

LECTURES ON RINGS AND MODULES

JOACHIM LAMBEK
McGill University

BLAISDELL PUBLISHING COMPANY
A DIVISION OF GINN AND COMPANY

WALTHAM, MASSACHUSETTS • TORONTO • LOND
1966

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

И. ЛАМБЕК

КОЛЬЦА И МОДУЛИ

Перевод с английского

А. В. МИХАЛЕВА

Под редакцией

Л. А. СКОРНЯКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1971

Книга является введением в теорию колец и содержит элементы гомологической алгебры. Несмотря на небольшой объем, она включает в себя не только основные результаты из этой области, но и полученные в последнее время результаты, связанные с кольцами частных. Для книги характерны систематичность и аккуратность изложения, выбор наиболее естественных и быстро приводящих к цели доказательств.

Книга предназначена прежде всего для алгебраистов, но математики других специальностей найдут в ней много интересного. Она будет полезна студентам, аспирантам и преподавателям пединститутов, университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

За последнее десятилетие за рубежом появилось довольно много книг, посвященных теории колец и модулей, например Беренс (1965), Кертес (1967), Пирс (1968), Рибенбойм (1969), Са Чин-хан (1967), Херстейн (1968). При этом ни один из авторов не стремился написать всеобъемлющую монографию, подобную замечательной работе А. Г. Куроша по теории групп, а концентрировал свое внимание вокруг тех или иных специальных вопросов. С другой стороны, каждый из авторов стремился сделать свою книгу замкнутой в себе, что заставляло его излагать основы теории колец. И это изложение занимало большую часть объема. По этому же плану построена и предлагаемая вниманию читателя книга Ламбека. Следует только подчеркнуть, что русский читатель не избалован изложениями основ теории колец: с радикалом Джекобсона он может ознакомиться, пожалуй, только по его «Строению колец» (1962).

Каковы же специальные вопросы, привлекающие внимание Ламбека? В первую очередь, это кольца частных. Кроме того, можно назвать плоские модули и групповые кольца (последним посвящено дополнение, написанное Коннелом). Следует отметить, что в последние годы теории колец частных посвящены многочисленные работы. Обзор этих результатов (без доказательств) дан в статье В. П. Елизарова (1969).

Таким образом, книга Ламбека дает еще одну возможность изучить основы теории колец, причем предлагаемое изложение более доступно для начинающего, чем изложение у Джекобсона. Несомненный интерес представляет и компактное изложение вопросов, относящихся к теории колец частных. Полезные факты сообщаются в разделах, касающихся плоских модулей и групповых колец.

При подготовке русского издания исправлены неточности, имевшиеся в английском тексте. В этой работе существенно помогли замечания проф. Ламбека, которому переводчик и редактор перевода весьма благодарны. Список литературы дополнен монографиями и обзорами по теории колец и модулей, имеющимися на русском языке. При ссылках на литературу, имеющуюся в русском переводе, мы указываем страницы и год русского издания.

Л. А. Скорняков

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга рассчитана на аспирантов, а также на подготовленных студентов, желающих познакомиться с ассоциативными кольцами и модулями над ними. (Все кольца предполагаются имеющими единицу, поскольку если опустить это условие, то за достигнутую таким путем общность придется платить усложнением изложения.) В книге затронуты разные темы, однако мы не считаем, что хотя бы по одной из них сказано последнее слово. Некоторым областям, в разработке которых автор лично участвовал, отводится больше места, чем другим. По сравнению с более ранними книгами на эту тему несколько более заметное место отведено «кольцам частных» в том виде, как они появились в работах Джонсона, Утуми, Голди и других.

В вводной главе (гл. 1) делается попытка изложить основные понятия алгебры с тем, чтобы сделать изложение замкнутым в себе. Глава 2 содержит избранные результаты, касающиеся булевых колец и других классов коммутативных колец. Впрочем, некоторые из этих результатов доказываются далее в большей общности. В гл. 3 излагается классическая структурная теория ассоциативных колец (лишь то, о чем можно рассказать без понятия инъективности). В гл. 4 подробно рассматриваются инъективные модули и кольца частных. В гл. 5 содержится введение в гомологическую алгебру, высшей точкой которого является новая техника диаграммного поиска.

Мои представления о предмете менялись в процессе написания книги, и вполне вероятно, что сейчас я бы скомпоновал материал по-другому. Однако я

воздержался от чрезмерных переделок, опасаясь нарушить непосредственность изложения. Я также сожалею, что в книгу не удалось включить многие важные темы, в том числе тела, группу Брауэра, квазифробениусовы кольца, полиномиальные тождества, ультрапроизведения, прямые и обратные пределы, гомологическую размерность.

Читателю рекомендуется не так уж неуклонно следовать порядку изложения, а перескакивать вперед и назад в соответствии с его интересами и успехами в понимании материала. Некоторые предварительные сведения могут быть пропущены более подготовленным читателем, с тем, чтобы вернуться к ним лишь в тот момент, когда они понадобятся. Это относится, например, к гл. 1, § 2.1, 2.2. Некоторые вопросы, хотя и представляющие особый интерес для автора, при первом чтении можно опустить, например § 2.3—2.5, 4.3—4.7 и приложение 1.

Я многим обязан Цассенхаузу и Хигману, лекции которых по теории колец я посещал много лет назад. Естественно, ни в какой степени их нельзя считать ответственными за недостатки этого текста.

В основных чертах изложенный материал дает представление о содержании курса по теории колец для аспирантов, читавшегося в Мак-Гильском университете в 1962—1963 гг., и части курса по гомологической алгебре. Часть книги была написана в Летней школе Канадского математического конгресса. Часть материала возникла в результате давнего сотрудничества с Финдлеем. Приложение 3 было любезно написано Коннелом.

Мне хочется поблагодарить моих студентов и коллег за их стимулирующий интерес и поддержку. Я особенно благодарен за проверку отдельных разделов рукописи Армстронгу, Мире Бхаргаве, Розмари Бонюн, Марте Бунге, Бергесу, Бушу, Коннелу, Фейту, Клейнеру, Дане Шломьюк, Сторреру, Утуми и Диане Уай.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1.1. Кольца и связанные с ними алгебраические системы

Начнем с ряда определений, скорее из желания добиться полноты изложения и уточнить используемые обозначения и понятия, чем из стремления ознакомить читателя с новыми вещами.

Полугруппой называется система $(S, \cdot)$, где S — множество и $\cdot$ — бинарная операция на S , для которой справедлив закон ассоциативности

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(В таких случаях подразумевается, что тождество справедливо при всех a, b, c из S .) Обычно мы будем опускать знак $\cdot$ и писать просто ab вместо $a \cdot b$. Полугруппа с 1 (часто называемая также *моноидом*) — это система $(S, 1, \cdot)$, где $(S, \cdot)$ — полугруппа, а 1 — отмеченный элемент множества S (его можно рассматривать как 0-арную операцию), удовлетворяющий тождеству

$$a1 = a = 1a.$$

Группой называется система $(S, 1, {}^{-1}, \cdot)$, где $(S, 1, \cdot)$ — полугруппа с 1, а ${}^{-1}$ — такая унарная операция, что

$$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a.$$

Согласно традиции, символ операции ${}^{-1}$ пишется после аргумента. *Абелева группа* — это группа, в которой справедлив закон коммутативности

$$ab = ba.$$

Абелеву группу часто записывают аддитивно: $(S, 0, -, +)$. Однако символ $+$ никогда не опускается, а $-$ пишется перед аргументом.

Кольцом (ассоциативным и с 1) называется система $(S, 0, 1, -, +, \cdot)$, где $(S, 0, -, +)$ — абелева группа, а $(S, 1, \cdot)$ — полугруппа с 1, удовлетворяющие законам дистрибутивности

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Коммутативное кольцо — это кольцо, в котором справедлив закон $ab = ba$. Элемент 1 в кольце называют единицей. Следует предостеречь читателя: многие авторы не предполагают существования единицы с кольце.

Введенные алгебраические системы задавались как множества с некоторыми операциями (0-арными, унарными, бинарными, ...), удовлетворяющими некоторым тождествам. Класс всех систем с данным множеством операций, удовлетворяющих данному множеству тождеств, назовем *многообразием*¹⁾. Многообразиями являются, например, класс всех групп и класс всех колец.

Телом называется кольцо, в котором

$$0 \neq 1 \text{ \& } \forall_{a \neq 0} \exists_b (ab = 1 \text{ \& } ba = 1).$$

Коммутативное тело называется *полем*.

Класс тел не был задан как многообразие. Более того, как мы увидим позже, он и не может быть так задан.

Иногда предлагают включать в определение кольца условие $0 \neq 1$. При добавлении этого постулата мы потеряем лишь одно кольцо (нулевое), но кроме того, мы лишимся полезной возможности рассматривать класс колец как многообразие.

Упорядоченным множеством (иногда говорят «частично упорядоченным») называется система $(S, \leq)$, где S — множество, а $\leq$ — бинарное отношение на множестве S , удовлетворяющее законам рефлексивности, транзитивности и антисимметричности:

$$a \leq a, \quad (a \leq b \text{ \& } b \leq c) \Rightarrow a \leq c, \quad (a \leq b \text{ \& } b \leq a) \Rightarrow a = b.$$

¹⁾ Автор использует термин «эквационально определенный класс» (equationally defined class). В русской литературе употребляется также термин «примитивный класс». — *Прим. перев. и ред.*

(Универсальные кванторы подразумеваются.) Заметим, что $\leq$ является отношением, а не операцией, и постулаты для упорядоченного множества являются импликациями, а не уравнениями. Упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным*, если для любых двух элементов a и b имеет место либо $a \leq b$, либо $b \leq a$. *Полуструктурой* называется упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов a, b существует точная нижняя грань, или $\inf$ (от «infimum») $a \wedge b$ ¹⁾. Таким образом, полуструктура является системой $(S, \leq, \wedge)$, где $(S, \leq)$ — упорядоченное множество, а $\wedge$ — бинарная операция, удовлетворяющая следующему условию:

$$c \leq a \wedge b \Leftrightarrow (c \leq a \text{ \& } c \leq b). \quad (1)$$

Очевидно, линейно упорядоченное множество является полуструктурой.

Рассмотрим несколько примеров упорядоченных множеств:

Пример 1. Положительные целые числа с отношением «меньше или равно».

Пример 2. Положительные целые числа с отношением «делит».

Пример 3. Множество всех подмножеств множества N (пусть, например, N — множество положительных целых чисел) с отношением включения «содержится в».

Лишь первое из этих множеств линейно упорядочено. Однако все три множества являются полуструктурами и точная нижняя грань двух элементов является их минимумом в первом случае, наибольшим общим делителем во втором и пересечением в третьем.

Предложение 1. Класс полуструктур может быть определен как многообразие всех полугрупп $(S, \wedge)$,

¹⁾ Точная нижняя грань $a \wedge b$ определяется условием $c \leq a \wedge b \Leftrightarrow (c \leq a \text{ \& } c \leq b)$. — Прим. ред.

удовлетворяющих законам коммутативности и идемпотентности:

$$a \wedge b = b \wedge a, \quad a \wedge a = a.$$

Доказательство (набросок). Если операция $\wedge$ удовлетворяет условию (1), то выполнение законов ассоциативности, коммутативности и идемпотентности для $\wedge$ легко проверяется; следовательно, справедливо утверждение

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a. \quad (2)$$

Обратно, можно использовать (2) для определения отношения $\leq$ в полугруппе $(S, \wedge)$ и без труда доказать выполнение законов рефлексивности, транзитивности и антисимметричности, а также условия (1).

Структурой называется система $(S, \leq, \wedge, \vee)$, в которой для любых двух элементов a и b существует точная нижняя грань $a \wedge b$ и точная верхняя грань, или $\sup$ (от «supremum») $a \vee b$ ¹⁾. Ясно, что линейно упорядоченное множество является структурой, причем $a \wedge b = a$ или b и $a \vee b = b$ или a . Структура с 0 или 1 — это структура, в которой всегда

$$0 \leq a, \quad a \leq 1.$$

Элемент a' называется **дополнением** элемента a , если

$$a \wedge a' = 0, \quad a \vee a' = 1.$$

Если каждый элемент обладает дополнением, то говорят, что $(S, \leq, \wedge, \vee)$ — **структура с дополнениями**. Структура называется **дистрибутивной**, если

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Заметим, что дополнения в дистрибутивной структуре (если они существуют) определены однозначно. Действительно, пусть a' и a^* — дополнения элемента a . Тогда

$$\begin{aligned} a^* &= a^* \wedge 1 = a^* \wedge (a \vee a') = (a^* \wedge a) \vee (a^* \wedge a') = \\ &= 0 \vee (a^* \wedge a') = a^* \wedge a' = \dots = a'. \end{aligned}$$

¹⁾ Точная верхняя грань $a \vee b$ определяется условием $c \geq a \vee b \Leftrightarrow (c \geq a \text{ \& } c \geq b)$. — Прим. ред.

Нетрудно заметить, что в дистрибутивной структуре справедлив также и дуальный закон дистрибутивности

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)^1).$$

Опять прервем изложение и обратимся к нашим трем примерам. В действительности все три множества являются структурами, где точная верхняя грань двух элементов определяется соответственно как максимум, наименьшее общее кратное и объединение. Каждый из этих примеров дает нам дистрибутивную структуру, но лишь третий из них — структуру с дополнениями. Для того чтобы читатель не сделал отсюда вывод, что все упорядоченные множества являются дистрибутивными структурами, ему предлагается придумать самому ряд контрпримеров. Читатель, возможно, пожелает также рассмотреть следующие примеры дистрибутивных структур: все конечные подмножества множества N с отношением «содержится в», все бесконечные и пустое подмножество множества N с отношением «содержит».

Вот несколько других примеров дистрибутивных структур с дополнениями:

Пример 4. Все делители данного положительного целого числа, не делящегося на квадрат целого числа, большего 1, с отношением «делит».

Пример 5. Все конечные подмножества и дополнения конечных подмножеств множества N с отношением «содержится в».

Пример 6. Все подмножества множества N «по модулю» конечных подмножеств (т. е. мы отождествляем два подмножества множества N тогда и только тогда, когда они отличаются лишь на конечное множество)²⁾.

¹⁾ $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = a \vee (b \wedge a) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$. — *Прим. ред.*

²⁾ Здесь предполагается, что класс $\mathfrak{A}$ содержится в классе $\mathfrak{B}$, если найдутся множества $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$, такие, что $A \leq B$. — *Прим. ред.*

Булевым кольцом называется кольцо, удовлетворяющее закону идемпотентности

$$aa = a.$$

Булевой алгеброй называется система $(S, 0, ', \wedge)$, где $(S, \wedge)$ — полуструктура, 0 — элемент в S и $'$ — унарная операция, причем

$$a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a \wedge b = a \quad (\Leftrightarrow a \leq b).$$

Следующие два предложения показывают совпадение классов дистрибутивных структур с дополнениями, булевых алгебр и булевых колец. Сначала нам понадобится

Лемма. В любой булевой алгебре $a'' = (a')' = a$.

Доказательство. Из соотношения $a' \leq a'$ вытекает равенство $a' \wedge a'' = 0$, откуда $a'' \leq a$. Из этого следует, с одной стороны, что $a''' \leq a'$ (заменяем a на a') и, с другой стороны (заменяем a на a''), что $a''' \leq a'' \leq a$. Отсюда $a''' \wedge a' = 0$, поэтому $a' \leq a'''$. Таким образом, $a''' = a'$. Наконец, из $a \leq a$ вытекают равенства $a \wedge a''' = a \wedge a' = 0$, поэтому $a \leq a''$.

Предложение 2. Булева алгебра является дистрибутивной структурой с дополнениями, если определить

$$a \vee b = (a' \wedge b')' \quad \text{и} \quad 1 = 0'.$$

Наоборот, любая дистрибутивная структура с дополнениями является булевой алгеброй, в которой эти равенства выполнены тождественно.

Доказательство. Пусть $(S, 0, ', \wedge)$ — булева алгебра. Тогда

$$\begin{aligned} a \vee b \leq c &\Leftrightarrow (a' \wedge b')' \wedge c' = 0 \Leftrightarrow c' \leq a' \wedge b' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c' \leq a' \ \& \ c' \leq b' \Leftrightarrow c' \wedge a = 0 \ \& \ c' \wedge b = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \leq c \ \& \ b \leq c. \end{aligned}$$

Таким образом, $a \vee b$ является точной верхней гранью элементов a и b . Следовательно, мы получим

структуру. Кроме того,

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) \leq x &\Leftrightarrow a \wedge (b \vee c) \wedge x' = 0 \Leftrightarrow a \wedge x' \leq b' \wedge c' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \wedge x' \leq b' \& a \wedge x' \leq c' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \wedge x' \wedge b = 0 \& a \wedge x' \wedge c = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \wedge b \leq x \& a \wedge c \leq x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq x. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлив закон дистрибутивности. Наконец, a' является дополнением элемента a , так как $a \wedge a' = 0$ (это следует из того, что $a \leq a$) и

$$a \vee a' = (a' \wedge a'')' = (a' \wedge a)' = 0' = 1.$$

(Читателю следует проверить, что $0 \leq a$ и $a \leq 1$.)

Обратно, пусть $(S, 0, 1, ', \wedge, \vee)$ — дистрибутивная структура с дополнениями. Тогда из соотношения $a \wedge b' = 0$ следует, что

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (b \vee b') = (a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a \wedge b,$$

а из равенства $a \wedge b = a$ вытекает, что

$$a \wedge b' = a \wedge b \wedge b' = a \wedge 0 = 0.$$

Кроме того,

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = (a \wedge a' \wedge b') \vee (b \wedge a' \wedge b') = 0 \vee 0 = 0$$

и

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = (a \vee b \vee a') \wedge (a \vee b \vee b') = 1 \vee 1 = 1.$$

Следовательно, $a' \wedge b'$ является дополнением элемента $a \vee b$. В силу единственности дополнения $a' \wedge b' = (a \vee b)'$. Аналогично, из соотношений $0 \wedge 1 = 0$ и $0 \vee 1 = 1$ вытекает, что $1 = 0'$.

Следствие. Если $(S, 0, ', \wedge)$ — булева алгебра, то булевой алгеброй является и $(S, 1, ', \vee)$.

В этом случае каждая из булевых алгебр называется *дуальной* по отношению к другой.

Предложение 3. Булева алгебра $(S, 0, ', \cdot)$ превращается в булево кольцо $(S, 0, 1, -, +, \cdot)$, если положить $1 = 0'$, $-a = a$, $a + b = ab' \vee ba'$, где, как и

раньше, $a \vee b = (a'b')'$. Обратно, любое булево кольцо можно рассматривать как булеву алгебру с $a' = 1 - a$, а приведенные выше определения 1, $-$ и $+$ превращаются в тождества.

Для упрощения формулировки этого предложения мы употребили запись ab вместо $a \wedge b$. Доказательство очевидно и опускается.

Рассмотрим упорядоченное множество $(S, \leq)$. Элемент s множества S называется *верхней гранью* подмножества T множества S , если $t \leq s$ при всех $t \in T$, и *точной верхней гранью*, если $s \leq s'$ для любой верхней грани s' подмножества T . Если s и s' — точные верхние грани подмножества T , то $s \leq s'$ и $s' \leq s$, следовательно, $s = s'$. Таким образом, точная верхняя грань подмножества T множества S определена однозначно, если, конечно, она существует. Обозначим ее через $\sup T$. Очевидно, что каждый элемент множества S является верхней гранью пустого множества. Если множество S содержит наименьший элемент 0 , то 0 является точной верхней гранью пустого множества. Если t и t' — элементы множества S , то точная верхняя грань множества $\{t, t'\}$ совпадает с элементом $t \vee t'$, где $\vee$ — структурная операция, рассмотренная ранее. Нижняя грань и точная нижняя грань ($\inf$) определяются дуально¹⁾.

Упорядоченное множество $(S, \leq)$ называется *полной структурой*, если для каждого подмножества S существует как точная нижняя, так и точная верхняя грань. Достаточно постулировать существование точной нижней грани для любого подмножества множества S . Действительно, точную верхнюю грань подмножества T можно определить в этом случае как точную нижнюю грань всех верхних граней,

$$\sup T = \inf \{s \in S \mid \forall t \in T \ t \leq s\}.$$

В частности, точная верхняя грань пустого множества совпадает с $\inf S$. Отсюда следует, что для каж-

¹⁾ В частности, точная нижняя грань пустого множества есть 1. — Прим. ред.

дой пары элементов существует как точная нижняя, так и точная верхняя грань. Следовательно, полная структура является в действительности структурой.

Упорядоченное множество $(S, \leq)$ называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое подмножество содержит наименьший элемент¹⁾. Очевидно, что вполне упорядоченное множество с наибольшим элементом является полной структурой.

Булева алгебра называется *полной*, если она является полной структурой.

Структуры в примерах 1 и 2 не являются полными. Однако структура примера 1 становится полной, если мы добавим бесконечный элемент. Булевы алгебры в примерах 3 и 4 являются полными. Булевы алгебры в примерах 5 и 6 не являются полными. В случае примера 6 — это нетривиальный факт (см. Халмош (1963), § 25). Положительные целые числа с отношением «меньше или равно» образуют вполне упорядоченное множество. Однако они же с отношением «больше или равно» не являются вполне упорядоченным множеством, хотя это множество линейно упорядочено.

Операцией *замыкания* на полной структуре $(S, \leq)$ называют отображение $a \rightarrow a^c$ множества S в S , такое, что

$$a \leq a^c, \quad (a^c)^c \leq a^c, \quad a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c.$$

Элемент a множества S называется *замкнутым*, если $a^c \leq a$, и, следовательно, $a^c = a$. Очевидно, что $1^c = 1$, где 1 — наибольший элемент множества S .

Пример операции замыкания: если A — подмножество группы G , то пусть A^c — наименьшее подмножество группы G , содержащее A и замкнутое относительно групповых операций.

Предложение 4. Пусть задана операция замыкания на полной структуре. Тогда точная нижняя грань

¹⁾ В русской литературе, говоря о вполне упорядоченном множестве, обычно имеют в виду линейно упорядоченное множество, удовлетворяющее указанному в тексте условию. — *Прим. ред.*

любого множества замкнутых элементов также замкнута. Следовательно, замкнутые элементы образуют полную структуру. Обратно, любое подмножество полной структуры, замкнутое относительно операции $\inf$, может быть представлено как множество всех элементов, замкнутых относительно подходящей операции замыкания.

Доказательство. Пусть X — множество замкнутых элементов и $a = \inf X$. Тогда $a \leq x$ для любого $x \in X$, и, следовательно, $a^c \leq x^c \leq x$. Таким образом, как и требовалось, $a^c \leq a$.

Обратно, пусть T — подмножество полной структуры S , замкнутое относительно операции $\inf$. Если $a \in S$, то положим $a^c = \inf \{t \in T \mid a \leq t\}$. Легко видеть, что $a \rightarrow a^c$ является операцией замыкания, а T в точности совпадает с множеством замкнутых элементов.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что в определении группы достаточно предполагать выполнение закона ассоциативности и тождеств $a1 = a$ и $aa^{-1} = 1$. Покажите, что существуют системы, отличные от групп, но удовлетворяющие закону ассоциативности и тождествам $a1 = a$ и $a^{-1}a = 1$.

2. Покажите, что группа может быть эквивалентным образом задана как система $(S, 1, /)$, где $/$ — бинарная операция, удовлетворяющая тождествам

$$a/1 = a, \quad a/a = 1, \quad (a/c)/(b/c) = a/b.$$

[Указание: Положить $a/b = ab^{-1}$. Обратно, определим $a^{-1} = 1/a$ и $ab = a/(1/b)$.]

3. Покажите, что в определении кольца предположение о справедливости закона коммутативности для сложения излишне. Покажите, что в любом кольце справедливы следующие тождества:

$$a0 = 0 = 0a, \quad (-a)(-b) = ab.$$

4. Покажите, что в булевом кольце справедливы тождества $a + a = 0$, $ab = ba$.

5. Восполните пробелы в доказательстве предложения 1.

6. Покажите, что структура может быть определена как многообразие $(S, \wedge, \vee)$, где $(S, \wedge)$ и $(S, \vee)$ — полуструктуры, причем

$$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a.$$

7. Покажите, что в дистрибутивной структуре справедлив также дуальный закон дистрибутивности

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

8. Докажите предложение 3.

9. Докажите, что $\sup T = \inf T^\Delta$, где

$$T^\Delta = \{s \in S \mid \forall_{t \in T} t \leq s\}.$$

§ 1.2. Подкольца, гомоморфизмы и идеалы

Подмножество S кольца $(R, 0, 1, -, +, \cdot)$ называется *подкольцом*, если S замкнуто относительно всех операций кольца R , т. е. если S содержит 0 и 1 и если для любых элементов $a, b \in S$ элементы $-a$, $a + b$ и ab также принадлежат S . Конечно, система $(S, 0, 1, -, +, \cdot)$ также является кольцом.

Нетрудно проверить, что пересечение любого семейства подколец кольца R также является подкольцом кольца R . Это неверно для объединения семейства подколец, за исключением частных случаев, например когда семейство подколец линейно упорядочено по включению (т. е. когда для подколец S и T из семейства либо $S \subset T$, либо $T \subset S$). Таким образом,

Предложение 1. *Подкольца кольца образуют полную структуру относительно включения. Точная нижняя грань семейства подколец совпадает с их пересечением. Точная верхняя грань линейно упорядоченного семейства подколец совпадает с его объединением.*

В этом результате специфика колец не используется: предложение остается справедливым в любом

многообразии алгебраических систем при замене подколец на соответствующие подсистемы, например подгруппы, подструктуры и т. п.

Пусть R и S — кольца. Отображение $\varphi: R \rightarrow S$ называется *гомоморфизмом*, если оно сохраняет все операции, т. е. если

$$\begin{aligned}\varphi 0 &= 0, \quad \varphi 1 = 1, \quad \varphi(-a) = -\varphi a, \\ \varphi(a+b) &= \varphi a + \varphi b, \quad \varphi(ab) = \varphi a \varphi b.\end{aligned}$$

Эти условия не независимы. То же самое определение (с сохранением соответствующих операций) применимо к любому многообразию алгебраических систем. Тожественное отображение кольца R на себя и вложение подкольца кольца R в R являются примерами гомоморфизмов. Гомоморфизм $\varphi: R \rightarrow S$ называется *мономорфизмом*, если φ — взаимно однозначное отображение, *эпиморфизмом*, если φ отображает R на все кольцо S ¹⁾, и *изоморфизмом*, если φ — взаимно однозначное отображение на все кольцо S . Гомоморфизм кольца R в себя называется *эндоморфизмом*, а изоморфизм кольца R на себя — *автоморфизмом*.

Если $\varphi: R \rightarrow S$ и $\psi: S \rightarrow T$ — гомоморфизмы, то гомоморфизмом является и их композиция или произведение

$$\psi \circ \varphi: R \rightarrow T,$$

определенное по следующему правилу:

$$(\psi \circ \varphi)r = \psi(\varphi r).$$

В некоторых странах принято вести машину по левой стороне дороги, в других принято правостороннее движение. Мы писали гомоморфизмы слева от аргументов, но мы с тем же успехом могли бы писать их справа. В этом случае (и иногда это будет нам удобно) естественное определение произведения

$$\varphi * \psi: R \rightarrow T$$

¹⁾ Следует подчеркнуть, что не всякий эпиморфизм в категории колец является эпиморфизмом в смысле высказанного определения. — *Прим. перев.*

гомоморфизмов $\varphi: R \rightarrow S$ и $\psi: S \rightarrow T$ таково:

$$r(\varphi * \psi) = (r\varphi)\psi.$$

Заметим, что $\varphi * \psi = \psi \circ \varphi$. Следует предостеречь читателя: переход от левой записи к правой может вызвать изменения в формулировках многих теорем.

Для ссылок в дальнейшем мы приведем без доказательства несколько утверждений о гомоморфизмах, остающихся справедливыми в любом многообразии алгебраических систем:

Предложение 2.

*Если φ и ψ — мономорфизмы,
то $\psi \circ \varphi$ — мономорфизм.* (1)

*Если φ и ψ — эпиморфизмы,
то $\psi \circ \varphi$ — эпиморфизм.* (2)

*Если $\psi \circ \varphi$ — мономорфизм,
то φ — мономорфизм.* (3)

*Если $\psi \circ \varphi$ — эпиморфизм,
то ψ — эпиморфизм.* (4)

Следствие. Гомоморфизм $\varphi: R \rightarrow S$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\psi: S \rightarrow R$, такой, что $\varphi \circ \psi$ — автоморфизм кольца S , а $\psi \circ \varphi$ — автоморфизм кольца R .

Доказательство. Пусть выполнено условие. Тогда в силу утверждения (3) φ — мономорфизм, а в силу утверждения (4) φ — эпиморфизм и, следовательно, φ — изоморфизм. Обратно, если φ — изоморфизм, то обратное к нему отображение $\psi = \varphi^{-1}$ является искомым гомоморфизмом.

Более общим, чем гомоморфизм, является понятие гомоморфного отношения. Итак, пусть θ — бинарное отношение между кольцами R и S , т. е. подмножество прямого произведения $R \times S$. Отношение θ называется *гомоморфным*, если $0\theta 0$, $1\theta 1$ и из соотношений $r_1\theta s_1$, $r_2\theta s_2$ следует, что $(-r_1)\theta(-s_1)$, $(r_1 + r_2)\theta(s_1 + s_2)$, $(r_1 r_2)\theta(s_1 s_2)$. Конечно, аналогичное определение может быть дано для любого

многообразия алгебраических систем. Можно рассматривать θ как многозначное отображение части кольца R в S . Если θ — однозначное и всюду определенное отображение, то оно является обычным гомоморфизмом, а $r\theta s$ означает тогда то же самое, что и $r\theta = s$.

Гомоморфное отношение на кольце R (т. е. когда $S = R$) называется *конгруэнцией*, если оно является отношением эквивалентности, т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно. Многие студенты ошибочно уверены в том, что транзитивное и симметричное отношение всегда рефлексивно. В действительности нетрудно убедиться в том, что симметричное и транзитивное гомоморфное отношение на кольце R является конгруэнцией на некотором подкольце S кольца R^1). Удивительно, однако, что справедливо и обратное утверждение.

Предложение 3 (Финдлей). *Если θ — рефлексивное гомоморфное отношение на кольце, то θ симметрично и транзитивно, и, следовательно, является конгруэнцией.*

Доказательство. Допустим, что $a\theta b$. Так как $a\theta a$ и $b\theta b$, то

$$(a - a + b)\theta(a - b + b),$$

т. е. $b\theta a$. Таким образом, отношение θ симметрично.

Допустим, что $a\theta b$ и $b\theta c$. Так как $b\theta b$, то

$$(a - b + b)\theta(b - b + c),$$

т. е. $a\theta c$. Таким образом, отношение θ транзитивно.

Из доказательства ясно, что этот результат справедлив в любом многообразии алгебраических систем, в котором возможно определить тернарную операцию $f(x, y, z)$, такую, что $f(x, y, y) = x$ и $f(y, y, z) = z$. Это можно сделать, например, в группах и в структурах с дополнениями.

Если θ — конгруэнция на кольце R , то θ разбивает кольцо R на множество R/θ непересекающихся классов эквивалентности, или *смежных классов*.

¹⁾ Достаточно положить $S = \{s \mid s \in R, s \theta s\}$. — Прим. ред.

Пусть θr — смежный класс, содержащий элемент r , т. е.

$$\theta r = \{r' \in R \mid r' \theta r\}.$$

На множестве R/θ также можно ввести структуру кольца, положив

$$\begin{aligned} 0 &= \theta 0, & 1 &= \theta 1, & -(\theta a) &= \theta(-a), \\ \theta a + \theta b &= \theta(a + b), & \theta a \theta b &= \theta(ab). \end{aligned}$$

Конечно, прежде чем давать эти определения, нам следовало проверить, что $-(\theta a)$, например, зависит лишь от смежного класса θa , а не от его представителя a . Но $\theta a = \theta a'$ означает, что $a \theta a'$. Отсюда следует, что $(-a) \theta (-a')$, т. е., как и требовалось, $\theta(-a) = \theta(-a')$. Наконец, можно проверить, что R/θ является кольцом, учитывая, что любое тождество, справедливое в R , справедливо и в R/θ . Таким образом, например, из справедливости закона коммутативности в R следует, что $\theta a + \theta b = \theta(a + b) = \theta(b + a) = \theta b + \theta a$. Определим отображение $\pi: R \rightarrow R/\theta$, положив $\pi r = \theta r$. Сразу же получаем, что π — эпиморфизм. Будем называть π каноническим эпиморфизмом кольца R на кольцо R/θ .

Предложение 4. Если $\varphi: R \rightarrow S$ — гомоморфизм, то существуют конгруэнция θ на R ; эпиморфизм $\pi: R \rightarrow R/\theta$ и мономорфизм $\kappa: R/\theta \rightarrow S$, такие, что $\varphi = \kappa \circ \pi$.

Доказательство. Пусть $r \theta r'$ означает, что $\varphi r = \varphi r'$. Легко видеть, что θ — конгруэнция. Пусть π — канонический эпиморфизм кольца R на R/θ . Положим $\kappa(\theta r) = \varphi r$. Поскольку из равенства $\theta r = \theta r'$ следует, что $r \theta r'$, т. е. $\varphi r = \varphi r'$, определение корректно. Очевидно, что κ — гомоморфизм кольца R/θ в S . Так как из $\varphi r = \varphi r'$ следует, что $r \theta r'$, т. е. $\theta r = \theta r'$, то φ — мономорфизм. Наконец,

$$\varphi r = \kappa(\theta r) = \kappa(\pi r) = (\kappa \circ \pi) r.$$

Этот результат остается справедливым в любом многообразии алгебраических систем. Так же обстоит

дело и со следующим результатом, аналогичным предложению 1:

* Предложение 5. *Конгруэнции на кольце образуют полную структуру относительно вложения. Точной нижней гранью любого семейства конгруэнций является их пересечение. Точной верхней гранью линейно упорядоченного семейства конгруэнций является их объединение.*

Когда мы говорим о вложении, пересечении и объединении конгруэнций, мы рассматриваем их как подмножества множества $R \times R$. В действительности любое гомоморфное отношение θ между R и S можно рассматривать как подкольцо кольца $R \times S$. (Структура кольца на множестве $R \times S$ вводится обычным образом; см. § 1.3.)

Обычно вместо понятия конгруэнции на кольцах используется понятие идеала. Идеалом кольца R называется аддитивная подгруппа K кольца R , такая, что $kr \in K$ и $rk \in K$ для всех $k \in K$ и $r \in R$. Очевидно, что пересечение идеалов — идеал.

Предложение 6. *Идеалы K и конгруэнции θ кольца R находятся во взаимно однозначном соответствии, при котором*

$$r - r' \in K \Leftrightarrow r\theta r'.$$

Это соответствие осуществляет изоморфизм структуры идеалов на структуру конгруэнций.

Доказательство. Если θ — отношение конгруэнтности, то стандартная проверка показывает, что $K = \theta 0 = \{r \in R \mid r\theta 0\}$ — идеал. Обратно, если K — идеал, то пусть $r\theta r'$ означает, что $r - r' \in K$. Можно проверить, что θ — конгруэнция. Очевидно, что пересечение идеалов соответствует пересечению конгруэнций.

Если K — идеал, соответствующий конгруэнции θ , то вместо R/θ будем писать R/K . Пусть $R \cong S$ означает, что кольца R и S изоморфны.

Предложение 7. *Если φ — гомоморфизм кольца R в другое кольцо, то $\varphi R \cong R/\varphi^{-1}0$. (При этом φR на-*

зывается *образом*, а $\varphi^{-1}0 = \{r \in R \mid \varphi r = 0\}$ — *ядром* гомоморфизма φ .)

Доказательство. В обозначениях предложения в силу предложения 4 $\varphi R = \kappa(\pi R) \cong \pi R = R/\theta$, а в силу предложения 6 $R/\theta = R/K$, где $K = \{r \in R \mid r\theta 0\} = \{r \in R \mid \varphi r = \varphi 0\} = \{r \in R \mid \varphi r = 0\} = \varphi^{-1}0$.

Если A — аддитивная абелева группа, а B и C — ее подгруппы, то определим их *сумму* $B + C$ как множество всех элементов вида $b + c$, где $b \in B$ и $c \in C$. Более общим образом, пусть $\{B_i \mid i \in I\}$ — семейство подгрупп группы A . Определим их сумму $B = \sum_{i \in I} B_i$ как множество всех элементов вида $\sum_{i \in I} b_i$, где $b_i \in B_i$ и все b_i , кроме конечного числа, равны нулю. Тогда B также является подгруппой группы A . В действительности B — наименьшая подгруппа, содержащая все подгруппы B_i .

Заметим, что для подгрупп группы A справедлив *закон модулярности*

$$C \subseteq B \Rightarrow B \cap (C + D) = C + (B \cap D).$$

Действительно, очевидно, что правая часть содержится в левой. Пусть теперь $b = c + d$ — произвольный элемент левой части, где $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$. Тогда $d = b - c \in B \cap D$. Поэтому, как и требовалось, $b \in c + (B \cap D)$.

Более общим образом, назовем структуру *модулярной*, если

$$c \leq b \Rightarrow b \wedge (c \vee d) = c \vee (b \wedge d).$$

Теперь несколько усилим предложение 5:

Предложение 8. Идеалы кольца образуют полную модулярную структуру относительно включения. При этом точной нижней гранью любого семейства идеалов является их пересечение и точной верхней гранью — их сумма.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из предложений 5 и 6, приведенных выше замечаний и того факта, что сумма идеалов является идеалом.

В дополнение к структурным операциям на множестве идеалов (или, более общим образом, на множестве аддитивных подгрупп кольца) можно рассматривать другие операции.

Если A и B — аддитивные подгруппы кольца R , то определим подгруппы AB , $A \cdot B$ и $A \cdot B$ следующим образом:

$$AB \text{ состоит из всех конечных сумм } \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad \text{где } a_i \in A \text{ и } b_i \in B. \quad (1)$$

$$A \cdot B = \{r \in R \mid rB \subset A\}. \text{ (Читается „} A \text{ над } B \text{“.)} \quad (2)$$

$$B \cdot A = \{r \in R \mid Br \subset A\}. \text{ (Читается „} B \text{ под } A \text{“.)} \quad (3)$$

Здесь, конечно, $rB = \{rb \mid b \in B\}$. Подгруппы $A \cdot B$ и $B \cdot A$ часто называют *частными*.

Предложение 9. Если A , B и C — аддитивные подгруппы кольца R , то $(AB)C = A(BC)$. Более того,

$$AB \subset C \Leftrightarrow A \subset C \cdot B \Leftrightarrow B \subset A \cdot C.$$

Доказательство. Закон ассоциативности для подгрупп является очевидным следствием закона ассоциативности для элементов. Если теперь $AB \subset C$, то $aB \subset C$ для всех $a \in A$, значит, $a \in C \cdot B$ для всех $a \in A$, т. е. $A \subset C \cdot B$. Обратно, из этого включения следует, что $ab \in C$ при всех $a \in A$ и $b \in B$, и, следовательно, $AB \subset C$. Эквивалентность включению $B \subset A \cdot C$ доказывается симметрично.

Из предложения 9 легко получить также ряд других тождеств.

Следствие. Если A , B , C , A_i и B_i ($i \in I$) — подгруппы кольца R , то

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (CB), \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (BA) \cdot C, \quad (\sum A_i) B = \sum (A_i B),$$

$$(\bigcap A_i) \cdot B = \bigcap (A_i \cdot B), \quad A \cdot \sum B_i = \bigcap (A \cdot B_i).$$

Вот, например, доказательство последнего тождества:

$$\begin{aligned} C \subset A \cdot \sum B_i &\Leftrightarrow \sum B_i \subset C \cdot A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall_i (B_i \subset C \cdot A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall_i (C \subset A \cdot B_i) \Leftrightarrow C \subset \bigcap (A \cdot B_i). \end{aligned}$$

Рассмотренные операции, примененные к идеалам, дают нам другие идеалы. Мы опустим доказательство следующего утверждения:

Предложение 10. Если A и B — идеалы кольца R , то AB , $A \cdot B$ и $A \cdot B$ также являются идеалами. Кроме того,

$$\begin{aligned} AR = A = RA, \quad A \cdot R = A = R \cdot A, \\ A \cdot A = R = A \cdot A, \quad AB \subset A \cap B. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что объединение линейно упорядоченного семейства подколец является подкольцом.
2. Докажите утверждения предложения 2.
3. Докажите, что эндоморфизмы алгебраической системы образуют полугруппу с 1, а автоморфизмы образуют группу. (В частности, множество всех отображений множества в себя — полугруппа с 1.)
4. Докажите, что эндоморфизмы абелевой группы A образуют кольцо, если сложение определено условием $(\varphi + \psi)a = \varphi a + \psi a$ для всех $a \in A$.
5. Если θ — гомоморфное отношение между кольцами R и S , а T — подкольцо кольца S , то $\theta T = \{r \in R \mid \exists t \in T r\theta t\}$ — подкольцо кольца R .
6. Если θ и θ' — гомоморфные отношения между кольцами R , S и S , T соответственно, то $\theta\theta'$ является гомоморфным отношением между кольцами R и T , где $r\theta\theta't \Leftrightarrow \exists s \in S (r\theta s \& s\theta't)$. Покажите, что произведение гомоморфизмов является частным случаем этого «частичного произведения». (Если рассматривать θ как многозначное отображение подмножества кольца R в S , то это частичное произведение будет сов-

падать с произведением гомоморфизмов, записываемых справа.)

7. Рассмотрим многообразие алгебраических систем с тернарной операцией $f(x, y, z)$, такой, что тождественно $f(x, y, y) = x$ и $f(y, y, z) = z$. Покажите, что

а) если θ_1 и θ_2 — конгруэнции на алгебраической системе из этого класса, то $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$;

б) конгруэнции на такой системе образуют модулярную структуру;

в) если θ — гомоморфное отношение между системами R и S , то $\theta\theta^{-1}\theta = \theta$, где θ^{-1} — «обратное» отношение, определяемое условием $s\theta^{-1}r \Leftrightarrow r\theta s$.

8. Найдите все идеалы кольца целых чисел.

9. Приведите доказательство остальных тождеств в следствии к предложению 9 и предложения 10.

10. Дайте интерпретацию операций $A + B$, $A \cap B$, AB и $A \cdot B$ для идеалов кольца целых чисел.

11. Пусть G — аддитивная подгруппа кольца R . Каждой подгруппе A кольца R сопоставим подгруппу $A^c = (G \cdot A) \cdot G$. Покажите, что $A \rightarrow A^c$ является операцией замыкания на структуре подгрупп.

12. Покажите, что модулярные структуры образуют многообразие.

§ 1.3. Модули, прямые произведения и прямые суммы

Правый R -модуль A_R состоит из аддитивной абелевой группы A , кольца R и отображения $A \times R \rightarrow A$, обозначаемого ar ($a \in A, r \in R$), таких, что

$$(a + b)r = ar + br, \quad a(r + s) = ar + as,$$

$$a(r \cdot s) = (ar)s, \quad a1 = a$$

при всех $a, b \in A$ и $r, s \in R$. Левый R -модуль ${}_R A$ определяется симметрично.

Примеры.

1. Если R — поле, то правый R -модуль A_R обычно называется векторным пространством.

2. Если $R = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то R -модуль A_R — не что иное, как абелева группа A , поскольку

умножение на положительные целые числа сводится к многократному сложению. Таким образом, $\mathbf{Z}$ -модули и аддитивные абелевы группы можно рассматривать как одни и те же объекты.

3. Если $A = R$ и в качестве отображения $A \times R \rightarrow A$ взять умножение, т. е. $ar = a \cdot r$, то мы получим правый модуль R_R .

4. Пусть F — множество эндоморфизмов аддитивной абелевой группы A , записываемых справа. Положив

$$\begin{aligned} a0 &= 0, & a1 &= a, & a(-f) &= -(af), \\ a(f+g) &= af+ag, & a(f*g) &= (af)g \end{aligned}$$

для любых $a \in A$ и $f, g \in F$, получим кольцо $(F, 0, 1, -, +, *)$. Кроме того, рассмотрим отображение $(a, f) \rightarrow af$ множества $A \times F$ в A . Так как f — гомоморфизм, то $(a+b)f = af+bf$, и, следовательно, получаем правый модуль A_F .

Предложение 1. Пусть $\Gamma: R \rightarrow F$ — гомоморфизм кольца R в кольцо F эндоморфизмов аддитивной абелевой группы A (записываемых справа). Полагая $ar = a(\Gamma r)$ при всех $a \in A$ и $r \in R$, получим правый R -модуль A_R , при этом каждый правый R -модуль можно получить таким способом.

Доказательство. Так как Γr — гомоморфизм, то

$$(a+b)r = (a+b)\Gamma r = a\Gamma r + b\Gamma r = ar + br.$$

Учитывая определение сложения в кольце F и тот факт, что Γ — гомоморфизм, получаем

$$a(r+s) = a\Gamma(r+s) = a(\Gamma r + \Gamma s) = a\Gamma r + a\Gamma s = ar + as.$$

Так как Γ — гомоморфизм, то с учетом определения операции $*$ в кольце F получим

$$a(r \cdot s) = a\Gamma(r \cdot s) = a(\Gamma r * \Gamma s) = (a\Gamma r)\Gamma s = (ar)s,$$

Наконец, поскольку Γ — гомоморфизм, то

$$a1_R = a\Gamma 1_R = a1_F = a.$$

(В последнем равенстве для ясности мы различаем единицу 1_R кольца R и единицу 1_F кольца F , являющуюся тождественным автоморфизмом группы A .)

Обратно, пусть A_R — произвольный правый R -модуль. Рассмотрим отображение $\Gamma: R \rightarrow F$, для которого $a(\Gamma r) = ar$. Легко проверить, что Γ — гомоморфизм колец.

Можно рассматривать R -модуль A_R как систему $(A, 0, -, +, R)$, где $(A, 0, -, +)$ — абелева группа, а каждый элемент кольца R является унарной операцией на группе A , причем справедливы тождества $(a + b)r = ar + br$ и т. д. Может случиться, что число операций (если в кольце R бесконечное число элементов) и число тождеств бесконечно. Упомянутые равенства образуют множество тождеств с фиксированными элементами из R . Во всяком случае класс правых R -модулей для данного кольца R является многообразием. Поэтому предложения 1—5 предыдущего параграфа применимы к модулям (следует лишь заменить слова «кольцо» и «подкольцо» на «модуль» и «подмодуль»). Подмодуль B модуля A является, конечно, подгруппой группы A , которая замкнута относительно новых операций, т. е. $br \in B$ при всех $b \in B$ и $r \in R$. Кроме того, предложения 1.2.6—1.2.8 также остаются справедливыми для модулей при замене слова «идеал» на «подмодуль». Таким образом, аналоги предложений 1 и 8 для модулей совпадают. Было бы скучно переформулировать и передоказывать модульные аналоги этих предложений, и мы воздержимся от этого.

Под *гомоморфизмом* (R -гомоморфизмом) $\varphi: A_R \rightarrow B_R$ понимается, конечно, гомоморфизм группы A в группу B , для которого к тому же выполнено дополнительное условие $\varphi(ar) = (\varphi a)r$ при всех $a \in A$ и $r \in R$. Множество всех таких гомоморфизмов обозначают через $\text{Hom}_R(A, B)$. На этом множестве можно ввести структуру абелевой группы, определяя 0 , $-$ и $+$ равенствами

$$0a = 0, (-\varphi)a = -(\varphi a), (\varphi + \psi)a = \varphi a + \psi a.$$

Когда мы встречаемся с гомоморфизмами левых R -модулей, мы предпочитаем писать их справа, и в этом случае дополнительное условие выглядит так: $(ra)\varphi = r(a\varphi)$.

Сейчас нам представился один из удобных случаев применить лемму Цорна, утверждающую следующее:

Если для любого линейно упорядоченного подмножества непустого упорядоченного множества $(S, \leq)$ существует верхняя грань в S , то упорядоченное множество S обладает по крайней мере одним максимальным элементом t (максимальность элемента t означает, что неравенство $t \leq s$ влечет за собой равенство $t = s$ при всех $s \in S$).

Это утверждение представляет собой неотъемлемую часть математического аппарата и, как хорошо известно, эквивалентно *принципу полного упорядочивания*, утверждающего, что каждое множество можно вполне упорядочить, а также эквивалентно аксиоме выбора, утверждающей, что декартово произведение непустого семейства $\{S_i \mid i \in I\}$ непустых множеств непусто, что означает, другими словами, существование функции $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} S_i$, для которой $f(i) \in S_i$ при всех $i \in I$ (через I было обозначено множество индексов).

Предложение 2. Пусть T — подмножество модуля A_R . Тогда любой подмодуль B модуля A_R , не пересекающийся с T или пересекающийся с ним лишь по 0, содержится в подмодуле M , являющемся максимальным относительно этого свойства.

Это предложение остается справедливым, если слова «модуль» и «подмодуль» заменить соответственно на «кольцо» и «идеал».

Доказательство. Рассмотрим множество всех подмодулей модуля A_R , которые содержат B и пересечение которых с T лежит в нулевом подмодуле. Подмодуль B является элементом этого множества.

Можно упорядочить эти подмодули по включению. Если $\{B_i \mid i \in I\}$ — произвольное линейно упорядоченное семейство подмодулей этого множества, то его точная верхняя грань $\bigcup_{i \in I} B_i$ также принадлежит множеству. Таким образом, теперь выполнены условия леммы Цорна.

Подмодули модуля R_R называются *правыми идеалами*. Правый идеал называется *собственным*, если он отличен от R , т. е. если он не содержит 1. Рассматривая $T = \{1, 0\}$ (или $T = \{1\}$), мы получаем

Следствие. Каждый собственный (правый) идеал кольца содержится в максимальном собственном (правом) идеале.

Под *прямым произведением* $R = \prod_{i \in I} R_i$ семейства колец понимается их декартово произведение с покомпонентными операциями. Таким образом, если $r \in R$, т. е. $r: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} R_i$, где $r(i) \in R_i$ при всех $i \in I$, то $-r$ определим так: $(-r)(i) = -r(i)$. Аналогично определяются другие кольцевые операции.

Легко видеть, что любое тождество, справедливое в каждом из колец R_i , остается справедливым и в кольце R . Например, допустим, что все кольца R_i коммутативны. Тогда $r(i)s(i) = s(i)r(i)$ при всех $r, s \in R$ и $i \in I$, откуда следует, что $rs = sr$. Теперь мы можем выяснить, почему класс полей не является многообразием. Действительно, если бы это было так, то прямое произведение полей было бы полем, а это на самом деле не так. Например, если F — поле, то элемент $(1, 0) \neq (0, 0)$ является делителем нуля в кольце $F \times F$, и, следовательно, оно не является полем.

Если R — прямое произведение колец R_i ($i \in I$), то рассмотрим элементы $e_i \in R$, для которых $e_i(j) = 1$, если $j = i$, и $e_i(j) = 0$, если $j \neq i$. Легко проверяется, что e_i — *центральные* элементы, т. е. лежат в *центре* кольца R , т. е. $e_i r = r e_i$ при всех $r \in R$. Более того,

элементы e_i образуют систему *ортогональных идемпотентов* в том смысле, что $e_i^2 = e_i$ и $e_i e_j = 0$, когда $i \neq j$. (Элемент e называется *идемпотентом*, если $e^2 = e$.)

Если e — центральный идемпотент кольца R , то каждый элемент $r \in R$ можно записать в виде

$$r = er + (1 - e)r,$$

где $er \in eR$ и $(1 - e)r \in (1 - e)R$. Более того, представление элемента r в виде суммы элементов из eR и $(1 - e)R$ единственно, поскольку из равенства $r = ex + (1 - e)y$ следует, что $er = ex$ и $(1 - e)r = (1 - e)y$. Мы говорим, что R является *прямой суммой* идеалов eR и $(1 - e)R$. Из сказанного следует, что R изоморфно прямому произведению $eR \times (1 - e)R$. Заметим, что eR является кольцом с единицей e , но не является подкольцом кольца R , за исключением случая, когда $e = 1$. (Это следствие нашего определения подкольца: подкольцо кольца R обязано содержать его единицу 1 и, следовательно, не может быть собственным идеалом, т. е. идеалом, отличным от R .) В действительности идеал кольца R является кольцом (в нашем смысле) тогда и только тогда, когда он «выделяется прямым слагаемым». Действительно, пусть K — идеал с единицей e (мы должны в обозначениях отличать ее от единицы 1 кольца R), тогда $K = eR$ и $e^2 = e$ ¹⁾.

Нетрудно распространить сделанное выше замечание на любое конечное множество ортогональных идемпотентов. Назовем сначала сумму $\sum_{i \in I} K_i$ под-

групп K_i аддитивной абелевой группы *прямой*, если 0 допускает лишь тривиальное представление в виде суммы элементов из K_i , т. е. если из равенства $0 = \sum_{i \in I} k_i$ ($k_i \in K_i$) следует, что все k_i равны нулю.

Предложение 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

¹⁾ Кроме того, er и re лежат в K , поскольку $e \in K$ и K — двусторонний идеал. Следовательно, $er = ere = re$, так как e — единица кольца K . — *Прим. ред.*

а) Кольцо R изоморфно прямому произведению колец R_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

б) Существуют центральные ортогональные идемпотенты $e_i \in R$, такие, что $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ и $e_i R \cong R_i$.

в) Кольцо R является конечной прямой суммой идеалов $K_i \cong R_i$.

Доказательство (набросок).

$$(a) \Rightarrow (б) \Rightarrow (в) \Rightarrow (a).$$

Прямое произведение семейства R -модулей $\{A_i | i \in I\}$ определяется в точности так же, как и прямое произведение колец (или, кстати, как прямое произведение алгебраических систем). Если $A = \prod_{i \in I} A_i$, то рассмотрим канонические эпиморфизмы $\pi_i: A \rightarrow A_i$ и мономорфизмы $\kappa_i: A_i \rightarrow A$, для которых

$$\pi_i(a) = a(i), \quad \kappa_i(a_i)(j) = \begin{cases} a_i, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\pi_j \circ \kappa_i = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (1)$$

(Здесь 1 — тождественное отображение модуля A_i .) Можно отметить, что π_i существуют также для колец, но в случае колец κ_i уже не являются гомоморфизмами, так как они не отображают 1 на 1 .

Введем теперь (внешнюю) прямую сумму модулей:

$$A = \sum_{i \in I}^{\oplus} A_i \subset \prod_{i \in I} A_i,$$

состоящую из всех элементов $a \in \prod_{i \in I} A_i$, таких, что

$a(i) = 0$ для всех, кроме конечного числа, индексов $i \in I$. Немедленно следует, что A также является R -модулем. В частности, конечная прямая сумма совпадает с конечным прямым произведением. По этой причине мы пишем $A \times B$ для внешней прямой сум-

мы двух модулей, но мы хотели бы предостеречь читателя: многие авторы используют обозначение $A \oplus B$.

Канонические эпиморфизмы и мономорфизмы определяются для прямых сумм точно так же, как и в случае прямых произведений. В дополнение к (1) в этом случае справедливо также равенство

$$\sum_{i \in I} (\kappa_i \circ \pi_i) a = a \quad (2)$$

для любых $a \in A$. Действительно, сумма, стоящая слева, равна $\sum_{i \in I} \kappa_i a(i)$ и применение ее к $j \in I$ дает $a(j)$. Если мы рассматриваем конечную прямую сумму, то (2) можно записать также в виде равенства

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i \circ \pi_i = 1,$$

где правая часть обозначает тождественный автоморфизм модуля A_R .

Если положить $\varepsilon_i = \kappa_i \circ \pi_i \in \text{Hom}_R(A, A)$, то (1) и (2) можно переписать в виде

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (3)$$

и

$$\sum_{i \in I} \varepsilon_i a = a \quad (4)$$

для всех $a \in A$. Будем говорить, что ε_i образуют полную систему ортогональных идемпотентных эндоморфизмов модуля A_R .

Предложение 4. Следующие утверждения эквивалентны:

а) Модуль A_R изоморфен (внешней) прямой сумме модулей $(A_i)_R$, $i \in I$.

б) Модуль A_R обладает полной системой ортогональных идемпотентных эндоморфизмов $\{\varepsilon_i \mid i \in I\}$ и $\varepsilon_i A \cong A_i$.

в) Модуль A_R является (внешней) прямой суммой подмодулей $B_i \cong A_i$.

Доказательство (набросок).

$$(a) \Rightarrow (б) \Rightarrow (в) \Rightarrow (a).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если A_R — правый R -модуль, то $0r = 0$, $(-a)r = -(ar)$, $a0 = 0$, $a(-r) = -(ar)$ для всех $a \in A$ и $r \in R$.

2. Проверьте, что отображение Γ в последней части предложения 1 является гомоморфизмом.

3. Проверьте, что $\text{Hom}_R(A, B)$ — абелева группа.

4. Если $\mathbf{Z}(n)$ — кольцо вычетов по модулю n , то кольцо $\mathbf{Z}(n)$ изоморфно прямому произведению всех колец $\mathbf{Z}(p^r)$, где p^r — наивысшая степень простого числа p , делящая n .

5. Докажите, что если кольцо является суммой идеалов, то оно является конечной суммой некоторых из них.

6. Пусть $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbf{Q}_p$ — подкольцо поля $\mathbf{Q}$, состоящее из рациональных чисел, знаменатели которых — степени простого числа p . Покажите, что абелева группа $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ является прямой суммой групп $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}$.

7. Если $R = S \times T$, то $S \times 0$ — идеал кольца R и $R/(S \times 0) \cong T$.

8. Докажите, что сумма $\sum_{i \in I} B_i$ подмодулей модуля A_R является прямой тогда и только тогда, когда

$$B_i \cap \sum_{j \neq i} B_j = 0$$

для всех $i \in I$.

9. Восстановите в деталях доказательства предложений 3 и 4.

§ 1.4. Классические теоремы об изоморфизмах

Чтобы сделать изложение замкнутым в себе, приведем здесь классические теоремы об изоморфизмах, обычно формулируемые для групп с операторами.

Хотя эти теоремы справедливы и для более широкого класса, тем не менее мы ограничимся (правыми) R -модулями. Этот случай представляет для нас основной интерес, и при этом некоторые из доказательств несколько проще, чем в общей ситуации.

Начнем с переформулировки предложения 1.2.7 для модулей вместо колец:

Предложение 1. Если $\varphi \in \text{Hom}_R(A, B)$, то $\varphi A \cong A/\varphi^{-1}0$.

Обычно φA и $\varphi^{-1}0$ называют соответственно *образом* и *ядром* гомоморфизма φ .

Предложение 2. Пусть C — подмодуль модуля A_R . Каждый подмодуль модуля A/C имеет вид B/C , где $C \subset B \subset A$, и $A/B \cong (A/C)/(B/C)$.

Доказательство. Пусть $\pi: A \rightarrow A/C$ — канонический эпиморфизм. Для произвольного подмодуля B' модуля $\pi A = A/C$ рассмотрим его полный прообраз $B = \pi^{-1}B'$ в модуле A . Тогда $B' = \pi B$. Очевидно, что $C = \pi^{-1}0 \subset B$. Поэтому можно написать $\pi B = B/C$. Пусть теперь $\pi': \pi A \rightarrow \pi A/\pi B$ — канонический эпиморфизм. Тогда $\pi' \circ \pi: A \rightarrow \pi A/\pi B$, а ядро отображения $\pi' \circ \pi$ равно $\pi^{-1}(\pi B) = B$. Утверждение следует теперь из предложения 1.

Предложение 3. Если B и C — подмодули модуля A , то $(B + C)/B \cong C/(B \cap C)$.

Доказательство. Рассмотрим канонический эпиморфизм $\pi: B + C \rightarrow (B + C)/B$ и естественный мономорфизм $\kappa: C \rightarrow B + C$. Тогда ядро гомоморфизма $\pi \circ \kappa$ совпадает с $B \cap C$, а его образ равен $\pi C = \pi B + \pi C = \pi(B + C)$. Утверждение следует теперь из предложения 1.

Лемма 1 (Цассенхауз). Если $B' \subset B \subset A$ и $C' \subset C \subset A$, то

$$(B' + (B \cap C))/(B' + (B \cap C')) \cong (C' + (B \cap C))/(C' + (B' \cap C)).$$

Доказательство. Заметим, что

$$(B' + (B \cap C')) + (B \cap C) = B' + (B \cap C)$$

и (в силу закона модулярности)

$$(B' + (B \cap C')) \cap (B \cap C) = (B' \cap C) + (B \cap C').$$

Затем, применив предложение 3, убедимся, что левая часть изоморфна модулю $(B \cap C) / ((B' \cap C) + (B \cap C'))$. В силу симметрии правая часть изоморфна тому же самому выражению.

Под (конечной) *цепью* подмодулей модуля A_R будем понимать последовательность

$$A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_m = A$$

подмодулей, в которой A_i является подмодулем в A_{i+1} . Нас интересуют соответствующие фактормодули A_{i+1}/A_i (*факторы*).

Предложение 4 (Шраер). Пусть

$$B = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_m = A,$$

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_n = A$$

— две цепи подмодулей. В этом случае обе цепи можно так уплотнить, что получившиеся цепи будут иметь одинаковую длину и изоморфные факторы (не обязательно в одном и том же порядке).

Доказательство (Цассенхауз). Вставим между модулями A_i и A_{i+1} подмодули

$$A_{i,j} = A_i + (A_{i+1} \cap B_j) \quad (j = 0, \dots, n),$$

а между модулями B_j и B_{j+1} — подмодули

$$B_{i,j} = B_j + (B_{j+1} \cap A_i) \quad (i = 0, \dots, m).$$

Тогда в силу леммы 1

$$A_{i,j+1}/A_{i,j} \cong B_{i+1,j}/B_{i,j} \quad (A_i = A_{i,0} \text{ и } A_{i+1} = A_{i,n}).$$

Композиционным рядом модуля A_R называется цепь

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_m = A \quad (A_i \neq A_{i+1}),$$

не допускающая собственных уплотнений. Непосредственно доказываемся

Следствие (Жордан — Гельдер). Пусть

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_m = A, \quad 0 = B_0 \subset \dots \subset B_n = A$$

— два композиционных ряда модуля A . Тогда $m = n$ и

$$A_{i+1}/A_i \cong B_{p(i)+1}/B_{p(i)} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

для некоторой подстановки p целых чисел $0, 1, \dots, n-1$.

Модуль называется *артиновым* (нётеровым), если каждое непустое множество подмодулей содержит минимальный (максимальный) элемент. Другими словами, это означает, что каждая убывающая (возрастающая) последовательность подмодулей с некоторого момента стабилизируется.

Действительно, пусть A — нётеров модуль, и пусть

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

— возрастающая цепочка подмодулей модуля A . В этой последовательности найдется максимальный элемент A_n . Следовательно,

$$A_n = A_{n+1} = \dots$$

Обратно, допустим, что любая возрастающая цепочка подмодулей модуля A с некоторого момента стабилизируется. Рассмотрим произвольное непустое множество подмодулей модуля A . Предположим, что в этом множестве нет максимального элемента. Возьмем любой элемент A_1 этого множества. Так как A_1 не является максимальным элементом, то A_1 строго содержится в элементе A_2 множества и т. д. Таким образом, получим бесконечную возрастающую последовательность подмодулей

$$A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots,$$

что противоречит предположению.

Предложение 5. Модуль является нётеровым тогда и только тогда, когда каждый его подмодуль конечно порожден.

