизма».

Золотой прямоугольник (картинка 1)

Напомню, что стороны золотого прямоугольника несоизмеримы, поскольку для них алгоритм Эвклида для отыскания общей меры двух отрезков не завершается за конечное число шагов. Геометрически шаг рекурсии в этом алгоритме выглядит как удаление квадрата, построенного на короткой стороне прямоугольника; затем эту процедуру повторяют с остатком, если он есть, и т.д. Теперь предположим, что существует прямоугольник, часть которого, оставшаяся после отделения квадрата, является уменьшенной копией его самого. Тогда этот *ánthyphaereisis*² – уменьшение большего на меньшее – никогда бы непре-

¹ То есть прямоугольнике с пропорциями золотого сечения. – *Прим. изд. ред.*

² Противопоставление (*лат.*), от греческих *ánti* (противо-) и *φέρω* (приносить). – *Прим. изд. ред.*



Картинка 1. Золотой прямоугольник.

кратился. Но, прежде всего, почему такой прямоугольник существует? Вот три способа ответить на этот вопрос. Первый из них – это конкретизация абстрактной теоремы, доказательство которой в действительности имеет мало общего с золотыми прямоугольниками.

Обозначим через x отношение длинной стороны прямоугольника к короткой. Определяющая пропорция $x:1 = 1:(x-1)$ приводит к уравнению $f(x) = 0$, где $f(x) = x^2 - x - 1$. Как известно из анализа, эта полиномиальная функция на промежутке $[1, 2]$ возрастает от $f(1) = -1$ до $f(2) = +2$, поскольку на этом промежутке её производная положительна. Дифференцируемые функции непрерывны, а непрерывные обладают нулями на тех промежутках, на которых они меняют знак.

Однако анализ нам на самом деле не нужен, так как по формуле, которую все хорошо помнят из школьной алгебры, корнем этого квадратного уравнения служит $x = (1 + \sqrt{5})/2$. Но не нужна и алгебра. Вот доказательство при помощи рисунка, которое могут понять даже школьники младших классов. Поставьте прямоугольный треугольник с отношением сторон $2:1$ на короткий катет, как на рис. 1(11). Одну его копию опрокиньте на гипотенузу (в его же плоскости), а другую поверните на 180° (выходя за пределы этой плоскости), как показано на рисунке. Манёвр с опрокидыванием даёт прямоугольник, обладающий, в силу теоремы Пифагора, нужным отношением сторон! Манёвр с полуоборотом доставляет квадрат, который нужно убрать, и после удаления этого квадрата остается меньший прямоугольник со стоящим в углу прямоугольным треугольником (рис. 1(12)). Теперь убедите вашу аудиторию, скроив для неё доказательство по её мерке, в том, что применение той же процедуры к этому меньшему треугольнику приводит в точности к этому самому меньшему прямоугольнику и, следовательно, её можно повторять бесконечно (рис. 1(13)).

Таким образом, в множестве конкурирующих выражений одной и той же основной идеи наблюдается нечто вроде линейного порядка. В одном направлении идёт продвижение ко всё более элементарным, «грубым» рисункам, связанным со всё более абстрактной и общей

теорией. Так, если кому-то надо проиллюстрировать доказательство, основанное на непрерывности, он рисует расхлябанную линию, идущую из одного угла прямоугольника в противоположный, и привлекает внимание к тому обстоятельству, что она обязана пересечь горизонтальную линию, изображающую ось x . В другом направлении идёт продвижение ко всё более конкретным картинкам, со сложными построениями и богатыми ассоциациями. В идеале возвращение к общей теории (путем абстракции) должно быть освещено блеском конкретного примера.

Скрещённый колпак и ручка (картинка 2)

Немного истории поможет понять, какое богатство топологических идей можно продемонстрировать при описании выворачивания сферы наизнанку. Погружённая проективная плоскость Вернера Боя (рис. 5:5(11–53)) пополнила коллекцию замкнутых поверхностей в трёхмерном пространстве, иллюстрирующих *формулу Кронекера – Дикка*

$$C = 2\chi\pi + 2n\pi,$$

где C обозначает интегральную кривизну, χ – эйлерову характеристику, а n – количество точек, в которых оканчиваются двойные кривые¹ (см. [Kronecker 1869], [Dyck 1888]). Упомянутые термины будут определены в ходе дальнейшего рассказа. Со времен Мёбиуса математики были убеждены – хотя строгие доказательства появились позже, – что каждую замкнутую поверхность можно построить, добавив к сфере p ручек и q скрещённых колпаков («пленок Мёбиуса»). Знакопеременная сумма чисел граней, рёбер и вершин полиэдральной поверхности называется её *эйлеровой характеристикой* χ . Для замкнутых поверхностей²

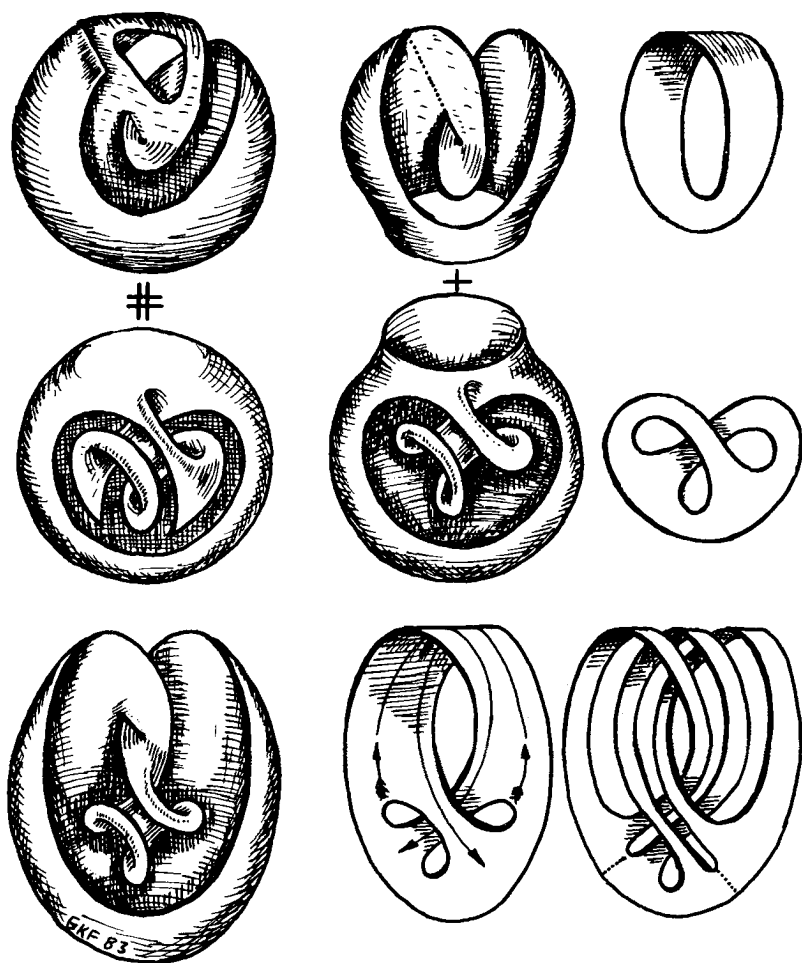
$$\chi = F - E + V = 2 - 2p - q.$$

Род p однозначно характеризует ориентируемые (двусторонние) поверхности (к которым относятся, например, все римановы поверхности), с точностью до топологической эквивалентности. В этом случае $q = 0$, поскольку наличие ленты Мёбиуса на поверхности сделало бы ее односторонней. Двусторонние поверхности представлены знакомой всем сферой S^2 , тором T^2 , кренделем (двудырым тором³) $7:1(21)$, трёхдырым тором и т.д. Все они могут быть вложены в трёхмерное

¹ Речь идёт о точках, в окрестности которых поверхность выглядит как объединение двух касающихся друг друга конусов с общей вершиной, но ни в коем случае не о точках пинча. Так что в случае *нормальных* поверхностей получаем обычную формулу Гаусса – Бонне $C = 2\chi\pi$. – *Прим. перев.*

² Ниже F , E и V – соответственно от *face* (грань), *edge* (ребро) и *vertex* (вершина). – *Прим. изд. ред.*

³ Точнее, сферой с двумя ручками. – *Прим. перев.*



Картинка 2. Скрещённый колпак и ручка.

пространство. В случае неориентируемых (замкнутых) поверхностей в пространстве приходится иметь дело с кривыми самопересечения. Скажем, проективную плоскость P^2 представляет римская поверхность Штейнера 5:3(31), для которой $p = 0$, $q = 1$ и $n = 3$, поскольку у неё три двойных отрезка. Для обычной модели бутылки Клейна K^2 мы имеем $p = 0$, $q = 2$ и $n = 0$, поскольку двойная кривая замкнута. Поверхность Боя была первым примером реализации P^2 в R^3 без точек пинча, т. е. с $n = 0$.

Мы уже пользовались процедурой сшивания двух поверхностей с краем вдоль их краёв. Проективная плоскость является такой *суммой по краю* круга (диска) D^2 и ленты Мёбиуса M^2 , как показано на рис. 5:4(21), а бутылка Клейна – суммой двух лент Мёбиуса (рис. 10(23)). Две замкнутые поверхности F_1 и F_2 можно соединить, удалив из каждой по диску и сшив их вдоль краевых окружностей. Получающаяся в результате замкнутая поверхность топологически не зависит от того, какие именно диски использовались для соединения поверхностей, и называется их *связной суммой* $F_1 \# F_2$. Эйлерова характеристика почти аддитивна относительно этой операции, а именно надо только из-за двух выкинутых дисков вычесть лишнюю двойку:

$$\chi(F_1 \# F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_2) - 2.$$

Основы комбинаторной топологии замкнутых поверхностей сводятся к трём соотношениям:¹

$$F = pT^2 \# qP^2,$$

$$F \# S^2 = F,$$

$$F \# P^2 \# T^2 = F \# P^2 \# K^2 = F \# 3P^2.$$

Чтобы убедить вас в справедливости третьего соотношения, я покажу, как представить $P^2 \# T^2$ в виде суммы по краю букета из трёх лент Мёбиуса (рис. 2(33)) и круга (не показан)². На рис. 2(11) я нарисовал (сингулярный) диск, остающийся после того, как из проективной плоскости P^2 удалили ленту Мёбиуса. Проективная плоскость имеет вид скрещённого колпака Штейнера 5:4(21), а окно помогает вам увидеть недостающую ленту Мёбиуса M^2 . На рис. 2(21) изображена сфера с одной ручкой – тор. У двух окружностей на этой поверхности, пересекающихся в одной точке, удалена «ленточная» окрестность H^2 , и остаток снова оказывается диском. На рис. 2(12) я расширил недостающую ленту Мёбиуса M^2 вплоть до точки пинча. В качестве подготовки к связному суммированию удалён диск. Недостающая лента M^2 показана на рис. 2(13), а «ручка» H^2 , отсутствующая на аналогичном образом подготовленном к суммированию рисунке 2(22), представлена на рис. 2(23). Интересующая нас связная сумма получается, если состыковать сингулярный диск 2(31) с его дополнением 2(32). Теперь оттянем поверхность 2(32) вдоль указанных (стрелками) кривых и получим 2(33). Пунктирные линии показывают, как именно эта поверхность представляется в виде суммы трёх лент Мёбиуса. Попробуйте так видоизменить диск 2(31), чтобы он состыковался с 2(33). Это упражнение в рисовании не тривиально, но его стоит проделать.

¹ Первое из приводимых ниже соотношений – это запись упомянутого выше утверждения, которое «считали верным все математики со времён Мёбиуса». – Прим. изд. ред.

² И тогда останется только учесть, что $K^2 = P^2 \# P^2$. – Прим. перев.

Запрещённое выворачивание (картинка 3)

Чтобы доказать формулу Кронекера – Дикка, Бою пришлось распространить понятие *интегральной кривизны* S на неориентируемые поверхности. Гауссова *curvatura integra*¹ определена только для поверхностей, допускающих непрерывное поле нормальных векторов. В случае замкнутой поверхности она измеряет, сколько раз гауссово отображение (см. рис. 5:4(11)) покрывает единичную сферу, причём для положительно искривлённых частей поверхности площади их образов при этом отображении складываются, а для отрицательно искривлённых – вычитаются. Легко посчитать интегральную кривизну поверхностей вращения, поскольку нормали к ним непосредственно «переносятся» на сферу Гаусса (рис. 3(13)). Так, положительно искривлённая наружная часть стандартного тора (рис. 3(11)) вносит вклад, равный полной площади сферы 4π , а отрицательно искривлённое *горлышко* вычитает 4π . Каждая дополнительная ручка (рис. 3(12)) вычитает ещё 4π (на верхнем и нижнем плоских дисках с двумя дырками гауссово отображение постоянно).

Разрабатывая свой комбинаторный вариант локальной функции кривизны, который имел бы смысл и в случае особенностей (двойных кривых и точек пинча), Бой изобрел понятие *вполне непрерывной деформации* регулярного участка поверхности. Он рассматривал деформации, при которых может изменяться схема самопересечений (множество двойных точек), при условии что функция гауссовой кривизны остается ограниченной. В точке пинча кривизна становится бесконечной²; в это легко поверить, когда окрестность точки пинча выглядит как конус, приклеенный к поверхности (рис. 3(22))³.

Вы достаточно легко сможете вывернуть сферу наизнанку, если допустите появление точек пинча и не будете настаивать на том, чтобы деформация была вполне непрерывной. Представьте, что сфера S_1 снаружи выкрашена в синий цвет, а изнутри – в красный. Теперь тащите северный и южный полюсы навстречу друг другу, покуда они не пройдут один сквозь другой. При этом получится погружённая сфера S_2 , левая половина которой показана на рис. 3(21). Снаружи она выглядит как красная сфера, по экватору которой идёт синяя трубка. Эту фигуру Морэн называл *шляпой*⁴ – он рассматривал её вариант 5(12), имеющий форму шляпы⁵.

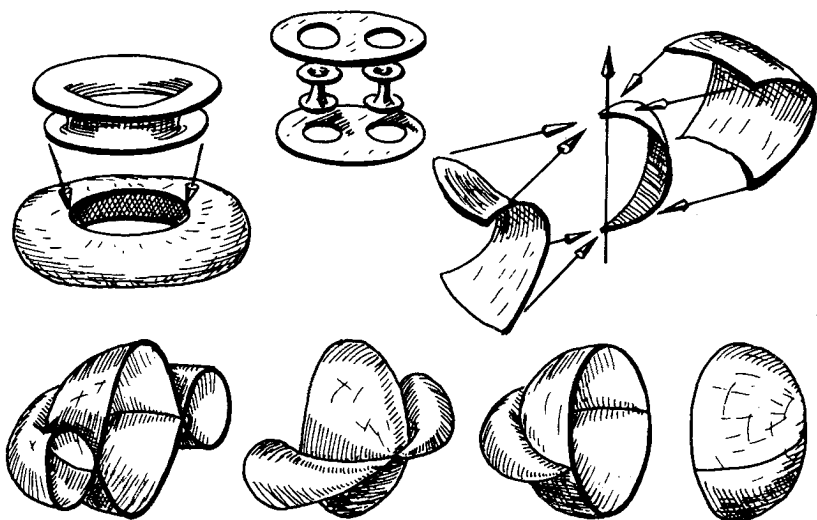
¹ Интегральная кривизна (лат.). – Прим. изд. ред.

² Здесь автор оговаривается. Легко видеть, что в точке пинча предел гауссовой кривизны равен нулю. – Прим. перев.

³ Она *никогда* так не выглядит. Ср. с первым подстрочным примечанием на стр. 127. – Прим. перев.

⁴ Chapeau (французское слово, вошедшее и в английский). – Прим. изд. ред.

⁵ На рис. 5(12) опять изображена только половина «шляпы». – Прим. перев.



Картинка 3. Запрещённое выворачивание.

Пережмите трубку, как на рис. 3(22), порождая пару точек пинча. Теперь оттяните обе точки пинча назад (рис. 3(23)), чтобы они взаимно уничтожились и осталась сфера, красная снаружи и синяя изнутри. Если вы сумеете придумать, как сделать это, избежав «рождения» и «смерти» пары точек пинча, то это будет ещё один способ вывернуть сферу наизнанку.

То что выворачивания сферы существуют, является косвенным следствием одной абстрактной теоремы Стивена Смейла [Smale 1959]. В принципе возможно, объединив мириады крохотных геометрических конструкций, предписанных его доказательством, «собрать» из них явную визуализацию выворачивания. Эта стратегия далека от реальной. В совсем недавно появившейся работе на эту тему Тэруо Нагасэ приводит хорошо иллюстрированное кусочно-линейное доказательство обобщения теоремы Смейла (см. [Nagase 1984]). Они педантично заменяют дифференциально-топологические методы Смейла геометрическими, но в нетронутном виде заимствуют из литературы фундаментальную деформацию, найденную Арнольдом Шапиро и усовершенствованную Бернаром Морэном, которая относится к чистой начертательной топологии. История в картинках о выворачивании Шапиро, основанная на воспоминаниях Бернара, рассказана в [Francis–Morin 1979].

Чтобы стало понятным изумление, вызванное результатом Смейла, и то, почему Раул Ботт настаивал на явном предъявлении выворачивания, позвольте мне ещё раз вернуться к диссертации Боя. Применив

понятие вполне непрерывной деформации в случае размерности на единицу меньшей – к замкнутым кривым на плоскости. – Бой доказал, что целое число, указывающее, сколько раз нормаль (или направленная касательная) к кривой оборачивается вокруг окружности, полностью характеризует кривую с точностью до деформаций рассмотренного им типа. Этот инвариант замкнутых плоских кривых приобрел много имён с тех пор, как Гаусс впервые окрестил его *amplitudo*¹. В терминах, введенных Уитни [Whitney 1937] при изложении своего варианта доказательства Грауштайна теоремы Боя, её можно сформулировать следующим образом. *Регулярной гомотопией* данного погружения называется деформация, состоящая из погружений, при которой матрица первых частных производных сама меняется гладко. В случае погружения окружностей в плоскость и сфер в пространство деформации Боя можно параметризовать регулярными гомотопиями. Таким образом, теорема Уитни – Грауштайна говорит, что два погружения окружности в плоскость регулярно гомотопны, если и только если у них совпадают индексы вращения касательных. В противоположность этому теорема Смейла гласит, что все погружения сферы в пространство регулярно гомотопны друг другу².

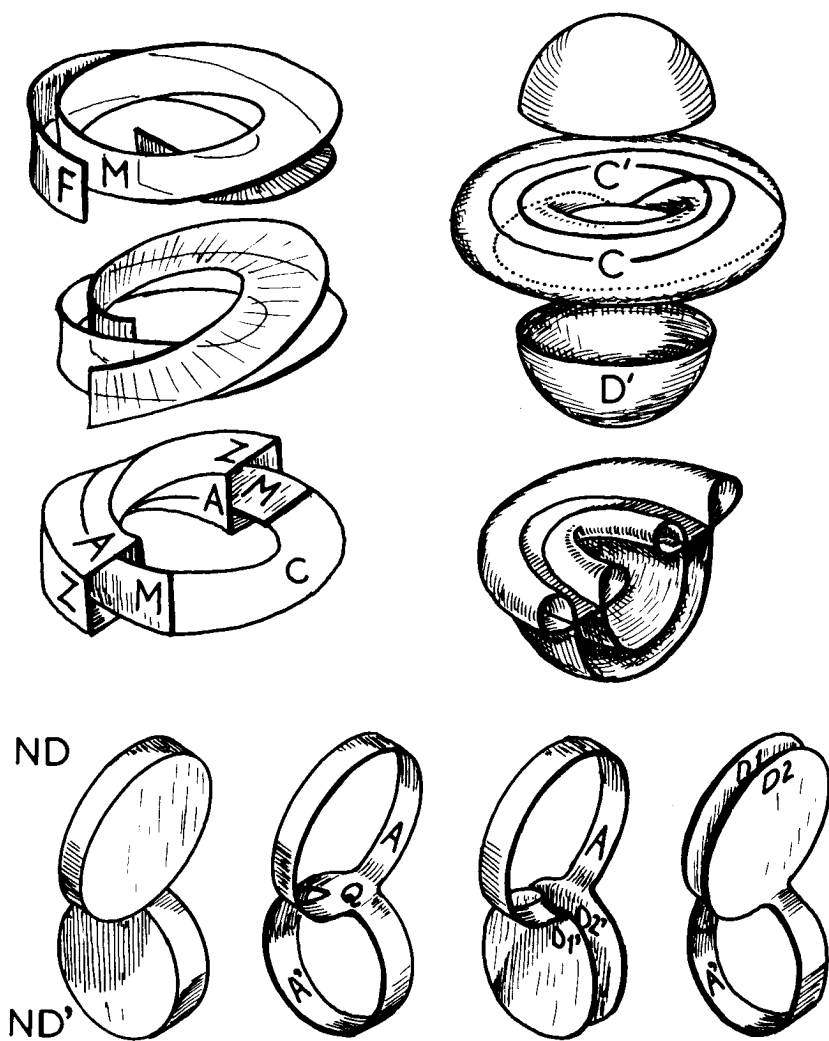
Преобразование теннисного мяча (картинка 4)

Основная идея шапировского выворачивания довольно проста, но проблема её реализации бросает вызов начертательной топологии. Возьмите поверхность Боя B и расщепите её на два слоя. Представьте, скажем, что единственную сторону поверхности покрыли лаком, а затем лаковую оболочку отделили как одно целое. Получившаяся поверхность, назовём её F , должна быть погружённой сферой, и вот почему. Так как поверхность B – погружённая, у неё есть непрерывное поле нормальных прямых, хоть и нет³ непрерывного поля единичных нормальных векторов. Если вы равномерно сдвинете участок поверхности

¹ Величина (лат). – Прим. изд. ред.

² Если присмотреться повнимательнее, то особого противоречия здесь нет. Дело в том, что инвариант, аналогичный индексу вращения, определён и для сфер – это степень гауссова отображения, она в 4π раз меньше полной гауссовой кривизны. Но как это следует, например, из формулы Кронекера – Дикка (см. выше), он всегда равен единице. То есть теорема Смейла – полный аналог теоремы Боя и K^0 . Эта аналогия не случайная. Смейлом и Хиршем была построена законченная теория погружений, сводящая вопросы классификации погружений к гомотопическим задачам. По поводу погружений поверхностей в R^3 читатель может обратиться, в частности, к пункту 1 приложения к статье Л. Гийу и А. Марена «Обобщение теоремы Рохлина о сигнатуре», помещённой в сборнике «В поисках утраченной топологии» (М.: Мир, 1989), с. 128–129. – Прим. перев.

³ Из-за односторонности. – Прим. изд. ред.



Картинка 4. Преобразование теннисного мяча.

вдоль этих нормалей, то он при этом не сомнётся, если только вы не дойдёте до фокального множества этого участка. *Фокальное множество* — это огибающая нормалей к поверхности; оно состоит, выражаясь «классическим» языком, из точек пересечения «соседних» нормалей. За подробностями можете обратиться к гл. 6 монографии [Banchoff—

Gaffney–McCrory 1982]¹. Таким образом, если вы лишь ненамного отойдёте от поверхности Боя B , то F останется погружённой поверхностью, стелющейся «параллельно» поверхности B . Напомним, что P^2 двулистно накрывается антиподальными парами точек сферы S^2 . Указанная проекция вдоль нормалей $F \rightarrow B$ служит физической моделью этого абстрактного накрытия. Пусть $f: S^2 \rightarrow F$ – параметризация поверхности F , при которой антиподальные точки на сфере переходят в концы отрезков нормалей к поверхности B .

Об описанном расщеплении даёт представление рис. 4(11), на котором изображена полная лента Мёбиуса с расположенной «сбоку» половинкой своего двулистного накрытия. Другая половинка показана на рис. 4(21). Теперь равномерно тащите все точки поверхности F вдоль нормали: сначала к B , затем прямо сквозь B – при этом антиподы пройдут друг сквозь друга, – а потом от B , пока каждая точка не окажется снова на F . Хотя начальная и конечная поверхности занимают одно и то же место в пространстве, параметризации их различаются. Антиподы поменялись местами. Эту деформацию в евклидовом пространстве можно параметризовать регулярной гомотопией между f и композицией f с автоморфизмом $S^2 \rightarrow S^2$, меняющим местами антиподы на сфере. Если вы покрасите сторону поверхности F , обращённую к B , в красный цвет, а другую сторону – в синий, то в конце цвета поменяются местами. Всё, что теперь остаётся, – и именно эту часть конструкции трудно визуализовать, – это придумать деформацию поверхности F , устраняющую её самопересечения и приводящую к вложенной сфере. Действительно, тогда для полного «монтажа» выворачивания мы просто начнём со стандартной сферы, продеформируем её (при помощи обратной деформации) в F , вывернем F через B и возвратим F в исходное положение S^2 .

Шапиро не рисовал поверхности F . Он рассуждал топологически следующим образом. Выделим на B «стандартную» ленту Мёбиуса M , вложенную в пространство с одним полуоборотом. Можете ли вы найти одну из них на рис. 5: 5(13)? Утолstim B до тонкого сплошного слоя NB и вырежем соответствующую окрестность NM ленты M (рис. 4(31))². Наружная поверхность $T = \partial NM$ этого слоя представляет собой топологический тор с углами. Он составлен из двух линейчатых колец, состыкованных вдоль краёв под прямым углом. Одна из этих лент, A , пересекается с лентой Мёбиуса M под прямым углом по кривой $C = \partial M$. Другая лента $Z = T - A$ параллельна M . Дополнение к NM в NB представляет собой погружённый тонкий сплошной диск ND , пересекающий сам себя и NB каким-то жутким способом. Неважно! Этот диск ND является образом при погружении некоторого тонкого ци-

¹ Или к книге Дж. Бруса и П. Джиблина «Кривые и особенности» (М.: Мир, 1988). – Прим. изд. ред.

² Мнемоника: N – neighborhood (окрестность), D – disc (диск), A – annulus (кольцо), Z – zone (пояс), C – curve (кривая). – Прим. перев.

линдра; назовем его «монетой». «Орлом» и «решкой» служат два диска $D1$ и $D2$, параллельные D , а «ребром» — разумеется, A . Итак,

$$\partial ND = D1 + A + D2,$$

$$\partial NM = A + Z = T,$$

$$\partial NB = D1 + D2 + Z = F.$$

Теперь опояшем T любой простой замкнутой кривой C' , пересекающей C ровно один раз, например параллелью тора (рис. 4(12)¹). Различение *меридиана* и *параллели* на вложенной в пространство тороидальной трубке (т.е. «телесном», «утолщённом», «узле») является полезным в теории узлов, как мы увидим в последней главе. Меридиан ограничивает диск, лежащий внутри трубки, а параллель ограничивает диски, лежащие снаружи. Рассмотрим параллель C' , идущую по верху тора на рис. 4(22), и затянем её верхней из двух изображённых на рисунке полусферических шапочек. Этот топологический диск затягивает параллель снаружи тора. Дополним полусферу до сферы. Нижняя полусфера D' тоже затягивает C' , но не снаружи, поскольку она проходит сквозь тор. Вот этот самый диск D' и нужно прикрепить к тору вдоль C' . Утолстив его, вы получите другую монету с границей $\partial ND' = D1' + A' + D2'$. Ободок A' этой второй монеты пересекается с A по маленькому квадратику Q . Склейте кольца A и A' по этому квадратику (эта операция называется *плюмбингом* или *водопроводным соединением*²), и вы получите погружённую *поверхность Зейферта* $H = (A - Q) + Q + (A' - Q)$. Модель водопроводного соединения двух колец показана на рис. 4(42). Дополнение к A' на торе представляет собой другое кольцо, назовём его Z' . Заметьте, что поверхность $F' = D1' + D2' + Z'$ тоже является погружённой сферой, но эту сферу проще изобразить — у неё нет тройных точек. Ее половина показана на рис. 4(32).

Шапиро изобрёл специальную регулярную гомотопию, известную как его *преобразование теннисного мяча*³, которая переводит F в F' . Чтобы понять, как устроены отображения, входящие в эту гомотопию, посмотрим на их область определения. Объединение ND и ND' даёт погружение в R^3 тела, выглядящего как две монеты, сваренные по уплощённому квадрату Q на их рёбрах (рис. 4(41)). (Я буду использовать одни и те же буквы для обозначения участков поверхности и на модели, и в пространстве.) Проволочная петля, идущая вдоль «углов» сваренных монет, принимает форму шва на теннисном мяче, если вы раздуете оболочку сваренных монет в сферу. Эта петля ограничивает два диска $D1'$ и $D2'$, соединённые лентой $A-Q$; все вместе они образуют один

¹ На рисунках автор часто (но не всюду) изображает штрих в виде запятой. — Прим. изд. ред.

² От английского plumbing, имеющего значение «слесарно-водопроводное дело». — Прим. изд. ред.

³ В английском термине фигурирует не теннисный, а бейсбольный мяч! — Прим. изд. ред.

топологический диск $E' = D1' + D2' + (A - Q)$, имеющий вид наушников (наушники Морэна, рис. 4(43)). Та же самая петля ограничивает вторую пару наушников $E = D1 + D2 + (A' - Q')$ (рис. 4(44)), и существует деформация, переводящая 4(43) в 4(44) и не «вылезаящая» за пределы пространства, занимаемого двумя сваренными монетами. Рубаните по ободку A верхней монеты ребром ладони, расталкивая поверхность кольца на боковые стороны монеты. На полдороге к цели образуется седло $D1 + D2 + Q + D1' + D2'$. Теперь продавите квадратик Q вниз, оттягивая вместе с ним «шкуру» с нижних дисков на ленту A' наушников E . На шапировском теннисном мяче это выглядит как продавливание сквозь мяч одной половинки его оболочки на место другой. В этой модели описанная деформация E в E' является изотопией; её образ в пространстве будет регулярной гомотопией. Заметьте, что большая часть ленты $Z = T - A = (A' - Q) + (T - H)$ остаётся неподвижной, когда F переходит в F' . Резюмируем сказанное в виде следующей небольшой порции алгебраической топологии:

$$\begin{aligned} F &= D1 + D2 + Z \\ &= D1 + D2 + (A' - Q) + (T - H) \\ &= E + (T - H) \cong E' + (T - H) \\ &= D1' + D2' + (A - Q) + (T - H) \\ &= D1' + D2' + Z' = F'. \end{aligned}$$

Шапиро нужно было ещё одно преобразование теннисного мяча, которое переводит F' в поверхность F'' , отвечающую соединению параллели C' и одного из меридианов. Я предоставляю вам проиллюстрировать это преобразование и окончательно устранить все самопересечения, тем самым превратив F'' во вложенную сферу. Одно из решений этой задачи по начертательной топологии вы можете найти в статье [Francis – Morin 1979].

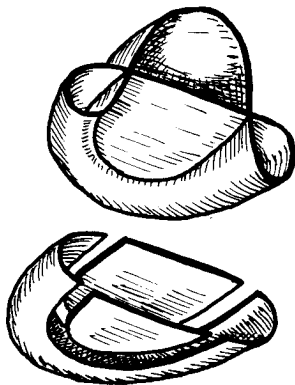
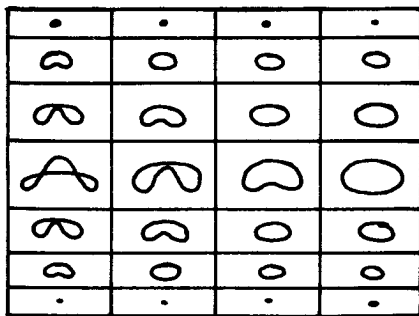
Данное выше краткое изложение идеи Шапиро выполнено в любимой топологами описательной манере; правда, обычно оно сопровождается меньшим количеством рисунков и более точной кодировкой деталей. Иллюстрации, подходящие для статьи в «Scientific American», должны быть простыми и как можно меньше оставлять на долю нетренированного воображения массового читателя. Тони Филлипс придумал оригинальные рисунки нескольких стадий регулярной гомотопии между стандартной сферой и двулистным накрытием поверхности Боя [Phillips 1966]. К несчастью, издательский художник, реализуя замысел Филлипса, сделал несколько графических ошибок. Они сбивают зрителя с толку, когда он пытается понять, что за поверхности нарисованы, и представить себе переходы между ними. Та же неудача постигла и превосходные рисунки Жана-Пьера Пти к статье [Morin – Petit 1979], содержавшей окончательное описание выворачивания Морэна. Разумеется, если бы художники-графики лучше знали геометрию, то сотрудничество с ними могло бы быть и более удачным, но дело

усугубляется ещё тем, что математические рисунки очень трудно править. Я собственноручно перерисовал окончательные варианты рисунков к этой книге и тем не менее уверен, что вы найдёте в них ошибки, вкравшиеся при копировании набросков или даже ещё раньше.

Шляпные диаграммы (картинка 5)

Очень интересно и поучительно сравнить между собой топологические рисунки выворачиваний, сделанные Филлипсом и Пти. Первый – математик, второй – физик, и оба они – хорошие художники.

Филлипс использовал сечения поверхности Боя параллельными плоскостями. Удвоив их, он получил сечения поверхности F . Особого внимания при этом требует седло поверхности B . Чтобы дать представление о поверхности, отвечающей последовательности плоских диаграмм, он объединил пространственно смежные кривые в *пояса*, напоминающие пояса в правом столбце картинки 5:7, только более узкие. Пояса размещены друг над другом вертикальной стопкой, и между ними для лучшего обзора оставлены промежутки. Последовательные моменты «эволюции» данного пояса представлены диаграммами на том же горизонтальном уровне. Этот приём позволяет работать с двумерным массивом плоских диаграмм, что облегчает проектирование регулярной гомотопии. В столбцах представлены планы этажей башни, а строки показывают, как деформируются эти этажи, когда башню «трясёт». Например, таблица 5(11) изображает регулярную гомотопию, устраняющую самопересечения шляпы 5(12), с которой мы имели дело выше при описании сингулярного выворачивания. Главная проблема с методом Филлипса заключается в том, что направление сечения, единоразы выбранное для B , больше уже менять нельзя. Двумерные массивы диаграмм не изотропны – поворот направления сечений неузнаваемо изменяет диаграммы. Другая проблема, связанная со сложностью по-



Картинка 5. Шляпные диаграммы.

верхностей и их движений, возникает при переходе от диаграмм к картинке. Самопересечения – просто точки на диаграмме – превращаются в причудливо изогнутые кривые в пространстве.

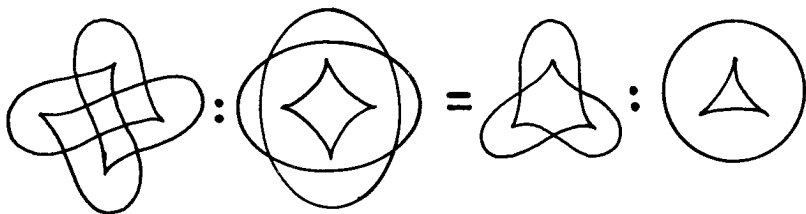
Рисунки же Пти – это реальные картинки, изображающие трёхмерные конструкции, родившиеся в голове Морэна. Достаточно один раз понять устройство нарисованного во всех деталях объекта, чтобы потом узнавать его из любого положения, даже оказавшись внутри него.

Астроида – дельтоида (картинка 6)

Бернара Морэна в отличие от всех нас не отвлекают карандаш и бумага, он не тратит времени на то, чтобы рисовать и разглядывать рисунки. Он слеп. Обладая великолепным пространственным воображением, он ведёт монтаж сложных гомотопий поверхностей прямо в пространстве. Он прослеживает, как изменяются со временем двойные кривые и стягивающие их поверхности. Его инструкции художнику состоят в живом описании модели, существующей в его воображении. Пти, в сущности, рисует раскадровку мультфильма.

Идею такого мультфильма как раз и реализовал Нелсон Макс [Мах 1977] при помощи впечатляющей компьютерной графики. В качестве базы данных он использовал координаты, снятые с тщательно спаянных Чарлзом Пью проволочных моделей.

Только когда на своём топологическом семинаре для начинающих в том же 1977 г. я начал разбирать фильм Макса, делая наброски на доске, чтобы проанализировать движение, мне стало ясно, что у этого трёхмерного подхода есть один недостаток. При средних художественных способностях начертательный тополог не в состоянии воспроизводить, модифицировать, рассекать детали такого выворачивания или как-нибудь ими манипулировать. По ходу семинара мы заметили, что контур (6.11) поверхности Морэна на виде сверху так же относится к астроиде 6(12), как такой же контур 6(13) поверхности Боя относится к дельтоиде 6(14). После этого открытия появились первые рисунки, изображающие выворачивание табачного кисета, и была задумана эта книга (см. [Francis 1980]).



Картинка 6. Астроида – дельтоида.

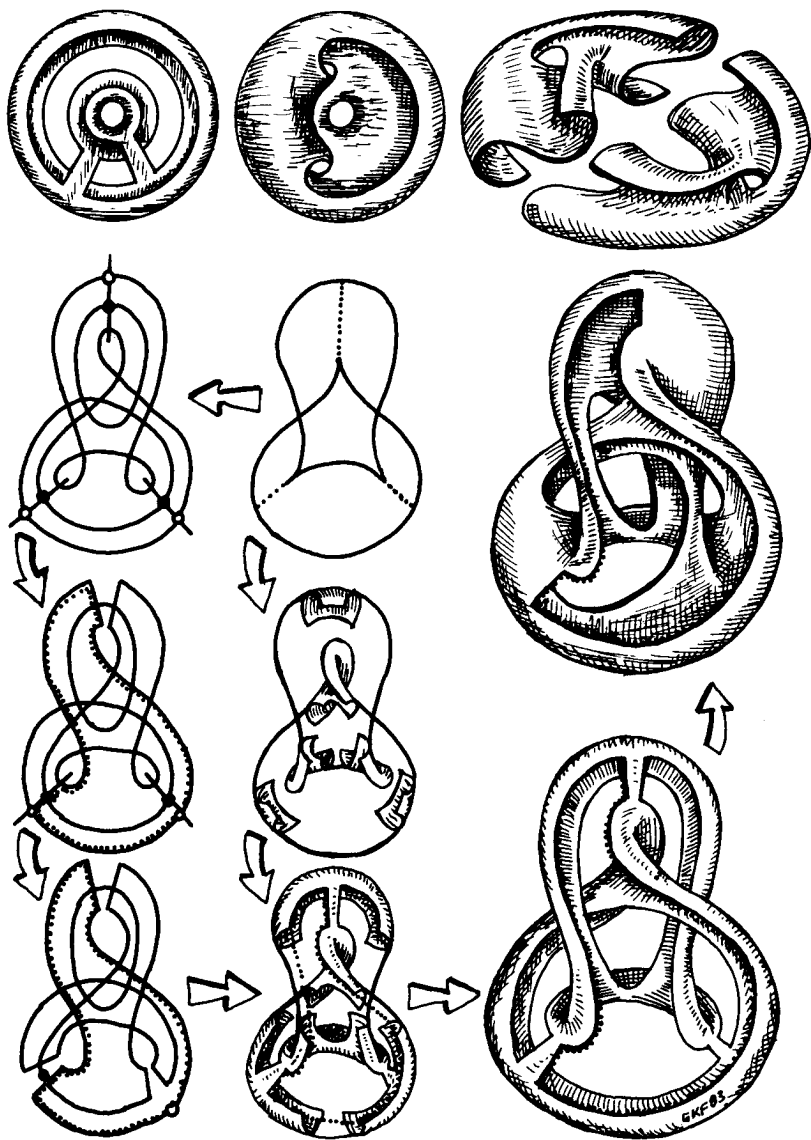
Монтаж погружений (картинка 7)

При помощи графических приёмов, которые я разработал за многие годы для того, чтобы с их помощью доказывать теоремы об отображениях поверхностей в сферу, я мог бы сконструировать изображение поверхности Морэна 8(33), начиная с её контура 6(13). В этом контуре существенна лишь астроида. Вы можете не обращать внимания на два пересекающихся овала – контуры двух эллипсоидальных оболочек. Они видны, только когда вы смотрите на поверхность снаружи. Если вы войдёте внутрь и радиально спроецируете поверхность на «сферу рисунка», то от контура останется одна астроида. Так как трудно представить картинку, нарисованную на сфере, я по-прежнему буду говорить о плоскости рисунка, подразумевая, что если изображённая поверхность с данным контуром не умещается целиком в рамках рисунка, то соответствующие её листы неограниченно продолжаются, становясь в конце концов параллельными плоскости рисунка.

Позвольте мне на интуитивном уровне объяснить вам идею этой техники, не заботясь о математических подробностях. Эти подробности и история вопроса излагаются в статье [Francis–Troyer 1977]. Если вы сплющите поверхность, прижав её к плоскости рисунка, как цветок между страниц книги, то линии контура превратятся в линии складок. Разверните поверхность и посмотрите, как складки и их следы на других частях поверхности делят её на области. Каждая область вместе со своей границей вложена в плоскость рисунка. Такая область не обязательно является топологическим диском. Если расплющить тор, то получатся два кольца. Однако, проведя на рисунке достаточно много дуг, можно добиться того, чтобы все области были дисками. В случае тора достаточно одной дуги, соединяющей наружный и внутренний контуры. Эти диски могут послужить (предварительными) окнами на рисунке поверхности. На рис. 7(11) я расширил и развёл две такие дуги, которые пересекают кольца довольно неожиданным образом. Стяните окна, как показано на рис. 7(12), и вы убедитесь, что мне попался не вложенный, а погружённый тор, который порождается вращением восьмёрки вокруг расположенной сбоку вертикальной оси.

Существует комбинаторный аппарат, который говорит вам, как проводить дуги, выделять окна и собирать из отдельных частей абстрактную поверхность и её конкретное отображение в плоскость рисунка, имеющее складки вдоль заданных кривых. Кроме того, он классифицирует все возможные способы, которыми это можно сделать, с точностью до топологической эквивалентности на отображаемой поверхности. Ввиду своей большой общности и логической строгости этот метод довольно непрактичен, но в случае крайней нужды и он может пригодиться. На практике можно поступать так. Нарисуйте правую или левую сборку¹ в окрестности каждого острия на заданном

¹ См. рис. 1:4(12). – Прим. изд. ред.



Картинка 7. Монтаж погружений.

контуре и соедините эти сборки друг с другом и с остальными частями контура независимо от того, есть ли там точки пинча. Немного попрактиковавшись, вы научитесь выделять вложенные участки поверхности, которые стягивают края получающихся ленточек со складками и сборками, и разделять их на окна. Шесть обозначенных стрелками шагов от 7(22) к 7(23)¹ показывают, как из 5:8(54) получается 5:8(53).