Доказательство. Пусть B — подмодуль нётерова модуля. Рассмотрим множество всех конечно порожденных подмодулей модуля B . Пусть C — максимальный элемент этого множества. Следовательно, $C + bR = C$ для любого элемента $b \in B$ и поэтому $C = B$.

Обратно, допустим, что каждый подмодуль модуля A_R конечно порожден. Рассмотрим возрастающую последовательность

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

подмодулей модуля A_R . Пусть B — ее объединение. В силу предположения B — конечно порожденный подмодуль. Так как все образующие модуля B должны лежать в одном из подмодулей A_n , то $A_n = A_{n+1} = \dots$, т. е. последовательность стабилизируется начиная с подмодуля A_n .

Предложение 6. Пусть B — подмодуль модуля A_R . Модуль A артинов (нётеров) тогда и только тогда, когда модули B и A/B артиновы (нётеровы).

Доказательство. Допустим, что модуль A артинов. Так как каждый подмодуль модуля B является подмодулем модуля A , то модуль B артинов. Поскольку каждый подмодуль модуля A/B имеет вид C/B , где $B \subset C \subset A$, модуль A/B артинов.

Обратно, допустим, что модули A/B и B артиновы. Рассмотрим любую убывающую цепочку подмодулей $A_1 \supset A_2 \supset \dots$. Рассмотрим теперь такие последовательности подмодулей модуля A/B и модуля B соответственно:

$$(A_1 + B)/B \supset (A_2 + B)/B \supset \dots, \\ A_1 \cap B \supset A_2 \cap B \supset \dots$$

В силу предположения обе эти последовательности стабилизируются начиная, скажем, с шага n . Тогда

$$A_n \cap B = A_{n+1} \cap B = \dots$$

и

$$(A_n + B)/B = (A_{n+1} + B)/B = \dots,$$

откуда

$$A_n + B = A_{n+1} + B = \dots$$

Используя закон модулярности, получим, что

$$\begin{aligned} A_n &= A_n \cap (A_n + B) = A_n \cap (A_{n+1} + B) = \\ &= A_{n+1} + (A_n \cap B) = A_{n+1} + (A_{n+1} \cap B) = A_{n+1}. \end{aligned}$$

Следствие. *Конечное прямое произведение модулей является артиновым (нётеровым) модулем тогда и только тогда, когда каждый сомножитель артинов (нётеров).*

Доказательство. Достаточно рассмотреть произведение двух модулей, скажем $A = B \times C$. Но тогда $A/(0 \times C) \cong B$ и применимо доказанное выше. Здесь и всюду в дальнейшем $0 = \{0\}$ — наименьшая подгруппа группы A .

Предложение 7. *Модуль A_R обладает композиционным рядом тогда и только тогда, когда он одновременно артинов и нётеров.*

Доказательство. Допустим, что модуль A_R обладает композиционным рядом длины n . В силу следствия предложения 4 длины цепей подмодулей не превосходят n . Отсюда следуют артиновость и нётеровость модуля A .

Обратно, допустим, что модуль A артинов и нётеров. Поскольку A — артинов модуль, найдутся минимальный подмодуль $A_1 \neq 0$, минимальный подмодуль A_2 , строго содержащий подмодуль A_1 , и т. д. В силу нётеровости модуля A последовательность $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ должна оборваться. Следовательно, $A_m = A$ при некотором m , и мы получаем композиционный ряд.

Предложение 8. *Эндоморфизм f артинова (нётерова) модуля является автоморфизмом тогда и только тогда, когда f — мономорфизм (эпиморфизм).*

Доказательство. Пусть f — эндоморфизм артинова модуля A_R , являющийся мономорфизмом. Тогда $A \supset fA \supset f^2A \supset \dots$, и, следовательно, $f^n A = f^{n+1} A$

для некоторого n . Если a — произвольный элемент модуля A , то $f^n a = f^{n+1} b$ для некоторого $b \in A$. Но f^n — мономорфизм, и, следовательно, $a = f b$. Таким образом, f — эпиморфизм, и поэтому f — автоморфизм.

Пусть теперь f — эндоморфизм нётерова модуля A_R , являющийся эпиморфизмом. Тогда $0 \subset f^{-1}0 \subset f^{-2}0 \subset \dots$, и, следовательно, $f^{-n}0 = f^{-(n+1)}0$ для некоторого n . Возьмем произвольный элемент $a \in A$, для которого $f a = 0$. Так как f^n — эпиморфизм, то $a = f^n b$ для некоторого $b \in A$, и потому $f^{n+1} b = 0$. Но тогда $a = f^n b = 0$. Таким образом, f — мономорфизм и, следовательно, автоморфизм.

Следующее утверждение известно как *лемма Фиттинга*:

Предложение 9. *Если f — эндоморфизм артинова и нётерова модуля A_R , то для некоторого n имеет место разложение в прямую сумму $A = f^n A + f^{-n} 0$.*

Доказательство. Последовательность $A \supset f A \supset f^2 A \supset \dots$ стабилизируется начиная, скажем, с n -го шага. Таким образом, $f^n A = f^{n+1} A$. Следовательно, f^n индуцирует эндоморфизм на нётеровом модуле $f^n A$, являющийся эпиморфизмом, а следовательно, и автоморфизмом. Таким образом, $f^n A \cap f^{-n} 0 = 0$. Пусть теперь $a \in A$. Тогда $f^n a = f^{2n} b$ для некоторого $b \in A$, и, следовательно, $f^n (a - f^n b) = 0$. Поскольку $a = f^n b + (a - f^n b)$, убеждаемся, что $A = f^n A + f^{-n} 0$, а это и требовалось показать.

Ненулевой модуль называется *неразложимым*, если он не разлагается в прямую сумму ненулевых модулей, или, другими словами, если он не является прямой суммой своих ненулевых подмодулей. Следующие утверждения вытекают из леммы Фиттинга:

Следствие 1. *Если A_R — неразложимый артинов и нётеров модуль, то каждый эндоморфизм модуля A_R либо нильпотентен, либо является автоморфизмом.*

Доказательство. В силу леммы Фиттинга либо $f^n A = 0$, либо $f^{-n} 0 = 0$. В первом случае эндоморфизм f нильпотентен, во втором случае эндомор-

физм f^n является автоморфизмом. Но тогда и f — также автоморфизм.

Следствие 2. Если A_R — неразложимый артинов и нётеров модуль, а $g = f_1 + \dots + f_n$ — автоморфизм, где $f_i \in \text{Hom}_R(A, A)$, то для некоторого i эндоморфизм f_i является автоморфизмом.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Тогда $1 = g^{-1}f_1 + g^{-1}f_2$. В силу следствия 1 эндоморфизм $g^{-1}f_1$ либо является автоморфизмом, либо нильпотентен. Во втором случае $g^{-1}f_2 = 1 - g^{-1}f_1$ — автоморфизм. (Действительно, если $h^m = 0$, то элемент, обратный к $1 - h$, равен $1 + h + \dots + h^{m-1}$.) Для рассмотрения общего случая проведем индукцию. Если f_1 не является автоморфизмом, то и $g^{-1}f_1$ не является автоморфизмом, и, следовательно, $1 - g^{-1}f_1$ — автоморфизм. В силу индуктивного предположения $g^{-1}f_i$ — автоморфизм для некоторого $i \neq 1$. Но тогда и f_i — автоморфизм.

Можно ли утверждать, что если $A_1 \times A_2 \cong B_1 \times B_2$ и $A_1 \cong B_1$, то $A_2 \cong B_2$? В общем случае нельзя. Действительно, возьмем в качестве A_2 и B_2 произвольные модули, а в качестве $A_1 = B_1$ прямое произведение счетного числа экземпляров модуля $A_2 \times B_2$. Однако утверждение верно в том случае, когда $A_1 \times A_2$ — артинов и нётеров модуль. Для начала нам потребуется более слабое утверждение:

Лемма 2. Пусть λ — изоморфизм артинова модуля $A = A_1 \times A_2$ на модуль $B = B_1 \times B_2$, такой, что $\lambda(a_1, 0) = (\alpha a_1, \beta a_1)$, где α — изоморфизм модуля A_1 на B_1 , тогда $A_2 \cong B_2$.

Доказательство. Если $\beta A_1 = 0$, то утверждение очевидно, поскольку тогда $A_2 \cong A/(A_1 \times 0) \cong \lambda A/(\alpha A_1 \times 0) = B/(B_1 \times 0) \cong B_2$. Доказательство, следовательно, будет закончено, если мы построим такой изоморфизм $\mu: A_1 \times A_2 \rightarrow B_1 \times B_2$, что $\mu(a_1, 0) = (\alpha a_1, 0)$. Если $\lambda(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$, то положим $\mu(a_1, a_2) = (b_1, b_2 - \beta \alpha^{-1} b_1)$. Очевидно, что μ удовле-

творяет нужному условию¹⁾. Чтобы убедиться в том, что μ — изоморфизм, достаточно проверить, что μ — мономорфизм. (Действительно, тогда $\lambda^{-1}\mu$ — мономорфизм, и, следовательно, автоморфизм.) Предположим поэтому, что $\mu(a_1, a_2) = 0$. Тогда $b_1 = 0 = b_2$, и поэтому $a_1 = 0 = a_2$, поскольку λ — мономорфизм. Это завершает доказательство.

Следующий результат обычно связывают с одной из комбинаций имен следующих математиков: Крулля, Ремака, Шмидта и Веддербёрна.

Предложение 10. Пусть артинов и нётеров модуль $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ изоморфен модулю $A' = A'_1 \times A'_2 \times \dots \times A'_n$, где A_i и A'_i — неразложимые модули. Тогда $m = n$ и (возможно, после перенумерации) $A_i \cong A'_i$.

Доказательство. Пусть $\lambda: A \rightarrow A'$ — данный изоморфизм, а κ_i , κ'_i и π_i , π'_i — канонические мономорфизмы и эпиморфизмы, ассоциированные с данными прямыми разложениями. Положим $\alpha_i = \pi'_i \circ \lambda \circ \kappa_i$ и $\beta_i = \pi_i \circ \lambda^{-1} \circ \kappa'_i$. Тогда $\sum_{i=1}^m \alpha_i \circ \beta_i = 1$, где 1 — тождественный автоморфизм модуля A'_1 . В силу следствия 2 одно из слагаемых (пусть первое) является автоморфизмом. Таким образом, $\alpha_1 \circ \beta_1$ — автоморфизм модуля A'_1 . Следовательно, эндоморфизм $\beta_1 \circ \alpha_1$ не является нильпотентным, а тогда в силу следствия 1 $\beta_1 \circ \alpha_1$ — автоморфизм модуля A_1 . Отсюда следует, что λ — изоморфизм модуля A_1 на A'_1 . Очевидно, что $\lambda(a_1, 0, \dots, 0) = (\alpha_1 a_1, *, \dots, *)$. (Здесь * обозначает не представляющие для нас интереса координаты.) В силу леммы 2 $A_2 \times \dots \times A_m \cong A'_2 \times \dots \times A'_n$. Повторяем эти же рассуждения до тех пор, пока слева останется лишь A_m (можем считать, что $n \geq m$). Поскольку модуль A_m неразложим, $m = n$ и $A_m \cong A'_n$.

Чтобы опередить читателя, который попробовал бы получить аналог предложения 10 для колец, за-

¹⁾ Действительно, $\mu(a_1, 0) = (\alpha a_1, \beta a_1 - \beta \alpha^{-1} \alpha a_1) = (\alpha a_1, 0)$. — Прим. ред.

метим, что если кольцо является прямой суммой неразложимых идеалов, то эти идеалы определены однозначно (а не с точностью до изоморфизма). В действительности кольцо является прямой суммой всех своих неразложимых прямых слагаемых. Мы получим этот результат по этапам.

Предложение 11. *Центральные идемпотенты кольца R образуют булеву алгебру $B(R)$.*

Доказательство. Пусть B — множество центральных идемпотентов кольца R . Тогда $0 \in B$, а если $e, f \in B$, то $e' = 1 - e \in B$ и $ef \in B$. Очевидно, что $(B, \cdot)$ — полуструктура¹⁾. Кроме того, $ef' = 0$, т. е. $e(1 - f) = 0$, тогда и только тогда, когда $ef = e$. В силу нашего определения (см. § 1.1) $(B, 0, ', \cdot)$ — булева алгебра.

Следует заметить, что, хотя умножение в булевом кольце $B(R)$ и совпадает с умножением в кольце R , сложения в этих кольцах, вообще говоря, не совпадают. Действительно, пусть $e, f \in B(R)$, тогда их сумма в кольце $B(R)$ равна $ef' \vee fe'$ (см. предложение 1.1.3), что после некоторых выкладок²⁾ превращается в $e + f - 2ef = (e - f)^2$. Здесь $+$ обозначает сложение в кольце R .

Минимальный ненулевой элемент булевой алгебры называется *атомом*.

Лемма 3. *Если e — центральный идемпотент кольца R , то идеал eR неразложим тогда и только тогда, когда e — атом булевой алгебры $B(R)$.*

Доказательство (набросок). Если e не является атомом, то $e > f > 0$ и, следовательно, $e = f + (e - f)$, где f и $e - f$ — ненулевые ортогональные идемпотенты. Отсюда следует, что имеет место разложение в прямую сумму идеалов $eR = fR + (e - f)R$.

Обратно, допустим, что $eR = fR + gR$ — прямая сумма идеалов, где f и g — ненулевые центральные

¹⁾ Обозначение $(B, \cdot)$ подразумевает $(B, \leq, \cdot)$, где $e \leq f \Leftrightarrow ef = e$ для e и f из B . — *Прим. ред.*

²⁾ Заметим, что, как легко проверить, $e \vee f = e + f - ef$. — *Прим. перев. и ред.*

идемпотенты. Легко показать, что $fg = 0$ и $e = f + g$. Следовательно, e не является атомом.

Предложение 12. Если кольцо R является прямой суммой неразложимых идеалов, то этими идеалами исчерпываются все неразложимые прямые слагаемые кольца R .

Доказательство. Можно считать, что $R = e_1R + \dots + e_nR$ — прямая сумма, где e_i — центральные идемпотенты и $1 = e_1 + \dots + e_n$. Нам известно, что идеалы e_iR неразложимы. Следовательно, в силу леммы 3 e_i являются атомами в $B(R)$. Ими исчерпываются все атомы в $B(R)$. Действительно, если e — атом, то либо $e = \sum_{i=1}^n e_i e = 0$, либо $e = e_i$ для некоторого i . Таким образом, множество неразложимых прямых слагаемых совпадает с множеством e_iR .

Аналог предложения 12 для неразложимых правых идеалов уже неверен.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если K — идеал кольца R , то все идеалы кольца R/K имеют вид J/K , где J — идеал кольца R , содержащий K , при этом

$$R/J \cong (R/K)/(J/K).$$

2. Если S — подкольцо кольца R , а K — идеал кольца R , то

$$(S + K)/K \cong S/(S \cap K).$$

3. Покажите, что аддитивная абелева группа (т. е. $\mathbf{Z}$ -модуль) обладает композиционным рядом тогда и только тогда, когда она конечна.

4. Если модуль $A_1 \times A_2 \cong B_1 \times B_2$ артинов и нётеров и если $A_1 \cong B_1$, то $A_2 \cong B_2$. (Используйте предложение 10.)

5. Покажите, что как артинов, так и нётеров модуль разлагается в прямую сумму неразложимых модулей.

6. Восстановите в деталях доказательство леммы 3.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КОММУТАТИВНЫХ КОЛЕЦ

§ 2.1. Простые идеалы в коммутативных кольцах

Элемент r кольца R называется *обратимым*, если $rs = 1 = sr$ для некоторого $s \in R$, и *делителем нуля*, если $rs = 0$ или $sr = 0$ при $s \neq 0$. Очевидно, что обратимый элемент не является делителем нуля. Коммутативное кольцо называется *полем*, если $0 \neq 1$ и каждый ненулевой элемент обратим, и *областью целостности*, если $0 \neq 1$, а 0 — единственный делитель нуля.

Лемма 1. *Элемент коммутативного кольца обратим тогда и только тогда, когда он не содержится ни в каком собственном идеале; это равносильно тому, что он не содержится ни в каком максимальном (собственном) идеале.*

Доказательство. Пусть r — элемент кольца. Тогда $rs = 1$ для некоторого s в том и только том случае, когда «главный» идеал rR , порожденный элементом r , содержит 1 , т. е. не является собственным. Кроме того, каждый собственный идеал содержится в максимальном собственном идеале (следствие предложения 1.3.2).

З а м е ч а н и е. В дальнейшем мы будем употреблять термин «максимальный идеал» вместо «максимальный собственный идеал».

Собственный идеал P кольца называется *простым*, если из включения $AB \subset P$, где A, B — идеалы кольца, следует, что либо $A \subset P$, либо $B \subset P$. Максимальные и простые идеалы, как показывают следующие два предложения, допускают описание на языке элементов кольца.

Предложение 1. *Собственный идеал M коммутативного кольца R является максимальным тогда и только тогда, когда*

$$\forall r \notin M \exists x \in R \ 1 - rx \in M.$$

Доказательство. В условии утверждается, что $M + rR$ содержит 1, т. е. $M + rR$ не является собственным идеалом ни для какого $r \notin M$, что, очевидно, эквивалентно максимальной идеала M .

Предложение 2. *Собственный идеал P коммутативного кольца R является простым тогда и только тогда, когда из $ab \in P$, $a, b \in R$, следует, что либо $a \in P$, либо $b \in P$.*

Доказательство. Пусть P — простой идеал и $ab \in P$. Тогда $(aR)(bR) \subset (ab)R \subset P$, откуда или $aR \subset P$, или $bR \subset P$, т. е. или $a \in P$, или $b \in P$.

Обратно, пусть выполнено условие предложения и $AB \subset P$. Допустим, что $A \not\subset P$. Тогда $\exists a \in A \ a \notin P$. Если $b \in B$, то $ab \in P$ и, следовательно, $b \in P$. Таким образом, $B \subset P$, т. е. P — простой идеал.

Более важной является характеристика максимальных и простых идеалов при помощи факторколец, ими определяемых.

Предложение 3. *Идеал M коммутативного кольца R максимален тогда и только тогда, когда R/M — поле.*

Доказательство. Пусть $\pi: R \rightarrow R/M$ — канонический эпиморфизм. Тогда R/M — поле тогда и только тогда, когда каждый элемент вида πr , $r \notin M$, обратим, т. е. $\pi r \pi x = 1$ для некоторого $x \in R$, откуда $1 - rx \in M$ для некоторого $x \in R$, что в силу предложения 1 означает максимальность идеала M .

Предложение 4. *Идеал P коммутативного кольца R является простым тогда и только тогда, когда R/P — область целостности.*

Доказательство. Пусть опять $\pi: R \rightarrow R/P$ — канонический гомоморфизм. Тогда R/P — область це-

лостности в том и только в том случае, когда из равенства $\pi r_1 \pi r_2 = 0$ следует, что $\pi r_1 = 0$ или $\pi r_2 = 0$, т. е. из включения $r_1 r_2 \in P$ следует, что $r_1 \in P$ или $r_2 \in P$. Последнее в силу предложения 2 равносильно простоте идеала P .

Предложение 5. *Каждый максимальный идеал коммутативного кольца прост.*

Доказательство. Так как обратимые элементы не являются делителями нуля, то поле является областью целостности. Утверждение предложения следует теперь из предыдущих двух предложений.

Простой идеал не обязан быть максимальным, например нулевой идеал в кольце целых чисел. Однако этот идеал является *минимальным простым* идеалом. Существование минимальных простых идеалов вытекает из следующего утверждения (при $A = 0$):

Предложение 6. *Если идеал A содержится в простом идеале B , то множество всех простых идеалов P , таких, что $A \subset P \subset B$, содержит минимальные элементы.*

Доказательство. В силу леммы Цорна достаточно показать, что любое линейно упорядоченное по включению семейство $\{P_i \mid i \in I\}$ простых идеалов, лежащих между A и B , обладает нижней гранью в этом множестве идеалов. Пусть $P = \bigcap_{i \in I} P_i$. Покажем, что P — простой идеал. Предположим, что $ab \in P$ и $a \notin P$. Тогда $a \notin P_i$ для некоторого i . Для любого $j \in I$ имеем либо $P_j \subset P_i$, либо $P_i \subset P_j$. В первом случае $a \notin P_j$ и, следовательно, $b \in P_j$. Во втором случае $b \in P_i \subset P_j$. Таким образом, $b \in P$.

Пересечение всех максимальных идеалов коммутативного кольца R называется *радикалом*¹⁾ кольца R , а пересечение всех простых идеалов — *первичным*

¹⁾ Обычно его называют радикалом Джекобсона. — Прим. ред.

радикалом¹⁾ кольца R . Очевидно, что первичный радикал всегда лежит в радикале. Следующие два предложения дают описание элементов радикала и первичного радикала.

Предложение 7. *Радикал кольца R состоит из всех таких элементов $r \in R$, что элемент $1 - rx$ обратим при всех $x \in R$.*

Доказательство. Элемент r лежит в радикале кольца R тогда и только тогда, когда для любого максимального идеала M и для любого элемента x элемент $1 - rx$ не принадлежит M . Это равносильно тому, что для любого x элемент $1 - rx$ не лежит ни в каком максимальном идеале, т. е. по лемме 1 элемент $1 - rx$ обратим.

Элемент r кольца R называется *нильпотентным*, если $r^n = 0$ для некоторого натурального числа n .

Предложение 8. *Первичный радикал коммутативного кольца R состоит из всех его нильпотентных элементов.*

Доказательство. Если r — нильпотентный элемент, то $r^n = 0 \in P$ для любого простого идеала P , следовательно, $r \in P$, и, таким образом, r принадлежит первичному радикалу кольца.

Обратно, пусть элемент r не нильпотентен. Тогда множество $T = \{1, r, r^2, \dots\}$ не содержит 0. Пусть P — идеал кольца R , являющийся максимальным среди идеалов, не пересекающихся с T . Если теперь $a, b \notin P$, то из максимальной P следует, что $r^m \in P + aR$, $r^n \in P + bR$. Следовательно, $r^{m+n} \in (P + aR)(P + bR) \subset P + abR$. Так как $r^{m+n} \notin P$, то мы видим, что $ab \notin P$. Таким образом, поскольку $1 \notin P$, то P — простой идеал. Так как $r \notin P$, то r не лежит в первичном радикале.

Если мы проанализируем вторую часть приведенного выше доказательства, то увидим, что существенными были следующие свойства множества T :

¹⁾ В монографии Зарисского и Самюэля (1963) он называется радикалом. — *Прим. ред.*

(а) Если $t_1, t_2 \in T$, то $t_1 t_2 \in T$.

(б) $1 \in T$.

(в) $0 \notin T$.

Так как 1 можно рассматривать как произведение пустого множества, то (а) и (б) вместе означают, что множество T замкнуто относительно конечных произведений. Следовательно, мы можем извлечь из приведенного доказательства следующий результат, который, имея в виду ссылки на него в дальнейшем, выделим отдельно.

Лемма 2. Если T — подмножество коммутативного кольца, замкнутое относительно конечных произведений и не содержащее 0 , то любой идеал, являющийся максимальным среди идеалов, не пересекающихся с T , прост.

Коммутативное кольцо R называется *полупримитивным*¹⁾, если его радикал нулевой, т. е. если из соотношения $r \neq 0$ следует, что $1 - rx$ не является обратимым элементом для некоторого $x \in R$. (Мы будем избегать употребления перегруженного термина «полупростой».) Коммутативное кольцо R называется *полупервичным*, если его первичный радикал равен 0 , т. е. если R — кольцо без нильпотентных элементов. С этого момента $\text{Rad } R$ и $\text{rad } R$ будут обозначать радикал и первичный радикал кольца R соответственно. Очевидно, что $\text{rad } R \subseteq \text{Rad } R$.

Предложение 9. Кольцо $R/\text{Rad } R$ полупримитивно, а кольцо $R/\text{rad } R$ полупервично.

Доказательство. (а) Пусть $\pi: R \rightarrow R/\text{Rad } R$ — канонический эпиморфизм. Если элемент πr из πR принадлежит радикалу кольца πR , то элемент $1 - \pi r \pi x = \pi(1 - rx)$ обратим при всех $\pi x \in \pi R$, т. е. при всех $x \in R$. Но тогда $1 = \pi(1 - rx) \pi y = \pi((1 - rx)y)$ для некоторого $y \in R$, т. е. $1 - (1 - rx)y \in \text{Rad } R$. Следовательно, элемент $(1 - rx)y$ обратим. Поэтому обратим и элемент

¹⁾ Во многих книгах по теории колец принят термин *полупростое* кольцо. — Прим. ред.

$1 - rx$. Так как это имеет место при всех $x \in R$, то $r \in \text{Rad } R$ и, значит, $\pi r = 0$.

(б) Пусть $\pi: R \rightarrow R/\text{rad } R$ — канонический эпиморфизм, и пусть $(\pi r)^n = 0$, значит $\pi(r^n) = 0$, т. е. $r^n \in \text{rad } R$. Тогда $(r^n)^k = 0$ для некоторого k . Следовательно, $r \in \text{rad } R$, откуда $\pi r = 0$.

Будем говорить, что кольцо R является *подпрямым произведением* семейства колец $\{S_i \mid i \in I\}$, если существует мономорфизм

$$\kappa: R \rightarrow S = \prod_{i \in I} S_i,$$

для которого $\pi_i \circ \kappa$ — эпиморфизмы при всех $i \in I$, где $\pi_i: S \rightarrow S_i$ — каноническая проекция.

Предложение 10. *Кольцо R является подпрямым произведением колец S_i , $i \in I$, тогда и только тогда, когда $S_i \cong R/K_i$, где K_i — идеал кольца R и $\bigcap_{i \in I} K_i = 0$.*

Доказательство. Допустим сначала, что кольцо R является подпрямым произведением колец S_i , а κ и π_i — определенные выше отображения. Так как $\pi_i \circ \kappa: R \rightarrow S_i$ — эпиморфизм, то $S_i \cong R/K_i$, где K_i — ядро отображения $\pi_i \circ \kappa$. Кроме того, ядро гомоморфизма κ состоит из всех тех элементов $r \in R$, для которых $(\pi_i \circ \kappa)r = \pi_i(\kappa r) = 0$ при всех $i \in I$, что равносильно включению $r \in \bigcap_{i \in I} K_i$. Так как κ — мономорфизм, то $\bigcap_{i \in I} K_i = 0$.

Обратно, если указанное условие выполнено, то определим $\kappa: R \rightarrow \prod_{i \in I} R/K_i$, положив $\pi_i(\kappa r)$ равным каноническому образу элемента r в R/K_i . Тогда ядро отображения κ совпадает с $\bigcap_{i \in I} K_i = 0$.

Следствие 1. *Коммутативное кольцо R является подпрямым произведением полей (областей целостности) тогда и только тогда, когда R — полупримитивное (полупервичное) кольцо.*

Следствие 2. *Коммутативное кольцо полупервично тогда и только тогда, когда оно изоморфно подкольцу прямого произведения областей целостности.*

Доказательство. Тот факт, что полупервичное кольцо обладает указанным свойством, непосредственно следует из сказанного выше. Оттуда же вытекает, что прямое произведение областей целостности является полупервичным кольцом. Заметим, наконец, что любое подкольцо коммутативного полупервичного кольца является полупервичным, поскольку нильпотентный элемент подкольца, конечно, является нильпотентным элементом всего кольца.

Следствие 3. *Коммутативное кольцо полупервично тогда и только тогда, когда оно изоморфно подкольцу прямого произведения полей.*

Доказательство. Любая область целостности может быть вложена в поле, например в свое поле частных (см. § 2.3).

Кольцо R называется *подпрямо неразложимым*, если пересечение всех его ненулевых идеалов отлично от нуля. Это равносильно тому, что в любом представлении кольца R в виде прямого произведения один из сомножителей этого произведения изоморфен кольцу R^1).

Предложение 11 (Биркгоф). *Любое кольцо является подпрямым произведением подпрямо неразложимых колец.*

Доказательство. Каждому элементу $0 \neq r \in R$ сопоставим идеал K_r , являющийся максимальным среди идеалов, содержащихся в $R - \{r\}$. Так как $r \notin K_r$, то $\bigcap_{r \neq 0} K_r = 0$. Кроме того, R/K_r — подпрямо неразложимое кольцо. Действительно, рассмотрим все идеалы кольца R , строго содержащие идеал K_r . В силу максимальной идеала K_r каждый из них

¹⁾ Имеется в виду, что $\pi_i \circ \kappa$ — изоморфизм для некоторого i . — Прим. перев. и ред.

содержит элемент r . Следовательно, r лежит в их пересечении, которое, таким образом, строго содержит идеал K_r .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что коммутативное кольцо является полем (областью целостности) тогда и только тогда, когда 0 — максимальный (простой) идеал.

2. Если r — нильпотентный элемент, то $1 - r$ — обратимый элемент кольца.

3. Покажите, что идеал P коммутативного кольца R является простым тогда и только тогда, когда его дополнение $R - P$ замкнуто относительно конечных произведений.

4. Найдите все простые и максимальные идеалы, а также оба радикала кольца $\mathbf{Z}(n)$ вычетов по модулю n .

5. Если K — идеал кольца R , то существует взаимно однозначное соответствие между простыми идеалами кольца R , содержащими K , и простыми идеалами кольца R/K .

6. Покажите, что множество всех делителей нуля коммутативного кольца содержит по крайней мере один простой идеал.

7. Докажите, что в подпрямо неразложимом коммутативном кольце делители нуля образуют идеал.

8. Обобщите предложение 11 на другие алгебраические системы.

9. Пусть R — коммутативное кольцо, и пусть идеал A кольца R содержится в конечном объединении

простых идеалов $\bigcup_{i=1}^n P_i$. Покажите, что A содержится

по крайней мере в одном из P_i . [Указание: В противном случае по индукции можно предположить, что

$A \cap P_j \not\subseteq \bigcup_{i \neq j} P_i$ для всех j . Пусть $a_j \in A \cap P_j$, но

$a_j \notin \bigcup_{i \neq j} P_i$. Тогда элемент $a_1 + a_2 a_3 \dots a_n$ лежит

в A , но не принадлежит ни одному из P_i .]

10. Пусть C — подмножество коммутативного кольца, дополнение которого замкнуто относительно ко-

нечных произведений, и такое, что $cR \subset C$ для всех $c \in C$. Покажите, что C является объединением простых идеалов.

11. Пусть N — первичный радикал коммутативного кольца R . Положим $N^+ = \{r \in R \mid \exists_s \notin N rs \in N\}$. Покажите, что N совпадает с пересечением всех минимальных простых идеалов кольца R , а N^+ — с их объединением.

§ 2.2. Простые идеалы в некоторых классах коммутативных колец

Посмотрим, во что превращаются наши понятия в случае булевых колец. Подмножество F булевой алгебры (см. § 1.1) $(S, 0, ', \wedge)$ называется *фильтром*, если

$$0' \in F, \quad (1)$$

$$a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F, \quad (2)$$

$$(a \in F \text{ \& } a \leq b) \Rightarrow b \in F. \quad (3)$$

Будем говорить, что фильтр *собственный*, если $0 \notin F$. (В книгах по топологии термин «фильтр» используется для обозначения собственного фильтра.) Максимальный собственный фильтр называется *ультрафильтром*. Рассматривая фильтры дуальной булевой алгебры $(S, 1, ', \vee)$, будем называть их для краткости *дуальными фильтрами*.

Предложение 1. *Если рассматривать булеву алгебру как кольцо, то дуальные фильтры в точности совпадают с идеалами и, следовательно, дуальные ультрафильтры — это в точности максимальные идеалы.*

Доказательство. Пусть K — дуальный фильтр. Тогда в силу условия, дуального к (1), $0 \in K$. Если $a \in K$ и $s \in S$, то $as \leq a$. Следовательно, в силу условия, дуального к (3), $as \in K$. Если $a, b \in K$, то в силу уже доказанного и условия, дуального к (2), $a + b = ab' \vee ba' \in K \vee K \subset K$. Таким образом, K — идеал.

Обратно, пусть K — идеал. Тогда $0 \in K$, и если $b \leq a$ и $a \in K$, то $b = ab \in K$. Если $a, b \in K$, то

$a \vee b = (a'b')' = a + b - ab \in K$. Таким образом, K — дуальный фильтр. (Напомним, что $a' = 1 - a$.)

Предложение 2. *Следующие утверждения об идеале K булева кольца S равносильны:*

- (а) K — максимальный идеал.
- (б) K — простой идеал.
- (в) Для любого элемента s либо $s \in K$ и $s' \notin K$, либо $s' \in K$ и $s \notin K$.

Доказательство. Напомним, что из (а) следует (б). Предположим теперь, что K — простой идеал. Так как K — собственный идеал, то $s + s' = 1 \notin K$. Следовательно, s и s' не могут одновременно лежать в K . Но так как $ss' = 0 \in K$ и K — простой идеал, то либо s , либо s' принадлежит K . Таким образом, (б) $\Rightarrow$ (в).

Пусть выполнено условие (в). Тогда K — собственный идеал, так как $0 \in K$, и, следовательно, $1 = 0' \notin K$. Если $s \notin K$, то $s' \in K$. Тогда $1 = s' + s \in K + sS$. Таким образом, K — максимальный идеал, т. е. (в) $\Rightarrow$ (а).

Следствие 1. *Следующие утверждения о булевом кольце S эквивалентны:*

- (а) S — поле.
- (б) S — область целостности.
- (в) S содержит в точности два элемента 0 и 1.

Существует лишь одно с точностью до изоморфизма булево кольцо из двух элементов. Мы можем представить себе такое кольцо как кольцо вычетов по модулю 2, а также как множество всех подмножеств одноэлементного множества.

Следствие 2. *Булево кольцо полупримитивно. Таким образом, элемент булева кольца равен нулю тогда и только тогда, когда его образ равен нулю при любом гомоморфизме кольца в булево кольцо из двух элементов.*

Класс колец, более широкий, чем класс булевых колец, образуют *регулярные кольца*, введенные Ней-

маном. В регулярном кольце предполагается, что для любого элемента a найдется элемент a' , для которого $aa'a = a$. В коммутативном случае это, разумеется, можно записать и в виде $a^2a' = a$.

Предложение 3. *В коммутативном регулярном кольце справедливы следующие утверждения:*

(1) *Каждый необратимый элемент является делителем нуля.*

(2) *Каждый простой идеал максимален.*

(3) *Каждый главный идеал выделяется прямым слагаемым.*

Доказательство. (1) Если a не является делителем нуля, то из равенства $a(a'a - 1) = 0$ следует, что $a'a = 1$.

(2) Пусть P — простой идеал, и пусть $a \notin P$. Тогда $a'a - 1 \in P$. Следовательно, $1 \in P + aR$. Таким образом, P — максимальный идеал.

(3) Положим $a'a = e$. Тогда e — идемпотент и $aR = eR$. Остается вспомнить, что $eR + (1 - e)R = R$ — прямая сумма.

Предложение 4. *Коммутативное регулярное кольцо полупримитивно.*

Доказательство. Если $a \neq 0$, то $1 - aa'$ — делитель нуля и, следовательно, не является обратимым элементом.

Покажем теперь, что существуют полупервичные кольца, не являющиеся регулярными. Коммутативное кольцо R называется *локальным*, если R обладает в точности одним максимальным идеалом M . Разумеется, в этом случае M — радикал кольца R . В любой области целостности 0 — простой идеал и, следовательно, первичный радикал. Таким образом, нам достаточно привести пример локального кольца без делителей нуля, не являющегося полем.

Пример. Рассмотрим кольцо R формальных степенных рядов

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

над полем F . Если $a(x) \neq 0$ и $b(x) \neq 0$, то $a(x)b(x) \neq 0$ (это следует из рассмотрения первых отличных от нуля коэффициентов). Таким образом, R — область целостности.

Заметим, что $a(x)$ — обратимый элемент тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a(x) \in \text{Rad } R &\Leftrightarrow \forall_{b(x)} 1 - a(x)b(x) - \\ &\quad \text{обратимый элемент} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall_{b(x)} 1 - a_0 b_0 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_0 = 0, \end{aligned}$$

и поэтому $\text{Rad } R$ совпадает с главным идеалом xR , порожденным элементом x . Предположим теперь, что $c(x) \notin xR$. Тогда $c_0 \neq 0$ и, следовательно, $c(x)R = R$. Таким образом, xR — максимальный идеал. Из совпадения xR с радикалом кольца следует, что xR — единственный максимальный идеал в R , т. е. R — локальное кольцо.

Локальные кольца, как мы увидим, можно охарактеризовать разными способами.

Предложение 5. Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) Кольцо R обладает единственным максимальным идеалом M .
- (2) Все необратимые элементы кольца R принадлежат собственному идеалу M .
- (3) Необратимые элементы образуют идеал M .

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Любой необратимый элемент содержится в некотором максимальном идеале и, следовательно, в M .

$(2) \Rightarrow (3)$. Поскольку собственный идеал содержит лишь необратимые элементы, M является множеством всех необратимых элементов.

$(3) \Rightarrow (1)$. Так как собственный идеал содержит лишь необратимые элементы, то каждый идеал содержится в M . Поскольку $1 \notin M$, M — собственный идеал.

Более узкий по сравнению с локальными кольцами класс образуют кольца с единственным простым идеа-

лом. Будем называть такие кольца *вполне примарными*. (Обычно такие кольца называют *примарными*, но мы зарезервируем этот термин для более общего случая, когда в соответствии с обычной терминологией 0 является примарным идеалом.)

Предложение 6. Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) Каждый делитель нуля нильпотентен.
- (2) R содержит минимальный простой идеал P , в котором лежат все делители нуля.

Назовем такое кольцо *примарным*.

Доказательство. Допустим, что выполнено (1). Тогда делители нуля образуют идеал P , являющийся простым. Так как P — идеал, состоящий из всех нильпотентных элементов, то P — первичный радикал и, следовательно, содержится в любом простом идеале. Таким образом, из (1) следует (2).

Допустим, что выполнено (2). Пусть r — элемент, не являющийся нильпотентным, и пусть T — множество всех элементов вида sr^k , где $s \notin P$ и $k \geq 0$ — любое натуральное число. Очевидно, T содержит 1 и r и замкнуто относительно конечных произведений. Кроме того, $0 \notin T$. Действительно, если $0 \in T$, т. е. $sr^k = 0$, $r^k \neq 0$, то s — делитель нуля, и потому $s \in P$, что нестерпимо. Следовательно, $R - T$ содержит некоторый простой идеал. С другой стороны, $R - T$ лежит в минимальном простом идеале P . Таким образом, $R - T = P$. Так как $r \in T$, то $r \notin P$. Итак, из (2) следует (1).

Получим теперь несколько различных описаний вполне примарных колец.

Предложение 7. Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) В R содержится единственный простой идеал P .
- (2) R — локальное кольцо и $\text{Rad } R = \text{rad } R$.
- (3) Каждый необратимый элемент нильпотентен.
- (4) R — примарное кольцо, и все необратимые элементы в R являются делителями нуля.

Доказательство. Очевидно, что $(1) \Rightarrow (2)$.

Пусть выполнено условие (2). Тогда каждый необратимый элемент лежит в $\text{rad } R$ и, следовательно, является нильпотентным. Таким образом, $(2) \Rightarrow (3)$.

Пусть выполнено условие (3). Тогда каждый необратимый элемент является делителем нуля и каждый делитель нуля нильпотентен. Итак, $(3) \Rightarrow (4)$.

Пусть выполнено условие (4). Тогда делители нуля образуют наименьший простой идеал P в R . Если $r \notin P$, то r не является делителем нуля и, следовательно, в силу предположения r — обратимый элемент. Таким образом, P — максимальный идеал и, значит, единственный простой идеал. Итак, $(4) \Rightarrow (1)$.

Возможно, уместно рассмотреть здесь подробнее подпрямо неразложимые кольца, являющиеся кольцами с наименьшим ненулевым идеалом J . Разумеется, J порождается любым своим ненулевым элементом. Следовательно, подпрямо неразложимые коммутативные кольца могут быть охарактеризованы следующим свойством:

$$\exists 0 \neq j \in R \forall 0 \neq a \in R \exists r \in R j = ar.$$

Если K — подмножество коммутативного кольца R , то *аннулятором* множества K в R будем называть множество $K^* = \{r \in R \mid rK = 0\}$. Ясно, что K^* — идеал. Вместо $(K^*)^*$ будем для краткости писать K^{**} .

Предложение 8 (Маккой). Пусть R — подпрямо неразложимое коммутативное кольцо с наименьшим ненулевым идеалом J . Тогда аннулятор J^* подмножества J совпадает с множеством всех делителей нуля, J^* является максимальным идеалом и $J^{**} = J$.

Доказательство. Если r — делитель нуля, то $r^* \neq 0$. Следовательно, $r^* \supset J$. Поэтому $r \in J^*$. Таким образом, J^* — множество всех делителей нуля.

Очевидно, что $1 \notin J^*$. Предположим, что $r \notin J^*$. Тогда $rj \neq 0$ для некоторого $j \in J$. Следовательно, $J = rjR$. В частности, $j = rjx$ для некоторого $x \in R$. Таким образом, $(1 - rx)j = 0$, и потому $1 - rx \in J^*$. Следовательно, J^* — максимальный идеал.

Поскольку включение $J \subset J^{**}$ очевидно, мы покажем, что $J^{**} \subset J$. Пусть $0 \neq a \in J^{**}$. Тогда $J \subset aR$. Следовательно, $0 \neq ar \in J$ для некоторого $r \in R$, откуда $r \notin J^*$. В силу сказанного выше $1 - rx \in J^*$ для некоторого $x \in R$. Следовательно, $a(1 - rx) = 0$, а потому $a = arx \in J$. Таким образом, $J^{**} = J$.

Следствие. Если R — подпрямо неразложимое полупервичное кольцо, то R — поле.

Доказательство. Так как $J^2 \neq 0$, то $J \not\subset J^*$. Таким образом, $J^* = 0$. Следовательно, R — поле.

Маккой указал также условия, необходимые и достаточные для того, чтобы кольцо было подпрямо неразложимым. В следующем утверждении дана иная характеристика таких колец.

Предложение 9. Коммутативное кольцо R подпрямо неразложимо тогда и только тогда, когда R содержит элемент j , такой, что пересечение идеала jR с любым ненулевым идеалом отлично от нуля и аннулятор j^* является максимальным идеалом.

Доказательство. Если J — наименьший ненулевой идеал кольца R и $0 \neq j \in J$ — произвольный ненулевой элемент, то $J = jR$ и в силу предложения 8 $j^* = J^*$ — максимальный идеал. Другое условие очевидно.

Обратно, пусть выполнены условия предложения. Если $a \neq 0$, то $aR \cap jR \neq 0$ и, следовательно, $0 \neq ar = js$ для некоторых $r, s \in R$. Таким образом, $s \notin j^*$ и, значит, $1 - st \in j^*$ для некоторого $t \in R$. Тогда $j = jst = art$, следовательно, как и требовалось, $jR \subset aR$.

УПРАЖНЕНИЯ .

1. Какие из следующих свойств: полупервичность, полупримитивность и регулярность — сохраняются при переходе к подкольцам, факторкольцам и произведениям колец?

2. Покажите, что кольцо $(n \times n)$ -матриц над полем является регулярным кольцом.

3. Покажите, что если R — регулярное кольцо, то для любого элемента r найдется элемент r^- , такой, что $rr^-r = r$ и $r^-rr^- = r^-$. Если R — коммутативное кольцо, то r^- однозначно определяется элементом r .

4. Покажите, что в коммутативном регулярном кольце для любого элемента r найдется обратимый элемент u , такой, что $ruur = r$.

5. Покажите, что кольцо R является регулярным тогда и только тогда, когда каждый главный правый идеал выделяется прямым слагаемым (как правый R -модуль).

6. Покажите, что в коммутативном регулярном кольце каждый конечно порожденный идеал является главным.

7. Покажите, что коммутативное кольцо локально тогда и только тогда, когда для любых элементов r и s из равенства $r + s = 1$ следует, что либо r , либо s — обратимый элемент.

8. Пусть $\mathbf{Z}^p$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на простое число p . Покажите, что $\mathbf{Z}^p$ — локальное кольцо.

9. Если M — максимальный идеал коммутативного кольца R , а n — положительное целое число, то кольцо R/M^n обладает единственным простым идеалом.

§ 2.3. Полное кольцо частных коммутативного кольца

Можно разными способами строить рациональные числа, исходя из целых чисел. Некоторые из этих способов восходят к теории пропорций Евклида. Мы кратко опишем два таких метода.

Метод 1. Этот метод используется во многих элементарных учебниках. Рассмотрим пары целых чисел (a, b) , $b \neq 0$. Если считать пары (a, b) и (c, d) эквивалентными в том и только в том случае, когда $ad = bc$, то получим разбиение множества пар на классы эквивалентности. Затем вводятся операции на классах, превращающие множество классов эквивалентных пар в поле, которое содержит кольцо целых чисел. Иногда сразу определяют отношение a/b как

множество всех пар (x, y) , для которых $ay = bx$, и работают дальше с отношениями.

Метод 2. Дробь $4/6$ можно рассматривать как частичный эндоморфизм аддитивной группы $\mathbf{Z}$ целых чисел. Его область определения — идеал $6\mathbf{Z}$, и он переводит $6z$ в $4z$, где $z \in \mathbf{Z}$. Аналогично, дробь $6/9$ определена на идеале $9\mathbf{Z}$ и переводит $9z$ в $6z$. Эти две дроби эквивалентны в том смысле, что они согласованы на пересечении своих областей определений, равном идеалу $18\mathbf{Z}$, поскольку и та и другая дробь переводят $18z$ в $12z$. Отношения определяются как классы эквивалентных дробей. Варьируя этот метод, можно выбрать в каждом классе эквивалентности одну «несократимую» дробь. Рассмотренный выше класс содержит несократимую дробь $2/3$.

Оба метода можно применять для построения «поля частных» областей целостности. Первый метод можно применять к любому коммутативному кольцу для построения «классического кольца частных», где в качестве знаменателей допускаются все неделители нуля. Второй метод может быть применен к произвольному коммутативному кольцу для построения «полного кольца частных», где в качестве областей определения допускаются лишь идеалы определенного типа. Как мы убедимся, «полное кольцо частных» может быть больше «классического кольца частных».

Идеал D коммутативного кольца R будем называть *плотным*, если для любого $r \in R$ из равенства $rD = 0$ следует, что $r = 0$. Перечислим некоторые свойства плотных идеалов кольца R :

- (1) R — плотный идеал.
- (2) Если D — плотный идеал и $D \subset D'$, то идеал D' плотный.
- (3) Если D и D' — плотные идеалы, то DD' и $D \cap D'$ — также плотные идеалы.
- (4) Если $R \neq 0$, то 0 не является плотным идеалом.

Приведем доказательство утверждения (3) (остальные очевидны). Пусть $rDD' = 0$. Тогда $rdD' = 0$

для любого $d \in D$. Поэтому ввиду плотности идеала D' $rd = 0$. Таким образом, $rD = 0$. Следовательно, ввиду плотности идеала D $r = 0$. Таким образом, DD' — плотный идеал. Так как $DD' \subset D \cap D'$, то в силу (2) $D \cap D'$ — плотный идеал.

Под *дробью* мы будем подразумевать элемент $f \in \text{Hom}_R(D, R)$, где D — некоторый плотный идеал. Таким образом, f — гомоморфизм аддитивных групп, для которого $f(dr) = (fd)r$ при всех $d \in D$ и $r \in R$. Определим $-f \in \text{Hom}_R(D, R)$, полагая $(-f)d = -(fd)$. Введем также дроби $0, 1 \in \text{Hom}_R(R, R)$, положив $0r = 0$ и $1r = r$ при всех $r \in R$. Сложение и умножение дробей $f_i \in \text{Hom}_R(D_i, R)$, $i = 1, 2$, определяются следующим образом:

$$f_1 + f_2 \in \text{Hom}_R(D_1 \cap D_2, R), (f_1 + f_2)d = f_1d + f_2d.$$

$$f_1 f_2 \in \text{Hom}_R(f_2^{-1}D_1, R), (f_1 f_2)d = f_1(f_2d).$$

Здесь идеал $f_2^{-1}D_1 = \{r \in R \mid f_2r \in D_1\}$ является плотным, поскольку он содержит идеал D_2D_1 .

Очевидно, что дроби образуют аддитивную абелеву полугруппу $(F, 0, +)$ с нулем и полугруппу $(F, 1, \cdot)$ с единицей. Дроби не образуют кольцо, поскольку, например, $f + (-f) \neq 0$. (Область определения левой части есть D ; область определения правой части равна R .)

Будем писать $f_1 \theta f_2$, если f_1 и f_2 согласованы на пересечении своих областей определений, т. е. $f_1d = f_2d$ при всех $d \in D_1 \cap D_2$.

Лемма 1. $f_1 \theta f_2$ тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 согласованы на некотором плотном идеале.

Доказательство. Если $f_1 \theta f_2$, то f_1 и f_2 согласованы на $D_1 \cap D_2$. Обратно, пусть f_1 и f_2 согласованы на плотном идеале D' . Тогда если $d \in D_1 \cap D_2$ и $d' \in D'$, то

$$(f_1d)d' = f_1(dd') = f_2(dd') = (f_2d)d'.$$

Следовательно, $(f_1d - f_2d)D' = 0$, но так как D' — плотный идеал, то $f_1d = f_2d$. Таким образом, $f_1 \theta f_2$.

Лемма 2. *Отношение θ является конгруэнцией на системе $(F, 0, 1, -, +, \cdot)$.*

Доказательство. Очевидно, что отношение θ рефлексивно и симметрично. Предположим теперь, что $f_1\theta f_2$ и $f_2\theta f_3$. Тогда f_1 и f_2 согласованы на $D_1 \cap D_2$, а f_2 и f_3 согласованы на $D_2 \cap D_3$. Следовательно, f_1 и f_3 согласованы на идеале $D_1 \cap D_2 \cap D_3$, являющемся плотным идеалом. По лемме 1 $f_1\theta f_3$. Таким образом, θ — отношение эквивалентности. Для того чтобы показать, что θ — конгруэнция, мы должны проверить, что отношение согласовано с операциями. Например, пусть $f_1\theta f_3$, $f_2\theta f_4$. Тогда $f_1 + f_2$ и $f_3 + f_4$ определены и согласованы на плотном идеале $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$. Следовательно, $(f_1 + f_2)\theta(f_3 + f_4)$.

Предложение 1. *Если R — коммутативное кольцо, то система*

$$(F, 0, 1, -, +, \cdot)/\theta = Q(R)$$

также является коммутативным кольцом. Кольцо $Q(R)$ содержит R . (Будем называть $Q(R)$ полным кольцом частных кольца R .)

Доказательство. По лемме 2 все тождества, выполняющиеся в F , справедливы и в F/θ . Чтобы убедиться в том, что $Q(R)$ — коммутативное кольцо, остается лишь проверить справедливость равенства $\theta f + \theta(-f) = \theta 0$ и законов дистрибутивности и коммутативности.

Так как $f + (-f)$ и 0 согласованы на D , области определения f , то $(f + (-f))\theta 0$. Кроме того, $f_1(f_2 + f_3)$ и $(f_1f_2) + (f_1f_3)$ согласованы на $D_1D_2D_3$, т. е. находятся в отношении θ . Отображения f_1f_2 и f_2f_1 согласованы на D_1D_2 .

Наконец, любому $r \in R$ сопоставим дробь $r/1$ с областью определения R , при которой $s \in R$ переходит в rs . Отображение $r \rightarrow \theta(r/1)$, как легко видеть, является гомоморфизмом. Если $r/1$ и $0/1$ согласованы на некотором плотном идеале D , то $rD = 0$ и, следовательно, $r = 0$. Поэтому отображение $r \rightarrow \theta(r/1)$ является мономорфизмом. В дальнейшем будем называть его каноническим мономорфизмом R в $Q(R)$.

Более общим образом, любому неделителю нуля $d \in R$ сопоставим плотный идеал dR . Если $r \in R$, то определим *классическую дробь* $r/d \in \text{Hom}_R(dR, R)$, полагая $(r/d)(ds) = rs$ для любого $s \in R$.

Сформулируем без доказательства

Предложение 2. *Классы эквивалентности $\theta(r/d)$, где $r, d \in R$, причем d — неделитель нуля, образуют подкольцо кольца $Q(R)$. (Оно называется классическим кольцом частных кольца R и обозначается $Q_{cl}(R)$.)*

Заметим, что $\theta(r_1/d_1) = \theta(r_2/d_2)$ тогда и только тогда, когда r_1/d_1 и r_2/d_2 согласованы на $D_1 D_2$, что равносильно равенству $r_1 d_2 = r_2 d_1$. Следовательно, $Q_{cl}(R)$ совпадает с классическим кольцом частных, построенным первым методом.

Дробь называется *несократимой*, если ее область определения не может быть расширена.

Предложение 3. *Каждый класс эквивалентных дробей содержит в точности одну несократимую дробь.*

Доказательство. Если $f_1 \leq f_2$ означает, что $D_1 \subset D_2$, то дроби в классе эквивалентности образуют упорядоченное множество. Рассмотрим в нем линейно упорядоченное семейство дробей $\{f_i | i \in I\}$. Пусть $D = \bigcup_{i \in I} D_i$. Определим $f \in \text{Hom}_R(D, R)$, полагая $fd = f_i d$ для $d \in D_i$. (Если при этом $d \in D_j$, то $f_i d = f_j d$, поскольку f_i и f_j согласованы на $D_i \cap D_j$.) Таким образом, f — верхняя грань линейно упорядоченного семейства. В силу леммы Цорна класс эквивалентных дробей содержит по крайней мере одну несократимую дробь. Утверждение следует теперь из того замечания, что любые две эквивалентные дроби обладают общим расширением. Действительно, пусть $f_1 \theta f_2$. Определим $f \in \text{Hom}_R(D_1 + D_2, R)$, положив $f(d_1 + d_2) = f_1 d_1 + f_2 d_2$. (Чтобы убедиться в корректности определения, надо показать, что из равенства $d_1 + d_2 = 0$ следует равенство $f_1 d_1 + f_2 d_2 = 0$. Но если $d_1 = -d_2 \in D_1 \cap D_2$, то $f_1 d_1 = f_2 d_1 = -f_2 d_2$.)

Предложение 4. Следующие утверждения о коммутативном кольце R равносильны:

(1) Область определения любой несократимой дроби совпадает с R .

(2) Для любой дроби f можно найти элемент $s \in R$, такой, что $fd = sd$ при всех $d \in D$, где D — область определения дроби f .

(3) $Q(R)$ канонически изоморфно кольцу R .

При выполнении любого из этих условий мы будем называть кольцо R рационально полным.

Доказательство. Допустим, что справедливо (1). Пусть f — дробь и f' — несократимое расширение дроби f . В силу свойства (1) область определения дроби f' равна R . Положим $f'1 = s$. Тогда $fd = f'd = f'(1d) = (f'1)d = sd$ при всех $d \in D$. Следовательно, справедливо (2).

Пусть справедливо (2). Рассмотрим элемент θf из $Q(R)$. В силу (2) $f\theta(s/1)$ (в обозначениях из доказательства предложения 1). Таким образом, $\theta f = \theta(s/1)$, где правая часть равенства — канонический образ элемента $s \in R$ в $Q(R)$. Из этого следует, что канонический мономорфизм $R \rightarrow Q(R)$ является изоморфизмом.

Пусть справедливо (3), и пусть f — несократимая дробь. Тогда $\theta f = \theta(s/1)$ для некоторого $s \in R$. Но $s/1$ — несократимая дробь и, следовательно, $f = s/1$ по предложению 3. Поэтому область определения дроби f совпадает с R .

Предложение 5. Если R — коммутативное кольцо, то кольцо $Q(R)$ рационально полное.

Сделаем несколько предварительных замечаний. Чтобы не усложнять обозначения, отождествим кольцо R с его каноническим образом в $Q(R)$. Таким образом, $\theta(r/1) = r$. Если $q \in Q(R)$, то положим $q^{-1}R = \{r \in R \mid qr \in R\}$. Идеал $q^{-1}R$ является плотным. Действительно, если $q = \theta f$ и D — область определения дроби f , то

$$qd = \theta f \theta(d/1) = \theta(f(d/1)) = \theta(fd/1) = fd$$

при всех $d \in D$. Следовательно, $qD \subset R$, и поэтому $D \subset q^{-1}R$.

Доказательство. Пусть φ — дробь над $Q(R)$ с областью определения K^1). Положим $D = \{r \in R \mid \varphi r \in R\}$. Определим $f \in \text{Hom}_R(D, R)$, положив $fd = \varphi d$. Покажем, что (а) D — плотный идеал в R ; (б) $\varphi k = (\theta f)k$ для любого $k \in K$. Утверждение предложения будет следовать тогда из условия (2) предложения 4.

(а) Пусть $r \in R$ и $rD = 0$. Если $k \in K$, то $\varphi k \in Q(R)$. Положим $D' = k^{-1}R \cap (\varphi k)^{-1}R$. Идеал D' является плотным, $(\varphi k)D' \subset R$ и $kD' \subset R$. Следовательно, $\varphi(kD') \subset R$. Поэтому $kD' \subset D$. Таким образом, $(rk)D' = r(kD') \subset rD = 0$ и, следовательно, $rk = 0$. Итак, $rK = 0$, но поскольку K — плотный идеал, то $r = 0$.

(б) Пусть $k \in K$ и $d' \in D'$, где D' — определенный выше идеал. Тогда в силу только что приведенных рассуждений $(\varphi k)d' = \varphi(kd') = f(kd') = (\theta f)(kd')$. Следовательно, элемент $\varphi k - (\theta f)k$ аннулирует плотный идеал D' кольца R , а поэтому он равен нулю. (Действительно, элемент кольца $Q(R)$, аннулирующий плотный идеал кольца R , равен нулю.)

Пусть S — коммутативное кольцо, тогда мы можем называть аддитивную подгруппу D кольца S *плотной* (даже если D не является идеалом) в том случае, когда для любого $s \in S$ из равенства $sD = 0$ следует $s = 0$. Предположим теперь, что R — подкольцо кольца S . Кольцо S называется *кольцом частных* кольца R , если для любого $s \in S$ подгруппа $s^{-1}R = \{r \in R \mid sr \in R\}$ плотна в S . Итак, S — кольцо частных кольца R тогда и только тогда, когда для любых $s, t \in S$ из соотношения $t \neq 0$ следует, что $t(s^{-1}R) \neq 0$. Другими словами,

$$\forall s \in S \forall 0 \neq t \in S \exists r \in R (sr \in R \ \& \ tr \neq 0).$$

Это определение восходит к Утуми.

¹⁾ То есть $\varphi \in \text{Hom}_{Q(R)}(K, Q(R))$. — Прим. ред.

Следующее предложение показывает, что R , $Q_{cl}(R)$ и $Q(R)$ являются кольцами частных кольца R . Кстати, это было предвосхищено нашей терминологией. Более того, в некотором смысле, который мы уточним в дальнейшем, R является наименьшим, а $Q(R)$ — наибольшим среди колец частных.

Предложение 6. Пусть R — подкольцо коммутативного кольца S . Тогда следующие три условия равносильны:

- (1) S — кольцо частных кольца R .
- (2) Если $0 \neq s \in S$, то $s^{-1}R$ — полный идеал в кольце R и $s(s^{-1}R) \neq 0$.
- (3) Существует мономорфизм $S \rightarrow Q(R)$, индуцирующий канонический мономорфизм $R \rightarrow Q(R)$.

Доказательство. Очевидно, что из (1) следует (2). Пусть справедливо (2). Отображение $\hat{s}: d \rightarrow sd$, где $d \in s^{-1}R$, является дробью, а отображение $s \rightarrow \theta\hat{s}$, очевидно, оказывается гомоморфизмом кольца S в $Q(R)$, индуцирующим канонический мономорфизм $r \rightarrow \theta\hat{r} = \theta(r/1)$. Ядро отображения $s \rightarrow \theta\hat{s}$ состоит из всех $s \in S$, для которых $\theta\hat{s} = 0$, т. е. $\hat{s}\theta 0$. Последнее равносильно равенству $s(s^{-1}R) = 0$, откуда $s = 0$. Таким образом, это мономорфизм, и из (2) следует (3).

Пусть, наконец, справедливо (3). Можно считать, что $R \subset S \subset Q(R)$. Если $s = \theta f \in S$, то $s^{-1}R \supset D$, где D — область определения дроби f . Пусть теперь $t \in S$. Допустим, что $t(s^{-1}R) = 0$. Если $t = \theta f'$, то $f'D = 0$, следовательно, $f'\theta 0$, а тогда $t = 0$. Итак, из (3) следует (1), что заканчивает доказательство.

Из последней части этого доказательства выводим такое

Следствие. Если S — кольцо частных коммутативного кольца R и D — плотный идеал в R , то D плотно в S .

Предложение 7. $Q(R)$ — единственное (с точностью до изоморфизма) рационально полное кольцо частных коммутативного кольца R .

Доказательство. Пусть S — кольцо частных кольца R . В силу последнего предложения можно

считать, что $R \subset S \subset Q(R)$. Для любого $q \in Q(R)$ положим $D = \{s \in S \mid qs \in S\}$ ¹⁾. Тогда $D \supseteq q^{-1}R$ и, следовательно, D — плотный идеал в S ²⁾. Таким образом, отображение $d \rightarrow qd$, $d \in D$, является дробью над S . Допустим теперь, что S рационально полно. Тогда найдется $s \in S$, для которого $qd = sd$ при всех $d \in D$. Так как $q^{-1}R \subset D$, то D плотно в $Q(R)$ ²⁾ и можно заключить, что $q = s$. Таким образом, $Q(R) = S$.

Для полноты изложения сформулируем также следующее

Предложение 8. Если $\{R_i \mid i \in I\}$ — семейство коммутативных колец, то

$$Q\left(\prod_{i \in I} R_i\right) \cong \prod_{i \in I} Q(R_i).$$

Мы опустим доказательство этого факта, поскольку нам придется в дальнейшем доказать это утверждение для колец, не обязательно являющихся коммутативными.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите предложение 2.
2. Дайте доказательство предложения 3 (не используя леммы Цорна), построив дробь, область определения которой совпадает с суммой областей определения дробей класса эквивалентности.
3. Если $R \subset S \subset T$, то T является кольцом частных кольца R тогда и только тогда, когда S — кольцо частных кольца R , а T — кольцо частных кольца S .
4. Покажите, что S является кольцом частных кольца R тогда и только тогда, когда для любого R -подмодуля D в S , содержащего R , и для любого $\varphi \in \text{Hom}_R(D, S)$ из $\varphi R = 0$ следует, что $\varphi = 0$.
5. Покажите, что для любого кольца частных S кольца R существует в точности один гомоморфизм $S \rightarrow Q(R)$, индуцирующий канонический мономорфизм на R .

¹⁾ Разумеется, D зависит от q . — Прим. перев. и ред.

²⁾ Следует учесть, что $q^{-1}R$ плотно в R , и принять во внимание следствие. — Прим. ред.

6. Если f — несократимая дробь над R и $q = \theta f$ — ее класс эквивалентности, то $q^{-1}R$ — область определения дроби f .

7. Пусть R — коммутативное кольцо. Покажите, что $R = Q_{cl}(R)$ тогда и только тогда, когда каждый необратимый элемент является делителем нуля.

8. Для каких коммутативных колец каждый класс эквивалентности классической дроби содержит единственную несократимую классическую дробь?