Выворачивание наизнанку по Морэну (картинка 8)

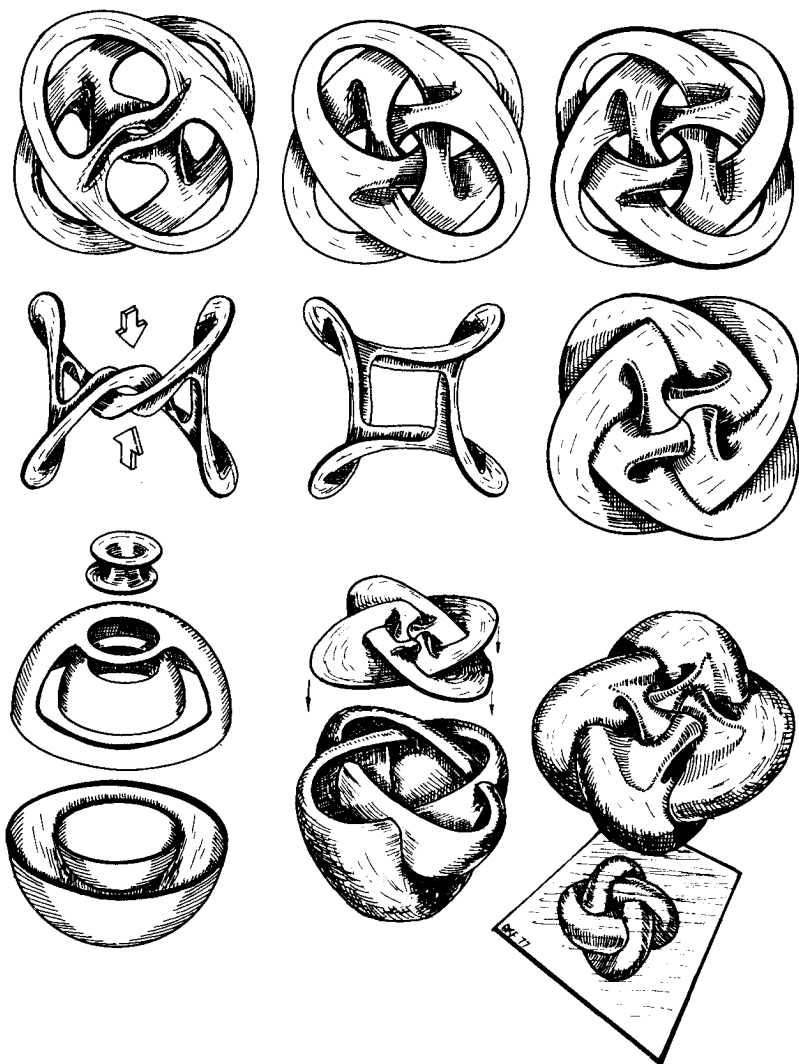
Изогнутая ленточка на рис. 8(22), с четырьмя левыми сборками, представляет собой кольцо, вложенное в R^3 с подкруткой на четыре пол-оборота. На рис. 8(21) тоже изображено кольцо, но здесь контур уже не является астрондой. Переход от 8(21) к 8(22) ясен: просто протащите два куска ленточки друг сквозь друга в указанных стрелками направлениях, оставляя сборки на месте. Поскольку точек пинча не образуется, это регулярная гомотопия ленточки. Теперь нарисуйте по два тонких овальных кольца вокруг каждой из этих двух фигур. (Чтобы следить за мной, вам потребуются калька и карандаш.) Соединить четыре сборки с овальными кольцами при помощи четырёх полосок можно многими способами. Некоторые из них не приводят к образованию окон². На рис. 8(11) и 8(12) я выбрал полоски, образующие окна. Если двигать контуры, то окна будут только растягиваться и сжиматься, но они не могут, скажем, изогнуться настолько сильно, чтобы образовались новые контуры или что-нибудь похуже. Независимо от того как вы закроете окна на рис. 8(11), движение их рам перетянет их за собой в закрытые каким-то образом окна на рис. 8(12). Расположение окон над плоскостью рисунка определено неоднозначно. Но вы можете так закрыть окна, чтобы получившаяся в результате поверхность была вложенным кольцом, имеющим форму чуть скрученного горлышка тора. Так как края окон на рис. 8(12) зацеплены, то независимо от расположения окон появятся двойные кривые. Даже самый простой вариант нарисовать нелегко³. Это ещё один хороший довод в пользу окон. В принципе вы можете при помощи окон полностью устранить на рисунке двойные точки. Но иногда край окна будет пересекать контур, как это происходит в точках пинча (см., например, рис. 5:4(21)). Такие окна уже не столь подвижны.

Теперь потащим ближний овальный край поверхности 8(12) вниз, к плоскости рисунка, прямо через дальний овальный край. Назовём то,

¹ Эта цепочка шагов соответствует «теоретическому способу», а другая указанная на картинке цепочка (из четырёх шагов) – «практическому способу».– *Прим. перев.*

² Напомним, что окно образует кривая, ограничивающая в плоскости рисунка вложенный, или, в крайнем случае, погружённый диск.– *Прим. ред.*

³ Он изображён на рис. 13(21) в конце главы.– *Прим. перев.*



Картинка 8. Выворачивание наизнанку по Морэну.

что получится, рисунком 8(12'), поскольку вы могли бы сделать ксерокопию рисунка 8(12) и повернуть её на 90° . Разумеется, красный и синий цвета на вашем «дырвяком» горлышке тора 8(12') поменяются местами¹. На торическом горлышке, если вы сделаете его овалыные края окружностями, эта операция приведёт к появлению самопересечения вдоль окружности C , концентрической краям. Затем проташьте вертикальные «ручки» на рис. 8(22) друг сквозь друга в горизонтальном направлении. Получится такой же переход, как от 8(22) к 8(21), но повернутый на 90° . При этом из 8(12') получится 8(11'), т. е. результат поворота 8(11) на 90° , только цвета поменяются местами. Если вы представите, что торическое горлышко жёстко прикреплено к двум концентрическим сферическим оболочкам (рис. 8(31)), то полученная поверхность окажется перевёрнутой шляпой 5(12). Устранение самопересечений у шляпы завершает выворачивание сферы наизнанку по Морэну². Любые два способа закрыть окна, задав третью координату, регулярно гомотопны: их связывает преобразование типа движения взад-вперёд, оставляющего проекцию на плоскость рисунка неизменной. Меня будет интересовать только окружность C , появляющаяся на стадии шляпы.

Вспомните, что я предложил вам создать C всю разом между 8(12) и 8(12'). Если вместо того чтобы тащить ближний край вниз во всех четырёх местах, вы сделаете это только в двух, как на рис. 8(13), то результат будет обладать вращательной симметрией порядка 4. Если закрыть окна (рис. 8(23)), то получится погружённое кольцо, точно соответствующее двум пересекающимся эллипсоидальным оболочкам (рис. 8(32)). При совпадении их южных полюсов эти пересекающиеся оболочки и самопересекающееся горлышко образуют *поверхность Морэна* 8(33)³. Чтобы вывернуть её наизнанку, надо просто повернуть её на 90° вокруг оси симметрии⁴. Если бы вам было нужно создать мультфильм об этом выворачивании, подобный мультфильму Макса, то вы могли бы воспользоваться таким фокусом: снимать кадры в обратном порядке и с обращением цвета.

¹ Если вы предварительно окрасите одну его сторону в красный, а другую – в синий цвет. – *Прим. перев.*

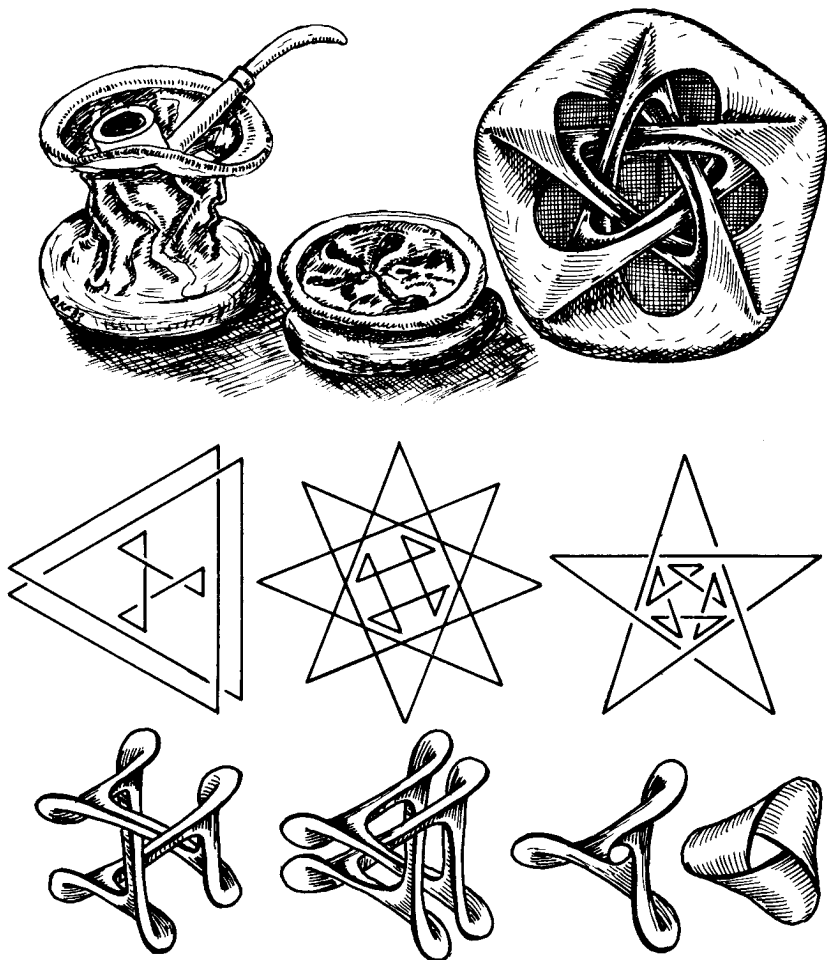
² Кажется нелишним резюмировать описание этого выворачивания. Сначала сфера деформируется в «гаструлу» 8(31), которая в результате ряда трансформаций её «горлышка» 8(11) $\rightarrow$ 8(12) $\rightarrow$ 8(12') $\rightarrow$ 8(11') превращается в «шляпу». Шляпа легко расправляется в сферу, уже вывернутую наизнанку. На рис. 8(21), 8(22) изображены окрестности контуров с рис. 8(11) и 8(12). – *Прим. перев.*

³ Как вы, наверное, заметили, поверхность Морэна не является нормальной: у неё есть две нестабильные особые точки – четверная точка и точка касания двух листов. – *Прим. перев.*

⁴ Что приводит к ещё одному варианту выворачивания сферы наизнанку: сфера превращается в поверхность Морэна 8(33), та поворачивается на 90° («выворачиваясь» тем самым) и далее всё предыдущее производится в обратном порядке. – *Прим. перев.*

Кисеты (картинка 9)

Обобщая эстетически привлекательную симметрию средней стадии выворачивания по Морэну, мы получаем целую последовательность таких выворачиваний, названных *преобразованиями кисета* в честь обычного французского кисета для табака. У этого скромного резинового предмета (рис. 9(11) и 9(12)) несколько (обычно пять или шесть) перемычек, расположенных так, что кисет автоматически закрывается, когда его верхний край прижимают к доньшку. Если бы материал, из которого сделан кисет, был самопроницаемым, то это движение, продолжаясь,



Картинка 9. Кисеты.

дало бы деформацию, выворачивающую кiset наизнанку. Принцип всегда один и тот же. Сначала скрутите на круглом контуре горловины $n = 2, 3, 4, \dots$ *ласточкиных хвостов*, подобных тем (трём), которые изображены на рис. 9(31). (Название «ласточкин хвост» заимствовано у Морэна, окрестившего так характерную фигуру, связанную с одной из элементарных катастроф.)

На рис. 9(21) и 9(23) я изобразил случаи $n = 3$ и 5 в виде полигональных диаграмм узлов. Можете ли вы сказать, какие ветви идут сверху, а какие снизу на диаграмме 9(22)? Маленькие незаузленные внутренние кривые деформируются в большие наружные узлы при помощи регулярной гомотопии в пространстве, тень которой выглядит как поступательное перемещение каждого звена, сопровождаемое его растяжением. Длинные звенья движутся к центру, пересекаются там все одновременно и продолжают движение, пока не дойдут до (бывших) коротких или не зайдут за них немного. Короткие звенья отодвигаются от центра чуть-чуть, но растягиваются очень сильно. Заметьте, что в случае нечётного n мы можем в процессе движения полигонального узла получить кабельный узел, который обходится *дважды*, как на рис. 9(23)¹.

Теперь посмотрим на наши кривые с ласточкиными хвостами как на контуры изогнутой ленты, у которой все сборки — одной и той же ориентации. Например, лента 9(31) соответствует тривиальному узлу на рис. 9(21), а лента 9(32) — трилистнику на том же рисунке. Гомотопия контура продолжается на ленту. В случае чётного n лента является двусторонней и меняет цвет при повороте на $360^\circ/2n$. В случае нечётного n лента двулистно накрывает ленту Мёбиуса, закрученную на n пол-оборотов. В нижнем ряду картинки показано, как в случае $n = 3$ лента в конце концов складывается в ленту Мёбиуса с тремя сборками. Чтобы убедиться в том, что это действительно лента Мёбиуса, вы можете «развернуть» сборки на рис. 9(34). Таким образом, когда закодированная выше регулярная гомотопия будет продолжена на сферу, первоначально имеющую вид *гаструлы*² 8(31), выворачивание будет проходить через некоторую обобщённую поверхность Боя — вроде поверхности 9(13), которая отвечает $n = 5$.

Конструирование этих регулярных гомотопий проходит в три этапа. Сначала определите движение контура в плоскости рисунка. Затем *поднимите* это движение в третье измерение (как это сделать, я объясню ниже). Нарастите контур до ленточки способом, не зависящим от деформации. В результате контур, движущийся в плоскости, поднимается в ленточку, движущуюся в пространстве. Наконец, покажите, как движение ленточки продолжается до регулярной гомотопии всей поверхности. Именно такую процедуру, дав элегантный образец при-

¹ То есть пятизвенная ломаная на этом рисунке — двойная. — *Прим. перев.*

² Гастроула — одна из стадий зародышевого развития многоклеточных животных. Зародыш на этой стадии имеет двухслойную стенку и полость, сообщающуюся с наружной средой при помощи отверстия. — *Прим. изд. ред.*

менения аналитической геометрии, параметризовал Морэн [Morin 1978] при помощи некоторого набора тригонометрических выражений. Чтобы проиллюстрировать, как работает эта процедура, я кратко опишу первые два шага в несколько упрощённой форме. Глобализация¹ носит более технический характер и выходит за рамки этого рассказа. Кроме того, на третьем шаге графический и аналитический подходы не очень ладят друг с другом.

Для каждого $n = 2, 3, \dots$ определим гипоциклоиду Γ на (комплексной) плоскости формулой

$$\Gamma = e^{-(n-1)i\theta} + \frac{n-1}{n+1} e^{(n+1)i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Для первой и второй производных получаем выражение

$$\begin{aligned} \Gamma_\theta &= -2(n-1) \sin(n\theta) e^{i\theta}, \\ \Gamma_{\theta\theta} &= -2(n-1) \{n \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)\} e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Заметьте, что касательная к гипоциклоиде в точке, отвечающей значению θ , имеет направление $e^{i\theta}$. Касательная поворачивается при прохождении $2n$ полукубических остриёв непрерывным образом, поскольку ускорение не равно нулю, когда скорость обращается в нуль. Для нечётных $n = 2k + 1$ кривая при указанной параметризации проходится дважды. При $n = 2$ эта кривая есть астроида, при $n = 3$ — дельтоида, при больших n — соответствующая симметричная звезда.

Если представить гипоциклоиду как огибающую её касательных, то мы получим отображение цилиндра в плоскость, имеющее складки вдоль гипоциклоиды. Вот алгебраические подробности:

$$\begin{aligned} R^1 \times S^1 &\rightarrow R^2: (r, \theta) \mapsto L = \Gamma + r e^{i\theta}, \\ L_r &= e^{i\theta}, \\ L_\theta &= -2(n-1) \sin(n\theta) e^{i\theta} + r i e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Определитель, образованный двумя последними векторами, — это якобиан указанного отображения. Так как он равен r , то мы показали, что это отображение является «превосходным» в смысле Уитни. Третьей координате — высоте над плоскостью рисунка — придайте значение

$$\begin{aligned} H &= \frac{n-1}{2n} \sin(2n\theta) + r \sin(n\theta) \\ &= \left\{ \frac{n-1}{n} \cos(n\theta) + r \right\} \sin(n\theta). \end{aligned}$$

Это заставляет пространственную кривую (Γ, H) , тенью которой служит наша звезда, совершать волнообразные движения над плоскостью рисунка. Касательные прямые при этом выходят из плоскости рисунка, за исключением $2n$ остриёв, где $\sin(n\theta) = 0$ и касательные остаются горизонтальными. «Поднятая» функция $F = (L, H)$ отображает цилиндр в

¹ Третий шаг. — Прим. перев.

некоторую линейчатую поверхность в пространстве. Эта поверхность регулярна (т. е. F – погружение), поскольку третья компонента её нормального вектора $N = F_r \times F_\theta$ равна r , и если $r = 0$, то $N = (n - 1)ie^{i\theta}$. Её контуром служит наша звезда.

Примечательно, что эта звезда является средней (отвечающей $t = 1/2$) стадией некоторой деформации, сдвигающей каждую касательную окружности радиуса $n - 1$ параллельно самой себе к противоположной точке окружности. Воспользуйтесь тригонометрическими переменными коэффициентами $A = \cos(\pi t)$, $B = \sin(\pi t)$ и подсчитайте

$$C = (n - 1)ie^{i\theta} A + B\Gamma,$$

$$C_\theta = -(n - 1)\{A + 2B \sin(n\theta)\}e^{i\theta}.$$

Чтобы поднять это движение до регулярной гомотопии ленты в пространстве, действуйте так же, как раньше. Необходимо, однако, подправить параметр r при помощи, например, положительного множителя $M = \sin(\pi t) + 0.2$, чтобы гарантировать, что для всех $0 \leq t \leq 1$ 2×3 -матрица Якоби отображения

$$W = C + Mre^{i\theta},$$

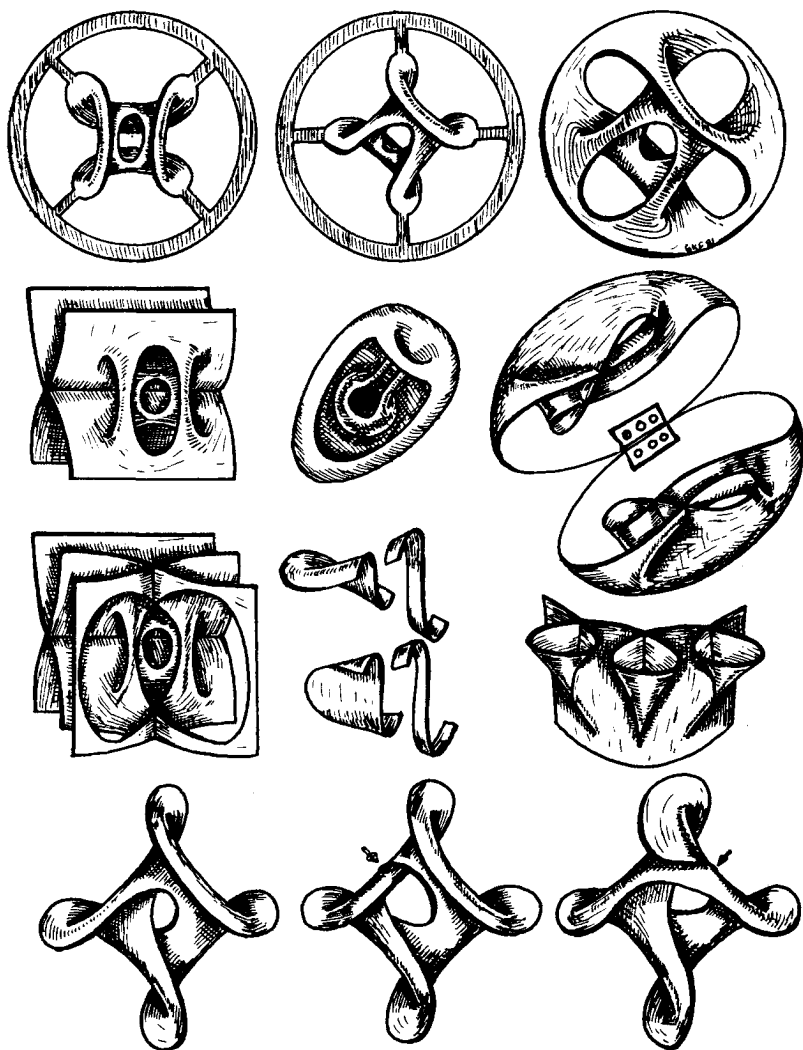
$$Z = \left\{ r + 3 \frac{n-1}{n} \cos(n\theta) \right\} A + BH$$

имеет максимальный ранг при (а следовательно, и вблизи) $r = 0$. Вам следует попрактиковаться в дифференцировании, проверив это, и самостоятельно продолжить анализ Морэна дальше. Всё, что мы пока сделали, – это вывернули наизнанку (с точностью до поворота на π/n) подвижную горловину киста, контур которой есть C .

Семейство астроида (картинка 10)

Если вы привыкли к математическим задачам, имеющим только одно аккуратненькое решение, вас, возможно, удивит то обилие способов решения, которым начертательные топологи ответили на вызов Ботта, и вы можете спросить, сколькими различными способами можно выворачивать сферу наизнанку. Ответ на ваш вопрос будет зависеть прежде всего от того, какие выворачивания вы согласны считать «одинаковыми». Так же как систематика является источником, питающим биологию, так классификация топологических видов всегда играла центральную роль в топологии. Я мало что могу вам рассказать о классификации выворачиваний наизнанку. Слишком трудное это дело¹.

¹ Возможен такой абстрактный подход. Обычной сфере и сфере, вывернутой наизнанку, соответствуют две точки в пространстве погружений S^2 в R^3 , а каждому выворачиванию – путь, соединяющий эти точки. Если считать эквивалентными те выворачивания, которым отвечают гомотопные пути, то вопрос сводится к вычислению фундаментальной группы указанного пространства погружений, а она изоморфна Z (см. заключительный абзац этой главы). – *Прим. перев.*



Картинка 10. Семейство астроида.

Вместо этого позвольте мне продолжить разговор на более практическую тему о том, как выращивать поверхности из контуров, и познакомить вас с другими членами семейства астроида.

Правила игры уже были установлены выше. Будем искать отображение $W = \Phi(w)$ поверхностей без края в плоскость рисунка, складывающиеся (т. е. имеющие складки) только вдоль астроида, и строить такие поднятия $Z = H(w)$, для которых отображение $F(w) = (\Phi(w), H(w))$ параметризует нормальную поверхность с контуром-астроидой. Позволим Φ ветвиться только «на бесконечности», так что все точки пинча у F находятся на контуре. Два «решения» считаются эквивалентными, если их проекции¹ отличаются лишь на автоморфизм области определения. В статье [Francis–Troyer 1977] мы со Стефани Тройер нашли шесть таких Φ . Седьмое – превосходное отображение бутылки Клейна – довольно долго ускользало от нас (см. [Francis–Troyer 1982]).

Предположим, что, вместо того чтобы рисовать все сборки ориентированными одинаково, вы будете чередовать левые и правые: $LRLR$, как на рис. 10(11), или нарисуете сначала две левые, потом две правые: $LLRR$, как на рис. 10(12)². (Точки пинча оставим на потом.) Обе ленточки являются вложенными кольцами без перекручивания. Вы можете расправить их в обычное кольцо. Предположим, далее, что вы хотите, чтобы поверхность продолжалась за край рисунка в виде одного листа. Четыре мостика создают три окна. Стяните окна на рис. 10(11) так, чтобы стала видна ручка тора³, а на рис. 10(12) – так, чтобы «показалась» ручка бутылки Клейна (рис. 10(13)). Если вы дополните эту ручку до замкнутой поверхности, приклеив её к краю круглой чашки, то сможете разделить бутылку Клейна на две (погружённые) ленты Мёбиуса (рис. 10(23)).

Существует только один способ построить мостики так, чтобы поверхность продолжалась двумя листами. Для $LRLR$ он показан на рис. 10(21), с двумя окнами. Соответствующая замкнутая поверхность представляет собой погружённую сферу. Можете ли вы её нарисовать? Для $LLRR$ вы получите вложенную сферу-гаструлу, изображённую на рис. 10(22), тоже с двумя окнами. Я воспроизвёл все три стадии построения только для бутылки Клейна; это 10(12), 10(13), 10(23). Для тренировки попробуйте нарисовать недостающие стадии для остальных шести случаев.

Из всех способов присоединения к этим ленточкам трёх и более ободков только один приводит к образованию окон (рис. 10(31)). Это погружение плоскости в трёхмерное евклидово пространство изотопно поверхности Эшнпера, минимизирующей площадь и обладающей на виде сверху контуром-астроидой. Её нормальная форма Вейерштрасса – Хеннеберга, обсуждаемая в книге [Nitsche 1975], имеет в смешанных

¹ То есть отображения Φ , поднятием которых они получены. – Прим. перев.

² Здесь L и R – от английских *left* (левый) и *right* (правый). – Прим. перев.

³ Вся целиком эта поверхность изображена на рис. 7: 7(12). – Прим. перев.

координатах $W = X + iY$, $w = x + iy$ такой вид:

$$W = \bar{w} - \frac{1}{3}w^3,$$

$$Z = \operatorname{Re}(w^2).$$

Проекция этой поверхности на плоскость W обладает полюсом третьего порядка, о чём свидетельствует тот факт, что на рис. 10(31) единственный наружный край трижды обматывается вокруг рисунка. В начале координат это отображение стабилизирует особенность функции возведения в куб на комплексной плоскости, образуя складку вдоль астроида. Оный контур является образом единичной окружности $w = e^{i\theta}$, отображающейся на эту гипоциклоиду:

$$W = e^{-i\theta} - \frac{1}{3}e^{3i\theta}.$$

Ленточка 10(41) со сборками, идущими в порядке $RLRR$ (по часовой стрелке, начиная от полудня), представляет собой кольцо, вложенное в пространство перекрученным на один оборот. Вы можете убедиться в этом, отогнув повернутую часть ленты между 3 и 6 часами и развернув два оставшихся «уха» в соответствии с графическим рецептом, показанным на рис. 10(32). Это следует также из того, что два края ленты 10(41) зацеплены с кратностью 1. Такая ленточка нам не годится, поскольку вы не можете продолжить её края в бесконечность, не создав новых складок. Это также вытекает из одной теоремы о замкнутых в двустороннее кольцо лентах, вложенных в пространство и, возможно, заузленных. Такую ленту – позвольте мне называть её *лентой Морэна* по аналогии с лентой Мёбиуса – тогда и только тогда можно пришить (по любому из её краёв) к некоторому погружённому диску, когда два её края зацеплены чётное число раз. Чётные и нечётные ленты Морэна очень полезны в начертательной топологии, а упомянутая фольклорная теорема допускает простое доказательство при помощи картинок, но это уже другая история.

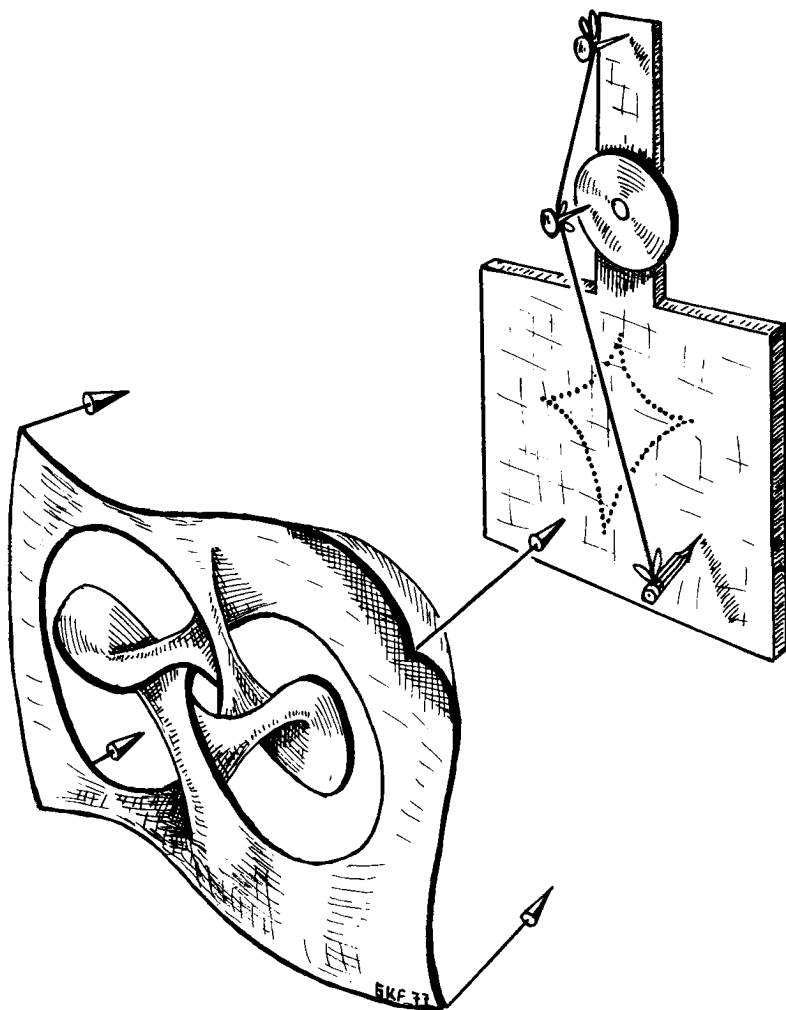
Теперь мы подошли к случаю точек пинча. Вы можете заставить точку пинча скользить по контуру и, проведя её через остриё (см. рис. 10(33)), поменять ориентацию сборки на ленте. Смежные точки пинча на отрезках контура попарно уничтожаются, как на картинках 2:9–11, пока не останется самое большее одна такая точка. При этом имеются две принципиально различные возможности, представленные на рис. 10(42) и 10(43), отвечающие словам $RLRRP$ и $RPLRR$ ¹. Края этих лент Мёбиуса стянуты так, что пересекают контур в точках пинча, указанных стрелками. Лента 10(42) перекручена на 3 пол-оборота, и, развернув у неё три уха, мы получим зеркальный образ ленты 10(34). Лента 10(41) – это стандартная (т.е. перекрученная на пол-оборота) лента Мёбиуса. Обе они могут быть продолжены до бесконечности, но

¹ P – от английского pinch (пинч). – Прим. перев.

только 10(42) не образует при этом новых складок. Можете ли вы дополнить рис. 10(42) до изображения скрещённого колпака с контуром-астроидой?

Машина катастроф (картинка 11)

Как уже упоминалось, впервые я столкнулся с поверхностью Морэна, принявшей вид члена семейства астроида, в связи с теорией особенностей. Изображённая на картинке 11 проекция поверхности Морэна



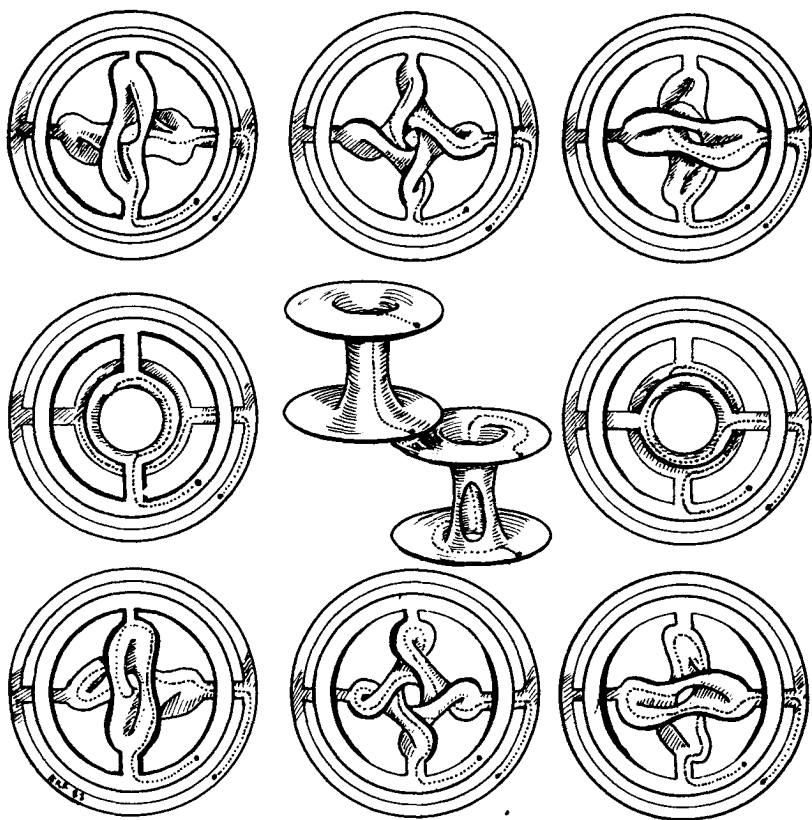
Картинка 11. Машина катастроф.

даёт простую топологическую модель для знаменитой *машины катастроф* Зимана [Zeeman 1972]. Две резинки соединяют гвоздик на свободно вращающемся маховичке с неподвижным гвоздиком сверху и подвижной точкой – скажем, карандашом – внизу. Когда вы двигаете карандаш по *плоскости управления*, колесо то и дело внезапно поворачивается скачком – самым таинственным образом. Вы сможете предсказывать эти скачки, если поднимете путь карандаша на поверхность. Минимумам потенциальной энергии нашей механической системы соответствуют точки изображённого на рисунке «широкого» листа поверхности, вплоть до её контура¹ (включая окна). Покрасьте этот лист в синий цвет. Максимумы потенциальной энергии, которых машина избегает, находятся на другом – красном – листе поверхности. На рисунке представлена только узкая полоска красного листа вблизи контура. Колесо «скачет» в точках разрыва поднятого пути. Например, полный обход карандаша вокруг астроида не приводит к скачкам, поскольку его поднятие всё время остаётся на синем листе. При пересечении астроида в горизонтальном направлении колесо «прыгает» в тот момент, когда карандаш покидает область, ограниченную астройдой. Это происходит потому, что поднятый путь появляется из одного окна и, срываясь с контура, попадает на другое. Вертикальные проходы через ту же область не приводят к скачкам, если карандаш не пересекает оси симметрии астроида, поскольку поднятие такого пути просто проходит через окно. Именно эта и подобные ей катастрофы, рассматриваемые с точки зрения начертательной топологии, и побудили меня заняться классификацией превосходных отображений поверхностей в терминах их контуров.

Морэновское скручивание (картинка 12)

Давайте ещё раз посмотрим на морэновское выворачивание кисета в случае $n = 2$. Структурно кисет состоит из кольцевого ободка, складчатой горловины и ёмкости, где находится табак. Чтобы добраться до табака, вы «закручиваете» ободок, поджимая его к дну кисета. Если «открутить» его – повернуть в другую сторону, то кисет автоматически закроется. Продолжите это движение так, чтобы горловина пошла сквозь самоё себя. Верхний край и дно кисета не покидают при этом своих горизонтальных плоскостей, а горловина не выходит за пределы заключённого между ними цилиндра; назовём его «баночкой». В конце этой деформации горловина пересекает себя по окружности двойных точек, концентрической с краями горловины. Так как кисет сделан из резины, вы можете при дальнейших деформациях горловины закрепить верхний край и дно, чтобы ни одна их точка не двигалась. В дей-

¹ Дающего в проекции на плоскость управления изображённую там пунктирную астроида. – Прим. изд. ред.



Картинка 12. Морэновское скручивание.

ствительности ёмкость в донной части киста к делу не относится: вы продеформировали горловину и поточечно закрепили оба её края.

Поскольку эти края остаются неподвижными в пространстве, вы не можете устранить самопересечения горловины, как в случае шляпы. Вместо этого повторите ещё раз то же движение, но поменяйте ориентацию у всех сборок. В средней части картинки (рис. 12(22)) я пометил *разрез* на горловине и конечное положение этого разреза после деформации. На «9-часовом» рисунке стилизовано изображено исходное положение горловины, с очень большими окнами, и помечено конечное положение разреза. Меньшее кольцо находится к нам ближе, чем большее. Эта вольность рисунка, называемая иногда *китайской перспективой*¹, при которой объект «сжимается», приближаясь к зрителю,

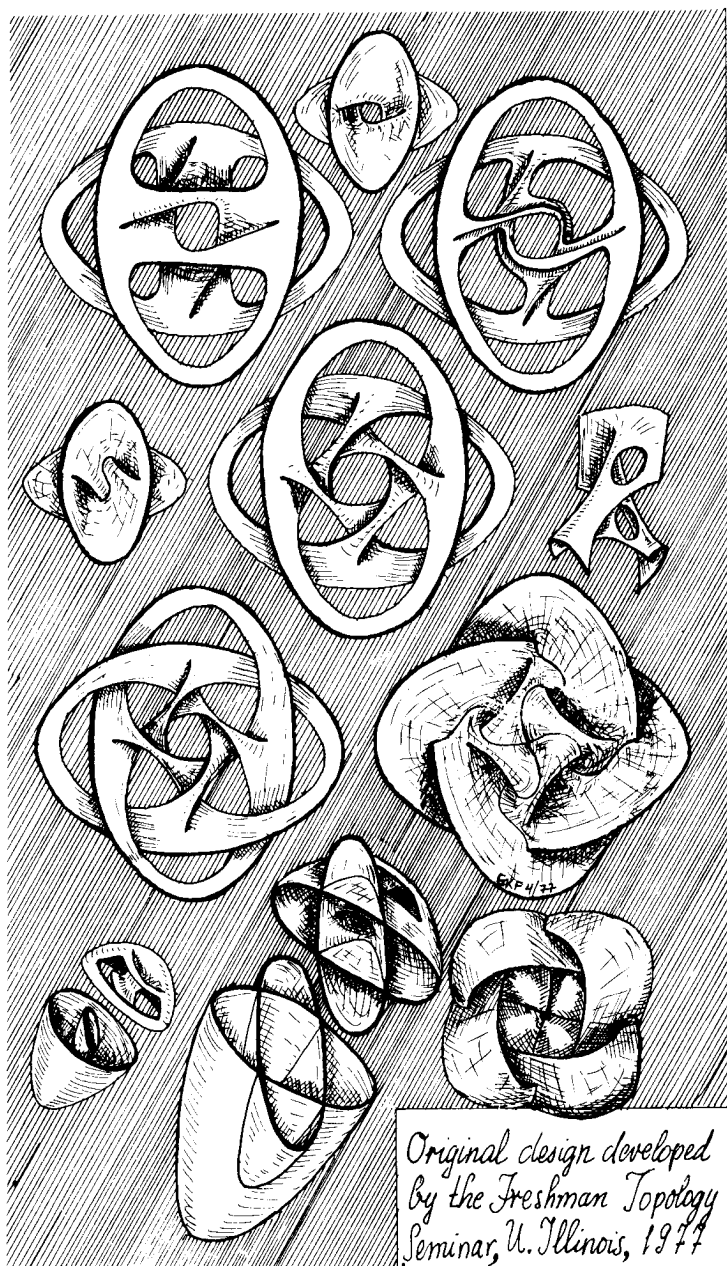
¹ У нас обычно говорят об *обратной* перспективе. — Прим. перев.

помогает рисовать и читать запутанные диаграммы. Проследите за судьбой разреза на рисунках, следующих друг за другом по часовой стрелке. В 11 часов горловина закрывается, образуются левые сборки. В полдень она достигает морэновской промежуточной стадии и вновь открывается в час дня. Заметьте, что в 3 часа окна зацеплены, поэтому горловина погружена, а не вложена.

Теперь снова переверните горловину, но на этот раз – с правыми сборками. Заведомо будет полезно, если вы раскрасите стороны поверхностей, расположенных между 3 и 9 часами. Заметьте, что 6-часовой рисунок является зеркальным отражением рисунка 8(12), а не 8(13). К 9 часам горловина снова в исходном положении, но, как показывает разрез, она претерпела *скручивание Дена*.

Так называется автоморфизм кольца, при котором концентрические окружности отображаются в себя, точки, близкие к краям, остаются неподвижными, однако каждый радиальный отрезок (*поперечный разрез*) закручивается один раз вокруг дыры в кольце. Перевернуть так кольцо при помощи деформации в его плоскости, сохраняющей его края неподвижными, невозможно. Обычно скручивание Дена описывают в терминах операций разрезания, перевертывания и склеивания. Здесь, однако, как вы только что видели, скручивание получается в результате деформации внутри «баночки» – без разрезов и склеиваний. Преобразование поверхности часто можно визуализировать с помощью деформации её специальной модели в пространстве, возвращающей модель к исходному виду. Поскольку нереально проследить за положением каждой точки, на поверхности отмечаются некоторые вспомогательные кривые, за которыми и следят во время движения. Этот приём используется в двух наших следующих рассказах в картинках.

А в заключение данной главы позвольте мне упомянуть о двух историях, рассказанных другими людьми, где морэновское преобразование киста играет центральную роль. Подобно шапировскому преобразованию теннисного мяча, оно является моделью, которую можно «пересадить» на любую заданную поверхность F . Если вы хотите модифицировать F , воспользуйтесь погружением баночки, переводящим её цилиндрическую боковую поверхность на какую-нибудь чётную ленту Морэна M в F , а верхнее и нижнее основания – в диски, параллельные погружённому диску, натянутому на среднюю линию ленты M . Одно преобразование Морэна даёт регулярную гомотопию, превращающую поверхность F в её модификацию F' , в которой лента M заменена торической трубкой, самопересекающейся вдоль средней линии M . Второе преобразование Морэна, имеющее противоположную ориентацию, устраняет эту двойную кривую, заменяя ленту M её скручиванием Дена. Вклейка и устранение двойных кривых, подходящих для преобразования Морэна, – основной приём в конструкции Нагасэ [Nagase 1984]. С помощью этой конструкции он показывает, что любое погружение в пространство диска, край которого закреплён вдоль плоского кольца, регулярно гомотопен диску, лежащему в плоскости



Картинка 13. Рисунок, с которого всё началось. [Надпись в правом нижнем углу означает: Рисунок, созданный на Топологическом семинаре для начинающих в Иллинойском университете, 1977 г. (подлинник).—Изд. ред.]

края. Это утверждение было, кстати, главной леммой к «невизуализуемой» теореме Смейла.

Заметьте, что скручивание Дена, произведённое в сферическом поясе при помощи регулярной гомотопии Морэна, можно «раскрутить» изотопией любой из полусфер. Следовательно, мы получаем замкнутую петлю в пространстве гладких погружений S^2 в R^3 . Морэн высказал предположение, что она реализует образующий элемент бесконечной циклической фундаментальной группы этого пространства. Гипотеза Морэна была доказана Максом и БэнчOFFом [Max – Banchoff 1981]. В их статье содержится хороший пример «доказательства в картинках». Это доказательство основано на выполненных от руки набросках, подсказанных компьютерными изображениями движущейся поверхности в фильме Макса [Max 1977].

Групповые картинки

Имеются две важные группы, связанные с замкнутой поверхностью, — фундаментальная группа и группа классов преобразований. Более привычна, по-видимому, первая из них, известная также под названием первой гомотопической группы поверхности (рассматриваемой как топологическое пространство). Её определил и исследовал Анри Пуанкаре [Poincaré 1895]. В этой главе мне бы хотелось оживить несколько традиционных образов, связанных со второй, более живописной, группой. Обычные определения этих групп выглядят примерно так.

В случае *фундаментальной группы* выберем на поверхности *отмеченную точку* и рассмотрим множество всех непрерывных путей, которые начинаются и кончаются в этой точке. Возможность продеформировать одну такую петлю в другую позволяет задать отношение эквивалентности между петлями, согласованное с бинарной операцией на петлях, определяемой следующим образом. *Произведение* двух петель получается, если соединить конец первой с началом второй. Для того чтобы пройти по поверхности вдоль петли-произведения, нужно, обойдя первую петлю, сразу же отправиться в путешествие по второй. *Единичный элемент* получающейся группы представляется теми петлями, которые можно, как лассо, стянуть в точку. Такие петли называются *гомотопными нулю* или *тривиальными*. Если, например, в конце путешествия вы повернёте назад и пройдёте свой путь в обратном направлении, то такое произведение данной петли и её обратной можно стянуть в точку, не сходя с исходного пути. В общем случае гомотопная нулю петля может замечать какой-то участок поверхности при стягивании её в отмеченную точку.

На сфере, к примеру, нет «ручек», к которым можно было бы привязать лассо, а потому и сама фундаментальная группа тривиальна. На любой другой поверхности имеется по крайней мере одна ручка или плёнка Мёбиуса, за которую «зацеплен» нетривиальный элемент фундаментальной группы. Пуанкаре предположил, что фундаментальная группа вместе со своими многомерными аналогами всегда даёт возможность отличать сферы от более сложных многообразий¹. Попытки решить этот вопрос являются движущей силой развития топологии на

¹ Гипотеза Пуанкаре была фактически сформулирована им в Пятом дополнении к «Analysis Situs», 1904 г. (см. там начало и конец, с. 676, 734 русского перевода), а в ошибочном виде — в 1900 г. во Втором дополнении (см. конец этого дополнения, с. 622 русского перевода). — *Прим. перев.*

протяжении вот уже почти столетия. *Гипотеза Пуанкаре* была подтверждена Стивом Смейлом [Smale 1960], но только для размерностей больше четырёх, и М. Фридманом [Freedman 1980] для размерности четыре. Для нашего трёхмерного мира её справедливость остаётся недоказанной¹.

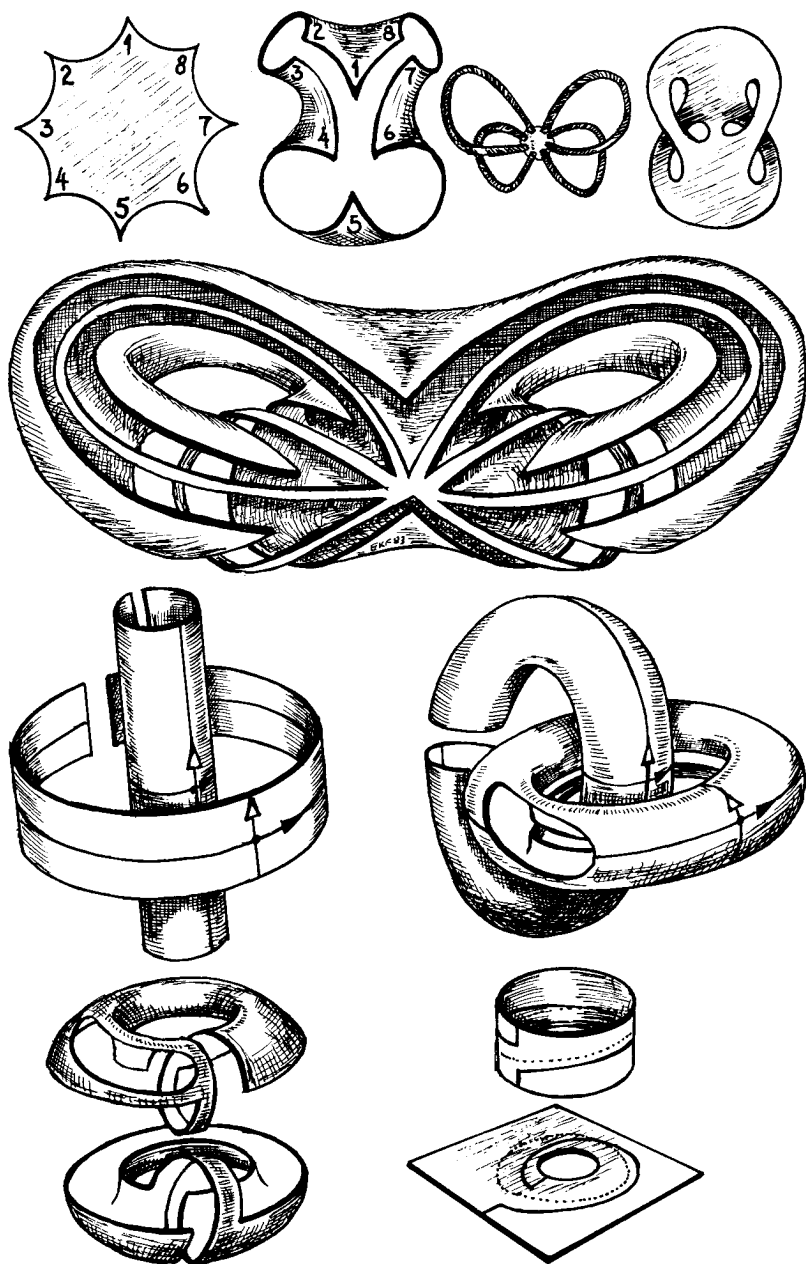
Чтобы определить *группу классов преобразований*, рассмотрим множество всех гомеоморфизмов поверхности на себя – её преобразований. Всюду в этом контексте под *преобразованием* понимается взаимно-однозначное отображение замкнутой ориентируемой поверхности на себя, которое непрерывно вместе со своим обратным. Возможность деформации одного преобразования в другое посредством непрерывного семейства преобразований, называемой *изотопией*, задаёт отношение эквивалентности, согласованное с композицией преобразований. *Произведение* двух преобразований – это просто преобразование, которое получается, если выполнить второе преобразование сразу вслед за первым.

Фундаментальную группу поверхности можно считать алгебраической записью трудностей, с которыми вы сталкиваетесь при попытке стянуть петлю к отмеченной точке. Аналогично группа классов преобразований поверхности – это алгебраическая запись препятствий к деформации преобразования в тождественное отображение. При *тождественном отображении* каждая точка поверхности переходит в саму себя. Якоб Нильсен [Nielsen 1927] первым заметил, что между двумя описанными группами имеется глубокая связь. В частности, группа классов преобразований изоморфна группе внешних автоморфизмов фундаментальной группы поверхности. Не имея намерения глубже вникать в этот раздел теории, за дальнейшими подробностями я отсылаю читателя к литературе.

Застёгивание кренделя на все молнии (картинка 1)

Для того чтобы размышлять о преобразованиях поверхности, прежде всего нужен удобный способ представления поверхности, расположенной в пространстве. В случае *кренделя*, т.е. замкнутой ориентируемой поверхности рода два, возьмём восьмиугольник $1(11)$ и попарно склеим («застегнём на молнию») его стороны, как показано на рис. $1(12)$ и $1(21)$. Заметим, что сторона 1-2, соединяющая вершину 1 с вершиной 2, склеивается со стороной 4-3, отличающейся от 3-4 направлением. Если

¹ Тут есть одна тонкость. Фридман действительно доказал, что любая гомотопическая четырёхмерная сфера гомеоморфна стандартной сфере S^4 . Но у Пуанкаре под «гомеоморфностью» понимается «диффеоморфность» (см. [Poincaré 1895], с. 462–463 русского перевода). И в таком виде четырёхмерная гипотеза Пуанкаре пока (1990 г.) не доказана. Но дело не в терминологии. Вопрос о единственности гладкой структуры на S^4 (и близкая проблематика) является точкой роста сегодняшней дифференциальной топологии. – *Прим. перев.*



Картинка 1. Застёгивание кренделя на все молнии.

обозначить стороны буквами, так что $A = 1-2$, $A^{-1} = 3-4$ и т. д., то, идя вдоль восьмиугольника, мы прочитаем слово

$$ABA^{-1}B^{-1}CDC^{-1}D^{-1}.$$

Заметьте, что у построенного клеточного пространства только одна вершина. Поэтому четыре его ребра образуют букет петель $1(13)$. Пройдя по этим петлям в соответствии с вышеприведенным словом, вы обойдёте вокруг исходного восьмиугольного диска в точности один раз. Следовательно, эта составная петля гомотопна нулю и представляет единичный элемент. В действительности это и единственное соотношение, нужное для канонического задания фундаментальной группы кренделя.

Посмотрим, как эта процедура применяется к обычному тору. Отождествив горизонтальные и вертикальные стороны прямоугольника, вы получите поверхность, попрактиковаться в манипуляциях с которой можно при помощи дисплея, зацикленного по горизонтали и вертикали. На рис. 1(31) показаны два цилиндра, полученные застёгиванием молний на вертикальных сторонах, — высокая трубка и узкая лента. Один из них можно плавно продеформировать в другой. Теперь, сшив у каждой поверхности две граничные окружности, вы получите два сцепленных тора¹ (рис. 1(32)). Различие между двумя этими замкнутыми поверхностями невелико. А именно, если горизонтальный тор повернуть на 90° и немного сдвинуть, то он займёт положение вертикального тора. Такое *совмещение* (или *наложение*) двух экземпляров одной и той же поверхности определяет некоторое преобразование. Фактически это преобразование определено лишь с точностью до изотопии поверхности, поэтому совмещению отвечает некоторый элемент группы классов преобразований. Рассматриваемый конкретный элемент группы классов преобразований тора *не тривиален*, его порядок равен четырём.

Чтобы убедиться в этом, вы можете проследить за тем, как ведут себя при преобразовании некоторые окружности на торе. (Поскольку это топология, то любую простую замкнутую кривую на поверхности мы будем называть *окружностью*.) Замкнутая поверхность, вложенная в трёхмерное пространство, разделяет его на внутреннюю и внешнюю по отношению к поверхности части. Если окружность на поверхности является краем некоторого диска, вложенного в пространство, то говорят, что этот диск *натянут* на неё (или *затягивает* её). (Такая окружность заведомо незаузлена.) Окружность, на которую натягивается диск как снаружи поверхности, так и изнутри, ограничивает участок на поверхности, и потому она гомологически тривиальна. Нетривиальная окружность называется *меридианом* (соотв. *параллелью*), если она затягивается диском только внутри (соотв. снаружи). Тор имеет, с точностью до изотопии, один меридиан и одну параллель. На нём также есть нетривиальные незаузленные окружности, которые не

¹ В дальнейшем они рассматриваются как образы одной и той же поверхности при различных её вложениях в R^3 . — Прим. перев.

являются ни тем ни другим. Можете ли вы найти их? Разумеется, преобразование, реализованное самосовмещением данного тора, должно переводить меридиан в меридиан и параллель – в параллель.

Представим себе теперь такое преобразование вертикального тора на рис. 1(32). Разрежем тор вдоль меридиана и распрямим его в высокую цилиндрическую трубку на рис. 1(31). Уменьшив высоту, одновременно увеличим диаметр трубки и, загнув полученную ленту (рис. 1(31)) вовнутрь, придём к горизонтальному тору на рис. 1(32). Повернём его на 90° против часовой стрелки и наложим на исходную поверхность. Это преобразование – назовём его *переворотом*¹ – переводит меридиан (стрелка с черным наконечником) в параллель (стрелка с белым наконечником), а параллель – в меридиан, но противоположного направления. Ясно, что переворот имеет порядок четыре. Как вы увидите ниже, этот способ описания переворота изящно обобщается.

С тором, разрезанным по меридиану, можно поступить и по-другому. Перекрутим трубку один раз и после этого сошьём её вновь. Понять, что происходит при таком *скручивании*, можно, если представить себе тор, скажем горизонтальный, как сшитый из двух колец – вдоль двух экваториальных параллелей. Расположим эти кольца в пространстве иначе, как это показано на рис. 1(41), и снова сошьём их друг с другом в горизонтальный тор. Такое преобразование переводит параллель в кривую, составленную из одной параллели и одного меридиана. (Эта кривая – отгадка к загаданной выше загадке.) При повторном скручивании к кривой добавится еще один меридиан. Итерируя это преобразование, мы никогда не придём к единичному классу.

Квадрат переворота переводит меридиан и параллель в обратные им петли. Соответствующее совмещение не требует разрезов и склеиваний – достаточно повернуть тор на 180° . Поэтому оно коммутирует с переворотом. Потруднее убедиться в том, что произведение переворота и скручивания имеет порядок 3; к этому я вернусь в конце главы. Таким образом, у нас есть следующее задание для группы классов преобразований тора:²

$$\langle s, t \mid s^4 = s^2 t s^{-2} t^{-1} = (st)^3 = 1 \rangle.$$

Разумеется, истинное «лицо» этой группы выявляется алгебраическими средствами на основе этого абстрактного определения. Нильсен представлял себе группу классов преобразований как группу автоморфизмов фундаментальной группы поверхности. Поскольку прямоугольник склеивается по правилу $ABA^{-1}B^{-1}$, фундаментальная группа тора должна быть свободной абелевой группой Z^2 ранга два. Автоморфизмы группы Z^2 образуют группу $GL(2, Z)$ – полную линейную группу 2×2 -матриц над целыми числами. Как вы легко проверите, матрица, обратная к такой матрице, тогда и только тогда сама будет цело-

¹ В оригинале swap (обмен). – Прим. изд. ред.

² Ниже s и t – от swap и twist. – Прим. изд. ред.

Таблица 1

Задание кренделя

$x, y, \dots, z$	образующие для кренделя	$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$
------------------	-------------------------	----------------------------

$xz = zx$	удалённые друг от друга образующие коммутируют	$x_i x_k = x_k x_i$
$xux = uxy$	соседние образующие можно заменять друг на друга	$x_i x_j x_i = x_j x_i x_j$
$(xy \dots z)^6 = 1$	порядок <i>спиральки</i> равен шести	$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^n = 1$
$xy \dots zz \dots yx = -1$	<i>завиток</i> является центральной инволюцией	$w^2 = 1$ и $w x_i = x_i w$, где $w = x_1 x_2 \dots$ $x_{n-1} x_{n-1} \dots x_2 x_1$

$x, y, \dots, z$	GENERATORS FOR THE DOUBLE TORUS	$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$
$xz = zx$	REMOTE GENERATORS COMMUTE	$x_i x_k = x_k x_i$
$xux = uxy$	ADJACENT GENERATORS SWAP	$x_i x_j x_i = x_j x_i x_j$
$(xy \dots z)^6 = 1$	THE COIL HAS ORDER SIX	$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^n = 1$
$xy \dots zz \dots yx = -1$	THE WHORL IS THE CENTRAL INVOLUTION	$w^2 = 1$ and $w x_i = x_i w$ where $w = x_1 x_2 \dots x_{n-1} = x_{n-1} \dots x_2 x_1$

численной, когда определитель исходной матрицы равен ± 1 . В случае ориентируемых поверхностей обычно не рассматривают преобразований, обращающих ориентацию, и тогда группа классов преобразований тора — это $SL(2, Z)$, специальная линейная группа над целыми числами. Систематическое изложение этого предмета вы можете найти в учебнике Джона Стиллауэлла [Stillwell 1980, разд. 6.4].

Группа классов преобразований кренделя гораздо таинствен-

нее. Со всей тщательностью вводит читателя в курс дела монография Джоун Бирман [Birman 1975]. Там вы найдёте задание группы классов преобразований кренделя при помощи пяти образующих и двух специальных соотношений в дополнение к соотношениям для артиновой группы кос. Позвольте мне выписать это задание в виде таблицы 1¹. В левой колонке приведены типичные представители соотношений (для простоты – в безындексной форме), в средней – соответствующие мнемонические фразы. Что касается названий «спиралька» и «завиток», то их топологическое происхождение я объясню при обсуждении последующих картинок. В правой колонке образующие и соотношения записаны в стандартной индексной форме.

Как сплести гомеоморфизм (картинка 2)

Взгляните на чудное приспособление, изображённое на рис. 2(12). Из квадратного основания торчат два кривых стержня. Они изящно изогнуты так, что каждый из них заходит «за спину» другому. Сверху между ними проходит верёвочка. Когда верёвочка падает на основание, её прикреплённые к колечкам концы опускаются строго вертикально. Изгиб стержней направляет верёвочку так, что на основании она принимает S-образный вид, обвивая на пол-оборота каждый стержень. Если убрать стержни, то можно вернуть верёвочку в исходное состояние при помощи подходящей изотопии квадрата.

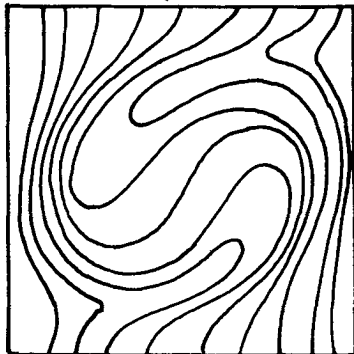
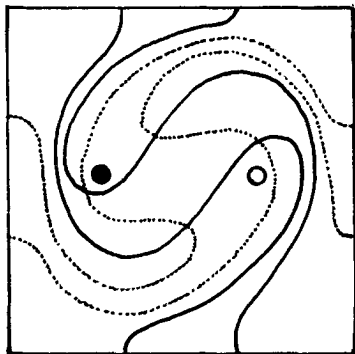
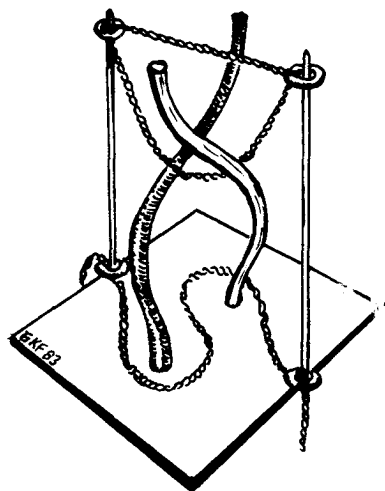
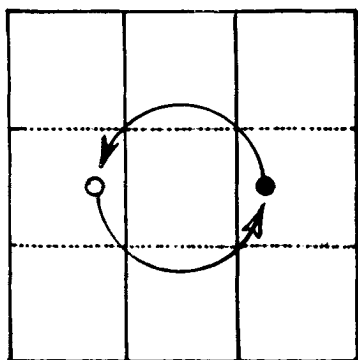
На рис. 2(11) изображена квадратная рамка с четырьмя пересекающимися её верёвочками (по две в каждом направлении). Стержни протыкают квадрат рамки в двух местах. Во время падения рамки проколы меняются местами, двигаясь по окружности. При этом наша сеть искривляется, как показано на рис. 2(21). Заметим, что только чёрные верёвочки, проходящие между стержнями, нельзя вернуть в исходное положение, натянув их.

Это преобразование квадрата можно представить себе по-другому. Начертите несколько параллельных отрезков на квадрате из эластичного материала, закреплённом по периметру. Прижмите к квадрату большой и указательный пальцы в двух точках и поверните руку на пол-оборота. На рис. 2(22) показано получающееся искривление координатных линий. Это преобразование квадрата оставляет неподвижными граничные точки и меняет местами «проколы».

Итак, преобразования проколотого квадрата однозначно с точностью до изотопии описываются тем, как *индикаторные пути*² проходят между проколами до и после преобразования. Это в свою очередь

¹ Мы воспроизводим и английский оригинал этой таблицы (машинную распечатку), потому что он упоминается в постскрипуме в конце книги. (Заметим, что в оригинале таблицы имеется опечатка.) – *Прим. изд. ред.*

² В дальнейшем иногда называемые просто *индикаторами*. – *Прим. изд. ред.*



Картинка 2. Как сплести гомеоморфизм.

определяется тем, какой стержень проходит спереди, а какой сзади¹. Условимся называть изгибающиеся стержни *нитеями*, а совокупности нитей – *косами*. Через $x, y, \dots, z$ будем обозначать *пары* соседних нитей в косе. Чтобы закодировать косу, нужно, идя по ней сверху вниз, перечислить, какие встречаются пересечения нитей; при этом если левая нить проходит над правой, как на рис. 2(12), то это даёт положительный показатель, другой же способ пересечения соответствует обратной косе. Заметьте, что этот знак не зависит от того, с какой стороны вы смотрите на пару стержней, изображённую на рис. 2(12). Дело в том, что если стержни изогнуты таким образом, то, откуда бы вы на них ни смотрели,

¹ Если смотреть вдоль исходного направления «верёвочек». – Прим. изд. ред.

ближе окажется стержень, проходящий из левого верхнего угла в правый нижний. Исторически выбрано соглашение, при котором нити должны закручиваться как резьба левого винта, чтобы проколы, когда они расталкивают индикаторные пути, вращались в положительном направлении (рис. 2(11)).

Артинов переворот (картинка 3)

Эта композиция из одиннадцати диаграмм тремя способами изображает соотношение *Артина* $хух = уху$. В центре помещена стандартная диаграмма теории кос (рис. 3(22)). Она окружена диаграммами индикаторных путей для каждой из двух фигурирующих в соотношении Артина композиций трёх преобразований. Старт (рис. 3(12)) – верхний уровень кос. Первый полуоборот косы $хух$ закодирован на рис. 3(11), а первый полуоборот косы $уху$ – на рис. 3(13). После третьего полуоборота получаются рисунки 3(31) и 3(33), каждый из которых переводится изотопией в рис. 3(32). Соответствующие «штопорные» картинки (рис. 3(41) и 3(42)) совмещают оба эти способа зримо представить себе соотношение. Обратите внимание на то, что средняя нить может свободно перемещаться из одного положения в другое, переводя $хух$ в $уху$. Без всяких картинок ясно, что удалённые друг от друга образующие коммутируют, т. е. $xz = zx$. Таким образом, артинова группа кос B_n обладает заданием с $n - 1$ линейно упорядоченными образующими, в котором удалённые друг от друга образующие перестановочны, а соседние – взаимозаменяемы¹.

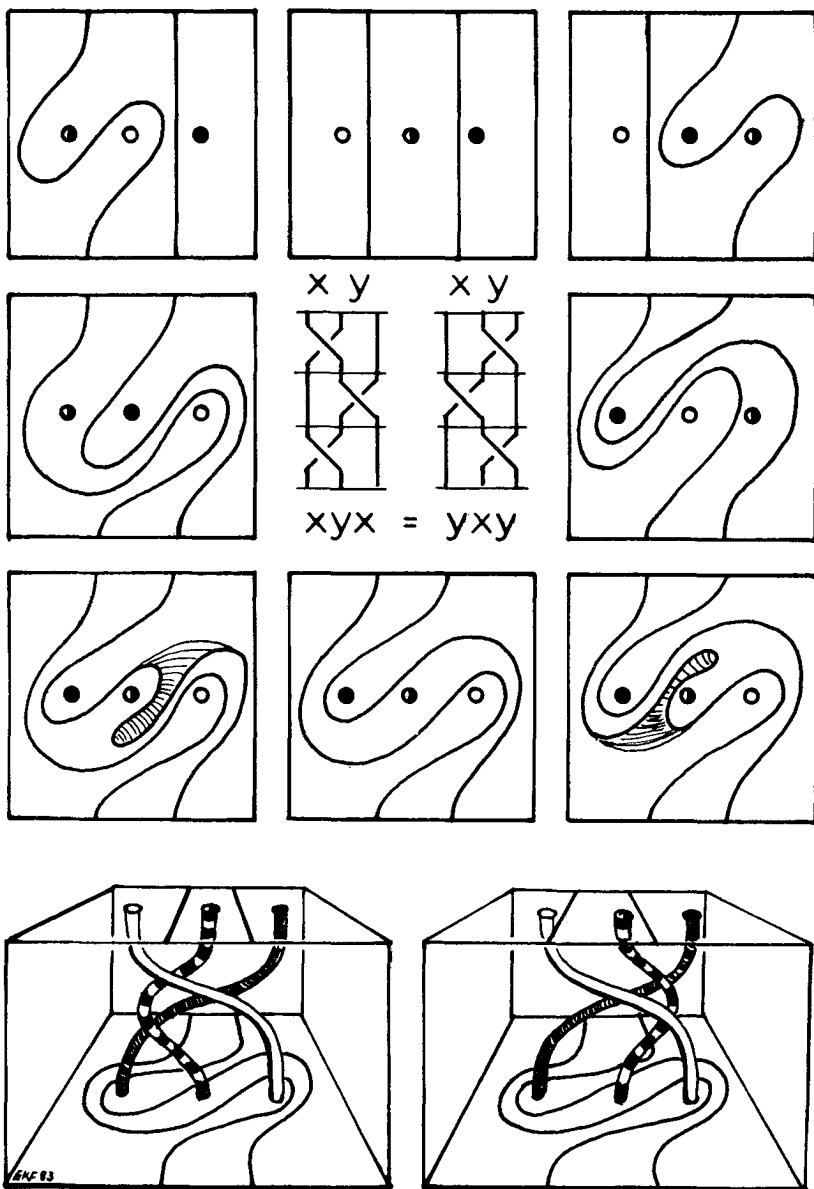
Сферические косы (картинка 4)

Циклическую перестановку проколов, закодированную *косой-произведением* $ху...z$, можно «нейтрализовать» двумя интересными способами. Скомпонуйте эту косу с её «двойником» (рис. 4(11)), и вы получите *завиток* $ху...z^2...ух$. Здесь первая нить один раз полностью обматывается вокруг остальных. Их можно собрать в ленту из параллельных нитей, которая не перекручена и не запутана (рис. 4(12)).

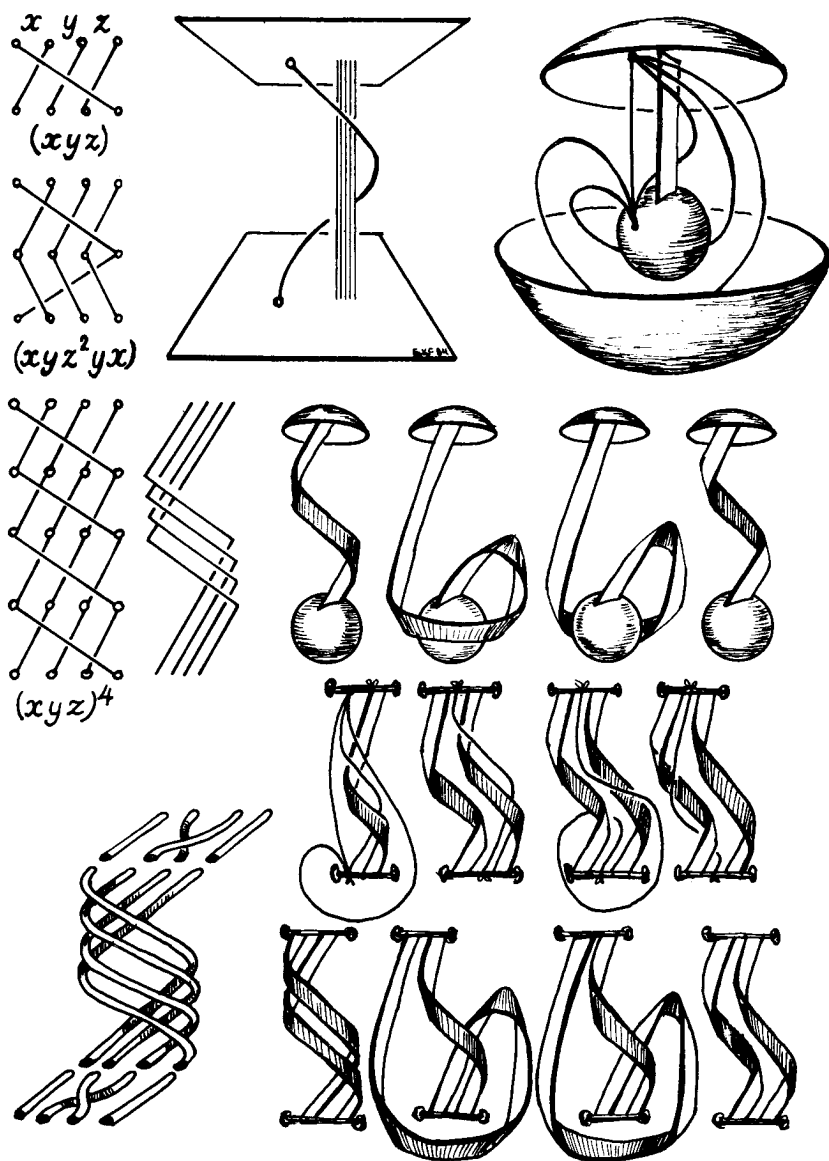
Проитерировуйте косу-произведение несколько раз, чтобы каждая нить вернулась на своё старое место, и вы получите *спиральку* $(ху...z)^n$ (рис. 4(21)). Здесь каждая из n нитей обматывается один раз вокруг каждой из остальных. Все вместе они образуют ленту (рис. 4(22)), которая закручивается в пространстве на один полный оборот. Эта спиралька порождает центр группы кос.

Рисунок 4(31), изображающий $y(хуz)^4y^{-1}$, показывает, как скручивание на пол-оборота двух соседних нитей вверху спиральки можно «счесать вниз», где оно самоуничтожится со своим обратным. Поэтому спиралька коммутирует с чем угодно.

¹ В выражениях вида $хух$. – Прим. изд. ред.



Картинка 3. Артинов переворот.



Картинка 4. Сферические косы.

До тех пор пока мы связываем завиток с преобразованием проколотой плоскости, нельзя ничего сделать с его одинокой нитью, обвивающей вокруг ленты. Но возможна интерпретация, при которой коса кодирует преобразование проколотой сферы (рис. 4 (13)). В таком случае ленту и нить-одиночку можно расплести при помощи пространственной изотопии между двумя концентрическими сферами, неподвижной на сферах. Таким образом, в *сферической группе кос* $B_n(S^2)$ завиток является соотношением. Оказывается, что это и единственное новое соотношение, нужное при переходе от плоскости к сфере.

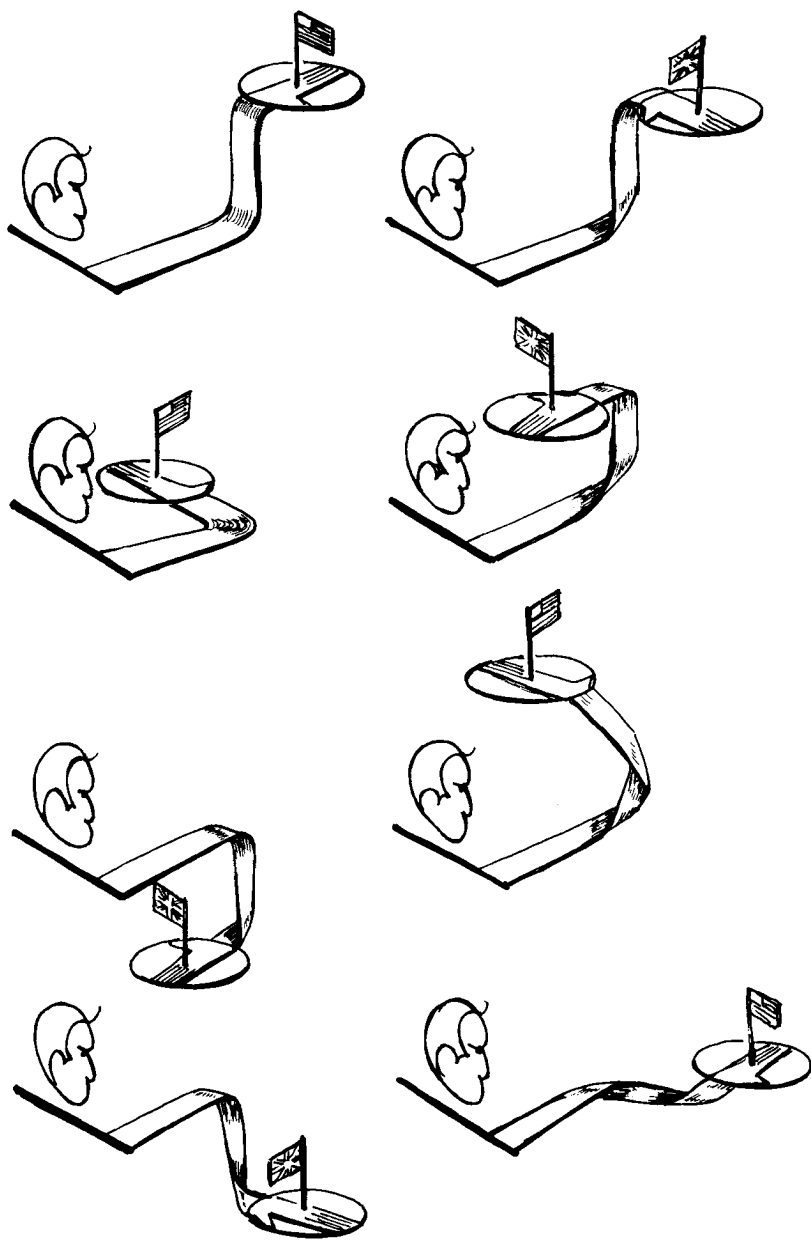
В сферической группе кос спиралька имеет порядок два. Магнус [Magnus 1934] показал, как вывести это алгебраически и топологически из свойств завитка. Вы можете увидеть это и непосредственно, если проследите за раскручиванием ленты, начиная с рис. 4 (23). При удлинении ленты (рис. 4 (24)) её часть, обращённая к нам темной стороной, опускается, при этом над сферой образуется «воротничок». «Отложите» его и проведите под сферой (рис. 4 (25)), а потом снова потуже натяните ленту (рис. 4 (26)). После этого она окажется перекрученной один раз в другую сторону и будет представлять собой обратную спиральку. Следовательно, двухвитковую спираль – ленту, перекрученную на два полных оборота, – можно раскрутить, не двигая её концов друг относительно друга, хотя одновитковую – нельзя.

Фокус с тарелкой (картинка 5)

Это замечательное свойство пространства великолепно иллюстрируется старым домашним фокусом с тарелкой, которому меня в одном страсбургском ресторане научил Иан Портьюз. Я стилизовал руку под ленту, чтобы лучше проиллюстрировать перекручивание. Начните (рис. 5 (11)) с того, что поднимите на ладони тарелку, изображённую здесь с воткнутым в неё двусторонним флажком, чтобы можно было фиксировать вращение тарелки. Действуйте, как показано на рисунках (идя против часовой стрелки). Вы дважды поворачиваете тарелку против часовой стрелки в горизонтальной плоскости. На полпути (рис. 5 (42)) ваша рука будет перекручена на один полный оборот. Она распрямится, когда вы продолжите выворачивать руку тем же образом.

Другой вариант этого феномена был популяризован Дираком и объяснён М. Х. А. Ньюманом [Newman 1942] при помощи кос. Дирак использовал его для иллюстрации того, как группа Ли $SO(3)$ вращений трёхмерного пространства двулистно накрывается группой S^3 единичных кватернионов. Заметьте, что последняя представляет собой трёхмерную сферу в четырёхмерном пространстве¹.

¹ Прочитируем первый абзац из статьи Ньюмана: «Вот уже несколько лет Дирак использует следующую конкретную модель для иллюстрации того факта, что фундаментальная группа группы $SO(3)$ циклическая порядка 2. Два куска бичёвки продеваются в кольца ножиц, каждый в своё, и четыре свободных конца



Картинка 5. Фокус с тарелкой.

Позвольте мне на минутку вернуться к спиральке 4(23) и показать вам, как, перемещая по одной нити за раз, преобразовать эту правую спиральку в обратную ей левую спиральку 4(26). На рис. 4(32) показаны три последовательных положения первой нити. На рис. 4(33) одна из средних нитей отрывается от правой спиральки, обходит вокруг нижней части косы (рис. 4(34)) и вот уже готова присоединиться к своим предшественницам в левой спиральке (рис. 4(35)).

Однако в группе классов преобразований проколотой сферы преобразование, закодированное спиральной косой, будет изотопно тождественному. Нити косы направляют координатную сеть, падающую с небесной сферы на земную, в изотопные друг другу положения независимо от того, неподвижна земля или поворачивается относительно неба. В действительности, как показали Фейделл и Ван Бюскирк [Fadell–Van Buskirk 1962], это и единственное новое соотношение, нужное для перехода от сферической группы кос $B_n(S^2)$ к группе $M(0, n)$ классов преобразований проколотой сферы. Следовательно, первая группа является расширением второй при помощи центрального элемента порядка 2.

Завиток и дымовая труба (картинка 6)

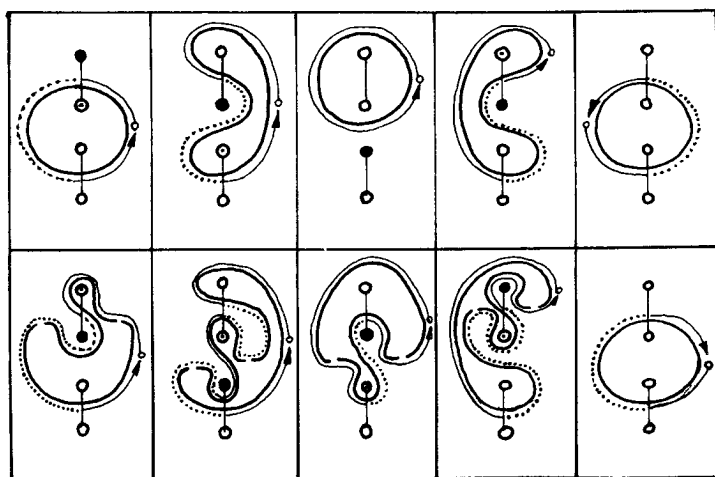
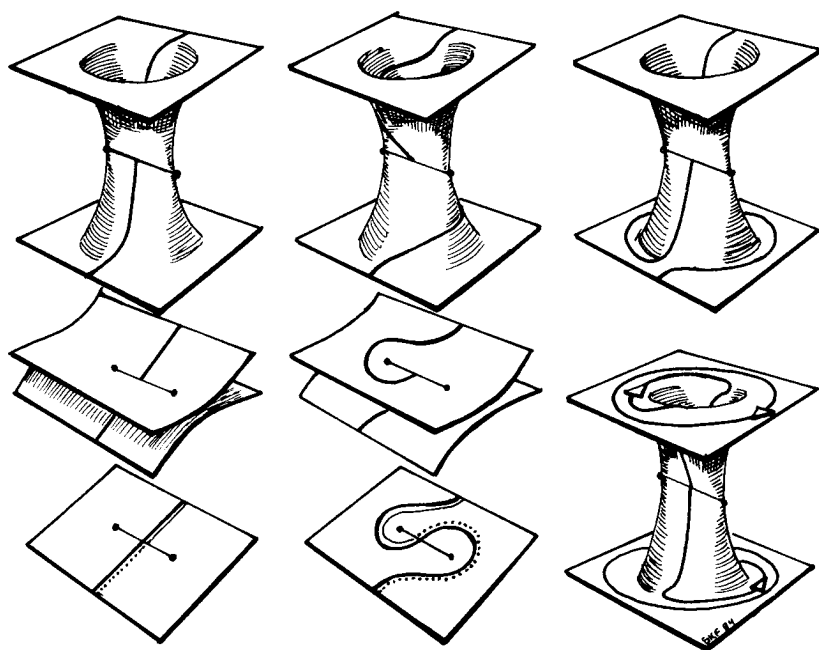
Если вы в предыдущей сценке поменяете завиток и спиральку ролями и профакторизуете группу B_n по её центру (спиральным косам), то получите другое центральное расширение группы $M(0, n)$ с циклическим центром порядка два. У Магнуса [Magnus 1972] изложена «естественная история» этой безымянной группы. Там она обозначается A_n^* . Он относит её «возникновение» к теории монодромии Гурвица и описывает, как она действует автоморфизмами в фундаментальной группе замкнутой ориентированной поверхности рода p , где p и n связаны соотношением $n = 2p + 2$. Это в свою очередь задаёт некоторую подгруппу группы $M(p, 0)$ классов преобразований этой поверхности. Далее я привожу образчики рисунков, которые могут помочь вам понять соответствующую теорию групп. В частности, я хочу объяснить вам, какое отношение имеет группа A_n^* к предметам, насаженным на спицу.

Прежде всего рассмотрим «любимую инволюцию» Джоун Бирман на торе T_p с p дырками – замкнутой ориентированной поверхности рода p ¹. Изображение этой инволюции², сделанное мелом на доске, воспроизве-

привязывают к спинке стула так, чтобы ножницы висели на разделённых и незакрученных бичёвках. После этого ножницы закручивают на k полных оборотов вокруг горизонтальной оси симметрии [или любой другой оси. – Перев.]. Задача состоит в том, чтобы устранить получающееся закручивание верёвочек, обводя их вокруг ножниц и не двигая ножниц и стула. Она разрешима при чётном k и неразрешима при нечётном.³ В доказательстве последнего и состояло достижение Ньюмана. – Прим. перев.

¹ Обычно подобную поверхность называют сферой с p ручками. – Прим. перев.

² Для случая $p = 1$. – Прим. перев.



Картинки 6. Завиток и дымовая труба.

дено на фото III¹. Она состоит в повороте осесимметричного варианта поверхности, у которого все дырки расположены вдоль длинной оси («спицы»), на пол-оборота вокруг «спицы». У этой инволюции $2p + 2$ неподвижных точек, находящихся там, где спица протыкает поверхность. Соответствующее факторпространство («пространство орбит») будет сферой. Проколотый n раз p -тор является двулистным накрытием этой проколотой n раз сферы. Над каждой из особых точек проекция накрытия $T_p \rightarrow S^2$ ветвится как $w = z^2$. В действительности римановы поверхности первоначально как раз и представляли себе в виде разветвлённых накрытий римановой сферы.