§ 2.4. Кольца частных коммутативных полупервичных колец

Сопоставим подмножеству K коммутативного кольца R его аннулятор $K^* = \{r \in R \mid rK = 0\}$. Разумеется, K^* — идеал кольца R . Как правило, подмножество K само будет идеалом. Идеал K плотен тогда и только тогда, когда $K^* = 0$. Заметим, что если K_1 и K_2 — подгруппы в R , то $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$. Будем обозначать $(K^*)^*$ через K^{**} .

Лемма 1. Если K — идеал коммутативного полупервичного кольца, то

$$K \cap K^* = 0$$

и $K + K^*$ является плотным идеалом.

Доказательство. Так как $(K \cap K^*)^2 \subseteq K^*K = 0$, то $K \cap K^* = 0$. В силу уже доказанного

$$(K + K^*)^* = K^* \cap K^{**} = 0.$$

Предложение 1. Если R — коммутативное кольцо, то кольцо $Q(R)$ регулярно тогда и только тогда, когда R — полупервичное кольцо.

Доказательство. Если кольцо $Q(R)$ регулярно, то оно полупервично и, следовательно, полупервично любое подкольцо кольца $Q(R)$ (в частности, R).

Допустим теперь, что R — полупервичное кольцо. Если для любой дроби f над R найдется дробь f' , такая, что $ff' \neq 0$, то $Q(R)$ — регулярное кольцо. Пусть

f — дробь с областью определения D и ядром $K \subset D$. Тогда поскольку $D \cap K^* \cap K = 0$, то ограничение f на $D \cap K^*$ — мономорфизм. Пусть $E = f(D \cap K^*)$. Определим $f' \in \text{Hom}_R(E + E^*, R)$, полагая $f'(fd) = d$ для всех $fd \in E$ и $f'r = 0$ для всех $r \in E^*$. Тогда $ff'fd = fd$, где $d \in D \cap K^*$. Но это равенство, очевидно, выполнено, когда $d \in K \subset D$. Отсюда элемент $ff'f - f$ аннулирует идеал $K + (D \cap K^*)$, который в силу закона модулярности совпадает с идеалом $D \cap (K + K^*)$, являющимся плотным идеалом (как пересечение двух плотных идеалов). Следовательно, $ff'\theta f$.

Лемма 2. В коммутативном кольце

$$K \subset J \Rightarrow J^* \subset K^*. \quad (1)$$

$$K \subset K^{**}. \quad (2)$$

$$K^{***} = K^*. \quad (3)$$

Доказательство. Утверждение (1) очевидно. Утверждение (2) следует из равенств $KK^* = K^*K = 0$. Из (1) и (2) вытекает, что $K^{***} \subset K^*$; включение $K^* \subset K^{***}$ — частный случай свойства (2).

Идеалы вида K^* называются *аннуляторными идеалами*. Таким образом, J является аннуляторным идеалом тогда и только тогда, когда $J = K^*$ для некоторого подмножества K в R , что ввиду (3) равносильно равенству $J^{**} = J$.

Предложение 2. Аннуляторные идеалы коммутативного полупервичного кольца R образуют полную булеву алгебру $B^*(R)$ (с пересечением в качестве точной нижней грани и $*$ в качестве дополнения).

Доказательство. Поскольку $\bigcap_{i \in I} K_i^* = \left(\sum_{i \in I} K_i \right)^*$, любое пересечение аннуляторных идеалов является аннуляторным идеалом. Следовательно, аннуляторные идеалы образуют полную полуструктуру с пересечением в качестве нижней грани. Чтобы проверить, что они образуют булеву алгебру, осталось убедиться в том, что

$$J \cap K^* = 0 \Leftrightarrow J \subset K$$

для аннуляторных идеалов J и K . Однако, если $J \subset K$,

то $J \cap K^* \subset K \cap K^* = 0$. Обратно, если $J \cap K^* = 0$, то $JK^* = 0$, откуда $J \subset K^{**} = K$.

ЛЕММА 3. Если M_R есть R -подмодуль в $Q(R)$ и $q(M \cap R) = 0$, где $q \in Q(R)$, то $qM = 0$.

Доказательство. Пусть $q(M \cap R) = 0$. Если $m \in M$ и $D = m^{-1}R$, то $mD \subset M \cap R$. Следовательно, $q m D = 0$. Так как D — плотный идеал, то $q m = 0$. Таким образом, $qM = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Отображение $K \rightarrow K \cap R$ является изоморфизмом $B^*(Q(R))$ на $B^*(R)$.

Доказательство. Пусть K — аннуляторный идеал в $Q(R)$, т. е. $K = M^*$, где $M \subset Q(R)$. Тогда по лемме 3 $K \cap R = \{r \in R \mid rM = 0\} = (M \cap R)^*$. Таким образом, $K \cap R \in B^*(R)$.

Указанное отображение является гомоморфизмом булевых алгебр, так как оно переводит 0 в 0, $K_1 \cap K_2$ в $(K_1 \cap R) \cap (K_2 \cap R)$ и «дополнение» (аннулятор) идеала M в «дополнение» $(M \cap R)^*$ идеала $M \cap R$.

Это отображение является мономорфизмом, так как по лемме 3 из равенства $K \cap R = 0$ следует, что $K = 0$. Оно — эпиморфизм, так как если $J \subset R$, то $J^* = K \cap R$, где $K = \{q \in Q(R) \mid qJ = 0\}$ — аннуляторный идеал в $Q(R)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если коммутативное кольцо R полупервично и рационально полно, то каждый аннуляторный идеал выделяется прямым слагаемым.

Доказательство. Пусть K — аннуляторный идеал. Рассмотрим отображение $f \in \text{Hom}_R(K + K^*, R)$, полагая $f(a + b) = a$, где $a \in K$ и $b \in K^*$. Идеал $K + K^*$ плотный (по лемме 1), а кольцо R рационально полно. Следовательно, существует элемент $e \in R$, такой, что $a = f(a + b) = e(a + b)$. Тогда $e^2(a + b) = ea = fa = a = e(a + b)$. Таким образом, $e^2 - e$ аннулирует плотный идеал $K + K^*$. Поэтому $e^2 = e$. Кроме того, $K = eK \subset eR$. Аналогично $K^* \subset (1 - e)R$. Следовательно, $eR \subset ((1 - e)R)^* \subset K^{**} = K$. Таким образом, $K = eR$ является прямым слагаемым в R .

Следствие 1. Если коммутативное кольцо R полупервично и рационально полно, то $B^*(R) \cong B(R)$, где $B(R)$ — булева алгебра идемпотентов кольца R .

Доказательство. Сопоставим идеалу eR идемпотент $e \in B(R)$. Детали оставляем в качестве упражнения.

Следствие 2. Если R — коммутативное полупервичное кольцо, то $B^*(R) \cong B^*(Q(R)) \cong B(Q(R))$.

Лемма 4. Если R — булево кольцо, то кольцо $Q(R)$ булево.

Доказательство. Пусть f — дробь над R с областью определения D . Тогда f^2 определена на D^2 , что совпадает с D . (Действительно, $D^2 \subset D$, а если $d \in D$, то $d = d^2 \in D^2$.) Так как $f^2 d = f(f d^2) = (f d)^2 = f d$ для любого $d \in D$, то $f^2 \theta f$. Следовательно, $(\theta f)^2 = \theta f$, и поэтому $Q(R)$ — булево кольцо.

Для рассмотрения взаимоотношения между булевыми кольцами R и $Q(R)$ предпримем небольшой обходной маневр.

Пусть $(S, \leq)$ — упорядоченное множество. Подмножеству X в S сопоставим множество X^Δ всех верхних граней множества X и множество X^∇ всех нижних граней множества X . Пусть $X^{\Delta\nabla} = (X^\Delta)^\nabla$.

Лемма 5.

$$X \subset Y \Rightarrow (Y^\Delta \subset X^\Delta \& Y^\nabla \subset X^\nabla). \quad (1)$$

$$X \subset X^{\Delta\nabla}, X \subset X^{\nabla\Delta}. \quad (2)$$

$$X^{\Delta\nabla\Delta} = X^\Delta, X^{\nabla\Delta\nabla} = X^\nabla. \quad (3)$$

Кроме того,

$$\nabla^\Delta (a \text{ также } \Delta^\nabla) \text{ — операция замыкания.} \quad (4)$$

Доказательство оставим в качестве упражнения.

Назовем Y *нижним конусом*, если $Y = X^\nabla$ для некоторого X . В силу (3) это равносильно тому, что $Y = Y^{\Delta\nabla}$.

Предложение 5. Нижние конусы в $(S, \leq)$ образуют полную структуру $D(S)$. Каноническое отображение $\mu: S \rightarrow D(S)$, при котором $\mu x = \{x\}^{\Delta \nabla}$, обладает следующим свойством: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $\mu x \subset \mu y$. Таким образом, $(D(S), \subset)$ можно рассматривать как расширение для $(S, \leq)$. Кроме того, каждый элемент из $D(S)$ является точной верхней гранью и точной нижней гранью для некоторых подмножеств из μS . $(D(S))$ называют пополнением Дедекинда — Макнейла упорядоченного множества S^1 .)

Доказательство. Очевидно, что из неравенства $x \leq y$ вытекает, что $\{y\}^{\Delta} \subset \{x\}^{\Delta}$ и в силу (1) $\mu x \subset \mu y$. Обратно, если $\mu x \subset \mu y$, то, согласно (3), $\{y\}^{\Delta} \subset \{x\}^{\Delta}$. Это означает, что для всех $t \in S$ из неравенства $y \leq t$ следует, что $x \leq t$. Но $y \leq y$ и, следовательно, $x \leq y$.

Затем мы покажем, что если X — нижний конус, то $X = \sup \{\mu s \mid \mu s \subset X\}$. Действительно, $\mu s \subset X$ означает, что $X^{\Delta} \subset \{s\}^{\Delta}$, т. е. $s \in X$. Конечно, X является верхней гранью указанного множества конусов. Предположим, что нижний конус Y также является верхней гранью того же множества. Тогда из включения $\mu s \subset X$ следует, что $\mu s \subset Y$, т. е. если $s \in X$, то $s \in Y$, т. е. $X \subset Y$. Следовательно, X — точная верхняя грань.

Наконец, покажем, что если X — нижний конус, то $X = \inf \{\mu s \mid X \subset \mu s\}$. Действительно, $X \subset \mu s$ означает, что $\{s\}^{\Delta} \subset X^{\Delta}$, т. е. для всех $t \in S$ из неравенства $s \leq t$ следует, что $t \in X^{\Delta}$. Из этого вытекает, что $s \in X^{\Delta}$. С другой стороны, из того, что $s \in X^{\Delta}$ и $s \leq t$, следует в силу транзитивности отношения $\leq$, что $t \in X^{\Delta}$. Очевидно, что X — нижняя грань указанного множества конусов. Допустим, что нижний конус Y также является нижней гранью того же множества. Тогда из $X \subset \mu s$ вытекает, что $Y \subset \mu s$, т. е. если $s \in X^{\Delta}$, то $s \in Y^{\Delta}$. Отсюда $X^{\Delta} \subset Y^{\Delta}$, т. е. $Y \subset X$. Следовательно, X — точная нижняя грань.

¹⁾ Употребляется также термин *пополнение сечениями*. — Прим. ред.

Предложение 6. *Нижние конусы булевой алгебры R , рассматриваемой как кольцо, совпадают с аннуляторными идеалами, т. е. $D(R) = B^*(R)$.*

Доказательство. Если K — подмножество в R , то множество K^Δ всех его верхних граней можно задать так:

$$K^\Delta = \{r \in R \mid \forall_{k \in K} rk = k\} = \{r \in R \mid 1 - r \in K^*\}.$$

Совокупность же $K^{\Delta\vee}$ всех нижних граней множества K^Δ задается равенством

$$K^{\Delta\vee} = \{s \in R \mid \forall_{r \in K^\Delta} sr = s\} = \{s \in R \mid sK^* = 0\} = K^{**}.$$

Таким образом, $K = K^{\Delta\vee}$ тогда и только тогда, когда $K = K^{**}$.

Следствие. *Если R — булево кольцо, то его пополнение Дедекинда — Макнейла изоморфно над R полному кольцу частных кольца R^1).*

Доказательство. $D(R) = B^*(R) \cong B(Q(R)) = Q(R)$. Изоморфизм, конечно, таков, что R , рассматриваемое как подмножество в $D(R)$, переходит поэлементно в R , рассматриваемое как подмножество в $Q(R)$.

Мы теперь в состоянии привести пример кольца R , полное кольцо частных которого не совпадает с классическим кольцом частных. Действительно, если R — булево кольцо, то $r(1 - r) = 0$ для всех $r \in R$. Следовательно, 1 — единственный делитель нуля. Таким образом, $Q_{cl}(R) = R$. Но мы только что показали, что $Q(R) \cong D(R)$. Легко построить булеву алгебру, не являющуюся полной. Например, множество всех конечных подмножеств множества натуральных чисел и их дополнений составляет такую булеву алгебру. Ее пополнение, разумеется, совпадает с множеством всех подмножеств множества натуральных чисел.

¹⁾ Смысл термина «изоморфно над R » раскрыт последней фразой доказательства. — *Прим. ред.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть R и S — множества, θ — бинарное отношение между ними (т. е. в сущности подмножество в $R \times S$). Для любых подмножеств $X \subset R$ и $Y \subset S$ определим

$$X^* = \{s \in S \mid \forall_{x \in X} x\theta s\},$$

$$Y^+ = \{r \in R \mid \forall_{y \in Y} r\theta y\}.$$

Покажите, что

$$X \subset X^{*+},$$

$$X_1 \subset X_2 \Rightarrow X_2^* \subset X_1^*, \quad X^{**+} = X^*,$$

а также, двойственным образом,

$$Y \subset Y^{*+}$$

и т. д.

2. В обозначениях упражнения 1 покажите, что соответствия $X \rightarrow X^{*+}$ и $Y \rightarrow Y^{*+}$ являются операциями замыкания на множествах всех подмножеств соответственно в R и S . Покажите, что структура замкнутых подмножеств в R дуально изоморфна структуре замкнутых подмножеств в S . (Такая ситуация называется *полярностью*. Эта глава содержит два примера полярностей, в которых $R = S$. В первом примере $r\theta s$ означает, что $rs = 0$, во втором примере это означает, что $r \leq s$.)

3. Если K — идеал полупервичного кольца, то его аннулятор K^* совпадает с пересечением всех простых идеалов, не содержащих K .

4. Если f' построено так, как в доказательстве предложения 1, то не только $ff'f\theta f$, но также и $f'ff'\theta f'$.

5. Если полупервичное кольцо R является подкольцом коммутативного кольца S , то S будет кольцом частных кольца R тогда и только тогда, когда $s(s^{-1}R) \neq 0$ для всех ненулевых элементов $s \in S$.

6. Пусть R — коммутативное полупервичное рационально полное кольцо. Если K — идеал кольца R (не обязательно плотный) и $\varphi \in \text{Hom}_R(K, R)$, то существует элемент $r \in R$, для которого $\varphi k = rk$ при всех

$k \in K$. (Это свойство кольца R называется *самоинъективностью* и будет обсуждено позже.)

7. Если R — коммутативное полупервичное рационально полное кольцо, то $R = S \times T$, где S — прямое произведение полей и в $B(T)$ отсутствуют атомы.

8. Покажите, что пополнение Дедекинда — Макнейла упорядоченного множества $(S, \leq)$ можно с точностью до изоморфизма над S охарактеризовать абстрактно как полную структуру, которая содержит S и каждый элемент которой можно представить в виде точной нижней грани и точной верхней грани элементов из S .

§ 2.5. Пространства простых идеалов

Топологическим пространством называется система (X, T) , где X — множество, а T — множество его подмножеств, замкнутое относительно объединений и конечных пересечений. Элементы из T называются *открытыми множествами*. Таким образом,

- (1) объединение открытых множеств открыто (в частности, пустое множество открыто);
- (2) если V_1 и V_2 — открытые множества, то $V_1 \cap V_2$ открыто;
- (3) X — открытое множество.

Топологическое пространство называется *компактным*, если любое семейство открытых множеств, покрывающих пространство, содержит конечное подсемейство, также покрывающее все пространство. Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто. *Замыканием* множества называется пересечение всех замкнутых множеств, его содержащих.

В дальнейшем Π будет обозначать некоторое множество простых идеалов коммутативного кольца R .

Примерами, которые нас интересуют, являются:

- (а) множество всех простых идеалов,
- (б) множество всех максимальных идеалов.

(Смотри, однако, доказательство предложения 4.)

Введем в Π топологию, которую одни авторы связывают с именем Стоуна, другие — с именем Зарисского.

Предложение 1. *Π превращается в топологическое пространство, если в качестве открытых множеств взять все множества вида*

$$\Gamma A = \{P \in \Pi \mid A \not\subset P\},$$

где A — подмножество в R . Если Π содержит все максимальные идеалы, то Π — компактное пространство.

Ясно, что $\Gamma A = \Gamma A'$, где A' — пересечение простых идеалов из Π , содержащих A . Поскольку A' — идеал, отсюда следует, что запас открытых множеств останется тем же самым, если считать, что A — идеал. Заметим, что

$$\Gamma A = \bigcup_{a \in A} \Gamma a.$$

Таким образом, множества вида Γa образуют базис открытых множеств пространства Π в том смысле, что они открыты и каждое открытое множество является объединением открытых множеств из базиса.

Доказательство. Во-первых,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} \Gamma A_i &= \{P \in \Pi \mid \exists i \in I, A_i \not\subset P\} = \\ &= \{P \in \Pi \mid \sum_{i \in I} A_i \not\subset P\} = \Gamma \left(\sum_{i \in I} A_i \right). \end{aligned}$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} \Gamma A \cap \Gamma B &= \{P \in \Pi \mid A \not\subset P \text{ и } B \not\subset P\} = \\ &= \{P \in \Pi \mid AB \not\subset P\} = \Gamma(AB). \end{aligned}$$

В-третьих,

$$\Gamma R = \{P \in \Pi \mid R \not\subset P\} = \Pi.$$

Наконец, если

$$\Pi = \bigcup_{i \in I} \Gamma A_i = \Gamma \left(\sum_{i \in I} A_i \right),$$

то идеал $\sum_{i \in I} A_i$ не содержится ни в одном максимальном идеале и поэтому содержит 1. Но тогда $1 \in \sum_{i \in F} A_i$, где F — конечное подмножество в I ,

Следовательно,

$$\Pi = \Gamma \left(\sum_{i \in F} A_i \right) = \bigcup_{i \in F} \Gamma A_i,$$

что заканчивает наше доказательство.

Заметим, что Γ осуществляет отображение из множества подмножеств кольца R в множество подмножеств пространства Π . Введем теперь отображение Δ , действующее в обратном направлении, положив

$$\Delta V = \bigcap_{P \in V} P$$

для любого подмножества $V \subset \Pi$. В частности, $\Delta \Pi$ — первичный радикал или радикал кольца в зависимости от того, является ли Π множеством всех простых идеалов или только множеством всех максимальных идеалов кольца R .

Заметим, что для любого подмножества A кольца R множество ΓA является открытым и для любого подмножества V в Π множество ΔV является пересечением простых идеалов. Что произойдет, если применять и Γ и Δ ?

Объединение всех открытых множеств, содержащихся в множестве V , называется его *внутренностью*. Нам удобно назвать *внешностью* множества V внутренность его дополнения.

Предложение 2. Для любого подмножества V в Π его внешность совпадает с $\Gamma \Delta V$. Если $\Delta \Pi = 0$, то для любого подмножества A в R аннулятор A^* множества A совпадает с $\Delta \Gamma A$.

Доказательство. Во-первых,

$$\begin{aligned} P' \in \Gamma \Delta V &\Leftrightarrow \Delta V \not\subset P' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists r \in R \forall P \in V (r \in P \text{ \& } r \notin P') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists r \in R (P' \in \Gamma r \text{ \& } \forall P \in V P \notin \Gamma r), \end{aligned}$$

что означает существование базисного открытого множества Γr , содержащего P' и не пересекающегося с V , что в свою очередь равносильно принадлежности P' внешности множества V .

Во-вторых, если $\Delta\Pi = 0$, то

$$\begin{aligned} r \in \Delta\Gamma A &\Leftrightarrow \forall_{P \in \Pi} (A \not\subset P \Rightarrow r \in P) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall_{P \in \Pi} rA \subset P \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow rA \subset \Delta\Pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow rA = 0. \end{aligned}$$

Подмножество V топологического пространства называется *регулярным открытым множеством*, если V совпадает с внутренностью своего замыкания. Как легко видеть, это равносильно тому, что V совпадает с внутренностью некоторого замкнутого множества и, следовательно, V является внешностью некоторого открытого множества. Регулярные открытые множества образуют полную булеву алгебру с конечными пересечениями в качестве конечных точных нижних граней и с внешностью в качестве дополнения. В этой булевой алгебре нулевым элементом является пустое множество.

Внешность внешности регулярного открытого множества V совпадает с V . Аннулятор аннулятора аннуляторного идеала A совпадает с A . Следовательно, отображения Γ и $\Delta\Gamma$ являются взаимно обратными (предполагая, разумеется, что $\Delta\Pi = 0$). Кроме того, как легко проверить, Γ — гомоморфизм булевых алгебр. Таким образом, мы получили первую часть следующего утверждения:

Предложение 3. *Если Π — пространство простых идеалов коммутативного кольца R , такое, что $\Delta\Pi = 0$, то Γ является изоморфизмом полной булевой алгебры аннуляторных идеалов кольца R на полную булеву алгебру регулярных открытых множеств в Π . Кроме того, если Π содержит все максимальные идеалы кольца R , то Γ индуцирует изоморфизм булевой алгебры прямых слагаемых кольца R на булеву алгебру замкнутых и одновременно открытых подмножеств пространства Π .*

Доказательство. Остается лишь доказать второе утверждение. Поскольку R — коммутативное

полупервичное кольцо, прямые слагаемые можно охарактеризовать как те аннуляторные идеалы A , для которых $A + A^* = R$. Так как Π содержит все максимальные идеалы, то это равносильно тому, что $\Gamma(A + A^*) = \Gamma R$, т. е. $\Gamma A \cup \Gamma A^* = \Pi$. Но ΓA^* является внешностью множества ΓA . Следовательно, аннуляторный идеал является прямым слагаемым тогда и только тогда, когда ассоциированное регулярное открытое множество ΓA совпадает с дополнением своей внешности, т. е. когда множество ΓA одновременно открыто и замкнуто.

Следствие (Стоун). *Если Π — множество всех простых (максимальных) идеалов булева кольца R , то R изоморфно алгебре замкнутых и одновременно открытых подмножеств пространства Π . Кроме того, пополнение Дедекинда — Макнейла этой алгебры изоморфно алгебре регулярных открытых подмножеств пространства Π .*

Доказательство. $R = B(R)$, $D(R) \cong B^*(R)$.

Полученный результат дает представление булева кольца в виде алгебры подмножеств множества Π . Можно спросить себя о том, как охарактеризовать алгебру всех подмножеств некоторого множества. Очевидно, что эта алгебра должна быть *полной* (полной по Дедекинду или рационально полной)¹⁾ и *атомной*, т. е. для любого элемента r существует *атом* (минимальный ненулевой элемент) a , для которого $a \leq r$.

Предложение 4. *Булева алгебра R изоморфна алгебре всех подмножеств некоторого множества тогда и только тогда, когда R — полная и атомная алгебра.*

Доказательство. Остается установить достаточность условий. Мы применим предложение 3 к пространству Π , вообще говоря, не являющемуся множеством всех простых идеалов.

¹⁾ См. предложение 2.3.4 и следствие предложения 2.4.6. — Прим. перев. и ред.

Каждому атому a сопоставим идеал a^* . Очевидно, что $1 \notin a^*$. Пусть $r \notin a^*$, тогда $0 \neq ar \leq a$. Следовательно, $ar = a$, и поэтому $1 - r \in a^*$. Таким образом, a^* — максимальный идеал.

Пусть Π — множество всех максимальных идеалов вида a^* , где a — атом в R . Если $r \neq 0$, то найдется атом $a \leq r$. Поэтому $ar = a \neq 0$ и, следовательно, $r \notin a^*$. Тогда $r \notin \Delta\Pi$. Таким образом, $\Delta\Pi = 0$, что дает возможность применить первую часть предложения 3.

Если a — атом, то Γa совпадает с множеством всех b^* , где b — атом, такой, что $a \notin b^*$, т. е. $ab \neq 0$, или $a = ab = b$. Следовательно, $\Gamma a = \{a^*\}$.

Таким образом, каждая точка в Π является открытым множеством. (В этом случае говорят, что топология в Π дискретная.) Легко видеть, что каждое подмножество в Π является регулярным открытым множеством. Следовательно, алгебра $D(R) \cong \cong B^*(R)$ изоморфна алгебре всех подмножеств множества Π . Так как R — полная алгебра, то $D(R) = R$, что завершает доказательство.

Заметим, что хотя каждое подмножество пространства Π замкнуто и открыто, мы не могли бы применить вторую часть предложения 3 (или его следствие), поскольку Π не обязательно содержит все максимальные идеалы. На самом деле если бы Π содержало все максимальные идеалы, то оно было бы конечным множеством, так как компактное дискретное пространство всегда конечно.

Поскольку в приведенном выше доказательстве полнота алгебры R используется лишь в конце, мы можем извлечь из этого рассуждения несколько больше.

Следствие. Если R — атомная булева алгебра, то ее пополнение изоморфно алгебре всех подмножеств множества атомов алгебры R .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что внутренность любого замкнутого множества совпадает с внутренностью ее замыкания.

2. Докажите, что в любом топологическом пространстве регулярные открытые множества образуют булеву алгебру.

3. Докажите непосредственно, что любая конечная булева алгебра изоморфна алгебре всех подмножеств конечного множества.

4. Покажите, что в булевой алгебре R для любых элементов $a, b_i \in R, i \in I$, справедливо равенство

$$a \wedge \sup_{i \in I} b_i = \sup_{i \in I} (a \wedge b_i).$$

5. Дайте прямое доказательство предложения 4, сопоставляя каждому элементу $r \in R$ множество всех атомов a , для которых $a \leq r$.

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ

§ 3.1. Прimitives кольца

С этого момента R — ассоциативное (возможно, некоммутативное) кольцо с 1. Модуль A_R называется *неприводимым*, если число подмодулей в A_R равно в точности двум. Эти подмодули — A и 0. Таким образом, из определения следует, что $A \neq 0$. Пусть M — произвольный правый идеал в R . Тогда R/M — неприводимый правый R -модуль в том и только том случае, когда M — максимальный (собственный) правый идеал. С другой стороны, M_R — неприводимый модуль тогда и только тогда, когда M — *минимальный* ненулевой правый идеал, для краткости — *минимальный* правый идеал.

Элемент r кольца R называется *обратимым справа*, если существует элемент $s \in R$, для которого $rs = 1$, и *обратимым*, если он обратим справа и слева. В этом случае легко проверяется совпадение левого обратного с правым.

Предложение 1. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*

- (1) 0 — максимальный правый идеал.
- (2) R_R — неприводимый правый R -модуль.
- (3) Каждый ненулевой элемент обратим справа.
- (4) Каждый ненулевой элемент обратим.
- (1') — (3') Условия (1) — (3) с заменой слова «правый» на «левый». (Если выполнены эти условия, то кольцо R называется телом.)

Доказательство. Эквивалентность условий (1) — (3), а также импликация (4) $\Rightarrow$ (3) очевидны. Эквивалентность условиям (1') — (3') следует из

симметричности условия (4). Таким образом, осталось показать, что $(3) \Rightarrow (4)$.

Если выполнено условие (3) и $0 \neq r \in R$, то $rs = 1$ для некоторого элемента $s \in R$. Так как $0 \neq s$, то $st = 1$ для некоторого $t \in R$. Но

$$t = 1t = (rs)t = r(st) = r1 = r.$$

Отсюда $sr = 1$, и, следовательно, элемент r обратим и слева.

Кольцо называется *простым*, если в нем имеется всего лишь два идеала, т. е. если 0 — максимальный идеал кольца. Если M — произвольный идеал кольца R , то R/M — простое кольцо тогда и только тогда, когда M — максимальный идеал. Очевидно, что любое тело является простым кольцом. Коммутативное кольцо просто тогда и только тогда, когда оно является телом, т. е. тогда и только тогда, когда оно поле. Сейчас модно вместо простых колец изучать кольца более широкого класса.

Идеал P кольца R называется *примитивным* (справа), если P — наибольший идеал, содержащийся в некотором максимальном правом идеале M . Таким образом,

$$P = R \cdot M = \{r \in R \mid Rr \subset M\}.$$

Это определение не является симметричным. Известно, что из правой примитивности не следует левая. Тем не менее прилагательное «правый» обычно опускается. Кольцо R называется *примитивным* (справа), если примитивен его нулевой идеал. Легко показать, что идеал P примитивен тогда и только тогда, когда R/P — примитивное кольцо. Коммутативное кольцо является примитивным тогда и только тогда, когда оно поле. Очевидно, что простое кольцо является примитивным кольцом, а максимальный идеал — примитивным идеалом.

Сейчас мы получим другую характеристику примитивных колец, которую иногда используют в качестве определения. Для этого нам потребуется еще одно понятие. Модуль A_R называется *точным*, если $Ar \neq 0$ для любых $0 \neq r \in R$. Это означает, что канон-

ническое представление кольца R эндоморфизмами аддитивной группы A является мономорфизмом.

Предложение 2 (Джекобсон). *Кольцо R примитивно тогда и только тогда, когда существует точный неприводимый модуль A_R .*

Доказательство. Допустим, что R — примитивное кольцо. В этом случае существует максимальный правый идеал M , для которого $R \cdot M = 0$. Положив $A = R/M$, получим неприводимый модуль A_R . Если $r \in R$ и $Ar = 0$, то $Rr \subset M$ и, следовательно, $r \in R \cdot M = 0$. Таким образом, A_R — точный модуль.

Обратно, пусть A_R — точный неприводимый R -модуль. Если $0 \neq a \in A$, то $0 \neq aR \subset A$, и потому $aR = A$. Таким образом, отображение $R \rightarrow A$, при котором $r \rightarrow ar$, является эпиморфизмом. Пусть M — ядро этого эпиморфизма. Тогда $R/M \cong A$ — неприводимый R -модуль. Отсюда следует, что M — максимальный правый идеал. Но $r \in R \cdot M$ тогда и только тогда, когда $Rr \subset M$, т. е. когда $Ar = 0$. Ввиду точности модуля A_R последнее равносильно равенству $r = 0$. Поэтому $R \cdot M = 0$ и, следовательно, R — примитивное кольцо.

О строении примитивных колец можно сказать несколько больше.

Лемма 1 (Шур). *Если A_R — неприводимый модуль, то его кольцо эндоморфизмов $D = \text{Hom}_R(A, A)$ является телом.*

Доказательство. Пусть $0 \neq d \in D$. Тогда $0 \neq dA \subset A$. Отсюда $dA = A$. Так как $d^{-1}0 \neq A$, то $d^{-1}0 = 0$. Таким образом, d — автоморфизм модуля A . Поэтому d — обратимый элемент кольца D . (Напомним, что $d^{-1}0 = \{a \in A \mid da = 0\}$.)

Заметим, что в случае правого модуля A_R мы пишем эндоморфизмы $d \in D$ слева. Таким образом, утверждение о том, что d является R -эндоморфизмом, записывается в виде условия ассоциативности

$$d(ar) = (da)r \quad (d \in D, a \in A, r \in R).$$

(Конечно, дополнительно предполагается, что d — эндоморфизм аддитивной группы A .) Таким образом, A превращается не только в левый модуль ${}_D A$, но и в так называемый *бимодуль*. Из условия ассоциативности вытекает существование представления кольца R эндоморфизмами модуля ${}_D A$. Если же A_R — точный модуль, то R можно рассматривать как подкольцо кольца $E = \text{Hom}_D(A, A)$. Поскольку D — тело, модуль ${}_D A$ называют также *векторным пространством*, а E — *кольцом линейных преобразований* этого векторного пространства. Интересно выяснить, насколько плотно лежит в E кольцо R . Следующее утверждение принадлежит Джекобсону (теорема плотности).

Предложение 3. Пусть R — примитивное кольцо, A_R — точный неприводимый модуль. Тогда $D = \text{Hom}_R(A, A)$ является телом, а кольцо R канонически вкладывается в кольцо $E = \text{Hom}_D(A, A)$ таким образом, что для любого $e \in E$ и любого конечно порожденного подмодуля G в ${}_D A$ существует элемент $r \in R$, для которого $G(e - r) = 0$.

Доказательство. Положим $G^r = \{r \in R \mid Gr = 0\}$ и $S^l = \{a \in A \mid aS = 0\}$, где S — произвольное подмножество в R . Докажем, проведя индукцию по числу образующих подмодуля G , что:

$$(1) \exists_{r \in R} G(e - r) = 0 \quad \text{и} \quad (2) G^{r^l} = G.$$

Очевидно, что (1) и (2) имеют место в случае $G = 0$. Допустим, что эти утверждения справедливы для G . Рассмотрим $G + Da$, где $a \notin G$. Пусть $G(e - r) = 0$. Будем искать элемент $s \in R$, для которого $(G + Da)(e - r - s) = 0$, т. е. $Da(e - r) = (G + Da)s$. Положим $b = a(e - r)$. Достаточно добиться того, что $Gs = 0$ и $as = b$. Существование такого элемента s очевидно, если $aG^r = A$. Если же $aG^r \neq A$, то $aG^r = 0$, откуда $a \in G^{rl} = G$, что противоречит предположению. Таким образом, для $G + Da$ выполнено (1).

Остается показать, что $G + Da = (G + Da)^{rl} = (G^r \cap a^r)^l$. Очевидно, что $G + Da \subseteq (G + Da)^{rl}$. Пусть теперь $b \in (G^r \cap a^r)^l$, т. е. $br = 0$, если $Gr = 0$ и

$ar = 0$. Рассмотрим отображение $d: aG^r \rightarrow bG^r$, переводящее ar в br . Так как A_R — неприводимый модуль, то либо $aG^r = 0$, либо $aG^r = A$. В первом случае $bG^r = 0$ и потому $b \in G^{rl} = G \subset G + Da$. Во втором случае $d \in D$ и $br = dar$ при всех $r \in G^r$. Отсюда следует, что $b - da \in G^{rl} = G$ и потому $b \in G + Da$. Таким образом, свойство (2) справедливо для $G + Da$.

Можно дать топологическую интерпретацию полученному результату. Пусть $\{X_i \mid i \in I\}$ — семейство топологических пространств. Рассмотрим в $X = \prod_{i \in I} X_i$ топологию произведения, базис открытых множеств которой состоит из всех подмножеств вида $\bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1} V_i$, где $\pi_i: X \rightarrow X_i$ — каноническая проекция, V_i принадлежит базису открытых множеств в X_i , а F — конечное подмножество в I . В частности, пусть все X_i наделены дискретной топологией, в которой все подмножества открыты. Тогда базис открытых множеств топологии произведения на X состоит из множеств вида $V = \bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1} x_i$, где $x_i \in X_i$. При этом, если I бесконечно, X не является дискретным пространством. Легко видеть, что

$$V = \{x \in X \mid \forall i \in F x(i) = x_i\},$$

где $x(i) = \pi_i x$. Такую топологию иногда называют *конечной* топологией на X .

Рассмотрим $E = \text{Hom}_D(A, A)$ как подмножество множества $\prod_{a \in A} A$ всех функций из A в A с топологией, в которой открытые множества являются пересечениями с E открытых множеств пространства $\prod_{a \in A} A$. (В действительности получается топологическое кольцо, но сейчас этот вопрос мы не будем рассматривать.)

Базис открытых множеств в E состоит из подмножеств вида

$$V = \{e \in E \mid \forall i \in F a_i e = b_i\},$$

где F — конечное множество индексов, $a_i, b_i \in A$. Подмножество T топологического пространства X называется *плотным*, если его замыкание $\bar{T}$ совпадает со всем пространством, т. е. если пересечение T с любым непустым открытым множеством непусто. Из предложения 3 вытекает такое

Следствие. Прimitивное кольцо является плотным подкольцом кольца всех линейных преобразований векторного пространства.

Доказательство. Пусть V — базисное открытое подмножество в E . Тогда $a_i e = b_i$ для некоторого $e \in E$ и для всех $i \in F$. В силу предложения 3 существует элемент $r \in R$, для которого $a_i r = a_i e = b_i$ при всех $i \in F$. Отсюда $r \in R \cap V$, и, следовательно, $R \cap V \neq \emptyset$.

Идеал P кольца R называется *первичным*¹⁾, если P — собственный идеал (т. е. $P \neq R$) и для любых идеалов A и B кольца R из включения $AB \subset P$ следует, что либо $A \subset P$, либо $B \subset P$. Кольцо R называется *первичным*, если 0 — его первичный идеал. Идеал P первичен тогда и только тогда, когда R/P — первичное кольцо. Коммутативное кольцо первично тогда и только тогда, когда оно является областью целостности.

Предложение 4. Собственный идеал P кольца R первичен тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in R$ из включения $aRb \subset P$ следует, что либо $a \in P$, либо $b \in P$.

Доказательство. Если P — первичный идеал и $aRb \subset P$, то $(RaR)(RbR) \subset P$. Отсюда следует, что или $a \in RaR \subset P$, или $b \in RbR \subset P$. (Через RaR мы обозначили *главный* идеал, порожденный элементом a и состоящий из всевозможных конечных сумм элементов вида ras , где $r, s \in R$.)

Наоборот, пусть выполнено условие предложения, и пусть $AB \subset P$. Если $A \not\subset P$, то найдется элемент

¹⁾ В коммутативном случае такой идеал называется *простым*. — *Прим. ред.*

$a \in A$, такой, что $a \notin P$. Но тогда $aRb \subset P$ для любого $b \in B$. Отсюда следует, что $b \in P$. Таким образом, $B \subset P$, что завершает доказательство.

Следствие. Кольцо R первично тогда и только тогда, когда $1 \neq 0$ и для любых ненулевых элементов a, b кольца R существует элемент $r \in R$, такой, что $arb \neq 0$.

Предложение 5. Примитивный идеал первичен.

Доказательство. Пусть P — примитивный идеал кольца R . Тогда $P = R \cdot M$, где M — некоторый максимальный правый идеал. Пусть теперь A, B — идеалы в R , для которых $AB \subset P \subset M$. Так как $M \subset M \cdot B \subset R$ и $M \cdot B$ — правый идеал, то $M \cdot B = M$ или $M \cdot B = R$. В первом случае $A \subset M \cdot B = M$ и, следовательно, $A \subset P$. Во втором случае $B \subset (M \cdot B) \subset M$ и, следовательно, $B \subset P$. Таким образом, P является первичным идеалом. (Символы $\cdot$ и $\cdot$ были введены в конце § 1.2.)

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что кольцо линейных преобразований конечномерного векторного пространства является простым.

2. Если M — максимальный правый идеал кольца R и $s \in R - M$, то $s^{-1}M = \{r \in R \mid sr \in M\}$ также является максимальным правым идеалом и $R/s^{-1}M \cong R/M$.

3. Если M — максимальный правый идеал кольца R , то ассоциированный примитивный идеал $R \cdot M$ совпадает с пересечением всех правых идеалов вида $s^{-1}M$, где s пробегает все элементы из $R - M$.

4. Покажите, что плотное подкольцо кольца линейных преобразований векторного пространства является примитивным кольцом.

5. Покажите, что кольцо R первично тогда и только тогда, когда $1 \neq 0$ и произведение AB любых двух ненулевых правых идеалов A и B отлично от нуля.

6. Покажите, что первичное кольцо, обладающее минимальным правым идеалом, является примитивным (справа).

7. Покажите, что идеал P кольца R является максимальным правым идеалом (максимальным идеалом, примитивным идеалом, первичным идеалом) тогда и только тогда, когда R/P — тело (простое кольцо, примитивное кольцо, первичное кольцо).

8. Если e — идемпотент примитивного кольца R , то eRe — примитивное кольцо. [Указание: Если R — плотное подкольцо кольца линейных преобразований векторного пространства ${}_D V$, то eRe — плотное подкольцо кольца линейных преобразований пространства Ve .]

9. Модуль M_R называется *подпрямой неразложимым*, если M содержит наименьший ненулевой подмодуль A . Покажите, что $A^r = \{x \in R \mid Ax = 0\}$ является примитивным идеалом кольца R .

§ 3.2. Радикалы

Определим *первичный радикал*¹⁾ как пересечение всех первичных идеалов кольца R и обозначим его через $\text{rad } R$. Дадим его внутреннее описание. Элемент $a \in R$ назовем *строго нильпотентным*, если все члены любой последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$, такой, что

$$a_0 = a, a_{n+1} \in a_n R a_n,$$

начиная с некоторого номера равны нулю. Очевидно, что строго нильпотентный элемент является *нильпотентным*, т. е. $a^n = 0$ для некоторого натурального числа n . Если кольцо R коммутативно, то каждый нильпотентный элемент строго нильпотентен.

Предложение 1. *Первичный радикал кольца R совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов.*

Доказательство. Пусть $a \notin \text{rad } R$. Тогда $a_0 = a \notin P$, где P — некоторый первичный идеал. Отсюда следует, что $a_0 R a_0 \not\subseteq P$. Поэтому найдется элемент $a_1 \in a_0 R a_0$, такой, что $a_1 \notin P$. Продолжая таким же образом, найдем элемент $a_{n+1} \in a_n R a_n$, не лежа-

¹⁾ Аналогичное определение для случая коммутативных колец было дано на стр. 49—50. — *Прим. ред.*

щий в P . Итак, $a_n \notin P$ при всех натуральных числах n , откуда $a_n \neq 0$, и, следовательно, элемент a не является строго нильпотентным.

Допустим теперь, что элемент a не является строго нильпотентным, т. е. существует последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$, такая, что все $a_n \neq 0$, $a_0 = a$ и $a_{n+1} \in a_n R a_n$. Пусть T — множество всех элементов a_n . Тогда $0 \notin T$. Рассмотрим идеал P , являющийся максимальным среди идеалов, не пересекающихся с T . Покажем, что P первичный идеал. Тогда получим, что $a \notin \text{rad } R$, поскольку $a \notin P$.

Действительно, предположим, что A, B — такие идеалы кольца R , что $A \not\subset P$ и $B \not\subset P$. Из максимальной P следует, что $A + P$ и $B + P$ пересекаются с T . Пусть $a_i \in A + P$, $a_j \in B + P$ и $m = \max(i, j)$. Тогда

$$a_{m+1} \in a_m R a_m \subset (A + P)(B + P) \subset AB + P.$$

Но $a_{m+1} \notin P$. Следовательно, $AB \not\subset P$. Так как P — собственный идеал (поскольку $a \notin P$), то P первичен.

Идеал называется *нильпотентным*, если некоторая его степень равна нулю.

Предложение 2. Следующие условия на кольцо R эквивалентны:

(1) 0 — единственный нильпотентный идеал кольца R .

(2) Пересечение первичных идеалов кольца равно 0 , т. е. $\text{rad } R = 0$.

(3) Если A, B — идеалы кольца R и $AB = 0$, то $A \cap B = 0$.

(Если выполнено одно из этих условий, то кольцо R называется *полупервичным*.)

Доказательство. Пусть выполнено условие (1), и пусть $a_0 = a \neq 0$. Тогда идеал Ra_0R не является нильпотентным, и можно выбрать ненулевой элемент $a_1 \in a_0 R a_0$. Продолжая этот процесс, убедимся, что элемент a не является строго нильпотентным, т. е. $a \notin \text{rad } R$. Таким образом, из (1) следует (2).

Пусть выполнено условие (2). Если $AB = 0$, то $AB \subset P$ для любого первичного идеала P , откуда либо

$A \subset P$, либо $B \subset P$. Следовательно, $A \cap B \subset P$. Таким образом, $A \cap B \subset \text{rad } R = 0$, т. е. из (2) следует (3).

Допустим, что выполнено условие (3). Пусть $A^n = 0$. Тогда $A = A \cap \dots \cap A = 0$, т. е. из (3) следует (1).

Следствие. *Первичный радикал кольца R является наименьшим среди идеалов K , для которых R/K — полупервичное кольцо.*

Доказательство. При каноническом взаимно однозначном соответствии между идеалами кольца R/K и идеалами кольца R , содержащими идеал K , первичные идеалы сопоставляются первичным: если $K \subset P \subset R$, то P/K — первичный идеал в R/K тогда и только тогда, когда P — первичный идеал в R . Следовательно, кольцо R/K полупервично тогда и только тогда, когда K совпадает с пересечением некоторого множества первичных идеалов кольца R . Очевидно, что $\text{rad } R$ является наименьшим среди таких идеалов K .

Пересечение всех максимальных идеалов кольца R , по-видимому, не играет важной роли. Однако пересечение всех максимальных правых идеалов называется *радикалом (Перлиса—) Джекобсона* или просто *радикалом* кольца R . Кажущееся нарушение симметрии в определении будет устранено в дальнейшем. Напомним, что в кольце всегда достаточно много максимальных (собственных) правых идеалов. Именно каждый собственный правый идеал содержится по крайней мере в одном максимальном правом идеале. Радикал кольца R обозначим через $\text{Rad } R$. Напомним, что элемент r кольца R называется обратимым справа, если $rs = 1$ для некоторого элемента $s \in R$, т. е. если rR не является собственным правым идеалом.

Предложение 3. *Радикал кольца R совпадает с множеством всех таких элементов $r \in R$, что при всех $s \in R$ элемент $1 - rs$ обратим справа.*

Доказательство. Элемент r лежит в $\text{Rad } R$ тогда и только тогда, когда для всех максимальных

правых идеалов M элемент r принадлежит M , т. е. $1 \notin M + rR$. Следовательно, $r \in \text{Rad } R$ в том и только том случае, когда $1 - rs$ не принадлежит никакому максимальному правому идеалу при всех $s \in R$, т. е. если $1 - rs$ — обратимый справа элемент.

Кольцо будем называть *полупримитивным*, если его радикал нулевой. (Джекобсон называет такое кольцо «полупростым», однако другие авторы используют этот термин для более узкого класса колец.)

Предложение 4. *Радикал $\text{Rad } R$ кольца R является идеалом, а $R/\text{Rad } R$ — полупримитивное кольцо.*

Доказательство. Чтобы убедиться в том, что $\text{Rad } R$ — идеал, нам надо лишь показать, что $\text{Rad } R$ — левый идеал, т. е. что для всех $r \in \text{Rad } R$ и всех $s, t \in R$ элемент $1 - trs$ обратим справа. Поскольку $rs \in \text{Rad } R$, достаточно показать, что элемент $1 - tr$ обратим справа для всякого $r \in \text{Rad } R$. Но $1 - rt$ — обратимый справа элемент. Следовательно, существует $u \in R$, для которого $(1 - rt)u = 1$, т. е. $1 + rtu = u$. Таким образом,

$$(1 - tr)(1 + tur) = 1 + tur - t(1 + rtu)r = 1,$$

и элемент $1 - tr$ обратим справа.

Пусть теперь $\pi: R \rightarrow R/\text{Rad } R$ — канонический эпиморфизм, и пусть $\pi r \in \text{Rad } (\pi R)$. Тогда $r \in M$, где M — любой максимальный правый идеал кольца R , содержащий $\text{Rad } R$. Но так как каждый максимальный правый идеал содержит $\text{Rad } R$, то $r \in \text{Rad } R$, т. е. $\pi r = 0$.

Предложение 5. *Радикал кольца является наибольшим среди его идеалов K , таких, что $1 - r$ — обратимый элемент при всех $r \in K$.*

Доказательство. В силу предложения 3 радикал содержит любой такой идеал K . Так как радикал является идеалом, то остается лишь показать обратимость элемента $1 - r$ для любого $r \in \text{Rad } R$. Мы уже знаем, что $(1 - r)u = 1$ для некоторого

$u \in R$. Таким образом, $u = 1 - (1 - u)$, где $1 - u = -ru \in \text{Rad } R$. Следовательно, существует элемент v , такой, что $uv = 1$. Тогда $v = (1 - r)uv = 1 - r$, откуда $u(1 - r) = 1$.

В силу симметричности предложения 5 немедленно получаем такое

Следствие. *Радикал совпадает с пересечением всех максимальных левых идеалов.*

Радикал можно также рассматривать и как пересечение некоторых двусторонних идеалов.

Предложение 6. *Радикал совпадает с пересечением всех примитивных идеалов.*

Доказательство. Радикал является идеалом, поэтому включение $r \in \text{Rad } R$ равносильно тому, что $Rr \subset M$ для любого максимального правого идеала M , т. е. $r \in R \cdot M = P$ для любого примитивного идеала P .

Следующий очевидный результат приведем без доказательства:

Предложение 7. *Кольцо R полупервично (полупримитивно) тогда и только тогда, когда R является подпрямым произведением первичных (примитивных) колец.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть S — такое подмножество кольца R , что $1 \notin S$, $0 \in S$ и для любых двух элементов $a, b \notin S$ существует $r \in R$, для которого $arb \notin S$. Докажите первичность идеала, являющегося максимальным среди идеалов, лежащих в S .

2. Если A — идеал, а r — элемент полупервичного кольца R , то $Ar = 0$ тогда и только тогда, когда $rA = 0$.

3 (Томинага). Покажите, что идеалы K , для которых R/K — полупервичное кольцо, образуют полную дистрибутивную структуру.

4. Если K, P — идеалы кольца R и $K \subset P \subset R$, то P/K — первичный идеал в R/K тогда и только тогда, когда P — первичный идеал в R .

5. Покажите, что кольцо R является подпрямым произведением тел (простых колец, примитивных колец, первичных колец) тогда и только тогда, когда $\bigcap_{i \in I} P_i = 0$, где $\{P_i \mid i \in I\}$ — множество всех максимальных правых идеалов (максимальных идеалов, примитивных идеалов, первичных идеалов).

6 (Китайская теорема об остатках). Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ — конечное множество идеалов кольца R , таких, что $P_i + P_j = R$ при $i \neq j$. Покажите, что для любого набора элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ существует элемент $r \in R$, такой, что $r - a_i \in P_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

7. Если пересечение всех максимальных идеалов кольца R равно 0, то R — плотное (в конечной топологии) подкольцо в произведении простых колец.

8 (Экман). Будем говорить, что правый идеал A кольца R мал, если для любого правого идеала B из равенства $A + B = R$ следует, что $B = R$. Покажите, что правый идеал A мал тогда и только тогда, когда $A \subset \text{Rad} R$.

9. Пусть R — кольцо всех (2×2) -матриц с элементами из кольца A . Покажите, что $\text{Rad} R$ состоит из всех матриц с элементами из $\text{Rad} A$.

10 (Маккой). Пусть $R[x]$ — кольцо, полученное присоединением к кольцу R переменной x , коммутирующей с элементами из R . Пусть $\pi : R[x] \rightarrow R$ — канонический эпиморфизм, для которого $\pi f(x) = f(0)$. Покажите, что если P — первичный идеал в R , то $\pi^{-1}P$ — первичный идеал в $R[x]$ и $\pi^{-1}P \cap R = P$. Кроме того, если P' — первичный идеал в $R[x]$, то $P' \cap R$ — первичный идеал в R . Вывести отсюда, что $\text{rad}(R[x]) \cap R = \text{rad} R$.

11 (Амицур, Маккой). Покажите, что $\text{rad}(R[x]) = (\text{rad} R)[x]$, т. е. $\text{rad}(R[x])$ совпадает с множеством всех многочленов от x с коэффициентами из $\text{rad} R$. [Указание: Пусть $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n \in \text{rad}(R[x])$, P — первичный идеал кольца R . Тогда $f(x) \in \pi^{-1}P$. Следовательно, $a_n \in P \subset \pi^{-1}P$, поэтому $a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x \in \pi^{-1}P$. Положим $g(x) = a_0 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}$; тогда элемент $xg(x)$ строго нильпотентен, а поэтому

и $g(x)$ — строго нильпотентный элемент. Следовательно, $a_{n-1} \in P$ и т. д.]

12. Если $r \in R \cap \text{Rad}(R[x])$, то r — нильпотентный элемент. (Указание: $1 - rx$ является обратимым элементом.)

13 (Амицур). Пусть характеристика кольца R равна нулю, т. е. $0 \neq a \in R$ влечет $na = a + a + \dots + a \neq 0$ для всех $n \geq 1$. Докажите, что $R \cap \text{Rad}(R[x]) \neq 0$, если $\text{Rad}(R[x]) \neq 0$. [Указание: Пусть $f[x]$ — многочлен минимальной степени в $\text{Rad}(R[x])$. Радикал инвариантен относительно всех автоморфизмов кольца $R[x]$. Следовательно, $f(x+1) \in \text{Rad}(R[x])$, и поэтому в силу минимальности $f(x+1) - f(x) = 0$.]

14 (Амицур). Пусть характеристика кольца R/N равна нулю, где $N = R \cap \text{Rad}(R[x])$. Покажите, что $\text{Rad}(R[x]) = N[x]$. [Указание: Полагая $S = R/N$, проверьте, что $\text{Rad}(S[x]) \cong \text{Rad}(R[x])/N[x]$, и выведите отсюда равенство $\text{Rad}(S[x]) \cap S = 0$.]

§ 3.3. Вполне приводимые модули

Можно определить *радикал* $\text{Rad } A$ произвольного модуля A_R как пересечение всех его максимальных (собственных) подмодулей. Если же таких подмодулей нет, то $\text{Rad } A = A$. (Конечно, если $A_R = R_R$, то эта ситуация не возникает, так как $1 \in R$.) Двойственным образом определим *цоколь* $\text{Soc } A$ модуля A_R как сумму всех минимальных (ненулевых) подмодулей модуля A , т. е. всех неприводимых подмодулей модуля A . Если же таких подмодулей нет, то $\text{Soc } A = 0$.

Предложение 1. Цоколь модуля A_R является прямой суммой некоторого множества неприводимых подмодулей модуля A_R . Цоколь инвариантен относительно любого эндоморфизма модуля A_R .

Доказательство. Пусть $\{A_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех неприводимых подмодулей модуля A . В этом доказательстве (и лишь в нем) подмножество J множества индексов I будем называть *прямым*, если $\sum_{j \in J} A_j$ — прямая сумма. Рассмотрим линейно упорядо-

ченное по включению семейство $\{J_k \mid k \in K\}$ прямых подмножеств. Пусть $J = \bigcup_{k \in K} J_k$. Покажем, что J — прямое подмножество. Действительно, пусть $\sum_{j \in J} a_j = 0$, где $a_j \in A_j$ и $\{j \in J \mid a_j \neq 0\}$ — конечное множество, лежащее, разумеется, в некотором J_k . Так как J_k — прямое подмножество, то все $a_j = 0$, т. е. множество J прямое.

Применив лемму Цорна, убедимся в существовании максимального прямого подмножества $J \subset I$. Предположим теперь, что A_i — неприводимый подмодуль модуля A , не содержащийся в $\sum_{j \in J} A_j$. Тогда $A_i \cap \sum_{j \in J} A_j = 0$. Пусть $a_i + \sum_{j \in J} a_j = 0$, где $a_i \in A_i$ и $a_j \in A_j$. Тогда $a_i = 0 = \sum_{j \in J} a_j$. Так как J — прямое подмножество, то все $a_j = 0$. Таким образом, подмножество $J \cup \{i\}$ также прямое, что противоречит максимальности подмножества J . Следовательно, $\text{Soc } A = \sum_{j \in J} A_j$ — прямая сумма.

Наконец, если $e \in \text{Hom}_R(A, A)$, то подмодуль eA_i , будучи гомоморфным образом модуля A_i , должен быть либо нулевым, либо неприводимым. В любом случае $eA_i \subset \text{Soc } A$ и, следовательно, $e \text{ Soc } A \subset \text{Soc } A$.

Следствие. Следующие свойства модуля A_R эквивалентны:

- (1) $A = \text{Soc } A$.
- (2) A является суммой минимальных подмодулей.
- (3) Модуль A изоморфен прямой сумме неприводимых модулей.

В этом случае модуль A называется *вполне приводимым*.

Отсюда немедленно следует, что подмодуль и фактормодуль вполне приводимого модуля также вполне приводимы.

Следуя Джонсону, назовем подмодуль модуля A_R *большим*, если его пересечение с любым ненулевым

подмодулем модуля A_R отлично от нуля. Следующая лемма показывает, что больших подмодулей достаточно много.

ЛЕММА 1. *Если B — подмодуль модуля A и C — максимальный подмодуль среди подмодулей, имеющих нулевое пересечение с B , то $B + C$ — большой подмодуль.*

Доказательство. Допустим, что $(B + C) \cap D = 0$. Так как $B \cap C = 0$, то также $B \cap (C + D) = 0$. (Действительно, из равенства $b = c + d$ вытекает, что $d = b - c = 0$ и, следовательно, $b = c = 0$.) Из максимальной подмодуля C вытекает, что $D \subset C$. Значит, $D = (B + C) \cap D = 0$.

Напомним, что структура $L(A)$ подмодулей модуля A является структурой с дополнениями, если для любого подмодуля B модуля A найдется дополнение, т. е. подмодуль B' , такой, что $B \cap B' = 0$ и $B + B' = A$.

ЛЕММА 2. *Если $L(A)$ — структура с дополнениями и B — подмодуль модуля A , то $L(B)$ — также структура с дополнениями.*

Доказательство. Пусть $C \subset B$ и C' — дополнение подмодуля C в $L(A)$. Подмодуль $C' \cap B$ является дополнением подмодуля C в $L(B)$, так как в силу закона модулярности справедливы равенства

$$C \cap (C' \cap B) = (C \cap C') \cap B = 0 \cap B = 0$$

и

$$C + (C' \cap B) = (C + C') \cap B = A \cap B = B.$$

ЛЕММА 3. *Если $L(A)$ — структура с дополнениями, то $\text{Rad } A = 0$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq a \in A$ и M — максимальный подмодуль среди подмодулей модуля A , не содержащих элемента a . Покажем, что M — максимальный подмодуль модуля A .

Действительно, пусть $M \subset N \subset A$ и N' — дополнение к N в $L(A)$. Так как $a \notin M$ и (в силу закона модулярности) $N \cap (M + N') = M$, то либо $a \notin N$, либо

$a \notin M + N'$. В силу максимальности подмодуля M либо $M = N$, либо $N' = 0$, т. е. $N = A$.

Предложение 2. Следующие свойства модуля A эквивалентны:

- (1) A — вполне приводимый модуль.
- (2) A не содержит собственных больших подмодулей.
- (3) $L(A)$ — структура с дополнениями.

Доказательство. Пусть выполнено свойство (1). Большой подмодуль модуля A имеет ненулевое пересечение с любым отличным от нуля подмодулем и, следовательно, содержит любой неприводимый подмодуль модуля A , а тогда он содержит и $\text{Soc } A = A$. Таким образом, из (1) следует (2).

Пусть выполнено свойство (2), и пусть B — произвольный подмодуль модуля A . Из леммы 1 следует существование такого подмодуля C модуля A , что $B \cap C = 0$ и $B + C$ — большой подмодуль. В силу (2) $B + C = A$. Таким образом, из (2) следует (3) (см. предложение 1.3.2).

Допустим, что справедливо (3). Тогда $A = \text{Soc } A + C$, $\text{Soc } A \cap C = 0$. В силу леммы 2 $L(C)$ — структура с дополнениями. Следовательно, по лемме 3 $\text{Rad } C = 0$. Пусть $0 \neq c \in C$. Тогда существует максимальный подмодуль модуля C , не содержащий c . Его дополнение в $L(C)$ является неприводимым подмодулем, что приводит к противоречию. Таким образом, $C = 0$, и поэтому из (3) следует (1).

Если A_R — правый R -модуль и $E = \text{Hom}_R(A, A)$ — его кольцо эндоморфизмов, то можно также рассматривать левый модуль ${}_E A$. Действительно, $e(ar) = (ea)r$ при всех $a \in A$, $e \in E$ и $r \in R$. В этой ситуации говорят о *бимодуле* ${}_E A_R$.

Пусть A_i — неприводимый R -подмодуль модуля A . Обозначим через EA_i подмодуль модуля A , порожденный всеми элементами вида ea_i , где $e \in E$ и $a_i \in A_i$. В этом случае EA_i является E - R -подмодулем в A . Для любого $e \in E$ подмодуль EA_i является гомоморфным образом модуля A_i . Следовательно,

либо $eA_i = 0$, либо $eA_i \cong A_i$. Поэтому подмодуль eA_i либо нулевой, либо неприводимый.

Лемма 4. Если A_R — вполне приводимый модуль, то EA_i совпадает с суммой всех неприводимых подмодулей модуля A_R , изоморфных подмодулю A_i . (Подмодуль EA_i называют однородной компонентой модуля A_R .)

Доказательство. Рассмотрим произвольный неприводимый подмодуль $A_k \cong A_i$. Поскольку $L(A_R)$ — структура с дополнениями, $A = A_i + A'_i$ и $A_i \cap A'_i = 0$ для некоторого подмодуля A'_i модуля A . Рассмотрим эндоморфизм $e \in E$, индуцирующий на A_i данный изоморфизм $A_i \cong A_k$ и аннулирующий подмодуль A'_i . Тогда $A_k = eA_i \subset EA_i$.

Предложение 3. Пусть A_R — прямая сумма конечного числа неприводимых подмодулей A_j , $j \in J$, и пусть $E = \text{Hom}_R(A, A)$. Тогда любой E - R -подмодуль B в ${}_E A_R$ является (прямой) суммой некоторых однородных компонент EA_j модуля A .

Доказательство. Пусть элементы $e_j = e_j^2 \in E$ таковы, что $e_j A = A_j$, $\sum_{j \in J} e_j = 1$. Тогда $e_j B \subset A_j$. Следовательно, либо $e_j B = 0$, либо $e_j B = A_j$. Пусть $J' = \{j \in J \mid e_j B = A_j\}$. Тогда $B = \sum_{j \in J} e_j B = \sum_{j \in J'} A_j$. Для любого $j \in J'$ справедливы включения $B = \sum_{j \in J'} A_j \subset \sum_{j \in J'} EA_j \subset EB \subset B$, откуда $B = \sum_{j \in J'} EA_j$. Но EA_j — минимальные подмодули бимодуля ${}_E B_R$. Применяя предложение 1¹⁾ к бимодулю ${}_E B_R$, убеждаемся в том, что B также является прямой суммой некоторых EA_j .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дайте более простое доказательство предложения 1 в случае, когда I — конечное множество.
2. Если $\pi: C \rightarrow A$ — эпиморфизм, а B — большой

¹⁾ На самом деле применяется аналог предложения 1 для бимодулей. — Прим. перев.

подмодуль модуля A , то $\pi^{-1}B$ — большой подмодуль модуля C .

3. Если $A \subset B \subset C$, то A — большой подмодуль модуля C тогда и только тогда, когда A — большой подмодуль модуля B , а B — большой подмодуль модуля C .

4. Если B и C — большие подмодули модуля A , то $B \cap C$ — большой подмодуль.

5. Если R — коммутативное кольцо, то каждый плотный идеал является большим. Каждый большой идеал является плотным в том и только в том случае, когда R — полупервичное кольцо.

6. Покажите, что кольцо эндоморфизмов вполне приводимого модуля изоморфно прямому произведению колец эндоморфизмов его однородных компонент.

7 (Сандомирский — Каш). Покажите, что пересечение всех больших подмодулей модуля A совпадает с цоколем модуля A .

Рассмотрите дуальную задачу.

§ 3.4. Вполне приводимые кольца

Обратим теперь наше внимание на кольцо R , рассматриваемое как правый R -модуль.

Предложение 1 (Брауэр). Если K — минимальный правый идеал кольца R , то либо $K^2 = 0$, либо $K = eR$, где $e^2 = e \in K$.

Доказательство. Если $K^2 \neq 0$, то $kK \neq 0$ для некоторого элемента $k \in K$. Отсюда $kK = K$. Рассмотрим $k^{-1}0 = \{r \in R \mid kr = 0\}$. Тогда $k^{-1}0 \cap K \neq K$ и, следовательно, $k^{-1}0 \cap K = 0$. Далее, $ke = k$ для некоторого $e \in K$. Таким образом, $k(e^2 - e) = 0$. Поэтому $e^2 - e \in k^{-1}0 \cap K = 0$. Следовательно, $e^2 = e$. Так как $k \neq 0$, то $e \neq 0$. Поскольку $0 \neq eR \subset K$, $eR = K$.

Следствие. Каждый минимальный правый идеал полупервичного кольца R имеет вид eR , где $e^2 = e \in R$.

Лемма 1. Если $e^2 = e \in R$ и $f \in R$, то имеет место изоморфизм аддитивных групп $\text{Hom}_R(eR, fR) \cong fRe$. Более того, если $f = e$, то этот изоморфизм является изоморфизмом колец.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $fre \in fRe$. Определим $\varphi \in \text{Hom}_R(eR, fR)$ равенством $\varphi(er') = (fre)(er') = frer'$, где $r' \in R$. Очевидно, из равенства $\varphi = 0$ следует, что $fre = 0$. Кроме того, таким способом можно получить любой элемент $\varphi \in \text{Hom}_R(eR, fR)$. Действительно, если $\varphi e = fr$, то $\varphi(er') = \varphi(e^2r') = (\varphi e)(er') = frer'$. Из этого следует первое утверждение леммы. Второе утверждение является простым следствием. Его доказательство мы оставляем в качестве упражнения.

Пусть $e^2 = e \in R$. Тогда eRe — кольцо с единицей e . В силу леммы 1 $eRe \cong \text{Hom}_R(eR, eR)$. Если eR — неприводимый модуль, то по лемме Шура кольцо eRe является телом. Если R — полупервичное кольцо, то верно и обратное.

Предложение 2. Если R — полупервичное кольцо и $e^2 = e \in R$, то eR — минимальный правый идеал тогда и только тогда, когда eRe — тело.

Доказательство. Осталось лишь установить достаточность условия. Пусть eRe — тело и r — элемент кольца R , для которого $er \neq 0$. Так как R — полупервичное кольцо, то $erRer \neq 0$. Следовательно, $erse \neq 0$ для некоторого $s \in R$. Пусть ete — обратный элемент для $erse$, т. е. $ersetete = e$. Таким образом, $erR = eR$. Поэтому eR — неприводимый модуль.

Следствие. Если R — полупервичное кольцо и $e^2 = e \in R$, то eR является минимальным правым идеалом тогда и только тогда, когда Re — минимальный левый идеал.

Предложение 3. Если $e^2 = e \in R$ и $f^2 = f \in R$, то $eR \cong fR$ тогда и только тогда, когда $ui = e$ и $iv = f$ для некоторых $u, v \in R$.

Доказательство. Допустим, что $eR \cong fR$. Пусть $u = fue$ — элемент, соответствующий в силу леммы 1 данному изоморфизму $eR \rightarrow fR$, а $v = evf$ — элемент, соответствующий обратному изоморфизму $fR \rightarrow eR$. Тогда очевидно, что $ui = e$ и $iv = f$.

Обратно, допустим, что $vi = e$ и $uv = f$. Тогда $ue = u(vi) = (uv)i = fi$. Аналогично, $vf = ev$. Таким образом, отображения $er \rightarrow uer = fur$ и $fr' \rightarrow vfr' = evr'$ являются взаимно обратными изоморфизмами.

Следствие. Если $e^2 = e \in R$ и $f^2 = f \in R$, то $eR \cong fR$ тогда и только тогда, когда $Re \cong Rf$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из симметричности условий $vi = e$ и $uv = f$.

Предложение 4. Если R — полупервичное кольцо, то цоколи модулей R_R и ${}_R R$ совпадают. Более того, однородные компоненты цоколей также совпадают и являются минимальными идеалами.

Доказательство. В силу сказанного выше цоколь S модуля R_R совпадает с $\sum eR$, где e пробегает множество всех таких идемпотентов, что eRe — тело. Цоколь S' модуля ${}_R R$ равен аналогичной сумме $\sum Re$. Но S является идеалом (предложение 1 предыдущего параграфа) и, следовательно, $S' \subset S$. Аналогично $S \subset S'$.

Рассмотрим теперь произвольную однородную компоненту H цоколя S . Компонента H имеет вид $\sum eR$ где e пробегает множество всех идемпотентов кольца R , для которых eR изоморфно фиксированному минимальному правому идеалу fR , где $f^2 = f \in R$. Так как $eR \cong fR$ тогда и только тогда, когда $Re \cong Rf$ (в силу сформулированного выше следствия), то $H' = \sum Re$ является соответствующей однородной компонентой цоколя S' . Аналогично тому, как мы доказали совпадение S и S' , можно показать, что $H = H'$.

Пусть, наконец, K — произвольный ненулевой идеал кольца R , содержащийся в H . Тогда K_R — вполне приводимый модуль. Неприводимые подмодули в K_R — это некоторые минимальные правые идеалы eR кольца R , где $e^2 = e$. Если $fR \cong eR$, то $f = uv = uev$ (как было отмечено выше) и, следовательно, $fR \subset \subset u(eR) \subset uK \subset K$. Таким образом, $H \subset K$, поэтому

H является минимальным ненулевым двусторонним идеалом.

Предложение 5. *Следующие утверждения о кольце R эквивалентны:*

- (1) *Каждый правый R -модуль вполне приводим.*
- (2) *R_R — вполне приводимый модуль.*
- (3) *Каждый левый R -модуль вполне приводим.*
- (4) *${}_R R$ — вполне приводимый модуль.*

Если выполнены эти условия, то мы будем говорить, что R — *вполне приводимое* кольцо. (Бурбаки называет такое кольцо «полупростым»¹⁾.)

Доказательство. Очевидно, что $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть выполнено условие (2), и пусть B_R — правый R -модуль. Так как R — сумма неприводимых правых идеалов A_i ($i \in I$), то $B = \sum_{b \in B} bR$ является суммой подмодулей bA_i , каждый из которых, являясь гомоморфным образом модуля A_i при отображении $r \rightarrow br$ модуля R в B , должен быть либо нулевым, либо неприводимым. Следовательно, модуль B_R вполне приводим. Таким образом, $(1) \Leftrightarrow (2)$ и аналогично $(3) \Leftrightarrow (4)$.

Допустим опять, что выполнено (2). Тогда в силу леммы 3.3.3 R — полупервичное кольцо. По предложению 4 цоколи модулей R_R и ${}_R R$ совпадают. Так как R_R — вполне приводимый модуль, то его цоколь совпадает с R . Следовательно, ${}_R R$ также является вполне приводимым модулем. Таким образом, $(2) \Rightarrow (4)$ и симметрично $(4) \Rightarrow (2)$.

Напомним, что *векторное пространство* — это модуль над телом.

Следствие. *Векторное пространство вполне приводимо.*

Доказательство. Если R — тело, то R_R — вполне приводимый модуль. Следовательно, выполнено условие (2).

¹⁾ В русской литературе часто употребляется термин «классически полупростое кольцо». — *Прим. ред.*

Таким образом, векторное пространство является прямой суммой некоторого множества экземпляров R_R . Число таких прямых слагаемых называется *размерностью* векторного пространства.

Если V_R — конечномерное векторное пространство над телом R , то, как хорошо известно, кольцо $\text{Hom}_R(V, V)$ эндоморфизмов пространства V изоморфно кольцу $(n \times n)$ -матриц над R , где n — размерность пространства V_R .

ЛЕММА 2. Пусть R — первичное кольцо, и пусть цоколь S_R модуля R_R отличен от нуля. Пусть eR , где $e^2 = e \in R$, есть минимальный правый идеал кольца R . Тогда кольцо $\text{Hom}_R(S, S)$ изоморфно кольцу линейных преобразований $\text{Hom}_{eRe}(Re, Re)$.

Заметим, что Re является правым eRe -модулем и, следовательно, векторным пространством.

Доказательство. Так как однородная компонента H цоколя S является прямым слагаемым в S и кольцо R первично, то $S = H$. Запишем S в виде прямой суммы минимальных правых идеалов $e_i R$, где $i \in I$, $e_i R \cong eR$ для любого $i \in I$, $e_i^2 = e_i \in R$ и $e^2 = e \in R$. Можно считать, что e является одним из e_i . В силу предложения 3 найдутся элементы $u_i, v_i \in R$, для которых $v_i u_i = e$ и $u_i v_i = e_i$. В этом случае

$$u_i e v_i = u_i v_i u_i v_i = e_i^2 = e_i.$$

Рассмотрим теперь $\varphi \in \text{Hom}_R(S, S)$. Заметив, что $Re \subset S$, определим $\varphi' \in \text{Hom}_{eRe}(Re, Re)$, полагая

$$\varphi'(re) = \varphi(re) = \varphi(re^2) = \varphi(re)e.$$

Для любого элемента $s = \sum e_i r_i = \sum u_i e v_i r_i \in S$ получим

$$\varphi s = \sum \varphi(u_i e) v_i r_i = \sum \varphi'(u_i e) v_i r_i.$$

Из этой формулы легко следует, что соответствие $\varphi \rightarrow \varphi'$ является изоморфизмом.

Следующее предложение представляет собой вариацию классического результата в теории колец.

Предложение 6 (Веддербёрн — Артин). (а) Кольцо R вполне приводимо тогда и только тогда, когда R изоморфно конечному прямому произведению вполне приводимых простых колец. (б) Кольцо R вполне приводимо и просто тогда и только тогда, когда R является кольцом всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства.

Доказательство. (а) Пусть кольцо R вполне приводимо, т. е. является прямой суммой минимальных правых идеалов. Но элемент 1 должен лежать в некоторой конечной сумме идеалов, поэтому R является прямой суммой конечного числа минимальных правых идеалов. Следовательно, R является прямой суммой конечного числа однородных компонент, являющихся в силу предложения 4 минимальными идеалами (R полупервичное в силу леммы 3.3.3).

Из предложения 1.3.3 следует существование центральных ортогональных идемпотентов $c_i \in R$, для которых $1 = \sum_{i=1}^m c_i$, а $c_i R$ является i -й однородной компонентой. Очевидно, что $c_i R$ — кольцо с единицей c_i (однако в нашей терминологии $c_i R$ не является подкольцом кольца R , за исключением того случая, когда $c_i = 1$), а кольцо R изоморфно прямому произведению колец $c_i R$.

Пусть $H = c_i R$ — произвольная однородная компонента кольца R . Легко видеть, что идеалы (правые идеалы) кольца H в точности совпадают с идеалами (правыми идеалами) кольца R , содержащимися в H . Поскольку H — минимальный идеал кольца R , H является простым кольцом. Так как H — прямая сумма конечного числа правых идеалов кольца R , являющихся минимальными правыми идеалами кольца H , то кольцо H также вполне приводимо.

Обратно, допустим теперь, что R — прямая сумма идеалов, каждый из которых является вполне приводимым кольцом. Те же рассуждения показывают, что кольцо R вполне приводимо.

(б) Пусть R — вполне приводимое простое кольцо. Тогда R первично. Пусть eR — минимальный правый

идеал кольца R и $e^2 = e \in R$. Модуль R_R совпадает со своим цоколем. Поэтому в силу леммы 2

$$R \cong \text{Hom}_R(R, R) \cong \text{Hom}_{eRe}(Re, Re).$$

При этом $(Re)_{eRe}$ — векторное пространство и, следовательно, вполне приводимый модуль. Чтобы убедиться в конечномерности пространства Re , достаточно показать его нётеровость.

Пусть $\{K_i | i \in I\}$ — семейство подмодулей модуля $(Re)_{eRe}$. Тогда $\{K_i R\}$ — семейство подмодулей модуля $(ReR)_R$. Так как R_R — нётеров модуль, то нётеровым является и модуль $(ReR)_R$. Следовательно, в семействе подмодулей $\{K_i R\}$ найдется максимальный элемент $K_m R$. Предположим, что $K_m \subset K_i$. Тогда $K_m R \subset K_i R$. Отсюда $K_m R = K_i R$. Поскольку $K_i = K_i e Re = K_i Re$, отсюда можно заключить, что $K_m = K_i$. Следовательно, K_m — максимальный элемент семейства $\{K_i | i \in I\}$. Таким образом, модуль $(Re)_{eRe}$ действительно нётеров.

Допустим, наконец, что $R = \text{Hom}_D(V, V)$, где V_D — векторное пространство с базисом $v_1, \dots, v_n$. Пусть $e_{ij} \in R$ — эндоморфизм, для которого $e_{ij}v_j = v_i$, $e_{ij}v_k = 0$ при $k \neq j$. Рассмотрим множество $A_i = \sum_{j=1}^n e_{ij}D^1 = \{r \in R \mid rV \subset v_i D\}$. Ясно, что A_i — правый идеал кольца R . Пусть теперь $0 \neq a \in A_i$. В этом случае $a = \sum_{l=1}^n e_{il}d_l$, $d_l \in D$, причем некоторое d_k отлично от нуля. Тогда $ae_{kj} = e_{ij}d_k$. Отсюда $e_{ij} = ae_{kj}d_k^{-1} \in aR$ и поэтому $A_i \subset aR$. Таким образом, A_i — неприводимый идеал.

Поскольку $R = \sum_{i,j} e_{ij}D = \sum_i A_i$, кольцо R вполне приводимо. Чтобы убедиться в простоте кольца R , надо для отличного от нуля элемента r кольца R показать аналогичным образом, что $RrR = R$. Мы опустим детали доказательства этого факта.

¹⁾ Здесь $d \in D$ отождествлено с линейным преобразованием, определяемым условием $v_i \rightarrow v_i d$ при всех i . — Прим. ред.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если кольцо R является прямой суммой неприводимых правых идеалов A_j ($j \in J$), то каждый идеал кольца R является прямой суммой некоторых RA_j .

2. Покажите, что кольцо (2×2) -матриц над бесконечным полем содержит бесконечное множество минимальных правых идеалов.

3. Если D — тело, V_D — векторное пространство размерности n над D , то $\text{Hom}_D(V, V) \cong D_n$, где D_n — кольцо $(n \times n)$ -матриц над D .

4. Если модуль M_R вполне приводим и совпадает с однородной компонентой EA , содержащей минимальный подмодуль A_R , то кольцо $E = \text{Hom}_R(M, M)$ изоморфно кольцу всех таких матриц над телом $D = \text{Hom}_R(A, A)$, у которых в каждом столбце отлично от нуля лишь конечное число элементов.

5. Используя предыдущее упражнение, дайте другое доказательство теоремы Веддербёрна — Артина.

6. Покажите, что кольцо R вполне приводимо тогда и только тогда, когда ни один из максимальных правых идеалов не является большим идеалом.

7. Если D и D' — тела и $D_n \cong D'_n$ (см. упражнение 3 выше), то $D \cong D'$ и $n = n'$.

§ 3.5. Артиновы и нётеровы кольца

Кольцо R называется *артиновым* (нётеровым) *справа*, если правый модуль R_R артинов (нётеров).

Предложение 1. *Радикал артинова справа кольца нильпотентен.*

Доказательство. Среди степеней радикала $\text{Rad } R$ найдется наименьший идеал, скажем $B = (\text{Rad } R)^n$. В этом случае $B^2 = B$. Допустим, что $B \neq 0$. Пусть A — минимальный элемент в множестве правых идеалов C , для которых $C \subset B$ и $CB \neq 0$. Тогда $aB \neq 0$ для некоторого $a \in A$. Так как $aB \subset A \subset B$ и $(aB)B = aB^2 = aB \neq 0$, то $aB = A$. Следовательно, $ab = a$ для некоторого $b \in B$. Поскольку $b \in B \subset \text{Rad } R$, существует элемент $c \in R$, для кото-

рого $(1 - b)c = 1$ и, следовательно, $a = a(1 - b)c = 0$. Это противоречит нашему предположению, и поэтому $B = 0$.

Следствие 1. *Радикал артинова справа кольца является наибольшим нильпотентным идеалом.*

Доказательство. Любой нильпотентный идеал содержится в первичном радикале $\text{rad } R$, который в свою очередь содержится в $\text{Rad } R$.

Следствие 2. *Если кольцо R артиново справа, то $\text{Rad } R = \text{rad } R$.*

Напомним, что кольцо R называется *регулярным*, если для любого элемента $a \in R$ найдется элемент $a' \in R$, такой, что $aa'a = a$. Полагая $e = aa'$, убедимся в том, что $e^2 = e$ и $aR = eR$. Следовательно, каждый главный правый идеал выделяется прямым слагаемым. Обратно, из этого свойства следует регулярность кольца. Действительно, из равенства $aR = eR$ вытекает, что $e = aa'$ для некоторого $a' \in R$ и, следовательно, $aa'a = ea = a$.

Лемма (Дж. Нейман). *Каждый конечно порожденный правый идеал регулярного кольца является главным.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть правый идеал вида $aR + bR$. Пусть $aR = eR$, где $e^2 = e$. Так как $bR \subset ebR + (1 - e)bR$, то $aR + bR = eR + (1 - e)bR = eR + fR$, где $f^2 = f$ и $ef = 0$. Положим $g = f(1 - e)$. Тогда

$$\begin{aligned} gf &= f(1 - e)f = f(f - ef) = f^2 = f, \\ g^2 &= gf(1 - e) = f(1 - e) = g, \quad eg = 0 = ge. \end{aligned}$$

Так как $g \in fR$ и $f \in gR$, то $fR = gR$. Следовательно, $aR + bR = eR + gR$. Покажем, что $eR + gR = (e + g)R$. Действительно, $er + gr' = (e + g)(er + gr')$ и, следовательно, $eR + gR \subset (e + g)R$. Обратное включение очевидно. Таким образом, $aR + bR = (e + g)R$ — главный правый идеал.

Предложение 2. Следующие утверждения о кольце R эквивалентны:

- (1) R вполне приводимо.
- (2) R артиново справа и регулярно.
- (3) R артиново справа и полупрimitивно.
- (4) R артиново справа и полупервично.
- (5) R нётерово справа и регулярно.

Заметим, что слово «справа» в условиях (2) — (5) может быть заменено на «слева», поскольку условие (1) симметрично.

Доказательство. Так как каждое регулярное кольцо полупрimitивно (ввиду того что $1 - aa'$ является делителем нуля для любого $a \neq 0$) и каждое полупрimitивное кольцо полупервично, то $2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$.

Пусть выполнено (1). В этом случае кольцо R является прямой суммой конечного числа минимальных правых идеалов $A_1, \dots, A_n$. Поэтому существует композиционный ряд

$$A_1 \subset A_1 + A_2 \subset \dots \subset R$$

модуля R_R . Отсюда следует, что кольцо R артиново справа и нётерово справа. Более того, каждый правый идеал кольца R , в частности каждый главный идеал, является прямым слагаемым, и, следовательно, R — регулярное кольцо. Таким образом, $(1) \Rightarrow (2)$ и $(1) \Rightarrow (5)$.

Пусть выполнено (4). В силу предложения 1 пересечение всех максимальных правых идеалов кольца R равно нулю. Поскольку это кольцо артиново справа, равно нулю уже пересечение некоторого конечного числа таких идеалов:

$$M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n = 0.$$

Допустим, что $M_i \not\supset A_i$, где $A_i = \bigcap_{j \neq i} M_j$ (иначе M_i можно выбросить). Следовательно, $M_i + A_i = R$. С другой стороны, $M_i \cap A_i = 0$. Поэтому $A_i \cong R/M_i$ является неприводимым правым R -модулем. Таким образом,

$A_i = e_i R$, $e_i^2 = e_i \in R$ и $M_i = (1 - e_i) R$. Пусть $e = \sum_{i=1}^n e_i$.

Тогда

$$e - 1 = (e_i - 1) + \sum_{j \neq i} e_j \in M_i + M_i$$

(так как если $j \neq i$, то $e_j \in A_j \subset M_i$). Следовательно,

$e - 1 \in \bigcap_{i=1}^n M_i = 0$. Таким образом, $1 = \sum_{i=1}^n e_i$, и поэтому

$R = \sum_{i=1}^n A_i$ — вполне приводимый R -модуль. Итак, (4) $\Rightarrow$ (1).

Пусть справедливо (5). Поскольку кольцо R нётерово справа, каждый правый идеал конечно порожден. Так как кольцо R регулярно, то каждый конечно порожденный правый идеал является в силу приведенной выше леммы главным и, следовательно, выделяется прямым слагаемым. Следовательно, каждый правый идеал выделяется прямым слагаемым. Поэтому модуль R_R вполне приводим. Таким образом, (5) $\Rightarrow$ (1).

Предложение 3. Если кольцо R артиново справа, то нётеровость правого R -модуля равносильна его артиновости.

Доказательство. Пусть $N = \text{Rad } R$. Тогда в силу предложения 1 $N^p = 0$ для некоторого положительного целого числа p . Рассмотрим теперь любой артинов правый R -модуль A_R . В нем имеется цепочка подмодулей

$$A \supset AN \supset AN^2 \supset \dots \supset AN^p = 0$$

с факторами $F_k = AN^{k-1} / AN^k$, $k = 1, \dots, p$. Поскольку $F_k N = 0$, можно рассматривать F_k как R/N -модуль. В силу предложения 2 кольцо R/N вполне приводимо. Следовательно, F_k — вполне приводимый R/N -модуль, а значит, и вполне приводимый R -модуль. Будучи артиновым модулем, F_k является прямой суммой конечного числа неприводимых R -модулей. Следовательно,

F_k является также и нётеровым модулем. Итак, модули

$$AN^{p-1} (= F_p) \text{ и } AN^{p-2}/AN^{p-1} (= F_{p-1})$$

нётеровы. Следовательно, и AN^{p-2} — нётеров модуль. Продолжая таким же образом, убедимся, что кольцо A нётерово.

Переставляя в этом рассуждении слова «артинов» и «нётеров», мы получим обратное утверждение.

Следствие. Каждое артиново справа кольцо является нётеровым справа.

Кольцо целых чисел показывает, что обратное утверждение места не имеет.

Предложение 4. *Первичный радикал нётерова справа кольца является наибольшим нильпотентным правым идеалом.*

Доказательство. Пусть кольцо R нётерово справа и правый идеал N максимален среди нильпотентных правых идеалов. Пусть $N^k = 0$. В силу теоремы о бинOME

$$(N^k = 0 \text{ \& } N'^{k'} = 0) \Rightarrow (N + N')^{k+k'} = 0.$$

Следовательно, N — наибольший нильпотентный правый идеал. Будучи нильпотентным, N содержится в $\text{rad } R$. Предположим теперь, что A — правый идеал и $A^m \subset N$ для некоторого натурального числа m . Тогда A — нильпотентный правый идеал и, следовательно, $A \subset N$. Таким образом, R/N — полупервичное кольцо¹⁾. Поэтому в силу следствия предложения 3.2.2 $N = \text{rad } R$.

Подмножество кольца будем называть *ниль-подмножеством*, если каждый его элемент нильпотентен. Из предложения 3.2.1 мы знаем, что первичный радикал любого кольца является ниль-идеалом.

¹⁾ Следует учесть, что N — двусторонний идеал. Действительно, если $r \in R$, то rN — нильпотентный правый идеал и, следовательно, $rN \subseteq N$. — *Прим. перев. и ред.*

Предложение 5 (Левицкий). *Первичный радикал нётерова справа кольца является наибольшим левым ниль-идеалом.*

Доказательство (Утуми). Пусть R — нётерово справа кольцо, N — произвольный левый ниль-идеал кольца R . Мы хотим показать, что $N \subset \text{rad } R$.

Допустим сначала, что R — полупервичное кольцо. В этом случае мы докажем, что $N = 0$. Действительно, если $N \neq 0$, то выберем $n \in N$, $n \neq 0$, для которого аннулятор $n^r = \{s \in R \mid ns = 0\}$ является максимальным. Рассмотрим элемент $x \in R$, для которого $xn \neq 0$. Пусть $k = k(x)$ — наименьшее натуральное число, для которого $(xn)^k = 0$. Тогда $k > 1$ и $(xn)^{k-1} \neq 0$. Заметим, что любой элемент, аннулирующий n справа, аннулирует также и $(xn)^{k-1}$. Поэтому в силу максимальной n^r имеем $n^r = ((xn)^{k-1})^r$. Следовательно, $xn \in n^r$, т. е. $nxn = 0$. Таким образом, $nRn = 0$. Отсюда, поскольку R — полупервичное кольцо, $n = 0$.

Переходя к общему случаю, заметим, что образ левого ниль-идеала N при естественном гомоморфизме в нётерово справа кольцо $R/\text{rad } R$ в силу сказанного выше равен нулю. Следовательно, $N \subset \text{rad } R$, что мы и собирались доказать.

Следствие. *Ниль-идеал нётерова справа кольца нильпотентен.*

Следующий важный результат известен как теорема Гильберта в базисе:

Предложение 6. *Пусть $R[x]$ — кольцо, полученное присоединением к кольцу R переменной x , коммутирующей с элементами из R . Тогда если кольцо R нётерово справа, то $R[x]$ также нётерово справа.*

Доказательство. Если K — правый идеал кольца $R[x]$, то обозначим через K_i множество всех тех элементов $r \in R$, для которых существует многочлен из K со старшим членом rx^i . Тогда K_i является правым идеалом кольца R и $K_i \subset K_{i+1}$. В силу нётеровости кольца R $K_n = K_{n+1} = \dots$ начиная с некоторого n . Пусть $K_i = \sum_{j=1}^{m(i)} b_{ij} R$. Мы хотим показать,

что многочлены $p_{ij}(x)$, соответствующие элементам b_{ij} ($i \leq n$)¹⁾, составляют систему образующих идеала K .

Предположим, что не все многочлены из K являются линейными комбинациями многочленов $p_{ij}(x)$. Тогда среди «плохих» многочленов можно выбрать многочлен наименьшей степени m , скажем $g(x) = cx^m + \dots$. Допустим, что $m \leq n$. Так как $c \in K_m$, то можем записать c в виде $c = \sum_j b_{mj} c_{mj}$. Поскольку многочлен

$$g(x) - \sum_j p_{mj}(x) c_{mj}$$

лежит в K и его степень меньше n , приходим к противоречию. Наконец, если $m > n$, то $c \in K_n$, и поступаем аналогично, используя n вместо m ²⁾.

Следствие. Пусть $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — кольцо, полученное из кольца R присоединением n переменных x_i , коммутирующих между собой и с элементами из R . Тогда если кольцо R нётерово справа, то кольцо $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ также нётерово справа.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что факторкольцо нётерова (артинова) справа кольца является нётеровым (артиновым) справа кольцом.

2. Покажите, что конечное прямое произведение нётеровых (артиновых) справа колец является нётеровым (артиновым) справа кольцом.

3. Если R содержит в качестве подкольца тело D и векторное пространство R_D конечномерно, то R — артиново справа кольцо.

¹⁾ Напомним, что каждый элемент из K_i есть старший коэффициент некоторого многочлена степени i из K . — Прим. ред.

²⁾ Здесь $c = \sum_j b_{nj} c_{nj}$ и рассматривается разность

$$g(x) - x^{m-n} \sum_j p_{nj}(x) c_{nj}.$$

— Прим. ред.

4. Если кольцо R — нётерово (артиново) справа, то нётеров (артинов) любой конечно порожденный правый R -модуль.

5. Докажите, что артиново справа кольцо без делителей нуля является телом.

6. Если кольцо R изоморфно кольцу A_n всех $(n \times n)$ -матриц над кольцом A , то R содержит элементы e_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$), для которых $e_{ij}e_{jl} = e_{il}$ и $e_{ij}e_{kl} = 0$ при $j \neq k$. Покажите, что без ограничения общности можно предполагать справедливость равенства $ae_{ij} = e_{ija}$ при всех $a \in A$ ¹⁾. Проверьте, что $e_{11}Re_{11} \cong A$.

7. Если K — левый идеал кольца $R = A_n = \sum_{i,j} e_{ij}A$, то $e_{11}K$ является подмодулем свободного A -модуля $e_{11}R = \sum_j e_{1j}A$. Если L — подмодуль A -модуля $e_{11}R$, то покажите, что $\sum_i e_{i1}L$ является левым идеалом кольца R . Проверьте, что это соответствие осуществляет изоморфизм между структурой левых идеалов кольца R и структурой A -подмодулей модуля $e_{11}R$.

8. Покажите, что кольцо A_n нётерово (артиново) справа тогда и только тогда, когда A — нётерово (артиново) справа кольцо. [Указание: Используйте упражнения 2 и 7.]

9. Докажите, что все двусторонние идеалы кольца A_n имеют вид $K_n = \sum_{i,j} e_{ij}K$, где K — идеал кольца A . Покажите, что отображение $K \rightarrow K_n$ является изоморфизмом структур идеалов, сохраняющим произведение. Покажите затем, что идеал K_n первичен тогда и только тогда, когда первичен идеал K . Выведите отсюда, что $\text{rad}(A_n) = (\text{rad } A)_n$.

10. Покажите, что идеал K_n кольца A_n примитивен тогда и только тогда, когда примитивен идеал K кольца A . Выведите отсюда, что $\text{Rad}(A_n) = (\text{Rad } A)_n$. [Указание: Используйте упражнение 3.1.8. Кроме того, если K — примитивный идеал, то K является

¹⁾ Следует выбрать удачный способ вложения кольца A в кольцо A_n . — Прим. ред.

наибольшим двусторонним идеалом в некотором максимальном правом идеале M кольца A . Тогда $M' = \sum_i e_{i1}M + \sum_i e_{i2}A + \dots + \sum_i e_{in}A$ является максимальным правым идеалом кольца A_n и в силу упражнения 7 K_n является наибольшим двусторонним идеалом, содержащимся в M' .]

11 (Смолл). Покажите, что кольцо всех (2×2) -матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где a — целое число, b и c — рациональные числа, нётерово справа, но не слева.

12 (Смолл). Покажите, что кольцо всех (2×2) -матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где a — рациональное, а b и c — действительные числа, артиново справа, но не слева.

§ 3.6. Поднятие идемпотентов

Важным орудием в классической теории неполу-примитивных артиновых колец является техника поднятия идемпотентов.

В дальнейшем N будет обычно обозначать идеал кольца R , лежащий в радикале этого кольца. Будем говорить, что идемпотенты могут быть *подняты* по модулю идеала N , если для любого элемента $u \in R$, для которого $u^2 - u \in N$, существует элемент $e^2 = e \in R$, такой, что $e - u \in N$. Другими словами, если u — идемпотент по модулю N , то должен существовать идемпотент в R , сравнимый с u по модулю N .

Следующий результат является классическим. Напомним, что идеал называется *ниль-идеалом*, если каждый его элемент нильпотентен.

Предложение 1. *Идемпотенты могут быть подняты по модулю любого ниль-идеала N кольца R .*

Доказательство. Пусть $u^2 - u \in N$. Положим $e = u + x(1 - 2u)$, где x — элемент кольца R , который мы должны определить и который должен коммутировать с u . После некоторых вычислений мы убеждаемся, что уравнение $e^2 = e$ равносильно уравнению

$$(x^2 - x)(1 + 4n) + n = 0,$$

где $n = u^2 - u \in N$. Формальным решением этого уравнения является

$$x = \frac{1}{2}(1 - (1 + 4n)^{1/2}) = \frac{1}{2}\left(2n - \binom{4}{2}n^2 + \binom{6}{3}n^3 - \dots\right).$$

Так как n — нильпотентный элемент, то в действительности эта формула определяет x как многочлен от n , а следовательно, и от u с целыми коэффициентами. Отсюда также вытекает, что, как мы и хотели, x коммутирует с u . Следовательно, $e = u + x(1 - 2u)$ является решением уравнения $e^2 = e$. Кроме того, $x \in nR \subset N$ и потому $e - u \in N$, что и требовалось.

Следствие. В любом кольце идемпотенты могут быть подняты по модулю первичного радикала.

Обычно приходится поднимать по модулю идеала не один, а целое множество взаимно ортогональных идемпотентов. Для этой цели полезно следующее утверждение:

Лемма 1. Допустим, что можно поднимать идемпотенты по модулю идеала $N \subset \text{Rad } R$. Если g — идемпотент кольца R и u — идемпотент по модулю идеала N , для которого ug и gu принадлежат N , то существует идемпотент $e \in R$, такой, что $e - u \in N$ и $eg = ge = 0$.

Доказательство. Пусть $u^2 - u \in N$, $g^2 = g$, $ug \in N$ и $gu \in N$. В силу предположения найдем $f = f^2 \in R$, где $f - u \in N$. Из этого следует, что fg и gf лежат в N . В частности, $1 - fg$ — обратимый элемент кольца R . Рассмотрим элемент $f' = (1 - fg)^{-1}f(1 - fg)$. Очевидно, что f' — идемпотент кольца R и $f'g = 0$. Умножая f' на $1 - fg$ слева, видим, что $f' - f = fg - fgf' \in N$.

Положим теперь $e = f' - gf' = (1 - g)f'$. Очевидно, что $ge = 0 = eg$ и $e \equiv (1 - g)f \equiv f \equiv u \pmod{N}$ ¹⁾. Кроме того, $e^2 = (1 - g)f'(1 - g)f' = (1 - g)f' = e$.

¹⁾ Запись $a \equiv b \pmod{N}$ означает, что $a - b \in N$. — Прим. перев.

Напомним, что множество идемпотентов называется *ортогональным*, если произведение любых двух из них равно нулю.

Предложение 2. Допустим, что можно поднимать идемпотенты по модулю идеала $N \subset \text{Rad } R$. В этом случае любое конечное или счетное ортогональное множество отличных от нуля идемпотентов может быть поднято по модулю N до ортогонального множества отличных от нуля идемпотентов кольца R .

Другими словами, если $u_1, u_2, \dots$ — элементы кольца R , такие, что $u_i \notin N$ и $u_i u_j = \delta_{ij} u_j \in N$, то найдутся элементы $e_1, e_2, \dots$, такие, что $e_i \neq 0$, $e_i = u_i \in N$ и $e_i e_j = \delta_{ij} e_j$. Здесь, как обычно,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что мы уже подняли элементы $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ до $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$. Положим $g = e_1 + \dots + e_{k-1}$. Тогда, конечно, $u_k g$ и $g u_k$ лежат в N . Отсюда в силу леммы найдется идемпотент e_k , такой, что $e_k - u_k \in N$ и e_k ортогонален g , а следовательно, и $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$. Наконец, так как $u_k \notin N$, то $e_k \neq 0$.

Следуя Бассу, назовем кольцо R *полусовершенным*, если кольцо $R/\text{Rad } R$ вполне приводимо и идемпотенты можно поднимать по модулю $\text{Rad } R$.

Предложение 3. Артиново справа кольцо полусовершенно.

З а м е ч а н и е. В силу симметрии это же утверждение справедливо и для артиновых слева колец.

Доказательство. Пусть R — артиново справа кольцо. Тогда кольцо $R/\text{Rad } R$ также артиново справа (см. упражнение 3.5.1). Будучи полупрimitивным, кольцо $R/\text{Rad } R$ вполне приводимо (предложение 3.5.2). Кроме того, так как $\text{Rad } R$ — ниль-идеал (предложение 3.5.1), то в силу предложения 1 идемпотенты можно поднимать по модулю радикала.

Отличный от нуля идемпотент e кольца R назовем *примитивным*, если e не может быть представлен

в виде суммы двух ненулевых ортогональных идемпотентов. Это, как легко видеть, равносильно неразложимости правого модуля eR , а также в силу симметрии неразложимости левого модуля Re . Заметим, что в этом случае в кольце $eRe \cong \text{Hom}_R(eR, eR)$ идемпотент e оказывается единственным ненулевым идемпотентом. Действительно, если ere — идемпотент для некоторого элемента $r \in R$, то $e — ere$ является идемпотентом, ортогональным к e . Из примитивности идемпотента e следует, что либо $ere = 0$, либо $ere = e$.

Предложение 4. *Полусовершенное кольцо R содержит конечное ортогональное множество примитивных идемпотентов, сумма которых равна 1.*

Доказательство. Допустим временно, что кольцо R нётерово справа. Пусть $e_1, e_2, \dots$ — ортогональное множество отличных от нуля идемпотентов кольца R . В множестве правых идеалов $e_1R, e_1R + e_2R, \dots$ должен быть максимальный элемент. Отсюда следует, что рассматриваемое множество идемпотентов конечное. Таким образом, нётерово справа кольцо обладает конечным максимальным ортогональным множеством примитивных идемпотентов.

Применим это замечание к кольцу R/N , где $N = \text{Rad } R$. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ — максимальное ортогональное множество примитивных идемпотентов по модулю N ¹⁾. В силу предложения 2 это множество можно поднять до ортогонального множества ненулевых идемпотентов $e_1, e_2, \dots, e_n$ кольца R . Докажем, что $e_1, \dots, e_n$ — также максимальное множество, а e_i — примитивные идемпотенты.

Действительно, если идемпотент e ортогонален всем e_i , то e ортогонален всем u_i по модулю N . В силу максимальности множества $u_1, \dots, u_n$ либо $e \in N = \text{Rad } R$, либо $e - e_j \in N$ для некоторого j . В первом случае $(1 - e)$ — обратимый элемент, и из равенства $e(1 - e) = 0$ следует, что $e = 0$. Во втором случае

¹⁾ Это означает, что $u_i \in R$ и система смежных классов $\{u_i + N\}$ является максимальным ортогональным множеством примитивных идемпотентов кольца R/N . — *Прим. ред.*

аналогичным образом покажем, что $e = e_j$. Следовательно, $e_1, e_2, \dots, e_n$ — максимальное множество.

Допустим теперь, что $e_i = e + f$, где e и f — ортогональные идемпотенты. Так как идемпотент u_i примитивен по модулю $\text{Rad } R$, то либо $e \in N$, либо $f \in N$. Отсюда следует, что либо $e = 0$, либо $f = 0$. Таким образом, каждый из идемпотентов e_i примитивен. Положим

$$S = e_1 R + e_2 R + \dots + e_n R = e R,$$

где $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ — идемпотент. В этом случае примитивные идемпотенты отсутствуют в $(1 - e)R^1$, а следовательно, и в $(1 - e)R/N$. Так как R/N — вполне приводимое кольцо, то нетрудно показать, что $(1 - e)R/N = 0$ и, следовательно, $1 - e \in N$, т. е. $e = 1$, что завершает доказательство.

Насколько однозначно определены примитивные идемпотенты $e_1, \dots, e_n$ в предложении 4? Конечно, если $e_1, \dots, e_n$ — ортогональное множество, сумма элементов которого равна 1, то таким же свойством обладает и множество $u^{-1}e_1u, \dots, u^{-1}e_nu$, где u — обратимый элемент. Мы вскоре увидим, что этим исчерпываются все ортогональные множества примитивных идемпотентов, сумма элементов которых равна 1.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Допустим, что идемпотенты можно поднимать по модулю идеала $N \subset \text{Rad } R$. Покажите, что если $uu'u - u \in N$, то в кольце R существуют элементы v и v' , для которых $v - u \in N$, $v' - u' \in N$ и $vv'v = v$.

2. Покажите, что ненулевой идемпотент e кольца R примитивен тогда и только тогда, когда кольцо eRe не содержит идемпотентов, отличных от 0 и e .

¹⁾ Действительно, пусть f — примитивный идемпотент в $(1 - e)R$. Тогда $ef = 0$. Если $f - fe = 0$, то $f = f^2 = fef = 0$, что невозможно. Легко проверяется, что $f - fe$ — идемпотент, ортогональный e . Если $f - fe$ примитивен, то мы вступаем в противоречие с максимальной системой $\{e_i\}$. Следовательно, $f - fe = g + h$, где $g^2 = g$, $h^2 = h$, $gh = hg = 0$. Отсюда $f = gf + hf$, $gf, hf \neq 0$, а также $eg + eh = 0$, откуда $eg = eh = 0$. Поэтому $fg = g$ и $fh = h$, что влечет $(gf)^2 = gf$, $(hf)^2 = hf$ и $gfhf = hf$, $gf = 0$, вопреки примитивности идемпотента f . — Прим. перев. и ред.

3. Допустим, что идемпотенты можно поднимать по модулю идеала $N \subset \text{Rad } R$. Покажите, что любой примитивный идемпотент кольца R остается примитивным и по модулю N .

4. Если e — примитивный идемпотент регулярного кольца R , то eRe — тело.

§ 3.7. Локальные и полусовершенные кольца

Предложение 1. Пусть R — кольцо, в котором $0 \neq 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $R/\text{Rad } R$ — тело.

(2) Кольцо R обладает единственным максимальным правым идеалом.

(3) Все необратимые элементы кольца R лежат в некотором собственном идеале.

(4) Необратимые элементы кольца R образуют собственный идеал.

(5) Для любого элемента $r \in R$ либо r , либо $1 - r$ — обратимый элемент.

(6) Для любого элемента $r \in R$ либо r , либо $1 - r$ — обратимый справа элемент.

Замечание. Конечно, в (2) и (6) слово «правый» можно заменить на «левый».

Если кольцо R удовлетворяет одному из этих эквивалентных условий, то мы будем говорить, что R — *локальное кольцо*. В литературе встречается также термин «вполне примарное» кольцо, но название «локальное» более согласовано с коммутативным случаем. Циклическое доказательство эквивалентности условий (1) — (6) мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Если e — идемпотент кольца R , то eRe — кольцо с единицей e .

Лемма 1. Если e — идемпотент кольца R и $N = \text{Rad } R$, то $\text{Rad}(eRe) = eRe \cap N = eNe$.

Доказательство. Пусть $r = ere \in \text{Rad}(eRe)$ и $x \in R$. Тогда элемент $e - rxe$ обладает в eRe обратным $e - y$, где $y = exe$, т. е. $(e - rxe)(e - y) = e$.

После этого легко проверить, что

$$(1 - rx)(1 - y) = 1 - rx(1 - e).$$

Умножая правую часть этого равенства на $1 + rx(1 - e)$ справа, получим 1^1). Следовательно, элемент $1 - rx$ обратим справа в кольце R . Таким образом, $\text{Rad}(eRe) \subset eRe \cap N$.

Допустим теперь, что $r \in eRe \cap N$. Тогда $r = ere \in eNe$, откуда $eRe \cap N \subset eNe$.

Наконец, пусть $r \in eNe \subset N$, и пусть $x = exe \in eRe$. Тогда $1 - rx$ обладает правым обратным $1 - y$ в R , откуда

$$(e - rx)(e - eye) = e(1 - rx)(1 - y)e = e.$$

Таким образом, $eNe \subset \text{Rad}(eRe)$, что заканчивает наше циклическое доказательство.

Предложение 2. Если e — примитивный идемпотент в полусовершенном кольце R , то eRe — локальное кольцо.

Доказательство. Пусть $N = \text{Rad } R$. Рассмотрим произвольный элемент $u \in eRe$. Так как R/N — регулярное кольцо, то $u - uu'u \in N$ для некоторого $u' \in R$. Поскольку здесь можно заменить u' на $eu'e$, то можно считать, что $u' \in eRe$.

Так как uu' является идемпотентом по модулю N и ортогонален к $1 - e$, то по лемме 1 предыдущего параграфа найдется идемпотент f в R , для которого $f - uu' \in N$ и $f(1 - e) = 0 = (1 - e)f$. Таким образом, $f \in eRe$, а f и $e - f$ — ортогональные идемпотенты. Так как e примитивен, то либо f , либо $e - f$ равен нулю.

Допустим, что $u \notin N$. Так как $fu \equiv uu'u \equiv u \pmod{N}$, то $f \neq 0$. Следовательно, $f = e$, поэтому $uu' - e \in N$. Аналогично $u'u - e \in N$. Таким образом, элемент u обратим в кольце eRe по модулю $N \cap eRe = \text{Rad}(eRe)$, т. е. eRe — локальное кольцо.

Следствие 1. Кольцо R является локальным тогда и только тогда, когда R — полусовершенное кольцо, а 1 — примитивный идемпотент в R .

¹⁾ Следует учесть, что $[rx(1 - e)]^2 = 0$, ибо $r = ere$. — Прим. ред.

Нам будет удобно называть идемпотент e *локальным*, если eRe — локальное кольцо. (Джекобсон использует термин «вполне примитивный».) Очевидно, что локальный идемпотент является примитивным. Обратное, вообще говоря, не имеет места. (Например, если R — кольцо целых чисел, то 1 — примитивный идемпотент, не являющийся локальным.) Ввиду предложения 4 предыдущего параграфа справедливо такое утверждение:

Следствие 2. *Любое полусовершенное кольцо содержит конечное ортогональное множество локальных идемпотентов, сумма которых равна 1.*

Прежде чем перейти к вопросу о единственности такой системы локальных идемпотентов, нам надо доказать две леммы:

Лемма 2. *Если e — локальный идемпотент кольца R , а $\pi: R \rightarrow R/\text{Rad } R$ — канонический эпиморфизм, то πeR — минимальный правый идеал кольца πR .*

Доказательство. Рассмотрим правый идеал $\pi(1 - e)R$ кольца πR . Очевидно, что это собственный правый идеал (в противном случае $e \in \text{Rad } R$ и, следовательно, $e = 0$). Таким образом, $\pi(1 - e)R$ содержится в максимальном правом идеале πM кольца πR . Утверждение леммы будет доказано, если мы покажем, что $\pi M \cap \pi eR = 0$.

Предположим, что это не так, т. е. $\pi M \cap \pi eR \neq 0$. Тогда, поскольку πR — полупервичное кольцо, $(\pi M \cap \pi eR)^2 \neq 0$. Следовательно, найдется элемент $r \in R$, такой, что $\pi er \in \pi M$ и $\pi ere \neq 0$. Но πeRe — тело. Следовательно, в нем существует элемент πx , для которого $\pi ex = \pi e$. Таким образом, $\pi e \in \pi M$, что дает противоречивое соотношение $\pi 1 = \pi e + \pi(1 - e) \in \pi M$.

Лемма 3. *Пусть $u'u - e$ и $uu' - f$ лежат в $\text{Rad } R$, причем e и f — идемпотенты кольца R . Тогда $v'v = e$ и $vv' = f$ для некоторых элементов $v, v' \in R$.*

Доказательство. Пусть $N = \text{Rad } R$. Так как

$$fu \equiv uu'u \equiv ue \pmod{N}$$

и

$$eu' \equiv u'uu' \equiv u'f \pmod{N},$$

то

$$eu'fu \equiv u'fu \equiv u'ue \equiv e^2 \equiv e \pmod{N}.$$

Положим

$$x = e - eu'fu \in N.$$

Тогда

$$eu'fu = e(1 - x)$$

и элемент $1 - x$ обладает обратным $1 - y$. Так как $xu = x + y$, то мы видим, что $y \in N$. Положим

$$v = fu(1 - y) \quad \text{и} \quad v' = eu'f.$$

Тогда

$$v'v = eu'fu(1 - y) = e(1 - x)(1 - y) = e.$$

Отсюда

$$(vv')^2 = vev' = vv'.$$

Поэтому

$$(f - vv')^2 = f - fvv' - vv'f + vv' = f - vv'.$$

Но

$$vv' = fu(1 - y)eu'f \equiv fueu'f \equiv fuu'f \equiv f \pmod{N}.$$

Следовательно, $f - vv' \in N$. Так как радикал кольца не содержит отличных от нуля идемпотентов, то $vv' = f$, что завершает доказательство.

Предложение 3. Пусть R — произвольное кольцо, и пусть

$$\sum_{i=1}^m e_i = 1 = \sum_{j=1}^n f_j$$

— два представления 1 в виде суммы ортогонального множества локальных идемпотентов. Тогда $m = n$ и существуют обратимый элемент v кольца R и подстановка p чисел $\{1, 2, \dots, m\}$, такие, что

$$ve_i = f_{p(i)}v \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Доказательство. Пусть $\pi: R \rightarrow R/\text{Rad } R$ — канонический эпиморфизм. Тогда

$$\sum_{i=1}^m \pi e_i R = \pi R = \sum_{j=1}^n \pi f_j R$$

— два разложения в прямую сумму подмодулей. По лемме 2 слагаемые являются неприводимыми πR -модулями. Применяя теорему Жордана — Гёльдера (следствие к предложению 1.4.4), убеждаемся в том, что $m = n$ и $\pi e_i R \cong \pi f_{p(i)} R$ для подходящей подстановки p . Следовательно, существуют такие элементы πu_i и $\pi u'_i$ кольца πR , что $\pi e_i = \pi u'_i \pi u_i = \pi u'_i u_i$ и $\pi f_{p(i)} = \pi u_i u'_i$. (См. предложение 3.4.3.) По лемме 3 найдутся элементы v_i и v'_i кольца R , для которых $v'_i v_i = e_i$ и $v_i v'_i = f_{p(i)}$. Легко проверить, что также

$$v'_i f_{p(i)} v_i = e_i, \quad v_i e_i v'_i = f_{p(i)}.$$

Полагая

$$v = \sum_{i=1}^m f_{p(i)} v_i e_i, \quad v' = \sum_{j=1}^m e_j v'_j f_{p(j)},$$

нетрудно убедиться в том, что $vv' = 1 = v'v$ и

$$v e_j = f_{p(j)} v e_j = f_{p(j)} v,$$

а это завершает доказательство.

Следствие (Адзумая). Пусть S -модуль A_S представлен двумя разными способами в виде прямой суммы подмодулей, кольца эндоморфизмов которых локальны,

$$\sum_{i=1}^m A_i = A = \sum_{j=1}^n B_j.$$

Тогда $m = n$ и существует такая подстановка p чисел от 1 до m , что

$$A_i \cong B_{p(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Доказательство. Пусть $R = \text{Hom}_S(A, A)$, $e_i A = A_i$, $f_j A = B_j$. Тогда (как и в лемме 3.4.1)

$$\text{Hom}_S(A_i, A_i) \cong e_i R e_i$$

и т. д.

Читатель без труда убедится в том, что теорема Крулля — Шмидта для модулей (предложение 1.4.10) в силу леммы Фиттинга (предложение 1.4.9) является частным случаем приведенного выше утверждения. Таким образом, оказывается, что теорема Крулля — Шмидта для модулей является следствием теоремы Жордана — Гёльдера.

Вернемся теперь к вопросу о строении полусовершенных колец. В общем случае строение таких колец описывается весьма сложно, даже если предполагать их артиновыми справа. Однако ситуация становится совершенно прозрачной, если допустить, что $R/\text{Rad } R$ — простое или первичное кольцо. (Эти два свойства равносильны для вполне приводимых колец.)

Предложение 4. Пусть R — полусовершенное кольцо, а $R/\text{Rad } R$ — первичное кольцо. Тогда кольцо R изоморфно кольцу всех эндоморфизмов конечно порожденного свободного S -модуля над локальным кольцом S .

Замечание. Так как $R \cong \text{Hom}_S(V, V)$, где модуль V_S изоморфен прямой сумме n экземпляров модуля S_S , то очевидно, что кольцо R изоморфно кольцу всех $(n \times n)$ -матриц с коэффициентами из S .

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортогональное множество локальных идемпотентов кольца R , сумма которых равна 1. Пусть $\pi: R \rightarrow R/\text{Rad } R$ — канонический эпиморфизм. Тогда в силу леммы 2 $\pi e_i R$ — неприводимые правые πR -модули. Следовательно, кольцо $\pi R = \sum_{i=1}^n \pi e_i R$ совпадает со своим центром.

Пусть e — один из идемпотентов e_i . Так как однородная компонента $\pi R e R$ является прямым слагаемым в πR , а кольцо πR первично, то $\pi R = \pi R e R$.

По лемме 3.3.4 $\pi R e R$ является прямой суммой модулей, изоморфных модулю $\pi e R$. По теореме Жордана — Гёльдера $\pi e_i R \cong \pi e R$. Следовательно, $\pi v_i \pi u_i = \pi e$ и $\pi u_i \pi v_i = \pi e_i$ для подходящих элементов u_i и v_i . (См. предложение 3.4.3.) В силу леммы 3 данного параграфа можно считать, что $v_i u_i = e$ и $u_i v_i = e$. Ис-

пользуя рассуждения, уже знакомые нам (см. доказательство леммы 3.4.2), убедимся в том, что

$$R \cong \text{Hom}(R_R, R_R) \cong \text{Hom}_{eRe}(Re, Re).$$

Поскольку $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортогональное множество, $Re = \sum_{i=1}^n e_i Re$ является прямой суммой правых eRe -модулей. Кроме того, как легко видеть, соответствие $e_i re \rightarrow v_i e_i re = v_i u_i v_i re = e v_i re$ является eRe -изоморфизмом $e_i Re \rightarrow eRe$. Следовательно, Re является свободным eRe -модулем с n образующими.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проведите циклическое доказательство предложения 1.

2. Проведите полное доказательство следствия предложения 3.

3. Выведите теорему Крулля — Шмидта из теоремы Адзумы.

4. Пусть $N \subset \text{Rad } R$, и пусть $\pi: R \rightarrow R/N$ — канонический эпиморфизм. Если e и f — идемпотенты кольца R , то R -модули eR и fR изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны πR -модули πeR и πfR .

ИНЪЕКТИВНОСТЬ И БЛИЗКИЕ ВОПРОСЫ

§ 4.1. Проективные модули

Напомним, что (внешняя) прямая сумма $A = \sum_{i \in I}^{\oplus} A_i$ семейства модулей состоит из всех элементов $a \in \prod_{i \in I} A_i$, таких, что $a(i) = 0$ почти для всех i (т. е. для всех, кроме конечного числа). Было определено каноническое отображение $\kappa_i: A_i \rightarrow A$:

$$(\kappa_i a_i)(j) = \begin{cases} a_i, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i \in I} \kappa_i a(i) = a.$$

Предложение 1. Если A — прямая сумма семейства модулей $\{A_i | i \in I\}$ и $\kappa_i: A_i \rightarrow A$ — канонические отображения, то для любого модуля B и для любого семейства гомоморфизмов $\varphi_i: A_i \rightarrow B$ существует единственный гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$, такой, что $\varphi \circ \kappa_i = \varphi_i$. Более того, это свойство определяет прямую сумму с точностью до изоморфизма.

Предложение можно иллюстрировать „коммутативной диаграммой“

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{\varphi} & A \\ & \swarrow \varphi_i & \uparrow \kappa_i \\ & & A_i \end{array}$$

Пунктирная стрелка соответствует тому отображению, существование которого утверждается.

Доказательство. Определим $\varphi: A \rightarrow B$, положив

$$\varphi a = \sum_{i \in I} \varphi_i a(i).$$

Ясно, что φ — гомоморфизм и что

$$(\varphi \circ \kappa_j) a_j = \varphi(\kappa_j a_j) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\kappa_j a_j)(i) = \varphi_j a_j.$$

Таким образом, $\varphi \circ \kappa_j = \varphi_j$. Если также и $\psi \circ \kappa_j = \varphi_j$, то

$$\psi a = \sum_{i \in I} \psi(\kappa_i a(i)) = \sum_{i \in I} \varphi_i a(i) = \varphi a,$$

и, следовательно, $\psi = \varphi$.

Обратно, пусть A' и $\kappa'_i: A_i \rightarrow A'$ удовлетворяют „абстрактным“ условиям предложения 1. Полагая $\varphi_i = \kappa'_i$ и $B = A'$, убедимся в существовании отображения $\kappa': A \rightarrow A'$, для которого $\kappa' \circ \kappa_i = \kappa'_i$. Аналогично, существует отображение $\kappa: A' \rightarrow A$, для которого $\kappa \circ \kappa'_i = \kappa_i$. Следовательно,

$$\kappa \circ \kappa' \circ \kappa_i = \kappa \circ \kappa'_i = \kappa_i = 1_A \circ \kappa_i,$$

где 1_A — тождественное отображение модуля A . В силу свойства единственности $\kappa \circ \kappa' = 1_A$. Аналогично, $\kappa' \circ \kappa = 1_{A'}$. Следовательно, κ — изоморфизм.

Следствие. Если модуль A изоморфен прямой сумме модулей A_i с каноническими отображениями $\kappa_i: A_i \rightarrow A$, то существуют отображения $\pi_i: A \rightarrow A_i$ (также называемые каноническими), такие, что $\pi_i \circ \kappa_i = 1$ и $\pi_i \circ \kappa_j = 0$, когда $i \neq j$.

Кстати, из этого следует, что κ_i — мономорфизм, а π_i — эпиморфизм.

Доказательство. Рассмотрим при фиксированном индексе i отображение $\delta_{ij}: A_j \rightarrow A_i$, где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Существует отображение $\pi_i: A \rightarrow A_i$, для которого $\pi_i \circ \kappa_j = \delta_{ij}$ при всех j . (Возьмите $\varphi_j = \delta_{ij}$ и $\varphi = \pi_i$.)

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xleftarrow{\pi_i} & A \\ & \searrow \delta_{ij} & \uparrow \kappa_j \\ & & A_j \end{array}$$

Модуль M_R называется *свободным*, если в нем существует базис $\{m_i | i \in I\}$, $m_i \in M$, т. е. такая система элементов, что любой элемент $m \in M$ можно однозначно представить в виде $m = \sum_{i \in I} m_i r_i$, где $r_i \in R$ и почти все (кроме конечного числа) r_i равны нулю. Из этого следует, что $\sum_{i \in I} m_i r_i = 0$ тогда и только тогда, когда все $r_i = 0$. В частности, $m_i r = 0 \Rightarrow r = 0$, и, следовательно, правые R -модули $m_i R$ и R изоморфны. Кроме того, $M = \sum_{i \in I} m_i R$ — прямая сумма. Следовательно, мы доказали первую часть такого утверждения:

Лемма. Модуль M_R является свободным тогда и только тогда, когда он изоморфен прямой сумме некоторого множества экземпляров модуля R_R .

Доказательство обратного утверждения очевидно и опускается.

Одним из наиболее интересных свойств свободного модуля M является его *проективность* в следующем смысле: Пусть π — эпиморфизм некоторого модуля B на некоторый модуль A , тогда любой гомоморфизм $\varphi: M \rightarrow A$ может быть «поднят» до гомоморфизма $\psi: M \rightarrow B$, такого, что $\pi \circ \psi = \varphi$. Это свойство иллюстрируется диаграммой

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & B \\ & \searrow \varphi & \downarrow \pi \\ & & A \end{array}$$

Предложение 2. Свободный модуль является *проективным*.

Доказательство. Пусть M_R — свободный модуль с базисом $\{m_i | i \in I\}$, и пусть $\varphi \in \text{Hom}_R(M, A)$. Пусть также $\pi \in \text{Hom}_R(B, A)$ — эпиморфизм. Тогда для любого $i \in I$ существует элемент $b_i \in B$, такой, что

$$\varphi m_i = \pi b_i.$$

Для любого $m = \sum_{i \in I} m_i r_i$ мы определим

$$\psi m = \sum_{i \in I} b_i r_i.$$

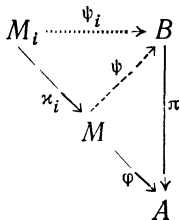
(Напомним, что почти все r_i равны нулю.) Для того чтобы убедиться, что ψ — однозначное отображение, допустим, что $m = 0$. Из этого вытекает, что все $r_i = 0$. Таким образом, $\sum_{i \in I} b_i r_i = 0$. Легко видеть, что $\psi \in \text{Hom}_R(M, B)$.

Следствие. R_R — проективный модуль.

Предложение 2 можно было бы доказать, показав сначала справедливость следствия и использовав затем предыдущую лемму вместе с таким результатом:

Предложение 3. Если M — прямая сумма семейства модулей $\{M_i | i \in I\}$, то модуль M проективен тогда и только тогда, когда каждый из модулей M_i проективен.

Доказательство. Допустим, что все M_i — проективные модули. Пусть $\varphi \in \text{Hom}_R(M, A)$, и пусть $\pi \in \text{Hom}_R(B, A)$ — эпиморфизм. Тогда для гомоморфизмов $\varphi \circ \kappa_i: M_i \rightarrow A$ найдутся гомоморфизмы $\psi_i: M_i \rightarrow B$, такие, что $\pi \circ \psi_i = \varphi \circ \kappa_i$. (Напомним, что κ_i — каноническое вложение модуля M_i в M .) Теперь в силу предложения 1 существует единственный гомоморфизм ψ , такой, что $\psi \circ \kappa_i = \psi_i$ для всех $i \in I$. Мы не будем использовать единственность отображения ψ , а воспользуемся лишь равенством $\varphi \circ \kappa_i = \pi \circ \psi_i$ при всех $i \in I$. Поскольку $\pi \circ \psi \circ \kappa_i = \pi \circ \psi_i = \varphi \circ \kappa_i$ для всех i , можно заключить, что $\pi \circ \psi = \varphi$. Таким образом, M — проективный модуль.



Обратно, пусть M — проективный модуль, и пусть $\varphi_i: M_i \rightarrow A$ и $\pi_i: M \rightarrow M_i$ — канонические отображения. Тогда для $\varphi_i \circ \pi_i: M \rightarrow A$ найдется гомоморфизм $\psi: M \rightarrow B$, такой, что $\pi \circ \psi = \varphi_i \circ \pi_i$. Но $\pi_i \circ \kappa_i = 1$ и, следовательно, $\pi \circ \psi \circ \kappa_i = \varphi_i$. Таким образом, модуль M_i является проективным.

Предложение 4. Каждый модуль изоморфен фактормодулю свободного модуля.

Доказательство. Пусть M_R — правый R -модуль. Можно записать модуль M , например, в виде $M = \sum_{i \in I} m_i R$, где m_i пробегает все элементы модуля M . Пусть R_R^i — экземпляр модуля R_R . Рассмотрим отображение $\varphi_i: R^i \rightarrow M$, определяемое условием $\varphi_i r = m_i r$. Тогда существует отображение

$$\varphi: \sum_{i \in I}^{\oplus} R^i \rightarrow M,$$

для которого $\varphi \circ \kappa_i = \varphi_i$, где κ_i — каноническое отображение R^i в прямую сумму. Образ гомоморфизма φ содержит все $m_i R$ и, следовательно, содержит $M = \sum_{i \in I} m_i R$. Таким образом, φ — эпиморфизм.

Следствие. Каждый модуль изоморфен фактормодулю проективного модуля.

Будем называть эпиморфизм $\pi: B \rightarrow M$ *прямым*, если существует гомоморфизм $\kappa: M \rightarrow B$, такой, что $\pi \circ \kappa = 1$. Заметим, что в этом случае κ — мономорфизм. Оправданием этой терминологии служит то соображение, что в этом случае $\kappa \circ \pi$ является идемпотентным эндоморфизмом модуля B , образ которого изоморфен модулю $\pi B = M$. Таким образом, модуль M изоморфен прямому слагаемому модуля B . (См. § 1.3.)

Предложение 5. Модуль M проективен тогда и только тогда, когда каждый эпиморфизм $\pi: B \rightarrow M$ является прямым.

Иногда это предложение формулируют примерно так: модуль M проективен тогда и только тогда, ко-

гда выделяется прямым слагаемым любой подмодуль, фактормодулю по которому он изоморфен.