У этой инволюции имеется очевидный набор из $2p + 1$ инвариантных окружностей. Опоясывая дырки и ручки, они соединяют между собой соседние неподвижные точки. Хотя при инволюции каждая из этих «очевидных окружностей» отображается в себя, ориентация её обращается. На накрываемой сфере n точек ветвления, расположенных на одном меридиане, соединены отрезками, которые накрываются очевидными окружностями. Вы можете «накачать» двуслойную сферу и получить сингулярный образ поверхности T_p в пространстве. Точки ветвления становятся точками пинча, а $p + 1$ из указанных отрезков (отрезки с нечётными номерами) – двойными линиями, соединяющими эти точки пинча. В таком контексте эти дуги обычно называют (*продольными*) *разрезами*². Отрезки с чётными номерами – назовем их *коразрезами* – раскрываются при «накачке» в простые замкнутые кривые на (сингулярной) поверхности. Воспользовавшись несколько менее очевидной инвариантной окружностью, которая обходит вокруг T_p снаружи и накрывает меридиан, соединяющий полосы сферы S^2 с противоположной стороны, вы можете накачать сферу по-другому, поменяв ролями разрезы и коразрезы.

Рассмотрим $n - 1$ преобразований, полученных однократными скручиваниями Дена вдоль каждой из очевидных окружностей (рис. 1 (42)). Позже я коротко объясню, как классы преобразований поверхностей выражаются через скручивания в общем случае. Для кренделя (при $p = 2$) пять «очевидных» скручиваний уже порождают группу $M(2, 0)$, изоморфную группе Магнуса A_5^* . Поэтому-то группа классов преобразований кренделя и обладает красивым заданием, указанным в табл. 1, и это один из способов увидеть, почему алгебраические и топологические завитки – одно и то же.

Скручивание Дена представляет собой преобразование поверхности, которое с точностью до изотопии определяется тем, что происходит в окрестности некоторой простой замкнутой кривой на поверхности. Назовём её *окружностью скручивания*, соответствующей данному классу

¹ В оригинале эта фотография помещена на обложке книги, но это технически сложно для наших типографий. – Прим. изд. ред.

² В оригинале slit (щель, продольный разрез). Итак, поперечные разрезы делаются ножом, перпендикулярным к поверхности, а продольные – «касательным» к ней. – Прим. изд. ред.

преобразований. Если, как это принято, вы изобразите упомянутую окрестность в виде цилиндра или же в виде плоского кольца, то скручивание можно описать как операцию типа «режем-поворачиваем-клеим», которая характеризуется своим действием на поперечные разрезы. Чтобы глубже проникнуть в суть дела, представьте себе трёхмерную тень этой окрестности (расположенной в четырёхмерном пространстве), выглядящую как *дымовая труба* 6(11). Двойная линия, вдоль которой труба имеет самопересечение, накрывается окружностью скручивания. Уплотнённый вариант 6(21) дымовой трубы демонстрирует её связь с разветвлённым накрытием диска 6(31). Диаметр, пересекающий продольный разрез, поднимается в один из двух поперечных разрезов на трубе.

Изотопия в пространстве, оставляющая неподвижными основание трубы и её верх и поворачивающая сплюснутую горловину на 180° , приводит вас к рис. 6(12). Спроецировав поперечный разрез на накрываемый диск (рис. 6(32)) или же позволив ему «сползти» на основание трубы (рис. 6(13)), вы увидите, что полуоборот на накрываемой сфере соответствует полному скручиванию на накрывающей поверхности. Вот что имеется в виду в подстрочном примечании на стр. 165 книги [Birman 1974]. Если вы протащите окружность скручивания сквозь трубу (рис. 6(23)), с одного листа римановой поверхности на другой, то ориентация её проекции на риманову сферу поменяется на обратную. Если на этом рисунке выполнить центральную инволюцию, то она поменяет местами исходные два листа, сдвинув каждую точку по вертикали, параллельно оси дымовой трубы.

Теперь перейдём к рассмотрению плоских диаграмм, с помощью которых можно «вычислить», как действует последовательность $xy \dots zz \dots yx$ скручиваний, ассоциированная с завитком. На рис. 6(41) вы видите фрагмент с четырьмя последовательными точками ветвления, двумя продольными разрезами и одной очевидно-инвариантной окружностью. Вам надо представить себе, что над разветвлённым накрытием 6(31) помещены две копии трубы 6(11) и имеющиеся на них поперечные разрезы соединены в индикаторную окружность. Помечено также направление обхода индикаторной окружности. Он начинается в 3 часа на верхнем листе (сплошная линия), в полдень пересекает продольный разрез, продолжается на нижнем листе (пунктирная линия) до основания следующей трубы, пересекает её продольный разрез в 6 часов и возвращается к исходному пункту. Этот индикатор изотопен очевидной (теперь уже не настолько!) окружности, соединяющей две средние точки ветвления. Вы можете считать, что скручивание вдоль этой окружности соответствует одной из промежуточных букв витка, скажем букве b в $xy \dots abc \dots zz \dots cba \dots yx$. С индикатором ничего не случается, пока мы не доходим до скручивания a , меняющего местами чёрную и серую точки (рис. 6(51)).

Эффективный способ нарисовать такую диаграмму состоит в том, чтобы перерисовать предыдущую кривую, за исключением короткого

кусочка, пересекающего разрез. Вместо него вставьте уже знакомую нам скрученную дугу. Вам надо представить себе, что над 6(51) помещены копия трубы 6(12) с прикрепленной к ней копией трубы 6(11)¹. Упрощая индикатор с помощью изотопии, приходим к диаграмме 6(42), которая теперь скручиванием b переводится в 6(52). Ещё одна изотопия, упрощающая индикатор (рис. 6(43)), показывает, что он теперь не подвержен действию последующих скручиваний $c \dots zz \dots c$. Как мы видим, он лежит целиком на верхнем листе дымовой трубы, но изотопен a -окружности. Когда скручивание b производится во второй раз (рис. 6(53)), оно делает индикатор (рис. 6(44)) чувствительным лишь к скручиванию a (рис. 6(54)), но не к остальным скручиваниям. Конечное (рис. 6(45)) и начальное (рис. 6(55)) положения индикатора совпадают на накрываемой сфере, но не на самой поверхности. Нарисованная мною диаграмма кодирует фрагмент поверхности с двумя трубами, на котором изотопия переводит индикатор из положения 6(55) в положение 6(45) с обращением ориентации.

Теперь мы знаем, что композиция завитка и инволюции оставляет очевидные окружности поточечно неподвижными. Так как их дополнение в T_p состоит из двух топологических дисков, то эта композиция изотопна тождественному отображению поверхности. Предоставляю вам в качестве графического упражнения «вычислить» судьбу x -окружности и y -окружности.

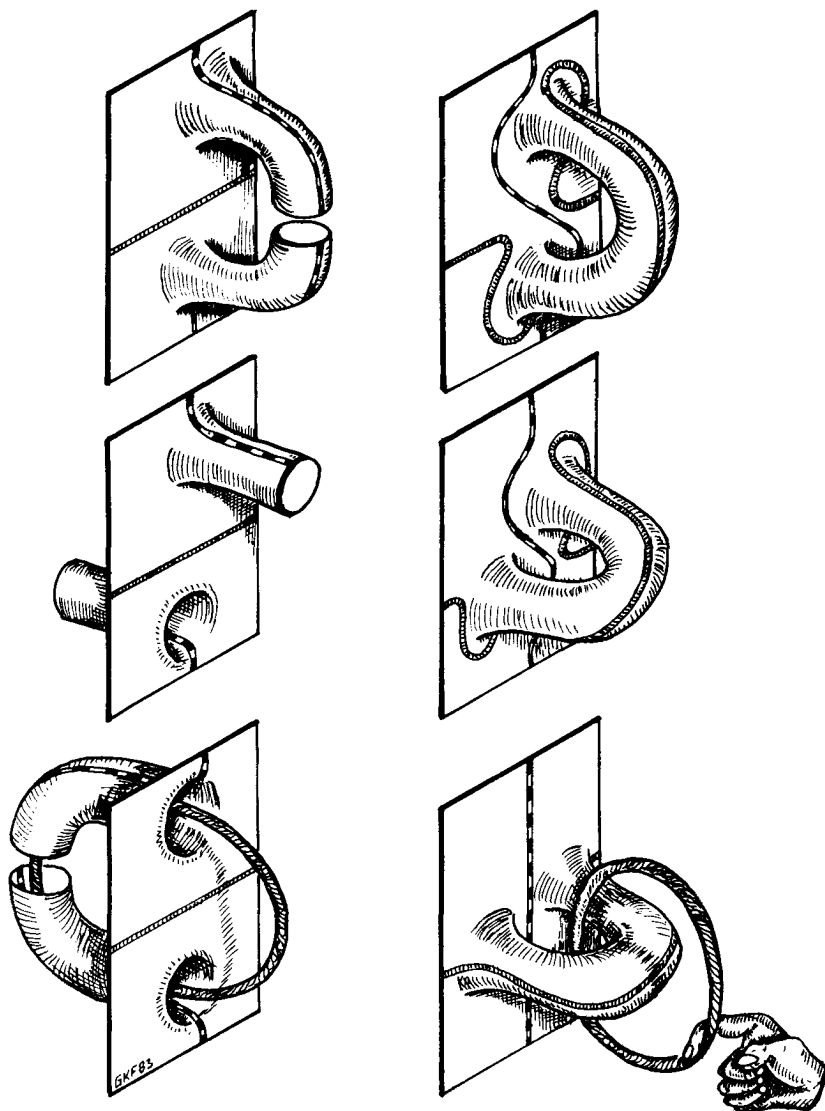
Переворот ручки (картинка 7)

Разметьте ручку 7(11) при помощи двух поперечных разрезов – вертикального и горизонтального. Разрежьте трубку и выверните получившиеся рукава, как при перелицовке старого пиджака (рис. 7(21)). Сшейте рукава снова (рис. 7(31)) и пропустите сквозь ручку верёвочную петлю (рис. 7(31)). Теперь, потянув за эту петлю, протасните ручку на свою сторону (рис. 7(32)) и поверните её (рис. 7(22)) на четверть оборота, не сдвигая квадратного края. Мы вернулись в исходное положение (рис. 7(12)). Наложением 7(12) на 7(11) определяется преобразование ручки, которое мы будем называть её *переворотом*. Как указывает вид поперечных разрезов, класс преобразований, отвечающий перевороту, не тривиален.

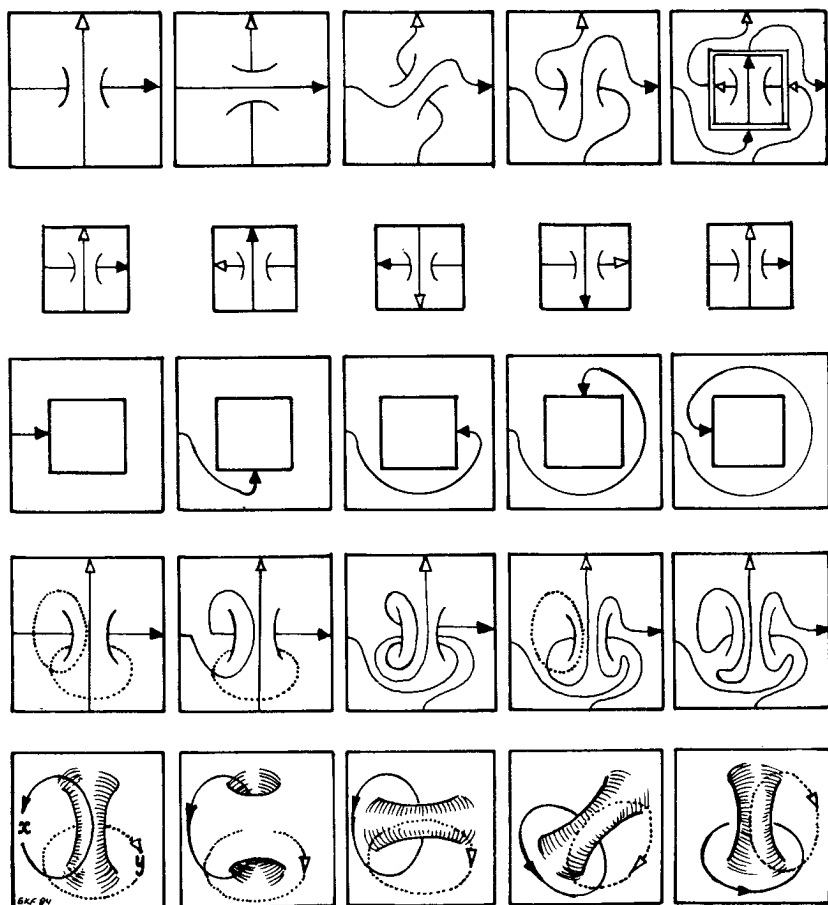
Диаграммы переворота (картинка 8)

На диаграммах из верхнего ряда этой картинки та же самая процедура представлена в более абстрактном виде. Фрагменты 8(11), 8(12), 8(13) и 8(14) отвечают стадиям 7(11), 7(32), 7(22) и 7(12). На рис. 8(15) я отделил ручку от кольцеобразной окрестности края – его так называемого *воротника*. Повторите переворот четыре раза. Последовательность

¹ Ср. с рис. 6: 12(22). – Прим. перев.



Картинка 7. Переворот ручки.



Картинка 8. Диаграммы переворота.

8(21)–8(25) показывает, что сама ручка вернётся в исходное положение, а последовательность 8(31)–8(35) – что воротник претерпит скручивание. Следовательно, четвёртая степень переворота равна скручиванию вдоль окружности, не задевающей ручку.

В четвёртом ряду показано, как переворот представляется в виде произведения уху скручиваний вдоль образующих окружностей ручки (рис. 8(41)). На рис. 8(42) горизонтальный индикатор (помеченный чёрной стрелкой) скручен вдоль вертикальной образующей (первое скручивание y). Последующее скручивание x даёт 8(43). Изотопия, которую вы можете представлять себе, как натягивание индикатора с чёрным нако-

нечником, протаскивает его сквозь «туннель» и немного поднимает вверх на другой его стороне (рис. 8(44)). Повторное скручивание у (вдоль пунктирной окружности) даёт диаграмму 8(45). Она в свою очередь продеформируется в 8(14), если стянуть индикаторы. Так как оба преобразования ручки делают с поперечными разрезами одно и то же, они принадлежат одному и тому же изотопическому классу.

Последний ряд показывает, что смена образующих ручки происходит так:

$$(x, y) \mapsto (-y, x),$$

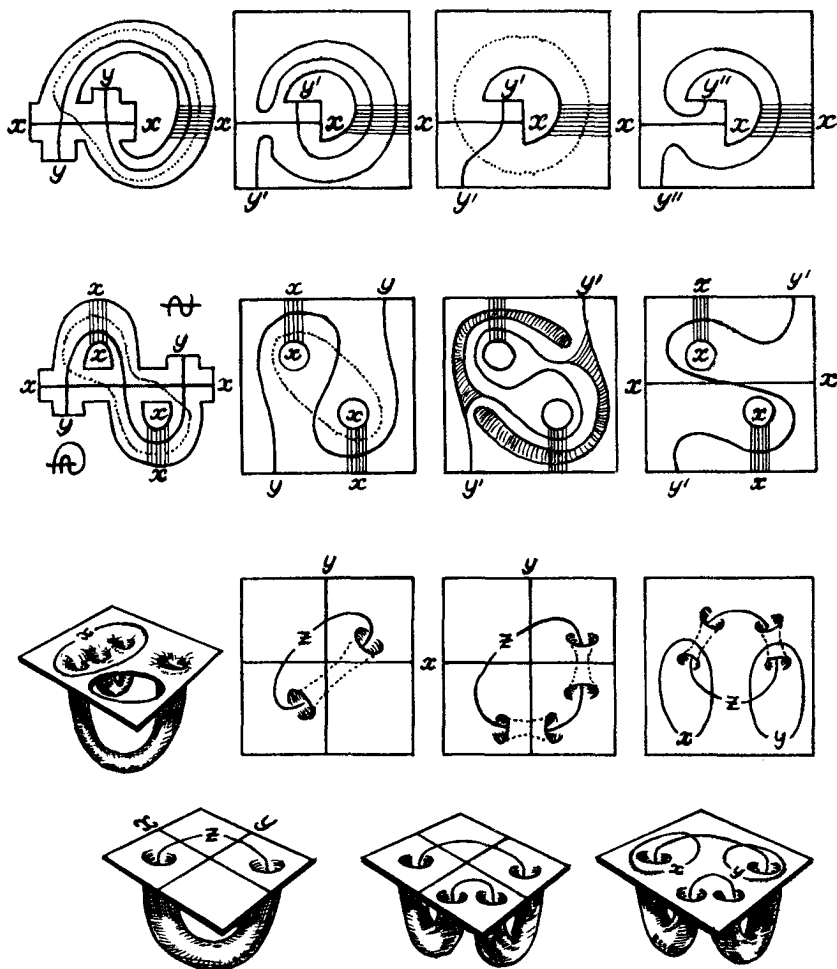
где $-y$ обозначает окружность с обращённой ориентацией. Фрагменты 8(51)–8(55) соответствуют стадиям 7(11), 7(31), 7(32), 7(22) и 7(12). После изотопии, переводящей окружность, помеченную на рис. 8(55) белой стрелкой, сквозь «туннель» на левую сторону, наложение диаграммы 8(55) на 8(51) определяет преобразование переворота ручки.

Скручивания Ликориша (картинка 9)

Смена образующих у ручек (переворот) на компактной поверхности F играет важную роль в доказательстве того, что группа классов преобразований поверхности F порождается некоторым фиксированным конечным набором скручиваний. Эта теорема была открыта Максом Деном [Dehn 1938] и переоткрыта У.Б. Реймондом Ликоришем [Lickorish 1964]. У Ликориша допускаются и неориентируемые (= односторонние) поверхности. Для группы классов преобразований он использует название *группа гомотопий*.

Чтобы доказать сформулированную выше теорему, Ликориш придумал несколько очень остроумных топологических конструкций. Они вошли составной частью в более компактное доказательство этой теоремы, начинающееся на стр. 168 книги [Birman 1977]. Для иллюстрации этих остроумных ходов достаточно установить более слабый вариант теоремы, утверждающий, что каждое преобразование поверхности F изотопно *некоторому* произведению скручиваний, без фиксации конкретного базиса, через который можно выразить каждое преобразование.

Пусть h – преобразование поверхности F , переводящее какую-то окружность x в окружность y . Предположим, мы доказали, что некоторая конечная композиция h' скручиваний превращает y обратно в x . Тогда композиция $h'h$ составляет окружность x неподвижной, и отвечающий этой композиции класс преобразований ассоциирован с определённым преобразованием поверхности F_x с краем, которая получается, если *продольно* разрезать F вдоль x . Если поверхность F_x связна, то она строго проще, чем F , и можно придумать индуктивное рассуждение, начинающееся с круга с дырами (иначе называемого проколотой сферой). Интересно, что указанное условие – то, что поверхность F не



Картинки 9. Скручивания Ликориша.

разбивается окружностью x (на две компоненты), — используется при самом поиске преобразования h' . Что касается ориентируемости поверхности F , то важно лишь, является данная окружность односторонней или двусторонней, т.е. является её ленточная окрестность в F (узкая полоска) лентой Мёбиуса или нет.

Наконец, если этот предмет вам внове, то будет не лишним напомнить, что скручивания вдоль изотопных окружностей принадлежат одному и тому же классу преобразований. Это позволит мне придавать

рисункам удобный вид. При описании действия гомеоморфизма на данной поверхности полезно представлять себе прозрачную гибкую копию поверхности, лежащую сверху на неподвижной копии. Исходная окружность x находится на неподвижной копии, а «рабочая» окружность y — на гибкой. Малая изотопия сдвинет y в общее положение относительно x , так что y будет в конечном числе точек пересекать окружность x , переходя с одной её стороны на другую. Имеются глобальные изотопии, сводящие число таких пересечений к минимуму, даже для целого набора окружностей, но для наших целей это не понадобится.

Предположим сначала, что окружность x — двусторонняя и y пересекает x только один раз. Тогда эта пара порождает ручку на F и переворот ручки переводит y в x . Трудные случаи — это когда x и y не пересекаются или когда y пересекает x два раза, и притом с разных сторон (представьте себе две окружности на плоскости). В остальных случаях y пересекает x некоторое конечное число раз, и вот способ перекрутить y в новую окружность y' , которая будет пересекать x меньшее число раз.

Допустим, что y пересекает x с одной и той же стороны в двух последовательных точках. Это значит, что у x есть дуга x^* , которую y пересекает только в её концах, хотя каждая из двух дуг y^* , на которые эти точки пересечения делят окружность y , может пересекать x и в других точках (рис. 9(11)). В результате скручивания ленточки, идущей вдоль окружности $x^* + y^*$, из y получается окружность y' , показанная на рис. 9(12). С помощью изотопии можно уменьшить число пересечений y' с x по крайней мере на единицу, а также устранить пересечения, происходящие вдалеке от дуги x^* (рис. 9(13)). Немного более элегантно — повторить скручивание (рис. 9(14)) и таким образом устранить пересечения в концах дуги x^* . В других местах пересечения останутся теми же, хотя их порядок на образе дуги y^* изменится на обратный.

Этим способом последовательные пересечения, происходящие с одной и той же стороны окружности x , можно попарно «скручивать» с y до тех пор, пока у не будет каждый новый раз пересекать x с другой стороны. Допустим, что имеются по крайней мере три таких пересечения, происходящие на концах и внутри некоторой дуги x^* окружности x (рис. 9(21)). Начиная от одного конца дуги x^* , дуга y^* окружности y делает зигзаг, ещё два раза пересекая x^* . В изображённом на рисунке случае x^* и y^* оканчиваются в одной и той же точке. Разобрать другой случай¹ я предоставляю вам. После того как найдена подходящая окружность скручивания (пунктир на рис. 9(21)), удобно перерисовать окрестность окружности $x^* + y^*$, как на рис. 9(22), с тем чтобы вычислить результат y' скручивания окружности y (рис. 9(23)). Изотопия переводит это в 9(24), и мы видим, что y' отличается от y только в окрестности окружности $x^* + y^*$ и что образ дуги y^* больше не пересекает дугу x^* в её концах.

¹ Показанный на рис. 9(21) в левом нижнем углу. — Прим. изд. ред.

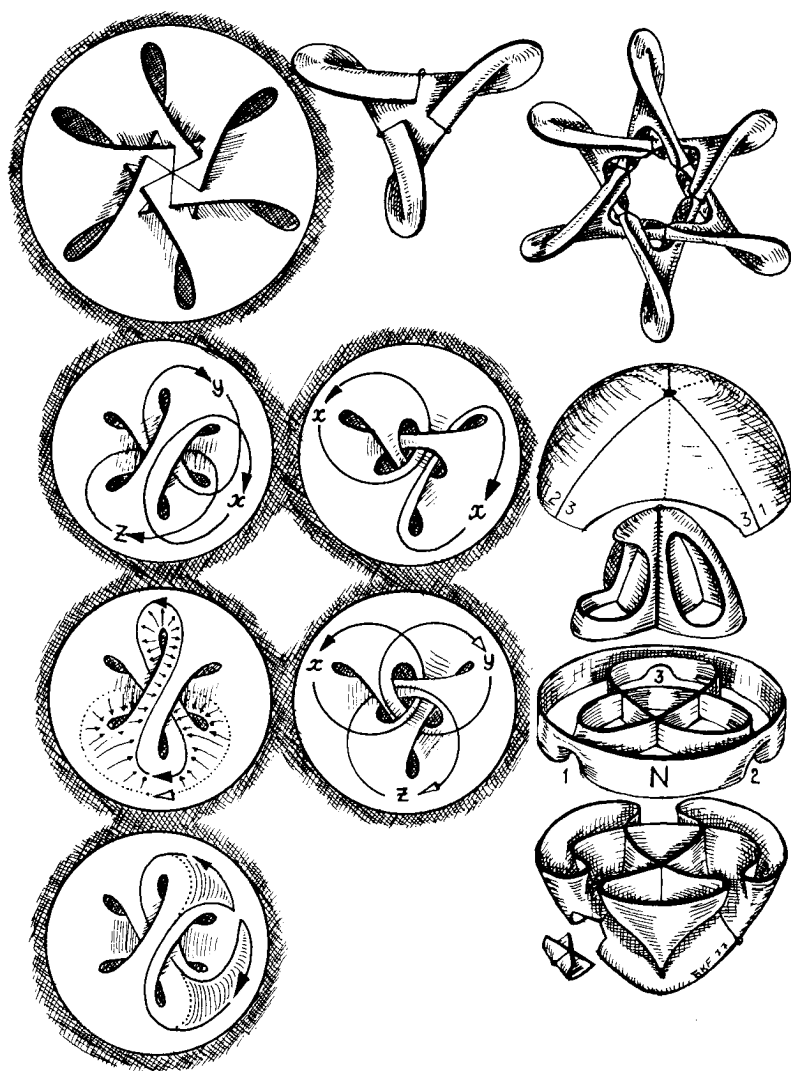
Итак, мы подошли к последним двум случаям, в которых u пересекает x либо дважды, и притом с разных сторон, либо ни разу, и с этим при помощи изотопии на F ничего поделать нельзя. Вот здесь-то и вступает в игру то свойство, что поверхность F не разбивается окружностью. Представьте себе следующую модель нашей поверхности. Плоский лист бумаги изображает сферу, снабжённую некоторым числом ручек и дыр. Они изображаются проделанными там и сям маленькими круглыми отверстиями («люками») и «подземными туннелями», попарно соединяющими некоторые из них (рис. 9(31)).

Допустим, что окружности x и y пересекаются дважды. Представим их осями, пересекающимися в начале координат и на бесконечности. Так как ни окружность x , ни её гомеоморфный образ y не могут разбивать F , то и обе вертикальные, и обе горизонтальные полуплоскости должны соединяться подземными переходами. Если это делается экономно, при помощи всего одного туннеля, как на рис. 9(32), то через этот туннель можно провести вспомогательную окружность z , которая наверху будет пересекать x и y только по одному разу. Теперь выполним два переворота – сменим y на z , а потом z на x – и вспомним, что перевороты являются композициями скручиваний. Если же нужны два туннеля (рис. 9(33)), то соответствующая вспомогательная окружность «лишний раз» выходит между ними на поверхность, но это делу не мешает.

Наконец, если x и y не пересекаются, то их можно представить на нашей модели в виде двух непересекающихся окружностей на листе бумаги, не отмечая пока входы в туннели (люки). Поскольку какой-то туннель обязательно соединяет участок, ограниченный x , с наружной по отношению к x частью плоскости, а какой-то туннель соединяет внешнюю и внутреннюю по отношению к y части плоскости, то, если это не один и тот же туннель, ситуация должна выглядеть, как на рис. 9(34). В любом случае найдётся вспомогательная окружность, при помощи которой можно «сменить» y на x .

Печать царя Соломона (картинка 10)

С общим и очень топологическим методом вычисления групп $M(p, q)$ классов преобразований поверхностей с p ручками и q дырами вы можете познакомиться, обратившись к статье Хэтчера и Тёрстона [Hatcher–Thurston 1980]. Предварительное, ещё более топологическое, изложение их подхода, данное А. Марэном [Marin 1977], и вдохновило меня на изобретение тех графических приёмов, которыми я пользуюсь в этой главе. Явные алгебраические задания групп $M(p, 0)$ и $M(p, 1)$ можно найти в статье [Wajnrib 1982]. По мере всё большей алгебраизации сегодняшних исследований в этой области рисунки всё более отходят на задний план и используются разве что только в педагогических целях. Поэтому давайте закончим этот рассказ о рисунках из теории групп тем, что ещё раз взглянем на группу $M(1, 0)$ классов преобразований обычного тора, её представление в виде $SL(2, \mathbb{Z})$ и некоторые из её более



Картинки 40. Печать царя Соломона.

геометрических заданий в виде абстрактной группы с двумя образующими.

Если вы выберете образующие для ручки, как на рис. 8 (51), то можно двумя способами слить эти две окружности в одну, «разорвав» пересечение. Подходящим образом (пере-)ориентированная, каждая из двух

полученных так кривых будет образом одной образующей при скручивании вдоль другой. Скручивание окружности вдоль неё самой, разумеется, оставляет её изотопной себе. Следующая табличка сводит вместе различные способы представлять себе одно и то же:

$$\left. \begin{array}{l} x = x^x \\ x + y = y^x \end{array} \right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = x^y \\ x = y^y \end{array} \right\} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы не наводить тень на плетень и не усложнять запись, я обозначаю образующую группы классов преобразований, соответствующее скручивание Дена и его окружность скручивания одной и той же буквой. Аддитивная запись в левой колонке (до первого знака равенства) относится к операции в свободной абелевой фундаментальной группе тора. Скручивание y вдоль x , т. е. результат применения x -скручивания к окружности y , записывается в виде y^x (вторая колонка). Для обозначения образа элемента при данном отображении я предпочитаю экспоненциальную запись, поскольку при ней сохраняется естественный порядок отображений в композиции. В правой колонке композиция в $M(1, 0)$ становится умножением матриц в $SL(2, \mathbb{Z})$ с сохранением порядка.

Позвольте мне показать вам, как работает эта алгебра в применении к преобразованию $r = xy$, которое я назову *проворотом*, поскольку оно демонстрирует наличие у тора вращательной симметрии шестого порядка. При проверке следующих топологических утверждений карандаш и бумага потребуются вам лишь при вычислении результата применения скручивания y к окружности $x + y$:

$$x^{xy} = x^y = x - y,$$

$$y^{xy} = (x + y)^y = x^y + y^y = x - y + y = x.$$

Эти соотношения обосновывают матричное представление проворота, которым открывается приводимая ниже табличка интересных тождеств. Матрицу переворота можно разложить на множители двумя способами, подтверждая соотношение Артина. В случае тора третья очевидная окружность, инвариантная относительно канонической инволюции, оказывается, изотопна первой. Как показывают изотопия $z = x$, соотношение Артина, закон ассоциативности и матричная алгебра, завиток оказывается одновременно квадратом смены осей, кубом проворота и квадратным корнем спиральки:

$$\begin{array}{l} \text{ПРОВОРОТ} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = xy = r; \\ \text{ПЕРЕВОРОТ} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = rx = xyx = \\ \quad \quad \quad = yxy = s; \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{ЗАВИТОК} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= xyz \cdot zyx = \\
&= \begin{cases} xyx \cdot yxy = s^2, \\ xyx \cdot yxy = xy \cdot xy \cdot xy = r^3; \end{cases} \\
\text{СПИРАЛЬКА} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= (xyz)^4 = \begin{cases} xyx \cdot xyx \cdot xyx \cdot xyx = s^4 \\ xyx \cdot yxy \cdot yxy \cdot yxy \\ = xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy = r^6 \\ = (xyx \cdot y)^3 = (st)^3. \end{cases}
\end{aligned}$$

В последней строке я обозначил буквой t скручивание вдоль y , хотя точно так же годилось бы и скручивание вдоль x . Эта табличка объясняет топологическую связь между следующими популярными заданиями группы $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\langle s, t | s^4 = s^2 t s^{-2} t^{-1} = (st)^3 = 1 \rangle,$$

$$\langle s, r | s^2 = r^3 = -1 \rangle,$$

$$\langle x, y | xyx = yxy, (xy)^3 = -1 \rangle.$$

Скручивание вдоль окружности, ограничивающей диск на поверхности, изотопно тождественному отображению. Вы можете убедиться в этом, представив поверхность в виде сферы с дырами и ручками (даже плёнками Мёбиуса) и скрутив её вдоль экватора. Плавнов повернув северное полушарие на один оборот относительно южного, вы аннулируете результат процедуры «режем-поворачиваем-клеим», выполняемой при скручивании. Вспомните, как Ликориш переводил всякую (двустороннюю) окружность, не разбивающую поверхность, в любую другую такую окружность при помощи композиции скручиваний. Таким образом, все скручивания сопряжены друг с другом. Следовательно, на торе они должны иметь вид¹

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ab & -b^2 \\ a^2 & 1 + ab \end{pmatrix}.$$

В частности, если преобразование есть скручивание вдоль некоторой окружности, то след отвечающей ему матрицы равен 2. Таким образом, предыдущая табличка показывает, что ни переворот, ни завиток, ни переворот не являются скручиваниями.

В начале этой главы вам уже встречались торические симметрии порядка 2 и 4, ассоциированные с завитком. Сейчас я опишу способ изобразить ещё и симметрию порядка 6, задаваемую проворотом, а также симметрию порядка 3, ассоциированную с его квадратом и занимающую столь заметное место в статье [Hatcher – Thurston 1980]. В

¹ Не забудьте, что $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. – Прим. перев.

основе картинки – превосходное (в смысле Уитни) отображение тора в сферу, складки которого образуют две трансверсальные дельтоиды, расположенные в виде *соломоновой печати* (см. стр. 191 статьи [Francis–Troyer 1977]).

Чтобы «накачать воздухом» этот образ тора T^2 на сфере S^2 , поступите так. Сцепите две сингулярные ленточки, как на рис. 10(13). У каждой из ленточек три точки пинча, контур в виде дельтоиды и одно окно. Как вы, конечно, помните, край окна затягивается вложенным диском, который полностью виден. На рис. 10(12) окно «закрыто». Два других края поверхности 10(13) стыкуются с поверхностью 10(11). Давайте я продеформирую её во вложенное кольцо с тремя мостами (рис. 10(21)). Эйлера характеристика такого кольца равна -3 . Следовательно, поверхность F , получающаяся в результате пришивания трёх дисков к поверхности 10(11), действительно представляет собой (сингулярный) тор в пространстве, и этот тор обладает вращательной симметрией порядка 6. Инвариантность поверхности F относительно поворота на 60° (скажем, по часовой стрелке) можно «увидеть» и на рис. 10(21) – надо просто после поворота сдвинуть мосты по вертикали при помощи регулярной гомотопии. Это преобразование циклически переставляет три очевидные окружности x, y, z , переводя y в x , x в z , а z в y .

Подходящая изотопия превращает окружность z в «восьмёрку» (рис. 10(31)), протаскивая её через один из дисков типа 10(12). Эта восьмёрка изотопна окружности, образующейся при слиянии окружностей x и y (рис. 10(41)). Следовательно, описанное преобразование является проворотом: $(x, y) \mapsto (y, x - y)$.

Новинкой в подходе Хэтчера и Тёрстона к вычислению $M(p, 0)$ было (в изложении Марэна [Marin 1980]) то, что для нахождения определяющих соотношений они использовали типичные деформации морсовских функций на T_p . В случае поверхности рода p на ней существуют такие p окружностей, что если разрезать по ним поверхность, то она превратится в сферу с $2p$ дырами. Зафиксируем такую *систему разрезов* S . Подгруппу H группы $M(p, 0)$, переставляющую окружности из S , можно вычислить в терминах расширений группы $M(0, 2p)$ классов преобразований проколотой сферы. Чтобы породить $M(p, 0)$, нужно добавить к H ещё одно преобразование – переворот ручки.

Рассмотрим *функцию высоты* на ручке для различных её положений, представленных на картинке 7. Горизонтальный индикаторный разрез остаётся горизонтальным – с точностью до изотопии – вплоть до момента 7(22). На рис. 7(32) он обходит дыру между ручкой и стенкой и уже не может остаться горизонтальным после того, как ручку повернули на 90° (рис. 7(12)). На рис. 7(22) две критические точки меняются высотами. Это лучше видно на рис. 8(54): горизонтальные острия астроида отвечают двум седловым точкам.

Следовательно, каждый раз, когда во время деформации функции высоты окружность разреза не может оставаться (изотопически) на

одном уровне, переворот некоторой ручки заменяет её на парную образующую этой ручки. Так типичные пути в пространстве морсовских функций переводятся в элементы группы классов преобразований. Очень важное определяющее соотношение проистекает из той ситуации, когда функция высоты имеет одновременно три седла на одном и том же уровне. Я изобразил регулярную окрестность N такого уровня в виде погружённого кольца 10(33) с тремя мостами и вращательной симметрией порядка 3. Представьте себе, что к кольцу N вдоль его круглого края прикреплена полусфера 10(23). Функции высоты, близкие к данной, в точности параметризуются движением своих максимумов вблизи северного полюса, отвечающим «шевелению» поверхности. Однопараметрические семейства таких функций описываются путями на полярной шапке. Когда функция «пересекает» один из трёх сплошных радиусов, два из трёх седел оказываются на одинаковой высоте. То же происходит и на пунктирных радиусах, но здесь это «несущественно» – не возникает необходимости выбора между конкурирующими окружностями разреза.

Заметим, кстати, что все три компонента края кольца N с тремя седлами горизонтальны, поэтому кольцо N можно замкнуть тремя шапочками, на каждой из которых будет ровно один экстремум функции высоты. Следовательно, согласно теории Мёбиуса – Морса, род полученной поверхности равен единице, т. е. эта замкнутая поверхность является тором¹. Конус над трилистником 10(23) представляет собой эквивариантный зонтик Уитни. Его можно рассматривать как тень графика $w^2 = z^3$. Нижняя шапочка 10(43) с тремя точками пинча «разворачивает» эту особенность.

Так как N имеет род, равный единице, то каждая из трёх очевидных окружностей x , y , z , проходящих через два из трёх седел, образует полную систему разрезов C на поверхности F (рис. 10(32)). Для того чтобы увидеть, что поворот поверхности N на 120° эквивалентен квадрату проворота, начните с того, что протащите окружность x через северную полусферу, как показано на рис. 10(22). Далее заметьте, что при указанном повороте x переходит в $-y$, а y – в $z = x - y$, как тому и следует быть.

Разумеется, в теории групп имеется ещё очень много того, что можно рассказать и нарисовать, и нельзя сделать всё это за один раз. Мой следующий и последний рассказ в картинках покажет вам, что основные соотношения в группе классов преобразований могут появляться в самых неожиданных местах.

¹ Напомним, что эйлерова характеристика замкнутой поверхности равна разности между числом экстремумов и числом седловых точек её функции Морса. – *Прим. перев.*

Узел «восьмёрка»

Мой последний рассказ в картинках – о визуализации того, как дополнение одного специального узла расслаивается над окружностью. Это упражнение для воображения состоит в том, чтобы заполнить пустоту пространства (замкнутого в трёхмерную сферу точкой на бесконечности) непрерывной последовательностью поверхностей, натянутых на один и тот же узел. Это значит, что через каждую точку, не лежащую на узле, проходит ровно одна «копия» некой поверхности, краем которой служит узел.

Интерес к этой задаче связан с великим проектом наделения неевклидовой (гиперболической) геометрией большинства трёхмерных многообразий, изложенным в обзорных статьях Билла Тёрстона [Thurston 1982] и Джона Милнора [Milnor 1982]. Дополнение узла «восьмёрка» играет важную роль в неопубликованной работе Тёрстона «Геометрия и топология трёхмерных многообразий». Для своего рассказа об этом узле я воспользовался двумя препринтными изданиями этой работы [Thurston 1977; 1982]. Важно понимать, что примеры из настоящей главы принадлежат к области топологии, уже обладающей высокоразвитой и эффективной системой «графической стенографии». В этой системе используются схематические диаграммы, очень лаконичные и зачастую непостижимые для начинающего. Поэтому иногда желательны узнаваемые рисунки знакомых объектов, искусно расположенных в пространстве в соответствии с абстрактными диаграммами. Это и будет здесь целью моих усилий.

В грандиозной схеме Тёрстона именно топология многообразия ограничивает и часто определяет его возможные геометрии. Ради простоты я сопровождаю свои рисунки лишь чисто топологическими комментариями. Но пару слов о той теории групп и геометрии, которые мною опущены, я всё-таки хочу здесь сказать. Главный способ получить геометрическое многообразие заключается в том, чтобы взять кусище геометрического пространства, имеющий форму многогранника, и попарно отождествить между собой некоторые его грани. Для того чтобы геометрия с разных сторон склеиваемых граней и рёбер была согласована, лучше всего предоставить проведение отождествлений некоторой группе изометрий объёмлющего пространства. В рассказе об угольнике Пенроузов роль исходного многогранника играл куб в евклидовом

пространстве, и в качестве изометрий выступали вращения и параллельные переносы.

В 1912 году Гизекинг отождествил грани идеального¹ тетраэдра в гиперболическом пространстве в соответствии с действием некоторой группы изометрий, включающей в себя изометрии, обращающие ориентацию (см. [Magnus 1974, стр. 153 и далее]). Найдя подходящее представление фундаментальной группы дополнения восьмёрки, Райли [Riley 1975] нашёл тем самым гиперболическое многообразие, гомеоморфное дополнению этого узла. Троэльс Йёргенсен [Jørgensen 1977], используя то, как дополнение этого узла расслаивается над окружностью, наделил его гиперболической структурой. Тёрстон показал, что оно также является (ориентируемым) двулиственным накрытием многообразия Гизекинга.

Путь, ведущий от дополнения узла к диаграмме склейки граней шестигранника, и обратный путь от диаграммы к дополнению не относятся непосредственно к рассказу о расслоении. Я включил их сюда, поскольку это очень выигрышный для начертательной топологии сюжет. Это верно и в отношении небольшого отступления о расслоении Хопфа в самом конце. Хопфовское разложение трёхмерной сферы в связку одномерных слоёв (зацепленных окружностей), расположенных в точности так же, как точки на двумерной сфере, привело к зейфертовой теории расслоений (с исключительными слоями) трёхмерных многообразий над поверхностями [Seifert 1933]. Эта теория даёт и полную классификацию трёхмерных многообразий с геометрией трёхмерной сферы.

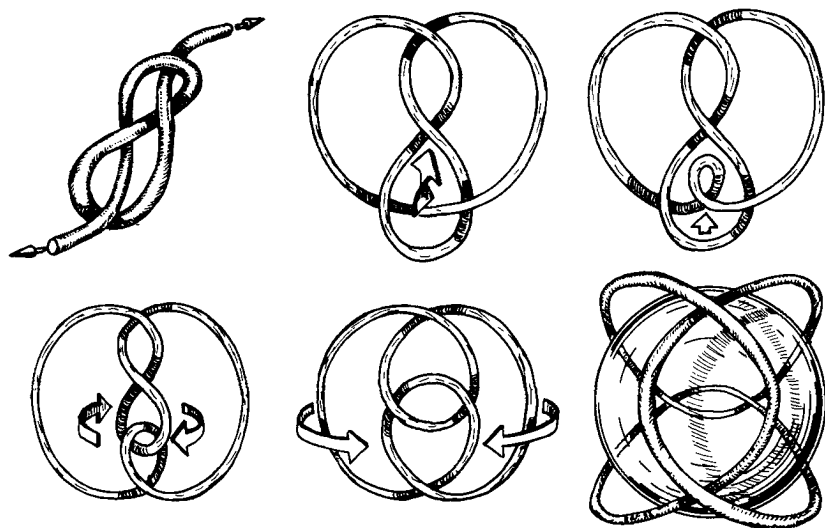
Различные проекции «восьмёрки» (картинка 1)

Как заметил в 1911 г. Тэйт, узел «восьмёрка», которым на флоте «пользуются только для закрепления канатов – он даёт крупную „блямбу“», является частью «топологии» с тех самых пор, когда Листинг [Listing 1947] придумал это название для геометрии положения. Сам Тэйт называл этот узел «четвёркой», поскольку это единственная простая замкнутая заузленная пространственная кривая, у которой существует проекция (на плоскость рисунка) с четырьмя чередующимися переходами и переходами².