Доказательство. Допустим, что M — проективный модуль и $\pi: B \rightarrow M$ — эпиморфизм. Для тождественного отображения из M в M найдется отображение $\kappa: M \rightarrow B$, такое, что $\pi \circ \kappa = 1$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\kappa} & B \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Обратно, допустим, что каждый эпиморфизм $\pi: B \rightarrow M$ является прямым. В силу последнего следствия можно взять в качестве B проективный модуль. В этом случае M как прямое слагаемое проективного модуля является в силу предложения 3 проективным модулем.

Следствие. *Модуль M проективен тогда и только тогда, когда он изоморфен прямому слагаемому свободного модуля.*

Над какими кольцами R все R -модули являются проективными?

Предложение 6. *Каждый R -модуль проективен тогда и только тогда, когда кольцо R вполне приводимо.*

Доказательство. Допустим, что каждый R -модуль проективен. Тогда для любого правого идеала K кольца R модуль R/K проективен. В силу предложения 5 канонический эпиморфизм $\pi: R \rightarrow R/K$ является прямым. Фактически мы имеем отображение $\kappa: R/K \rightarrow R$, для которого $\pi \circ \kappa = 1$. Как уже отмечалось, $\kappa \circ \pi$ является идемпотентным эндоморфизмом модуля R , образ которого изоморфен модулю $\pi R = R/K$. Его ядро, очевидно, совпадает с $\pi^{-1}0 = K$. Следовательно, K_R также является прямым слагаемым модуля R_R , одним из дополнений которого служит подмодуль $\kappa(\pi R)$. Таким образом, каждый правый идеал выделяется прямым слагаемым, и, следовательно, модуль R_R вполне приводим.

Обратно, допустим, что R — вполне приводимое кольцо. Пусть M — правый R -модуль и $\pi \in \text{Hom}_R(B, M)$ — эпиморфизм. Пусть $K = \pi^{-1}0$. Поскольку модуль B вполне приводим, $K + K' = B$ и $K \cap K' = 0$ для некоторого подмодуля K' модуля B . Таким образом, $M \cong B/K \cong K'$ и K' является прямым слагаемым в модуле B . Так как мы можем считать, что B — проективный (даже свободный) модуль, то из этого следует проективность модуля M .

Мы готовы теперь рассмотреть пример проективного модуля, не являющегося свободным.

Пример. Рассмотрим кольцо R всех (2×2) -матриц над полем F , скажем над полем действительных чисел. Матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta \in F$, образуют правый идеал кольца R и, следовательно, правый модуль M_R . В силу предложения 6 M_R — проективный модуль. Если рассматривать M как векторное пространство над F , то его размерность равна 2. С другой стороны, размерность любого свободного R -модуля как векторного пространства над F кратна 4, размерности пространства R_F . Таким образом, модуль M_R не является свободным.

Рассмотрим для получения примеров другого типа кольцо $R = \mathbf{Z}$ целых чисел. Заметим, что $\mathbf{Z}$ -модули — не что иное, как абелевы группы. В силу следствия предложения 5 абелева группа проективна тогда и только тогда, когда она изоморфна прямому слагаемому свободной абелевой группы. Как мы сейчас увидим, любая подгруппа свободной группы является свободной. Из этого следует, что абелева группа свободна тогда и только тогда, когда она проективна.

Предложение 7. Пусть $M = \sum_{i \in I} M_i$ — прямая сумма подмодулей M_i . Допустим, что модуль M_i и все его подмодули проективны. Тогда любой подмодуль

N модуля M изоморфен прямой сумме $\sum_{i \in I} N_i$, где $N_i \subset M_i$ при всех $i \in I$.

Заметим, что совпадение N с $\sum_{i \in I} N_i$ не утверждается.

Доказательство. Можем, например, взять в качестве I множество всех порядковых чисел, меньших r . Для любого порядкового числа $k \leq r$ положим $M^k = \sum_{i < k} M_i$. При естественном отображении модуля $M^{k+1} = M^k + M_k$ на M_k образом модуля $N \cap M^{k+1}$ является некоторый подмодуль N_k модуля M_k . В силу предположения N_k — проективный модуль и, следовательно, изоморфен прямому слагаемому модуля $N \cap M^{k+1}$. Другими словами,

$$N \cap M^{k+1} = (N \cap M^k) + N'_k,$$

где $N \cap M^k \cap N'_k = 0$ и $N'_k \cong N_k$. Докажем, используя трансфинитную индукцию, что

$$N \cap M^i = \sum_{j < i} N'_j$$

(прямая сумма подмодулей) для всех $i \leq r$. Это равенство очевидно для $i = 0$. Из его справедливости для $i = k$ в силу сказанного выше следует его справедливость при $i = k + 1$. Пусть теперь k — любое предельное порядковое число, и пусть утверждение имеет место для всех $i < k$. Тогда

$$\begin{aligned} N \cap M^k &= N \cap \left(\bigcup_{i < k} M^i \right) = \bigcup_{i < k} (N \cap M^i) = \\ &= \bigcup_{i < k} \left(\sum_{j < i} N'_j \right) = \sum_{j < k} N'_j. \end{aligned}$$

Легко видеть, что сумма в правой части является прямой. Следовательно, наше утверждение справедливо для всех $i \leq r$, в частности при $i = r$.

Следствие. Если R — коммутативная область целостности, в которой все идеалы являются главными, то каждый подмодуль свободного модуля свободен.

Доказательство. Свободный модуль M является прямой суммой подмодулей $M_i \cong R_R$. Затем, любой ненулевой идеал кольца R изоморфен модулю R_R . Следовательно, все ненулевые модули N_i изоморфны R_R . Поэтому модуль N также свободен.

Предложение 8. Пусть $M = \sum_{i \in I} M_i$ — прямая сумма подмодулей M_i . Допустим, что каждый конечно порожденный подмодуль любого модуля M_i проективен. Тогда произвольный конечно порожденный подмодуль N модуля M изоморфен прямой сумме $\sum_{i \in F} N_i$, где F — конечное подмножество в I и $N_i \subset M_i$ при любом $i \in F$.

Доказательство. Так как N — конечно порожденный модуль, то N содержится в $\sum_{i \in F} M_i$, где F — некоторое конечное подмножество в I . Упростим обозначения. Пусть $M^n = \sum_{i=1}^n M_i$ и N — конечно порожденный подмодуль модуля M^n . Докажем по индукции, что

$$N = \sum_{i=1}^n N_i, \quad N_i \subset M_i.$$

Очевидно, это верно при $n = 1$. Пусть это верно при $n - 1$. Канонический эпиморфизм $M^n = M^{n-1} + M_n$ на M_n отображает N на конечно порожденный подмодуль N_n модуля M_n . В силу предположения модуль N_n проективен и, следовательно, изоморфен прямому слагаемому N'_n модуля N . Таким образом,

$$N = (N \cap M^{n-1}) + N'_n, \\ N \cap M^{n-1} \cap N'_n = 0.$$

Поэтому $N \cap M^{n-1}$ как прямое слагаемое модуля N является конечно порожденным модулем. В силу индуктивного предположения $N \cap M^{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} N_i$. Следовательно, $N \cong \sum_{i=1}^n N_i$.

Можно заметить, что доказательство предложения 8 очень похоже на доказательство предложения 7. С небольшими усложнениями, вероятно, мы могли бы найти единое доказательство двух предложений.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что модуль M_R проективен тогда и только тогда, когда существуют элементы $m_i \in M$ и $f_i \in \text{Hom}_R(M, R)$, $i \in I$, такие, что для любого $m \in M$ справедливо равенство $m = \sum_{i \in I} m_i (f_i m)$. (Конечно, подразумевается, что $f_i m = 0$ почти для всех i .)

2. Если M_R — конечно порожденный проективный модуль, то существуют элементы $m_1, \dots, m_n \in M$ и $f_1, \dots, f_n \in \text{Hom}_R(M, R)$, такие, что

$$m = \sum_{i=1}^n m_i (f_i m), \quad f = \sum_{i=1}^n (f m_i) f_i$$

для $m \in M$ и $f \in \text{Hom}_R(M, R)$.

3. Кольцо называется *наследственным справа*, если каждый его правый идеал проективен. Докажите, что каждый подмодуль свободного модуля над наследственным справа кольцом изоморфен прямой сумме правых идеалов кольца R .

4. Покажите, что кольцо R наследственно справа тогда и только тогда, когда каждый подмодуль проективного R -модуля проективен.

5. Пусть кольцо R вполне приводимо. Покажите, что каждый правый R -модуль является прямой суммой правых идеалов кольца R .

6. Кольцо R называется *полунаследственным справа*, если каждый его конечно порожденный правый идеал проективен. Например, регулярное кольцо полунаследственно справа и слева.

Сформулируйте и докажите утверждения, аналогичные упражнениям 3 и 4.

7. Покажите, что кольцо A_n всех $(n \times n)$ -матриц с элементами из кольца A регулярно тогда и только тогда, когда кольцо A регулярно. (Указание: Возможный

способ — рассмотреть элемент $e_{11}re_{11}$, соответствующий элементу $r \in A_n$. Другой способ — использовать структурный изоморфизм из упражнения 3.5.7 и заметить, что конечно порожденный правый идеал K кольца A_n выделяется в нем прямым слагаемым тогда и только тогда, когда $e_{11}K$ выделяется прямым слагаемым в A -модуле $e_{11}A_n$.)

8 (Смол). Покажите, что кольцо в упражнении 11 § 3.5 наследственно справа, но не слева.

§ 4.2. Инъективные модули

Возможно, читателя удивит тот факт, что прямое произведение модулей допускает абстрактное описание, являющееся «дуальным» по отношению к характеристизации прямой суммы. Под «дуализацией» подразумевается обращение стрелок (отображений) и перемена местами приставок «эпи» и «моно».

Предложение 1. Если A — прямое произведение семейства модулей $\{A_i | i \in I\}$ с каноническими отображениями $\pi_i: A \rightarrow A_i$, то для произвольного модуля B и любого семейства гомоморфизмов $\varphi_i: B \rightarrow A_i$ найдется и притом единственный гомоморфизм $\varphi: B \rightarrow A$, такой, что $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$. Более того, это свойство определяет прямое произведение с точностью до изоморфизма

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow \varphi_i & \downarrow \pi_i \\ & & A_i \end{array}$$

Доказательство. Напомним, что $\pi_i a = a(i) \in A_i$ для любого $a \in A$. Определим $\varphi: B \rightarrow A$, положив

$$(\varphi b)(i) = \varphi_i b.$$

Ясно, что φ — гомоморфизм и что

$$(\pi_i \circ \varphi) b = \pi_i(\varphi b) = (\varphi b)(i) = \varphi_i b.$$

Таким образом, $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$. Если также и $\pi_i \circ \psi = \varphi_i$, то

$$(\psi b)(i) = \pi_i(\psi b) = (\pi_i \circ \psi) b = \varphi_i b = (\varphi b)(i)$$

и, следовательно, $\psi = \varphi$.

Обратно, пусть A' и $\pi'_i: A' \rightarrow A_i$ удовлетворяют условиям предложения 1. Рассмотрев $\varphi_i = \pi'_i$ и $B = A'$, убедимся в существовании отображения $\pi': A' \rightarrow A$, такого, что $\pi_i \circ \pi' = \pi'_i$. Аналогично, существует отображение $\pi: A \rightarrow A'$, такое, что $\pi'_i \circ \pi = \pi_i$. Следовательно,

$$\pi_i \circ \pi' \circ \pi = \pi'_i \circ \pi = \pi_i = \pi_i \circ 1_A,$$

где 1_A — тождественное отображение модуля A . Из единственности вытекает, что $\pi' \circ \pi = 1_A$. Аналогично, $\pi \circ \pi' = 1_{A'}$. Таким образом, π — изоморфизм.

Следствие. Если модуль A изоморфен прямому произведению модулей A_i с каноническими отображениями $\pi_i: A \rightarrow A_i$, то существуют отображения $\kappa_i: A_i \rightarrow A$ (также называемые каноническими), такие, что $\pi_i \circ \kappa_i = 1$ и $\pi_i \circ \kappa_j = 0$ при $i \neq j$.

Доказательство. Фиксируем i и рассмотрим отображение $\delta_{ij}: A_i \rightarrow A_j$, где $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда существуют отображения $\kappa_i: A_i \rightarrow A$, такие, что $\pi_j \circ \kappa_i = \delta_{ij}$ при всех j . (Следует взять $\varphi_j = \delta_{ij}$ и $\varphi = \kappa_i$.)

Двойственным к понятию проективности является понятие инъективности. Модуль M называется *инъективным*, если он обладает следующим свойством. Пусть κ — мономорфизм некоторого модуля A в некоторый модуль B , тогда любой гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow M$ допускает продолжение до гомоморфизма $\psi: B \rightarrow M$, такого, что $\psi \circ \kappa = \varphi$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\psi} & B \\ & \nwarrow \varphi & \uparrow \kappa \\ & & A \end{array}$$

Доказательство предложения 4.1.3 можно дуализировать, обратив все стрелки и поменяв местами приставки «эпи» и «моно». Таким образом, немедленно получаем

Предложение 2. Если M — прямое произведение семейства модулей $\{M_i | i \in I\}$, то модуль M инъективен

тогда и только тогда, когда каждый модуль M_i инъективен.

Полезен следующий критерий инъективности:

Лемма 1 (Бэр). Модуль M_R инъективен тогда и только тогда, когда для любого правого идеала K кольца R и любого $\varphi \in \text{Hom}_R(K, M)$ найдется элемент $t \in M$, такой, что $\varphi k = tk$ для всех $k \in K$.

Доказательство. Если M_R — инъективный модуль, то φ допускает продолжение до гомоморфизма $\psi \in \text{Hom}_R(R, M)$. Положив $t = \psi 1$, убедимся в справедливости условия леммы.

Обратно, пусть модуль M_R удовлетворяет условию леммы. Пусть B_R — произвольный модуль, а A_R — произвольный его подмодуль. Пусть $\varphi \in \text{Hom}_R(A, M)$. Нам хотелось бы продолжить φ до гомоморфизма $\psi \in \text{Hom}_R(B, M)$. Применяя лемму Цорна к множеству частичных гомоморфизмов из B в M , упорядоченному по включению их графиков, можно расширить φ до гомоморфизма $\psi \in \text{Hom}_R(D, M)$, где $A \subset D \subset B$ и ψ уже не допускает собственных расширений. Нам остается показать, что $D = B$.

Рассмотрим произвольный элемент $b \in B$. Положим $K = \{r \in R \mid br \in D\}$. Тогда $bR \cap D = bK$. Отображение $k \rightarrow \psi(bk)$ является гомоморфизмом из K в M . Следовательно, найдется элемент $t \in M$, такой, что $\psi(bk) = tk$ при всех $k \in K$. Определим отображение $\psi': bR \rightarrow M$, полагая $\psi'(d + br) = \psi d + tr$. Отображение ψ' однозначное. Действительно, если $d + br = 0$, то $br = -d \in D$, и поэтому $r \in K$. Следовательно, $\psi d + tr = \psi(d + br) = 0$. Очевидно, что ψ' — гомоморфизм, продолжающий ψ . Так как мы предполагали, что гомоморфизм ψ не допускает собственных расширений, то $b \in D$, что завершает наше доказательство.

Абелева группа $M = M_Z$ называется *делимой*¹⁾, если для любого элемента $m \in M$ и любого ненулевого целого числа z найдется элемент $m' \in M$, такой, что $m'z = m$.

¹⁾ В учебниках по теории групп используется также термин «полная группа». — *Прим. ред.*

Предложение 3. *Абелева группа инъективна тогда и только тогда, когда она делима.*

Доказательство. Напомним, что группа M_Z инъективна тогда и только тогда, когда для любого идеала K кольца Z и любого гомоморфизма $\varphi \in \text{Hom}_Z(K, M)$ найдется элемент $m' \in M$, такой, что $\varphi k = m'k$ при всех $k \in K$. Без потери общности можем считать, что $K \neq 0$. Следовательно, $K = zZ$, где $0 \neq z \in Z$, и $k = zz'$, где $z' \in Z$. Так как φ полностью определено своим значением $\varphi z = m$, то отсюда следует, что группа M_Z инъективна тогда и только тогда, когда для любого $0 \neq z \in Z$ и любого $m \in M$ найдется элемент m' , такой, что $mz' = m'zz'$ при всех $z' \in Z$. Очевидно, что это равносильно делимости группы M .

Пусть Q — аддитивная группа рациональных чисел, и пусть Q/Z — группа рациональных чисел по модулю 1. (Группа Q/Z изоморфна мультипликативной группе корней из единицы). Сопоставим любой аддитивной группе M ее *группу характеров*

$$M^* = \text{Hom}_Z(M, Q/Z).$$

Если M — левый R -модуль, то M^* можно рассматривать как правый R -модуль M_R^* , где $(\chi r)m = \chi(rm)$ ($\chi \in M^*$, $r \in R$, $m \in M$). Назовем M_R^* *модулем характеров* модуля ${}_R M$. Аналогично, если M — правый R -модуль, то M^* — левый R -модуль.

Лемма 2. *Если $0 \neq m \in M$, то $\chi m \neq 0$ для некоторого $\chi \in M^*$.*

Доказательство. Достаточно найти $\varphi \in \text{Hom}_Z(mZ, Q/Z)$, для которого $\varphi m \neq 0$. Действительно, поскольку Q/Z — делимая и, следовательно, инъективная группа, φ допускает продолжение до гомоморфизма $\chi \in \text{Hom}_Z(M, Q/Z)$.

Если $mz \neq 0$ для всех $0 \neq z \in Z$, то мы можем определить $\varphi mz = \pi \frac{1}{2} z$, где $\pi: Q \rightarrow Q/Z$ — каноническое отображение. (Также годилось бы и $\frac{1}{17} z$.)

Если z_0 — наименьшее натуральное число, для которого $mz_0 = 0$, то положим $\varphi mz = \pi \frac{1}{z_0} z$. Это отображение является однозначным, поскольку из равенства $mz = 0$ вытекает, что $z = z_0 z'$ и, следовательно, $\varphi mz = \pi z' = 0$ в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Следствие. *Существует канонический мономорфизм модуля M в $(M^*)^*$.*

Доказательство. Отображение $\chi \rightarrow \chi m$ является характером модуля M^* , который мы обозначим через $\hat{m}$. При этом $\hat{m} = 0$, лишь когда $\chi m = 0$ при всех $\chi \in M^*$, т. е. когда в силу леммы 2 $m = 0$.

Отображению $\varphi: A \rightarrow B$ канонически сопоставим отображение $\varphi^*: B^* \rightarrow A^*$, определяемое равенством $(\chi \varphi^*)a = \chi(\varphi a)$, где $\chi \in B^*$ и $a \in A$.

Лемма 3. *Если $\varphi: A \rightarrow B$ — эпиморфизм, то $\varphi^*: B^* \rightarrow A^*$ — мономорфизм.*

Доказательство. Предположим, что $\chi \varphi^* = 0$. Тогда $\chi B = \chi(\varphi A) = (\chi \varphi^*)A = 0$ и, следовательно, $\chi = 0$.

Предложение 4. *Каждый модуль изоморфен подмодулю модуля характеров свободного модуля.*

Доказательство. Пусть M_R — заданный модуль. В силу следствия к лемме 2 $M \subset (M^*)^*$. Модуль ${}_R M^*$ изоморфен фактормодулю свободного модуля ${}_R F$, и, следовательно, можно рассмотреть эпиморфизм $\pi: F \rightarrow M^*$. По лемме 3 гомоморфизм $\pi^*: (M^*)^* \rightarrow F^*$ является мономорфизмом.

Предложение 5. *Если ${}_R F$ — свободный модуль, то F_R^* — инъективный модуль.*

Доказательство. Пусть K — правый идеал кольца R , $\varphi \in \text{Hom}_R(K, F^*)$ и KF — аддитивная подгруппа в F , состоящая из всех конечных сумм элементов вида kf , где $k \in K$ и $f \in F$. Если ${}_R F$ — свободный модуль с базисом $\{f_i | i \in I\}$, то нетрудно показать, что все элементы из KF имеют вид $\sum_{i \in I} k_i f_i$, где $k_i \in K$ и

почти все k_i равны нулю. Введем в рассмотрение отображение $\psi: KF \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, для которого $\psi\left(\sum_{i \in I} k_i f_i\right) = \sum_{i \in I} (\varphi k_i) f_i$. Отображение ψ однозначное, поскольку из равенства $\sum_{i \in I} k_i f_i = 0$ следует, что все $k_i = 0$, а это означает равенство нулю правой части. Очевидно, что ψ есть $\mathbf{Z}$ -гомоморфизм. Поскольку $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ — делимая, т. е. инъективная группа, то ψ допускает продолжение до гомоморфизма $\chi \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = F^*$. Тогда $(\varphi k)f = \psi(kf) = \chi(kf) = (\chi k)f$ при всех $f \in F$. Следовательно, $\chi \in F^*$ и $\varphi k = \chi k$ при всех $k \in K$. Таким образом, в силу леммы 1 модуль F_R^* инъективен.

Следствие. Каждый модуль изоморфен подмодулю инъективного модуля.

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием предложений 4 и 5.

Назовем мономорфизм $\kappa: M \rightarrow B$ *прямым*, если существует гомоморфизм $\pi: B \rightarrow M$, такой, что $\pi \circ \kappa = 1$. Заметим, что в этом случае π — эпиморфизм. Как и в случае прямых эпиморфизмов (см. § 4.1), убеждаемся, что модуль M изоморфен прямому слагаемому модуля B .

Предложение 6. *Модуль M инъективен тогда и только тогда, когда каждый мономорфизм $\kappa: M \rightarrow B$ является прямым.*

Иногда это формулируют в более свободной форме: модуль M инъективен тогда и только тогда, когда M выделяется прямым слагаемым в любом модуле, содержащем M как подмодуль.

Доказательство в точности дуально доказательству предложения 4.1.5.

Следствие. Модуль M инъективен тогда и только тогда, когда M является прямым слагаемым модуля характеров свободного модуля.

Предложение 7. *Каждый R -модуль инъективен тогда и только тогда, когда кольцо R вполне приводимо.*

Опустим доказательство, поскольку оно аналогично доказательству предложения 4.1.6.

Мы показали, что каждый модуль M_R можно вложить в инъективный модуль I_R . Попробуем теперь выбрать среди таких модулей наименьший. Модуль N , содержащий модуль M , называется его *существенным* расширением, если пересечение M с любым ненулевым подмодулем модуля N отлично от нуля. Другими словами, если $M \subset N$, то N — существенное расширение подмодуля M тогда и только тогда, когда M — большой подмодуль в N . Из следующего результата видно, что все существенные расширения модуля M располагаются с точностью до изоморфизма в любом инъективном расширении I модуля M .

Лемма 4. Пусть N — существенное расширение модуля M , а I — инъективный модуль, содержащий M . Тогда тождественное отображение модуля M допускает продолжение до мономорфизма модуля N в I .

Доказательство. Поскольку I — инъективный модуль, тождественное отображение модуля M допускает продолжение до гомоморфизма $\varphi \in \text{Hom}_R(N, I)$. Так как $\varphi^{-1}0 \cap M = 0$ и N — существенное расширение модуля M , то $\varphi^{-1}0 = 0$.

Предложение 8. Модуль M инъективен тогда и только тогда, когда у него отсутствуют собственные существенные расширения.

Доказательство. Допустим, что M — инъективный модуль и N — его существенное расширение. В этом случае M является прямым слагаемым модуля N , т. е. $N = M + K$, $M \cap K = 0$. Поэтому $K = 0$. Следовательно, $N = M$ не является собственным расширением.

Обратно, допустим, что у модуля M нет собственных существенных расширений. Пусть I — инъективный модуль, содержащий модуль M , и пусть M' — подмодуль модуля I , являющийся максимальным среди подмодулей, пересечение которых с M равно нулю. Убедимся, что модуль I/M' является существенным расширением модуля $(M + M')/M'$. Действительно,

пусть $M' \subset K \subset I$. Допустим, что пересечение K/M' с $(M + M')/M'$ равно нулю, т. е. $K \cap (M + M') \subset M'$. Тогда $K \cap M \subset M' \cap M = 0$, и, следовательно, в силу максимальности модуля M' $K = M'$. Таким образом, $K/M' = 0$. В силу предположения $I/M' \cong M^1$), откуда $I = M + M'$. Поэтому модуль M является прямым слагаемым инъективного модуля I и, следовательно, также инъективен.

Предложение 9. *Каждый модуль M обладает максимальным существенным расширением N , которое единственно в следующем смысле: если N' — другое максимальное существенное расширение модуля M , то тождественное отображение модуля M допускает продолжение до изоморфизма модуля N' на N .*

Замечание. Мы говорим, что N является максимальным существенным расширением модуля M , если N — существенное расширение модуля M , а модуль N уже не обладает собственными существенными расширениями.

Доказательство. Пусть I — инъективный модуль, содержащий модуль M . Объединение любой линейно упорядоченной совокупности существенных расширений модуля M в I также является существенным расширением. Следовательно, в силу леммы Цорна существует максимальное существенное расширение N модуля M в I .

Пусть теперь N' — любое существенное расширение модуля M , содержащее N , но не обязательно лежащее в I . Очевидно, что N' — также существенное расширение и модуля N . По лемме 4 тождественное отображение модуля N может быть продолжено до гомоморфизма модуля N' в I . При этом образ этого гомоморфизма является существенным расширением модуля N и, следовательно, совпадает с N . Таким образом, N — максимальное существенное расширение модуля M (не только в I , но и абсолютное).

¹⁾ Следует учесть, что $M \cong M/(M \cap M') \cong (M + M')/M' \subseteq I/M'$. — Прим. ред.

Любое существенное расширение модуля N является и существенным расширением модуля M . Таким образом, модуль N не обладает собственными существенными расширениями. Следовательно, по предложению 8 N является инъективным модулем. Если N' — любое существенное расширение модуля M , то по лемме 4 можно продолжить тождественное отображение модуля M до мономорфизма модуля N' в N . Если N' — максимальное существенное расширение, то этот мономорфизм является изоморфизмом.

Предложение 10. Пусть N — расширение модуля M . Следующие условия равносильны:

- (1) N — максимальное существенное расширение модуля M .
- (2) N — существенное расширение модуля M , и N — инъективный модуль.
- (3) N — минимальное инъективное расширение модуля M .

В этом случае модуль N называется *инъективной оболочкой* модуля M .

Доказательство. Пусть выполнено (1). В этом случае у модуля N нет собственных существенных расширений. Следовательно, N — инъективный модуль. Таким образом, $(1) \Rightarrow (2)$.

Пусть выполнено (2). Предположим, что $M \subset I \subset N$ и I — инъективный модуль. Тогда I является прямым слагаемым модуля N . Но так как N — существенное расширение модуля I , то $N = I$. Таким образом, $(2) \Rightarrow (3)$.

Пусть справедливо (3), и пусть N' — максимальное существенное расширение модуля M в N . Тогда N' (как и выше) — инъективный модуль. Следовательно, $N' = N$. Таким образом, $(3) \Rightarrow (1)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что понятие «подпрямое произведение фактормодулей» дуально понятию «сумма подмодулей».

2. Покажите, что каждый R -модуль является инъективным тогда и только тогда, когда R — вполне приводимое кольцо.

3. Покажите, что модуль характеров свободного R -модуля является прямым произведением некоторого множества экземпляров модуля R_R^* .

4. Покажите, что модуль M_R является инъективным тогда и только тогда, когда для любого *большого* правого идеала K кольца R и любого $\varphi \in \text{Hom}_R(K, M)$ найдется элемент $m \in M$, такой, что $\varphi k = mk$ для всех $k \in K$.

5. Покажите, что кольцо R наследственно справа тогда и только тогда, когда каждый фактормодуль любого инъективного правого R -модуля инъективен.

6. Если $M \subset K \subset N$, то N является существенным расширением модуля M тогда и только тогда, когда K — существенное расширение модуля M , а N — существенное расширение модуля K .

7. Пусть I — инъективный модуль, содержащий модуль M , и пусть M' — подмодуль модуля I , являющийся максимальным среди обладающих свойством $M \cap M' = 0$. Пусть M'' — подмодуль модуля I , содержащий M и максимальный среди обладающих свойством $M'' \cap M' = 0$. Покажите, что M'' — инъективная оболочка модуля M .

Следующие далее упражнения взяты из статьи Басса (1960).

8. Подмодуль A модуля M называется *малым*, если $A + B = M \Rightarrow B = M$ для любого подмодуля B модуля M . Если A мал в M и если $f: M \rightarrow M'$, то fA мал в M' .

9. Эпиморфизм $P \rightarrow M$, ядро которого мало и где P — проективный модуль, называется *проективным накрытием* модуля M . Если $P \rightarrow M$ и $P' \rightarrow M'$ — проективные накрытия, то $P \times P' \rightarrow M \times M'$ является проективным накрытием.

10. Пусть $P \rightarrow M$ — проективное накрытие, $P' \rightarrow M$ — эпиморфизм, K — его ядро, и пусть модуль P' также проективен. Покажите, что $P' = P_1 + P_2$, $P_1 \cap P_2 = 0$, $P_1 \cong P$, $P_2 \subset K$, подмодуль $P_1 \cap K$ мал

в P_1 . Вывести отсюда, что модуль P определен однозначно с точностью до изоморфизма.

11. Если R — полупрimitивное кольцо и если каждый неприводимый R -модуль обладает проективным накрытием, то кольцо R вполне приводимо. [Указание: Применить упражнение 10 с $P' = R$ к проективному накрытию $P \rightarrow R/M$, где M — максимальный правый идеал кольца R , содержащий цоколь. Используйте упражнение 3.2.8 для того, чтобы показать, что пересечение $P_1 \cap M$ равно нулю. Выведите отсюда равенство $M = P_2$, а следовательно, и включения $P_1 \subset \subset \text{Soc } R \subset M$.]

12. Пусть M — R/K -модуль, где K — идеал кольца R . Если $P \rightarrow M$ — проективное накрытие R -модуля M , то $P/PK \rightarrow M$ является проективным накрытием R/K -модуля M .

13. Покажите, что если каждый циклический R -модуль обладает проективным накрытием, то кольцо R полусовершенно. [Указание: Используя упражнение 12, покажите, что каждый главный R/N -модуль обладает проективным накрытием, где $N = \text{Rad } R$. Затем, используя упражнения 9—11, можно поднять идемпотент πe кольца $\pi R = R/N$ до идемпотента кольца R , строя проективные накрытия модулей $\pi e R$ и $\pi(1 - e)R$ и сравнивая их прямую сумму с R_R .]

14 (Накаяма). Пусть $M = \sum_{i=1}^n m_i A_i$, где A_i — правые идеалы кольца R , $N = \text{Rad } R$. Покажите, что из равенства $MN = M$ следует равенство $M = 0$. [Указание: $m_1(1 - a_1) = \sum_{i=2}^n m_i a_i$, $a_i \in A_i \cap N$, и, следовательно, $m_1 \in \sum_{i=2}^n m_i A_i$.] Выведите отсюда, что если модуль M_R конечно порожден, то подмодуль MN мал.

15. Пусть R — полусовершенное кольцо, и пусть M_R — конечно порожденный модуль. Покажите, что модуль M обладает проективным накрытием. [Указание: Используя упражнение 4.1.5, покажите, что R/N -модуль M/MN изоморфен конечной прямой сумме

правых идеалов кольца R/N . Поднимая идемпотенты, можно убедиться, что эти прямые слагаемые имеют вид $e_i R / e_i N$, $e_i^2 = e_i \in R$. Проверьте, что $\sum_i^\oplus e_i R \rightarrow M$ является проективным накрытием.]

§ 4.3. Полное кольцо частных

Пусть $I_R = I(R_R)$ — инъективная оболочка правого модуля R_R . Пусть $H = H(R) = \text{Hom}_R(I, I)$ — кольцо эндоморфизмов инъективной оболочки I_R . Как обычно, мы пишем эндоморфизмы слева от аргумента. Таким образом, получим бимодуль ${}_H I_R$. Пусть $Q = Q(R) = \text{Hom}_H(I, I)$ — кольцо эндоморфизмов левого H -модуля ${}_H I$. Будем писать эти новые эндоморфизмы справа от аргумента. Получим бимодуль ${}_H I_Q$. Буквы R , I , H и Q сохраняют свое значение на протяжении всей этой главы.

Кольцо Q называется *полным правым кольцом частных* кольца R . Как мы увидим, эта конструкция эквивалентна конструкции, введенной Утуми, а в случае коммутативного кольца R совпадает с конструкцией, рассмотренной в гл. 2.

Лемма 1. *Каноническое отображение кольца R в Q является мономорфизмом. Каноническое отображение $h \rightarrow h1$ модуля ${}_H H$ в ${}_H I$ является эпиморфизмом. Каноническое отображение $q \rightarrow 1q$ модуля Q_R в I_R является мономорфизмом.*

Доказательство. Каноническое отображение кольца R в Q сопоставляет каждому элементу $r \in R$ отображение $i \rightarrow ir$ ($i \in I$). Если оно равно нулю, то $r = 1r = 0$. Следовательно, гомоморфизм $r \rightarrow (i \rightarrow ir)$ является мономорфизмом.

Отображение $r \rightarrow ir$ является гомоморфизмом модуля R_R в I_R для любого $i \in I$. В силу инъективности модуля I_R оно может быть продолжено до гомоморфизма $h \in \text{Hom}_R(I, I)$. Следовательно, $h1 = i$. Поэтому $H1 = I$. Значит, отображение $h \rightarrow h1$ — эпиморфизм.

Наконец, мы рассмотрим канонический гомоморфизм $q \rightarrow 1q$ модуля Q_R в I_R . Поскольку из равенства

$1q = 0$ следует в силу сказанного выше, что $1q = (H1)q = H(1q) = 0$, ядро гомоморфизма $q \rightarrow 1q$ равно нулю.

З а м е ч а н и е. С этого момента будем рассматривать кольцо R как подкольцо кольца Q . Однако для ясности будем отличать Q от его канонического образа $1Q$ в I . Заметим, что если R_R — инъективный модуль, то имеют место канонические изоморфизмы $R = I \cong H \cong Q$.

Предложение 1. *Канонический образ Q_R в I_R состоит в точности из тех элементов инъективной оболочки I_R , которые аннулируются всеми элементами из H , аннулирующими R , т. е.*

$$1Q = \{i \in I \mid \forall_{h \in H} (hR = 0 \Rightarrow hi = 0)\}.$$

Доказательство. Пусть $h \in H$, $hR = 0$. Тогда $h(1Q) = (h1)Q = 0$. Таким образом, $1Q$ содержится в указанном подмодуле инъективной оболочки I_R . Обратно, допустим, что элемент $i \in I$ обладает свойством $\forall_{h \in H} (hR = 0 \Rightarrow hi = 0)$. Найдем элемент $q \in Q$, такой, что $i = 1q$.

По лемме 1 любой элемент из I можно записать в виде $h1$, где $h \in H$. Рассмотрим теперь отображение $h1 \rightarrow hi$ модуля ${}_H I$ в себя. (Чтобы убедиться в однозначности этого отображения, допустим, что $h1 = h'1$. Тогда $(h - h')R = 0$. Следовательно, в силу предположения $(h - h')i = 0$.) Таким образом, $(h1)q = hi$ для некоторого $q \in \text{Hom}_H(I, I)$. Полагая $h = 1$, получим требуемое равенство $1q = i$.

Что произойдет, если мы проведем ту же процедуру начиная не с модуля R_R , а с Q_Q ?

Предложение 2. *Инъективная оболочка канонического образа модуля Q_Q совпадает с I_Q , и $\text{Hom}_Q(I, I) = H$.*

Доказательство. Пусть A_Q — подмодуль модуля B_Q , и пусть $\varphi \in \text{Hom}_Q(A, I)$. Так как I_R — инъективный модуль, то можно продолжить φ до гомоморфизма $\psi \in \text{Hom}_R(B, I)$. Если мы покажем, что ψ есть

Q -гомоморфизм, то из этого будет следовать инъективность модуля I_Q .

Для любого $a \in A$ рассмотрим $\psi_a q = \psi(aq) - (\psi a)q$. Очевидно, что $\psi_a \in \text{Hom}_R(Q, I)$ и $\psi_a R = 0$. Но ψ_a можно продолжить до гомоморфизма, лежащего в H . Следовательно, в силу предложения 1 $\psi_a Q = 0$. Таким образом, $\psi \in \text{Hom}_Q(B, I)$.

Поскольку I_R — существенное расширение модуля R_R , I_R является также и существенным расширением модуля $(1Q)_R$. Следовательно, I_Q — существенное расширение модуля $(1Q)_Q$. Так как I_Q — инъективный модуль, то I_Q — инъективная оболочка модуля $(1Q)_Q$.

Очевидно, что $\text{Hom}_Q(I, I) \subset \text{Hom}_R(I, I) = H$. Так как ${}_H I_Q$ — бимодуль, то получаем требуемое равенство.

Следствие. Кольцо Q совпадает со своим полным правым кольцом частных.

Предложение 3. Следующие условия эквивалентны:

- (1) Модули ${}_H H$ и ${}_H I$ канонически изоморфны.
- (2) Модули I_R и Q_R канонически изоморфны.
- (3) Кольца H и Q канонически изоморфны.
- (4) Модуль Q_R инъективен.
- (5) Модули I_Q и Q_Q канонически изоморфны.
- (6) Модуль Q_Q инъективен.

Доказательство. Допустим, что выполнено условие (1). Тогда ядро отображения $h \rightarrow h1$ равно 0. Таким образом, если $hR = 0$, то $hI = 0$. Следовательно, в силу предложения 1 $I = 1Q$, т. е. выполнено условие (2). Это рассуждение допускает обращение; следовательно, $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Пусть справедливы условия (1) и (2). Рассматривая данные изоморфизмы $H \rightarrow I \leftarrow Q$, убеждаемся, что $h \in H$ соответствует $q \in Q$ тогда и только тогда, когда $h1 = 1q$. Пусть также $h'1 = 1q'$. Тогда

$$(hh')1 = h(h'1) = h(1q') = (h1)q' = (1q)q' = 1(qq').$$

Итак, из (1) и (2) следует (3).

Пусть справедливо (3). Тогда соотношение $h1 = 1q$ определяет изоморфизм между H и Q . Теперь для

любого $i \in I$ в силу леммы 1 найдется элемент $h \in H$, такой, что $h1 = i$. Следовательно, в силу предположения найдется элемент $q \in Q$, такой, что $i = 1q$, т. е. справедливо (2). Таким образом, из (3) следует (2). Пусть справедливо (4). Тогда канонический образ модуля Q_R в I_R инъективен. Но модуль I_R является существенным расширением этого образа. Следовательно, $I = 1Q$, т. е. выполнено (2). Так как импликация $(2) \Rightarrow (4)$ очевидна, то $(2) \Leftrightarrow (4)$.

Мы показали эквивалентность условий (1) — (4). В силу предложения 2 мы, таким образом, получаем эквивалентность условий (1), (5), (3) и (6).

Подмодуль D модуля Q_R будем называть *плотным*, если $\forall_{h \in H} (hD = 0 \Rightarrow hR = 0)$. Очевидно, R — плотный подмодуль.

Мы увидим сейчас, что для идеала коммутативного кольца R это понятие совпадает с введенным ранее в гл. 2.

ЛЕММА 2. *Если D — плотный правый идеал кольца R , то $q^{-1}D = \{r \in R \mid qr \in D\}$ для любого элемента $q \in Q$ также является плотным идеалом.*

Доказательство. Пусть $h \in H$, $h(q^{-1}D) = 0$. Рассмотрим отображение $\varphi: D + qR \rightarrow R$, определяемое равенством $\varphi(d + qr) = hr$. (Если $d + qr = 0$, то $qr \in D$ и, следовательно, $hr = 0$. Таким образом, φ — однозначное отображение.) Продолжим φ до отображения $h': I_R \rightarrow I_R$. Тогда $h'D = 0$ и, следовательно, $h'R = 0$. Таким образом,

$$h1 = \varphi q = h'q = (h'1)q = 0.$$

Итак, $hR = (h1)R = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если D — правый идеал кольца R , то D — плотный идеал тогда и только тогда, когда*

$$\forall 0 \neq r_1 \in R \forall r_2 \in R \exists r \in R (r_1 r \neq 0 \& r_2 r \in D).$$

Доказательство. Допустим, что приведенное выше условие имеет место. Пусть $hD = 0$, и пусть $r_1 \in hR \cap R$. Тогда $r_1 = hr_2$, где $r_2 \in R$. Если $r_1 \neq 0$, то можно выбрать элемент $r \in R$, такой, что $r_1 r \neq 0$

и $r_2 r \in D$. Но при этом $r_1 r = h r_2 r \in hD = 0$, что приводит к противоречию. Следовательно, $hR \cap R = 0$. Так как I_R — существенное расширение модуля R_R , то $hR = 0$. Таким образом, D — плотный идеал.

Обратно, пусть D — плотный правый идеал в R . Тогда в силу леммы 2 $r_2^{-1}D$ при любом $r_2 \in R$ также является плотным правым идеалом. Отображение $r \rightarrow r_1 r$ можно продолжить до отображения $h: I_R \rightarrow I_R$. Следовательно, из равенства $r_1(r_2^{-1}D) = 0$ следует, что $r_1 = 0$. Таким образом, показано, что наше условие выполнено.

Следствие. Идеал D кольца R является плотным правым R -модулем в R тогда и только тогда, когда

$$\forall r_1 \in R (r_1 D = 0 \Rightarrow r_1 = 0).$$

В случае коммутативных колец это фактически совпадает с определением плотных идеалов в гл. 2.

Доказательство. Пусть справедливо условие, и пусть $r_2 \in R$. Если $r_1 \neq 0$, то можно найти элемент $r \in D$, такой, что $r_1 r \neq 0$. Так как D — идеал, то $r_2 r \in D$. В силу предложения 4 D — плотный правый идеал.

Обратно, пусть D — плотный правый идеал. Приведенное условие следует при $r_2 = 1$ из условия предложения 4.

Предложение 5. Пусть D и G — подмодули в Q_R , и пусть D — плотный подмодуль. Тогда $\text{Hom}_R(D, G)$ и $G : D = \{q \in Q \mid qD \subset G\}$ канонически изоморфны.

Доказательство. Канонический гомоморфизм из $G : D$ в $\text{Hom}_R(D, G)$ — это, конечно, отображение, сопоставляющее элементу $q \in G : D$ гомоморфизм $d \rightarrow qd$ модуля D в G . Очевидно, канонический гомоморфизм является мономорфизмом, поскольку из равенства $qD = 0$ следует, что $q = 0$. (Напомним, что $1q = h1$ для подходящего $h \in H$ и что D является плотным подмодулем.) Если для каждого $f \in \text{Hom}_R(D, G)$ мы сможем найти элемент $q \in Q$, такой, что $fd = qd$ для всех $d \in D$, то из этого будет

следовать, что канонический гомоморфизм является изоморфизмом.

Чтобы найти такое q , продолжим f до $h: I \rightarrow I$ в том смысле, что $h1d = 1fd$ для любого $d \in D$. Рассмотрим теперь элемент $h' \in H$, такой, что $h'R = 0$. Тогда в силу предложения 1 $h'h1D \subset h'1Q = 0$. Так как D — плотный подмодуль, то $h'h1Q = 0$. Следовательно, в силу предложения 1 $h1Q \subset 1Q$. В частности, $h1 = 1q$ для некоторого $q \in Q$. Таким образом, $1fd = h1d = 1qd$ и, следовательно, $fd = qd$ при всех $d \in D$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Два плотных подмодуля D и D' модуля Q_R изоморфны тогда и только тогда, когда $qD = D'$ для некоторого обратимого элемента q из Q .*

Следствие 2. *Если D — плотный правый идеал кольца R и $f \in \text{Hom}_R(D, R)$, то существует элемент $q \in Q$, такой, что $\forall d \in D f d = qd$.*

Следствие 3. *Предположим, что кольцо R содержит наименьший плотный правый идеал D_0 . Тогда $Q \cong \text{Hom}_R(D_0, D_0)$.*

Доказательство. В силу леммы 2 $q^{-1}D_0$ — плотный правый идеал для любого $q \in Q$. Следовательно, $D_0 \subset q^{-1}D_0$, т. е. $qD_0 \subset D_0$. Таким образом, $Q = D_0 \cdot D_0 \cong \text{Hom}_R(D_0, D_0)$.

З а м е ч а н и е. Предположения следствия выполнены, например, если R — артиново справа кольцо. Между прочим, из доказательства следует, что D_0 — двусторонний идеал.

Лемма 3. *Если D и D' — плотные правые идеалы кольца R , то $D \cap D'$ — также плотный правый идеал.*

Доказательство. Используем условие предложения 4. Пусть $0 \neq r_1 \in R$ и $r_2 \in R$. Так как D — плотный правый идеал, то найдем элемент $r \in R$, такой, что $r_1 r \neq 0$ и $r_2 r \in D$. Поскольку D' — плотный правый идеал, можно найти элемент $r' \in R$, такой, что $r_1 r r' \neq 0$ и $r_2 r r' \in D'$. Но тогда $r_2 r r' \in D \cap D'$. Таким образом, $D \cap D'$ — плотный правый идеал.

Предложение 6. Пусть D пробегает множество всех плотных правых идеалов кольца R . Рассмотрим множество

$$\bigcup_D \text{Hom}_R(D, R)/\theta,$$

где θ — отношение эквивалентности, которое имеет место между двумя гомоморфизмами, если они совпадают на пересечении их областей определения. Это множество можно превратить в кольцо, которое изоморфно кольцу Q , если определить операции следующим образом. Пусть $f_i \in \text{Hom}_R(D_i, R)$, $i = 1, 2$, и пусть

$$f_1 + f_2 \in \text{Hom}_R(D_1 \cap D_2, R), \quad f_1 f_2 \in \text{Hom}(f_2^{-1} D_1, R)$$

определяются так:

$$(f_1 + f_2)d = f_1 d + f_2 d, \quad (f_1 f_2)d = f_1(f_2 d).$$

Тогда

$$\theta f_1 + \theta f_2 = \theta(f_1 + f_2), \quad \theta f_1 \theta f_2 = \theta(f_1 f_2).$$

Если забыть об умножении, то это пример прямого предела абелевых групп (важная конструкция, которую здесь мы не изучаем).

Доказательство. Если $q \in Q$, то пусть $D = q^{-1}R = \{d \in R \mid qd \in R\}$. В силу леммы 2 D — плотный правый идеал, при этом $q \in R \cdot D$. Следовательно, $Q = \bigcup_D (R \cdot D)$. Из предложения 5 следует существование

изоморфизма $R \cdot D \cong \text{Hom}_R(D, R)$, при котором $q \in R \cdot D$ соответствует гомоморфизму $f \in \text{Hom}_R(D, R)$, такому, что $fd = qd$ при всех $d \in D$.

Пусть элемент $q_i \in R \cdot D_i$ соответствует гомоморфизму $f_i \in \text{Hom}_R(D_i, R)$. Тогда убедимся, что $q_1 = q_2$, если и только если $f_1 \theta f_2$.

Действительно, пусть $f_1 d = f_2 d$ при всех $d \in D_1 \cap D_2$. Тогда $q_1 d = q_2 d$. Следовательно, $(q_1 - q_2)(D_1 \cap D_2) = 0$. Так как $D_1 \cap D_2$ — плотный правый идеал и $1(q_1 - q_2) = h1$ для подходящего $h \in H$, то $1(q_1 - q_2) = 0$ и, значит, $q_1 = q_2$. Обратное утверждение очевидно.

Наконец, оставим в качестве упражнения проверку того, что элементы $q_1 + q_2$ и $q_1 q_2$ соответствуют элементам $\theta(f_1 + f_2)$ и $\theta(f_1 f_2)$.

С точки зрения следствия к предложению 4 в случае коммутативного кольца R это означает, что Q совпадает с полным кольцом частных, определенным в гл. 2. В частности, кольцо Q тогда также коммутативно. Вообще говоря, именно так полное правое кольцо частных было впервые определено Утуми (и называлось «максимальным», а не «полным»), следовавшим конструкции Джонсона, с которой мы познакомимся в следующем параграфе.

Следствие. *Равенство $Q = R$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого плотного правого идеала D и любого гомоморфизма $f \in \text{Hom}_R(D, R)$ найдется элемент $r \in R$, такой, что $\forall d \in D f d = r d$.*

Другим следствием предложения 5 является такой интересный результат:

Предложение 7 (Утуми). *Пусть R — первичное кольцо с ненулевым цоколем. Тогда кольцо Q является кольцом всех линейных преобразований векторного пространства.*

Доказательство. Цоколь S является идеалом. (См. § 3.3 и 3.4.) Так как R — первичное кольцо, то из $rS = 0$ следует, что $r = 0$ для всех $r \in R$. Таким образом, в силу следствия к предложению 4 S — плотный идеал. С другой стороны, S содержится в любом большом правом идеале. Действительно, каждый большой правый идеал содержит любой минимальный правый идеал. Так как каждый плотный правый идеал является большим (непосредственное следствие предложения 4), то S — наименьший плотный правый идеал кольца R . Поэтому в силу следствия 3 к предложению 4 и в силу леммы 3.4.2 $Q \cong \text{Hom}_R(S, S) \cong \text{Hom}_{eRe}(Re, Re)$.

Пусть R — подкольцо кольца S . Кольцо S называется *правым кольцом частных* кольца R , если $s^{-1}R =$

$= \{r \in R \mid sr \in R\}$ для любого $0 \neq s \in S$ является плотным правым идеалом в R и если $s(s^{-1}R) \neq 0$.

Предложение 8. *Кольцо Q является правым кольцом частных кольца R . Если S — некоторое правое кольцо частных кольца R , то тождественное отображение кольца R может быть продолжено и притом единственным образом до гомоморфизма модулей S_R в Q_R , являющегося мономорфизмом колец.*

Доказательство. Так как модуль R_R будет, очевидно, своим плотным идеалом, то в силу леммы 2 $q^{-1}R$ — плотный идеал. Более того, если $q \neq 0$, то, поскольку Q_R — существенное расширение модуля R_R , $q(q^{-1}R) = qR \cap R \neq 0$.

Пусть теперь S — некоторое правое кольцо частных кольца R . Если $0 \neq s \in S$, то $sR \cap R = s(s^{-1}R) \neq 0$ и, следовательно, S_R — существенное расширение модуля R_R . Таким образом, можно рассматривать S_R как подмодуль в I_R . Предположим теперь, что $h \in H$ и $hR = 0$. Тогда $hs(s^{-1}R) = 0$ для любого $s \in S$. Поэтому так как $s^{-1}R$ — плотный подмодуль, то $hsR = 0$. Итак, $hS = 0$. Следовательно, по предложению 1 $S \subset I_Q$.

Пусть φ — гомоморфизм модуля S_R в I_Q , являющийся продолжением тождественного отображения кольца R . Продолжим отображение $s \rightarrow \varphi s$ — s до некоторого отображения $h \in H$. Тогда $hR = 0$ и, следовательно, в силу предложения 1 $hS = 0$. Итак, $\varphi s = 1s$. Поэтому существует единственный такой гомоморфизм модуля S_R в I_Q , а следовательно, и в Q_R . Более того, этот гомоморфизм является мономорфизмом.

Итак, можно рассматривать S_R как подмодуль модуля Q_R . Будет ли S подкольцом кольца Q ? Обозначим на время операцию умножения в S через $*$. Рассмотрим $s, s' \in S$. Сравним $s' * s$ с произведением $s's$ в Q . Пусть $d \in s^{-1}R$. Тогда

$$(s' * s)d = s'(sd) = (s's)d^1).$$

¹⁾ Подробнее: $(s' * s)d = (s' * s) * d = s' * (s * d) = s' * (sd) = s'(sd)$, так как $d, sd \in R$. — Прим. ред.

Следовательно, $(s' * s - s's)(s^{-1}R) = 0$. Так как $s^{-1}R$ — плотный идеал, то $s' * s = s's$. Таким образом, можно рассматривать S как подкольцо кольца Q .

Следствие. Пусть R — подкольцо кольца S . Тогда тождественное отображение кольца R можно продолжить до изоморфизма кольца S на Q тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

- (1) S является правым кольцом частных кольца R .
- (2) $\exists_{s \in S} \forall_{d \in D} fd = sd$ для любого плотного правого идеала D кольца R и любого гомоморфизма $f \in \text{Hom}_R(D, R)^1$.

Мы в состоянии теперь доказать следующий результат, который в коммутативном случае был получен ранее.

Предложение 9 (Утуми).

$$Q\left(\prod_{j \in J} R_j\right) \cong \prod_{j \in J} Q(R_j).$$

Доказательство. Можно рассматривать $R = \prod_{j \in J} R_j$ как подкольцо кольца $Q' = \prod_{j \in J} Q(R_j)$. Пусть $0 \neq q \in Q'$. Положим $D' = \prod_{j \in J} q(j)^{-1} R_j$. Тогда $qD' \subset R$ и, следовательно, $D' \subset q^{-1}R$. Непосредственная выкладка, использующая предложение 4, показывает, что D' — плотный подмодуль и что $qD' \neq 0$. Опустим утомительные подробности. Таким образом, Q' — правое кольцо частных кольца R .

Пусть, далее, D — некоторый плотный правый идеал кольца R , D_j — его канонический образ в R_j . Опять используя предложение 4, можно легко показать, что D_j — плотный правый идеал кольца R_j . Пусть теперь $f \in \text{Hom}_R(D, R)$. Найдем элемент $q \in Q'$, такой, что $\forall_{d \in D} qd = fd$.

Действительно, пусть $\kappa_j: D_j \rightarrow D$ и $\pi_j: R \rightarrow R_j$ — каноническое отображение. Тогда $\pi_j \circ f \circ \kappa_j \in$

¹⁾ Принять во внимание доказательство предложения 6. — Прим. ред.

$\in \text{Hom}_R(D_j, R_j)$. Следовательно, существует элемент $q_j \in Q(R_j)$, такой, что

$$\forall d_j \in D_j q_j d_j = \pi_j(f(\kappa_j d_j)).$$

Пусть теперь $d \in D$. Заметим, что $\kappa_j d(j) = d e_j$, где e_j — идемпотент кольца R , ассоциированный с R_j . Определим $q \in Q'$ так: $q(j) = q_j$. Несложное вычисление показывает, что $q d(j) = (f d)(j)$ при всех j . Поэтому, как и требовалось, $q d = f d$.

Утверждение следует теперь из приведенного выше следствия. Читатель может, немного потрудившись, восполнить пропуски в доказательстве.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что $Q \cong R/K$, где $K = \{h \in H \mid h1 = 0\}$ и $P = \{h \in H \mid Kh \subset K\}$.

2. Покажите, что модуль Q_R инъективен тогда и только тогда, когда $KI \cap R = 0$.

3. Если R — коммутативное кольцо, то кольцо Q изоморфно центру кольца H .

4 (Утуми). Пусть F — поле, $S = F[x]/(x^4)$ — кольцо многочленов от x над F по модулю многочлена x^4 , $R = F + F\bar{x}^2 + F\bar{x}^3$ — подкольцо кольца S , порожденное 1 , $\bar{x}^2$ и $\bar{x}^3$, где $\bar{x}$ — образ элемента x в S . Покажите, что модуль Q_R не является инъективным, а кольцо H не является коммутативным.

5. Покажите, что каждый плотный правый идеал является большим.

6 (Утуми). Пусть R — подкольцо кольца S . Покажите, что S является правым кольцом частных кольца R тогда и только тогда, когда

$$\forall 0 \neq s \in S \forall s' \in S \exists r \in R (sr \neq 0 \text{ \& } s'r \in R).$$

7. Если S — правое кольцо частных кольца R и T — правое кольцо частных кольца S , то T является кольцом правых частных кольца R .

8 (Утуми). Если $R = A_n$ — кольцо всех $(n \times n)$ -матриц над кольцом A , то $Q = B_n$, где B — полное правое кольцо частных кольца A .

9 (Габриель). Пусть D — плотный правый идеал кольца R . Если A — правый идеал кольца R , такой, что $d^{-1}A$ — плотный правый идеал кольца R при всех $d \in D$, то A — также плотный правый идеал.

10 (Тевари). Отображение $d: R \rightarrow R$ называется *дифференцированием* кольца R , если $d(r_1 + r_2) = dr_1 + dr_2$, $d(r_1 r_2) = (dr_1)r_2 + r_1(dr_2)$ для всех $r_1, r_2 \in R$. Покажите, что любое дифференцирование d кольца R может быть продолжено и единственным образом до дифференцирования d' кольца Q .

11. Элементу $a \in R$ сопоставим дифференцирование d_a кольца R , такое, что $d_a r = ar - ra$ при всех $r \in R$. Используя предыдущее упражнение, покажите, что если R — коммутативное кольцо, то кольцо Q также коммутативно.

12. Пусть R — кольцо (2×2) -матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

над полем F , таких, что $a + c = b + d$. Покажите, что в этом случае Q — кольцо всех (2×2) -матриц.

13 (Финдлей). Идеал A коммутативного кольца R называется *обратимым* в кольце S , содержащем R как подкольцо, если $AB = R$ для некоторого подмодуля B модуля S_R . Покажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- (а) идеал A обратим в некотором кольце S ;
- (б) идеал A обратим в кольце Q ;
- (в) A является плотным конечно порожденным и проективным идеалом.

14. Покажите, что сумма всех $R \cdot A = \{q \in Q \mid qA \subseteq R\}$, где A — обратимый идеал кольца Q , является подкольцом кольца Q .

§ 4.4. Кольца эндоморфизмов инъективных модулей

Напомним, что подмодуль L модуля M_R называется *большим*, если пересечение L с любым ненулевым подмодулем модуля M_R отлично от нуля.

ЛЕММА 1. Пусть $F = \text{Hom}_R(M, M)$.

(1) Пересечение конечного числа больших подмодулей является большим подмодулем.

(2) Если L — большой подмодуль модуля M_R и $f \in F$, то $f^{-1}L = \{m \in M \mid fm \in L\}$ — большой подмодуль.

(3) Множество всех эндоморфизмов $g \in F$ с большими модулями в качестве ядер является идеалом кольца R .

Доказательство. (1) Пусть L и L' — большие подмодули, а K — ненулевой подмодуль в M_R . Так как L' — большой подмодуль, то $L' \cap K \neq 0$. Так как L — большой подмодуль, то $L \cap L' \cap K \neq 0$.

(2) Допустим, что $f^{-1}L \cap K = 0$. Тогда $L \cap fK = 0$ и, следовательно, $fK = 0 \subset L$. Таким образом, $K \subset \subset f^{-1}L \cap K = 0$.

(3) Если g обращается в нуль на L , а g' — на L' , то $g + g'$ обращается в нуль на $L \cap L'$. Если же $f \in F$, то fg обращается в нуль на L , а gf — на $f^{-1}L$.

Нам потребуется еще одна лемма о радикале Джекобсона модуля.

ЛЕММА 2. Пусть K — подмодуль модуля A_R и $\pi: A \rightarrow A/K$ — канонический эпиморфизм. Тогда $\pi \text{Rad } A \subset \text{Rad } \pi A$. Если $K \subset \text{Rad } A$, то $\pi \text{Rad } A = \text{Rad } \pi A$.

Доказательство. Каждый максимальный подмодуль модуля πA имеет вид πM , где M — максимальный подмодуль в A , содержащий K , при этом $\text{Rad } \pi A$ является их пересечением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть I_R — инъективный модуль, $H = \text{Hom}_R(I, I)$ и N — идеал кольца H , состоящий из всех эндоморфизмов $h \in H$ с большими модулями в качестве ядер. Тогда

- (1) кольцо H/N регулярно в смысле Неймана;
- (2) N является радикалом Джекобсона кольца H ;
- (3) идемпотенты можно поднимать по модулю идеала N .

З а м е ч а н и е. Утверждение (1) восходит к Джонсону, (2) принадлежит Утуми, а (3), кажется, было замечено независимо рядом математиков.

Доказательство. (1) Пусть $h \in H$. Рассмотрим подмодуль K модуля I_R , являющийся максимальным среди подмодулей, пересечение которых с $h^{-1}0 = \{i \in I \mid hi = 0\}$ равно нулю. В силу леммы 3.3.1 $h^{-1}0 + K$ — большой подмодуль в I_R . Так как ограничение h на K является мономорфизмом, то $\phi h k = k$ для некоторого $\phi \in \text{Hom}_R(hK, I)$ и при всех $k \in K$. Поскольку I_R — инъективный модуль, можно продолжить ϕ до $h' \in H$. Тогда $hh'hi = hi$ для любого $i \in h^{-1}0 + K$. Таким образом, $hh'h - h \in N$. Следовательно, H/N — регулярное кольцо.

(2) Пусть $\pi: H \rightarrow H/N$ — канонический эпиморфизм. В силу доказанного выше $\text{Rad } \pi H = 0$. Следовательно, по лемме 2 $\pi \text{Rad } H = 0$, т. е. $\text{Rad } H \subset N$.

Обратно, пусть $h \in N$. Тогда $h^{-1}0$ — большой подмодуль модуля I_R . Но $h^{-1}0 \cap (1-h)^{-1}0 = 0$ и, следовательно, $(1-h)^{-1}0 = 0$. Таким образом, модуль $(1-h)I_R$ изоморфен модулю I_R и, следовательно, также является инъективным, а значит, и прямым слагаемым в I_R . Но $(1-h)i = i$ для любого $i \in h^{-1}0$. Тогда $(1-h)I$ содержит $h^{-1}0$ и, таким образом, является большим подмодулем в I_R . Отсюда следует, что $(1-h)I = I$. Поэтому $1-h$ — автоморфизм модуля I_R . Итак, $1-h$ — обратимый элемент для любого элемента $h \in N$. Следовательно, $N \subset \text{Rad } H$.

(3) Пусть $u \in H$. Допустим, что $u^2 - u \in N$. Тогда $(u^2 - u)L = 0$ для некоторого большого подмодуля L модуля I_R . Инъективная оболочка модуля uL , являясь его минимальным инъективным расширением, может быть вложена в инъективный модуль I_R . Следовательно, можно считать, что она имеет вид eI , где $e^2 = e \in H$. Идемпотент e индуцирует на uL тождественное отображение. Следовательно, $(eu - u)L = 0$, поэтому $eu - u \in N$. К сожалению, мы не можем показать, что $e - u \in N$ (тогда мы бы закончили доказательство). Положим $f = e + eu(1 - e)$. Тогда $ef = f$, $fe = e$ и $f^2 = f$. Пусть $L' = (1 - e)I + uL$. Проведя стандартную

проверку (которую мы оставляем в качестве упражнения), убедимся, что L' — большой подмодуль¹⁾ и что $(f - eu)L' = 0$ ²⁾. Таким образом, $f \equiv eu \equiv u \pmod{N}$, что завершает наше доказательство.

Следуя Голди, мы будем модуль M_R называть *конечномерным*, если в нем не существует бесконечного числа отличных от нуля подмодулей, образующих прямую сумму. Очевидно, что все нётеровы и все артиновы модули являются конечномерными.

Предложение 2. Пусть M_R — конечномерный модуль. Тогда

(1) его инъективная оболочка I_R является прямой суммой конечного числа неразложимых инъективных модулей;

(2) кольцо H эндоморфизмов модуля I_R полусовершенно.

Напомним, что полусовершенство означает полную приводимость кольца H/N и возможность поднимать идемпотенты по модулю $N = \text{Rad } H$.

Доказательство. (1) Рассмотрим произвольное ортогональное множество E отличных от нуля идемпотентов кольца H . Тогда $\sum_{e \in E} eI \cap M$ — прямая сумма ненулевых подмодулей модуля M_R . В силу предположения множество E должно быть конечным. Мы дважды применим это соображение.