Вот способ перейти от одного из плоских изображений восьмёрки (рис. 1(12)) к другому (рис. 1(22)). Скрутив на дуге узла, проходящей через нижнюю петлю восьмёрки на рис. 1(12), маленькую петельку, вы получите 1(13). Подтяните нижнюю петлю так, чтобы она «сцепилась» с этой маленькой (рис. 1(21)), и раскрутите её (рис. 1(22)). Чтобы

¹ То есть с вершинами на абсолюте – поверхности, представляющей бесконечно удалённые точки гиперболического пространства. – *Прим. перев.*

² И не существует с тремя. – *Прим. перев.*



Картинки 1. Проекция «восьмёрки».

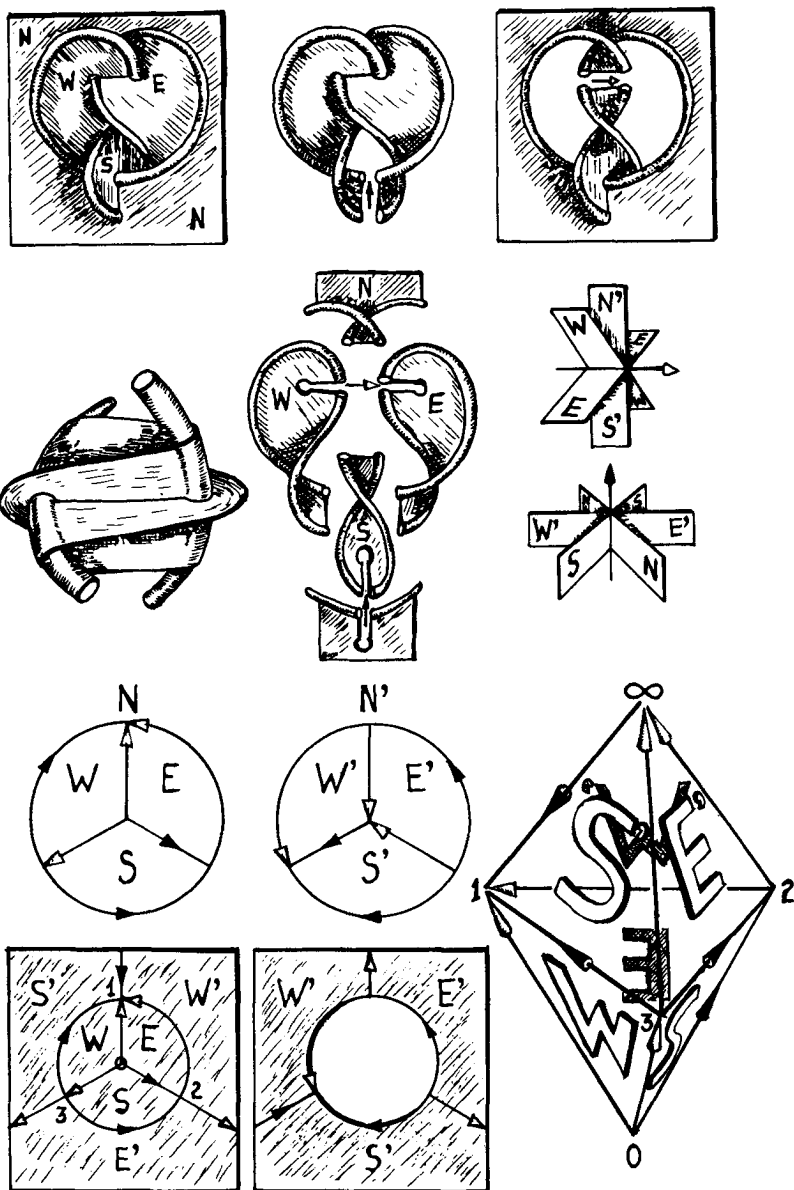
привести узел в наиболее симметричное положение в пространстве (рис. 1(23)), закиньте наружные дуги вперёд. Поворот на 90° в плоскости рисунка с последующим отражением относительно этой плоскости переводит узел 1(23) в себя — он является своим собственным «зеркальным образом». Инвариантность геометрических объектов при таком *зеркальном повороте* (нем.: Drehspiegelung) весьма полезна. Здесь она в конечном счёте сэкономит нам половину трудов по визуализации того, как дополнение восьмёрки расслаивается на зейфертовы поверхности.

Шестигранное дополнение «восьмёрки» (картинка 2)

Интересно посмотреть, как дополнение узла-восьмёрки в трёхмерной сфере представляется в виде результата склеивания граней двух тетраэдров, производимого некоторым специальным образом. Этот пример основан на процедуре, описанной в главе 1 препринта Тёрстона [Thurston 1977], только я применяю её к зейфертову классическому расположению узла 1(12) [Seifert 1934], а не к симметричному расположению 1(23).

Представьте себе, что узел погружается в тягучую жидкость, которая прилипает к нему и образует плёнку (рис. 2(11))¹. За пределами ближайшей окрестности узла эта плёнка, грубо говоря, совпадает с плоскостью рисунка. Плёнку на узле можно воссоздать следующим образом. Натя-

¹ Буквы *N*, *S*, *E*, *W* на этом и следующих рисунках обозначают страны света — north (север), south (юг), east (восток), west (запад). — Прим. перев.



Картинка 2. Шестигранное дополнение «восьмёрки».

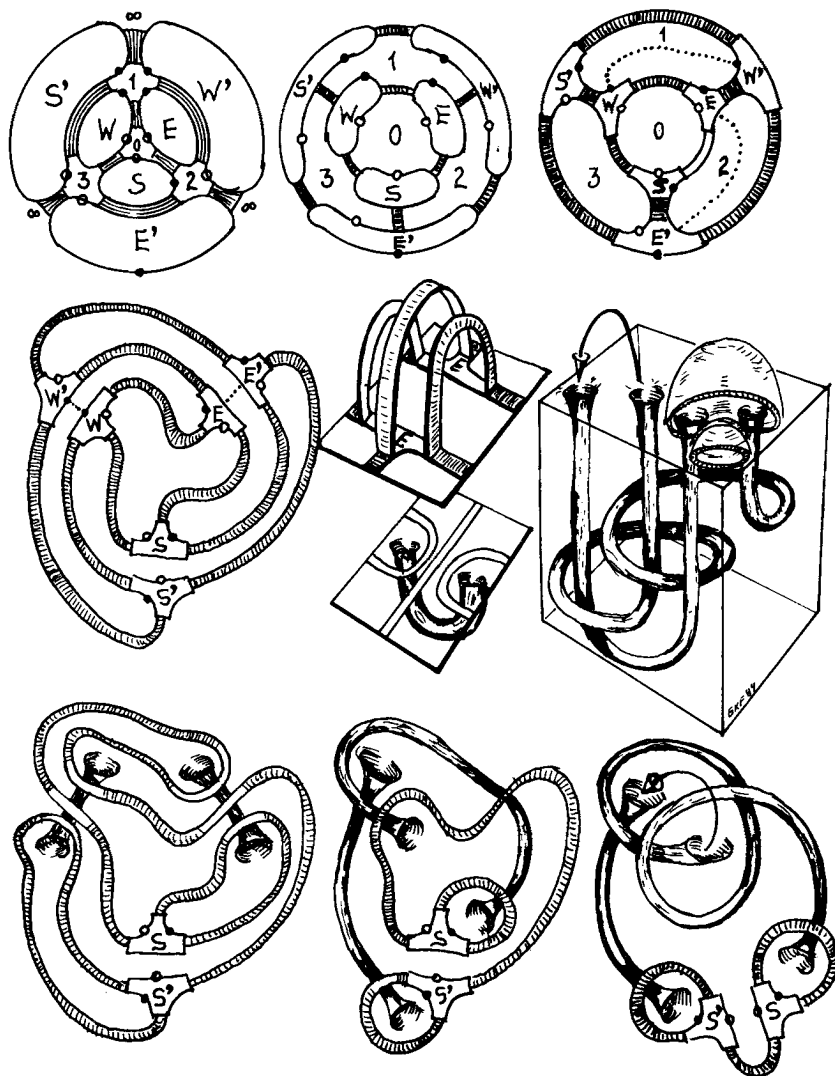
ните на узел перекрученный диск (рис. 2(12)), который «кусает сам себя» вдоль горизонтального двойного отрезка. На рисунке погружённый диск разрезан внизу по вертикальному диаметру на два вложенных диска с зацепленными краями. На тот же узел натягивается другой сингулярный диск, проходящий через бесконечность в S^3 . Он представляет собой образ первого диска при зеркальном повороте, соответствующем симметричному расположению 1(23). На рис. 2(13) я разрезал этот погружённый диск сверху горизонтальным диаметром. Эти два диска состыкуются, как показано на рис. 2(22), и образуют полную плёнку. При этом у вертикального и горизонтального швов сходятся по шесть листов поверхности. На рис. 2(21) изображён горизонтальный шов. Он ориентирован слева направо и помечен белой стрелкой. Вертикальный шов ориентирован снизу вверх и помечен чёрной стрелкой. В сечении плёнки плоскостью, трансверсальной шву, получаются три прямые, пересекающиеся в одной точке. Следовательно, у каждого шва сходятся три пары вертикальных двугранных углов (рис. 2(23) и 2(33)).

Теперь «распорите» швы, чтобы получилось четыре вложенных пятиугольных диска (рис. 2(22)). У каждого из этих дисков две смежные стороны образуют щель вдоль одного из швов, к ним примыкают отрезки узла, а пятая сторона примыкает к другому шву. Вам целиком видны западный, восточный и южный диски W , E и S . Северный диск N , проходящий через бесконечность, изображается двумя своими кусками, по одному у каждого шва. Так как каждый из дисков закручен на пол-оборота (два диска вправо, два – влево), то у каждого пятиугольника наблюдателю, т.е. вам, частично видны обе стороны.

Из рассмотрения двугранных углов на рис. 2(11) можно извлечь описание переднего тетраэдра 2(31). Полностью видимый двугранник у горизонтального шва «читается» как WE , а не EW , поскольку белая стрелка на рис. 2(32) указывает направо. Взгляните ещё раз на два «требных колеса» с белой и чёрной стрелками на этом рисунке. С них «считываются» двугранники SW и ES , ориентированные именно таким образом. Другой тетраэдр отвечает полупространству по ту сторону плёнки. С оборотной стороны плёнки, помеченной буквами с апострофами, можно считать описание 2(32) этого второго тетраэдра. Чтобы соединить тетраэдры по их северным граням, выверните схему склейки 2(32) дальнего тетраэдра в схему 2(42). Северная грань выброшена, на её месте осталась круглая дыра, в которую и встаёт передний тетраэдр 2(31). Это даёт нам абстрактную диаграмму склейки 2(41), которая реализуется в виде приведённого справа шестигранника.

Шестигранная диаграмма склейки (картинка 3)

Процедура перехода от дополнения узла к полиэдральной диаграмме склейки является обратимой. В третьей главе тёрстонова препринта 1982 г. приведён пример шестигранной диаграммы склейки, отличаю-



Картинка 3. Шестигранная диаграмма склейки.

щейся от вышеприведенной, которая даёт дополнение некоторой заузленной поверхности рода 2, обладающее вращательной симметрией порядка 3, – «треножник»¹ Тёрстона. Здесь я воспользуюсь поцедурой Тёрстона, чтобы восстановить дополнение восьмёрки по диаграмме склейки.

Диаграмма 3(11) представляет собой диаграмму 2(41) с рёбрами, расширенными до полосок, и вершинами, «расклёпанными» до многоугольных площадок. Вам надо представить себе, что вы смотрите вниз на верхнюю часть полупространства. Это полупространство есть трёхмерный шар, проходящий через бесконечность. В конце концов должны быть склеены три пары граней, с учётом ориентации, указанной белыми и чёрными кружочками. Чёрные кружочки соответствуют местам, куда «втыкаются», а белые кружочки – местам, откуда «вылетают» стрелы на шестиграннике 2(43). Далее, на диаграмме 2(41) указаны также два набора рёбер шестигранника 2(43), которые нужно отождествить. Они помечены пятью белыми стрелками и четырьмя чёрными.

На диаграмму 3(11) это переносится следующим образом. Приклейте к двум цилиндрическим стерженькам, представляющим в утолщённом виде два прямолинейных шва, торчащие наружу узкие полоски (полосатые прямоугольнички)². К белому стержню прикрепляется пять полосок, к чёрному – четыре. Теперь настал момент радикально изменить точку зрения. Всякий цилиндр является одновременно толстым диском! Сплющим наши два стержня в монеты. Соответствующим образом изменятся и полосатые полоски (рис. 3(12)). Затем сожмём грани в шестиугольные «тройники» (рис. 3(13)). Тройники соединяются поперечно заштрихованными *дорогами*, которые будут прикреплены к монетам. Две пары тройников WW' и EE' ориентированы согласованным образом (пунктирные линии), и их можно склеить. Приблизьте их друг к другу (рис. 3(21)), повернув наружный край («баранку руля») на 120° против часовой стрелки по отношению к центральной части 3(13).

На центральном фрагменте (рис. 3(22)) показано, как соединяются дороги после отождествления восточных тройников. Посмотрите, как склеивающую ручку, торчащую в «наше» пространство (верхняя часть фрагмента), можно протолкнуть вниз, образовав подземный ход, ведущий в «их» пространство (нижняя часть).

В целом 3(21) превращается в 3(31). Ориентация южных тройников не позволяет склеить их так, как мы склеили западные и восточные. Если бы вы всё-таки решили их склеить в этом положении и потом приклеили монеты, то получили бы треножник Тёрстона. Чтобы подготовить южные тройники к склейке, деформируйте дороги и вытяните подземные трубки вслед за их «люками». Сначала вы получите 3(32), затем 3(33). На этом последнем шаге петля дороги у тройника S при стягивании дороги, соединяющей S и S' , тащит за собой туннель. При этом он два раза

¹ В оригинале на латыни – *tripus*. – Прим. изд. ред.

² К ним приклеиваются грани. – Прим. изд. ред.

проходит сам над собой. Сейчас, когда южные тройники на рис. 3(33) расположены так, что их можно склеивать, вы сами сможете нарисовать окончательную карту дорог.

А теперь поместим всё это трёхмерное образование в конечную часть пространства. На рис. 3(23) изображён соответствующий блок, проводка труб в котором видна нам снаружи. Две выгнутые пузырям монеты прикреплены к двум круговым дорогам, оставшимся после приклеивания ручки к 3(33). Большой пузырь (со вмятиной) обеспечивает соединение трубок в единый узел. Графическое упражнение по проверке того, что 3(23) действительно представляет собой дополнение восьмёрки, я предоставляю вам¹.

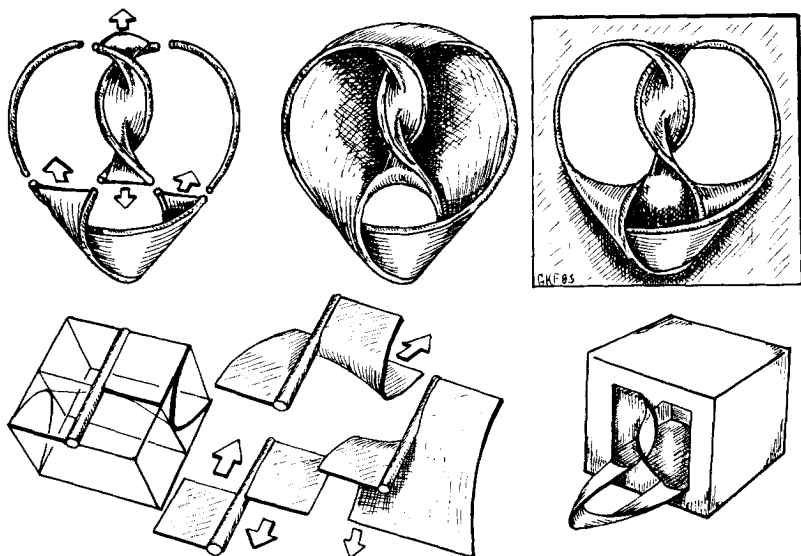
Натягивание на «восьмёрку» поверхности Зейферта (картинка 4)

Увидеть, как поверхность могла бы натягиваться на узел, нарисованный каким-то определённым образом, иногда довольно трудно. По этой причине разумно будет поэкспериментировать с различными другими положениями узла. Положение 1(12) – не самое удобное, но оно позволяет проиллюстрировать простой подход к натягиванию на узел плёнки. Для этого имеется систематическая процедура, принадлежащая Г. Зейферту [Seifert 1934] и основанная на комбинаторной структуре проекции узла, но здесь она нам не понадобится. Немного попрактиковавшись, вы можете научиться «видеть» скрученные ленточки и более или менее выпуклые площадки, частично затягивающие узел. Трудность состоит в том, чтобы увидеть, как эти площадки могли бы состыковаться друг с другом.

На рис. 4(11) две ленточки, каждая из которых перекручена на один полный оборот, вступили в конфликт. Они прикрепились к узлу с «противоположных» сторон. Два способа, позволяющие урегулировать этот конфликт локально, показаны на рис. 4(22). Линейный каркас для левой части этого рисунка приведён на рис. 4(21). Глобально конфликт разрешается на рис. 4(12), где нижняя ленточка, продолжаясь, образует полусферическую оболочку. Тем самым верхняя ленточка становится ручкой или ремешком получившейся «сумки», и мы приходим к классическому изображению, впервые приведённому на стр. 584 статьи [Seifert 1934]. Чтобы получить другой вариант (рис. 4(13)), продолжите верхнюю ленточку на рис. 4(11) до плоской площадки, выходящей за пределы нарисованной квадратной рамки и уходящей на бесконечность. Нижний ремешок свисает вниз с этой «стенки».

Скрученные ремешки на рис. 4(11) можно соединить и по-другому – так, чтобы «сумка» на рис. 4(12) находилась перед верхним ремешком или же квадратная площадка на рис. 4(13) – перед нижним. Этим опреде-

¹ На рис. 3 (23) отсутствует третья трубка, ведущая из-под маленького пузыря наружу; её можно безболезненно удалить вместе с этим пузырём. – *Прим. перев.*



Картинка 4. Натягивание на «восьмёрку» поверхности Зейферта.

лены четыре поверхности, затягивающие узел. Эти поверхности можно описать с помощью рис. 4(23), представляющего собой стилизацию рис. 4(12) в духе кубизма. Чтобы получить рис. 4(13), надо нарисовать ящик спереди. Чтобы получить альтернативный вариант рисунка 4(12), нарисуйте горизонтальный ремешок внутри ящика, а альтернативный вариант рисунка 4(13) получается, если нарисовать ящик спереди.

Легко представить себе изотопию сферы S^3 , переводящую 4(13) в 4(12). Отодвиньте бесконечную плоскую площадку на рис. 4(13) назад, на бесконечность. Вы можете представить себе огромную сферическую оболочку, расположенную за плоскостью рисунка, с квадратным отверстием, в которое как раз помещается квадрат 4(13). Сожмите её до полусферы, изображённой на рис. 4(12). Если вы уже можете представить себе изотопию поверхности 4(12), переводящую «мостик» за полусферу, и аналогичную изотопию, ведущую к четвёртому варианту поверхности и обратно к 4(13), то вы уже предвидите конец этой истории. Напомню, что при движении не должно происходить разрывов и самопересечений поверхности и что никакие две поверхности, участвующие в изотопии, не должны иметь общих внутренних точек. Краем, разумеется, всё время является наш узел K . При этом поверхность Зейферта поворачивается вокруг K , не скользя вдоль него, — как страница в перекидном календаре, а не в блокноте на пружинке.

Шесть поверхностей Хакена (картинка 5)

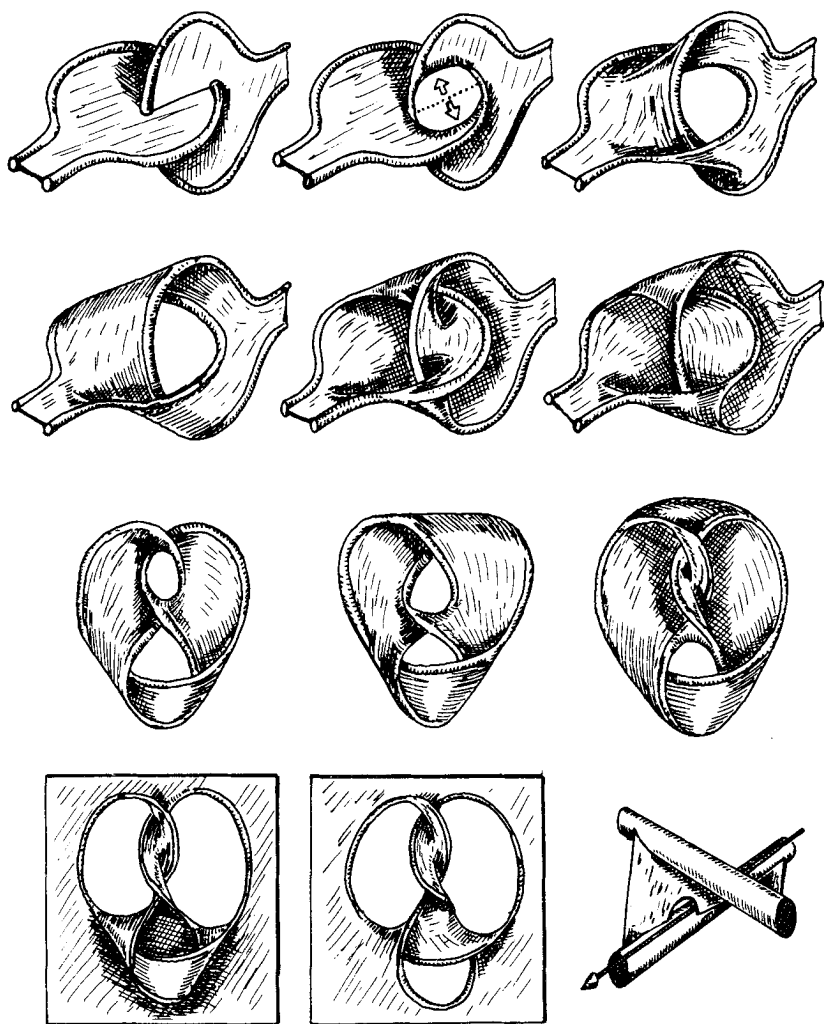
Поверхность F в трёхмерном многообразии M с краем ∂M называется *несжимаемой и гранично-несжимаемой* в M , если её нельзя упростить, перекрыв в ней трубку¹, наподобие того как тор в трёхмерном пространстве упрощается до сферы путём вклейки меридионального диска (или диска, край которого – параллель, обходящая дырку). В знак признания большого вклада, внесённого Вольфгангом Хакеном в теорию трёхмерных многообразий, в которой такие поверхности играют важную роль, их неудобнопроизносимое название следовало бы сократить до *поверхностей Хакена*. Техническое определение состоит в том, что как включение края в край $\partial F \rightarrow \partial M$, так и включение внутренности $F - \partial F \rightarrow M - \partial M$ индуцируют мономорфизмы соответствующих фундаментальных групп. Для тополога-специалиста это означает, что всякая петля в F , которую можно затянуть диском в M , ограничивает диск уже и на самой поверхности F .

В четвёртой главе тёрстонова препринта 1977 года показано, что в дополнении восьмёрки имеется ровно шесть различных поверхностей Хакена. Сейчас я опишу способ получить их из нашей исходной плёнки, затягивающей этот узел. В этом способе используется процедура распарывания шва, с описания которой я и начну. Возьмите кусок проволоки и согните в плоскую окружность, но не до конца, а отогните концы наружу, как пару рельсов. Натяните на эту «лиру» диск, у которого будет свободный отрезок края и который можно между рельсами продолжить лентой. Сцепите две такие лиры, горизонтальную и вертикальную (рис. 5(11)), так, чтобы их оси совпадали. Два диска будут пересекаться друг с другом вдоль двойного отрезка (шва) на этой оси.

Существуют два способа сделать вдоль этого шва разрез и получить вложенное кольцо, край которого состоит из наших зацепленных лир. На рис. 5(12) разрезан видимый на рис. 5(11) двугранный угол, ребром которого служит шов. Поверхность сжимается до 5(13), а затем – до поверхности 5(21), которая может быть нарисована без сборок и обладает исходной симметрией: она переходит в себя при зеркальном повороте вокруг оси лир. Заметьте, что ленточка, идущая от одного свободного конца к другому, по пути распадается на две ленточки, каждая из которых закручена влево, а потом они снова сливаются в одну.

Если вы разрежете шов другим способом – вдоль невидимого двугранника, – то по соображениям симметрии эти две ленточки будут закручены вправо. Фокус в том, чтобы нарисовать такую поверхность, не меняя положения проволочных контуров (рис. 5(22)). Можно представлять себе, что эта поверхность получается, если, продолжая ленту с «колеи», пропустить её через обе лиры, повернув при этом на четверть

¹ Перегородкой, лежащей в $M - F$. – Прим. изд. ред.



Картинки 5. Шесть поверхностей Хакена.

оборота вправо, а затем соединить противоположные «берега» короткой лентой, перекрученной (вправо) на один оборот (рис. 5(23)).

Теперь затяните восьмёрку кусающим себя диском 2(12) и распорите шов по видимому двугранному углу (рис. 5(31)). Если вы немного «выпрямите» эту поверхность, то заметите на ней две ленты Мёбиуса, характерные для *проколотой бутылки Клейна*. Если распорить шов

другим способом (рис. 5(33)), то получится уже изученный вами проколотый тор (рис. 4(12)). Если мы двумя способами распорем шов на поверхности 2(13), то снова получим ориентируемую (рис. 5(41)) и неориентируемую (рис. 5(42)) поверхности рода один. Сравните 5(41) с поверхностью Зейферта 4(13), и вы согласитесь, что два эти «дырявых» тора одинаковы (изотопически). Но «дырявые» бутылки Клейна 5(31) и 5(42) отличаются друг от друга.

Чтобы увидеть, что эти две поверхности не изотопны в S^3 , сравните закручивания кривых, вдоль которых они прикрепляются к (утолщённому) узлу (рис. 5(43)). Вы легко поймёте, в какую сторону закручивается такая кривая, проследив за тем, как *контрольная кривая*, идущая вдоль видимой вам части трубки узла, протыкает поверхность. На рис. 5(43), изображающем самый северный переход на рис. 5(31), направление указанной выше кривой соответствует тому, как правши пишут цифру 8. Поверхность закручивается вправо. На рисунке же 5(42) аналогичный фрагмент поверхности (нарисуйте его!) закручивается в другую сторону. Проверьте, что то же самое имеет место для каждого перехода. Предполагаемая изотопия между двумя поверхностями должна была бы, разумеется, сохранить направление закручивания таких кривых.

Итак, вот шесть обещанных поверхностей Хакена в дополнении узла-восьмёрки. Первая (и единственная замкнутая из них) — это торическая оболочка трубки узла. Утолтив каждую из дырявых бутылок Клейна (вторая и третья поверхности) и сняв с них «шкурку», мы получим два дырявых тора (четвёртая и пятая). Они отличаются от поверхности Зейферта, поскольку обходят узел дважды. Шестой является поверхность Зейферта. Рассказом о ней я и продолжу.

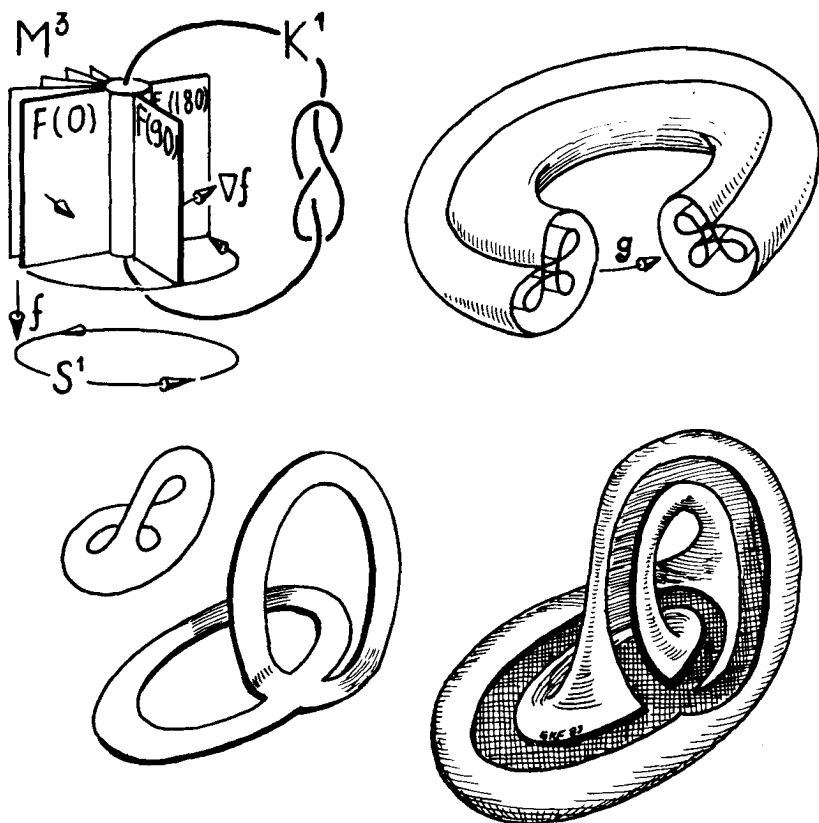
Наглядно-символическое изображение расслоения (картинка 6)

Расслоение дополнения $M = S^3 - K$ нашего узла над окружностью на зейфертовы поверхности можно описать при помощи гладкого отображения $f: M \rightarrow S^1$ многообразия M на единичную окружность, у которого дифференциал всюду имеет максимальный ранг (равный 1) и которое «хорошо ведёт себя» при подходе к узлу. Это определение наглядно-символически представлено на рис. 6(11). С помощью небольшой порции дифференциальной топологии эту по существу статическую структуру на S^3 можно преобразовать в движущуюся поверхность, привязанную к узлу, как парус к мачте.

Ориентируем окружность, на которой принимает свои значения f , и параметризует её углами от 0 до 360° (для удобства записи). Из теоремы о неявной функции следует, что прообраз

$$F(t) = \{p \in M : f(p) = t\}$$

при каждом t представляет собой правильно вложенное двустороннее



Картинка 6. Наглядно-символическое изображение расслоения.

двумерное подмногообразие многообразия M . Поверхности $F(t)$ ориентированы векторным полем $\text{grad } f$, которое к ним всюду перпендикулярно. Выберите одну из этих поверхностей, $F = F(0)$, в качестве исходной и интегрируйте вдоль $\text{grad } f$. Получится поток на M , перемещающий F через последовательность положений $F(t)$, последнее из которых совпадает с исходным. Другими словами, решите для каждой точки p в F задачу Коши

$$\frac{dp}{dt} = \text{grad } f(p(t)), \quad p(0) = p.$$

Несмотря на то что $F(360) = F(0)$, нет причин ожидать, что траектории потока замкнутся после одного обхода: вообще говоря, $p(360) \neq p(0)$. Более подробные сведения о заузленности замкнутых траекторий

поля $\text{grad} f$ вы можете найти в статье [Birman – Williams 1983]. *Отображение первого возвращения* g , переводящее каждую точку в ту точку, куда она приходит, завершив первый полный оборот:

$$g : F \rightarrow F, \quad g(p(0)) = p(360)$$

(его называют *монодромией* расслоения), является диффеоморфизмом поверхности F на себя, или, короче, её *автоморфизмом*. Это пример отображения Пуанкаре для динамической системы. Многообразие M можно восстановить по монодромии, если отождествить верхнее и нижнее основания цилиндра $F \times [0, 360]$, положив $(p, 0) = (g(p), 360)$. Возможная наглядно-символическая картинка для такого *тора преобразования* $M(g)$, отвечающего автоморфизму $g : F \rightarrow F$, – это что-то вроде рис. 6(12). Поперечные сечения тора $M(g)$ похожи на условное изображение поверхности Зейферта, приведённое на рис. 6(12). Это два кольца, соединённые по квадратику (рис. 6(22)). Из такой ленточной окрестности двух окружностей можно, соединив её с диском 6(23), сделать целый тор. Следовательно, F представляет собой топологический тор, из которого удалён диск. Разница между 6(22) и другими нарисованными мной вариантами поверхности Зейферта состоит в закрученности ленточек. Закрученность есть свойство расположения поверхности в пространстве, а не поверхности как абстрактного многообразия.

Даже если монодромия не является тождественным отображением поверхности F , остаётся возможность, что она изотопна ему. Это значит, что найдётся гладкое отображение

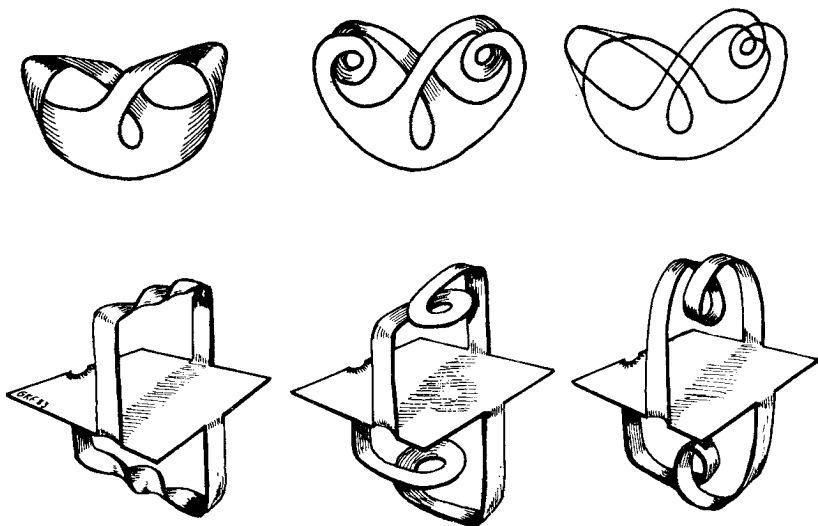
$$h : F \times [0, 1] \rightarrow F, \quad h(p, 0) = p, \quad h(p, 1) = g(p),$$

для которого каждое сужение $h|F \times \{t\}$ – диффеоморфизм. В таком случае расслоение называют *тривиальным*, поскольку $M(g)$ попросту диффеоморфно $F \times S^1$. Как мы увидим, здесь это не так. Изотопический класс преобразования g относится в тёрстоновской классификации автоморфизмов поверхностей [Thurston 1976] к *псевдоаносовскому* типу. Это важно, поскольку, как доказал Йёргенсен [Jørgensen 1977], тор преобразования может быть наделен гиперболической геометрией в том и только в том случае, когда монодромия является псевдоаносовской¹.

Сова и киска (картинка 7)

Вот ещё несколько рисунков поверхности F , основанных на её определении как диска, к краю которого приклеены две ленточки, закрученные в разные стороны. Когда «тополог резинового листа» перекручивает ленточки, эквивалентными оказываются самые неожиданные фигуры. Сова 7(12) получается из киски 7(11) при помощи *преобразования Зейферта* (см. рис. 7 в статье [Seifert 1934], заменяющего *перекрученные ленточки* (рис. 7(21)) на *извивающиеся* (рис. 7(22)) или *свернувшиеся* (рис.

¹ Йёргенсен доказал это для проколотых торов. Общий случай рассмотрел Тёрстон (не опубликовано). – *Прим. ред.*



Картинка 7. Сова и киска.

7(23)). Как вспомнить их линейные каркасы, взглянув на рис. 6(21), показано на рис. 7(13). Более полезным, хотя и менее забавным, является «кубистическое» расположение 7(21), с упрощённой формой которого мы будем иметь дело до конца главы.

Важность для топологии поверхностей таких метаморфоз с рисунками, как преобразование Зейферта, служит оправданием следующего небольшого отступления. Сверните бумажную полоску в виде ленточек на рис. 7(23) и натяните её — она перекрутится, как на рис. 7(21). Ленточка, перпендикулярная к осевой линии витков 7 (23), будет извиваться, как на рис. 7(22), но параллельно вертикальной плоскости. В статье [Baueer – Crick – White 1980], где обнаруживаются естественные проявления этого феномена в молекулярной биологии, Джим Уайт объясняет его дифференциальную геометрию. Обратите внимание на то, как выражается на рисунке левосторонность или правосторонность перекрученной, извивающейся и свернувшейся ленточек. Что остаётся инвариантным при изотопии замкнутой ленточки в пространстве, так это *коэффициент зацепления* двух её краёв. Количество видимых перекручиваний¹ ленточки может не совпадать с этим целым числом; их разность называется *индексом извивания* ленточки. Индексы перекручивания и извивания являются вещественными, не обязательно целыми числами, связанными с геометрией конкретного расположения ленточки в пространстве (см. [White 1969]). Для случая когда замкнутая ленточка

¹ Алгебраическое, т.е. с учётом знака. — Прим. перев.

на рисунке находится в общем положении, у Лу Кауффмана [Kauffman 1985, exercise 2.7] описан удобный способ подсчёта числа перекручиваний и витков прямо на рисунке. Первое целое число – это число «чистых» перекручиваний; при его подсчёте мы просто движемся вдоль ленточки, не обращая внимания на те места, где её изображение пересекает само себя. Второе целое число равно разности между количеством проходов ленточки над собой слева направо и справа налево (при этом всё равно, в каком из двух направлений двигаться по ленточке). Сумма этих чисел и даёт коэффициент зацепления краёв ленты.

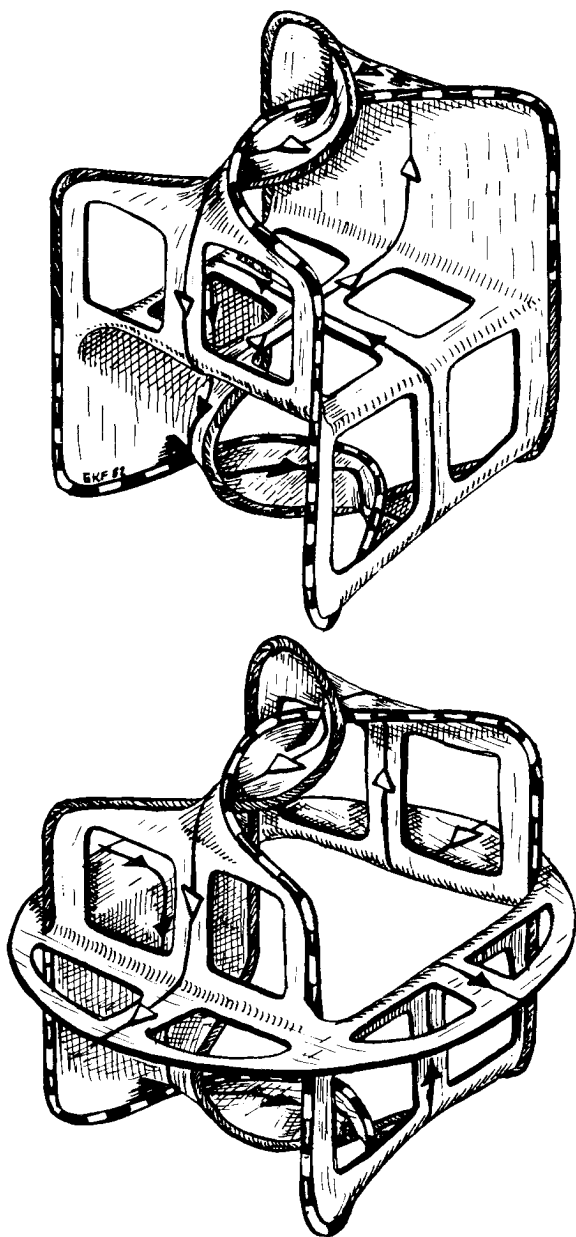
Изотопные поверхности Зейферта (картинка 8)

Из всех расположений узла K и исходной натянутой на него поверхности Зейферта F самым «поворотливым» будет, пожалуй, $7(21)$, если, устранив посторонние изгибы у K и расширив «мостики», придать ему вид $8(11)$. Чтобы помочь глазу, я изобразил часть узла полосагой. Восемь окон в F показывают невидимые иначе детали. (Напомню, что окно – это прозрачный участок поверхности, проекция которого на плоскость рисунка является топологическим диском.) Поверхность размечена двумя «окружностями», пересекающимися на горизонтальном квадратном полу и проходящими по мостикам в направлении на зрителя, как показывают белые и чёрные стрелки.

Это – положение $F(0)$. Положение $F(180)$ показано внизу (рис. 8(21)). Здесь горизонтальный пол простирается наружу от прямоугольного каркаса. Образующие окружности поверхности $F(180)$ пересекаются в центре «окна» в этом полу, проходящего через бесконечность. Эти две простые замкнутые ориентированные кривые на поверхности Зейферта (торе с дыркой), пересекающиеся в одной точке, называются *образующими* для F , поскольку они позволяют описывать гомеоморфизмы на F однозначно с точностью до изотопии. Другими словами, мне достаточно сказать вам, куда переходят образующие при преобразовании, чтобы задать его изотопический класс.

Чтобы увидеть переход $F(0)$ к $F(180)$, представьте себе, что пол поверхности $F(0)$ при возрастании t движется вверх подобно лифту. Когда пол, поднимаясь, проходит мимо какой-то точки на узле, поверхность в окрестности этой точки поворачивается на 90° . Чтобы убедиться, что поверхность поворачивается одинаково вдоль всего узла, ориентируйте узел, скажем так, чтобы самая ближняя к вам полосатая часть узла была направлена вниз (тогда сзади полосатая часть будет направлена вверх). Вы не должны забывать, что поверхность как-то движется и во всех остальных местах, но очень медленно, и рисунок не меняется настолько, чтобы его стоило перерисовывать. Скоро, однако, покажется (при $t = 80$), что лифт застрянет под белым мостиком¹.

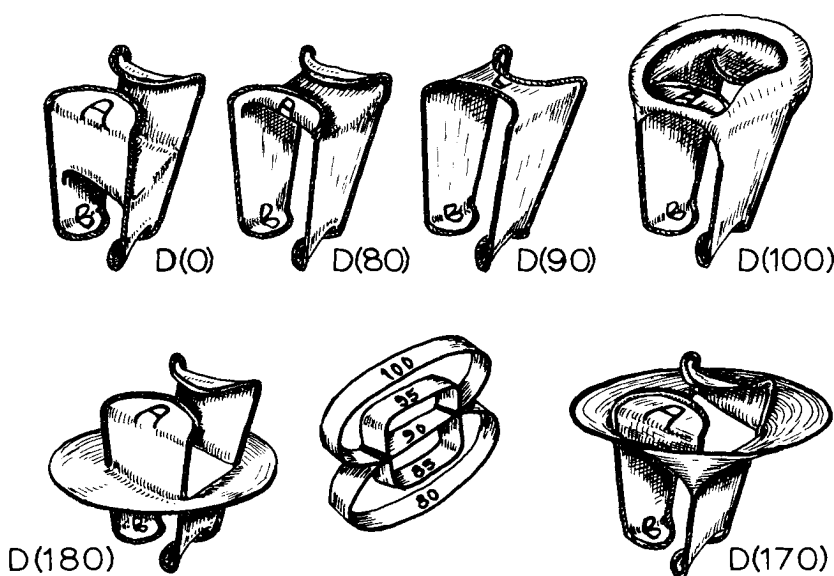
¹ То есть мостиком с белой стрелкой. – Прим. изд. ред.



Картинка 8. Изотопные поверхности Зейферта.

Тривиальное расслоение (картинка 9)

Поскольку прохождение «сквозь» мост является самой трудной частью нашего визуального упражнения, давайте посмотрим, что бы получилось, если бы мостов не было. На этой картинке показаны соответствующие положения диска D , край которого — незаузленная кривая C , похожая на интересующий нас узел с картинки 8. В положении $D(90)$ диск почти минимизирует площадь натянутой на C поверхности. Дальше он пузырём вздувается вверх в положение $D(100)$. Заметьте, что в промежутке $80 < t < 100$ участок A поверхности совершает почти полный оборот вокруг узла, а участок B в это время остается почти неподвижным. Это «почти» очень важно, поскольку никакие два $D(t)$ не должны пересекаться друг с другом. Пузырь растёт и к положению $D(170)$ охватывает уже почти всё верхнее полупространство. Воздушный шар лопаётся в положении $D(180)$, когда диск проходит через бесконечность. Чтобы представить себе завершение этого обхода ($180 < t < 360$), отразите все положения в горизонтальном зеркале и поверните их на 90° , а затем повторяйте шаги в обратном порядке, пока не получите положение $D(360)$, совпадающее с $D(0)$. Этой деформацией задаётся расслоение над окружностью на диски дополнения в S^3 незаузленной замкнутой кривой C .



Картинка 9. Тривиальное расслоение.

Крендельная восьмёрка (картинка 10)

Прежде чем остановиться на приведённом выше расположении восьмёрки и натянутой на нее поверхности Зейферта, я рассмотрел много других вариантов. Вот довольно привлекательный вариант, «укладывающийся» на кренделе. Уложить его на поверхности стандартного тора никак нельзя. Если бы это было возможно, то и не было бы никакого рассказа, поскольку имеется непосредственный способ изображать расслоения дополнений торических узлов в S^3 . Подробное и живописное исследование этого предмета вы найдёте в книге [Rolfsen 1976].

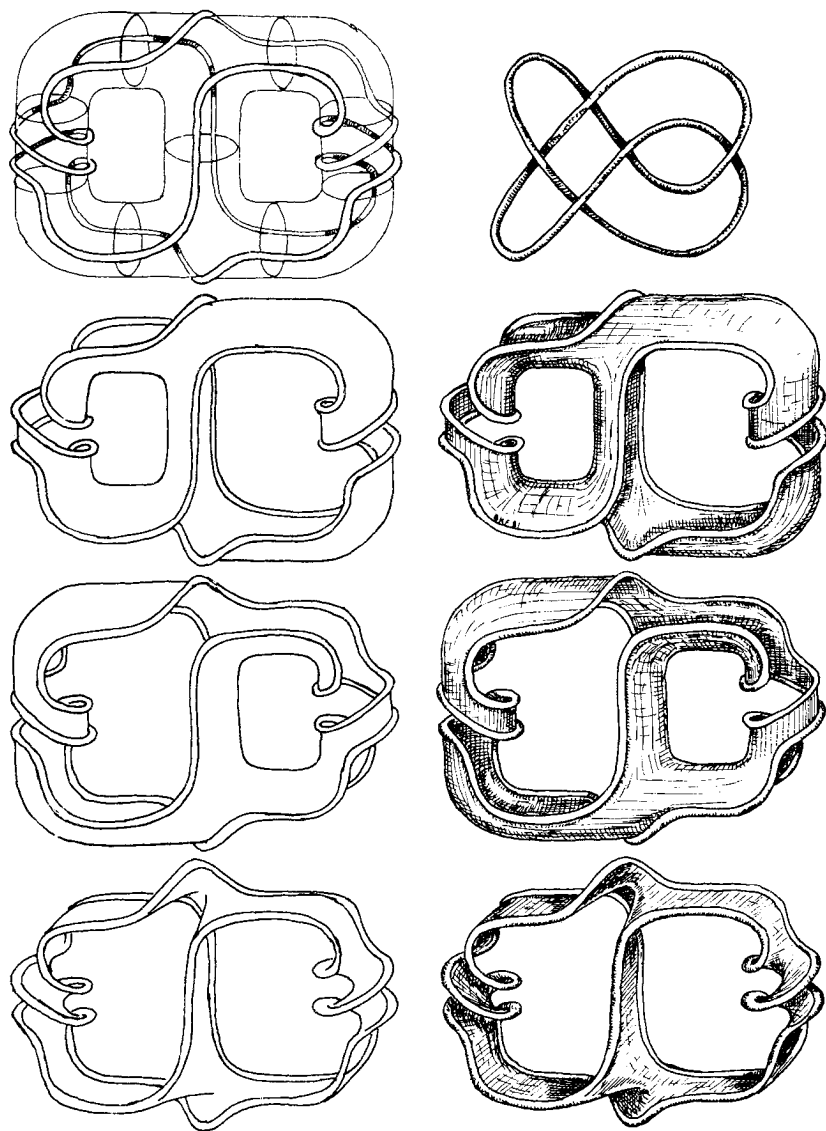
В действительности наш узел разлагает крендель – «двойной» тор – в нетривиальную связную сумму двух «простых» торов. Как расположить восьмёрку на кренделе, показано на рис. 10(11). Одновременно этот рисунок является линейным каркасом ещё для двух рисунков, 10(21) и 10(31); на то что от одного из них можно непрерывно перейти к другому, проводя поверхность через внутреннюю часть кренделя, намекает рис. 10(41), изображающий одну из промежуточных поверхностей. Таким образом, нетрудно «увидеть» ту половину расслоения, которая находится внутри кренделя. Но S^3 разлагается в объединение двух таких тел с ручками. Поэтому на другую половину можно «махнуть рукой». Пустое место вверху¹ предназначено для изображения того, как поверхность проходит через бесконечность. Это упражнение я предоставляю вам.

Тетраэдральная восьмёрка I (картинка 11)

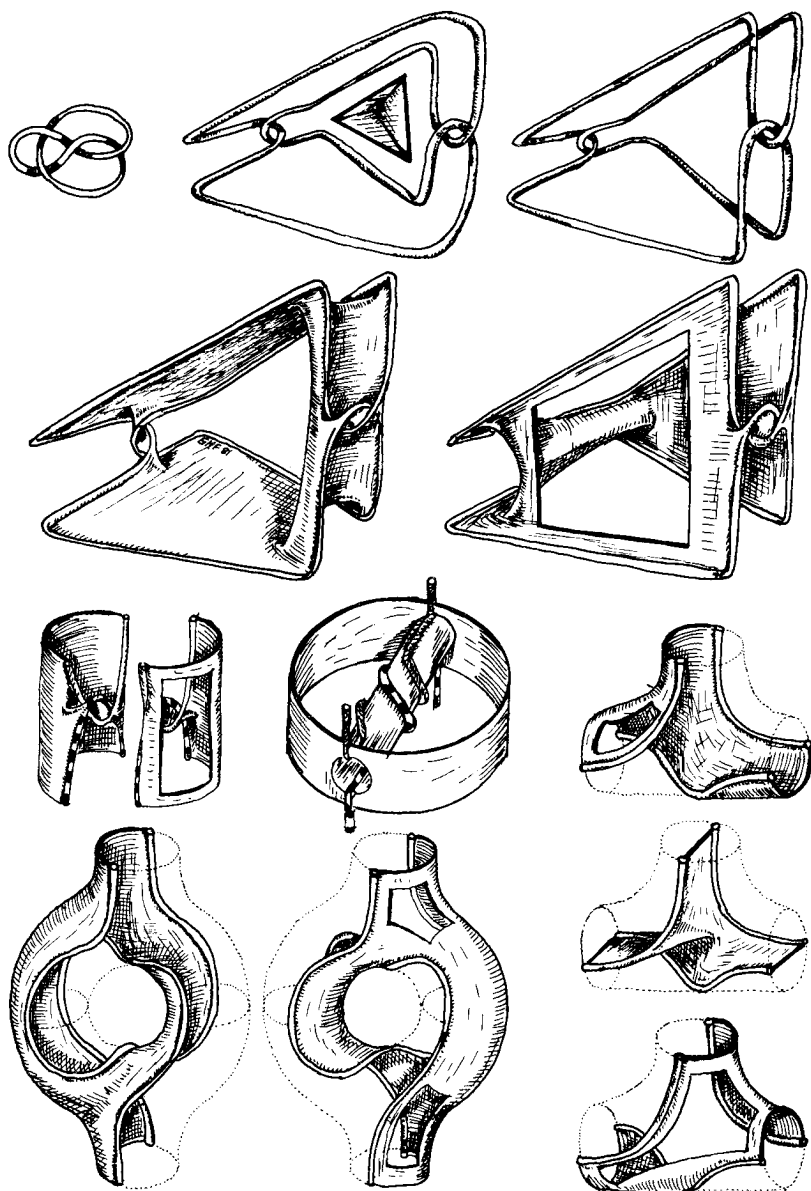
В грандиозном сценарии Тёрстона восьмёрка появляется на сцене, будучи уложенной вдоль рёбер тетраэдра. Такое её расположение упрощает описание диаграммы склейки и многих других вещей. Последовательность 11(11) – 11(12) – 11(13) демонстрирует переход от зейфертова расположения узла к тёрстонову. Другой способ состоит в том, чтобы сделать рис. 1(23) более угловатым.

На рис. 11(21) и 11(22) изображена пара «дополнительных» друг к другу расположений плёнки внутри тетраэдра. Легко представить себе переход между ними. Но трудно в таком ракурсе увидеть, как провести поверхность дальше – через «сцепку». Рисунок 11(31) показывает те поверхности у правой сцепки на рис. 11(21), изотопию между которыми должно проинтерполировать воображение. Немного иначе это изображено на рис. 11(32), где обе части рис. 11(31) придвинуты вплотную друг к другу. Эта конфигурация используется в следующей паре рисунков, 11(41) и 11(42). Вы легко представите себе, как протолкнуть поверхность 11(41) с одной стороны тороидальной трубки на другую, получив в результате 11(42). Взглянув направо, вы увидите, что при этом происходит в местах тройных соединений.

¹ Имеется в виду место, занятое рис. 10(12). – Прим. перев.



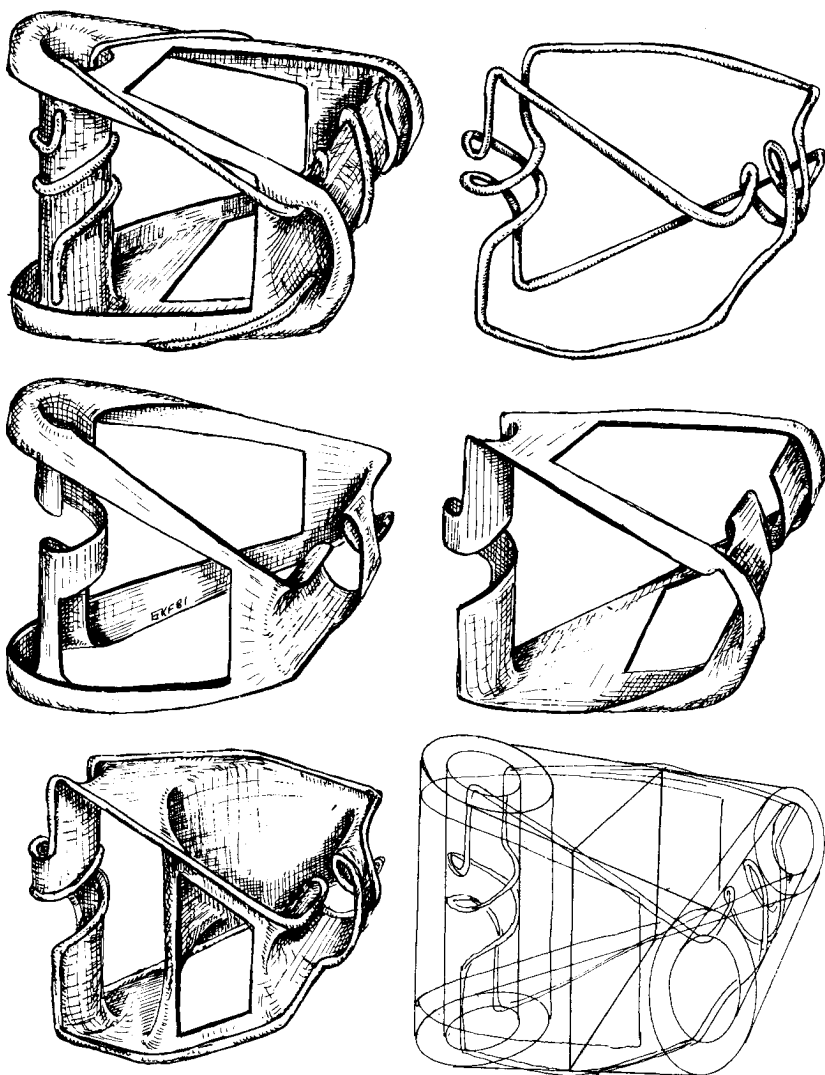
Картинка 10. Крендельная восьмёрка.



Картинка 11. Тетраздральная восьмёрка I.

Тетраэдральная восьмёрка II (картинка 12)

Второе тетраэдральное расположение восьмёрки приведено на рис. 12 (12). Оно соответствует моему рисунку 2 : 13 (21), который был использован Тёрстоном в обзоре [Thurston 1981] и Нилом в газетной статье

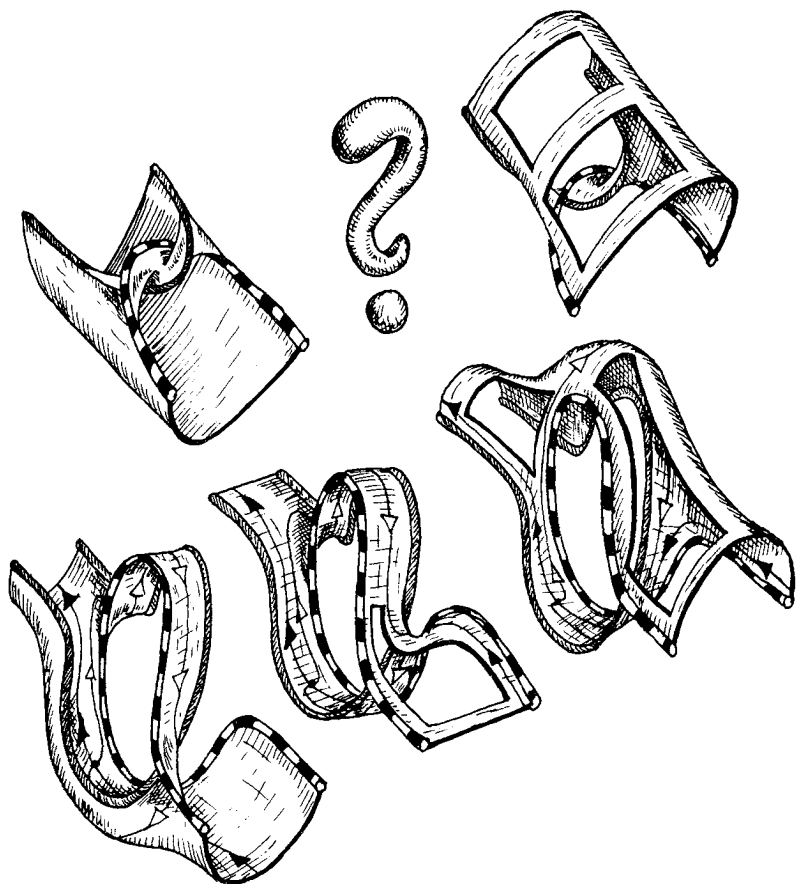


Картинка 12. Тетраэдральная восьмёрка II.

[Kneale 1983]. Рисунок 12(32) служит линейным каркасом для всех остальных рисунков. Чтобы увидеть, как эта тетраэдральная восьмёрка располагается на кренделе (рис. 12(11)), вам надо вставить на место два вырезанных диска. Хотя это и не окна, их исходное положение нетрудно угадать. Промежуточное положение между 12(21) и 12(22) приведено на рис. 12(31). Но переход от 12(22) к 12(31) вовсе не очевиден.

Торическая изотопия сдвига (картинка 13)

Итак, решение нашей задачи визуализации свелось к «протискиванию через мостик». Рисунки 13(21) и 13(23) – модификация рисунков 11(41) и



Картинка 13. Торическая изотопия сдвига.

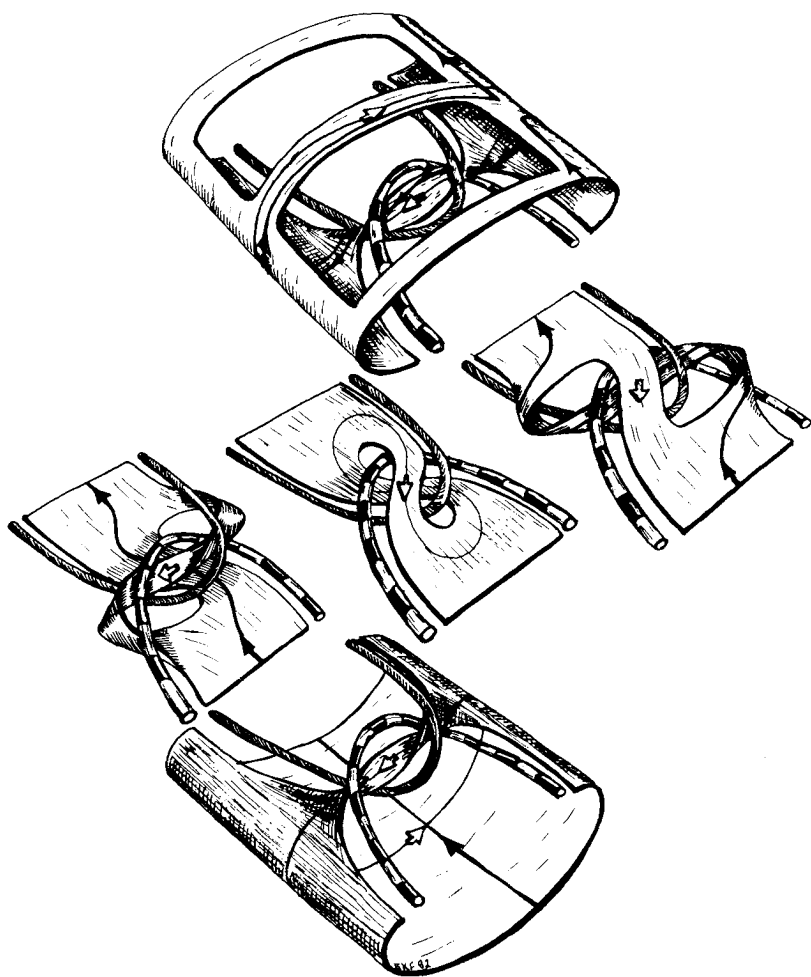
11 (42). Промежуточное положение, облегчающее визуализацию, изображено на рис. 13 (22). Но даже мои бесстрашные и преданные коллеги по «Геометрическому попури» нашли, что следить за всеми этими перемещениями слишком утомительно. Стало быть, переход между двумя фрагментами поверхности 11 (31), воспроизведёнными на рис. 13 (11) и 13 (13), нужно сделать более явным. Как должна выглядеть поверхность 13 (12)?

Цилиндрическая изотопия сдвига (картинка 14)

Эта картинка изображает пять положений кольцеобразной окрестности A белой образующей на поверхности Зейферта F , когда A протискивается через верхний мост в интервале между $t = 80$ и $t = 100$. Если бы мы совместили все эти пять $A(t)$ на одном рисунке, то получилось бы нечто вроде рис. 9 (22). Этот фрагмент поверхности $F(t)$ был выбран потому, что он виден как на рис. 4 (12), так и на рис. 8 (11). На картинке внизу изображен фрагмент $A(80)$, а сверху $A(100)$. В центре (рис. 14 (22)) – промежуточное положение, являющееся частью $F(90)$. Вам надо представить, что $A(80)$ стягивается почти до минимальных возможных размеров, свободно скользя по двум изогнутым стержням. В помощь воображению я нарисовал также положения, соответствующие $t = 85$ (слева, на рис. 14 (21)) и $t = 95$ (справа, на рис. 14 (23)). Фрагмент $A(80)$ стягивается в $A(90)$ через $A(85)$ не вполне равномерно. Мост вначале несколько менее «податлив», чем остальные части, но быстро «догоняет» их между $A(85)$ и $A(90)$.

Кольцо $A(80)$ размечено при помощи экваториальной окружности (с белыми стрелками) и поперечного разреза (с чёрными). На $A(85)$ и $A(95)$ нарисован только разрез, а на $A(90)$ – только экватор. Вам стоит начертить каждую из недостающих кривых, чтобы убедиться в том, что на рис. $A(100)$ они должны располагаться именно так, как там показано. По мосту экватор по-прежнему проходит по направлению к зрителю, точно так же как на рис. 8 (21). В то же время разрез теперь сворачивает у моста направо, один раз обходит экватор, держась от него на небольшом расстоянии, затем пересекает его и продолжает свой путь к дальнему краю фрагмента $A(100)$.

Чтобы описать глобальную ситуацию алгебраически, обозначим через b и w изотопические классы чёрной и белой образующих поверхности $F(0)$, а через B и W – такие же классы на $F(180)$. (Две простые замкнутые кривые на F изотопны, если вы можете перетянуть одну из них в другую, не отрывая от поверхности.) Теперь нарисуйте полусферический купол над 8 (21), прикреплённый к круглому краю пола. Получится приближение к $F(100)$. Как видно из рис. 14 (11), $w = W$, но $b = B + W$. Сумма $B + W$ обозначает класс замкнутой кривой, которая получается из пары образующих на F , если разрезать их в общей точке и соединить вновь таким (очевидным) образом, чтобы на новой кривой их



Картинка 14. Цилиндрическая изотопия сдвига.

направления были согласованы друг с другом. Такая операция *переключения* (нем.: Umschaltung) в точках пересечения направленных кривых вместе со своими многомерными аналогами является одной из фундаментальных топологических процедур типа «режем-клеим». Впервые ею воспользовался Гаусс при изучении диаграмм узлов, и она занимает центральное место в методе Зейферта для отыскания поверхностей, натянутых на узлы. Сейчас, однако, я хочу лишь переключить образующие на поверхности F .

Итак, образующие (b, w) на $F(0)$ переходят в $(B + W, W)$ на $F(180)$. Этим и подсказывается название *изотопия сдвига* для деформации, протаскивающей поверхность сквозь перекрученный мостик. Более основательная причина для выбора такого названия, глубинный смысл которого здесь, к сожалению, не может быть раскрыт, состоит в следующем. Поверхность F за вычетом её граничной кривой K можно рассматривать как тор, из которого удалили точку. Проколотый тор в свою очередь можно параметризовать плоскостью R^2 за вычетом решётки Z^2 точек с целыми координатами. Точки, координаты которых отличаются на элемент группы переносов Z^2 , отвечают одной и той же точке в $F - K$. Сужение нашего автоморфизма на $F - K$ можно, с точностью до изотопии, представить преобразованием линейного сдвига, матрица которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисление монодромии (картинка 15)

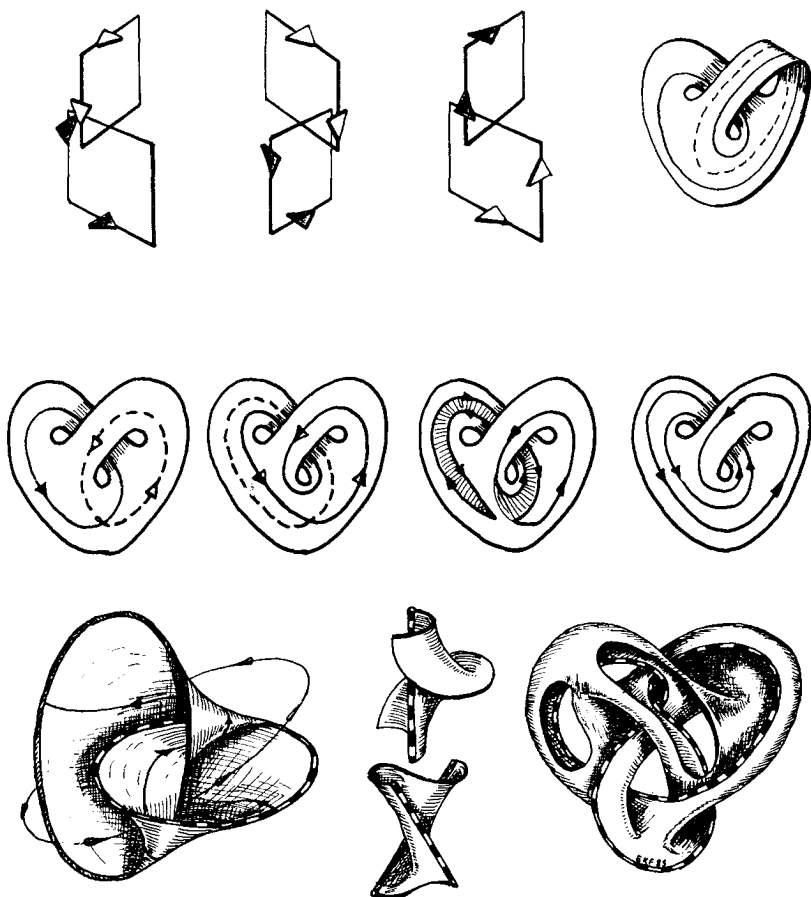
Для того чтобы вычислить судьбу пары $(B + W, W)$ при переходе от $F(180)$ к $F(360)$, удобно обратить время и рассмотреть переход $F(360, 270, 180)$ сквозь очки зеркального поворота. Чтобы увидеть, как он переводит (b, w) в $(-w, b)$, поверните 15(11) в положение 15(12) и симметрично отразите относительно горизонтальной плоскости — получится 15(13). (Кривая $-w$ есть w с обращённой ориентацией.) Если ленточка закручивается вправо, то её отражение будет закручиваться влево. Следовательно, изображение изотопии сдвига $A(280, 270, 260)$ у нижнего моста будет выглядеть точно так же, как $A(80, 90, 100)$, но с другой разметкой. Стало быть, в результате этого сопряжения осуществляется переход

$$(b, w) \mapsto (-w, b) \mapsto (-W, B + W) \mapsto (B, W - B).$$

Таким образом, поскольку прямое движение от $F(180)$ к $F(360)$ переводит $(B, W - B)$ в (b, w) , оно переводит $W = (W - B) + B$ в $w + b$, а значит, $B + W$ переходит в $b + (w + b)$. Так как отображение монодромии индуцирует автоморфизм первой гомологической группы $H_1(F)$ поверхности F , это рассуждение можно резюмировать алгебраически, записав соответствующее матричное разложение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все гауссовы переключения здесь законны, поскольку $b + w$ пересекает каждую образующую один раз с точностью до изотопии на F . Это может не иметь места в случае односторонней поверхности, например бутылки Клейна 15(14) без диска. Увидеть, что происходит на F , вы



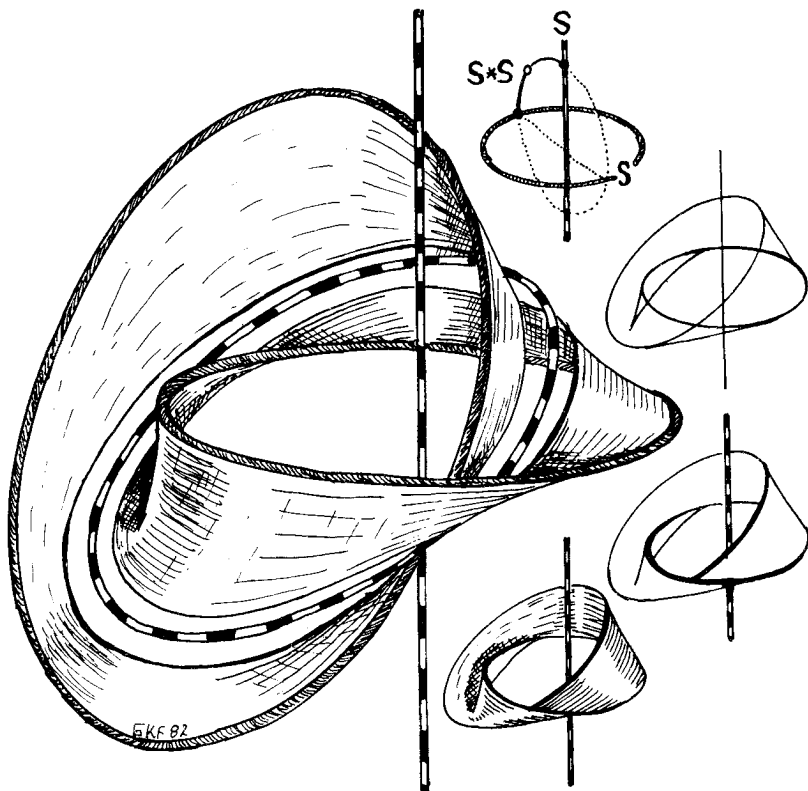
Картишка 15. Вычисление монодромии.

можете, взглянув на «стандартный», не скрученный вариант поверхности Зейфerta 15(21), где образующая b соответствует левой, сплошной кривой, а w — правой, пунктирной. Сплошная кривая на рис. 15(22) показывает, почему $b + w = w + b$, а на рис. 15(31) изображена изотопия между $(b + w) - b$ и w . На рис. 15(23) показан образ b при монодромии: $g(b) = b + (b + w)$. Чтобы убедиться в том, что монодромия сохраняет ориентацию, вам нужно начертить на рис. 15(24) копию кривой $b + w = g(w)$, пересекающей данную кривую в одной точке, слева направо.

Расслоение Хопфа (картинка 16)

Мой рассказ в картинках об узле-восьмёрке почти закончен, осталось лишь связать друг с другом несколько свободных концов. Если вы знакомы с теорией Столлинга *расслоённых зацеплений* (изложенной в статьях [Stallings 1962; 1976]), то вы, возможно, заметили, что «трансплантация» изотопии сдвига и её зеркального отображения на тривиальное расслоение представляет собой локальную процедуру, которую специалисты назовёт «сращиванием» или «плюмбингом» двух противоположно ориентированных «расслоений Хопфа» (см., например, [Harer 1982]).

Я осознал это лишь спустя некоторое время после того, как сконструировал изотопию сдвига. Первая трансплантация расщепляет тривиальный узел на пару однократно зацепленных окружностей. Если вы замкнёте изогнутые стержни на каждом фрагменте изотопии сдвига до пары сцепленных окружностей L , то последовательные положения ко-



Картинка 16. Расслоение Хопфа.

лица, натянутого на зацепление, расслаивают $S^3 - L$ над S^1 . Если вторую трансплантацию сделать тоже левосторонней, то на этот раз получатся поверхности Зейферта с одинаково закрученными ленточками 4(23); они будут расслаивать дополнение трилистника. Чтобы получить изображение этого узла с тремя пересечениями, замените два нижних «перехода» на рис. 1(12) на «проходы» и раскрутите висющую петлю, как на рис. 1(21).

Имя Хопфа чаще связывают с расслоением сферы S^3 над S^2 , которое индуцируется проекцией комплексной плоскости на комплексную проективную прямую. Слои этого расслоения представляют собой окружности, и каждые два слоя сцеплены. Если вы соедините две такие сцепленные окружности однопараметрическим семейством таких же слоёв (рис. 16(11)), то образуется перекрученное на один полный оборот кольцо. На рис. 16(22) изображён линейный каркас для контурного рисунка 16(23) и его штрихованного варианта 16(42).

Монодромия этого расслоения является обычным скручиванием Дена, в чем вы можете убедиться, глядя на рис. 15(31). Один полный оборот по часовой стрелке полосатого края кольца сдвигает отмеченный поперечный разрез $c = b - w$ с перекрученного мостика. Но и монодромия делает то же самое: $g(b - w) = (b + w) - w = b$.

Дополнительно об этом можно почитать в статье Джона Хэзера [Hager 1982], где объясняется, как всякое расслоённое зацепление в S^3 и даже в произвольном трёхмерном многообразии можно собрать из таких простых кусочков. Плюмбингом двух зацеплений Хопфа, изображённым на рис. 7(21) в виде квадратного седла, иллюстрируется частный случай *суммы Мурасуги*. Этот обобщённый плюмбинг и обратная к нему операция, первоначально рассматривавшиеся алгебраически, сохраняют ряд свойств дополнения зацепления. Дейв Габаи [Gabaи 1983; 1983] исследовал такие дополнения геометрически в первых двух статьях из целой серии статей, посвящённой слоениям и топологии трёхмерных многообразий. С его точки зрения, каждый тополог малых размерностей должен упражняться в постижении того, как натянутая на узел поверхность протискивается через невероятно узкие места, подобно тому как это происходит при изотопии сдвига.

Манипулирование с диаграммами узлов является на самом деле упражнением в размерности «два с половиной»: чтобы аккуратно и с удобствами кодировать топологическую информацию, приходится становиться очень близко к плоскости рисунка. На тот случай, когда желательны действительно пространственные формы, пригодные для разглядывания со всех сторон, например если нужно зафиксировать в воображении объект, изображённый на диаграмме, на помощь приходят графические приёмы. Рассмотрим, к примеру, тот же вопрос — как прикрепить к узлу поверхность Зейферта. Сплошная трубчатая окрестность N узла K несёт на себе каноническую структуру, задаваемую простыми замкнутыми кривыми на её торической поверхности T , — так называемое *оснащение*. Меридианы, обходящие вокруг T по короткому

пути, ограничивают диски, лежащие внутри N . Среди возможных кривых, однократно обходящих вокруг T по длинному пути, только так называемые параллели ограничивают двусторонние поверхности, лежащие во внешности $X = S^3 - N$ трубчатой окрестности узла. *Изоморфизм Майера-Вьеториса*

$$H_1(T) = H_1(X) + H_1(N)$$

характеризует эти кривые гомологически: $(1, 0)$ — класс меридианов, а $(0, 1)$ — класс параллелей. Итак, поверхность Зейферта прикрепляется к T вдоль параллели, и параллель не зацеплена с узлом.

Далее, откуда ни смотреть на узел, два контура трубки T , очевидно, обходят один раз вдоль K . Но они могут не быть параллелями, и этим затрудняется рисование плёнок. При помощи элементов 15(32) типа сборки я повернул 4(12) вокруг узла так, чтобы поверхность F примыкала к T исключительно вдоль одного из контуров (рис. 15(33)). Это и привело к положению 14(22), промежуточному между 14(31) и 14(11) в изотопии сдвига.

Постскрипtum

В девятнадцатом столетии фотографии поначалу применяли свой новый инструмент для изготовления недорогих суррогатов стандартного искусства — они снимали пейзажи и портреты. Потом появились кинофильмы — вещь, без фотокамеры не осуществимая. На сегодня цель компьютерной графики по большей части всё ещё состоит в том, чтобы создавать электронные образы, по качеству сравнимые с фотографией, или видеоленты и записанные на дисках последовательности кадров компьютерных фильмов. Для начертательных топологов был бы очень полезен *недорогой* графический инструмент, который мог бы *сам* создавать *узнаваемые* образы в огромных количествах и достаточно *быстро*, чтобы не приходилось зря терять время. Однако пока нам приходится идти на компромисс по каждому из этих пяти требований.

В течение тех десяти лет, когда задумывались, рисовались и перерисовывались рисунки для этой книги, интерактивная компьютерная графика становилась всё более доступной, в том числе и для рядового тополога. Меня часто спрашивают, не сделаны ли мои рисунки на компьютере, а даже если и нет, то можно ли было бы это сделать? До недавнего времени на оба эти вопроса я отвечал уверенным «нет». Этим летом принёс первые плоды проект, в котором часть развитых здесь методов применяется к компьютерной графике. Примерно в то же самое время выяснилось, что большинство моих фотографий, сделанных с рисунков на доске, которые давным-давно уже стёрты, не годятся для цветной печати... Семь из них, приведённые на фото I–III (см. вклейку), удалось спасти специалисту по обработке плёнок Ричу Беккеру. На фото IV и V представлены некоторые типичные кадры из управляемых «мышью» компьютерных мультфильмов. Такие фильмы, управляемые пользователем, возможны исключительно при применении компьютеров.

У Донны Кокс, компьютерной художницы из Школы изобразительных искусств и дизайна, есть проект сближения науки и искусства, в котором используется графическое компьютерное оборудование Национального центра по приложениям суперкомпьютеров (НЦПС), возглавляемого Ларри Смарром и субсидируемого Национальным научным фондом. Она также проверяет («бета-тестирует») систему трёхмерного геометрического моделирования Cubicomp PICTUREMAKER в «Электроник имиджинг лаборатории».

Подобные системы предназначены для того, чтобы художник мог

сначала сконструировать разнообразные фигуры, похожие на коробки с плоскими гранями, представляющими собой произвольные многоугольники. Такие *фасеты* ориентированны, и каждую отдельную грань можно задать как невидимую, полупрозрачную или непрозрачную. В последнем случае переход оттенков при наложении цвета — так называемой *раскраске* — можно осуществить так, что создаётся иллюзия гладкой искривлённой поверхности. Управляя мышью, можно изменять размеры возникающих фигур, перекрашивать их, вращать, параллельно переносить и, намертво скрепляя друг с другом, создавать более сложные объекты, а затем повторять всё это с ними.

Чтобы продемонстрировать, как, действуя по такой программе, можно построить скрещённый колпак с помощью процедуры, описанной при обсуждении картинки 5:4, Донна сначала нарисовала мышью окружности и эллипсы на плоскости. Снабжать Cubicomp математическими формулами непрактично даже в случае таких простых кривых. С другой стороны, эта программа автоматически интерполирует фасеты между двумя придвинутыми друг к другу эллиптическими дисками, образуя связывающий их цилиндрический пояс. После этого полученные полиэдры приводятся в нужное положение и намертво скрепляются друг с другом.

На первых трёх кадрах фото IV даны экваториальный вид IV(11), полярный вид IV(13) и что-то вроде 5:4(23) посередине. Закодированные цветом фасеты оставлены прозрачными, чтобы была видна структура модели. С непрозрачными одноцветными фасетами и частичной передачей световых рефлексов, но без сглаживания углов скрещённый колпак мог бы выглядеть подобно загадочному объекту IV(14) справа. Это хорошо иллюстрирует пределы возможностей систем трёхмерного геометрического моделирования. Можете ли вы выяснить, глядя только на рисунок IV(14), как он был сделан?

Все остальные компьютерные кадры на фото IV и V нарисованы с помощью системы Silicon Graphics IRIS 2400 и засняты камерой Dunn Instruments 635 в НЦПС. Система IRIS в полтора раза дороже, чем Cubicomp и стоит примерно 100 компьютеров «Эппл». Она управляется ОС ЮНИКС, что делает очень лёгким программирование и на Си, и на фортране. Первоначально я написал геометрическую часть Си-программы на языке Isys FORTH. Эта реализация языка Чарлза Мура на компьютере «Эппл» создана Бобом Иллайзом [Illyes 1984]. Она позволяет максимально использовать графические возможности его скромного чипа 6502.

Овладев с помощью Иллайза этим удивительно математическим алгоритмическим языком, я смог изучить и усовершенствовать многие геометрические программы, предназначенные для больших машин. Особенно подходящими для проекта Донны Кокс оказались модификации римбойской гомотопии Апери (см. обсуждение картинки 5:8). Система IRIS позволяет движением мыши вращать образы вроде IV(24) и IV(34), составленные из индивидуально окрашенных пикселей. Наш программист

и специалист по компьютерам Рей Идашак изобрёл простой, быстрый и в высшей степени удовлетворительный алгоритм, раскрашивающий такое облако пикселей за 40 секунд, для чего требуется только нажать кнопку.

Сначала Идашак в соответствии с законом Ламберта (см. последний раздел гл. 3) «закрашивает» одним цветом треугольные фасеты, привязанные к смежным, не обязательно компланарным четвёркам точек на поверхности. Так, виды IV(21), IV(22) и IV(23) жёлтого скрещённого колпака соответствуют положениям, приведённым непосредственно над ними. Для дополнительных цветов, в сумме с жёлтым дающих белый, интенсивность выбирается пропорциональной очень высокой степени ламбертова косинуса. Поэтому фасеты, обращенные к источнику света, оказываются очень яркими и дают на поверхности блики, более или менее там, где им и надлежит быть. По своим размерам фасеты меньше пиксела, поэтому поверхности выглядят уже достаточно гладкими и без специальной процедуры растушёвки. Этими остроумными усовершенствованиями стандартной в остальном техники предотвращаются фатальные ошибки в раскраске, свойственные обычным программам. Эти ошибки связаны с тем, что поверхность пронизывает сама себя вдоль двойных кривых и меняет ориентацию вблизи точек пинча.

Для единого описания геометрии, выражаемой этими образами, вернемся к цилиндрической параметризации Апери римской поверхности (стр. 123). Для каждой «долготы» сопряженные оси нашего эллипса представляются столбцами 2×3 -матрицы $L(\theta) = \langle J(\theta), K(\theta) \rangle$, рассматриваемой как отображение плоскости в пространство. Два переменных коэффициента являются декартовыми координатами окружности $C(t) = \langle A(t), B(t) \rangle$, проходящей через начало координат, полярное уравнение которой имеет вид $\rho = \cos(\tau)$, где $\tau = \arctg(t)$. Для наглядности будем считать, что угол τ измеряет отклонение от вертикали. Тогда $A(t)$ — «высотная», а $B(t)$ — базовая координаты окружности, опирающейся на горизонтальную прямую.

Римбойская гомотопия Апери состоит в сжатии этой окружности в длинный тощий эллипс:

$$\rho = \cos(\tau)/(1 - \beta \sin(2\tau)), \text{ где } \beta = (b/\sqrt{2}) \sin(3\theta).$$

При $b = 1/\sqrt{3}$ точки пинча взаимоуничтожаются и получается погружение Боя проективной плоскости в трёхмерное пространство. Окружность $\rho = \cos(\tau)$ проходится дважды при изменении τ на 360° . Допустим, что мы *развернули* её в однократно проходимую окружность вдвое большего радиуса при помощи линейной гомотопии, определяемой в полярных координатах по формуле $\rho = (1 - l) \cos \tau + l$. Промежуточные кривые — это *улитки Паскаля* (см., например, [Lawrence 1972, p. 113 J]¹. В первой половине деформации улитка представляет собой двойную петлю с самопересечением в начале координат. При $l = 1/3$ это *трисектриса*

¹ Или любой справочник по математике.— *Прим. изд. ред.*

Паскаля. При $l = 1/2$ меньшая петля стягивается в точку — острый кардиоиды, как на рис 5:6 (22). При $l = 1$ вмятина окончательно выправляется и получается единичная окружность.