Сначала мы покажем, что множество eHe для любого идемпотента $e \in H$, $e \neq 0$, содержит примитивный

¹⁾ Отметим, что если S' и T' — большие подмодули в S и T соответственно, то $S' + T'$ — большой подмодуль в прямой сумме $S + T$. Действительно, пусть V — ненулевой подмодуль в $S + T$. Если $0 \neq v \in V$, то $v = s + t$, где $s \in S$, $t \in T$. Если $s = 0$, то $0 \neq v\lambda = t\lambda \in V \cap T'$ для некоторого $\lambda \in R$. Если же $s \neq 0$, то $0 \neq v\lambda = \lambda s \in V \cap S'$. Если же $t\lambda \neq 0$, то $0 \neq t\lambda\mu \in T'$ для некоторого $\mu \in R$, откуда $0 \neq v\lambda\mu = s\lambda\mu + t\lambda\mu \in V \cap (S' + T')$. — Прим. перев. и ред.

²⁾ $(f - eu)L' = (e + eu(1 - e) - eu)L' = (e - eue)L' = (e - eue)\mu_L = [e(\mu - \mu^2) + eu(\mu - eu)]L = 0$. — Прим. ред.

идемпотент. Действительно, если идемпотент e не является примитивным, то eHe содержит ненулевой идемпотент $f_1 \neq e$. Если f_1 не является примитивным идемпотентом, то $f_1 H f_1$ содержит ненулевой идемпотент $f_2 \neq f_1$ и т. д. Идемпотенты $e - f_1, f_1 - f_2, \dots$ образуют ортогональное множество, которое должно быть конечным.

Во-вторых, существует максимальное ортогональное множество $e_1, e_2, \dots, e_n$ примитивных идемпотентов. Пусть e — их сумма. Предположим, что $e \neq 1$. Тогда множество $(1 - e)H(1 - e)$ содержало бы примитивный идемпотент, ортогональный к e , а следовательно, и ко всем e_i , что противоречит максимальнойности.

Таким образом, $1 = \sum_{i=1}^n e_i$. Следовательно, $I = \sum_{i=1}^n e_i I$, при этом каждое слагаемое — неразложимый модуль.

(2) Так как любой примитивный идемпотент кольца H остается примитивным по модулю N (см. упражнение 3.6.3), то в кольце H/N также остается справедливым утверждение о том, что 1 является конечной суммой примитивных идемпотентов. Таким образом, H/N является прямой суммой конечного числа неразложимых правых идеалов. Так как кольцо H/N регулярное, то эти идеалы являются минимальными правыми идеалами. Таким образом, кольцо H/N вполне приводимо. В силу предложения 1 можно поднимать идемпотенты по модулю идеала N . Следовательно, кольцо H полусовершенное.

Следствие 1. Пусть M_R — конечномерный модуль. Допустим, что все неразложимые компоненты инъективной оболочки модуля M_R изоморфны. Тогда кольца $H/\text{Rad } H$ и H изоморфны кольцам эндоморфизмов конечно порожденных свободных модулей над телом и над локальным кольцом соответственно.

Доказательство. Утверждение относительно $H/\text{Rad } H$ следует из классической теоремы Веддербёрна — Артина (предложение 3.4.6), а утверждение об H следует из предложения 3.7.4.

Следствие 2. Допустим, что все ненулевые подмодули модуля M_R являются большими. Тогда модуль I_R неразложим, а H — локальное кольцо¹⁾.

Более внимательное рассмотрение результатов этого параграфа показывает их справедливость в более общем случае. Джонсон и Уонг называют модуль M_R квазиинъективным, если каждый частичный эндоморфизм модуля M_R допускает продолжение до полного эндоморфизма, т. е. если для любых подмодуля K_R модуля M_R и $f \in \text{Hom}_R(K, M)$ имеем $gk = fk$, $k \in K$, для некоторого $g \in \text{Hom}_R(M, M)$. Таким образом, предложение 1 остается справедливым, если «инъективность» заменить на «квазиинъективность» (что отмечено в одном из приведенных ниже упражнений).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что подмодуль L' в доказательстве предложения 1 является большим.

2. Докажите, что каждый ненулевой подмодуль модуля M_R является большим тогда и только тогда, когда инъективная оболочка модуля M_R неразложима.

3. Если I_R — неразложимый инъективный модуль, то $\text{Hom}_R(I, I)$ — локальное кольцо.

4 (Джонсон). Если модуль I_R инъективен, $H = \text{Hom}_R(I, I)$ и $\text{Rad } H = 0$, то H_H — инъективный модуль. [Указание: Простейший путь — использовать упражнение 5.4.7.]

5. Рациональное пополнение $\bar{M}_R$ модуля M_R было определено как множество всех элементов инъективной оболочки I_R модуля M_R , аннулируемых всеми эндоморфизмами, которые аннулируют модуль M_R . Покажите, что $\bar{M}_R$ совпадает также с множеством всех элементов в I_R , которые инвариантны относительно всех автоморфизмов модуля I_R , относительно которых инвариантны все элементы модуля M_R .

6 (Джонсон и Уонг). Пусть I_R — инъективная оболочка модуля M_R и $H = \text{Hom}_R(I, I)$. Покажите, что модуль M_R квазиинъективен тогда и только тогда,

¹⁾ Учесть упражнение 2 и доказательство предложения 3.7.4. — Прим. ред.

когда $HM \subset M$. Выведите отсюда, что модуль HM_R является наименьшим квазиинъективным существенным расширением модуля M_R .

7 (Фейт и Утуми). Пусть M_R — квазиинъективный модуль. Предположим, что у подмодуля K_R модуля M_R нет существенных расширений в M . Покажите, что K_R является прямым слагаемым модуля M_R . Выведите отсюда, что K_R — также квазиинъективный модуль.

8. Используя приведенное выше упражнение, обобщите предложение 1 на случай квазиинъективных модулей.

Следующие упражнения основаны на статье Матлиса (1958) и на книге Лезье и Круазо (1963).

9. Подмодуль X модуля M_R называется *неразложимым в пересечение*, если из равенства $X = Y \cap Z$, где Y, Z — подмодули в M_R , следует, что $X = Y$ или $X = Z$. Покажите, что это равносильно неразложимости инъективной оболочки $I(M/X)$ модуля M/X . (См. упражнение 2.)

10. Пусть $X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ — пересечение подмодулей X_i в M_R , неразложимых в пересечение, и пусть $X_i \not\subset \bigcap_{j \neq i} X_j$. Покажите, что $I(M/X) = \sum_{i=1}^n I(M/X_i)$ (сумма прямая).

11. Пусть инъективный модуль I_R представлен двумя способами в виде прямой суммы неразложимых инъективных модулей

$$I = \sum_{i=1}^m I_i = \sum_{j=1}^n I'_j.$$

Тогда $m = n$ и $I_i \cong I'_{p(i)}$ для некоторой подстановки p чисел от 1 до m . [Указание: Используйте приведенное выше упражнение 3 и теорему Адзумайи; см. следствие к предложению 3.7.3.]

12. Пусть M_R — нётеров модуль. Назовем модуль M_R *однородным типа T* , если $I(M_R)$ является прямой суммой неразложимых инъективных модулей, изоморфных данному модулю T . Покажите, что если M/X и M/Y — однородные модули типа T , то и $M/(X \cap Y)$ —

однородный модуль типа T . Выведите отсюда, что любой нётеров модуль является подпрямым произведением конечного числа однородных модулей разных типов. [Указание: Представьте сначала 0 как пересечение конечного числа неразложимых в пересечение подмодулей модуля M_R .]

13. Пусть модуль M_R представлен двумя способами как несократимое подпрямое произведение однородных модулей различных типов,

$$0 = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_m = Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n.$$

Тогда $m = n$ и тип модуля M/X_i совпадает с типом модуля $M/Y_{p(i)}$ для некоторой подстановки p чисел от 1 до m .

14. Терциарный радикал модуля M_R состоит из всех элементов кольца R , аннулирующих некоторый большой подмодуль модуля M_R . Покажите, что терциарный радикал является идеалом кольца R , который не меняется при переходе от M_R к существенному расширению модуля M_R .

15. Пусть R — нётерово справа кольцо. Покажите, что терциарный радикал модуля M_R является правым аннулятором единственного большого подмодуля модуля M_R .

16. Если кольцо R нётерово справа или коммутативно, то терциарный радикал неразложимого инъективного R -модуля является первичным идеалом.

17. Если M_R — однородный и конечномерный модуль, то его терциарный радикал совпадает с терциарным радикалом любой неразложимой компоненты инъективной оболочки $I(M_R)$.

18. Если R — коммутативное кольцо и M_R — конечномерный модуль, то терциарные радикалы неразложимых компонент модуля $I(M_R)$ совпадают тогда и только тогда, когда M_R — однородный модуль.

§ 4.5. Регулярность кольца частных

Наша цель — получить некоторую информацию о кольцах частных на базе материала § 4.4. Соберем сначала воедино ряд фактов о так называемом «сингулярном подмодуле» Джонсона.

Предложение 1. Пусть $J(M_R)$ — множество всех элементов модуля M_R , аннулирующих большие правые идеалы кольца R . Тогда

(1) $J(M_R)$ есть F - R -подмодуль в ${}_F M_R$, где $F = \text{Hom}_R(M, M)$;

(2) $J(R_R)$ — идеал кольца R ;

(3) Если I_R — инъективная оболочка модуля R_R , то $J(I_R) = \text{Rad}({}_H I)$ (напомним, что $H = \text{Hom}_R(I, I)$);

(4) $I/J(I_R)$ и аддитивная группа регулярного кольца H/N , где $N = \text{Rad } H$, изоморфны.

Модуль $J(M_R)$ называется *сингулярным* подмодулем модуля M_R , а $J(R_R)$ — *правым сингулярным идеалом* кольца R .

Доказательство. Утверждение (1) проверяется точно так же, как утверждение (3) леммы 4.4.1, а (2) является частным случаем (1).

Для доказательства утверждений (3) и (4) возьмем эпиморфизм $\pi \in \text{Hom}_H(H, I)$, для которого $\pi h = h1$, $h \in H$, и который уже рассматривался в лемме 4.3.1. Пусть K — его ядро. Очевидно, что идеал N из предложения 4.4.1 совпадает с $\pi^{-1}J(I_R)$. Было показано, что $N = \text{Rad } H$. Следовательно, $I/J(I_R) \subseteq H/N$. Так как $K \subset N$, то из леммы 4.4.2 следует, что

$$J(I_R) = \pi \text{Rad } H = \text{Rad } \pi H = \text{Rad}({}_H I).$$

Предложение 2 (Джонсон). Пусть I_R — инъективная оболочка модуля R_R , $J(I_R)$ — сингулярный подмодуль модуля I_R , $H = \text{Hom}_R(I, I)$, $Q = \text{Hom}_H(I, I)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $J(R_R) = 0$.

(2) $J(I_R) = 0$.

(3) $\text{Rad } H = 0$.

(4) $\text{Rad}({}_H I) = 0$.

(5) Q — регулярное кольцо.

Доказательство. Так как $J(R_R) = J(I_R) \cap R$ и I_R — существенное расширение модуля R_R , то $(1) \Leftrightarrow (2)$. Из приведенного выше предложения 1 немедленно следует, что $(2) \Leftrightarrow (4)$. Так как $J(I_R) = \pi \text{Rad } H$, то $(3) \Rightarrow (2)$.

Докажем теперь, что $(5) \Rightarrow (1)$. Пусть L — большой правый идеал кольца R и, следовательно, большой подмодуль модуля Q_R . Допустим, что $rL = 0$ для $0 \neq r \in R$. Если Q — регулярное кольцо, то $rqr = r$ для некоторого элемента $q \in Q$. Следовательно, $qr \neq 0$. Поэтому $qrR \cap L \neq 0$. Таким образом, можно подобрать элемент $s \in R$, такой, что $0 \neq qrs \in L$. Но тогда $rs = rqs \in rL = 0$, что приводит к противоречию.

Наконец, показав, что из (2) следуют (3) и (5), мы закончим доказательство. Допустим, что $J(I_R) = 0$. Тогда

$$N = \{h \in H \mid h1 \in J(I_R)\} = \{h \in H \mid hR = 0\}.$$

Но N — идеал кольца H и, следовательно,

$$NI = NH1 \subset N1 = 0.$$

В силу предложения 4.3.1 получаем, что $I = 1Q$. Таким образом, выполнены эквивалентные условия предложения 4.3.3. В частности, идеал N , являющийся теперь ядром канонического эпиморфизма $h \rightarrow h1$ модуля ${}_H H$ на ${}_H I$, должен быть равен нулю. Следовательно, $Q \cong H = H/N$, а кольцо H/N регулярно в силу предложения 4.4.1.

Следствие. Если правый сингулярный идеал кольца R равен нулю, то модуль Q_Q инъективен.

Доказательство. Как мы только что видели в последней части доказательства, $I = 1Q$. По предложению 4.3.3 модуль Q_Q инъективен.

Предложение 3 (Голди). Если R — нётерово справа кольцо, то $J(R_R)$ — нильпотентный идеал.

Доказательство. Пусть $a \in J(R_R)$ и n — натуральное число. Рассмотрим правый «аннуляторный» идеал

$$(a^n)^r = \{x \in R \mid a^n x = 0\}.$$

Заметим, что $(a^n)^r \subset (a^{2n})^r$. Выберем m так, чтобы правый идеал $(a^m)^r$ был максимальным. Тогда $(a^m)^r = (a^{2m})^r$. Так как $a^m \in J(R_R)$, то правый идеал $(a^m)^r$ является большим.

Предположим теперь, что $a^m \neq 0$. Тогда $a^m R \cap \cap (a^m)^r \neq 0$. Следовательно, $a^m y \neq 0$ и $a^{2m} y = 0$ для некоторого элемента $y \in R$. Но это противоречит равенству $(a^m)^r = (a^{2m})^r$. Таким образом, $a^m = 0$.

Итак, $J(R_R)$ — ниль-идеал и, следовательно, в силу теоремы Левицкого (следствие к предложению 3.5.5) нильпотентный идеал.

Следствие. Если кольцо R нётерово справа и полупервично, то кольцо Q вполне приводимо.

Доказательство. В силу предложения 3 $J(R_R) = 0$. Следовательно, по предложению 2 $\text{Rad } H = 0$. Из доказательства предложения 2 следует выполнение эквивалентных условий предложения 4.3.3. В частности, $Q \cong H$. В силу предложения 4.4.2 кольцо $H/\text{Rad } H$ вполне приводимо.

Последний результат также восходит к Голди с той разницей, что он рассматривал вместо Q «классическое» правое кольцо частных кольца R . Этот случай мы изучим в следующей главе.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что $J(R_R) = 0$ тогда и только тогда, когда каждый большой правый идеал является плотным (см. § 4.3). Если кольцо R коммутативно, то $J(R_R) = 0$ тогда и только тогда, когда R — полупервичное кольцо.

2. Покажите, что композиция отображений

$$R \rightarrow I_R \rightarrow I/J(I_R) \rightarrow H/\text{Rad } H$$

является гомоморфизмом колец.

3 (Джонсон). Если I_R — инъективная оболочка модуля R_R , то

$$I/J(R_R) \cong \bigcup_L \text{Hom}_R(L, R)/\theta,$$

где L пробегает множество всех больших правых идеалов кольца R , а θ — отношение эквивалентности,

в котором $f \in \text{Hom}_R(L, R)$ и $f' \in \text{Hom}_R(L', R)$ находятся тогда и только тогда, когда они совпадают на некотором большом правом идеале, лежащем в $L \cap L'$.

4. Если R_R — конечномерный модуль, то кольцо Q является прямой суммой конечного числа неразложимых правых идеалов.

5 (Голди). Покажите, что следствие к предложению 3 можно усилить таким образом: если кольцо R полупервично, модуль R_R конечномерен и любое множество правых аннуляторов содержит максимальный элемент, то кольцо Q вполне приводимо.

6. Покажите, что терциарный радикал модуля M_R (см. упражнение 4.4.14) содержит все нильпотентные идеалы кольца R . Если R — коммутативное нётерово кольцо, то его терциарный радикал, сингулярный идеал и первичный радикал совпадают.

§ 4.6. Классические кольца частных

Элемент r кольца R называется *неделителем нуля*, если $sr \neq 0$ и $rs \neq 0$ для любого $0 \neq s \in R$. (Мы избегаем общепринятого термина «регулярный элемент», поскольку возможна путаница с другими использованиями слова «регулярный».)

Пусть R — подкольцо кольца S . Кольцо S называется *классическим правым кольцом частных* кольца R тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

(1) все неделители нуля кольца R обратимы в кольце S ;

(2) все элементы кольца S имеют вид ab^{-1} , где $a, b \in R$ и b — неделитель нуля кольца R .

Отнюдь не любое кольцо обладает классическим правым кольцом частных. Действительно, допустим, что S — классическое правое кольцо частных кольца R . Пусть $a, b \in S$ — элементы кольца S и b — неделитель нуля. В силу (2) $b^{-1}a = cd^{-1}$, где $c, d \in R$ и d — неделитель нуля. Таким образом, мы показали, полагая $c = a'$, $d = b'$, необходимость следующего условия:

Условие (Оре). Для любых элементов $a, b \in R$, где b — неделитель нуля, найдутся элементы $a', b' \in R$, где b' — неделитель нуля, такие, что $ab' = ba'$.

Известно, что это условие является и достаточным. Следующее доказательство этого факта использует полное правое кольцо частных Q кольца R .

Допустим, что выполнено условие Оре. Пусть b — неделитель нуля кольца R . Утверждаем, что bR является плотным правым идеалом.

Действительно, пусть $0 \neq r_1 \in R$ и $r_2 \in R$. В силу условия Оре при $r_2 = a$ существуют элементы $a', b' \in R$, где b' — неделитель нуля, такие, что $r_2 b' = ba'$ и, следовательно, $r_2 b' \in bR$. Так как b' — неделитель нуля, то $r_1 b' \neq 0$. Таким образом, в силу предложения 4.3.4 bR — плотный правый идеал.

Затем определим $f \in \text{Hom}_R(bR, R)$, полагая $fbr = r$. Заметим, что $br = br' \Rightarrow r = r'$. Поэтому в силу следствия 2 к предложению 4.3.5 $qb = fb = 1$ для некоторого элемента $q \in Q$. Таким образом, $(bq - 1)bR = 0$ и bR — плотный правый идеал. Отсюда $bq = 1$. (Напомним, что ненулевой элемент кольца Q не может аннулировать плотный правый идеал кольца R .) Итак, b — обратимый элемент кольца Q .

Пусть множество $Q_{cl} = Q_{cl}(R)$ состоит из всех элементов кольца $Q = Q(R)$ вида ab^{-1} , где $a, b \in R$ и b — неделитель нуля. Нетрудно заметить, что Q_{cl} — подкольцо кольца Q . Действительно,

$$ab^{-1} + cd^{-1} = (ad' + cb')(bd')^{-1},$$

где $bd' = db'$ и d' — неделитель нуля, и

$$(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac')(db')^{-1},$$

где $cb' = bc'$ и b' — неделитель нуля.

Из сказанного выше ясно, что Q_{cl} — классическое правое кольцо частных. Мы увидим, что оно в некотором смысле определено однозначно. Предположим, что S — некоторое классическое правое кольцо частных кольца R . Пусть элемент ab^{-1} из S соответ-

ствуем элементу ab^{-1} из Q_{cl} . Так как $ab^{-1} = 0$ в S или в Q_{cl} тогда и только тогда, когда $a = 0$, то указанное соответствие является изоморфизмом.

Следующее утверждение суммирует доказанное:

Предложение 1. *Кольцо R обладает классическим правым кольцом частных S тогда и только тогда, когда кольцо R удовлетворяет условию Оре. Более того, имеет место изоморфизм между кольцом S и*

$$Q_{cl} = \{ab^{-1} \in Q \mid a, b \in R \text{ \& } b \text{ — неделитель нуля}\},$$

индуцирующий тождественное отображение на R .

Обратим внимание на то, что условие Оре автоматически выполнено в коммутативном кольце R . Следовательно, коммутативные кольца обладают классическими кольцами частных (см. гл. 2).

Предложение 2. *Если каждый большой правый идеал кольца R содержит неделитель нуля и если модуль R_R конечномерен, то $Q = Q_{cl}$.*

Доказательство. Покажем, что кольцо Q удовлетворяет двум условиям определения классического правого кольца частных.

Заметим, что так как $J(R_R)$ состоит из аннуляторов больших правых идеалов, содержащих неделители нуля, то $J(R_R) = 0$. В силу предложения 4.5.2 Q — регулярное кольцо. Следовательно, каждый неделитель нуля кольца Q — обратимый элемент. (Действительно, пусть q — неделитель нуля в Q , тогда из равенства $q(q'q - 1) = 0$ следует, что $q'q = 1$ и т. д.) Более того, каждый неделитель нуля r кольца R является неделителем нуля в Q . (Действительно, из отношения $rq = 0$ вытекает, что $r(qR \cap R) = rq(q^{-1}R) = 0$ и, следовательно, $qR \cap R = 0$, а тогда $q = 0$. Если же $qr = 0$, то из равенства $rR \cap sR = 0$, где $s \in R$, следует, что сумма $\sum_{i \geq 0} r^i s R$ является прямой. Учитывая конечномерность модуля R_R , видим, что $s = 0$. Мы показали, что правый идеал rR является большим. Отсюда $q \in J(Q_R) \subseteq J(I_R) = 0$ в силу предложения 4.5.2.)

Таким образом, каждый неделитель нуля кольца R обратим в Q , что показывает справедливость первого условия.

Наконец, пусть q — элемент кольца Q . Тогда правый идеал $q^{-1}R$ является плотным и, следовательно, большим. Поэтому $q^{-1}R$ содержит неделитель нуля b из R . Таким образом, $qb = a \in R$. Но элемент b обратим в Q , следовательно, $q = ab^{-1}$. Это показывает справедливость второго условия.

Лемма 1. Пусть R — кольцо всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства над телом D . Элемент $r \in R$ обратим, если либо $rr' = 1$, либо $r'r = 1$ для некоторого элемента $r' \in R$.

Доказательство. Пусть V_D — конечномерное векторное пространство над телом D и $R = \text{Hom}_D(V, V)$. Допустим, что $rr' = 1$. Тогда $r(r'u) = u$ для любого $u \in V$. Следовательно, r — эпиморфизм. В силу предложения 1.4.8 r — автоморфизм векторного пространства V_D , т. е. r — обратимый элемент кольца R .

Допустим, что $r'r = 1$. Тогда $0 \neq v = r'(rv)$ для любого элемента $0 \neq v \in V$. Следовательно, $rv \neq 0$. Поэтому r — мономорфизм. В силу уже упоминавшегося предложения r — автоморфизм, т. е. обратимый элемент кольца R .

Предложение 3 (Голди). Если R — первичное кольцо и Q — вполне приводимое кольцо, то любой большой правый идеал кольца R содержит обратимый элемент кольца Q .

Доказательство. Пусть L — большой правый идеал кольца R , и пусть кольцо Q вполне приводимо. Напомним (предложение 3.5.2), что Q — нётерово слева регулярное кольцо. Таким образом, можно выбрать элемент $a \in L$, такой, что левый идеал Qa кольца Q является максимальным среди левых идеалов вида Qx , $x \in L$, а также такой элемент $a' \in Q$, что $aa'a = a$. Тогда элементы $e = aa'$ и $f = a'a$ являются идемпотентами. Убедимся, что они оба равны 1.

Рассмотрим произвольный элемент $b \in (1 - e)Q \cap L$. Тогда $e(a + b) = a$ и, следовательно, $Qa \subset \subset Q(a + b)$, где $a + b \in L$. Так как левый идеал Qa выбран максимальным, то $b \in Qa$. Таким образом, $(1 - e)Q \cap L \subset Qa$. Но $a(1 - f) = 0$ и, следовательно,

$$((1 - e)Q \cap L)((1 - f)Q \cap L) = 0.$$

Так как R — первичное кольцо, то один из правых идеалов равен нулю. Поскольку L — большой правый идеал, либо $e = 1$, либо $f = 1$.

Утверждение будет следовать теперь из леммы 1, если мы покажем, что Q является кольцом всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства (что означает в дополнение к полной приводимости простоту кольца Q ; см. теорему Веддербёрна — Артина, предложение 3.4.6).

Так как R — первичное кольцо, то его полное кольцо частных Q также первично. Действительно, если $q, q' \in Q$ и $qQq' = 0$, то $(qR \cap R)(q'R \cap R) = 0$. Следовательно, $qR \cap R = 0$ или $q'R \cap R = 0$. Отсюда вытекает, что либо $q = 0$, либо $q' = 0$, поскольку Q_R — существенное расширение модуля R_R . Так как Q является прямой суммой простых колец и первично, то Q — простое кольцо, что завершает доказательство.

Следствие 1. Если R — первичное кольцо, модуль R_R конечномерен и кольцо Q вполне приводимо, то $Q = Q_{cl}$.

Вытекает из предложений 3 и 2.

Следствие 2. Если кольцо R нётерово справа и первично, то Q_{cl} — простое вполне приводимое кольцо.

Это утверждение непосредственно вытекает из сказанного выше и следствия к предложению 4.5.3.

Показав, что полное кольцо частных нётерова справа первичного кольца является классическим, мы хотели бы распространить этот результат на полупервичные кольца. Сначала нам потребуются некоторые элементарные факты об «аннуляторных идеалах», уже обсуждавшиеся в коммутативном случае (см. § 2.4).

Сопоставим любому двустороннему идеалу A кольца R его левый аннулятор $\{r \in R \mid rA = 0\}$ и его правый аннулятор $\{r \in R \mid Ar = 0\}$. Очевидно, что оба эти множества являются идеалами. Если теперь R — полупервичное кольцо, то 0 является пересечением всех первичных идеалов. Следовательно, левый аннулятор идеала A состоит из элементов $r \in R$, принадлежащих всем первичным идеалам кольца R , не содержащим A ¹⁾. Симметрично то же самое утверждение справедливо для правого аннулятора идеала A . Отсюда следует их совпадение, что позволяет нам говорить об *аннуляторном идеале* A^* идеала A . Если B — аннуляторный идеал, то $(B^*)^* = B$.

Предложение 4. *Если R — полупервичное кольцо, то аннуляторные идеалы в R образуют полную булеву алгебру с пересечением в качестве нижней грани и $*$ в качестве дополнения. Если, кроме того, кольцо R нётерово справа, то эта булева алгебра конечна. Любой идеал, максимальный среди собственных аннуляторных, первичен.*

Доказательство. Первое утверждение уже было доказано в коммутативном случае (предложение 2.4.2). Доказательство в некоммутативном случае точно такое же и повторяться не будет. Во всяком случае, суть дела заключается в доказательстве того, что для двух аннуляторных идеалов A и B равенство $A \cap B^* = 0$ равносильно включению $A \subset B$.

Если R_R — нётеров модуль, то булева алгебра аннуляторных идеалов конечна. Действительно, если каждое множество элементов булевой алгебры содержит максимальный элемент, то, как легко видеть, булева алгебра конечна. Это оставляется в качестве упражнения²⁾.

¹⁾ Действительно, пусть A^l — левый аннулятор идеала A . P' и P'' — пересечения первичных идеалов, содержащих и не содержащих идеал A соответственно. Тогда $P''A \subseteq A \cap P'' \subseteq \subseteq P' \cap P'' = 0$, т. е. $P'' \subseteq A^l$. Если же I — первичный идеал и $A \not\subseteq I$, то $A^l A = 0 \subseteq I$, откуда $A^l \subseteq I$. Таким образом, $A^l \subseteq P''$. — *Прим. перев. и ред.*

²⁾ Учесть предложения 1.1.3, 3.5.2 и 3.4.6. — *Прим. ред.*

Наконец, пусть P — произвольный максимальный элемент в множестве всех собственных аннуляторных идеалов кольца R . Предположим, что $AB \subset P$, где A, B — некоторые идеалы. Тогда

$$A \subset P \cdot B = \{r \in R \mid rB \subset P\}.$$

Но $P \subset P \cdot B$. Так как P — аннуляторный идеал, то $P \cdot B$ также является аннуляторным идеалом, поскольку $P \cdot B = (P^*)^* \cdot B = (0 \cdot P^*) \cdot B = 0 \cdot (BP^*) = (BP^*)^*$ (см. следствие предложения 1.2.9). Значит, $P \cdot B = P$ или $P \cdot B = R$. В первом случае $A \subset P$, а во втором $B = RB = (P \cdot B)B \subset P$. Таким образом, P — первичный идеал, что и требовалось показать.

Предложение 5 (Голди). Пусть R — полупервичное нётерово справа кольцо и $P_1, P_2, \dots, P_n$ — его идеалы, максимальные среди собственных аннуляторных идеалов. Тогда полное правое кольцо частных $Q(R)$ изоморфно прямому произведению колец $Q(R/P_i)$, являющихся полными матричными кольцами над телами и $Q(R)$ является классическим правым кольцом частных кольца R .

Доказательство. Заметим сначала, что $P_1^*, \dots, P_n^*$ — все атомы (т. е. минимальные ненулевые элементы) конечной булевой алгебры B аннуляторных идеалов. Следовательно, их сумма равна единичному элементу алгебры B , т. е. равна R , откуда пересечение $\bigcap P_i$ равно $R^* = 0$.

Таким образом, каноническое отображение

$$\kappa: R \rightarrow \prod_{i=1}^n R/P_i$$

является мономорфизмом. Но R/P_i — нётерово первичное кольцо (см. упражнение 3.5.1), и, следовательно, его полное и классическое правые кольца частных являются полным кольцом матриц S_i над телом (см. следствие 2 предложения 3). Утверждается, что

$S = \prod_{i=1}^n S_i$ является как полным, так и классическим правым кольцом частных кольца κR .

Действительно, S совпадает со своим собственным полным правым кольцом частных (в силу предложения 4.3.9). Более того, как легко понять, переходя к S_i , каждый неделитель нуля в κR обратим в S . Остается проверить, что для любого элемента $s \in S$ найдется неделитель нуля c в κR , такой, что $sc \in \kappa R$.

Пусть $s = (s_1, \dots, s_n)$, где $s_i \in S_i$. Для каждого i найдется неделитель нуля a_i в R/P_i , такой, что $s_i a_i \in R/P_i$.

Рассмотрим теперь идеал $L_i = (P_i + P_i^*)/P_i$ в R/P_i . Идеал L_i отличен от нуля, поскольку в противном случае $P_i^* \subset P_i \cap P_i^* = 0$, а потому $P_i = 0^* = R$. Но в первичном кольце каждый ненулевой двусторонний идеал L является большим как правый идеал (так как из соотношения $L \cap rR = 0$ следовало бы, что $rL \subset \subset L \cap rR = 0$, а тогда $r = 0$). В частности, L_i — большой правый идеал и, следовательно, в силу предложения 3 содержит неделитель нуля b_i кольца R/P_i .

Положим $c = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$. Элемент c обратим в S . (Действительно, элемент $a_i b_i$ обратим в кольце S_i .) Наконец, c и $sc = (s_1 a_1 b_1, \dots, s_n a_n b_n)$ принадлежат κR , поскольку $a_i b_i$ и $s_i a_i b_i$ лежат в L_i и, как мы сейчас покажем,

$$\prod_{i=1}^n L_i \subset \kappa R.$$

Действительно, любой элемент из L_i имеет вид $\pi_i r_i$, где $r_i \in P_i^*$ и $\pi_i: R \rightarrow R/P_i$ — канонический эпиморфизм. Для любых $j \neq i$ справедливо включение $P_i^* \subset P_j$, и, следовательно, $\pi_j r_i = 0$. Полагая $r = r_1 + \dots + r_n$, убеждаемся в том, что

$$(\pi_1 r_1, \dots, \pi_n r_n) = (\pi_1 r, \dots, \pi_n r) = \kappa r,$$

а это заканчивает наше доказательство.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Обобщите предложение 1, заменяя множество всех неделителей нуля на некоторое множество неделителей нуля, которое замкнуто относительно конечных произведений.

2. Пусть B — булева алгебра, в которой каждое непустое подмножество содержит максимальный элемент. Покажите, что алгебра B конечна. Покажите также, что сумма атомов алгебры B равна 1.

3. Предположим, что кольцо R содержит в своем центре поле A и что каждый элемент r кольца R удовлетворяет полиномиальному уравнению

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

с коэффициентами из поля A . Покажите, что $Q_{cl}(R) = R$.

4 (Фейт). Покажите, что существуют конечные кольца, для которых $Q \neq Q_{cl}$. [Указание: Используйте упражнения 4.3.12.]

5 (Смолл). Пусть R — коммутативное кольцо, в котором каждое множество аннуляторных идеалов содержит максимальный элемент. Докажите следующие утверждения:

(а) Каждый максимальный собственный аннуляторный идеал является простым.

(б) Каждое множество аннуляторных идеалов содержит минимальный элемент.

(в) Число максимальных собственных аннуляторных идеалов конечно. [Указание: Надо заметить, что последовательность $P_1 \supset P_1 \cap P_2 \supset \dots$ стабилизируется.]

(г) Каждый делитель нуля принадлежит некоторому максимальному собственному аннуляторному идеалу.

(д) Идеал, состоящий целиком из делителей нуля, содержится в некотором максимальном собственном аннуляторном идеале. [Указание: Используйте упражнение 2.1.9.]

(е) Каждый плотный идеал содержит неделитель нуля.

(ж) $Q(R) = Q_{cl}(R)$.

§ 4.7. Теорема Фейта — Утуми

Мы имели дело до этого с вполне приводимым первичным кольцом Q . В силу теоремы Веддербёрна — Артина кольцо Q изоморфно кольцу всех

$(n \times n)$ -матриц над телом D . Читатель без труда проверит, что кольцо Q содержит элементы e_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$), для которых

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Элементы e_{ij} называются *матричными единицами*. Более того, можно считать, что тело D состоит из всех элементов кольца Q , которые перестановочны с e_{ij} , и что

$$Q = \sum_{i,j} e_{ij}D.$$

Легко показать, что

$$D \cong e_{11}Qe_{11},$$

при этом изоморфизм осуществляется взаимно обратными отображениями

$$\begin{aligned} d &\rightarrow de_{11} = e_{11}de_{11}, \\ e_{11}qe_{11} &\rightarrow \sum_i e_{11}(e_{11}qe_{11})e_{11} = \sum_i e_{11}qe_{11}. \end{aligned}$$

Под *правым порядком* S кольца Q будем понимать аддитивную подгруппу кольца Q , замкнутую относительно умножения, в которой для любого элемента $q \in Q$ существует элемент $s \in S$, обратимый в Q и такой, что $qs \in S$. Мы не предполагаем, что S содержит элемент 1. Таким образом, в нашей терминологии S не обязано быть подкольцом кольца Q . Фактически S вообще не обязано быть кольцом. Несложное упражнение — показать, что для любого конечного множества элементов $q_1, q_2, \dots, q_n$ кольца Q существует элемент $s \in S$, обратимый в Q и такой, что $q_i s \in S$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Исходя из данных правых порядков кольца D , легко построить правые порядки кольца Q . Так, пусть C — правый порядок в D , и пусть S — некоторая аддитивная подгруппа кольца Q , замкнутая относительно умножения и содержащая $\sum_{i,j} e_{ij}C$. Тогда S является правым порядком кольца Q . Действительно,

пусть $q = \sum e_{ij}d_{ij}$, $d_{ij} \in D$. Выберем элемент $c \in D$, обратимый в S и такой, что все $d_{ij}c \in S$. Тогда $qc = \sum e_{ij}(d_{ij}c) \in S$.

Кстати, никаких других правых порядков в кольце Q нет. Доказательство этого и составляет содержание следующей замечательной теоремы Фейта и Утуми.

Предложение. Пусть S — правый порядок во вполне приводимом первичном кольце Q . Тогда

$$\sum e_{ij}C \subset S \subset Q = \sum e_{ij}D,$$

где e_{ij} — полное множество матричных единиц кольца Q , D состоит из всех элементов кольца Q , перестановочных с элементами e_{ij} , и C — правый порядок в D .

Доказательство. Для начала напомним

$$Q = \sum e'_{ij}D',$$

где e'_{ij} образуют полное множество матричных единиц, а D' — ассоциированное тело. Пусть a — элемент из S , обратимый в Q и такой, что $e'_{ij}a \in S$. Тогда элементы $e_{ij} = a^{-1}e'_{ij}a$ образуют другое множество матричных единиц, $D = a^{-1}D'a$ является ассоциированным телом и $ae_{ij} \in S$.

Рассмотрим

$$A = \{s \in S \mid \forall_{i,j} se_{ij} \in S\},$$

$$B = \{s \in S \mid \forall_{i,j} e_{ij}s \in S\}.$$

Очевидно, что A и B являются аддитивными подгруппами в S и

$$SA \subset A, \quad Ae_{kl} \subset A, \quad BS \subset B, \quad e_{kl}B \subset B.$$

При этом A содержит ранее упоминавшийся обратимый элемент a , а B содержит некоторый обратимый элемент b из Q .

Положим теперь

$$C = \left\{ \sum_k e_{kl}qe_{lk} \mid q \in BA \right\}.$$

Тогда $C \subset D$ и

$$\sum_{i,j} Ce_{ij} = \sum_{i,j} e_{i1}Ce_{1j} \subset \sum_{i,j} e_{i1}BAe_{1j} \subset S,$$

поскольку $e_{i1}B \subset S$ и $Ae_{1j} \subset S$. Очевидно, что C является аддитивной подгруппой тела D , замкнутой относительно умножения. Фактически $C \cong e_{11}BAe_{11}$ (аддитивно и мультипликативно) при изоморфизме $D \cong e_{11}Qe_{11}$, который рассматривался в начале этого параграфа. Остается показать, что C является правым порядком в D или, эквивалентно, что $e_{11}BAe_{11}$ является правым порядком в $e_{11}Qe_{11}$.

Пусть для краткости $e_{11} = e$. Для заданного элемента $q \in eQe$ нам хотелось бы найти ненулевой элемент $x \in eBAe$, такой, что $qx \in eBAe$. Пусть элементы a и b такие же, как и выше. Выберем элемент $t \in S$, обратимый в Q и такой, что $b^{-1}qbt \in S$, т. е. $qbt \in bS$. Рассмотрим теперь $x \in ebtSae$. Тогда, конечно, $x \in eBAe$ и

$$qx \in eqebtSae \subset ebSae \subset eBAe.$$

Остается убедиться в том, что можно найти $x \neq 0$. Таким образом, нам надо показать, что $ebtSae \neq 0$. Поскольку a , b и t — обратимые элементы, $ebt \neq 0$ и $ae \neq 0$. Утверждение вытекает теперь из следующего замечания:

З а м е ч а н и е. Если S — правый порядок в простом кольце Q , а p и p' — ненулевые элементы кольца Q , то $pSp' \neq 0$.

Действительно, предположим, что $pSp' = 0$ и $p \neq 0$. Тогда $1 \in Q = QpQ$, поскольку Q — простое кольцо, и поэтому $1 = \sum_{i=1}^n q_i p q'_i$, где $q_i, q'_i \in Q$. Выберем элемент $s \in S$, обратимый в Q и такой, что все $q'_i s \in S$. Тогда

$$s = \sum_{i=1}^n q_i p q'_i s \in QpS.$$

Следовательно, $sp' \in QpSp' = 0$, и поэтому $p' = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Установите изоморфизм $D \cong e_{11}Qe_{11}$, о котором шла речь в начале этого параграфа. (См. также упражнение 3.5.6.)

2. Пусть задан правый порядок S кольца Q и конечное множество $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q$. Покажите, что существует такой элемент $s \in S$, обратимый в Q , что $q_1s, q_2s, \dots, q_ns \in S$.

3. Распространите теорему Фейта — Утуми на правые порядки во вполне приводимых кольцах, вообще говоря, не являющихся первичными.

4. Дайте более простое доказательство теоремы Фейта — Утуми в том частном случае, когда S является не только правым, но также и левым порядком в кольце Q . (При этом подходит любая система матричных единиц e_{ij} .)

5 (Бёргес). Покажите, что в кольце Q всех $(n \times n)$ -матриц над локальным кольцом L каждая обратимая матрица содержит в каждой строке и в каждом столбце обратимый элемент кольца L . Выведите отсюда, что теорема Фейта — Утуми остается справедливой и в кольце Q всех $(n \times n)$ -матриц над локальным кольцом.

ВВЕДЕНИЕ В ГОМОЛОГИЧЕСКУЮ АЛГЕБРУ

§ 5.1. Тензорное произведение модулей

Пусть A_R и ${}_R B$ — правый и левый R -модули. Построим их *тензорное произведение* $A \otimes_R B$.

Начнем с рассмотрения всех «формальных» сумм $\sum_{i=1}^n (a_i, b_i)$ пар элементов $a_i \in A$ и $b_i \in B$. Предполагается, что формальные суммы подчиняются законам коммутативности и ассоциативности относительно сложения. Тогда они образуют по сложению коммутативную полугруппу $S(A, B)$. Пусть теперь θ — наименьшая конгруэнция на $S(A, B)$, для которой

$$(a + a', b) \theta ((a, b) + (a', b)), \quad (1)$$

$$(a, b + b') \theta ((a, b) + (a, b')), \quad (2)$$

$$(ar, b) \theta (a, rb) \quad (3)$$

при всех $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ и $r \in R$. Таким образом, θ является пересечением всех отношений конгруэнтности на $S(A, B)$, обладающих свойствами (1) — (3).

Обычно класс эквивалентности обозначают через

$$\theta((a, b)) = a \otimes b.$$

Следовательно,

$$\theta\left(\sum_{i=1}^n (a_i, b_i)\right) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i,$$

и мы пишем

$$S(A, B)/\theta = A \otimes_R B.$$

Предложение 1. *Тензорное произведение $A \otimes_R B$ является абелевой группой по сложению.*

Доказательство. Так как θ — отношение конгруэнтности на полугруппе $S(A, B)$, то $A \otimes_R B$ также является полугруппой. Остается определить

$$0 = 0 \otimes 0$$

и

$$-\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n (-a_i) \otimes b_i,$$

что, кстати, в силу свойства (3) равно $\sum_{i=1}^n a_i \otimes (-b_i)$, и проверить обычные свойства. В силу (3) $0 \otimes b = 00 \otimes b = 0 \otimes 0b = 0 \otimes 0$. Тогда

$$(a_n \otimes b_n) + (0 \otimes 0) = (a_n \otimes b_n) + (0 \otimes b_n) = a_n \otimes b_n,$$

и, таким образом,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right) + (0 \otimes 0) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i.$$

Более того,

$$\begin{aligned} \sum a_i \otimes b_i + \left(-\sum a_i \otimes b_i \right) &= \sum (a_i \otimes b_i + (-a_i) \otimes b_i) = \\ &= \sum 0 \otimes b_i = \sum 0 \otimes 0 = 0 \otimes 0 = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим основные свойства аддитивной абелевой группы $A \otimes_R B$.

Пусть C — аддитивная абелева группа. Отображение $\Phi: A \times B \rightarrow C$ назовем *билинейным* отображением из $(A_R, {}_R B)$ в C , если

$$\Phi(a + a', b) = \Phi(a, b) + \Phi(a', b),$$

$$\Phi(a, b + b') = \Phi(a, b) + \Phi(a, b'),$$

$$\Phi(ar, b) = \Phi(a, rb)$$

при всех $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ и $r \in R$. (Через $A \times B$ здесь обозначено декартово произведение множеств A и B , а не их прямое произведение как групп!)

Ясно, что каноническое отображение $\pi: A \times B \rightarrow A \otimes_R B$, при котором $\pi(a, b) = a \otimes b$, является билинейным.

Предложение 2. Пусть Φ — билинейное отображение из $(A_R, {}_R B)$ в абелеву группу C . Тогда существует и притом единственный гомоморфизм $\varphi: A \otimes_R B \rightarrow C$, такой, что $\varphi \circ \pi = \Phi$.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{\varphi} & C \\ \uparrow \pi & \nearrow & \\ A \times B & & \end{array}$$

Доказательство. Положим

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right) = \sum_{i=1}^n \Phi(a_i, b_i).$$

Проверим, что φ — отображение. Определим конгруэнцию θ' на $S(A, B)$, полагая

$$\sum (a_i, b_i) \theta' \sum (a'_j, b'_j)$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum \Phi(a_i, b_i) = \sum \Phi(a'_j, b'_j).$$

Так как Φ — билинейное отображение, то θ' также удовлетворяет условиям (1) — (3). Например, из равенства

$$\Phi(ar, b) = \Phi(a, rb)$$

следует, что

$$(ar, b) \theta' (a, rb).$$

Но θ — наименьшая конгруэнция на $S(A, B)$, удовлетворяющая условиям (1) — (3). Следовательно, $\theta \leq \theta'$ в структуре конгруэнций на $S(A, B)$. Если

$$\sum a_i \otimes b_i = \sum a'_j \otimes b'_j,$$

т. е.

$$\sum (a_i, b_i) \theta \sum (a'_j, b'_j),$$

то

$$\sum (a_i, b_i) \theta' \sum (a'_j, b'_j),$$

т. е.

$$\sum \Phi(a_i, b_i) = \sum \Phi(a'_j, b'_j).$$

Из этого следует, что φ — действительно однозначное отображение.

Легко проверить, что φ — гомоморфизм. Наконец,

$$(\varphi \circ \pi)(a, b) = \varphi(a \otimes b) = \Phi(a, b).$$

Отсюда следует, что φ определено однозначно, что завершает доказательство предложения.

Напомним, что R - S -бимодуль ${}_R A_S$ является левым модулем ${}_R A$ и правым модулем A_S , причем

$$(ra)s = r(as)$$

для всех $r \in R$, $a \in A$ и $s \in S$.

Предложение 3. Пусть ${}_R A_S$, ${}_T B_S$ и ${}_T C_R$ — бимодули. Существует канонический способ превращения абелевых групп $F = \text{Hom}_S(A, B)$, $G = \text{Hom}_T(B, C)$ и $H = C \otimes_R A$ в бимодули ${}_T F_R$, ${}_S G_R$ и ${}_T H_S$ так, что

$$(fr)a = f(ra), \quad (tf)a = t(fa), \quad (1)$$

$$b(gr) = (bg)r, \quad b(sg) = (bs)g, \quad (2)$$

$$\left(\sum c_i \otimes a_i\right)s = \sum c_i \otimes a_i s, \quad t \sum c_i \otimes a_i = \sum t c_i \otimes a_i \quad (3)$$

для всех $a, a_i \in A$, $b \in B$, $c_i \in C$, $r \in R$, $s \in S$, $t \in T$, $f \in F$ и $g \in G$.

Заметим, что все условия (1)—(3) имеют вид законов ассоциативности или дистрибутивности. В случае (2) это было достигнуто тем, что мы пишем символ отображения g справа от аргумента.

Доказательство. Свойства (1) и (2) можно взять в качестве определения элементов fr и tf из F и элементов gr и sg из G . При этом в последних двух случаях использовано наше соглашение о записи действия элементов из G .

Если $h = \sum c_i \otimes a_i$, то вовсе не очевидно, что (3) корректно определяет элементы hs и th . Чтобы показать это, рассмотрим отображение $\Phi: C \otimes A \rightarrow H$, для которого $\Phi(c, a) = c \otimes as$. Легко проверить, что Φ — билинейное отображение из $(C_R, {}_R A)$ в H . Например, пусть $r \in R$. Тогда $\Phi(cr, a) = cr \otimes as = c \otimes ras = \Phi(c, ra)$.

В силу предложения 2 найдется, и притом единственный, гомоморфизм $\varphi: H \rightarrow H$, такой, что

$$\varphi h = \varphi \sum c_i \otimes a_i = \sum \Phi(c_i, a_i) = \sum c_i \otimes a_i s.$$

Равенство (3) означает, что $\varphi h = h s$ и, следовательно, корректно определяет элемент $h s$. Аналогичное рассуждение применимо к определению th .

Наконец, обычная проверка показывает, что ${}_T F_R$, ${}_S G_R$ и ${}_T H_S$ являются бимодулями.

Для более легкого запоминания предложения 3 мы часто будем писать

$$\begin{aligned} {}_T F_R &= {}_T B_S \oslash {}_R A_S \text{ (читается: } B \text{ над } A), \\ {}_S G_R &= {}_T B_S \oslash {}_T C_R \text{ (читается: } B \text{ под } C), \\ {}_T H_S &= {}_T C_R \otimes {}_R A_S, \end{aligned}$$

или более кратко,

$$F = B \oslash {}_S A, \quad G = B \oslash {}_T C, \quad H = C \otimes {}_R A,$$

где лишь последнее обозначение является стандартным. Иногда мы вовсе опускаем индексы S , T и R .

Обозначения $\oslash$ и $\oslash$ полезны не только в этой связи. Отметим лишь, что в ситуации ${}_R M_R$ и ${}_R N_R$ модули $N \oslash M$ и $M \oslash N$, вообще говоря, различные, не различаются стандартным обозначением $\text{Hom}_R(M, N)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Лишь в этих упражнениях будем говорить, что кольцо R является *расширением* кольца A тогда, когда задан гомоморфизм кольца A в R (который может и не быть мономорфизмом). В этом случае кольцо R естественно превращается в бимодуль ${}_A R_A$. Кольцо R называется *алгеброй* над коммутативным кольцом A , если образ указанного гомоморфизма лежит в центре кольца R .

1. Если R и S — алгебры над коммутативным кольцом A , то модуль $R \otimes_A S$ можно превратить в алгебру над кольцом A так, что $(r \otimes s)(r' \otimes s') = rr' \otimes ss'$ для всех $r, r' \in R$ и $s, s' \in S$.

2. Пусть ${}_R M_S$ есть R - S -бимодуль, где R и S — алгебры над коммутативным кольцом A . Допустим, что $at = ta$ для всех $a \in A$ и $t \in M$. Покажите, что ${}_R M_S$ можно «рассматривать» как правый модуль $M_{S \otimes R^0}$, где R^0 — кольцо, полученное из кольца R изменением порядка сомножителей при умножении.

3. Если R — простое кольцо и F — его центр, то R является неприводимым правым модулем над кольцом $T = R \otimes_F R^0$. Что можно извлечь при этом из теоремы плотности?

§ 5.2. Функторы Hom и $\otimes$

Пусть ${}_R A_S$ и ${}_R A'_S$ — бимодули над одними и теми же кольцами R и S . Отображение $\alpha: A \rightarrow A'$ называется *гомоморфизмом* бимодуля ${}_R A_S$ в бимодуль ${}_R A'_S$, если α — гомоморфизм модуля ${}_R A$ в ${}_R A'$ и модуля A_S в A'_S , т. е. если α — гомоморфизм аддитивной группы и $\alpha(as) = (\alpha a)s$, $r(\alpha a) = \alpha(ra)$ при всех $a \in A$, $s \in S$ и $r \in R$. К сожалению, обозначения не позволяют нам записать оба этих соотношения одновременно в виде законов ассоциативности. Иногда для симметрии мы пишем $\alpha a = a\alpha$.

Предложение 1. Пусть

$$\alpha: {}_R A_S \rightarrow {}_R A'_S, \quad \beta: {}_T B_S \rightarrow {}_T B'_S \quad \text{и} \quad \gamma: {}_T C_R \rightarrow {}_T C'_R$$

— заданные гомоморфизмы бимодулей. Тогда существуют канонические гомоморфизмы

$$\beta \oslash \alpha: {}_T B_S \oslash {}_R A'_S \rightarrow {}_T B'_S \oslash {}_R A_S,$$

$$\beta \oslash \gamma: {}_T B'_S \oslash {}_T C_R \rightarrow {}_T B_S \oslash {}_T C'_R,$$

$$\gamma \otimes \alpha: {}_T C_R \otimes {}_R A_S \rightarrow {}_T C'_R \otimes {}_R A'_S,$$

такие, что

$$(\beta \oslash \alpha) f = \beta \circ f \circ \alpha,$$

$$(\beta \oslash \gamma) g = \beta * g * \gamma,$$

$$(\gamma \otimes \alpha) \sum c_i \otimes a_i = \sum \gamma c_i \otimes \alpha a_i$$

для всех $f \in B \oslash {}_S A'$, $g \in B' \oslash {}_T A$, $c_i \in C$ и $a_i \in A$.

Напомним, что $*$ означает для символов операторов, записанных справа, то же, что $\circ$ для символов операторов, записанных слева. Таким образом,

$$b(\beta * g * \gamma) = ((b\beta)g)\gamma = \gamma((\beta b)g) \text{ для любых } b \in B.$$

(См. замечание в начале этого параграфа.) Обычные обозначения для $\beta \oslash \alpha$ и $\beta \oslash \gamma$ — это $\text{Hom}(\alpha, \beta)$ и $\text{Hom}(\beta, \gamma)$ соответственно.

Доказательство. Опустим стандартную проверку того, что отображение $f \mapsto \beta \circ f \circ \alpha$ определяет гомоморфизм бимодуля $B \oslash A'$ в $B' \oslash A$. Аналогично случай $\beta \oslash \gamma$ не вызывает иных трудностей, кроме трудностей с обозначениями. Остается показать, что соответствие $\sum c_i \otimes a_i \mapsto \sum \gamma c_i \otimes \alpha a_i$ задает гомоморфизм бимодуля $C \otimes A$ в $C' \otimes A'$.

Основная трудность состоит в доказательстве того, что оно определяет отображение. Это последнее следует из того, что $(c, a) \mapsto \gamma c \otimes \alpha a$ — билинейное отображение из $(C_R, {}_R A)$ в $C' \otimes {}_R A'$.

В формулировке следующего утверждения опустим индексы, предполагаемые такими же, как и в предложении 1.

Предложение 2. Пусть заданы гомоморфизмы бимодулей

$$\alpha: A \rightarrow A', \quad \beta: B \rightarrow B', \quad \gamma: C \rightarrow C'$$

и

$$\alpha': A' \rightarrow A'', \quad \beta': B' \rightarrow B'', \quad \gamma': C' \rightarrow C''.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\beta' \oslash \alpha) \circ (\beta \oslash \alpha') &= (\beta' \circ \beta) \oslash (\alpha' \circ \alpha), \\ (\beta \oslash \gamma') \circ (\beta' \oslash \gamma) &= (\beta' \circ \beta) \oslash (\gamma' \circ \gamma), \\ (\gamma' \otimes \alpha') \circ (\gamma \otimes \alpha) &= (\gamma' \circ \gamma) \otimes (\alpha' \circ \alpha). \end{aligned}$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости, например, первого равенства, применим левую часть к элементу $f \in B \oslash {}_S A''$ и получим, что

$$\beta' \circ (\beta \circ f \circ \alpha') \circ \alpha = (\beta' \circ \beta) \circ f \circ (\alpha' \circ \alpha),$$

а это в свою очередь совпадает также с результатом применения к f правой части. Другие два равенства доказываются аналогично.

Можно сформулировать более кратко полученные результаты, сказав, что $\otimes$, $\otimes$ и $\otimes$ — *функторы* двух переменных, при этом $\beta \otimes \alpha$ — *ковариантный* по β и *контравариантный* по α функтор, $\beta \otimes \gamma$ — *контравариантный* по β и *ковариантный* по γ функтор, а функтор $\gamma \otimes \alpha$ *ковариантен* по обоим аргументам. Мы не будем приводить строгих определений терминов «функтор», «ковариантный» и «контравариантный»¹⁾.

Следствие. Пусть 1 обозначает тождественное отображение бимодулей A, B или C . Тогда

$$\begin{aligned}(1 \otimes \alpha) \circ (\beta \otimes 1) &= \beta \otimes \alpha = (\beta \otimes 1) \circ (1 \otimes \alpha), \\ (1 \otimes \gamma) \circ (\beta \otimes 1) &= \beta \otimes \gamma = (\beta \otimes 1) \circ (1 \otimes \gamma), \\ (1 \otimes \alpha) \circ (\gamma \otimes 1) &= \gamma \otimes \alpha = (\gamma \otimes 1) \circ (1 \otimes \alpha).\end{aligned}$$

Имея в виду выполнение этих свойств, часто говорят, что $\otimes$, $\otimes$ и $\otimes$ — *бифункторы*.

Предложение 3. Если ${}_R A_S$, ${}_T B_S$, ${}_U C_R$ и ${}_T D_U$ — бимодули, то имеют место канонические изоморфизмы

$$\begin{aligned}\sigma_1: (D \otimes C) \otimes A &\cong D \otimes (C \otimes A), \\ \sigma_2: (B \otimes A) \otimes C &\cong B \otimes (C \otimes A), \\ \sigma_3: D \otimes (B \otimes A) &\cong (D \otimes B) \otimes A, \\ \sigma_4: C \otimes (D \otimes B) &\cong (D \otimes C) \otimes B, \\ \sigma_5: R \otimes A &\cong A (\cong A \otimes S), \\ \sigma_6: R \otimes A &\cong A (\cong A \otimes S),\end{aligned}$$

¹⁾ Пусть R — некоторое кольцо. Обозначим через ${}_R \mathfrak{M}$ совокупность всех левых R -модулей, а через ${}_R \mathfrak{H}$ совокупность всех гомоморфизмов модулей из ${}_R \mathfrak{M}$. Пару отображений $\Phi: {}_R \mathfrak{M} \rightarrow {}_S \mathfrak{M}$ и $\Phi: {}_R \mathfrak{H} \rightarrow {}_S \mathfrak{H}$ (обозначаемых одной и той же буквой) назовем *ковариантным* (*контравариантным*) *функтором*, если $\Phi(\text{Hom}_R(A, B)) \subseteq \text{Hom}_S(\Phi(A), \Phi(B))$, $\Phi(\alpha \circ \beta) = \Phi(\alpha) \circ \Phi(\beta)$ [$\Phi(\alpha \circ \beta) = \Phi(\beta) \circ \Phi(\alpha)$], где $\alpha, \beta \in {}_R \mathfrak{H}$, и $\Phi(1_A) = 1_{\Phi(A)}$ для всех $A \in {}_R \mathfrak{M}$. — Прим. ред.

такие, что

$$\begin{aligned}\sigma_1((d \otimes c) \otimes a) &= d \otimes (c \otimes a), \\ (\sigma_2 f_2)(c \otimes a) &= (f_2 c) a, \\ d((\sigma_3 f_3) a) &= (d f_3) a, \\ (d \otimes c)(\sigma_4 f_4) &= d(c f_4), \\ \sigma_5(r \otimes a) &= r a, \\ \sigma_6 f_6 &= 1 f_6,\end{aligned}$$

где $d \in D$, $c \in C$, $a \in A$, а f_i принадлежит области определения изоморфизма σ_i .

Доказательство. Легко убедиться в существовании этих отображений, а также в том, что они в действительности являются изоморфизмами. В качестве примера рассмотрим подробно отображения σ_2 и σ_5 .

Очевидно, что $(c, a) \rightarrow (f_2 c) a$ — билинейное отображение из $(C_R, {}_R A)$ в B . В силу предложения 5.1.2 существует отображение $f'_2: C \otimes A \rightarrow B$, такое, что $f'_2(c \otimes a) = (f_2 c) a$. Таким образом, получаем отображение $f_2 \rightarrow f'_2$, которое, очевидно, является гомоморфизмом T - U -бимодулей и которое можно обозначить через σ_2 .

С другой стороны, пусть $f'_2 \in B \otimes (C \otimes A)$. Тогда можно определить элемент $f_2 \in (B \otimes A) \otimes C$, положив $(f_2 c) a = f'_2(c \otimes a)$. Очевидно, что так определенное отображение $f'_2 \rightarrow f_2$ обратно к отображению $\sigma_2: f_2 \rightarrow f'_2$, которое, следовательно, является изоморфизмом.

Таким же образом $(r, a) \rightarrow r a$ — билинейное отображение из $(R_R, {}_R A)$ в A . В силу предложения 5.1.2 найдется такое отображение $\sigma_5: R \otimes A \rightarrow A$, что $\sigma_5(r \otimes a) = r a$. Как легко видеть, σ_5 является R - S -гомоморфизмом. Кроме того, очевидно, что σ_5 обратно к отображению $a \rightarrow 1 \otimes a$, и, следовательно, σ_5 — изоморфизм.

Канонические изоморфизмы предложения 3 обладают важным свойством, которое иллюстрируется следующей коммутативной диаграммой, связанной с σ_2 .

Пусть $\alpha: A \rightarrow A'$, $\beta: B \rightarrow B'$ и $\gamma: C \rightarrow C'$.

$$\begin{array}{ccc} (B \otimes A') \otimes C' & \xrightarrow{\sigma_2} & B \otimes (C' \otimes A') \\ (\beta \otimes \alpha) \otimes \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \otimes (\gamma \otimes \alpha) \\ (B' \otimes A) \otimes C & \xrightarrow{\sigma_2} & B' \otimes (C \otimes A) \end{array}$$

Чтобы убедиться в том, что эта диаграмма действительно коммутативна, рассмотрим элемент $f \in (B \otimes A') \otimes C'$ и применим $((\beta \otimes (\gamma \otimes \alpha)) \circ \sigma_2) f$ к

$\sum_{i=1}^n c_i \otimes a_i$, где $c_i \in C$ и $a_i \in A$. Непосредственная выкладка показывает, что это равно $\sum_{i=1}^n \beta((f(\gamma c_i))(\alpha a_i))$, что в свою очередь получается в результате применения $\sigma_2 \circ ((\beta \otimes \alpha) \otimes \gamma)$ к $\sum_{i=1}^n c_i \otimes a_i$.

Этот результат обычно формулируется более кратко следующим образом: изоморфизм σ_2 между функторами $(\beta \otimes \alpha) \otimes \gamma$ и $\beta \otimes (\gamma \otimes \alpha)$ является *естественным*. Практически это означает, что можно безболезненно отождествлять $(B \otimes A) \otimes C$ с $B \otimes (C \otimes A)$. Мы не будем приводить громоздкое определение «естественного» изоморфизма функторов (мы даже не определили, что такое «функтор»), но надеемся, что изложенное выше пояснит это понятие. Сформулируем без доказательства следующее утверждение.

Предложение 4. *Все канонические изоморфизмы предложения 3 естественны.*

Напомним, что $\sum^{\oplus}$ обозначает прямую сумму модулей.

Предложение 5. *Пусть дано семейство бимодулей $\{R_A^i \mid i \in I\}$ и бимодули ${}_T B_S$ и ${}_U C_R$. Тогда имеют*

место канонические изоморфизмы

$$\prod_{i \in I} (B \otimes A^i) \cong B \otimes \sum_{i \in I}^{\oplus} A^i, \quad (1)$$

$$\prod_{i \in I} (A^i \otimes B) \cong \left(\prod_{i \in I} A^i \right) \otimes B, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I}^{\oplus} (C \otimes A^i) \cong C \otimes \sum_{i \in I}^{\oplus} A^i. \quad (3)$$

Конечно, справедливы также и «зеркально двойственные» утверждения.

Доказательство. Чтобы построить изоморфизм (1), напомним (предложение 4.1.1), что для любого семейства гомоморфизмов $f_i \in \text{Hom}_S(A^i, B)$ существует, и притом единственный, гомоморфизм $f: A \rightarrow B$, такой, что $f \circ \kappa_i = f_i$, где $A = \sum_{i \in I}^{\oplus} A^i$, а $\kappa_i: A^i \rightarrow A$ — канонический гомоморфизм. Таким образом, получим взаимно однозначное соответствие между семействами гомоморфизмов $\{f_i: A^i \rightarrow B \mid i \in I\}$ и гомоморфизмами $\{f: A \rightarrow B\}$. Легко видеть, что это соответствие является T - R -изоморфизмом модуля $\prod_{i \in I} (B \otimes A^i)$ на $B \otimes A$. Таким образом, доказано (1), а (2) доказывается аналогично.