Развёрнутая таким образом римская поверхность показана на IV (44), с синусоидальной раскраской. Эта поверхность замечается овальным образом единичной окружности при аффинных отображениях $L(\theta)$. Давайте я назову её *этрусской поверхностью*, поскольку вычислительно она проще, чем римская. Топологически этрусская поверхность представляет собой сингулярную бутылку Клейна, получающуюся при взятии связной суммы двух римских поверхностей в их южных полюсах. На пути между римской и этрусской поверхностями встречаются интересные новые поверхности, порождаемые улитками. Облака пикселей IV (23) и IV (33) показывают видимый контур поверхности, порождаемой улитками в стадии, близкой к трисектрисе. Вид на южный полюс той же поверхности дан на рис. IV (43). Алгоритм Идашака последовательно рисует ленты между смежными овалами, и, прерывая его в подходящие моменты, можно выявить дополнительные детали, как на рис. IV (41) и IV (42).

И многие другие поверхности обладают *параметризацией овалами*. Например, скрещённый колпак можно породить эллипсами с перпендикулярными сопряжёнными осями:

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \langle \cos(2\theta), \quad \sin(2\theta), \quad 0 \rangle \\ K(\theta) &= \langle 0, \quad 0, \quad \cos\theta \rangle. \end{aligned}$$

Кадры IV (31), IV (32) и IV (33) — это три вида скрещённого колпака, развернутого с помощью «улиткиной» гомотопии до стадии трисектрисы, соответствующие видам, расположенным над ними.

Одно замечательное и совершенно неожиданное изображение этрусской поверхности (кадр V (23)) получило прозвище «Венеры Ирисской». Поскольку ничего не стоило вставить в программу произведение двух гомотопий — римбойской и «улиткиной», — Рей смог сотворить погружённую бутылку Клейна V (14), прозванную «Идой»¹. Полученное таким образом трёхпараметрическое семейство плоских квартик задаётся в полярных координатах уравнением

$$\rho = \frac{(1 - l)\cos(\tau) + l}{1 - (b/\sqrt{2})\sin(3\theta)\sin(2\tau)},$$

где θ связано с нашим однопараметрическим семейством аффинных отображений

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} (r_1 \cos 2\theta) & \cos \theta \\ (r_1 \sin 2\theta) & -\sin \theta \\ r_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹ Разумеется в честь её творца, но, наверное, в выборе имени сыграло роль и то, что его носила героиня поэмы А. Теннисона «Принцесса» (1847 г.). — *Прим. изд. ред.*

Это семейство замечает поверхности — обозначим их $F(l, b)$ — показанные на фото V¹. Отношение r_1/r_2 «талии к росту» для Венеры $F(1, 0)$ на рис. V(44) близко к $1/2^2$. Вид сбоку римской поверхности $F(0, 0)$ представлен на рис. V(41). Поверхность Боя на рис. V(11) есть $F(0, 1)$. Промежуточные формы V(21) и V(31) обрамляют взаимоуничтожение точек пинча во время римбойской гомотопии. Подобным образом промежуточные фигуры V(42) и V(43) обрамляют (непоказанную) поверхность $F(1/2, 0)$, порождаемую кардиоидными улитками. Соответствующие фигуры, полученные разворачиванием поверхности Боя, находятся в верхнем ряду, а 12 точек пинча Венеры взаимоуничтожаются на пути к Иде $F(1, 1)$ (рис. V(14)) где-то между V(43) и V(24). Таким образом, реализация Аперии морэновского взаимоуничтожения точек пинча — вещь весьма общая. Три зелёные поверхности на рис. V(32), V(33) и V(22) — это повёрнутые поверхности V(44), V(34) и V(24) соответственно.

Математическое кнопопечатание тоже очень усовершенствовалось с тех пор, как я начинал набирать эту рукопись на «Эпплрайтере» Пола Лутуса [Lutus-Finstad 1981]. Редкая особенность этого компактного текстового редактора — его программируемость — оказалась незаменимой при модификации моей электронной рукописи для передачи по телефону на наборную компьютерную систему Иллинойского университета. Компьютерное черчение — ещё один многообещающий инструмент начертательной топологии. Для сравнения с черчением от руки я выполнил верхнюю половину картинки 2:1 на Макинтоше. Кубическая кривая представляет собой сплайн из MacDraw Марка Каттера [Cutter 1984], шрифтовая графика взята из MacPaint Аткинсона [Atkinson 1985], размещение надписей выполнено сопутствующей программой ClickArt Билла Паркхерста [Parkhurst 1985], а печать осуществлялась на лазерном принтере. Таблица 1, для которой тоже использовался MacPaint, выполнена на более скромном принтере с точечно-матричной печатью.

Несомненно, вчера ещё героические факты привлечения суперкомпьютеров в начертательную топологию (см. раздел «Компьютер и чертёжный стол» в гл. 2), станут рутинным явлением скорее, чем я думал, благодаря всё более реалистическому отношению субсидирующих организаций к финансовой поддержке «академической» компьютерной графики в университетах.

¹ Красно-синие кадры, расположенные по краям, являются последовательными стадиями единой «циклической» гомотопии. — *Прим. перев.*

² Венера V(44), а также её соседка V(43) повёрнуты по отношению к Венере Ирисской V(23) на 180° . — *Прим. перев.*

Литература

В фигурных скобках указано, в каких местах книги имеются ссылки на данную работу (*m:n* обозначает раздел, посвященный обсуждению картинки с таким номером).

- Abikoff, William: The Real Analytic Theory of Teichmüller Space, Lect. Notes in Math. 820. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. 1980. [Имеется перевод: Абикоф У. Вещественно аналитическая теория пространства Тейхмюллера. — М.: Мир, 1985.] {предисловие}
- Abikoff, William: The Uniformization Theorem, Amer. Math. Monthly **88**(1981), 574–592. {предисловие}
- Abraham, Ralph and Christopher Shaw: Dynamics – the Geometry of Behavior, Aerial Press, Inc., Santa Cruz, CA, 1982.
- Apery, François: La Surface de Boy, Adv. Math. **61** (1986), 185–266 {перед 5:1, 5:8}
- Apery, François: Models of the Real Projective Plane, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1987 {предисловие, перед 5:1, 5:8}
- Atkinson, Bill: MacPaint, Apple Computer, Inc., Cupertino, CA, 1985. {постскрипtum}
- Banchoff, Thomas, Terence Gaffney and Clint McCrory: Cusps of Gauss Mappings, Res. Notes in Math. 55, Pitman Books Ltd., London, 1982. {6:4}
- Banchoff, Thomas and Charles Strauss: Complex Function Graphs, Dupin Cyclides, Gauss Map, and Veronese Surface, Computer Geometry Films, Brown University, Providence 1977. {между 2:7 и 2:8; 5:4}
- Bauer, W., Crick and J. White: Supercoiled DNA, Scientific American **243** (July 1980), 118–133. {8:7}
- Berstein, Israel and Allan Edmonds: On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **247**(1979), 87–124. {предисловие}
- Birman, Joan: Braids, Links and Mapping Class Groups, Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974. {7:1, 7:6, 7:9}
- Birman, Joan and Robert F. Williams: Knotted periodic orbits in dynamical systems. I. Lorenz' Equations, Topology **22** (1983), 47–82; II: Knot holders for fibered knots, in: Symposia Mat. XI, Academic Pres, 1983. {8:6}
- Boy, Werner: Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Dissertation, Göttingen, 1901; Math. Ann. **57**(1903), 151–184. {перед 5:1}
- Boyer, Carl: The History of the Calculus and its Conceptual Development. 1949. Reprinted by Dover Publications Inc., New York, 1959. {перед 2:1}
- Bröcker, Theodor and Les Lander: Differentiable Germs and Catastrophes, London Math. Soc. Lect. Notes 17, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975. [Имеется перевод: Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977.] {предисловие}
- Burmester, Ludwig: Theorie und Darstellung der Beleuchtung Gesetzmässige Gestalteter Flächen, Teubner, Leipzig, 1875.
- Callahan, James: Singularities of plane maps, Amer. Math. Monthly **81**(1974), 211–240, and **84**(1977), 765–803. {5:8}

- Cohen, Marshall: Whitehead torsion, group extensions, and Zeeman's conjecture in high dimensions, *Topology* **16**(1977), 79–88. {2:5}
- Cowan, Thaddeus: The theory of braids and the analysis of impossible figures, *J. Math. Psychol.* **11**(1974), 120–212. {4:2}
- Cremona, Luigi: Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, *Gior. d. Mat.* **1**(1863), 305–311, and **3**(1865), 269–280.
- Crowell, R.H. and R.H. Fox: *Introduction to Knot Theory*, Ginn & Co., Boston, 1963. [Имеется перевод: Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов.– М.: Мир, 1967.] {между 2:7 и 2:8}
- Cutter, Mark: *MacDraw*, Apple Computer, Inc., Cupertino, CA, 1984. {постскрипtum}
- Dehn, Max: Die Gruppe der Abbildungsklasse, *Acta Math.* **69**(1938), 135–206. {7:9}
- Doblin, Jay: *Perspective: a New System for Designers*, Whitney Library of Design, New York, 1956. {3:2, 3:7}
- Dyck, Walter von: Analysis situs. I, *Math. Ann.* **32**(1888), 457–512. {6:2}
- Fadell, E. and J. Van Buskirk: The braid groups of E^2 and S^2 , *Duke Math. J.* **29**(1962), 243–258. {7:5}
- Francis, George K. and Stephanie Troyer: Excellent maps with given folds and cusps in the plane, *Houston J. Math.* **3**(1977), 165–194; Continuation, *ibid.* **8**(1982), 53–59. {6:7, 6:10, 7:10}
- Francis, George K. and Bernard Morin: Arnold Shapiro's eversion of the sphere, *Math. Intelligencer* **2**(1980), 200–203. {6:3, 6:4}
- Francis, George K.: Drawing surfaces and their deformations: the tobacco pouch eversions of the sphere, *Math. Modelling* **1**(1980), 273–281. {6:6}
- Francis, George K.: Drawing Seifert surfaces that fiber the figure-8 knot complement, *Amer. Math. Monthly* **90**(1983), 589–599. {предисловие}
- Freedman, Michael: The topology of four-dimensional manifolds, *J. Diff. Geom.* **17**(1982), 357–452. {перед 7:1}
- French, Thomas: *A Manual of Engineering Drawing for Students and Draftsmen*, 1911, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York, 1947. {перед 3:1}
- Gabai, David: Foliations and the topology of 3-manifolds, *J. Diff. Geom.* **18**(1983), 445–503. {8:16}
- Gabai, David: The Murasugi sum is a natural geometric operation, *in: Proc. Conf. on Low Dim. Top., Contemp. Math.* **20**(1983), 131–143. {8:16}
- Gillman, D. and Dale Rolfsen: The Zeeman conjecture for standard spines is equivalent to the Poincaré conjecture, *Topology* **22**(1983), 315–323. {2:5}
- Golubitsky, Martin and Victor Guillemin: *Stable Mappings and Their Singularities*, Grad. Tesis in Math. 14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973. [Имеется перевод: Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности.– М.: Мир, 1977.] {перед 1:1, 1:3}
- Gombrich, E.H. and R.L. Gregory, editors: *Illusion in Nature and Art*, Charles Scribner's Sons, New York, 1973. {3:9}
- Gordon, McA.C.: Some aspects of classical knot theory, *in: Knot Theory, Proceedings Plans-sur-Bex, 1977, Lect. Notes Math.* 685, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.
- Grimm, Brüder: *Sechs Märchen-Bilderbücher mit Bildern von Brünhild Schlötter*, Verlag Jos. Scholz, Mainz. Gebunden von Jos. Joh. Schweizer, Leitmeritz, 1942. [Имеется перевод: Братья Гримм. Сказки.– М.: Худ. лит.-ра, 1978.] {предисловие}
- Harer, John: How to construct all fibered knots and links, *Topology* **21**(1982), 263–280. {8:16}

- Hatcher, Allan and William Thurston: A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface, *Topology* **19**(1980), 221–237. {7:10}
- Hilbert, David and S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1932. [Имеется перевод: Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Э. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981. {5:3, 5:4}]
- Hopf, Heinz: *Differential Geometry in the Large*, Lect. Notes. Math. 1000, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983. {5:8}
- Illyes, Robert: *Isys FORTH*, Illyes Systems, Champaign, IL, 1984. {постскрипtum}
- Jørgenson, Troels: Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle, *Ann. Math.* **106**(1977), 61–72. {перед 8:1, 8:6}
- Kauffman, Louis: *On Knots*, Ann. of Math. Studies **76**, Princeton University Press, 1987. {8:7}
- Kim, Scott: An impossible four-dimensional illusion: *in*: *Hypergraphics*, edited by D. W. Brissin, 1978, Charter 11, 186–239. {3:9, 4:2}
- Kneale, Dennis: Shaping Ideas: A Topologist Wows World of Math by Seeing the Unseen, *Wall Street Journal*, March 18, 1983. {2:13, 8:12}
- Kronecker, Leopold: Über Systeme von Funktionen mehrer Variablen, *Monatsber. Berl. Ak. Wiss.* (1869), 688–689. {6:2, 6:3}
- Крылов Н. Н., Лобандиевский П. И., Мэн С. А. *Начертательная геометрия*. – М.: Физматгиз, 1959. {3:9}
- Lawrence, J. Dennis: *A Catalog of Special Plane Curves*, Dover Publications, Inc., New York, 1972. {постскрипtum}
- Lickorish, W. B. Raymond: A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60**(1964), 769–778. {7:9}
- Listing, Johann: *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien (1847), 811–875. {8:1}
- Lutus, Paul and Liane Finstad: *Apple Writer. II*, Apple Computer, Inc., Cupertino, CA, 1981. {постскрипtum}
- Lyndon, Roger and Paul Schupp: *Combinatorial Group Theory*, *Ergebnisse der Mathematik* 89, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976. [Имеется перевод: Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.] {4:5}
- Mach, Ernst: *Beiträge zur Analyse der Empfindungen*, Jena, 1886. *The Analysis of Sensation*. Dover reprint, 1959. [Имеется перевод: Мах Э. Анализ ощущений и отношение физического к психическому. М.: 1908.] {3:9}
- Magnus, Wilhelm: Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen, *Math. Ann.* **109**(1934), 617–646, *in*: *Collected Papers*, pp. 67–96. {7:4}
- Magnus, Wilhelm: Braids and Riemann surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.* **25**(1972), 151–161, *in*: *Collected Papers*, pp. 573–583.
- Magnus, Wilhelm: *Noneuclidean Tessellations and Their Groups*, Academic Press, New York, 1974. {перед 8:1}
- Magnus, Wilhelm: *Collected Papers*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984.
- Marin, André: *Seminaire sur les difféomorphismes des surfaces d'après Thurston*, Exposé 11–12, Inst. Haute Etudes Sci., 1977. {7:10}
- Massey, William: Proof of a conjecture of Whitney, *Pacific. J. Math.* **31**(1969), 143–156. {5:7}
- Max, Nelson: *Turning a Sphere Inside Out*, International Film Bureau, Chicago, 1977. {6:6}
- Max, Nelson and Thomas Banchoff: Every sphere eversion has a quadruple point, *in*: *Contributions to Analysis and Geometry* (Philip Hartman Festschrift), Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981, pp. 191–209. {6:12}

- Milnor, John: Hyperbolic geometry: the first 150 years, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6**(1982), 9–24. {перед 8:1}
- Möbius, August: *Theorie der elementaren Verwandschaft*, Werke, vol. 2, Martin Sandig Verlag, Wiesbaden, 1967. {перед 5:1, 5:2}
- Morin, Bernard: Equations du retournement de la sphere, *C.R.A.S.P.* **287**(1978). {5:8, 6:9}
- Morin, Bernard and Jean-Pierre Petit: Le retournement de la sphere, *Pour la Science* **15**(1979), 34–41. {6:4}
- Nagase, Teruo: On regular homotopies of a closed orientable surface into a 3-manifold, *Proc. Fac. Sci. Tokai University* **19** (1984), 35–41. {6:3}
- Newman, M.H.A.: On a string problem of Dirac, *J. London Math. Soc.* **17**(1942), 173–177. {7:5}
- Nicolaïdes, Kimon: *The Natural Way to Draw*, Houghton Mifflin, Boston, 1975. {3:9}
- Nielsen, J.: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. I–III, *Acta Math.* **50**(1927), 189–358; **53**(1928), 1–76, **58**(1931), 87–167. {перед 7:1}
- Nitsche, Johannes: *Vorlesungen über Minimalflächen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975. {6:10}
- Penrose, L.S. and Roger Penrose: Impossible objects: a special type of illusion, *Brit. J. Psychol.* **31**(1958), 31–33. {4:1}
- Petit, Jean-Pierre and Jérôme Souriau: La Surface de Boy, *La Recherche*, April 1982. {5:8}
- Phillips, Anthony: Turning a surface inside out, *Scientific American* **214** (May 1966), 112–120. {6:4}
- Poincaré, Henri: *Analysis Situs*, *J. d'Ecole Polytechnique Normale* **1**(1895), 1–121. [Имеется перевод: Пуанкаре А. Избранные труды в трёх томах.–М.: Наука, 1972. Том II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел.] {перед 5:1}
- Poston, Tim and Ian Stewart: *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman Books Inc., London, 1978. [Имеется перевод: Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения.–М.: Мир, 1980.] {1:4}
- Riley, Robert: A quadratic parabolic group, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **77**(1975), 281–289. {перед 8:1}
- Rohn, Karl and Erwin Papperitz: *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie*, Verlag von Veit, Leipzig, 1906. {3:9}
- Rolfen, Dale: *Knots and Links*, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1976. {8:10}
- Rotman, Joseph: *An Introduction to the Theory of Groups*, Allyn & Bacon Inc., Boston, 1984. {4:5}
- Schoenflies, Artur: *Einführung in die Hauptgesetze der Zeichnerischen Darstellungsmethoden*, Teubner, Leipzig, 1908. {предисловие}
- Scholz, Erhard: *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1980. {5:5}
- Seifert, Herbert: Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume, *Acta Math.* **60**(1933), 147–238. {перед 8:1}
- Seifert, Herbert: Über das Geschlecht von Knoten, *Math. Annalen* **110**(1934), 571–592. {8:2, 8:4, 8:7}
- Smale, Stephen: A classification of immersions of the two-sphere, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90**(1959), 281–290. {6:3}
- Smale, Stephen: Generalized Poincaré Conjecture in dimension greater than 4, *Ann. Math.* **74**(1961), 391–406. [Имеется перевод: Смейл С. Обобщённая гипотеза

- Пуанкаре для размерностей, больших четырёх. — Математика, 5:5 (1961). [перед 7:1]
- Stallings, John: On fibering certain 3-manifolds, *in*: Topology of 3-Manifolds and related topics, edited by M. K. Fort, Jr., Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1962. {8:16}
- Stallings, John: Construction of fibered knots and links, *in*: Symposium on Algebraic and Geometric Topology, Stanford, 1976; A. M. S. Proc. Symp. Pure Math 32(1978), 55–60. {8:16}
- Steiner, Jakob: Zwei specielle Flächen vierter Ordnung, Posthumous report and editorial note number 32 on pages 721–724, 741–742 of *Gesammelte Werke*, Zweiter Band, K. Weierstrass, editor. Druck und Verlag von G. Reimer, Berlin, 1882.
- Stillwell, John: Classical Topology and Combinatorial Group Theory, Grad. Texts in Math. 72, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980. {7:1}
- Thom, René: Stabilité structurelle et morphogénèse, W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass, 1972. {предисловие}
- Thurston, William: On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, Princeton University preprint, 1976. {8:6}
- Thurston, William: The Geometry and Topology of Three-Manifolds, Princeton University preprint, 1977 and 1982. {перед 8:1, 8:2, 8:5}
- Thurston, William: Three dimensional manifolds, Kleinian groups, and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6(1982), 357–381. {2:13, перед 8:1}
- Thurston, William: Hyperbolic structures on 3-manifolds. I. Deformation of acylindrical manifolds, Ann. Math. 124(1986), 203–246. {2:12, 2:15}
- Waddington, C. H., editor: Towards a Theoretical Biology, Edinburg Univ. Press. 1972.
- Wajnryb, Bronislaw: A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface, Technion preprint, Haifa 1982. {7:10}
- Weeks, Jeff: Birkhäuser, New York, 1987. {5:2}
- White, James: Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions, Amer. J. Math. 91(1969), 693–728. {4:2, 8:7}
- Whitney, Hassler: On regular closed curves in the plane, Compos. Math. 4(1937), 276–284. {6:3}
- Whitney, Hassler: On the topology of differentiable manifolds, *in*: Lectures in Topology, Univ. Michigan Press, Ann. Arbor, 1941. {предисловие, 5:7}
- Whitney, Hassler: On singularities of mappings of Euclidean spaces, Ann. Math. 62(1955), 374–410. {перед 1:1}
- Wiener, Christian: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Teubner, Leipzig, 1884. {3:9}
- Wolf, Joseph: Spaces of Constant Curvature. Publish of Perish Inc., Berkeley, 1977. [Имеется перевод с более раннего издания: Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука, 1982.] {4:6}
- Zeeman, E. C.: On the dunce hat, Topology 2(1964), 341–358. {2:5}
- Zeeman, E. C.: A catastrophe machine, *in*: Towards a Theoretical Biology, edited by C. H. Waddington, 1972. *in*: Catastrophe Theory, Selected Papers 1972–1977, pp. 409–415. {6:11}
- Zeeman, E. C.: Catastrophe Theory, Selected Papers 1972–1977, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.

Указатель картинок и фото

Римские номера страниц отсылают к вклейке.

В тексте ссылка на фрагмент картинки текущей главы делается по номерам картинки, строки и столбца (два последних заключаются в скобки). Если рисунок находится в другой главе, то впереди ставится её номер (отделённый двоеточием). Так, фрагмент в правом нижнем углу картинки 9 главы 6, изображающий ленту Мёбиуса, называется рис. 6:9 (34).

Фото I. Шутовской колпак, нарисованный на доске I

Фото II. Спелёнутый трилистник II

Фото III. Любимая инволюция Джозун Бирман III

Фото IV. Скрещённый колпак и улиткина деформация IV

Фото V. Этрусская Венера V

Картина 1:1. Седло в коробке VI

Картина 1:2. Седло в барабане VII

Картина 1:3. Зонтик Уитни VIII

Картина 1:4. Сборка Кэли 23

Картина 1:5. Точка пинча – точка ветвления 26

Картина 2:1. Кубическая метафора 28

Картина 2:2. Основные примеры поверхностей 31

Картина 2:3. Трезубр 31

Картина 2:4. Сглаживание полиэдрального седла 33

Картина 2:5. Шутовской колпак 35

Картина 2:6. Яйцо Дунса 37

Картина 2:7. Лента Мёбиуса 39

Картина 2:8. Графики функций 46

Картина 2:9. Взаимоуничтожение точек пинча: проволочные каркасы 48

Картина 2:10. Взаимоуничтожение точек пинча: удаление скрытых линий 49

Картина 2:11. Взаимоуничтожение точек пинча: дальнейшая проработка рисунков 50

Картина 2:12. Выкручивание штанов 51

Картина 2:13. Расслаивание сферы и узел «восьмёрка» 53

Картина 2:14. Кабельный узел и компаньон узла 54

Картина 2:15. Кабельные шаблоны 55

Картина 2:16. Октаэдральное гиперболическое многообразие 56

Картина 2:17. Тетраэдральное гиперболическое многообразие 57

Картина 2:18. Борромеево орбиобразие 58

Картина 3:1. Линейная перспектива 61

Картина 3:2. Горизонт и зенит 64

Картина 3:3. Рецепт построения куба 67

Картина 3:4. Куб в трёх-, двух- и одноточечной перспективах 70

Картина 3:5. В поисках куба 71

Картина 3:6. Диагонали 74

Картина 3:7. Колесо и ось 76

Картина 3:8. Аксонометрия 78

Картина 3:9. Светотень 81

Картина 4:1. Угольник Пенроузов 87

Картина 4:2. Невозможный четырёхугольник 89

Картина 4:3. Трубопровод 90

Картина 4:4. Игральные кости 91

Картина 4:5. Фундаментальная группа 93

Картина 4:6. Кубическая решётка 96

Картина 4:7. Человек в кубе 97

Картина 4:8. Левая рука – правая рука 97

Картина 5:1. Самопересечение жёлоба 101

Картина 5:2. Коноид Пюккера 104

Картина 5:3. Как вылепить римскую поверхность 107

Картина 5:4. Гауссово отображение и скрещённый колпак 110

Картина 5:5. Поверхность Боя 113

Картина 5:6. Срез и тень 117

- Картинка 5:7.* Бутылка Уитни 119
Картинка 5:8. Римбойская деформация 121
Картинка 6:1. Золотой прямоугольник 126
Картинка 6:2. Скрещённый колпак и ручка 128
Картинка 6:3. Запрещённое выворачивание 131
Картинка 6:4. Преобразование теннисного мяча 133
Картинка 6:5. Шляпные диаграммы 137
Картинка 6:6. Астроида – дельтоида 138
Картинка 6:7. Монтаж погружений 140
Картинка 6:8. Выворачивание наизнанку по Морэну 142
Картинка 6:9. Кисеты 144
Картинка 6:10. Семейство астроида 148
Картинка 6:11. Машина катастроф 151
Картинка 6:12. Морэновское скручивание 153
Картинка 6:13. Рисунок, с которого всё началось 155
Картинка 7:1. Застёгивание кренделя на все молнии 159
Картинка 7:2. Как сплести гомотомизм 164
Картинка 7:3. Артинов переворот 166
Картинка 7:4. Сферические косы 167
Картинка 7:5. Фокус с тарелкой 169
Картинка 7:6. Завиток и дымовая труба 171
Картинка 7:7. Переворот ручки 175
Картинка 7:8. Диаграммы переворота 176
Картинка 7:9. Скручивания Ликориша 178
Картинка 7:10. Печать царя Соломона 181
Картинка 8:1. Проекция «восьмёрки» 188
Картинка 8:2. Шестигранное дополнение «восьмёрки» 189
Картинка 8:3. Шестигранная диаграмма склейки 191
Картинка 8:4. Натягивание на «восьмёрку» поверхности Зейферта 194
Картинка 8:5. Шесть поверхностей Хакена 196
Картинка 8:6. Наглядно-символическое изображение расслоения 198
Картинка 8:7. Сова и киска 200
Картинка 8:8. Изотопные поверхности Зейферта 202
Картинка 8:9. Тривиальное расслоение 203
Картинка 8:10. Крендельная восьмёрка 205
Картинка 8:11. Тетраэдральная восьмёрка I 206
Картинка 8:12. Тетраэдральная восьмёрка II 207
Картинка 8:13. Торическая изотопия сдвига 208
Картинка 8:14. Цилиндрическая изотопия сдвига 210
Картинка 8:15. Вычисление монодромии 212
Картинка 8:16. Расслоение Хопфа 213

Именной указатель

Римские номера страниц отсылают к вклейке. См. также в списке литературы указания в фигурных скобках о местах ссылок в тексте на приведённые в списке работы.

- Абель <Niels Henric Abel> 99
Абикофф <William Abikoff> 8, 10, 12
Азимов <Dan Asimov> 39
Александр Р. <Ralph Alexander> 13
Александр С. <Stephanie Alexander> 13
Альбрехт <Felix Albrecht> 13
Апери <François Apery> 11, 100, 102, 122–124, 217, 218, 220
Артманн <Benno Artmann> 44
Аткинсон <Bill Atkinson> 220
- Берг <Dave Berg> 13
Беккер <Rich Becker> 216
Берштейн <Israel Berstein> 8
Бирман <Joan Birman> 12, III, 163, 170
Бишоп <Dick Bishop> 13
Блэкмор <Colin Blackmore> 82
Бой <Werner Boy> 99, 100, 114, 116, 120, 123, 127, 130–132, 218
Бойер Дж. <Jeff Boyer> 114
Бойер К. <Carl Boyer> 27
Ботт <Raoul H. Bott> 131, 147
Брус <J. William Bruce> 134
Буге <Pierre Bouguer> 80, 84
Бэнчофф <Thomas F. Banchoff> 11, 44, 45, 112, 114, 156
- Ван Бюскирк <James M. Van Buskirk> 170
Веронезе <G. Veronese> 99
Винер <Christian Wiener> 83, 84
Вирк <Charles Vierck> 60
- Габай <David Gabai> 214
Гарднер <Martin Gardner> 59
Гаусс <Carl Friedrich Gauss> 132, 210
Гаффни <Terence Gaffney> 112
Гизекинг <Hugo Giesecking> 187
Гийемин <Victor Guillemin> 16, 20
Гийу <Lucien Guillou> 132
Гиллман <D. Gillman> 36
Гильберт <David Hilbert> 99, 109, 114
- Голубицкий <Martin Golubitsky> 16, 20
Гомбрич <E. H. Gombrich> 82
Грауштайн <W. C. Graustein> 132
Грегори <R. L. Gregory> 82
Грей <Stephen Gray> 45, 46
Гримм, братья <Die Brüder Grimm, Jacob и Wilgelm> 9
Гумбольдт А. <Alexander von Humboldt> 99
Гумбольдт В. <Wilhelm von Humboldt> 99
Гурвиц <Adolf Hurwitz> 170
- Дали <Salvador Dali> 6, 11
Декарт <René Descartes> 15
Ден <Max Dehn> 177
Джиблин <Peter G. Giblyn> 134
Дикк, фон <Walter von Dyck> 127
Дирак <Paul Adrien Maurice Dirac> 168
Доблин <Jay Doblin> 65, 75, 77
Дунс Скот <Joannes Duns Scotus> 34, 36
Дюрер <Albrecht Dürer> 6, 11, 61
- Загорский <Ed Zagorski> 10
Зауце <Max Sauze> 122
Зейферт <Herbert Seifert> 193, 210
Зиман <Eric Christopher Zeeman> 9, 27, 36, 152
- Иванов Николай Владимирович 6
Идашак <Ray Idaszak> 10, IV, V, 218, 219
Иллайз <Robert Illyes> 217
- Йёргенсен <Troels Jørgensen> 187, 199
- Каллахан <James Callahan> 9, 124
Каттер <Mark Cutter> 220
Кауан <Thaddeus Cowan> 88
Кауфманн-Бюлер <Walter Kaufmann-Bühler> 9
Кауффман <Louis Kauffman> 201
Киблер <Carl Kibler> 13

- Ким <Scott Kim> 82, 88
 Клейн <Felix Klein> 7
 Кокс <Donna Cox> 10, IV, V, 216, 217
 Кон-Фоссен С. Э. <Stefan Cohn-Vossen> 109
 Козн <Marshall Cohen> 36
 Крелль <August Leopold Crelle> 99
 Кремона <Luigi Cremona> 99
 Кронекер <Leopold Kronecker> 127
 Кроуэлл <R. H. Crowell> 43
 Крылов Н. Н. 81
 Ламберт <Johann Lambert> 80, 83
 Ландер <Les Lander> 9
 Ликориш <W. Lickorish> 177, 183
 Линдон <Roger Lyndon> 94
 Листинг <Johann Listing> 187
 Лобандиевский П. И. 81
 Лутус <Paul Lutus> 220
 Лутц <Larry Lutz> 13
 Магнус <Wilhelm Magnus> 12, 168, 170
 Маккрори <Clint McCrory> 112
 Маклеод <Robin McLeod> 9
 Макс <Nelson Max> 12, 44, 45, 138, 143, 156
 Макфарланд <Norm MacFarland> 10
 Марен <Alexis Marin> 132
 Маркс <Morris Marx> 7
 Марэн <André Marin> 12, 180, 184
 Масси <William Massey> 120
 Мах <Ernst Mach> 81
 Мёбиус <August Ferdinand Möbius> 99, 105, 106, 127, 129
 Милнор <John Milnor> 186
 Морэн <Bernard Morin> 11, 12, 47, 100, 114, 120, 122, 123, 130, 131, 138, 145–147, 156
 Мур <Carles Moore> 217
 Мэн С. А. 81
 Нагасэ <Teruo Nagase> 131, 154
 Нейль <William Neil> 24
 Николаидес <Kimon Nicolaïdes> 84, 85
 Нил <Dennis Kneale> 52, 207
 Нильсен <Jacob Nielsen> 158, 161
 Нойманн Б. <Bernhard Hermann Neumann> 94
 Нойманн Х. <Hanna Neumann> 94
 Ньюман <M. H. A. Newman> 168
 Орем <Nicole Oresme> 27
 Пайтген <Heinz-Otto Peitgen> 5
 Паркхерст <Bill Parkhurst> 220
 Пенроуз Л. <L. S. Penrose> 86, 88, 90
 Пенроуз Р. <Roger Penrose> 86, 88, 90
 Песталоцци <Johann Heinrich Pestalozzi> 99
 Понселе <Jean Victor Poncelet> 63
 Портьюз <Ian Porteous> 168
 Постон <Tim Poston> 9, 22, 52, 120
 Пти <Jean-Pierre Petit> 122, 136–138
 Пуанкаре <Henri Poincaré> 57, 93, 157, 158
 Пью <Charles Pugh> 138
 Райли <Robert Riley> 187
 Райнич <Yuri Rainich> 40
 Рассел <Bertrand Arthur William Russell> 7
 Рихтер <Peter N. Richter> 5
 Ролфсен <Dale P. Rolfsen> 36
 Ротман <Joe Rotman> 94
 Рэтклифф <John Ratcliffe> 12
 Рюсиус <Hermann Rusius> 13
 Скотт <Peter Scott> 59
 Смарт <Larry Smarr> 216
 Смейл <Stephen Smale> 5, 131, 132, 158
 Стиллвелл <John Stillwell> 11, 30, 89, 162
 Столлингз <John Stallings> 213
 Страусс <Charles Strauss> 11, 112
 Стюарт <Ian Stewart> 13, 22
 Суинсет <Richard Suiseth> 27
 Сурьо <Jérôme Souriau> 122
 Тайтус <Charles Titus> 7
 Теннисон <Alfred Tennyson> 219
 Тёрстон <William Thurston> 6, 8, 10, 12, 13, 43, 51, 52, 56, 57, 59, 180, 184, 186–188, 190, 192, 195, 199, 204, 207
 Том <René Thom> 9, 15, 25, 27, 124
 Томпкинз <Barbara Tompkins> 13
 Тороп <Rob Torop> 13
 Тройер <Stephanic Troyer> 12, 149
 Тэйт <P. G. Tait> 187
 Уайт <James White> 88, 200
 Уайтхед <Alfred North Whitehead> 7
 Уикс <J. Weeks> 106
 Уитни <Hassler Whitney> 9, 11, 15, 118, 120, 132, 146
 Уолпол <Horatio (Horace) Walpole> 9
 Фалес <Thales> 72
 Фейделл <E. Fadell> 170
 Филлипс <Anthony Phillips> 12, 136, 137
 Фокс <R. N. Fox> 43
 Фолкнер-Кинг <Vivian Faulkner-King> 10
 Франсис <George K. Francis> 5, 6, 12, 13, V
 Френч <Thomas French> 60
 Фрид <Dave Fried> 11

Фридман $\langle$ Michael Freedman $\rangle$ 158

Хакен $\langle$ Wolfgang Haken $\rangle$ 11, 195

Халмош $\langle$ Paul Halmos $\rangle$ 13

Хенричи $\langle$ Olaus Magnus Friedrich Erdmann Henrici $\rangle$ 15

Хигман $\langle$ Graham Higman $\rangle$ 94

Хирш $\langle$ Morris W. Hirsch $\rangle$ 132

Хопф $\langle$ Heinz Hopf $\rangle$ 123, 214

Хэлперн $\langle$ Ben Halpern $\rangle$ 65, 72, 114

Хэрер $\langle$ John Harer $\rangle$ 214

Хэтчер $\langle$ Allan Hatcher $\rangle$ 11, 12, 180, 184

Чудов Сергей Владимирович 32

Шапиро $\langle$ Arnold Shapiro $\rangle$ 131, 134–136

Шервуд Б. $\langle$ Bruce Sherwood $\rangle$ 10

Шервуд Дж. $\langle$ Judy Sherwood $\rangle$ 10

Шёнфлис $\langle$ Arthur Moritz Schoenflies $\rangle$ 7

Шольц $\langle$ Erhard Scholz $\rangle$ 112

Штейнер $\langle$ Jacob Steiner $\rangle$ 99, 112, 114

Шупп $\langle$ Paul Schupp $\rangle$ 12, 94

Эдмондз $\langle$ Allan Edmonds $\rangle$ 8

Эппел $\langle$ Carole Appel $\rangle$ 13

Эшер $\langle$ Maurits Escher $\rangle$ 6, 11, 34, 56, 85, 86, 105

Якоби $\langle$ Carl Gustav Jacob Jacobi $\rangle$ 99

Предметный указатель¹

Курсивом выделены номера страниц с соответствующими картинками. Римские номера страниц отсылают к вклейке.

- автоморфизм <automorphism> 199
– псевдоаносовский <pseudo-Anosov mapping> 199
антифазезис <anthyphaereisis> 125
Артина соотношение <Artin's relator> 165
артинов переворот <Artin swap> 166
астроида <astroid> 138, 148
базовая плоскость <base plane> 116
баночка <pill box> 152
бифуркация камертона <pitchfork bifurcation> 24
блеска точка <brilliant point, Glanzpunkt (нем.)> 82
блик 82
борромеево орбиобразии <Borromean orbifold> 58
Борромео кольца 59
Боя поверхность <Boy surface> 30, 31, 113, 145
бутылка <bottle>
– *Клейна* <Klein ~> 30, 31
– – проколота <punctured ~ ~> 196
– *Уитни* <Whitney ~> 119
велосипедная восьмёрка <wobbly hoop> 107
Веронезе поверхность <Veronese surface> 106
вид спереди или сбоку <elevation> 60
визуально-устойчивый <visually stable> 25
вложенный <embedded> 21
водопроводное соединение <plumbing> 135
вольность речи <abus de langage (франц.)> 103
– рисунок <~ de dessin (франц.)> 102
воротник (-чок) <collar> 168, 174
восьмёрка велосипедная <wobbly hoop> 107
восьмёрка (узел) <figure eight knot> 52, 53, 187, 188, 205–207
вполне непрерывная деформация <completely continuous deformation> 130
вращения индекс <winding number> 132
временное направление <temporal direction> 116
выворачивание наизнанку <eversion>
– – по *Максу* <Max ~> 45, 143
– – по *Морэну* <Morin ~> 45, 136, 142
– – по *Пти* <Petit ~> 137
– – по *Филлипсу* <Phillips ~> 137
– – по *Шapiro* <Shapiro ~> 131
– – сферы <sphere ~> 131, 143
высоты функция <height function> 184
гармонически сопряжённый <harmonic conjugate> 66
гаструла <gastrula> 143, 145
Гаусса–Бонне формула 127
гауссова кривизна <Gauss curvature> 110
– отображение <~ map> 110
геометрия <geometry>
– аналитическая <analytical ~> 99
– начертательная <descriptive ~> 15
– синтетическая <synthetic ~> 99
гептаэдр <heptahedron> 109
гессиан <Hessian (determinant)> 111
гессиана принцип <Hessian principle> 109
гипотеза *Морэна* <Morin's conjecture> 156
– *Пуанкаре* <Poincaré ~> 36, 157, 158
– *Уитни* <Whitney's ~> 120
гипоциклоида <hypocycloid> 146

¹ При повторении слова иногда заменяются на тире, даже если они имеют другие окончания. На возможность изменения окончания указывает курсивный шрифт (например, двойной).– *Прим. изд. ред.*

- голомомии линейная группа <linear homotopy group> 95
 гомотопий группа <homeotopy group> 177
 гомотопия регулярная <regular homotopy> 120, 132
 – римбойская <Romboy ~> 218
 – улиткина <Limaçon> IV, 218, 219
 горизонт <horizon> 63, 64
 горлышко <neck> 130
 гранично-несжимаемая поверхность <boundary incompressible surface> 195
 группа <group>
 – голономии линейная <linear homotopy ~> 95
 – гомотопий <homeotopy ~> 177
 – классов преобразований <mapping class ~> 157, 158
 – кос <braid ~> 165
 – сферическая <spherical ~ ~> 168
 – ортогональная <orthogonal ~> 77
 – первая гомотопическая <first homotopy ~> 157
 – фундаментальная <fundamental ~> 93, 157
 двойной <double>
 – кривая <~ curve> VIII, 20
 – линия <~ line> VIII, 20
 – обруч <~ hoop> 112
 – отношение <cross-ratio> 66
 – точка <~ point> 20
 – (4-мерной поверхности) <node> 115
 двусторонняя окружность <two-sided circle> 178
 дельтоида <deltoid> 25, 115, 138
 Дена скручивание <Dehn twist> 154, 172
 деформация <deformation>
 – вполне непрерывная <completely continuous ~> 130
 – римбойская <Romboy ~> 121
 – улиткина <Limaçon> IV
 диаграмма <diagram> 100, 137
 диск Мёбиуса <Möbius disc> 103
 Дунса яйцо <Duns egg> 36, 37, 42
 дымовая труба <chimney> 171, 173
 единичный вектор нормали <unit normal> 110
 – элемент <identity element> 157
 завиваться (извиваться) <writhe> 88
 завиток <whorl> 162, 163, 165, 171, 183
 задний свет <backlight> 83
 закон косинусов <cosine law> 82
 – обратных квадратов <inverse square ~> 82
 закручиваться (перекручиваться) <twist> 88
 затягивать 160
 зацепление <link>
 – расслоённое <fibred ~> 213
 – Хонфа <Hopf ~> 214
 зацепления коэффициент <linking number> 200, 201
 звезда вершины 36
 Зейферта поверхность <Seifert surface> 135, 194, 202
 преобразование <~ move> 199
 зенит <zenith> 64, 65
 зеркальный поворот <turn-reflection> 188
 золотой прямоугольник <golden rectangle> 125, 126
 идеальная плоскость <ideal plane> 63
 – прямая <~ line> 63
 – тетраэдр <~ tetrahedron> 187
 – точка <~ point> 63
 извивания индекс <writhing number> 200
 извивающаяся лента <~ ribbon> 199
 изоморфизм Майера–Вьеториса <Meyer-Vietoris isomorphism> 215
 изотопия <isotopy> 22, 158
 – сдвига <shear ~> 211
 – торическая <toroidal ~ ~> 208
 – цилиндрическая <cyindrical ~ ~> 210
 изофота <isophote> 83
 иллюзия кубов Неккера <Necker cube illusion> 32
 индекс вращения касательной <tangent winding number> 132
 – извивания <writhing number> 200
 – перекручивания <twisting ~> 200
 индикатор <indicator> 163
 индикаторный путь <~ path> 163
 интегральная кривизна <integral curvature> 130
 исчезающая точка <vanishing point> 63
 кабельный узел <cable knot> 52, 54, 56, 145
 кардиоида <cardioid> 219
 каркас линейный <line pattern> 28, 29
 – отсчёта <reference frame> 27, 28
 – проволочный <wire frame> 45, 47, 48
 Кармана зонтик 21
 картинка <picture (~), figure> 7, 14
 – многокрасочная <polychrome ~> 42
 – штопорная <corkscrew ~> 165
 каспидальная особенность <cusp singularity> 118
 катастроф машина <catastrophe machine> 151, 152
 катастрофа <catastrophe> 24

- гиперболическая омбилическая <hyperbolic umbilic ~> 124
- эллиптическая омбилическая <elliptic umbilic ~> 25
- киль <keel> 101
- кисет <tabacco pouch> 144
- кисета преобразование <~ ~ move> 144
- класс преобразований <mapping class> 158
- Клейна бутылка <Klein bottle> 30, 31
- проколотая <punctured ~> 196
- кодоскоп <overhead projector> 44
- колпак скрещённый <cross cap> IV, 38, 110, 112, 128
- шутовской <dunce hat> I, 34
- кольца *Борромео* 59
- компаньон <companion> 52, 54, 56
- коноид *Плюккера* <Plücker conoid> 103, 104
- контрольная кривая <marker curve> 197
- контур <contour> 22
- контурный рисунок <line drawing> 24, 28, 29
- коразрез <co-slit> 172
- кос группа <braid group> 165
- коса <braid> 164
- сферическая <spherical ~> 167
- коса-произведение <product ~> 165
- коэффициент зацепления <linking number> 200, 201
- край <border> VIII
- кратная перспектива <multiple perspective> 105
- крендель <double torus> 158, 159
- кривая <curve>
 - двойная <double ~> 20
 - контрольная <marker ~> 197
 - параболическая <parabolic ~> 109
- кривизна <curvature>
 - гауссова <Gauss ~> 110
 - интегральная <integral ~> 130
 - нормальная <sectional ~> 111
 - отрицательная <negative ~> 109
 - положительная <positive ~> 109
 - секционная <sectional ~> 111
 - средняя <mean ~> 111
- Кронекера-Дикка* формула <Kronecker-Dyck formula> 127
- круг фокальный <focal disc> 65
- Кэли* поверхность <Cayley surface> 23, 24
- Ламберта* закон косинусов <Lambert's cosine law> 82
- ласточкин хвост <swallowtail> 30, 145
- левый <left-handed> 24, 139
- лента <band (~), ribbon (*)>
 - извивающаяся <writhing *> 199
 - *Мёбиуса* <Möbius ~> 36, 37, 38, 39
 - *Морэна* <Morin ~> 150
 - перекрученная <twisting *> 199
 - свернувшаяся <curling *> 199
 - ленточная окрестность <ribbon neighborhood>
 - Ликорича* скручивание <Lickorish twist> 178
 - линейный каркас <line pattern> 28, 29
 - линия <line>
 - горизонта <horizon ~> 63, 64
 - двойная <double ~>
 - невидимая <hidden ~> 29
 - скрытая <hidden ~> 29, 45
 - линк вершины <vertex link> 36
 - луч-проектор <projector> 60
 - Майера-Вьеториса* изоморфизм <Meyer-Vietoris isomorphism> 215
 - матрица <matrix>
 - ортогональная <orthogonal ~> 77
 - специальная <special ~> 78
 - ортонормальная <orthonormal ~> 77
 - Маха* линия <Mach line> 85
 - принцип <~'s principle> 84
 - эффект <~ effect> 82
 - машина катастроф <catastrophe machine> 151, 152
 - меридиан <meridian> 135, 160
 - Мёбиуса* диск <Möbius disc> 103
 - лента <~ band> 36, 37, 38, 39
 - плёнка см. скрещённый колпак
 - многообразие <manifold> 56, 93
 - модель <model> 100
 - монодромия <monodromy> 199
 - Морса* функция <Morse function> 115, 185
 - Морэна* гипотеза <Morin's conjecture> 156
 - лента <Morin band> 150
 - наушники <~'s earphones> 136
 - поверхность <~'s surface> 30, 31, 139, 142, 143
 - преобразование кисета <~ tobacco pouch move> 144, 154
 - скручивание <~ twist> 153
 - Мурасуги* сумма <Murasugi sum> 214
 - наложение <superposition> 160
 - направление временное <temporal direction> 116
 - цветное <chromatic ~> 116
 - натягиваться <be spanned> 160
 - наушники *Морэна* <Morin's earphones> 136
 - начертательная геометрия <descriptive geometry> 15

- топология $\langle \sim \text{topology} \rangle$ 15
- невидимая линия $\langle \text{hidden line} \rangle$ 29
- Неккера иллюзия $\langle \text{Necker illusion} \rangle$ 32
- несжимаемая поверхность $\langle \text{incompressible surface} \rangle$ 195
- нить (косы) $\langle \text{strand} \rangle$ 164
- нормали единичный вектор $\langle \text{unit normal} \rangle$ 110
- нормаль $\langle \text{normal} \rangle$ 110
- нормальная кривизна $\langle \text{sectional curvature} \rangle$ 111
- поверхность $\langle \text{normal surface} \rangle$ 20
- область значений $\langle \text{target space} \rangle$ 20
- определения $\langle \text{source plane} \rangle$ 20
- образующая окружность $\langle \text{generating circle} \rangle$ 201
- обрамляющий треугольник $\langle \text{framing triangle} \rangle$ 67
- обратная петля $\langle \text{inverse loop} \rangle$ 157
- обратных квадратов закон $\langle \sim \text{square law} \rangle$ 82
- обруч двойной $\langle \text{double hoop} \rangle$ 112
- обруч-восьмёрка $\langle \text{wobbly} \sim \rangle$ 107
- общего положения $\langle \text{in general position} \rangle$ 15
- односторонняя окружность $\langle \text{one-sided circle} \rangle$ 178
- окно $\langle \text{window} \rangle$ 19, 201
- окружность $\langle \text{circle} \rangle$ 160
- двусторонняя $\langle \text{two-sided} \sim \rangle$ 178
- образующая $\langle \text{generating} \sim \rangle$ 201
- односторонняя $\langle \text{one-sided} \sim \rangle$ 178
- очевидная $\langle \text{obvious} \sim \rangle$ 172
- скручивания $\langle \text{twisting} \sim \rangle$ 172
- омбилическая гиперболическая катастрофа $\langle \text{hyperbolic umbilic catastrophe} \rangle$ 124
- эллиптическая катастрофа $\langle \text{elliptic} \sim \sim \rangle$ 25
- опираться $\langle \text{be supported} \rangle$ 109
- орбиобразие $\langle \text{orbifold} \rangle$ 58
- орт нормальный $\langle \text{unit normal} \rangle$ 110
- ортоцентр $\langle \text{orthocenter} \rangle$ 68
- оснащение $\langle \text{framing} \rangle$ 214
- особая точка $\langle \text{singular point} \rangle$ 20
- особенность $\langle \text{singularity} \rangle$ 22
- каспидальная $\langle \text{cusp} \sim \rangle$ 118
- типа складки $\langle \text{fold} \sim \rangle$ 22
- остриё $\langle \text{cusp} \rangle$ 24, 118
- отделка $\langle \text{decorations} \rangle$ 28, 29
- отмеченная точка $\langle \text{base point} \rangle$ II, 43, 157
- отображение $\langle \text{map(ping)} \rangle$
- гауссово $\langle \text{Gauss} \sim \rangle$ 110
- гладкое $\langle \text{smooth} \sim \rangle$ 20
- первого возвращения $\langle \text{first-return} \sim \rangle$ 199
- превосходное $\langle \text{excellent} \sim \rangle$ 146
- Пуанкаре $\langle \text{Poincaré} \sim \rangle$ 199
- собственное $\langle \text{proper} \sim \rangle$ 20
- тождественное $\langle \text{identity} \sim \rangle$ 158
- устойчивое $\langle \text{stable} \sim \rangle$ 20
- δ -близкое $\langle \delta\text{-close} \sim \rangle$ 20
- очевидная окружность $\langle \text{obvious circle} \rangle$ 172
- параболическая кривая $\langle \text{parabolic curve} \rangle$ 109
- параллель $\langle \text{longitude} \rangle$ 135, 160
- параметризация овалами $\langle \text{ovalesque parametrization} \rangle$ 219
- Паскаля трисектриса $\langle \text{Pascal's trisectrix} \rangle$ 218–219
- улитка $\langle \sim \text{limaçon} \text{ (франц.)} \rangle$ 218
- Пеано седло $\langle \text{Peano saddle} \rangle$ 112
- Пенроузов угольник $\langle \text{Penrose tribar} \rangle$ 86, 87
- первая гомотопическая группа $\langle \text{first homotopy group} \rangle$ 157
- первого возвращения отображение $\langle \text{first-return map} \rangle$ 199
- переворот $\langle \text{swap} \rangle$ 161, 182
- артинов $\langle \text{Artin} \sim \rangle$ 166
- ручки $\langle \sim \text{ping handle cores} \rangle$ 174, 175, 176
- перекатывание сборки $\langle \text{cusp rolling} \rangle$ 115, 122, 124
- переключение $\langle \text{switching} \rangle$ 210
- перекрученная лента $\langle \text{twisting ribbon} \rangle$ 199
- перекручивания индекс $\langle \sim \text{number} \rangle$ 200
- переход $\langle \text{over crossing} \rangle$ 43, 116
- перспектива $\langle \text{perspective} \rangle$ 60
- воздушная $\langle \text{aerial} \sim \rangle$ 60
- двухточечная $\langle \text{two-point} \sim \rangle$ 69, 70
- китайская $\langle \text{Chinese} \sim \rangle$ 153
- кратная $\langle \text{multiple} \sim \rangle$ 105
- линейная $\langle \text{linear} \sim \rangle$ 60, 61
- обратная 153
- одноточечная $\langle \text{one-point} \sim \rangle$ 69, 70
- трёхточечная $\langle \text{three-point} \sim \rangle$ 69, 70
- перспективная химера $\langle \text{perspective chimera} \rangle$ 105
- петля $\langle \text{loop} \rangle$ 157
- гомотопная нулю $\langle \text{null homotopic} \sim \rangle$ 157
- обратная $\langle \text{inverse} \sim \rangle$ 157
- тривиальная $\langle \text{trivial} \sim \rangle$ 157
- печать царя Соломона $\langle \text{King Solomon seal} \rangle$ 181, 184
- пиксел $\langle \text{pixel} \rangle$ 18
- пиктограмма $\langle \text{pictograph} \rangle$ 41
- пинч $\langle \text{pinch} \rangle$ 20, 26
- план $\langle \text{plan} \rangle$ 60

- плёнка Мёбиуса *см.* скрещённый колпак
- плоскость <plane>
- базовая <base ~> 116
 - идеальная <ideal ~> 63
 - предметная <object ~> 66
 - проективная <projective ~> 63
 - рисунка <picture ~> 19
 - управления <control ~> 152
- плотность линий <line density> 27
- площадка регулярная <regular patch> 19
- Плюккера коноид <Plücker conoid> 103, 104
- плюмбинг <plumbing> 135, 213
- поверхность <surface>
- Боя <Boy ~> 30, 31, 113
 - Веронезе <Veronese ~> 106
 - гранично-несжимаемая <boundary incompressible ~> 195
 - дважды линейчатая <doubly ruled ~> 16
 - Зейферта <Seifert ~> 135, 194, 202
 - линейчатая <ruled ~> 16
 - Морэна <Morin's ~> 30, 31, 139, 142, 143
 - несжимаемая <incompressible ~> 195
 - нормальная <normal ~> 20
 - порождённая кривой <generated by a curve> 16
 - римская <Roman ~> 30, 31, 107, 108
 - Хакена <Haken ~> 195, 196
 - Эннепера <Enneper's ~> 149
 - этруская <Etruscan ~> V, 219
- поворот зеркальный <turn-reflection> 188
- погружённый <immersed> 21
- подзорный конус <sight cone, visual cone> 65, 67
- подложка <underlay> 29
- поднять <elevate> 145
- подрезка <undercut> 84
- полутон <half-tone> 83
- поперечный разрез <cross cut> 153, 154, 172
- правый <right-handed> 24, 77, 139
- превосходное отображение <excellent map> 146
- предметная плоскость <object plane> 66
- преобразование <self-map> 158
- Зейферта <Seifert move> 199
 - кисета <tobacco pouch move> 144, 154
 - рельефное <relief ~> 61
 - теннисного мяча <baseball move> 133, 135
- принцип гессiana <Hessian principle> 109
- Фалеса <Thales' ~> 108, 123
- причёсывание ежа 118
- проволочный каркас <wire frame> 45, 47
- проворот <roll> 182
- продольный разрез <slit> 172
- проективное пространство <projective space> 63
- проекция <projection> 60
- аффинная <affine ~> 60
 - изометрическая <isometric ~> 79
 - кабинетная <cabinet ~> 77
 - кавальерная <cavalier ~> 77
 - косоугольная <oblique ~> 60
 - фронтальная диметрическая 77
 - ортогональная <orthographic ~> 60
 - параллельная <parallel ~> 60
- прозрачка <transparency> 42, 44
- произведение кос <product brade> 165
- петель <~ loop> 157
- проколотый <punctured>
- бутылка Клейна <~ Klein bottle> 196
 - тор <~ torus> 197
- проплешинка <bald spot> 118
- прорисовка <profiling> 28, 29
- пространство образов <target (space)> 20
- прообразов <source (space)> 20
 - проход <under crossing> 43, 116
- прямая идеальная <ideal line> 63
- псевдоаносовский автоморфизм <pseudo-Anosov mapping> 199
- Пуанкаре гипотеза <Poincaré conjecture> 36, 157, 158
- отображение <~ map> 199
- путь индикаторный <indicator path> 163
- рабочий рисунок <working figure> 41
- развернуть <uncurl> 218
- разрез поперечный <cross cut> 153, 154, 172
- продольный <slit> 172
- разрезов система <cut system> 184
- раскраска <painting> 114, <rendering> 217
- распарывание шва <seam splitting> 190, 195-197
- расслоение <fibration> 186, 197, 198
- тривиальное <trivial ~> 199, 203
 - Хопфа <Hopf ~> 213
- расслоённое зацепление <fibred link> 213
- ребро <edge>
- контурное <contour ~> 32
 - фасадное <face ~> 32
- регулярная гомотопия <regular homotopy> 120, 132
- площадка <~ patch> 19

- точка <~ point> 19
- режем-поворачиваем-клеим <cut-turn-glue> 173
- рекомбинация <recombination> 116
- рельефное преобразование <relief transformation> 61
- римбойская гомотопия <Romboy homotopy> 218
- деформация <~ deformation> 121
- римская поверхность <Roman surface> 30, 31, 107, 108
- рисунка плоскость <picture plane> 19
- сфера <~ sphere> 139
- рисунок <figure (~), drawing (*), picture> 8, 14
- контурный <line *> 28, 29
- рабочий <working ~> 41
- род <genus> 127
- ручка <handle> 127, 128, 175
- сборка <cup> 22, 23
- левая <left-handed ~> 24, 139
- правая <right-handed ~> 24, 139
- свернувшаяся лента <curling ribbon> 199
- светотень <chiaroscuro> 80, 81
- сдавливаемый <collapsible> 35, 36
- сдавливать <collapse> 35
- сдвига изотопия <shear isotopy> 211
- седло <saddle> VI, VII
- Пеано <Peano ~> 112
- секционная кривизна <sectional curvature> 111
- серединность <serendipity> 9, 43
- система разрезов <cut system> 184
- скелет <spine> 34–35
- складка <fold> 22
- скрепённая <crossed cusp> 116
- складываться <fold> 149
- скрещённый колпак <cross cap> IV, 38, 110, 112, 128
- складка <~ ed cusp> 116
- труба <~ ed tube> 118
- скручивание <twist> 161
- Дена <Dehn ~> 154, 172
- Ликориша <Lickorish ~> 178
- Морэна <Morin ~> 153
- скручивания окружность <twisting circle> 172
- скрытая линия <hidden line> 29, 45
- Смелята теорема <Smale's theorem> 132
- совмещение <superposition> 160
- соломонова печать <Solomon's seal> 181, 184
- соотношение Артина <Artin's relator> 165
- сохраняющий ориентацию <sense-preserving> 78
- спайн <spine> 35
- спелёнутый трилистник <diapered trefoil knot> II, 43
- спиралька <coil> 162, 163, 165, 183
- спрачивание <plumbing> 213
- средняя кривизна <mean curvature> 111
- срез <slice> 117
- стабильный элемент <stable element> 94
- стебель <stalk> 102
- стереопара <stereograph> 47
- стереоскоп <stereoscope> 47
- стирание <occlusion> 28
- стягиваемый <contractible> 36
- сумма Мурасуги <Murasugi sum> 214
- по краю <border ~> 129
- связанная <connected ~> 129
- сфера рисунка <picture sphere> 139
- сферическая группа кос <~ braid group> 168
- коса <~ braid> 167
- теннисного мяча преобразование <baseball move> 133, 135
- тень <shadow> 117
- теорема Смелята <Smale's theorem> 132
- Уитни–Грауштайна <Whitney-Graustein ~> 132
- Тёрстона треножник <Thurston's tripus> 192
- типичный <generic> 21
- тождественное отображение <identity map> 158
- тор <torus> 30, 31
- преобразования <mapping ~> 199
- проколотый <punctured ~> 197
- торический узел 56
- точка <point>
- ветвления <branch ~> 25, 26
- двойная <double ~> 20
- зенита <zenith ~> 64, 65
- идеальная <ideal ~> 63
- исчезающая <vanishing ~> 63
- особая <singular ~> 20
- острая <cuspidal ~> 24
- отмеченная <base ~> II, 43, 157
- пинча <pinch ~> 20, 26
- регулярная <regular ~> 19
- схода <vanishing ~> 63
- тройная <triple ~> 20
- трезубр <triprong> 31, 32
- треножник Тёрстона <Thurston tripus> 192
- тривиальное расслоение <trivial fibration> 199, 203
- трилистник <trefoil knot> 43
- спелёнутый <diapered ~ ~> II, 43
- трискетриса Паскаля <Pascal's trisectrix> 218–219

- тройная точка <triple point> 20
 тройник <tee> 192
 тупого угла условие <obtuse angle condition> 79
 угольник *Пенроуза* <Penrose tribar> 86, 87
 узел <knot (~), node (*)>
 – «восьмёрка» <figure eight ~> 52, 53, 187, 188
 – (двойная точка 4-мерной поверхности) <(*)> 115
 – кабельный <cable ~> 52, 54, 56, 145
 – торический 56
Уитни бутылка <Whitney bottle> 119
 – гипотеза <~'s conjecture> 120
 – зонтик <~ umbrella> VIII, 21, 102
 – теорема 118
 – топология <~ topology> 20
Уитни–Граустайна теорема <Whitney–Graustein theorem> 132
 улитка *Паскаля* <limaçon of Pascal> 218
 улиткина деформация (гомотопия) <Limaçon> IV, 218, 219
 управления плоскость <control plane> 152
 управляющая переменная <~ variable> 28
 ус <whisker> 49, 102
 условие тупого угла <obtuse angle condition> 79
 устойчивый <stable> 15, 20
 – визуально <visually ~> 25
Фалеса принцип <Thales' principle> 108, 123
 – треугольник <~ triangle> 72
 фасет <facet> 217
 фокальный <focal>
 – круг <~ disc> 65
 – множество <~ set> 133
 – расстояние <~ distance> 61, 65
 – центр <~ center> 65, 77
 фокус <focus> 66
 фундаментальная группа <fundamental group> 93, 157
 функция высоты <height function> 184
 – *Морса* <Morse ~> 115, 185
Хакена поверхность <Haken surface> 195, 196
 характеристика эйлера <Euler characteristic> 118, 127, 185
 химера перспективная <perspective chimeras> 105
Хопфа зацепление <Hopf link> 214
 – расслоение <~ fibration> 213
 цветовое направление <chromatic direction> 116
 центр поля зрения <center of vision> 65
 – фокальный <focal ~> 65
 четвертьтон <quarter-tone> 84
 шляпа (*Морэна*) <chapeau> 130
 штаны <pair of pants> 51
Штейнера скрещённый колпак <Steiner cross cap> IV, 38, 110, 112, 128
 штопорная картинка <corkscrew picture> 165
 шутовской колпак <dunce hat> I, 34
Эйлера нормальное число 118
 эйлера характеристика <Euler characteristic> 118, 127, 185
 элемент <element>
 – единичный <identity ~> 157
 – стабильный <stable ~> 94
Эннепера поверхность <Enneper's surface> 149
 этруская поверхность <Etruscan ~> V, 219
 якобиан <Jacobian (determinant)> 24, 110
HNN-расширение <HNN-extension> 94
 δ -близкое отображение < δ -close map> 20
 1-сдавливаемый <1-collapsible> 36
 $3/4$ тона < $3/4$ -tone> 84

Оглавление

От редактора перевода	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ГЛАВА 1. Начертательная топология	15
Седло в коробке (картинка 1)	16
Седло в барабане (картинка 2)	17
Зонтик Уитни (картинка 3)	18
Сборка Кэли (картинка 4)	22
Точка пинча – точка ветвления (картинка 5)	25
ГЛАВА 2. Идея и воплощение	27
Кубическая метафора (картинка 1)	27
Основные примеры поверхностей (картинка 2)	30
Трезубр (картинка 3)	30
Сглаживание полиэдрального седла (картинка 4)	33
Шутовской колпак (картинка 5)	34
Яйцо Дунса (картинка 6)	36
Лента Мебиуса (картинка 7)	38
Тушь и бумага	40
Мел и доска	40
Слайды и прозрачки	44
Компьютер и чертёжный стол	44
Графики функций (картинка 8)	45
Взаимоуничтожение точек пинча: проволочные каркасы (картинка 9)	47
Взаимоуничтожение точек пинча: удаление скрытых линий (картинка 10)	48
Взаимоуничтожение точек пинча: дальнейшая проработка рисунков (картинка 11)	49
Выкручивание штанов (картинка 12)	50
Расслаивание сферы и узел «восьмёрка» (картинка 13)	52
Кабельный узел и компаньон узла (картинка 14)	52
Кабельные шаблоны (картинка 15)	56
ГЛАВА 3. Рисунки в перспективе	60
Линейная перспектива (картинка 1)	61
Горизонт и зенит (картинка 2)	63
Рецепт построения куба (картинка 3)	67
Куб в трёх-, двух- и односточечной перспективах (картинка 4)	69
В поисках куба (картинка 5)	69
Диагонали (картинка 6)	73
Колесо и ось (картинка 7)	75

Аксометрия (картинка 8)	77
Светотень (картинка 9)	80
ГЛАВА 4. Невозможный угольник	86
Угольник Пенроузов (картинка 1)	86
Невозможный четырёхугольник (картинка 2)	88
Трубопровод (картинка 3)	89
Игральные кости (картинка 4)	90
Фундаментальная группа (картинка 5)	92
Кубическая решётка (картинка 6)	95
Человек в кубе (картинка 7)	95
ГЛАВА 5. Тени из других измерений	99
Самопересечение жёлоба (картинка 1)	100
Коноид Плюккера (картинка 2)	103
Как вылепить римскую поверхность (картинка 3)	106
Гауссово отображение и скрещённый колпак (картинка 4)	109
Поверхность Боя (картинка 5)	112
Срез и тень (картинка 6)	116
Бутылка Уитни (картинка 7)	118
Римбойская деформация (картинка 8)	120
ГЛАВА 6. Выворачивания сферы наизнанку	125
Золотой прямоугольник (картинка 1)	125
Скрещённый колпак и ручка (картинка 2)	127
Запрещённое выворачивание (картинка 3)	130
Преобразование теннисного мяча (картинка 4)	132
Шляпные диаграммы (картинка 5)	137
Астроида – дельтоида (картинка 6)	138
Монтаж погружений (картинка 7)	139
Выворачивание наизнанку по Морэну (картинка 8)	141
Кисеты (картинка 9)	144
Семейство астроида (картинка 10)	147
Машина катастроф (картинка 11)	151
Морэновское скручивание (картинка 12)	152
ГЛАВА 7. Групповые картинки	157
Застёгивание кренделя на все молнии (картинка 1)	158
Как сплести гомеоморфизм (картинка 2)	163
Артинов переворот (картинка 3)	165
Сферические косы (картинка 4)	165
Фокус с тарелкой (картинка 5)	168
Завиток и дымовая труба (картинка 6)	170
Переворот ручки (картинка 7)	174
Диаграммы переворота (картинка 8)	174
Скручивание Ликориша (картинка 9)	178
Печать царя Соломона (картинка 10)	180
ГЛАВА 8. Узел «восьмёрка»	186
Различные проекции «восьмёрки» (картинка 1)	187
Шестигранное дополнение «восьмёрки» (картинка 2)	188

Шестигранная диаграмма склейки (картинка 3)	190
Натягивание на «восьмёрку» поверхности Зейферта (картинка 4)	193
Шесть поверхностей Хакена (картинка 5)	195
Наглядно-символическое изображение расслоения (картинка 6)	197
Сова и киска (картинка 7)	199
Изотопные поверхности Зейферта (картинка 8)	201
Тривиальное расслоение (картинка 9)	203
Крендельная восьмёрка (картинка 10)	204
Тетраэдральная восьмёрка I (картинка 11)	204
Тетраэдральная восьмёрка II (картинка 12)	207
Торическая изотопия сдвига (картинка 13)	208
Цилиндрическая изотопия сдвига (картинка 14)	209
Вычисление монодромии (картинка 15)	211
Расслоение Хопфа (картинка 16)	213
 Постскрипtum	 216
Литература	221
Указатель картинок и фото	226
Именной указатель	228
Предметный указатель	231



Фото I. Шутовской колпак, нарисованный на доске. (Снято при естественном освещении на высокочувствительной цветной обратимой плёнке «Эктахром» для дневного света.) [Заметим, что на этих сделанных в 1979 г. рисунках автор пишет *dunce car*, в самой же книге используется термин *dunce hat* (*car* — шапка, *hat* — шляпа). Кроме того, рисунки I и II надо поменять местами.— Изд. ред. и перев.]



Фото II. Сплёнутый трилистник. [На верхнем рисунке оранжевая надпись *basept* – сокращение от *base point* (отмеченная точка). На нижнем рисунке слова, подчеркнутые красным мелком, означают: «Просьба не стирать!» (нем.). – Изд. ред. и перев.]

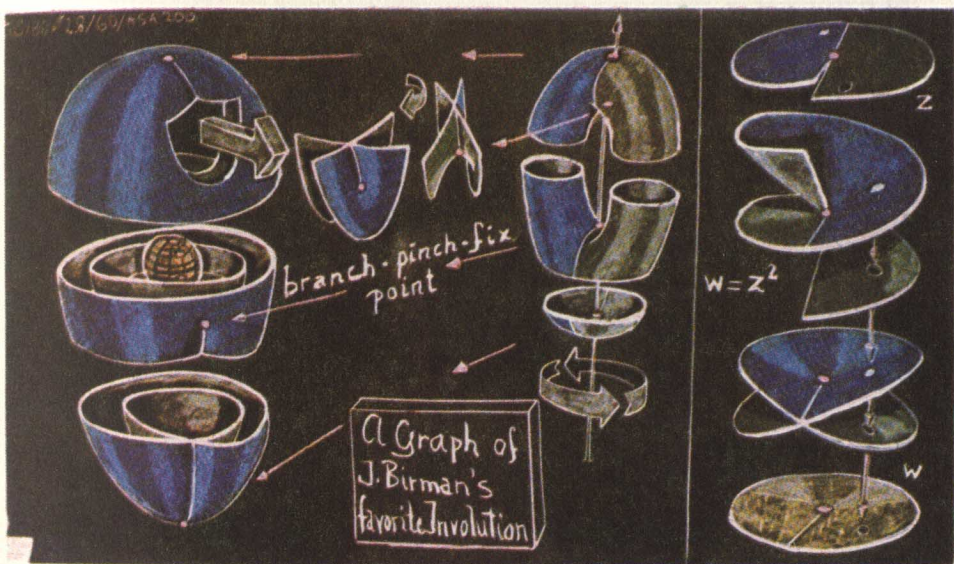


Фото III. Любимая инволюция Джоун Бирман. [Перевод надписей на рисунке: branch-pinch-fix point – неподвижная точка ветвления-пинча; A Graph of J. Birman's favorite Involution – Изображение любимой инволюции Дж. Бирман. – Изд. ред.]

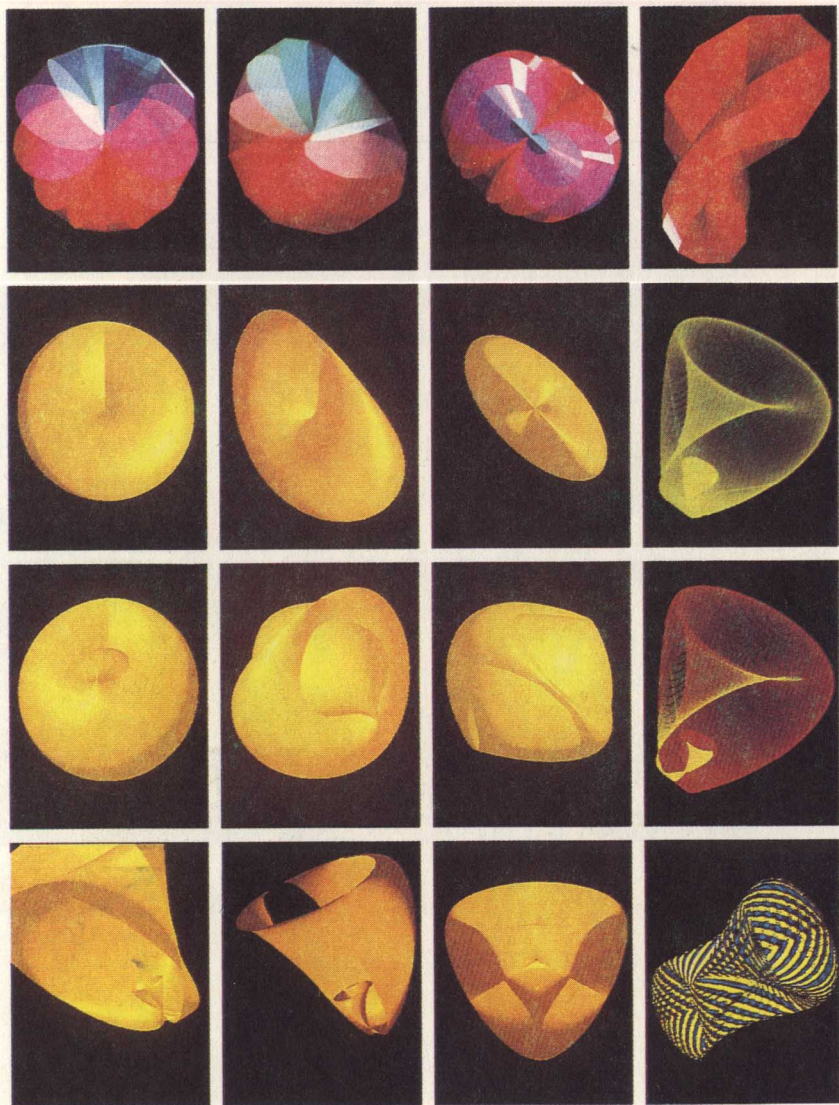


Фото IV. Скрещённый колпак и улиткина деформация. (Донна Кокс и Рей Идашак, «Электроник Имиджинг Лаборатори» и Национальный центр по приложениям суперкомпьютеров, Иллинойский университет.)

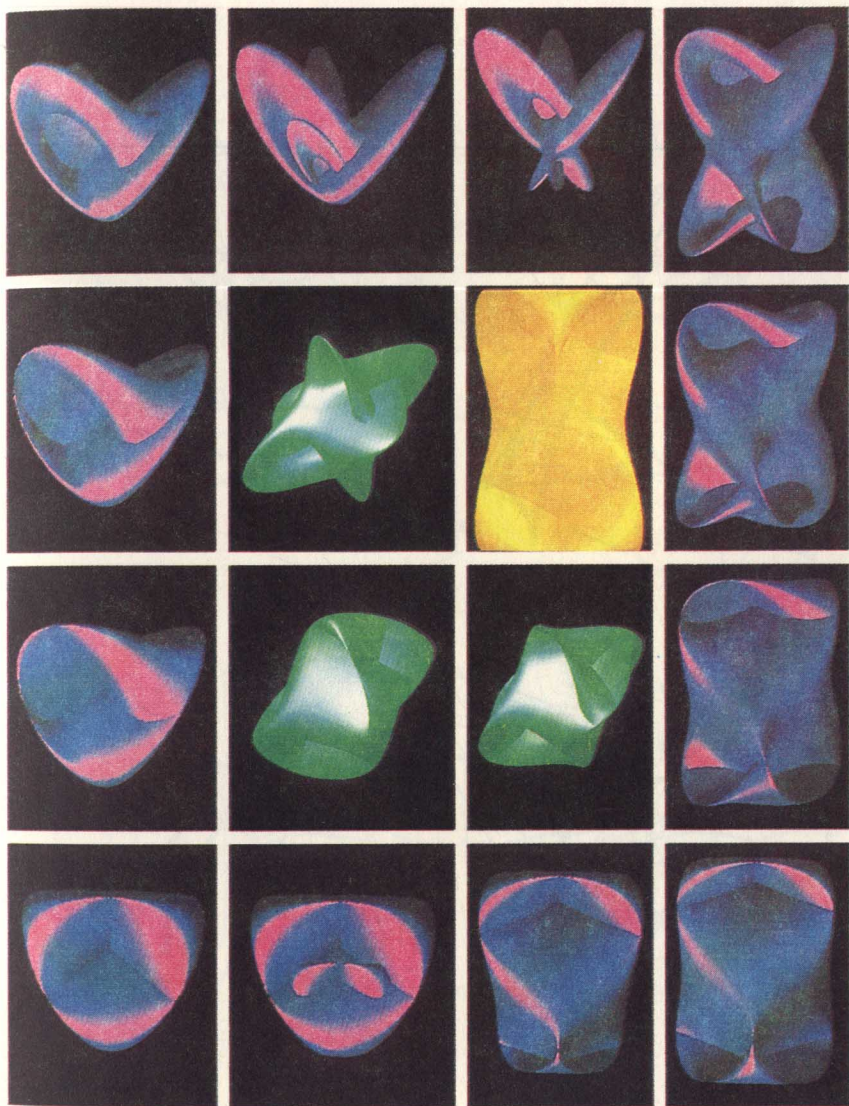
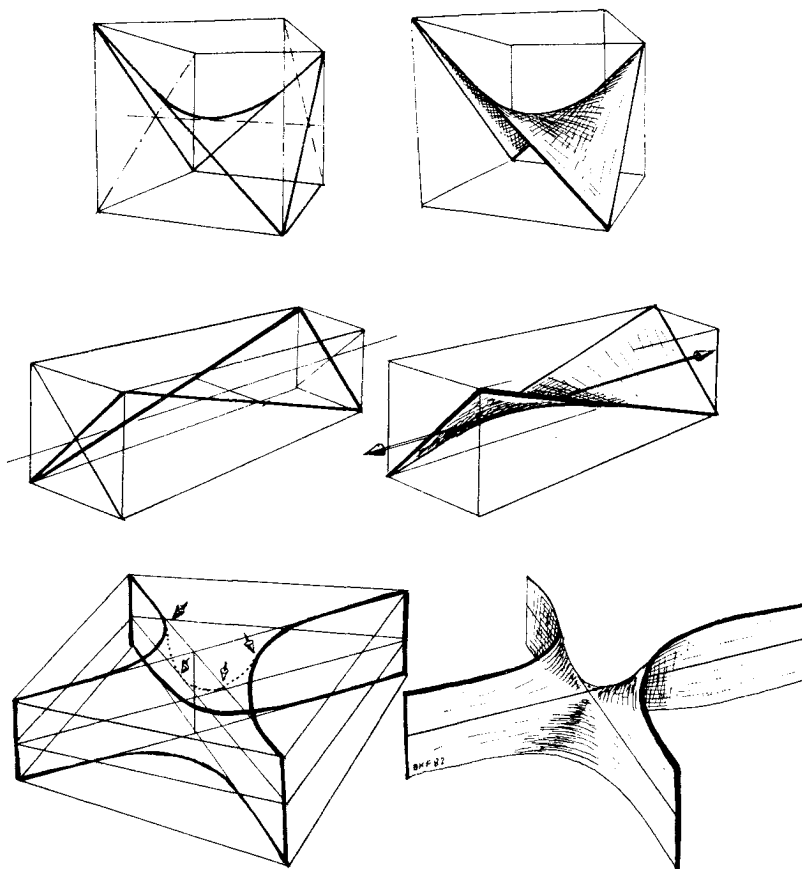
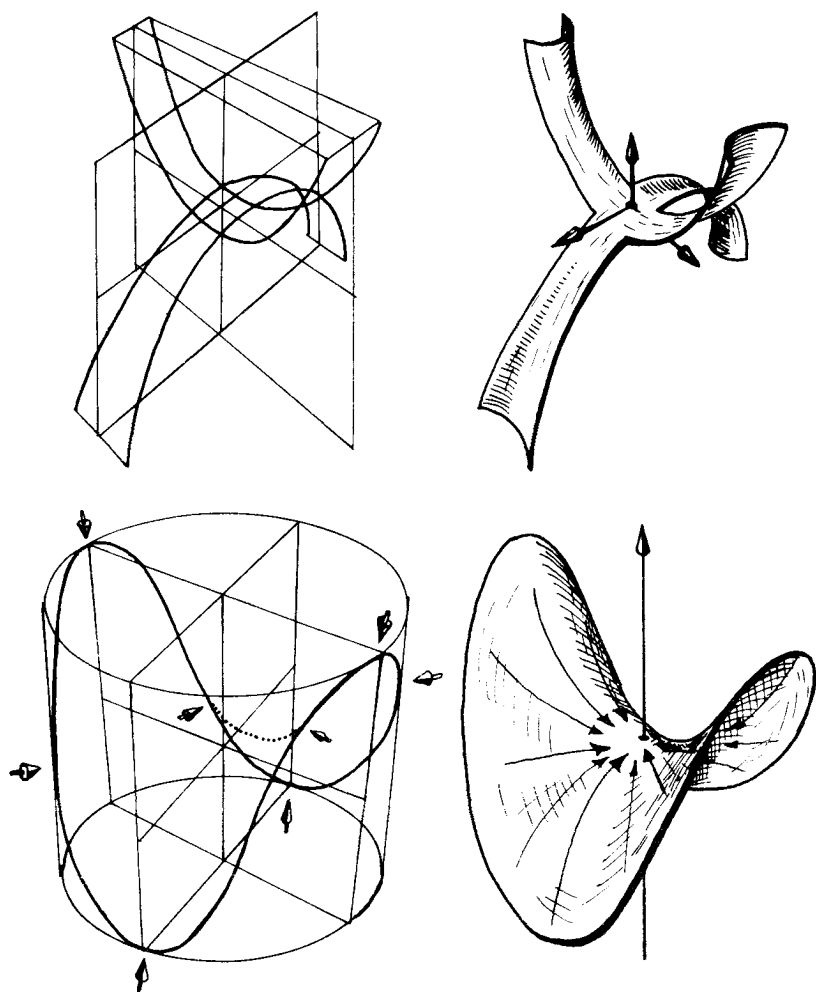


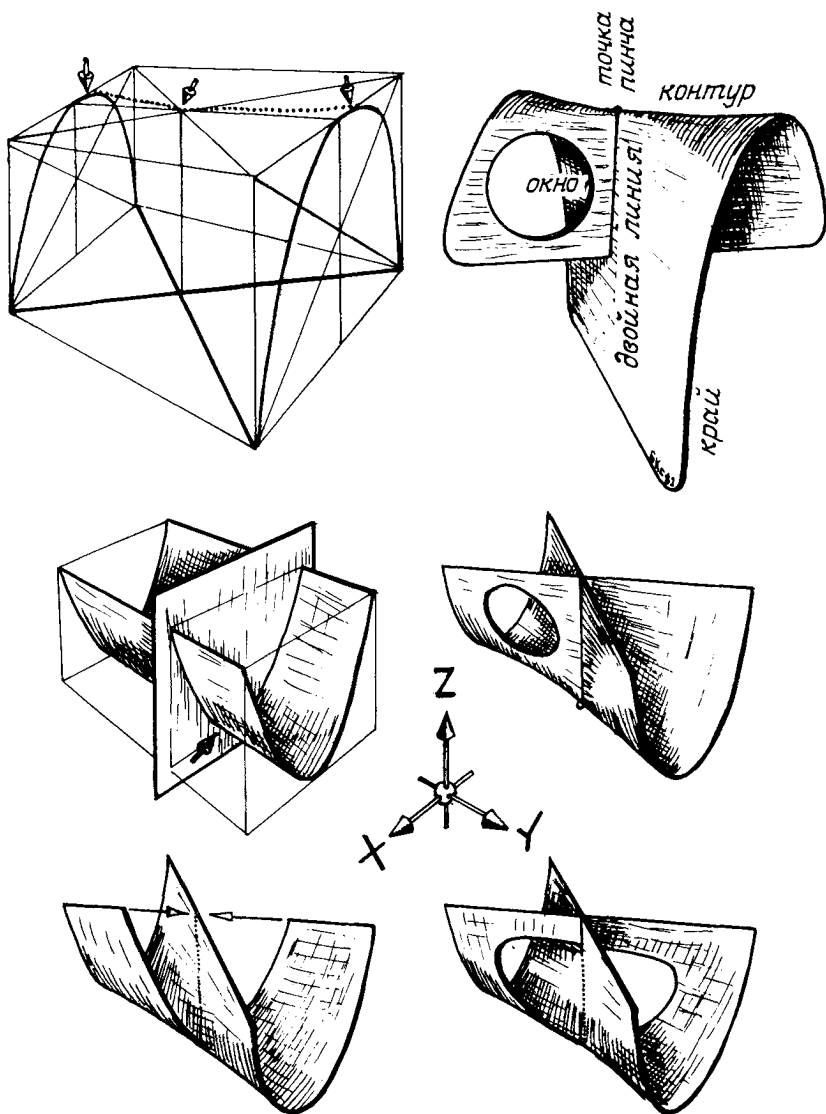
Фото V. Этруская Венера. (Донна Кокс, Джордж Франсис и Рей Идашак, Национальный центр по приложениям суперкомпьютеров, Иллинойский университет.)



Картинка 1. Седло в коробке.



Картинка 2. Седло в барабане.



Картинка 3. Зонтик Уитни.