Используя те же обозначения, что и выше, рассмотрим теперь (3). Мы имеем гомоморфизмы

$$1_C \otimes \kappa_i: C \otimes A^i \rightarrow C \otimes A.$$

Тогда существует, и притом единственный, гомоморфизм $f: B \rightarrow C \otimes A$, такой, что $f \circ \lambda_i = 1_C \otimes \kappa_i$, где $B = \sum_{i \in I}^{\oplus} (C \otimes A^i)$, а $\lambda_i: C \otimes A^i \rightarrow B$ — канонические гомоморфизмы. Чтобы показать, что f — изоморфизм, найдем его обратный.

Если $a = \sum_{i \in I} \kappa_i a_i$ ($a_i \in A^i$) — произвольный элемент модуля A , то можно рассмотреть билинейное отображение $(c, a) \rightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i (c \otimes a_i)$ из $(C_R, {}_R A)$ в B . Сле-

довательно, существует гомоморфизм $g: C \otimes A \rightarrow B$, такой, что $g(c \otimes a) = \sum_{i \in I} \lambda_i(c \otimes a_i)$. Опустим стандартную проверку того, что g действительно является обратным к f . Заметим, что обе суммы, появлявшиеся в этом параграфе, являются конечными суммами, поскольку все, кроме конечного числа, a_i равны нулю.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим модуль характеров правого модуля M_R . Пусть $K = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ — рациональные числа по модулю 1. Рассмотрим бимодули ${}_Z M_R$ и ${}_Z K_Z$. Определим $M^* = M \otimes_Z K$ (см. также § 4.2). В силу предложения 5.1.3 ${}_R M_Z^*$ — бимодуль и, следовательно, левый модуль ${}_R M^*$. Аналогично убеждаемся в том, что модуль характеров левого модуля является правым модулем.

Пусть $\alpha: A_R \rightarrow B_R$ — некоторый R -гомоморфизм. Положим $\alpha^* = \alpha \otimes 1_K$. В силу предложения 1 $\alpha^*: {}_R B^* \rightarrow {}_R A^*$. В силу предложения 2 $*$ — контравариантный функтор. Таким образом, если $\beta: B_R \rightarrow C_R$, то $(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*$.

Пусть даны модули ${}_R C$ и D_R . Из предложения 3 вытекает существование изоморфизма

$$\sigma: C \otimes D^* \cong (D \otimes C)^*,$$

где

$$(d \otimes c) \sigma g = d(cg)$$

для $d \in D$, $c \in C$ и $g \in C \otimes D^*$. (Мы положили $B = K$ в σ_4 .) В силу предложения 4 изоморфизм σ является естественным, и, следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C' \otimes D'^* & \xrightarrow{\sigma'} & (D' \otimes C')^* \\ \gamma \otimes \delta^* \downarrow & & \downarrow (\delta \otimes \gamma)^* \\ C \otimes D^* & \xrightarrow{\sigma} & (D \otimes C)^* \end{array}$$

где $\gamma: C \rightarrow C'$ и $\delta: D \rightarrow D'$ — заданные гомоморфизмы, коммутативна.

Наконец, для любого семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ правых модулей из предложения 5 вытекает существование изоморфизма $\prod_{i \in I} A_i^* \cong \left(\sum_{i \in I}^{\oplus} A_i \right)^*$. Конечно, это же верно для левых модулей или даже для бимодулей.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите существование «канонического» гомоморфизма $A \rightarrow (B \otimes A) \otimes B$.

2. Проверьте предложенные вычисления, чтобы убедиться в том, что гомоморфизм σ_2 предложения 3 является естественным.

3. Докажите, что гомоморфизм σ_5 предложения 3 естественный.

4. Являются ли изоморфизмы предложения 5 естественными?

5. Укажите естественный гомоморфизм $A^* \otimes C \cong \cong (C \otimes A)^*$.

6. Покажите, что A^* выделяется прямым слагаемым в модуле A^{***} .

7 (Тевари). Если либо M_R , либо N_R — конечно порожденный проективный модуль, то канонический гомоморфизм $\sigma: N \otimes (R \otimes M) \rightarrow N \otimes M$ является изоморфизмом, где $\sigma(n \otimes f)m = n(fm)$ при всех $n \in N$, $f \in R \otimes M$, $m \in M$.

§ 5.3. Точные последовательности

Пусть временно A , B и C — аддитивные абелевы группы, модули или бимодули, а слово «гомоморфизм» следует понимать соответствующим образом. Пусть $f: A \rightarrow B$ — гомоморфизм. Будем говорить, что A — область определения гомоморфизма f , B — область значений гомоморфизма f ,

$$\text{Im } f = fA = \{fa \mid a \in A\}$$

— образ гомоморфизма f и

$$\text{Ker } f = f^{-1}0 = \{a \in A \mid fa = 0\}$$

— ядро гомоморфизма f .

Рассмотрим теперь пару (f, g) гомоморфизмов, у которой область значений гомоморфизма f совпадает с областью определения гомоморфизма g . Иллюстрацией этой ситуации может служить диаграмма

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Назовем такую пару *точной*, если $\text{Im } f = \text{Ker } g$, т. е.

$$\forall b \in B (\exists a \in A b = fa \Leftrightarrow gb = 0).$$

Более общим образом, назовем последовательность гомоморфизмов

$$\dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

точной, если каждая пара соседних гомоморфизмов точна, т. е. если $\text{Im } f_n = \text{Ker } f_{n+1}$ при всех возможных n . Такая последовательность может быть конечной или бесконечной в одном или в двух направлениях.

Если даны правые модули A_R , B_R и C_R , то пусть ${}_R A^*$, ${}_R B^*$ и ${}_R C^*$ — их модули характеров. Напомним, что $A^* = \text{Hom}_Z(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ и что любому гомоморфизму $f \in \text{Hom}_R(A, B)$ канонически сопоставляется гомоморфизм $f^* \in \text{Hom}_R(B^*, A^*)$, такой, что

$$(b^* f^*) a = b^* (fa),$$

где $a \in A$, $b^* \in B^*$.

Предложение 1. *Последовательность*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

является точной тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$C^* \xrightarrow{g^*} B^* \xrightarrow{f^*} A^*.$$

Доказательство. Пусть $b^* \in B^*$, тогда

$$b^* (\text{Im } f) = b^* (fA) = (b^* f^*) A$$

и, следовательно, $b^* \in \text{Ker } f^*$ тогда и только тогда, когда $b^* (\text{Im } f) = 0$. С другой стороны, $b^* \in \text{Im } g^*$ тогда

и только тогда, когда существует характер c^* модуля C , такой, что $b^* = c^*g^*$, т. е.

$$b^*b = (c^*g^*)b = c^*(gb)$$

для всех $b \in B$. Это соотношение равносильно тому, что $b^*(\text{Ker } g) = 0$. Действительно, если $b^*(\text{Ker } g) = 0$, то $gb \rightarrow b^*b$ — гомоморфизм модуля $\text{Im } g$ в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, который может быть продолжен до гомоморфизма $c^*: C \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, поскольку $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ — делимый и, следовательно, инъективный модуль.

Таким образом, из равенства $\text{Im } f = \text{Ker } g$ следует, что $\text{Ker } f^* = \text{Im } g^{*1}$). Обратно, допустив последнее равенство, получаем в силу изложенного выше²⁾, что

$$b^*(\text{Im } f) = 0 \Leftrightarrow b^*(\text{Ker } g) = 0.$$

Поскольку это имеет место при всех $b^* \in B^*$, можно утверждать, что $\text{Im } f = \text{Ker } g$, имея в виду следующее общее замечание:

ЛЕММА. Пусть D_R — подмодуль модуля B_R , b — элемент модуля B , не лежащий в D . Тогда существует характер b^* модуля B , для которого $b^*D = 0$ и $b^*b \neq 0$.

Доказательство. Применить лемму 4.2.2 к модулю B/D .

Следствие. Последовательность модулей точна тогда и только тогда, когда точна соответствующая последовательность модулей характеров (направленная в противоположную сторону).

Нулевой гомоморфизм модуля A в модуль B переводит каждый элемент модуля A в нулевой элемент модуля B . Пусть 0 обозначает группу или модуль, состоящие лишь из одного элемента. Тогда для любой группы или модуля A существует, и притом один, гомоморфизм $A \rightarrow 0$, а также гомоморфизм $0 \rightarrow A$ (в каждом из случаев это нулевой гомоморфизм).

¹⁾ Действительно, $b^* \in \text{Ker } f^* \Leftrightarrow b^*(\text{Im } f) = 0 \Leftrightarrow b^*(\text{Ker } g) = 0 \Leftrightarrow b^* \in \text{Im } g^*$. — Прим. ред.

²⁾ Из ранее доказанного вытекают импликации $b^*(\text{Im } f) = 0 \Leftrightarrow b^* \in \text{Ker } f^* \Leftrightarrow b^* \in \text{Im } g^* \Leftrightarrow b^*(\text{Ker } g) = 0$. — Прим. ред.

Что означает точность последовательностей:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B,$$

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0?$$

Очевидно, что точность первых трех последовательностей утверждает, что f является мономорфизмом, эпиморфизмом или изоморфизмом соответственно. Последняя, часто называемая *короткой точной последовательностью*, означает, что $f: A \rightarrow B$ — мономорфизм и что g — эпиморфизм модуля B на модуль C , индуцирующий изоморфизм $B/fA \cong C$. В частности, если $A \subset B$, имеем короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\kappa} B \xrightarrow{\pi} B/A \rightarrow 0,$$

где κ и π — канонические мономорфизм и эпиморфизм.

Рассмотрим теперь действие функторов $\otimes$ и Hom на короткие точные последовательности.

Предложение 2. Пусть дана короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow {}_R A_S \xrightarrow{f} {}_R B_S \xrightarrow{g} {}_R C_S \rightarrow 0.$$

Тогда для любых бимодулей ${}_T E_S$ и ${}_T D_R$ точны следующие последовательности:

$$0 \rightarrow A \otimes E \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes E \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes E, \quad (1)$$

$$0 \rightarrow E \otimes C \xrightarrow{1 \otimes g} E \otimes B \xrightarrow{1 \otimes f} E \otimes A, \quad (2)$$

$$D \otimes A \xrightarrow{1 \otimes f} D \otimes B \xrightarrow{1 \otimes g} D \otimes C \rightarrow 0. \quad (3)$$

Кроме того,

$g \otimes 1$ — эпиморфизм при всех эпиморфизмах g тогда и только тогда, когда E_S — проективный модуль; (1')

$1 \otimes f$ — эпиморфизм при всех мономорфизмах f тогда и только тогда, когда E_S — инъективный модуль; (2')

$1 \otimes f$ — мономорфизм при всех мономорфизмах f тогда и только тогда, когда ${}_R D^*$ — инъективный модуль. (3')

В формулировке этой теоремы индексы часто опускались. Вместо утверждений (1) и (2) часто говорят, что функтор Hom точен слева, в то время как вместо (3) говорят, что функтор $\otimes$ точен справа. Здесь, конечно, ${}_R D^*$ — модуль характеров модуля D_R . Само собой разумеется, что все остается справедливым, если заменить $A \not\subseteq E$, $D \otimes A$ и т. д. на их «зеркально двойственные» $E \not\subseteq A$, $A \otimes D$ и т. д. соответственно. (Однако стрелки должны быть обращены.)

Доказательство. (1) Ядро гомоморфизма $f \not\subseteq 1$ состоит из всех таких $p: E \rightarrow A$, что $f \circ p = 0$. Поскольку f — мономорфизм, это ядро равно 0.

Образ гомоморфизма $f \not\subseteq 1$ состоит из всех гомоморфизмов вида $f \circ p$, где $p: E \rightarrow A$. Ядро гомоморфизма $g \not\subseteq 1$ состоит из всех таких $q: E \rightarrow B$, что $g \circ q = 0$. Очевидно, что оно содержит образ гомоморфизма $f \not\subseteq 1$. Для доказательства равенства мы должны показать обратное включение. Итак, допустим, что $g \circ q = 0$. Тогда $\text{Im } q \subseteq \text{Ker } g = \text{Im } f$. Для любого элемента $e \in E$ мы можем, следовательно, определить pe как такой элемент a , для которого $fa = qe$ (единственность элемента a следует из того, что f — мономорфизм)¹⁾.

Наконец, образ гомоморфизма $g \not\subseteq 1$ состоит из всех гомоморфизмов вида $g \circ q$, где $q: E \rightarrow B$, т. е. из всех элементов $r \in C \not\subseteq E$, которые могут быть «подняты» до B :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & B \\ & \searrow r & \downarrow g - \text{эпиморфизм} \\ & & C \end{array}$$

Совпадение его со всем $C \not\subseteq E$ при произвольном эпиморфизме g равносильно проективности модуля E .

¹⁾ Мы имеем $fpe = qe$ для всех $e \in E$, т. е. $q = fp \in \text{Im } (f \not\subseteq 1)$. — Прим. ред.

(2) Ядро гомоморфизма $1 \oslash g$ состоит из всех гомоморфизмов $p: C \rightarrow E$, для которых $p \circ g = 0$. Поскольку g — эпиморфизм, $\text{Ker}(1 \oslash g) = 0$.

Образ отображения $1 \oslash g$ состоит из всех гомоморфизмов вида $p \circ g$, где $p: C \rightarrow E$. Ядро отображения $1 \oslash f$ состоит из всех гомоморфизмов $q: B \rightarrow E$, таких, что $q \circ f = 0$. Очевидно, что последнее ядро содержит образ гомоморфизма $1 \oslash g$. Для доказательства равенства мы должны показать обратное включение. Итак, допустим, что $q \circ f = 0$. Тогда $\text{Ker } g = \text{Im } f \subset \text{Ker } q$. Следовательно, для любого элемента $b \in B$ можем положить $p(gb) = qb$. Отсюда вытекает, что $q = p \circ g$.

Наконец, образ отображения $1 \oslash f$ состоит из всех гомоморфизмов вида $q \circ f$, где $q: B \rightarrow E$, т. е. из всех тех элементов $r \in E \oslash A$, которые могут быть «продолжены» до модуля B :

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{q} & B \\ & \nwarrow r & \uparrow f \\ & & A \end{array} \quad f - \text{мономорфизм}$$

Это совпадает со всем модулем $E \oslash A$ для произвольного мономорфизма f тогда и только тогда, когда модуль E инъективен.

(3) Напомним (см. предыдущий параграф), что канонический изоморфизм

$$\sigma: D^* \oslash A \rightarrow (D \otimes A)^*$$

является естественным. Следовательно, квадраты следующей диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & D^* \oslash C & \rightarrow & D^* \oslash B & \rightarrow & D^* \oslash A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & (D \otimes C)^* & \rightarrow & (D \otimes B)^* & \rightarrow & (D \otimes A)^* \end{array}$$

В силу (2) верхняя строчка точна. Поскольку вертикальные отображения — изоморфизмы, легко видеть, что нижняя строчка также точна. Следовательно, в силу предложения 1 точна последовательность (3).

Наконец, ввиду предложения 1 последовательность

$$0 \rightarrow D \otimes A \xrightarrow{1 \otimes f} D \otimes B$$

точна тогда и только тогда, когда точна нижняя строка следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} D^* \oslash B & \rightarrow & D^* \oslash A & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (D \otimes B)^* & \rightarrow & (D \otimes A)^* & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Это, кроме того, означает, что точна верхняя строчка. В силу утверждения (2') точность последней при всех мономорфизмах f равносильна инъективности модуля D^* .

Модуль D_R называется *плоским*, если для любого мономорфизма $f: {}_R A \rightarrow {}_R B$ индуцированный гомоморфизм $1 \otimes f: D \otimes {}_R A \rightarrow D \otimes {}_R B$ также является мономорфизмом. Грубо говоря, это означает, что если $A \subset B$, то $D \otimes A \subset D \otimes B$. Можно переформулировать утверждение (3') предложения 2 следующим образом:

Следствие. *Модуль D_R является плоским тогда и только тогда, когда его модуль характеров ${}_R D^*$ инъективен.*

Это же верно и в случае левых модулей.

Предложение 3. *Пусть даны бимодули ${}_R A_S$, ${}_T B_S$ и ${}_T C_R$. Тогда*

C_R проективен & A_S проективен $\Rightarrow (C \otimes A)_S$ проективен (1)

${}_T B$ инъективен & A_S проективен $\Rightarrow {}_T (B \oslash A)$ инъективен, (2)

B_S инъективен & ${}_R A$ плоский $\Rightarrow (B \oslash A)_R$ инъективен, (3)

C_R плоский & A_S плоский $\Rightarrow (C \otimes A)_S$ плоский. (4)

Конечно, также справедливы и «зеркально двойственные» варианты этих утверждений.

Доказательство. Это показывается с помощью критериев проективности, инъективности и

плоскости, приведенных в предложениях 2, и при этом используются естественные соотношения ассоциативности предыдущего параграфа. В качестве примера приведем доказательство утверждения (3).

Пусть последовательность $0 \rightarrow X_R \rightarrow Y_R$ точна. Тогда также точна и последовательность $0 \rightarrow X \otimes A \rightarrow Y \otimes A$, поскольку ${}_R A$ — плоский модуль. Так как B_S — инъективный модуль, то точна последовательность

$$B \otimes (Y \otimes A) \rightarrow B \otimes (X \otimes A) \rightarrow 0.$$

Используя естественный изоморфизм σ_2 предложений 5.2.3 и 5.2.4, легко показать, что последовательность

$$(B \otimes A) \otimes Y \rightarrow (B \otimes A) \otimes X \rightarrow 0$$

точна. Теперь в силу утверждения (1') предложения 2 модуль $B \otimes A$ инъективен.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если A — подмодуль модуля B , то модуль $(B/A)^*$ изоморфен подмодулю модуля B^* , состоящему из всех характеров, аннулирующих подмодуль A .

2. Выведите из предложения 1 лемму 4.2.3.

3. Дайте прямое доказательство точности справа функтора $\otimes$.

4. (а) Если $\kappa: A \rightarrow B$ — мономорфизм и $\varphi: C \rightarrow B$, то существование гомоморфизма $\psi: C \rightarrow A$, такого, что $\kappa \circ \psi = \varphi$, равносильно включению $\text{Im } \varphi \subseteq \text{Im } \kappa$.

(б) Если $\pi: B \rightarrow A$ — эпиморфизм и $\varphi: B \rightarrow C$, то существование гомоморфизма $\psi: A \rightarrow C$, такого, что $\psi \circ \pi = \varphi$, равносильно включению $\text{Ker } \pi \subseteq \text{Ker } \varphi$.

5. Пусть оба квадрата следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' \end{array}$$

коммутативны, а вертикальные отображения являются изоморфизмами. Покажите, что точность верхней строки равносильна точности нижней.

§ 5.4. Плоские модули

В предыдущем параграфе мы ввели понятие плоского модуля. Левый модуль ${}_R M$ был назван *плоским*, если для любого мономорфизма $\kappa: A_R \rightarrow B_R$ отображение $\kappa \otimes 1: A \otimes {}_R M \rightarrow B \otimes {}_R M$ также является мономорфизмом. Ранее мы показали, что если $\pi: B_R \rightarrow C_R$ — эпиморфизм, то всегда $\pi \otimes 1: B \otimes {}_R M \rightarrow C \otimes {}_R M$ — эпиморфизм.

Проще говоря, пусть $A \subset B$, и пусть образ отображения $\kappa \otimes 1$ обозначается через $[A \otimes M]$. Тогда $[A \otimes M]$ состоит из всех элементов абелевой группы $B \otimes M$ вида $\sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i$, где $a_i \in A$. Следует отличать $[A \otimes M]$ от $A \otimes M$. Фактически каноническое отображение $A \otimes M \rightarrow [A \otimes M]$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда M — плоский модуль. С другой стороны, всегда

$$(B \otimes M)/[A \otimes M] \cong B/A \otimes M.$$

Рассмотрим пример, показывающий причину отсутствия изоморфизма между $A \otimes M$ и $[A \otimes M]$.

Пример. Пусть $R = \mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел, B — аддитивная группа целых чисел, A — аддитивная группа четных чисел. Пусть $M = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ — аддитивная группа целых чисел по модулю 2. Тогда $[A \otimes M]$ состоит из всех элементов вида

$$\sum_{i=1}^n 2b_i \otimes m_i = \sum_{i=1}^n b_i \otimes 2m_i = 0,$$

где $b_i \in B = \mathbf{Z}$ и, следовательно, $[A \otimes M] = 0$. С другой стороны, $A \cong \mathbf{Z}$ и потому $A \otimes M \cong \mathbf{Z} \otimes M \cong M$.

Предложение 1. *Модуль ${}_R M$ является плоским тогда и только тогда, когда для любого правого идеала A кольца R имеет место канонический изоморфизм $A \otimes {}_R M \cong AM$. Утверждение остается справедливым, если A — произвольный конечно порожденный правый идеал.*

Доказательство. Напомним, что отображение $(r, m) \rightarrow rm$ осуществляет канонический изоморфизм $R \otimes M \cong M$. Если теперь ${}_R M$ — плоский модуль, то каноническое отображение $A \otimes M \rightarrow R \otimes M$ — мономорфизм и, следовательно, мономорфизмом является и результирующее отображение $A \otimes M \rightarrow M$. Так как образ последнего отображения, очевидно, равен AM , то из плоскости модуля M следует, что $A \otimes M \rightarrow AM$ — изоморфизм.

Обратно, допустим, что $A \otimes M \cong AM$. Следовательно, $A \otimes M \rightarrow M$ — мономорфизм. Тогда в силу предложения 5.3.1 $M^* \rightarrow (A \otimes M)^*$ — эпиморфизм. Так как абелевы группы $(A \otimes M)^*$ и $\text{Hom}(A, M^*)$ канонически изоморфны (см. предложение 5.2.3), то критерий инъективности (лемма 4.2.1) позволяет нам заключить, что модуль M_R^* инъективен и, следовательно, что ${}_R M$ — плоский модуль (см. следствие к предложению 5.3.2).

Предположим теперь, что наше допущение об изоморфизме $A \otimes M \cong AM$ относится лишь к конечно порожденным правым идеалам A . Покажем, что если B — произвольный правый идеал, то $B \otimes M \rightarrow M$ — все

же мономорфизм. Итак, допустим, что $\sum_{i=1}^n b_i m_i = 0$.

Тогда $\sum_{i=1}^n b_i \otimes m_i = 0$ в модуле $A \otimes M$, где $A = \sum_{i=1}^n b_i R$ — конечно порожденный правый идеал. Ввиду наличия канонического гомоморфизма $A \otimes M \rightarrow B \otimes M$ получаем, что и $\sum_{i=1}^n b_i \otimes m_i = 0$ в $B \otimes M$, что завершает доказательство.

Целесообразно теперь рассмотреть примеры плоских модулей. Очевидно, что ${}_R R$ — плоский модуль. Действительно, если A_R — подмодуль модуля B_R , то канонический изоморфизм $B \otimes {}_R R \cong B$ индуцирует канонический изоморфизм $A \otimes {}_R R \cong A$.

Предложение 2. Прямая сумма семейства левых R -модулей $\{M_i \mid i \in I\}$ является плоским модулем тогда и только тогда, когда каждый модуль M_i плоский.

Доказательство. Прямая сумма является плоским модулем тогда и только тогда, когда ее модуль характеров инъективен (см. следствие предложения 5.3.2), т. е. тогда и только тогда, когда модуль $\prod_{i \in I} M_i^*$ инъективен (предложение 5.2.5(1)). Но последнее означает инъективность каждого из модулей M_i^* (по предложению 4.2.2), т. е. плоскость каждого из модулей M_i .

Следствие. *Каждый свободный модуль и каждый проективный модуль является плоским.*

Доказательство. Свободный левый R -модуль является прямой суммой некоторого множества экземпляров модуля ${}_R R$, а проективный модуль — прямое слагаемое свободного модуля.

Поскольку каждый модуль изоморфен фактормодулю свободного модуля, следующий критерий плоскости представляет интерес.

Предложение 3. *Пусть ${}_R M \cong F/K$, где ${}_R F$ — плоский (в частности, свободный) модуль. Тогда модуль ${}_R M$ является плоским в том и только том случае, когда $AF \cap K = AK$ для любого правого идеала A . Утверждение остается справедливым, если A — любой конечно порожденный правый идеал.*

Замечание. Так как всегда $AK \subset AF \cap K$, то необходимым и достаточным условием плоскости является включение $AF \cap K \subset AK$.

Доказательство. В силу точности справа функтора $\otimes$ последовательность

$$A \otimes K \rightarrow A \otimes F \rightarrow A \otimes M \rightarrow 0$$

точна. Так как F — плоский модуль, то имеет место канонический изоморфизм $A \otimes F \cong AF$, а образ $A \otimes K$ в $A \otimes F$ при этом изоморфизме совпадает с AK . Следовательно, $A \otimes M \cong AF/AK$. Отсюда в силу предложения 1 M — плоский модуль тогда и только тогда,

когда $AM \cong AF/AK$ для любого правого идеала A или для любого конечно порожденного правого идеала A .

Во всяком случае, AM состоит из всех элементов вида

$$\sum_{i=1}^n a_i (f_i \pi) = \sum_{i=1}^n (a_i f_i) \pi,$$

где

$$\pi: {}_R F \rightarrow {}_R M, \quad f_i \in F, \quad a_i \in A.$$

Итак,

$$AM = (AF) \pi \cong AF/(AF \cap K).$$

Следовательно, M — плоский модуль тогда и только тогда, когда

$$AF/(AF \cap K) \cong AF/AK$$

для любого правого идеала A или для любого конечно порожденного правого идеала A . Так как $AK \subset AF \cap K$, то это равносильно тому, что $AF \cap K = AK$.

Следствие. Пусть R — кольцо, в котором каждый конечно порожденный идеал является главным. Пусть ${}_R M \cong F/K$, где F_R — свободный модуль. Тогда ${}_R M$ — плоский модуль в том и только том случае, когда $rF \cap K \subset rK$ при всех элементах $r \in R$.

Доказательство. Конечно порожденный правый идеал A предложения 3 в нашем случае имеет вид $A = rR$.

Над какими кольцами все модули плоские? Напомним, что кольцо называется регулярным, если для любого элемента r существует такой элемент r' , что $rr'r = r$.

Предложение 4. Каждый левый R -модуль является плоским тогда и только тогда, когда кольцо R регулярным.

Замечание. Поскольку регулярность — симметричное свойство, в этом предложении слово «левый» можно заменить на «правый».

Доказательство. (1) Пусть $r \in R$, и допустим, что R/Rr — плоский модуль. Тогда в силу

предложения 3 $A \cap Rr = Ar$ для любого правого идеала A . В частности, если $A = rR$, то $r \in rR \cap Rr = rRr$ и потому $r = rr'r$ для некоторого элемента $r' \in R$.

(2) Допустим, что R — регулярное кольцо. Пусть ${}_R M \cong F/K$, где ${}_R F$ — свободный модуль. Напомним, что каждый конечно порожденный правый идеал является главным (см. лемму Неймана из § 3.5). Таким образом, учитывая следствие предложения 3, нам надо лишь показать, что $rF \cap K \subset rK$. Пусть $k \in K \cap rF$. Тогда $k = rf = rr'r'f = rr'k \in rK$, где f — некоторый элемент из F , что завершает доказательство.

Можно применить следствие предложения 3 также и для доказательства того факта, что модуль над кольцом целых чисел является плоским тогда и только тогда, когда он без кручения. Понятие модуля без кручения может быть дано для произвольных областей целостности (при этом понятие области целостности допускает расширение и на некоммутативные кольца). Итак, назовем кольцо R *областью целостности*, если произведение двух ненулевых элементов кольца R отлично от нуля. Левый модуль ${}_R M$ называется тогда *модулем без кручения*, если из того, что $0 \neq r \in R$ и $0 \neq m \in M$, следует, что $0 \neq rm$.

Лемма. *Если R — область целостности, то каждый свободный R -модуль является модулем без кручения.*

Доказательство. Пусть ${}_R F$ — свободный модуль с базисом $\{f_i | i \in I\}$. Пусть $0 \neq r \in R$. Допустим, что $rf = 0$, где $f = \sum_{i \in I} r_i f_i$, причем все r_i , кроме конечного числа, равны нулю. Тогда $rr_i = 0$ при всех $i \in I$ и, следовательно, $r_i = 0$. Итак, $f = 0$, что и требовалось показать.

Предложение 5. *Пусть R — область целостности, в которой каждый конечно порожденный правый идеал является главным. Тогда левый R -модуль M является плоским в том и только том случае, когда M — модуль без кручения.*

Доказательство. Пусть ${}_R M \cong F/K$, где ${}_R F$ — свободный модуль. В силу следствия предложения 3

модуль ${}_R M$ плоский тогда и только тогда, когда

$$\forall_{0 \neq r \in R} \forall_{f \in F} (rf \in K \Rightarrow rf \in rK).$$

(Очевидно, что мы можем ограничиться элементами $r \neq 0$.) Так как F — модуль без кручения, то $rf \in rK$ в том и только том случае, когда $f \in K$. Следовательно, наше условие имеет вид

$$\forall_{0 \neq r \in R} \forall_{f \in F} (rf \in K \Rightarrow f \in K).$$

Заменяя F/K на M , можем записать, что

$$\forall_{0 \neq r \in R} \forall_{m \in M} (rm = 0 \Rightarrow m = 0),$$

а это и утверждает, что ${}_R M$ — модуль без кручения.

Этот результат можно вывести также и непосредственно из предложения 1.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что модуль ${}_R M$ является плоским тогда и только тогда, когда имеет место канонический изоморфизм $L \otimes M \cong LM$ для любого большого правого идеала L кольца R .

2. Пусть ${}_R M \cong F/K$, где ${}_R F$ — свободный модуль. Тогда ${}_R M$ — плоский модуль в том и только том случае, когда $LF \cap K = LK$ для любого большого правого идеала L .

3. Если B — левый идеал кольца R , то модуль R/B плоский тогда и только тогда, когда $rR \cap B = rB$ при всех $r \in R$.

4. Выведите предложение 5 непосредственно из предложения 1.

5. Пусть $\{K_i \mid i \in I\}$ — семейство подмодулей модуля M , линейно упорядоченное по включению, и пусть для любого $i \in I$ модуль M/K_i будет плоским. Если $K = \bigcup_{i \in I} K_i$, то модуль M/K также является плоским.

6 (Тевари). Если S — сумма всех $R \cdot A$, где A — идеал коммутативного кольца R , обратимый в Q (см. упражнение 4.3.14), то модуль S_R является плоским.

7 (Утуми). Если R — регулярное кольцо, модуль B_S инъективен и ${}_R A_S$ — некоторый R - S -бимодуль, то $\text{Hom}_S(A, B)$ — инъективный правый R -модуль. [Указание: Воспользуйтесь предложением 5.3.3(3).]

Следующие упражнения взяты из статьи Басса (1960).

8. Пусть N — идеал кольца R , последовательность $0 \rightarrow K_R \rightarrow P_R \rightarrow M_R \rightarrow 0$ точна и P_R — плоский модуль. Покажите, что $M \otimes N = PN/KN$.

9. Пусть R — полусовершенное кольцо, $N = \text{Rad } R$, $P \rightarrow M$ — проективное накрытие конечно порожденного модуля M_R с ядром K . Покажите, что $K \subset PN$ и $MN \cong PN/K$. [Указание: Используйте конструкцию модуля P в упражнении 4.2.15.]

10. Пусть R — такое кольцо, что $N = \text{Rad } R$ нильпотентен, а факторкольцо R/N вполне приводимо, и модуль M_R конечно порожден. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(а) Модуль M проективен.

(б) Модуль M плоский.

(в) Имеет место канонический изоморфизм $M \otimes N \cong MN$. [Указание: При доказательстве импликации (в) $\Rightarrow$ (а) используйте упражнения 8 и 9 для того, чтобы показать, что $KN = K$.]

§ 5.5. Функторы Tor и Ext

Пусть $\lambda \in \text{Hom}_R(A, B)$, тогда мы можем вместо λ писать $A \rightarrow B$ в том случае, когда нет других кандидатов на это обозначение. В следующей коммутативной диаграмме $A \rightarrow E$ соответствует лишь отображению $\beta \circ \lambda$, поскольку последнее равно $\lambda' \circ \alpha$.

Предложение 1. Пусть в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\lambda} & B & \xrightarrow{\mu} & C \\ \alpha \downarrow & & 1 & \downarrow \beta & 2 \downarrow \gamma \\ D & \xrightarrow{\lambda'} & E & \xrightarrow{\mu'} & F \end{array}$$

оба квадрата коммутативны, а верхняя и нижняя строчки — точные последовательности. Тогда

$$\frac{\text{Im}(B \rightarrow E) \cap \text{Im}(D \rightarrow E)}{\text{Im}(A \rightarrow E)} \cong \frac{\text{Ker}(B \rightarrow F)}{\text{Ker}(B \rightarrow C) + \text{Ker}(B \rightarrow E)}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Im } \beta \cap \text{Im } \lambda' &= \text{Im } \beta \cap \text{Ker } \mu' = \{\beta b \mid \mu' \beta b = 0\} = \\ &= \{\beta b \mid \gamma \mu b = 0\} = \beta \text{Ker } (\gamma \circ \mu), \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\beta \circ \lambda) = \beta \text{Im } \lambda = \beta \text{Ker } \mu = \beta(\text{Ker } \mu + \text{Ker } \beta).$$

Результат справедлив теперь в силу одной из классических теорем об изоморфизме в теории групп (предложение 1.4.2), поскольку очевидно, что

$$\frac{\beta \text{Ker } (\gamma \circ \mu)}{\beta(\text{Ker } \mu + \text{Ker } \beta)} \cong \frac{\text{Ker } (\gamma \circ \mu) / \text{Ker } \beta}{(\text{Ker } \mu + \text{Ker } \beta) / \text{Ker } \beta}.$$

Как мы убедимся, предложение 1 чрезвычайно полезно в популярной игре, называемой «диаграммным поиском». Вместо поиска элементов, как это принято обычно, мы предпочитаем осуществлять поиск квадратов. Для этих целей запишем наш результат более кратко:

$$\text{Im } 1 \cong \text{Ker } 2,$$

где 1 и 2 обозначают коммутативные квадраты диаграммы.

Чтобы подготовиться к нашему первому поиску, обозначим через A_R и ${}_R A'$ заданные R -модули. Можно найти плоские модули F_R и ${}_R F'$, а также эпиморфизмы $\pi: F \rightarrow A$ и $\pi': F' \rightarrow A'$, взяв, например, в качестве F и F' свободные модули. Пусть K и K' — ядра эпиморфизмов π и π' соответственно. Мы получили точные последовательности

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{\kappa} F \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow K' \xrightarrow{\kappa'} F' \xrightarrow{\pi'} A' \rightarrow 0,$$

где κ и κ' — отображения вложения. Положим теперь

$$X = \text{Ker}(K \otimes A' \rightarrow F \otimes A'), \quad X' = \text{Ker}(A \otimes K' \rightarrow A \otimes F')$$

и рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & \dashrightarrow & X' & \dashrightarrow X' \dashrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & 6 & \downarrow & 7 \downarrow \\
 & K \otimes K' \rightarrow & F \otimes K' \rightarrow & A \otimes K' \rightarrow & 0 & & \\
 & \downarrow & 4 \downarrow & 5 \downarrow & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & K \otimes F' \rightarrow & F \otimes F' \rightarrow & A \otimes F' \rightarrow & 0 & & \\
 \downarrow & \downarrow & 3 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & X \rightarrow & K \otimes A' \rightarrow & F \otimes A' \rightarrow & A \otimes A' \rightarrow & 0 & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 & X \dashrightarrow & 0 & 0 & 0 & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 & 0 & & & & &
 \end{array}$$

В силу точности справа функтора $\otimes$, характеристического свойства плоских модулей, а также в силу определения модулей X и X' все строки и столбцы в этой диаграмме являются точными последовательностями. Например, второй непунктирный столбец точен ввиду плоскости модуля F . Кроме того, нетрудно заметить, что все квадраты в диаграмме коммутативны. Например, результирующее отображение модуля $K \otimes K'$ в $F \otimes F'$ по одному пути равно

$$(1 \otimes \kappa') \circ (\kappa \otimes 1) = \kappa \otimes \kappa',$$

а по второму пути

$$(\kappa \otimes 1) \circ (1 \otimes \kappa') = \kappa \otimes \kappa'.$$

(Этот пример является иллюстрацией общего факта, по поводу которого обычно говорят, что $\otimes$ — *бифунктор*.) Пунктирные части диаграммы можно добавить безнаказанно.

Применим теперь к нашей диаграмме предложение 1. Получим тогда, что

$$\begin{aligned}
 X = \text{Ker } 1 &\cong \text{Im } 2 \cong \text{Ker } 3 \cong \text{Im } 4 \cong \\
 &\cong \text{Ker } 5 \cong \text{Im } 6 \cong \text{Ker } 7 = X'.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили результат, в котором участвуют лишь X и X' :

Предложение 2. Пусть $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$ — точная последовательность правых R -модулей, причем F_R — плоский модуль, и пусть $0 \rightarrow K' \rightarrow F' \rightarrow A' \rightarrow 0$ — точная последовательность левых R -модулей, а ${}_R F'$ — плоский модуль, тогда

$$\text{Ker}(K \otimes A' \rightarrow F \otimes A') \cong \text{Ker}(A \otimes K' \rightarrow A \otimes F').$$

Из двух абелевых групп, изоморфизм которых утверждается, первая не зависит от последовательности $0 \rightarrow K' \rightarrow F' \rightarrow A' \rightarrow 0$, в то время как вторая не зависит от последовательности $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$. Следовательно, и та и другая зависят лишь от A и A' . Это общее значение (с точностью до изоморфизма) обозначим через $\text{Tor}(A, A')$.

Если в доказательстве предложения 4 мы ограничимся лишь $\text{Im } 4$, то получим такое следствие к доказательству, симметрично выражающее функтор Tor :

Следствие.

$$\text{Tor}(A, A') \cong \frac{\text{Im}(K \otimes F' \rightarrow F \otimes F') \cap \text{Im}(F \otimes K' \rightarrow F \otimes F')}{\text{Im}(K \otimes K' \rightarrow F \otimes F')}.$$

Доказательство следующего предложения аналогично доказательству предложения 2, и мы опустим его.

Предложение 3. Пусть $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow B \rightarrow I \rightarrow I/B \rightarrow 0$ — точные последовательности правых R -модулей, где P_R — проективный, а I_R — инъективный модуль. Тогда

$$\frac{\text{Hom}(K, B)}{\text{Im}(\text{Hom}(P, B) \rightarrow \text{Hom}(K, B))} \cong \frac{\text{Hom}(A, I/B)}{\text{Im}(\text{Hom}(A, I) \rightarrow \text{Hom}(A, I/B))}.$$

Поскольку левая часть не зависит от последовательности $0 \rightarrow B \rightarrow I \rightarrow I/B$, а правая часть не зависит от последовательности $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$, и та и другая части зависят лишь от A и B . Общее значение (с точностью до изоморфизма) обозначим через

$\text{Ext}(A, B)$. Аналог сформулированного выше следствия оставляем в качестве упражнения.

Лемма 1. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A' & \xrightarrow{\lambda'} & B' \end{array}$$

Тогда существуют канонические гомоморфизмы $\varphi: \text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta$ и $\varphi': A'/\text{Im } \alpha \rightarrow B'/\text{Im } \beta$, такие, что следующие квадраты коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } \alpha & \xrightarrow{\varphi} & \text{Ker } \beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\lambda} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\lambda'} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'/\text{Im } \alpha & \xrightarrow{\varphi'} & B'/\text{Im } \beta \end{array}$$

Если, кроме того,

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\mu} & C \\ \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ B' & \xrightarrow{\mu'} & C' \end{array}$$

— другая коммутативная диаграмма, причем последовательности

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow 0$$

точны, то точны следующие последовательности:

$$\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma, \quad A'/\text{Im } \alpha \rightarrow B'/\text{Im } \beta \rightarrow C'/\text{Im } \gamma.$$

Доказательство. Для любого элемента $a \in \text{Ker } \alpha$ положим $\varphi a = \lambda a$. Очевидно, что это элемент из $\text{Ker } \beta$, поскольку

$$\beta(\lambda a) = \lambda'(\alpha a) = 0.$$

Затем, пусть $\pi: A' \rightarrow A'/\text{Im } \alpha$ и $\pi': B' \rightarrow B'/\text{Im } \beta$ — канонические эпиморфизмы. Для любого элемента $a' \in A'$ положим $\varphi'(\pi a') = \pi'(\lambda' a')$. Конечно, следует проверить, что φ' — однозначно определенное отобра-

жение. Итак, пусть $\pi a' = 0$. Тогда $a' = \alpha a$ для некоторого $a \in A$. Следовательно,

$$\pi'(\lambda' a') = (\pi' \circ \lambda' \circ \alpha) a = (\pi' \circ \beta \circ \lambda) a = 0.$$

Наконец, докажем точность последовательности ядер, оставив рассмотрение другой последовательности в качестве упражнения. Рассмотрим следующую диаграмму, в которой все квадраты коммутативны и все строчки, кроме пунктирной, являются точными последовательностями:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{Ker } \alpha & \xrightarrow{\dots \varphi} & \text{Ker } \beta & \xrightarrow{\dots \psi} & \text{Ker } \gamma \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \lambda & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\lambda} & B & \xrightarrow{\mu} & C \\
 & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \lambda' & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\lambda'} & B' & \xrightarrow{\mu'} & C'
 \end{array}$$

Наша цель — доказать точность пунктирной строки.

Теперь еще раз применим диаграммный поиск:

$$\text{Im } 1 \cong \text{Ker } 2 \cong \text{Im } 3.$$

Очевидно, что

$$\text{Im } 1 = \frac{\text{Ker } \beta \cap \text{Im } \lambda}{\lambda \text{ Ker } \alpha}$$

и

$$\text{Im } 3 = \frac{\text{Im } \alpha \cap \text{Ker } \lambda'}{\alpha \text{ Ker } \lambda}.$$

Но нам дано, что $\text{Ker } \lambda' = 0$. (Нам также дано, что $\text{Ker } \lambda = 0$, но это нам не потребуется.) Следовательно, $\text{Im } 1 \cong \text{Im } 3 = 0$, и поэтому

$$\text{Ker } \beta \cap \text{Im } \lambda = \lambda \text{ Ker } \alpha.$$

Теперь мы видим, что $\text{Im } \varphi = \lambda \text{ Ker } \alpha$ и $\text{Ker } \psi = \{b \in \text{Ker } \beta \mid \mu b = 0\} = \text{Ker } \beta \cap \text{Ker } \mu = \text{Ker } \beta \cap \text{Im } \lambda$. Следовательно, $\text{Im } \varphi = \text{Ker } \psi$, что завершает наше доказательство.

Пусть ${}_R C \rightarrow {}_R C'$ и $B_R \rightarrow B'_R$ — заданные гомоморфизмы модулей. Применим первую часть леммы I в следующих трех ситуациях:

$$\begin{array}{ccc} K \otimes C \rightarrow K \otimes C' & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ F \otimes C \rightarrow F \otimes C' & & \end{array} \quad \begin{array}{l} (F_R \text{ — плоский мо-} \\ \text{дуль, } F/K \cong A_R), \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(P, B) \rightarrow \text{Hom}(P, B') & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \text{Hom}(K, B) \rightarrow \text{Hom}(K, B') & & \end{array} \quad \begin{array}{l} (P_R \text{ — проективный} \\ \text{модуль, } P/K \cong A_R), \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B', I) \rightarrow \text{Hom}(B, I) & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \text{Hom}(B', I/A) \rightarrow \text{Hom}(B, I/A) & & \end{array} \quad \begin{array}{l} (I_R \text{ — инъективный} \\ \text{модуль, } A_R \subset I_R). \end{array} \quad (3)$$

Отсюда следует существование канонических гомоморфизмов

$$\text{Tor}(A, C) \rightarrow \text{Tor}(A, C'), \quad (1)$$

$$\text{Ext}(A, B) \rightarrow \text{Ext}(A, B'), \quad (2)$$

$$\text{Ext}(B', A) \rightarrow \text{Ext}(B, A). \quad (3)$$

Из второй части леммы вытекает теперь

Предложение 4. Пусть $0 \rightarrow C \rightarrow C' \rightarrow C'' \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow B \rightarrow B' \rightarrow B'' \rightarrow 0$ — точные последовательности левых и правых модулей соответственно. Тогда точны следующие последовательности:

$$\begin{aligned} \text{Tor}(A, C) &\rightarrow \text{Tor}(A, C') \rightarrow \text{Tor}(A, C''), \\ \text{Ext}(A, B) &\rightarrow \text{Ext}(A, B') \rightarrow \text{Ext}(A, B''), \\ \text{Ext}(B'', A) &\rightarrow \text{Ext}(B', A) \rightarrow \text{Ext}(B, A). \end{aligned}$$

В то время как этого результата можно было ожидать, следующий результат несколько более неожидан для начинающего читателя.

Предложение 5. В ситуации, описанной выше, имеют место «связывающие гомоморфизмы» $\cdots \rightarrow$,

превращающие следующие последовательности в точные:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}(A, C') &\rightarrow \operatorname{Tor}(A, C'') \rightarrow A \otimes C \rightarrow A \otimes C', \\ \operatorname{Hom}(A, B') &\rightarrow \operatorname{Hom}(A, B'') \rightarrow \operatorname{Ext}(A, B) \rightarrow \operatorname{Ext}(A, B'), \\ \operatorname{Hom}(B', A) &\rightarrow \operatorname{Hom}(B, A) \rightarrow \operatorname{Ext}(B'', A) \rightarrow \operatorname{Ext}(B', A). \end{aligned}$$

Доказательство. Это немедленно вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. Пусть дана диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & A & \longrightarrow & B & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & I & \longrightarrow & J & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ & 0 & & & & & \end{array}$$

в которой все строки и столбцы являются точными последовательностями, а все квадраты коммутативны. Тогда существует «связывающий гомоморфизм» $\dots \rightarrow$, такой, что точна последовательность $A \rightarrow B \rightarrow I \rightarrow J$.

Доказательство. Полагая

$$X = B/\operatorname{Im}(A \rightarrow B), \quad Y = \operatorname{Ker}(I \rightarrow J),$$

убеждаемся, что последовательности

$$A \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow Y \rightarrow I \rightarrow J$$

точны. Наша задача в этом случае — доказать, что $X \cong Y$. Часть нашей диаграммы можно расширить,

сохраняя точность и коммутативность, следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & X & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & 1 & & & \\
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 3 & & 2 & & & \\
 D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & 4 & & & & & \\
 G & \longrightarrow & H & & & &
 \end{array}$$

Применяя третий раз диаграммный поиск, получаем, что

$$X = \text{Im } 1 \cong \text{Ker } 2 \cong \text{Im } 3 \cong \text{Ker } 4.$$

Так как квадрат с номером 4 расположен в первоначальной диаграмме симметрично, то также и $Y \cong \text{Ker } 4$. Следовательно, $X \cong Y$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ.

$\text{Tor}(A, C) = 0$ для всех модулей $C \Leftrightarrow A$ — плоский модуль,

$\text{Ext}(A, B) = 0$ для всех модулей $B \Leftrightarrow A$ — проективный модуль,

$\text{Ext}(B, A) = 0$ для всех модулей $B \Leftrightarrow A$ — инъективный модуль.

Доказательство мы оставляем в качестве упражнения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В обозначениях предложения 3 покажите, что $\text{Ext}(A, B)$ и

$$\frac{\text{Ker}(\text{Hom}(P, I) \rightarrow \text{Hom}(K, I/B))}{\text{Ker}(\text{Hom}(P, I) \rightarrow \text{Hom}(P, I/B)) + \text{Ker}(\text{Hom}(P, I) \rightarrow \text{Hom}(K, I))}$$

изоморфны.

2. Если $B^* = \text{Hom}_Z(B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ — модуль характеров модуля B , то $(\text{Tor}(A, B))^* \cong \text{Ext}(A, B^*)$.

3. Проведите в деталях доказательство леммы 1.

4. Докажите следствие к предложению 5.

5. Пусть в следующей диаграмме все строки и столбцы — точные последовательности, а все квадраты коммутативны:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & X \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow G \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & H & \longrightarrow & I & \longrightarrow & J & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & Y & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & 0 & & & & &
 \end{array}$$

Докажите, что $X \cong Y$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Функциональные представления

Пусть Π — множество простых идеалов коммутативного кольца R . Каждому элементу $r \in R$ сопоставляется функция

$$\hat{r}: \Pi \rightarrow \bigcup_{P \in \Pi} R/P$$

на Π со значениями в объединении попарно не пересекающихся областей целостности R/P , где $\hat{r}(P)$ — канонический образ элемента r в R/P . Таким образом, получаем представление кольца R как кольца функций. Это представление будет точным тогда и только тогда, когда его ядро равно нулю,

$$\Delta\Pi = \bigcap_{P \in \Pi} P = 0.$$

Конечно, это бывает в том случае, когда кольцо R является подпрямым произведением областей целостности R/P . Можно также ввести топологию на множестве $\bigcup_{P \in \Pi} R/P$, относительно которой все функции $\hat{r}$ будут непрерывны, но мы не будем делать этого здесь.

Заметим, что $\hat{r}(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $r \in P$. В каких случаях функция $\hat{r}$ обращается в нуль не только на P , но и на некотором открытом множестве, содержащем P (см. § 2.2.5)? Достаточно рассмотреть базисное открытое множество Γ_s , $s \in R$, которое содержит P в том и только том случае, когда $s \notin P$. Таким образом, нас интересует множество $(\Delta\Pi)_P$ всех элементов r , для которых существует элемент $s \notin P$, такой, что $r \in P'$, если только $s \notin P'$. Дру-

гими словами, $s \notin P$ таков, что $rs \in P'$ для всех $P' \in \Pi$, т. е. $rs \in \Delta\Pi$. Более общим образом, для любого идеала A введем в рассмотрение множество

$$A_P = \{r \in R \mid \exists s \notin P, rs \in A\} = \{r \in R \mid r^{-1}A \not\subset P\},$$

где $r^{-1}A = \{s \in R \mid rs \in A\}$. В литературе обычно A_P называют P -компонентой идеала A .

Предложение 1. Если P — подмножество кольца R , дополнение которого содержит 1 и замкнуто относительно умножения, то A_P — идеал кольца R , содержащий A . Кроме того, из включения $A \subset P$ следует, что $A_P \subset P$.

Доказательство. Условие говорит о том, что $1 \notin P$ и $s_1, s_2 \notin P \Rightarrow s_1s_2 \notin P$.

Допустим, что $r_1, r_2 \in A_P$. Тогда существуют элементы $s_1, s_2 \notin P$, такие, что $r_1s_1 \in A$ и $r_2s_2 \in A$. Следовательно, $(r_1 + r_2)s_1s_2 \in A$ и $s_1s_2 \notin P$, отсюда $r_1 + r_2 \in A_P$.

Допустим, что $r_1 \in A_P, r_2 \in R$. Тогда существует элемент s_1 с указанными выше свойствами. Следовательно, $(r_1r_2)s_1 \in A$ и $s_1 \notin P$. Поэтому $r_1r_2 \in A_P$.

Допустим, что $a \in A$. Так как $1 \notin P$ и $a1 \in A$, то $a \in A_P$. Допустим, что $A \subset P$ и $r \in A_P$. Тогда $rs \in A \subset P$ для некоторого элемента $s \notin P$, и потому $r \in P$.

Заметим, что $R_P = R$, а если P — простой идеал, то $P_P = P$.

Предложение 2. Если Π содержит все максимальные идеалы коммутативного кольца R , то $\bigcap_{P \in \Pi} A_P = A$.

Доказательство. Пусть $r \in R$. В этом случае $r \in \bigcap_{P \in \Pi} A_P$ тогда и только тогда, когда $r \in A_P$ для всех $P \in \Pi$, т. е. $r^{-1}A \not\subset P$. Если теперь $r^{-1}A$ — собственный идеал, то он содержится в некотором максимальном идеале. Таким образом, только что сказанное означает, что $1 \in r^{-1}A$, т. е. $r \in A$.

Следствие. Если Π содержит все максимальные идеалы коммутативного кольца R , то R является прямым произведением колец R/P , где $P \in \Pi$.

Доказательство. Пусть $\hat{r}(P)$ — канонический образ элемента r в $R/0_P$. Ядро представления $r \rightarrow \hat{r}$ равно $\bigcap_{P \in \Pi} 0_P = 0$.

Замечание. Условие о том, что Π содержит все максимальные идеалы кольца R , может быть несколько ослаблено. На самом деле для справедливости следствия достаточно, чтобы для каждого ненулевого элемента r кольца R нашелся простой идеал $P \in \Pi$, такой, что $r^* = r^{-1}0 \subset P$.

Предложение 3. Если $\hat{r}: \Pi \rightarrow \bigcup_{P \in \Pi} R/0_P$ — каноническое представление элемента $r \in R$, то $\hat{r}$ обращается в нуль на P лишь в том случае, когда $\hat{r}$ обращается в нуль на некотором открытом множестве, содержащем P .

Доказательство. Пусть $\hat{r}(P) = 0$, т. е. $r \in 0_P$. Таким образом, существует элемент $s \notin P$, такой, что $rs = 0$. Пусть теперь $P' \in \Gamma_s$. Тогда $s \notin P'$ и, следовательно, $r \in 0_{P'}$. Итак, $\hat{r}(P') = 0$ для всех P' из базисного открытого множества Γ_s , содержащего P .

Рассмотрим теперь более внимательно кольца $R/0_P$. Напомним, что, согласно предложению 1, $0_P \subset P$.

Предложение 4. Если P — простой идеал коммутативного кольца R , то $P/0_P$ — простой идеал кольца $R/0_P$, содержащий все делители нуля кольца $R/0_P$.

Доказательство. Пусть $\pi: R \rightarrow R/0_P$ — канонический эпиморфизм. Допустим, что $\pi r_1 \pi r_2 \in \pi P$. Тогда $r_1 r_2 \in P$ и, следовательно, либо $r_1 \in P$, либо $r_2 \in P$, а поэтому либо $\pi r_1 \in \pi P$, либо $\pi r_2 \in \pi P$. Кроме того, $\pi 1 \notin \pi P$, поскольку $1 \notin P$. Следовательно, πP — простой идеал.

Допустим теперь, что $\pi r_1 \pi r_2 = 0$ и $\pi r_2 \neq 0$. Это означает, что $r_1 r_2 \in 0_P$, $r_2 \notin 0_P$. Таким образом, $r_2(r_1 s) = (r_1 r_2)s = 0$ для некоторого $s \notin P$. Так как

$r_2 \notin 0_P$, то $r_1 s \in P$ и, следовательно, $r_1 \in P$, а поэтому $\pi r_1 \in \pi P$.

Другие алгебраические свойства кольца $R/0_P$ можно вывести из топологических свойств точки P пространства Π . Говорят, что две точки топологического пространства *отделимы*, если они содержатся в непесекающихся открытых множествах. Если любые две различные точки отделимы, то топологическое пространство называется *хаусдорфовым*.

Предложение 5. Пусть Π — пространство простых идеалов коммутативного кольца R , такое, что $\Delta\Pi = 0$. Тогда точка P пространства Π отделима от всех других точек¹⁾ в том и только том случае, когда P — единственный элемент пространства Π , содержащий 0_P .

Если Π — множество всех максимальных идеалов, то это означает, что $R/0_P$ — локальное кольцо. Если же Π — множество всех простых идеалов, то это означает, что кольцо $R/0_P$ вполне примарно.

Доказательство. Заметим, что точки P и P' из Π отделимы тогда и только тогда, когда существуют элементы $r \notin P$ и $s \notin P'$, такие, что $\Gamma rs = \Gamma r \cap \Gamma s = \emptyset$, т. е. $rs \in \Delta\Pi = 0$. Можно записать это условие таким образом: $\exists_{s \notin P'} s \in 0_P$, т. е. $0_P \not\subset P'$. Итак, точки P и P' отделимы для всех точек $P' \neq P$ тогда и только тогда, когда $0_P \subset P' \Rightarrow P' = P$.

Следствие. Пространство максимальных (простых) идеалов коммутативного полупримитивного (полупервичного) кольца R хаусдорфово тогда и только тогда, когда $R/0_P$ — локальное (вполне примарное) кольцо для каждого максимального (простого) идеала P кольца R .

Как мы увидим, даже в том случае, когда кольцо $R/0_P$ не является локальным, существует локальное кольцо, тесно связанное с $R/0_P$. Как обычно, пусть

¹⁾ Это означает, что точки P и P' отделимы для всякой точки $P' \in \Pi$. — Прим. ред.

$Q(R)$ — полное кольцо частных кольца R . Для любого идеала A кольца R положим

$$A^P = \{q \in Q(R) \mid \exists s \in R^S \not\subseteq P \text{ и } qs \in A\} = \\ = \{q \in Q(R) \mid q^{-1}A \not\subseteq P\}.$$

Здесь $q^{-1}A = \{s \in R \mid qs \in A\}$, а P — такое же, как в предложении 1.

Предложение 6. Для произвольного коммутативного кольца R R^P является подкольцом кольца $Q(R)$, содержащим R , и A^P — идеалом кольца R^P , содержащим идеал A .

Таким образом, R^P является кольцом частных кольца R (см. § 2.2.3). В частности, если D — множество всех делителей нуля кольца R , то R^D — классическое кольцо частных кольца R . Заметим, что $A^P \cap R = A_P$.

Доказательство. Если $q_1, q_2 \in A^P$, то, как в доказательстве предложения 1, $q_1 + q_2 \in A^P$. Допустим, что $q_1 \in A^P$ и $q_2 \in R^P$. Тогда $q_1 s_1 \in A$ и $q_2 s_2 \in R$ для некоторых $s_1, s_2 \notin P$. Следовательно, $(q_1 q_2)(s_1 s_2) \in A$ и $s_1 s_2 \notin P$. Таким образом, $q_1 q_2 \in A^P$. Полагая $A = R$, убеждаемся в том, что R^P — кольцо. В общем случае A^P — идеал кольца R^P . Наконец, $A^P \supset A^P \cap R = A_P \supset A$.

Предложение 7. Если Π содержит все максимальные идеалы коммутативного кольца R , то

$$\bigcap_{P \in \Pi} A^P = A.$$

Доказывается так же, как предложение 2.

Предложение 8. Если все делители нуля коммутативного кольца R содержатся в простом идеале P , то R^P — локальное кольцо с максимальным идеалом P^P . Кроме того, $R^P \subset R^D$, где R^D — классическое кольцо частных кольца R .

Доказательство. Пусть $q \in R^P$ — необратимый элемент. Тогда либо q — делитель нуля, либо

в $Q(R)$ существует q^{-1} , не лежащий в R^{P^1}). Но $qs \in R$ для некоторого $s \notin P$. В первом случае qs — делитель нуля, а поэтому лежит в P и, таким образом, $q \in P^P$. Во втором случае для любого $t \in R$ из включения $q^{-1}t \in R$ следует, что $t \in P^2$). В частности, полагая $t = qs$, видим, что $qs \in P$, $s \notin P$, и, следовательно, опять $q \in P^P$. Наконец, из включения $D \subset P$ следует, что $R^P \subset R^D$.

Следствие. Если P — простой идеал коммутативного кольца R , то $(R/0_P)^{P/0_P}$ — локальное кольцо, содержащееся в классическом кольце частных кольца $R/0_P$.

Доказательство. Утверждение немедленно вытекает из предложений 8 и 4.

Предложение 9. Если P — подмножество коммутативного кольца R , дополнение которого содержит 1 и замкнуто относительно умножения, то с точностью до изоморфизма

$$R/0_P \subset R^P/0^P \subset (R/0_P)^{P/0_P}.$$

Доказательство. Так как $R \cap 0^P = 0_P$, то

$$R/0_P = R/(R \cap 0^P) \cong (R + 0^P)/0^P \subset R^P/0^P.$$

Рассмотрим элемент $\pi q \in R^P/0^P$, где $q \in R^P$, а π — канонический эпиморфизм. Тогда $qs \in R$, $s \notin R$, и, таким образом, $\pi q \pi s \in R/0_P$, $\pi s \notin R/0_P$. Ввиду предложения 4 πs не является делителем нуля. Следовательно, πq лежит в классическом кольце частных кольца $R/0_P$. Таким образом, $R^P/0^P$ можно рассматривать как подкольцо кольца $Q_{cl}(R/0^P)$. В силу приведенного выше следствия подкольцом кольца $Q_{cl}(R/0^P)$ является также и $(R/0_P)^{P/0_P}$. Поскольку в проведенных рассуждениях $\pi s \notin P/0_P$, то $R^P/0^P \subset (R/0_P)^{P/0_P}$.

¹⁾ Напомним, что согласно предложению 2.3.2, $Q(R)$ содержит $Q_{cl}(R)$. — *Прим. ред.*

²⁾ Действительно $q^{-1}t \in R$ влечет за собой $t \in (q^{-1})^{-1}R \subset P$, ибо $q^{-1} \notin R^P$. — *Прим. ред.*

Каждому элементу $q \in Q(R)$ можно было бы сопоставить функцию $\hat{q}$ со значениями в $\bigcup_{P \in \Pi} R^P/P^P$ или

в $\bigcup_{P \in \Pi} R^P/0^P$, полагая $\hat{q}(P)$ равным каноническому образу элемента q в R^P/P^P или в $R^P/0^P$. Это имеет смысл лишь тогда, когда $q \in R^P$. Таким образом, функция $\hat{q}$ определена не на всем пространстве Π , а лишь на его открытом подмножестве

$$V(q) = \{P \in \Pi \mid q \in R^P\} = \{P \in \Pi \mid q^{-1}R \not\subset P\} = \Gamma(q^{-1}R).$$

Нетрудно превратить объединение

$$S = \bigcup_{P \in \Pi} R/0_P$$

в топологическое пространство, рассматривая в качестве базиса открытых множеств множества

$$\hat{r}(V) = \{\hat{r}(P) \mid P \in V\},$$

где $r \in R$, а V — открытое подмножество пространства Π . Отсюда вытекает, что каждая точка $\hat{r}(P_0)$ пространства S содержится в открытом подмножестве, гомеоморфном своему образу в Π при канонической проекции $\hat{r}(P) \rightarrow P$. По этой причине S называется *пучком*, однако это понятие не будет нас интересовать здесь. Непрерывная функция $f: \Pi \rightarrow S$ называется *сечением*, если $f(P) \in R/0_P$ для каждого $P \in \Pi$. Основную роль в том, что следует далее, будет играть такое замечание: если два сечения совпадают в точке P_0 пространства Π , то они совпадают и на некотором открытом подмножестве, содержащем P_0 . Действительно, пусть $f(P_0) = g(P_0)$. Тогда эта точка пространства S содержится в открытом подмножестве U , которое гомеоморфно своему каноническому образу U' в Π . На открытом подмножестве $U' \cap f^{-1}U \cap \bigcap g^{-1}U$ как f , так и g совпадают с обратным отображением к канонической проекции $S \rightarrow \Pi$. Легко проверить, что $\hat{r}$ — сечение для каждого $r \in R$. Это в действительности послужило причиной такого способа введения топологии на S . Отнюдь не так очевидно обратное утверждение:

Предложение 10 (Гротендик). Если Π — множество всех простых идеалов, то любое сечение пространства S имеет вид $\hat{f}$, где $r \in R$.

В действительности Гротендик и Дьендонне (1960) доказали это утверждение для пучка локальных колец

$$\bigcup (R/0_P)^{P/0_P},$$

однако в нашем случае доказательство несколько проще. Основой доказательства будет следующая

Лемма. Пусть Π — множество всех простых идеалов кольца R и $r \in R$. В этом случае $r \in 0_P$ при всех $P \in \Gamma_S$ тогда и только тогда, когда $rs^n = 0$ для некоторого натурального числа n .

Доказательство леммы. Включение $r \in 0_P$ справедливо при всех $P \in \Gamma_S$ тогда и только тогда, когда $s \notin P$ влечет за собой $r^{-1}0 \not\subset P$, т. е. когда $s \in \bigcap_{r^{-1}0 \subset P} P$. Ввиду предложения 2.1.8 это равносильно тому, что $s^n \in r^{-1}0$, т. е. тому, что $rs^n = 0$ для некоторого n .

Доказательство предложения. Пусть $f: \Pi \rightarrow S$ — сечение. Так как для любого $P \in \Pi$ имеем

$$\hat{f}(P) = \hat{r}_P(P)$$

для подходящего $r_P \in R$, то $\hat{f} - \hat{r}_P$ обращается в нуль на некотором базисном открытом подмножестве Γ_{S_P} , содержащем P . В силу компактности (см. предложение 2.5.1) найдутся точки $P_1, P_2, \dots, P_m$, такие, что

$$\bigcup_{i=1}^m \Gamma_{S_{P_i}} = \Pi.$$

Будем писать s_i вместо s_{P_i} и r_i вместо r_{P_i} . Итак, $\hat{r}_i(P) = \hat{r}_j(P)$ при всех $i, j = 1, 2, \dots, m$ и $P \in \Gamma_{S_i} \cap \Gamma_{S_j} = \Gamma_{S_i S_j}$. В силу леммы найдутся натуральные числа $n(i, j)$, такие, что

$$(s_i s_j)^{n(i, j)} (r_i - r_j) = 0.$$

Полагая n равным максимальному из всех $n(i, j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$), получим, что $s_j^n s_i^n r_i = s_i^n s_j^n r_j$. Теперь

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^m \Gamma s_i = \bigcup_{i=1}^m \Gamma s_i^n = \Gamma \sum_{i=1}^m s_i^n R.$$

Следовательно, существуют элементы $t_i \in R$, для которых

$$\sum_{i=1}^m s_i^n t_i = 1.$$

Положим

$$r = \sum_{i=1}^m s_i^n r_i t_i.$$

Путем несложных вычислений получим, что $s_j^n r = s_j^n r_j$. Но $s_j \notin P_j$ и, следовательно, $s_j^n \notin P_j$, а тогда $r - r_j \in 0_{P_j}$ и поэтому $\hat{r} = \hat{r}_j$ при всех $j = 1, 2, \dots, m$. Таким образом, $\hat{r} = \hat{j}$, что завершает доказательство.

Аналогичный результат верен для

$$\bigcup_{P \in \Pi} R^P / 0^P.$$

УПРАЖНЕНИЯ

В упражнениях 1—9 R — коммутативное кольцо.

1. Покажите, что классическое кольцо частных кольца R — локальное кольцо тогда и только тогда, когда делители нуля кольца R образуют идеал.

2. Если P — минимальный простой идеал кольца R , то кольцо $R/0_P$ примарно.

3. Если P — простой идеал кольца R , то R^P — простой идеал кольца R^P , а $R^P/0^P$ — простой идеал кольца $R^P/0^P$, содержащий все его делители нуля.

4. Если R — регулярное кольцо, то $0_P = P$, $0^P = R^P$.

5. Покажите, что либо $\Delta\Pi$ — плотный идеал, либо $Q(R)$ — объединение всех R^P , $P \in \Pi$.

6. Приведите пример кольца, в котором $\Delta\Pi$ — плотный идеал.

7. Если A и B — идеалы кольца R , то положим

$$A^B = \{q \in Q(R) \mid \forall r \notin B \exists s \in R rs \notin B \text{ \& } qs \in A\}.$$

Покажите, что R^B — кольцо, а A^B — его идеал. Если B — простой идеал, то A^B совпадает с идеалом A^B , определенным ранее. Кроме того, $R^0 = Q(R)$.

8. Подмножество топологического пространства называется *плотным*, если оно пересекается с каждым непустым открытым подмножеством. Покажите, что подмножество V пространства Π плотно тогда и только тогда, когда $\Delta V = \Delta \Pi$.

9. Покажите, что подмножество $V(q)$ плотно тогда и только тогда, когда $q \in R^{\Delta \Pi}$, и что $\hat{q}$ обращается в нуль на плотном подмножестве тогда и только тогда, когда $q \in 0^{\Delta \Pi}$. Вывести отсюда, что кольцо $R^{\Delta \Pi}/0^{\Delta \Pi}$ допускает точное представление как кольцо функций, определенных на плотном открытом подмножестве пространства Π по модулю очевидного отношения эквивалентности.

В следующих упражнениях коммутативность кольца R не предполагается.

10. Покажите, что результаты этого приложения, в частности предложение 10, остаются справедливыми для любого ассоциативного кольца R , предполагая, что Π — множество всех простых идеалов центра кольца R .

11. Каждому максимальному правому идеалу M из R сопоставим идеал $0_M = \{r \in R \mid \forall x \in R \exists t \notin M rxt = 0\}$. Покажите, что 0_M — правый аннулятор инъективной оболочки правого R -модуля R/M .

12. Назовем кольцо R *метапримитивным* (Тьерен), если существует точный подпрямо неразложимый правый R -модуль. Покажите, что кольцо R метапримитивно тогда и только тогда, когда в R существует максимальный правый идеал M , такой, что $0_M = 0$. Выведите отсюда, что кольцо $R/0_M$ всегда метапримитивно.

13 (Тьерен). Покажите, что любое кольцо является подпрямым произведением метапримитивных колец, а каждое метапримитивное кольцо является

кольцом эндоморфизмов модуля ${}_L I$, где L — локальное кольцо. [Указание: Пусть I_R — инъективная оболочка модуля R/M , а $L = \text{Hom}_R(I, I)$.]

14. Пусть R — метапримитивное кольцо, а ${}_L I$ — определенный выше модуль. Докажите следующее: для любого конечно порожденного подмодуля G модуля ${}_L I$ и любого гомоморфизма $e \in \text{Hom}_L(G, R/M)$ существует элемент $r \in R$, такой, что $G(e - r) = 0$. (Аналогичный результат был доказан Тьерен (1960).)

Групповое кольцо

Излагаемый ниже материал о групповых кольцах почти целиком взят из статей Коннела (1963) и Пасмана (1962). Подобное этому изложение можно найти в записках лекций Рибенбойма (1965).

Из теории колец нам не требуется ничего, кроме гл. 3 и § 4.1 и 4.2 этой книги. С другой стороны, мы не будем теперь предполагать, что читатель не знаком с основами теории групп. Впрочем предполагаются известными лишь самые элементарные сведения о порядке конечной группы, смежных классах и нормальных делителях. Начнем с трех подготовительных утверждений из теории групп, которые не предполагаются известными.

Лемма А (Пуанкаре). *Пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса является подгруппой конечного индекса.*

Доказательство. Пусть H и K — подгруппы конечного индекса в группе G . Элементы a и b группы G принадлежат одному и тому же смежному классу по подгруппе $H \cap K$ тогда и только тогда, когда $ab^{-1} \in H \cap K$, т. е. когда $ab^{-1} \in H$ и $ab^{-1} \in K$. Таким образом, рассматривая все непустые пересечения правых смежных классов по подгруппе H с правыми смежными классами по подгруппе K , получим все правые смежные классы по подгруппе $H \cap K$.

Лемма В (Пасман). *Если группа G является объединением конечного числа правых смежных классов*

по подгруппам $H_1, \dots, H_n$, то индекс по крайней мере одной из подгрупп H_i конечен.

Доказательство. Проведем индукцию по n . Если все смежные классы по подгруппе H_n встречаются среди покрывающих смежных классов, то очевидно, что индекс подгруппы H_n конечен. Предположим, что класса $H_n g$ в рассматриваемом покрытии нет и что $H_n g_1, \dots, H_n g_k$ — множество всех смежных классов по H_n , встречающихся в этом покрытии. Так как пересечение $H_n g \cap H_n g_j$ пусто, то смежный класс $H_n g$ покрывается лишь смежными классами по подгруппам $H_1, \dots, H_{n-1}$. Следовательно, подгруппа H_n может быть покрыта конечным числом смежных классов по подгруппам $H_1, \dots, H_{n-1}$ (возможно, не входивших в первоначальное покрытие). Таким образом, группа G может быть покрыта конечным числом смежных классов по $n-1$ подгруппам, а тогда применимо индуктивное предположение.

Лемма С (Дитцман). Пусть M — такое конечное подмножество группы G , что $g^{-1}Mg \subset M$ при всех $g \in G$. Допустим, что порядки всех элементов множества M конечны. Тогда подгруппа, порожденная множеством M , также конечна.

Доказательство. Пусть k — число элементов множества M , t — наименьшее общее кратное порядков элементов этого множества и A — подгруппа группы G , порожденная множеством M . Достаточно доказать, что каждый элемент a подгруппы A можно представить в виде произведения не более чем $k(m-1)$ элементов из M .

Предположим, что $a = a_1 a_2 \dots a_t$, $a_i \in M$, $t > k(m-1)$. Тогда какой-либо из элементов множества M , скажем a_0 , встречается по крайней мере t раз. Пусть a_i — первый сомножитель произведения, такой, что $a_i = a_0$. Положим $a_0^{-1} a_j a_0 = a'_j$ при всех $j < i$. Тогда $a'_j \in M$ и

$$a = a_0 a'_1 \dots a'_{i-1} a_{i+1} \dots a_t.$$

Применяя эту же процедуру к первому среди оставшихся сомножителей $a_{i+1}, \dots, a_t$, равных a_0 , и повторяя ее затем, в конце концов придем к выражению

$$a = a_0^m a_1^* \dots a_{t-m}^* = a_1^* \dots a_{t-m}^*,$$

имеющему менее чем t множителей.

Получив эти стоящие несколько в стороне подготовительные результаты, дадим определение группового кольца. Пусть даны группа G и кольцо A . *Групповое кольцо* $R = AG$ состоит из всех функций $r: G \rightarrow A$ с конечным носителем. *Носителем* функции r называется множество $\{g \in G | r(g) \neq 0\}$. Кольцевые операции в R определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} 0(g) &= 0, \quad 1(g) = 1, \text{ если } g = 1, \\ &\quad \text{и } 1(g) = 0, \text{ если } g \neq 1, \\ (-r)(g) &= -r(g), \quad (r+r')(g) = r(g) + r'(g), \\ (rr')(g) &= \sum_{g=hh'} r(h) r'(h'). \end{aligned}$$

Оставляем в качестве упражнения проверку того, что $R(0, 1, -, +, \cdot)$ — действительно кольцо. (Как обычно, мы пишем rr' вместо $r \cdot r'$.)

Элементам $a \in A$ и $g \in G$ сопоставим элементы a^* и g^+ кольца $R = AG$: для любого $h \in G$ положим

$$\begin{aligned} a^*(h) &= a, \text{ если } h = 1, \text{ и } a^*(h) = 0, \text{ если } h \neq 1, \\ g^+(h) &= 1, \text{ если } h = g, \text{ и } g^+(h) = 0, \text{ если } h \neq g. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $a \rightarrow a^*$ — мономорфизм кольца A в кольцо R , $g \rightarrow g^+$ — мономорфизм полугруппы G в полугруппу R и

$$r = \sum_{g \in G} r(g)^* g^+ = \sum_{g \in G} g^+ r(g)^*$$

для любого элемента $r \in R$. Если положить $ra = ra^*$, то R превращается в свободный A -модуль R_A с базисом $\{g^+ | g \in G\}$.

С этого момента мы будем опускать символы $*$ и $+$. Таким образом,

$$r = \sum_{g \in G} r(g) g = \sum_{g \in G} g r(g)$$

для любого элемента $r \in R$. Отметим равенства

$$(rg)(h) = r(hg^{-1}), \quad (gr)(h) = r(g^{-1}h), \quad ga = ag$$

при всех $r \in R$, $g, h \in G$, $a \in A$.

Выясним, при каких условиях на группу G и кольцо A групповое кольцо $R = AG$ нётерово справа, артиново справа, регулярно, вполне приводимо и полупервично. В некоторых из этих случаев будет получен окончательный ответ.

Лемма 1. *Каждой подгруппе H группы G сопоставим правый идеал ωH кольца $R = AG$, порожденный всеми элементами $1 - h$, где $h \in H$. Отображение ω структуры подгрупп группы G в структуру правых идеалов кольца AG является точным¹⁾ и сохраняет объединение. Кроме того, если H — нормальный делитель, то ωH — идеал, являющийся к тому же ядром канонического эпиморфизма $AG \rightarrow A(G/H)$. Если подгруппа H порождается элементами $\{g_i\}$, то правый идеал, порожденный элементами $\{1 - g_i\}$, совпадает с ωH .*

Если $\pi: G \rightarrow G/H$ — каноническое отображение, то канонический эпиморфизм $AG \rightarrow A(G/H)$ переводит элемент $\sum_{g \in G} r(g)g$ в $\sum_{g \in G} r(g)\pi g$.

Доказательство этой леммы оставляется в качестве упражнения.

Предложение 1.

(а) *Если кольцо A нётерово справа, а группа G конечна, то кольцо AG нётерово справа.*

(б) *Если кольцо AG нётерово справа, то кольцо A нётерово справа и каждая возрастающая последовательность подгрупп группы G с некоторого момента стабилизируется.*

(в) *Если группа G абелева, то кольцо AG нётерово справа тогда и только тогда, когда кольцо A нётерово справа, а группа G конечно порождена.*

¹⁾ То есть $H_1 \neq H_2$ влечет за собой $\omega H_1 \neq \omega H_2$. — Прим. ред.

Доказательство. (а) Так как AG — конечно порожденный свободный A -модуль, то AG является нётеровым A -модулем и, следовательно, нётеровым справа кольцом.

(б) Кольцо $A \cong AG/\omega G$ нётерово справа. Кроме того, для любой возрастающей последовательности подгрупп $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ рассмотрим возрастающую последовательность $\omega H_1 \subset \omega H_2 \subset \dots$ правых идеалов кольца AG . В силу предположения существует такое n , что $\omega H_n = \omega H_{n+1} = \dots$, и, следовательно, в силу леммы 1 также $H_n = H_{n+1} = \dots$.

(в) Допустим, что G — конечно порожденная абелева группа и A — нётерово справа кольцо. Пусть $G \cong F/N$, где F — конечно порожденная свободная абелева группа. Тогда если AF — нётерово справа кольцо, то таким же будет и кольцо $AG \cong AF/\omega N$. Если $x_1, \dots, x_n$ — образующие группы F , то мы рассмотрим элементы $x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}$ в качестве $2n$ переменных. Следовательно, кольцо AF является гомоморфным образом кольца $A[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ многочленов от $2n$ переменных над кольцом A ¹⁾. Утверждение следует теперь из теоремы Гильберта о базисе (предложение 3.5.6).

Соберем вместе несколько утверждений о левом аннуляторе $(\omega H)^l$ правого идеала ωH кольца $R = AG$, где H — подгруппа группы G . В частности, подгруппа H может порождаться одним элементом g группы G .

ЛЕММА 2.

(а) Если H — бесконечная подгруппа группы G , то $(\omega H)^l = 0$.

(б) Если H — конечная подгруппа группы G , то $(\omega H)^l = R \left(\sum_{h \in H} h \right)$.

(в) Если группа G конечна, то $(\omega G)^l = \left(\sum_{g \in G} g \right) A$.

(г) Если порядок элемента $g \in G$ бесконечен, то $(1 - g)^l = 0$.

¹⁾ Аккуратнее было бы писать $A[y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_n, y'_n]$. — Прим. ред.

(д) Если порядок элемента $g \in G$ равен n , то $(1 - g)^l = R(1 + g + \dots + g^{n-1})$.

Доказательство леммы оставляем читателю в качестве упражнения.

Наш следующий результат в основном восходит к Машке.

ЛЕММА 3. Пусть $R = AG$, где порядок группы G равен n , а n — обратимый элемент кольца A . Тогда правый R -модуль проективен, если он проективен как A -модуль.

Доказательство. Пусть дан правый R -модуль P_R . Так как $A \subset R$, то P автоматически является A -модулем P_A . Допустим, что модуль P_A проективен. Мы хотим показать проективность модуля P_R .

Пусть $\pi: N_R \rightarrow M_R$ — эпиморфизм, а $\varphi: P_R \rightarrow M_R$ — гомоморфизм. Нам надо поднять φ до гомоморфизма $\varphi': P_R \rightarrow N_R$. В силу предположения существует такой гомоморфизм $\psi: P_A \rightarrow N_A$, что $\pi \circ \psi = \varphi$. Для любого элемента $p \in P$ положим $\varphi' p = n^{-1} \sum_{g \in G} \psi(pg) g^{-1}$. Не-

сложные вычисления показывают, что $\varphi'(ph) = (\varphi' p)h$ для любого $h \in G$. Отсюда следует, что φ' является R -гомоморфизмом. Кроме того, легко проверить, что $\pi(\varphi' p) = \varphi p$, а это завершает доказательство.

Следствие. Пусть $R = AG$, причем порядок группы конечен и равен n , а n — обратимый элемент кольца A . Тогда если A — регулярное кольцо, то и кольцо R регулярно.

Доказательство. В нашем случае R_A — конечно порожденный свободный A -модуль. Для любого элемента $r \in R$ правый идеал rR является прямым слагаемым модуля R_A ¹⁾. Таким образом, R/rR —

¹⁾ Заметим, что любой конечно порожденный подмодуль M_A свободного правого модуля F с базой $f_1, \dots, f_n$ над регулярным кольцом A выделяется прямым слагаемым. Действительно, пусть $F' = f_2 A + \dots + f_n A$, и пусть $\pi: F \rightarrow A$ — естественное отображение, индуцированное проектированием на первую координату. Тогда $\pi M = eA$, где $e^2 = e$ (см. § 3.5). В силу предложений 4.1.3

проективный A -модуль и, следовательно, в силу леммы 3 проективный R -модуль. Но тогда модуль rR является прямым слагаемым модуля R_R ¹⁾. Итак, R — регулярное кольцо.

Это утверждение является частью следующей теоремы, принадлежащей Ауслендеру, Маклафлину и Вильямайеру.

Предложение 2. *Групповое кольцо $R = AG$ регулярно тогда и только тогда, когда*

- (1) *кольцо A регулярно;*
- (2) *каждая конечно порожденная подгруппа группы G конечна;*
- (3) *порядок любой конечной подгруппы группы G обратим в кольце A .*

Доказательство. Допустим сначала, что кольцо R регулярно. Тогда регулярно и кольцо $A \cong R/\omega G$. Если H — конечно порожденная подгруппа группы G , то в силу леммы 1 ωH — конечно порожденный правый идеал и, следовательно, ωH — прямое слагаемое модуля R_R . (См. лемму из § 3.5.) Отсюда следует, что левый аннулятор правого идеала ωH отличен от нуля, и, следовательно, в силу леммы 2 H — конечная подгруппа. Наконец, пусть g — элемент порядка n . Поскольку кольцо R регулярно, можно найти элемент $r \in R$, такой, что $(1 - g)r(1 - g) = (1 - g)$, т. е.

$$(1 - (1 - g)r)(1 - g) = 0.$$

и 4.1.5 существует гомоморфизм $\gamma: eA \rightarrow M$, такой, что $\pi \circ \gamma = 1_{eA}$. Положим $c = \gamma(e)$, $d = f_1(1 - e)$ и $M' = \text{Ker } \pi \cap M$. Тогда $M = cA + M'$ (сумма прямая) и модуль M' конечно порожден. Поскольку $M' \subseteq F'$, в силу индуктивного предположения (при $n = 1$ утверждение следует из результатов § 3.5) имеем прямую сумму $F = M' + N'$ для некоторого подмодуля N' . Положим $N = dA + N'$. Если $x \in F$ и $\pi(x) = \xi$, то $\pi(x - c\xi - d\xi) = \xi - e\xi - (1 - e)\xi = 0$, т. е. $x - c\xi - d\xi \in F' = M' + N'$. Таким образом, $F = M + N$. Если $x \in M \cap N$, то $x = c\lambda + m' = d\mu + n'$, где $\lambda, \mu \in A$, $m' \in M'$, $n' \in N'$. Отсюда $\pi(x) = e\lambda = (1 - e)\mu$, т. е. $\pi(x) = 0$, и, следовательно, $c\lambda = \gamma(e\lambda) = 0$. Но тогда $d\mu \in f_1 A \cap F' = 0$, откуда $m' = n' = 0$. Итак, $x = 0$, т. е. сумма $F = M + N$ прямая. —

Прим. перев. и ред.

¹⁾ Достаточно рассмотреть точную последовательность правых R -модулей $0 \rightarrow rR \rightarrow R \rightarrow R/rR \rightarrow 0$. — *Прим. перев. и ред.*

Из леммы 2 следует, что

$$1 - (1 - g)r = r'(1 + g + \dots + g^{n-1})$$

для некоторого элемента $r' \in R$. Пусть теперь $\pi: R \rightarrow A$ — канонический эпиморфизм, для которого

$$\pi r = \sum_{g \in G} r(g).$$

Применяя π к нашему равенству, получим, что $1 = \pi r'n$ и, следовательно, n — обратимый элемент.

Обратно, пусть выполнены все три условия. Мы хотим показать, что кольцо R регулярно. Для произвольного $r \in R$ будем искать элемент $r' \in R$, такой, что $rr'r = r$. Заметим, что носитель элемента r конечен. Он порождает конечную подгруппу H группы G . Применяя полученное выше следствие к групповому кольцу AH , найдем элемент r' кольца $AH \subset AG$, такой, что $rr'r = r$.

Следующая теорема представляет собой обобщение классического результата Машке, полученное Коннелом.

Предложение 3. *Групповое кольцо $R = AG$ вполне приводимо тогда и только тогда, когда*

- (1) *кольцо A вполне приводимо;*
- (2) *группа G конечна;*
- (3) *порядок группы G обратим в кольце A .*

Доказательство. Допустим сначала, что R — вполне приводимое кольцо и, следовательно, нётерово справа и регулярное кольцо (см. предложение 3.5.2). В силу предложения 1 кольцо A нётерово справа, а G — конечно порожденная группа. В силу предложения 2 A — регулярное кольцо и каждая конечно порожденная подгруппа группы G конечна. Следовательно, A — вполне приводимое кольцо (см. предложение 3.5.2), а G — конечная группа. Наконец, (3) следует из предложения 2.

Обратно, пусть выполнены условия (1) — (3). В силу предложений 1 и 2 кольцо R нётерово справа и

регулярно и, следовательно, вполне приводимо. Это завершает доказательство.

Приведем несколько элементарных фактов о первичном радикале группового кольца.

Лемма 4. Если B — подкольцо кольца A , то

$$BG \cap \text{rad } AG \subset \text{rad } BG.$$

Если B лежит в центре кольца A , то имеет место равенство. Если H — подгруппа группы G , то

$$AH \cap \text{rad } AG \subset \text{rad } AH.$$

Если H лежит в центре группы G , то имеет место равенство. В частности,

$$A \cap \text{rad } AG = \text{rad } A.$$

Доказательство оставляем читателю в качестве упражнения.

Первая часть следующей теоремы — классический результат, доказательство которого принадлежит П. Жордану. Вторая часть теоремы была получена независимо Пасманом и Коннелом.

Предложение 4. Групповое кольцо AG над полем A не содержит ненулевых ниль-идеалов в каждом из следующих случаев:

(а) A — алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

(б) Характеристика поля A — простое число p и в группе G отсутствуют элементы порядка p .

Доказательство. (а) Поле A получается из вещественно замкнутого поля P присоединением элемента i , такого, что $i^2 = -1$ (см., например, Ван-дер-Варден, I, § 71). Каждому элементу $a = p + ip'$ поля A сопоставим его сопряженный $a^* = p - ip'$. Пусть теперь $r = \sum_{g \in G} r(g)g$ — произвольный ненулевой элемент идеала K кольца R . Положим

$$r^* = \sum_{g \in G} r(g)^* g^{-1}.$$

Можно проверить, что $(r_1 r_2)^* = r_2^* r_1^*$. Тогда $s = r r^* \in K$ и $s^* = s$. Кроме того, будучи суммой квадратов,

$$s(1) = \sum_{g \in G} r(g) r^*(g^{-1}) = \sum_{g \in G} r(g) r(g)^* > 0 \text{ в } P.$$

Таким же образом $(s^2)^* = s^2$ и

$$s^2(1) = \sum_{g \in G} s(g) s(g^{-1}) = \sum_{g \in G} s(g) s(g)^* > 0 \text{ в } P.$$

Повторяя это рассуждение, убеждаемся в том, что $s^{2^n} \neq 0$ при всех n . Таким образом, K не является ниль-идеалом.

(б) Если K — произвольный ненулевой идеал кольца AG , то K содержит хотя бы один элемент r , такой, что $r(1) = 1$. (Действительно, если $0 \neq r' \in K$, то существует элемент $g \in G$, такой, что $0 \neq r'(g) = a$. Положим $r = a^{-1} r' g^{-1}$.) Сейчас мы покажем, что $r^p(1) = 1$. По этой же причине $r^{p^2}(1) = 1$ и т. д. Получим, таким образом, как угодно большую степень элемента r , отличную от нуля. Поэтому K не является ниль-идеалом.

Действительно,

$$r^p(1) = \sum r(g_1) r(g_2) \dots r(g_p),$$

где суммирование проводится по всем последовательностям $(g_1, g_2, \dots, g_p)$, таким, что $g_1 g_2 \dots g_p = 1$. Из равенства $g_1 g_2 \dots g_p = 1$ следует, что $g_{k+1} g_{k+2} \dots g_{k+p} = 1$; индексы берутся по модулю p . Если p циклических перестановок последовательности $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ все различны, то их совокупный вклад в сумму кратен p и, следовательно, равен 0 в A . Возможно ли, чтобы $(g_1, g_2, \dots, g_p) = (g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_{k+p})$ при $k \neq 0$? Только в том случае, когда $g_1 = g_{1+k} = g_{1+2k} = \dots$. Но индексы $1+k$, $1+2k$, ... пробегают все ненулевые смежные классы по модулю p и, следовательно, все g_i равны, а тогда $g_1^p = 1$ и, таким образом, $g_1 = 1$. Поэтому

$$r^p(1) = r(1)^p = 1,$$

что завершает доказательство.

Следствие. Если B — поле характеристики 0, то групповое кольцо BG полупервично.

Доказательство. Пусть A — алгебраическое замыкание поля B . В силу леммы 4 и предложения 4(a)

$$\text{rad } BG = BG \cap \text{rad } AG = 0.$$

Каждому элементу g группы G сопоставим его централизатор $C(g) = \{h \in G \mid hg = gh\}$. Очевидно, что $C(g)$ — подгруппа группы G . Нетрудно показать, что конечность индекса $C(g)$ в G равносильна конечности числа сопряженных с g элементов в группе G . Положим

$$G^* = \{g \in G \mid \text{индекс } C(g) \text{ конечен}\}.$$

Легко проверяется, что G^* — нормальный делитель группы G .

Предложение 5 (Пасман). Пусть A — кольцо, а G^* — нормальный делитель группы G , состоящий из всех элементов с конечным числом сопряженных. Если кольцо AG^* полупервично, то полупервично и кольцо AG .

Доказательство. Допустим, что кольцо AG не является полупервичным. Тогда кольцо AG содержит ненулевой идеал, квадрат которого равен нулю. В частности, можно найти такой элемент $0 \neq r \in AG$, что $rAGr = 0$. Можно даже предполагать, что $r(1) \neq 0$. (Действительно, если $r(g) \neq 0$, то заменим r на $g^{-1}r$.) Запишем $r = r^* + r'$, где $r^* \in AG^*$ и $r'(G^*) = 0$. Тогда $r^*(1) \neq 0$. Положим $C(r^*) = \bigcap_{r^*(g) \neq 0} C(g)$. Так как носитель элемента r^* конечен и так как индекс каждой из подгрупп $C(g)$ конечен, то в силу леммы Пуанкаре (лемма А) индекс подгруппы $C(r^*)$ конечен.

Допустим, что кольцо AG^* полупервично. Тогда для указанного выше элемента r^* можно найти такие элементы g^* и h^* в подгруппе G^* и элемент $a \in A$, что

$(r^*ag^*r^*)(h^*) \neq 0$. Тогда для любого $g \in C(r^*)$

$$(r^* + g^{-1}r'g)ag^*(r^* + r') = 0^1).$$

Вычисляя значение этой функции в h^* , получим, что

$$(r^*ag^*r^*)(h^*) + (g^{-1}r'gag^*r')(h^*) = 0.$$

Остальные члены равны нулю, поскольку G^* — нормальный делитель в G и $r'(G^*) \neq 0^2$). Следовательно,

$$(g^{-1}r'gag^*r')(h^*) \neq 0.$$

Поэтому существуют элементы x и y группы G , принадлежащие носителю элемента r' и такие, что $h^* = g^{-1}xgg^*y$, т. е. $g^{-1}xg = h^*y^{-1}(g^*)^{-1}$. Таким образом, определено отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $g \in C(r^*)$ пару (x, y) . Легко проверить, что все прообразы каждой из пар лежат в одном правом смежном классе группы G по подгруппе $C(x)$. Поэтому найдется конечное число правых смежных классов группы G , покрывающих $C(r^*)$. Так как индекс подгруппы $C(r^*)$ конечен и каждый правый смежный класс может быть покрыт аналогично, то мы получаем конечное покрытие группы G смежными классами по подгруппам $C(x)$, где x принадлежат носителю элемента r' . В силу леммы В индекс по крайней мере одной из подгрупп $C(x)$ конечен, что противоречит равенству

1) Действительно, левая часть равенства принадлежит множеству $(g^{-1}rg)AGr = g^{-1}rAGr = 0$. — Прим. ред.

2) Действительно, $[r^*ag^*r'](h^*) = \sum_{g_1, g_2=h^*} r^*(g_1)a(g^*r'(g_2)) = \sum_{g_1, g_2=h^*} r^*(g_1)ar'(g^{*-1}g_2)$ (см. стр. 235). Если $g_2 \in G^*$, то $r'(g^{*-1}g_2) = 0$. Если же $g_2 \notin G^*$, то $g_1 = h^*g_2^{-1} \notin G^*$ и $r^*(g_1) = 0$, поскольку $r^* \in AG^*$. Следовательно, $r^*ag^*r'(h^*) = 0$.

Далее, $[g^{-1}r'gag^*r'](h^*) = \sum_{g_1, g_2=h^*} r^*(gg_1g^{-1}) \cdot ar^*(g^{*-1}g_2)$. Если $g_1 \in G^*$, то $ga_1g^{-1} \in G^*$ и, следовательно, $r^*(gg_1g^{-1}) = 0$. Если же $g_1 \notin G^*$, то, как и выше, получаем, что $g^{*-1}g_2 \notin G^*$ и, следовательно, $r^*(g^{*-1}g_2) = 0$. Таким образом, и второе слагаемое обращается в нуль. — Прим. ред. и перв.

$r'(G^*) = 0$. Это завершает одно из замечательных доказательств!

Следствие. Если характеристика поля A равна p и если p не делит порядок никакого конечного нормального делителя группы G , то групповое кольцо AG полупервично.

Доказательство. Допустим, что кольцо AG не является полупервичным, тогда не является полупервичным и кольцо AG^* (в силу сказанного выше). По предложению 4(б) порядок некоторого элемента $g \in G^*$ равен p . Число сопряженных с g элементов в группе G конечно. В силу леммы Дитцмана (лемма С) нормальный делитель, порожденный этим множеством, конечен. Поскольку в него входит элемент g , его порядок делится на p .

Отложим рассмотрение полупервичных групповых колец для того, чтобы найти все артиновы групповые кольца, поскольку это удобно сделать как раз сейчас.

Предложение 6 (Коннел). *Групповое кольцо $R = AG$ артиново справа тогда и только тогда, когда кольцо A артиново справа, а группа G конечна.*

Доказательство. Если модуль A_A артинов и группа G конечна, то модуль R_A является конечной прямой суммой некоторого множества экземпляров модуля A . Следовательно, модуль R_A и тем более модуль R_R артиновы.

Обратно, допустим, что кольцо R артиново справа. Тогда артиново справа и кольцо $A \cong R/\omega G$. Но кольцо R также и нётерово справа (см. следствие предложения 3.5.3). Таким образом, в силу предложения 1 каждая возрастающая последовательность подгрупп группы G с некоторого места стабилизируется. Это же верно и для убывающей цепочки подгрупп (то же рассуждение). Однако вопрос: следует ли из этих двух условий обрыва цепочки подгрупп конечность группы G — открыт. Тем не менее мы докажем, используя предложение 5, конечность группы G , не решая эту проблему теории групп.

Так как AG — артиново справа кольцо, то и его факторкольцо $(A/\text{rad } A)G$ артиново справа. Таким образом, без потери общности можно предположить, что кольцо A полупервично. Так как кольцо A к тому же артиново справа, то A вполне приводимо. Пусть $A = A^{(1)} \times \dots \times A^{(n)}$, где $A^{(i)}$ — простые артиновы кольца. Тогда $AG = A^{(1)}G \times \dots \times A^{(n)}G$, причем $A^{(1)}G$ — артиново справа кольцо, а $A^{(1)}$ — простое кольцо. Пусть $B = A^{(1)}$ и C — центр кольца B . Утверждаем, что из артиновости справа кольца BG следует артиновость справа кольца CG .

Действительно, пусть $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ — убывающая последовательность правых идеалов кольца CG . Тогда $K_1B \supset K_2B \supset \dots$ — убывающая последовательность правых идеалов кольца BG . Следовательно, $K_nB = K_{n+1}B = \dots$ для некоторого n . Отсюда вытекает, что $K_n = K_{n+1} = \dots$ (надо учесть следующее замечание, доказательство которого оставляем в качестве упражнения:

$$KB \cap CG = K$$

для любого правого идеала K кольца CG).

Таким образом, можно считать без потери общности, что A — поле.

Случай 1. Характеристика поля A равна нулю. В силу следствия к предложению 4 кольцо AG полупервично. Будучи также артиновым справа, кольцо AG вполне приводимо. Следовательно, в силу предложения 3 группа G конечна.

Случай 2. Характеристика поля A равна p . Если кольцо AG полупервично, то мы применяем предыдущее рассуждение. В противном случае в силу следствия к предложению 5 группа $G = G_1$ содержит конечный нормальный делитель H_1 . Мы знаем также, что порядок группы H_1 делится на p , и, следовательно, $H_1 \neq \{1\}$. Рассмотрим факторгруппу $G_2 = G/H_1$. Если кольцо AG_2 не является полупервичным, то группа G_2 содержит конечный нормальный делитель H_2/H_1 , причем $H_2 \neq H_1$. Рассмотрим тогда $G_3 = G/H_2$ и т. д. Последовательность подгрупп $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ должна стабилизироваться. Таким образом, кольцо AG_n полу-

первично для некоторой группы $G_n = G/H_{n-1}$. Тогда группа G_n конечна (как в случае 1). Но

$$G_n \cong (G/H_{n-2})/(H_{n-1}/H_{n-2}),$$

где группы G_n и H_{n-1}/H_{n-2} конечны. Следовательно, группа $G_{n-1} = G/H_{n-2}$ конечна. Возвращаясь таким образом к группе G_1 , убеждаемся, что она конечна. Это завершает наше доказательство.

Прежде чем продолжить исследование полупервичных групповых колец, нам понадобится следующее общее утверждение из теории колец.

Лемма 5. Пусть M — множество неделителей нуля, замкнутое относительно умножения, содержащее 1 и лежащее в центре кольца R . Пусть Q — полное правое кольцо частных кольца R . Тогда

$$RM^{-1} = \{q \in Q \mid \exists_{m \in M} qm \in R\}$$

является подкольцом кольца Q , которое содержит R , причем все элементы из R обратимы в RM^{-1} . Кроме того,

$$\text{rad } R = R \cap \text{rad } RM^{-1}, \quad \text{rad } RM^{-1} = (\text{rad } R) M^{-1}.$$

(Последнее выражение обозначает, конечно, множество $\{q \in Q \mid \exists_{m \in M} qm \in \text{rad } R\}$. Читателю, не читавшему гл. 4, следует построить RM^{-1} непосредственно из отношений r/m .)

Доказательство. (См. § 4.3 для определения кольца Q .) Для любого элемента $m \in M$ отображение $mr \rightarrow r$ является гомоморфизмом плотного идеала $mR = Rm$ в R . (Используйте следствие к предложению 4.3.4.) Таким образом, существует элемент $q \in Q$, такой, что $qm = 1$. (См. следствие к предложению 4.3.5.) При этом $mqm = m$ и, следовательно, $mq = 1$ аннулирует плотный идеал mR . Поэтому $mq = 1$ и можно писать m^{-1} вместо q . Отсюда непосредственно следует, что каждый элемент множества RM^{-1} имеет вид rm^{-1} , где $r \in R$ и $m \in M$. Так как M содержится в центре кольца R , то без труда проверяется, что RM^{-1} — подкольцо кольца Q .

Наконец, доказательство двух равенств оставляем читателю в качестве упражнения.

Предложение 7 (Пасман).

(а) Если кольцо $R = AG$ полупервично, то кольцо A полупервично и порядки конечных нормальных делителей группы G не являются делителями нуля в A .

(б) Если A — коммутативное кольцо, то верно обратное утверждение.

Доказательство. (а) Допустим, что кольцо R полупервично. Поскольку в силу леммы 4 $\text{rad } A = A \cap \text{rad } R$, кольцо A полупервично. Предположим, что $H = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ — нормальный делитель группы G и $na = 0$. Положим $K = \omega H$. Пусть K^l — левый аннулятор идеала K в кольце R . Тогда в силу леммы 2

$$\begin{aligned} a(g_1 + g_2 + \dots + g_n) &= \\ &= -a(1 - g_1) - \dots - a(1 - g_n) \in K^l \cap K. \end{aligned}$$

Но $(K^l \cap K)^2 \subset K^l K = 0$ и, следовательно, $K^l \cap K = 0$, поскольку кольцо R полупервично. Таким образом, $a = 0$, и поэтому n не является делителем нуля в кольце A .

(б) Предположим, что имеют место оба условия и что кольцо A коммутативно. Пусть M — мультипликативно замкнутая система, порожденная порядками всех конечных нормальных делителей группы G , причем порядки рассматриваются как элементы кольца A . Рассмотрим $RM^{-1} = (AM^{-1})G$. В силу леммы 5 $\text{rad } AM^{-1} = (\text{rad } A)M^{-1} = 0$, и, следовательно, кольцо AM^{-1} также полупервично. Так как, еще раз применяя лемму 5, получаем, что $\text{rad } R = R \cap \text{rad } RM^{-1}$, то из полупервичности кольца RM^{-1} будет следовать полупервичность кольца R .

Переходя от A к AM^{-1} и от R к RM^{-1} , можно, таким образом, предполагать, что A — коммутативное полупервичное кольцо и что порядок любого нормального делителя группы G обратим в кольце A . Мы хотели бы доказать, что кольцо R полупервично. Кольцо A является подпрямым произведением коммутативных

областей целостности B . Следовательно, кольцо $R = AG$ является подпрямым произведением соответствующих групповых колец BG . Так как подпрямое произведение полупервичных колец полупервично, то достаточно доказать полупервичность каждого из колец BG . Возьмем одно из колец B . Порядок любого конечного нормального делителя группы G обратим в B , поскольку B — гомоморфный образ кольца A .

Пусть теперь M — множество всех ненулевых элементов кольца B . Рассмотрим кольцо $(BG)M^{-1} = (BM^{-1})G$. При этом BM^{-1} — поле, характеристика которого либо равна 0, либо не делит порядок никакого из конечных нормальных делителей группы G . Из следствия предложений 4 и 5 вытекает, что кольцо $(BM^{-1})G$ полупервично. Еще раз применяя лемму 5, убеждаемся, что кольцо BG полупервично. Этим заканчивается доказательство.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что AG является кольцом для любого кольца A и любой группы G . Проверьте, что утверждение остается справедливым, если G — произвольная полугруппа с 1. Убедитесь, что кольцо многочленов $A[x]$ является частным случаем этой конструкции.

2. Докажите, что отображения $a \rightarrow a^*$ и $g \rightarrow g^+$ являются, как и утверждалось в тексте, мономорфизмами. Проверьте также справедливость формул $(rg)h = r(hg^{-1})$ и т. д.

3. Докажите лемму 1. Покажите, что даже если подгруппа H не является нормальным делителем группы G , то $A(G/H)$ можно интерпретировать как левый A -модуль. [Указание: Докажите последнее утверждение леммы, предварительно заметив, что каждый элемент подгруппы H является словом от элементов g_i и g_i^{-1} . Используйте индукцию по длине слова и равенство $1 - hg_i^{\pm 1} = (1 - h)g_i^{\pm 1} + (1 - g_i^{\pm 1})$.]

4. Докажите лемму 2. [Указание: Если $r(\omega H) = 0$, то r является константой на каждом левом смежном классе по подгруппе H .]

5. Если $R=AG$ и группа G конечна, то $\text{Hom}_A(R, A)$ является правым R -модулем, изоморфным модулю R_R .

6 (Коннел). Если $R=AG$, модуль A_A инъективен и группа G конечна, то модуль R_R инъективен.

7 (Коннел). Если $R=AG$ и модуль R_R инъективен, то модуль A_A инъективен и каждая конечно порожденная подгруппа группы G конечна.

8. Докажите лемму 4. [Указание: Пусть P — первичный идеал группового кольца AG . Если B — центр кольца A , то $BG \cap P$ — первичный идеал кольца BG . Если H — центр группы G , то $AH \cap P$ — первичный идеал кольца AH .]

9. Покажите, что индекс централизатора $C(g)$ элемента g группы G конечен тогда и только тогда, когда число элементов, сопряженных с g , конечно. Покажите, что множество G^* всех таких элементов g образует нормальный делитель группы G .

10. Если C — центр простого кольца B и K — правый идеал кольца CG , то $KB \cap CG = K$ [Указание: B_C является векторным пространством.]

11. Пусть M означает то же, что в лемме 5. Докажите, что $\text{rad } RM^{-1} = (\text{rad } R)M^{-1}$, показав, что строгая нильпотентность элемента rm^{-1} в RM^{-1} равносильна строгой нильпотентности элемента r в R . Выведите отсюда, что $R \cap \text{rad } RM^{-1} = \text{rad } R$.

12. Группа G называется линейно упорядоченной, если $(G, \leq)$ — линейно упорядоченное множество и для любых $a, b, c, d \in G$ из соотношений $a \leq b$ и $c \leq d$ следует, что $ac \leq bd$. Покажите, что если A — коммутативная область целостности, а группа G линейно упорядочена, то кольцо AG полупрimitивно. [Указание: Покажите сначала, что каждый обратимый элемент группового кольца AG имеет вид ag , где a — обратимый элемент кольца A . Если же $r \in \text{Rad } AG$, то $1 + rg$ — обратимый элемент при всех $g \in G$.]

13. Если A — коммутативная область целостности, а G — линейно упорядоченная группа, то полупрimitивность кольца AG равносильна полупервичности кольца A .

Полупервичные групповые кольца

Ян. Г. Коннел

В этом продолжении второго приложения мы отбросим предположение о коммутативности в предложении 7, т. е. докажем следующий результат:

Предложение 8. *Кольцо $R = AG$ полупервично тогда и только тогда, когда A — полупервичное кольцо и порядки конечных нормальных делителей группы G не являются делителями нуля кольца A .*

Мы выясним также, когда кольцо R первично. Однако нам придется использовать при этом результаты, которые не излагались в этой книге, поэтому доказательство не будет замкнутым в себе.

Доказательство необходимости содержится в предложении 7. Остается доказать лишь достаточность.

Пусть G^+ — совокупность всех элементов конечного порядка, лежащих в нормальном делителе G^* . (Напомним, что $G^* = \{g \in G \mid \text{индекс } C(g) \text{ конечен}\}$.) Следующие утверждения легко проверяются с помощью леммы Дитцмана:

(1) G^+ — нормальный делитель группы G , являющийся объединением (в структуре подгрупп) всех конечных нормальных делителей группы G .

(2) Каждая конечно порожденная подгруппа группы G^+ конечна и содержится в некотором конечном нормальном делителе группы G .

Используем также следующий поразительный результат Б. Неймана (1951):

(3) G^*/G^+ — абелева группа без кручения.

Идея доказательства — сведение задачи для кольца AG к задаче о кольце AG^* , затем о кольце AG^+ и наконец о кольце AN , где N — конечная группа. Первая редукция уже была проведена в предложении 5. Поэтому следующий шаг — вывод из полупервичности кольца AG^+ полупервичности кольца AG^* . Применение леммы Цорна показывает, что каждая

абелева группа без кручения может быть линейно упорядочена (см. Биркгоф (1952, стр. 310)¹⁾). Следовательно, если g_i — представители смежных классов G^* по подгруппе G^+ , то можно считать, что они линейно упорядочены таким образом, что

$$g_i < g_j, \quad g_k < g_l, \quad g_i g_k = h_1 g_m, \quad g_j g_l = h_2 g_n, \\ h_1, h_2 \in G^+ \Rightarrow g_m < g_n.$$

Каждый элемент $r \in AG^*$ однозначно представим в виде $r = \sum r_i g_i$, $r_i \in AG^+$. Если $r \neq 0$, то положим $tr = r_i$, где g_i — наименьший среди g_j с $r_j \neq 0$. Кроме того, положим $t0 = 0$. Если J — идеал кольца AG^* , то, как показывают вычисления, $tJ = \{tj | j \in J\}$ является идеалом в кольце AG^+ . Если же $J^2 = 0$, то $(tJ)^2 = 0$. (Удобно предполагать, что один из элементов g_i равен 1.)

Таким образом, мы свели задачу к доказательству того, что $\text{rad } AG^+ = 0$. Если $r \in \text{rad } AG^+$, то пусть H — нормальный делитель группы G , порожденный носителем элемента r . В силу замечания (2) группа H конечна, а в силу предположения порядок n подгруппы H — не делитель нуля кольца A . По лемме 4 $r \in \text{rad } AH$. Поэтому остается доказать, что $\text{rad } AH = 0$.

В силу леммы 5 можно считать, что n — обратимый элемент кольца A . Учитывая соображения, связанные с разложением в подпрямое произведение, можно считать, что A — первичное кольцо. Таким образом, центр F кольца A является областью целостности. В силу той же леммы 5 можно считать, что F — поле. Так как характеристика поля F не делит n , то в силу теоремы Машке

$$FH \cong I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k,$$

где I_i — простые кольца. Если I — одно из этих колец, то его центр K — поле. Каноническое отображение $FH \rightarrow I$ осуществляет вложение F в K . Поэтому K является расширением поля F . Степень этого

¹⁾ См. также Фукс (1965), стр. 56.

расширения конечна, поскольку F -размерность пространства FH конечна. Так как кольцо $L \otimes_F FH \cong \cong LH$ вполне приводимо для любого расширения L поля F , то FH — сепарабельная алгебра, и, следовательно, K — сепарабельное расширение поля F . (См. Бурбаки (1966, стр. 222, предложение 6)). Поскольку $AH \cong A \otimes_F FH \cong (A \otimes_F I_1) \times \dots \times (A \otimes_F I_k)$, остается доказать, что $A \otimes_F I$ — полупервичное кольцо.

Лемма 6. *Если K — поле, I — центральная простая K -алгебра и B — произвольная K -алгебра, то*

$$\text{rad}(B \otimes_K I) \cong \text{rad} B \otimes_K I.$$

Доказательство. В книге Джекобсона (1964, стр. 109), а также (1961, стр. 168) показано, что отображение $J \rightarrow J \otimes I$ осуществляет изоморфизм между структурой идеалов алгебр B и $B \otimes I$. Простая выкладка показывает, что это отображение сохраняет произведение. Поэтому первичные идеалы соответствуют первичным идеалам, отсюда следует утверждение леммы.

Отображение $\sum (a \otimes k) \otimes i \rightarrow \sum a \otimes ki$ осуществляет изоморфизм колец

$$(A \otimes_F K) \otimes_K I \cong A \otimes_F I.$$

В силу леммы 6, остается доказать полупервичность кольца $A \otimes_F K$, что, в свою очередь, вытекает из следующего утверждения:

Лемма 7. *Пусть K — конечное сепарабельное расширение поля F и B — некоторая F -алгебра. Тогда $B \otimes_F K$ — полупервичное кольцо в том и только том случае, если полупервично кольцо B .*

Доказательство. (Мы не будем доказывать более общий результат, как это сделано для радикала Джекобсона у Бурбаки (1966, стр. 224).) Если $u_1, \dots, u_m$ — базис в K над F , то каждый элемент из $B \otimes_F K$ однозначно представим в виде $\sum b_i \otimes u_i$, где $b_i \in B$, и можно отождествить B с подкольцом элементов вида $b \otimes 1$. Если P — первичный идеал в

$B \otimes_F K$, то $P' = P \cap B$ — первичный идеал в B . Действительно, если $xBy \subset P'$, то

$$x \left(\sum b_i \otimes u_i \right) y = \sum (xb_i y \otimes 1)(1 \otimes u_i) \in P.$$

Поэтому, скажем, $x \in P$ и, следовательно, $x \in P'$. Таким образом, если $B \otimes_F K$ — полупервичное кольцо, то полупервично и кольцо B . Остается доказать обратное.

Пусть L — конечное нормальное сепарабельное расширение поля F , содержащее K . Мы хотим доказать, что $B \otimes_F L \cong (B \otimes_F K) \otimes_K L$ — полупервичное кольцо. Действительно, в этом случае в силу уже доказанной части утверждения кольцо $B \otimes_F K$ оказывается полупервичным. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_d$ — элементы группы Галуа расширения L над F , а $\{\psi_i u\}$ — нормальный базис. Следовательно, матрица $(\psi_i \psi_j u)$ обладает обратной, скажем матрицей (v_{ij}) , $v_{ij} \in L$ (см. Бурбаки, (1965, стр. 179)). Так как отображение $\sum b_i \otimes \psi_i u \rightarrow \sum b_i \otimes \psi_j \psi_i u$ — кольцевой автоморфизм, а радикал отображается на себя при любом автоморфизме, то если $x = \sum b_i \otimes \psi_i u \in \text{rad}(B \otimes_F L)$, то $x_j = \sum b_i \otimes \psi_j \psi_i u \in \text{rad}(B \otimes_F L)$ при любом j . Таким образом,

$$\sum_j v_{kj} x_j = b_k \otimes 1 \in \text{rad}(B \otimes_F L) \cap B \subset \text{rad } B = 0.$$

Следовательно, $b_k = 0$ для любого k и, как и требовалось, $x = 0$.

Предложение 9. *Кольцо $R = AG$ первично тогда и только тогда, когда кольцо A первично, и $G^+ = 1$.*

Доказательство. Пусть сначала R — первичное кольцо. Если J — идеал кольца A , то JR — идеал кольца R и $(JR)^l \supset J^l$. Следовательно, A — первичное кольцо. Если H — конечный нормальный делитель группы G , то ωH — идеал и в силу леммы 2 $(\omega H)^l \neq 0$. Поэтому $\omega H = 0$ и $H = 1$. Итак, $G^+ = 1$.

Обратно, если $r \in R$, то положим $\psi r = \sum_{g \in G^*} r(g)g \in AG^*$. Если J — ненулевой идеал кольца R , то очевидно, что $\psi J = \{\psi j | j \in J\}$ — ненулевой идеал

кольца AG^* . Как заметил Пасман, простая модификация доказательства предложения 5 устанавливает следующий факт: если J, K — идеалы кольца R и $JK = 0$, то $\psi J \psi K = 0$. Это позволяет нам считать, что $G^* = G$. Так как $G^+ = G^{*+} = 1$, то G — абелева группа без кручения и, следовательно, линейно упорядочиваема. Наконец, используя отображение t , определенное ранее, мы видим, что если J — идеал кольца R и $0 \neq x \in J'$, то $0 \neq tx \in (tJ)'$. Поэтому $tJ = 0$, откуда $J = 0$, что завершает доказательство.

КОММЕНТАРИИ

Следующие замечания, распределенные по главам, содержат некоторую несистематическую историческую информацию, а также некоторые пришедшие позже соображения. При этом я старался проследить, кому принадлежат теоремы, появившиеся ранее в других книгах. Ссылки в книге даны на автора и год публикаций, указанных ниже в библиографии (предполагается, что остающаяся неопределенность легко устраняется).

§ 1.1. Изучение многообразий алгебраических систем было начато Биркгофом (1935, 1945). Некоторые законы, не являющиеся тождествами, допускают переформулировку в виде тождеств. Например, в теории групп закон

$$\forall a \exists b ab = 1$$

можно заменить тождеством

$$aa^{-1} = 1.$$

Читатель легко проверит, что любое многообразие алгебр замкнуто относительно прямых произведений. Именно поэтому класс тел не является многообразием. (См. также § 1.3.)

Биркгоф показал, что класс множеств с общими операциями является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно прямых произведений, подсистем и факторсистем.

§ 1.2. Существенным моментом в утверждении о точной верхней грани линейно упорядоченного семейства подколец в предложении 1 является то, что операции в кольце n -арны, причем n конечно.

В последние годы, даже в то время, когда писалась эта книга, стало модным определять моно-, эпи- и изоморфизмы в абстрактных категориях, используя правила сокращения. Знакомый с этой тенденцией читатель должен быть осторожен: данные здесь определения эквивалентны современным определениям в категории множеств, но не в категории колец. (В соответствии с современной тенденцией каноническое вложение целых чисел в рациональные является эпиморфизмом в категории колец!) Новые определения в категории модулей эквивалентны нашим, но это надо доказать.

Гомоморфные отношения были впервые введены Шодой (1949) под названием «мероморфизмы» и затем переоткрывались разными авторами. Системы с тернарной операцией $f(x, y, z)$, такой, что $f(x, y, y) = x$ и $f(y, y, z) = z$, рассматривались Мальцевым (1954) и автором (1957).

§ 1.3. Довольно прозаическое обсуждение прямых произведений и сумм можно противопоставить категориям рассмотренным в § 4.1 и 4.2.

§ 1.4. Использование леммы 2 в доказательстве теорем Крулля — Ремака — Шмидта, кажется, является новым. Эта теорема и теорема Жордана — Гёльдера — Шрайера обычно доказываются в более общей ситуации, например для групп с операторами в книге Цассенхауза. Вероятно, наиболее общие формулировки этих теорем приведены в статьях Голди (1950, 1952); см. также статью автора (1957). По поводу другого доказательства теоремы Крулля — Ремака — Шмидта см. § 3.7.

§ 2.1. Следует отметить, что в нашей терминологии максимальные и простые идеалы являются собственными. Историю двух определенных здесь радикалов читатель может найти в других книгах по теории колец, например в легко читающейся книге Маккоя (1964).

Одно время подпрямые неразложимые кольца рассматривались как блоки, из которых построены все кольца. Сейчас их место заняли локальные кольца.

Аналогично подпрямые произведения заменены пучками (см. приложение 1).

§ 2.2. Предложение 1 утверждает, что идеалы булевых колец являются дуальными фильтрами. Многие авторы предпочитают говорить, что фильтры являются дуальными идеалами. Однако дуальные фильтры существуют и в других упорядоченных множествах, в то время как дуальные идеалы не существуют в других кольцах. Кстати, если в качестве умножения рассматривать $\vee$, а не $\wedge$, то мы вынуждены будем сказать, что фильтры являются идеалами.

Следствие 2 к предложению 1 представляет интерес в логике. В приложении к свободной булевой алгебре со счетным числом образующих оно допускает следующую интерпретацию: *формула в исчислении высказываний является теоремой тогда и только тогда, когда она тавтологична.*

§ 2.3. Полное кольцо частных кольца (не только в коммутативном случае) впервые изучалось Утуми (1956), обобщившим конструкцию Джонсона (1951). Приведенное здесь изложение основано на статье Финдлея и автора (1958). Для разнообразия в общем случае мы придерживаемся иного изложения (см. § 4.3).

§ 2.4. В то время как предложение 1 принадлежит в основном Джонсону, упрощения, возникающие в коммутативном случае, были указаны Файном и др. (1965). Общий случай можно найти в предложении 4.5.2.

Полная булева алгебра — это, конечно, булева алгебра, полная как структура (см. § 1.1). «Пополнение Дедекинда — Макнейла» названо так в книге Биркгофа «Теория структур».

Утверждение о том, что полное кольцо частных булева кольца является его пополнением Дедекинда — Макнейла (следствие предложения 6), было установлено Брейнердом и автором (1959), при этом используется более непосредственный метод доказательства.

Файн и др. (1965) рассмотрели кольцо $R = C(X)$ всех действительных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X . Было

показано, что полным кольцом частных кольца R является кольцо $Q(X)$ всех действительныхзначных непрерывных функций, определенных на плотных открытых подмножествах пространства X , по модулю очевидного отношения эквивалентности. (Две функции отождествляются, если они совпадают на пересечении их областей определения.)

Банашевский (1965) обобщил этот результат на произвольные коммутативные полупервичные кольца. В качестве частного случая он также нашел полное кольцо частных булева кольца.

§ 2.5. Топология на пространстве максимальных идеалов называется специалистами по функциональному анализу также оболочно-ядерной топологией.

Точная нижняя грань бесконечного семейства регулярных открытых множеств не совпадает с их пересечением, а является внутренней частью их пересечения.

§ 3.1. Пример примитивного справа кольца, не являющегося примитивным слева, был дан Бергманом (1964).

Наше доказательство теоремы плотности Джекобсона (предложение 3) заимствовано у Артина и Тейта (см. Артин (1950)).

Читателя убедительно просят различать «плотное подкольцо» и «плотный идеал». В то время как в первом случае «плотный» имеет топологический смысл, во втором случае это не так.

§ 3.2. Понятие «строгой нильпотентности» является вариацией изложения Джекобсона, использующего « m -последовательности».

Дальнейшие упражнения, касающиеся двух радикалов, встретятся в конце § 3.5. Более глубокие результаты о радикале Джекобсона читатель мог бы найти в гл. 1 книги Джекобсона (1964); см. также Амицур (1956).

§ 3.3. Приведем точное определение «бимодуля»: бимодуль ${}_R M_S$ является левым модулем ${}_R M$ и в то же время правым модулем M_S , таким, что

$$(rm)s = r(ms)$$

при всех $r \in R$, $m \in M$, $s \in S$. Понятие цоколя принадлежит Дьедонне (1950).

§ 3.4. Изложение теории вполне приводимых колец более элементарно и менее современно, чем в книге Джекобсона «Строение колец», где многое выводится из теоремы плотности (предложение 3.1.3). Я избегал термина «полупростой», ввиду того что он используется в самых различных смыслах.

§ 3.5. Первоначальное доказательство теоремы Левицкого (предложение 5) было много длиннее. Приведенное здесь доказательство Утуми основано на более раннем доказательстве Херстейна. Предложение 3, как нам кажется, принадлежит Гопкинсу.

§ 3.6. Джекобсон в гл. 3 своей книги «Строение колец» ввел класс колец, «подходящих для поднятия идемпотентов». Лемма 1 позволяет нам заменить его на явно более широкий класс колец, в которых идемпотенты можно поднимать по модулю радикала. Сейчас ясно, что для полусовершенных колец Басса можно доказывать то, что в былые времена доказывали для артиновых колец (и для некоторых «полупримарных» колец в книге Джекобсона).

§ 3.7. В действительности Адзумайя (1950) доказал более общую теорему, в которой число слагаемых не обязано быть конечным.

§ 4.1. Понятия (но не термины) «проективность» и «инъективность» восходят к Бэру. Однако важностью своего положения в современной алгебре они обязаны влиянию гомологической алгебры, в частности основополагающей книге Картана и Эйленберга. Более слабая форма предложения 7 (см. упражнение 3), по мнению этих авторов, принадлежит Капланскому. К Картану и Эйленбергу восходит предложение 8 (см. упражнение 6). Невольно возникает проблема расширения понятий «наследственность» и «полунаследственность» на модули.

§ 4.2. Иные, но аналогичные группы характеров можно получить, заменив рациональные числа действительными. Тогда группу характеров дискретной абелевой группы можно естественным образом наделить компактной топологией. Однако для наших

чисто алгебраических целей вполне достаточно рациональных чисел.

Утверждение о том, что каждый модуль изоморфен подмодулю инъективного модуля, было получено Бэрм (1940). Приведенное доказательство (использующее предложение 4) можно также найти в книге Нортскотта (1960). Существование минимальных инъективных расширений было доказано независимо Экманом и Шопфом (1953) и Шодой (1952). Последний устанавливает аналогию с алгебраическим замыканием поля.

§ 4.3. Полные кольца частных уже комментировались в коммутативном случае (§ 2.3). Приведенное изложение принадлежит автору (1963). Целая серия обобщенных колец частных была введена Габриэлем (1962) (см. также упражнения в книге Бурбаки «Коммутативная алгебра», стр. 105—113). Эти кольца включают в себя не только подкольца наших полных колец частных, но также и кольца, которые могут не быть точными расширениями кольца R .

§ 4.4. По поводу предложения 2 см. также работу Лезье и Круазо (1963). Из упражнения 5 ясна аналогия между модулями и полями:

$$\frac{\text{Рациональное пополнение}}{\text{Инъективная оболочка}} = \frac{\text{Максимальное чисто несепарабельное расширение}}{\text{Алгебраическое замыкание}}.$$

Рациональные пополнения рассматривались Финдлеем и автором (1958) и Уонгом и Джонсоном (1959).

§ 4.5. Джонсон первоначально построил регулярное кольцо частных непосредственно, не используя наше определение кольца Q .

§ 4.6. См. также Голди (1958, 1960), Лезье и Круазо (1959). Доказательство предложения 3, приведенное здесь, возникло из анализа доказательства Джонсона и Уонга (1961). Фейт в своих лекциях дал аналогичное доказательство в полупервичном случае.

Смол сообщил о том, что он доказал следующую интересную теорему:

Нётерово справа кольцо R обладает артиновым справа классическим правым кольцом частных тогда

и только тогда, когда все неделители нуля кольца $R/\text{rad } R$ могут быть «подняты» до неделителей нуля кольца R .

§ 4.7. Доказательство этого результата появилось в статье Фейта и Утуми (1965), в недавней статье Джонсона (1965) и в приложении к новому изданию книги Джекобсона.

§ 5.1. Тензорное произведение было впервые введено Уитни (1938). Широкую популяризацию этой конструкции провел Бурбаки.

§ 5.2. Обозначения этой главы идут от нашей совместной работы с Финдлеем. Общее определение «функтора» предполагает известным понятие «категории», которое не вводилось здесь. По вопросам, связанным с категориями, функторами и естественными преобразованиями, можно обратиться к книге Маклейна «Гомология» (1965).

§ 5.3. Утверждение (3') предложения 2 и следствие были отмечены лишь недавно (1964).

§ 5.4. Понятие «плоскости» было упомянуто Картаном и Эйленбергом. Позже Бурбаки посвятил этому понятию целую главу, где могут быть найдены многие из результатов. В важной статье Басса (1960) охарактеризованы те кольца, над которыми каждый плоский модуль проективен. Оказалось, что это в точности те кольца, в которых каждое непустое множество главных правых идеалов обладает минимальным элементом. Эти кольца были названы «совершенными». Отсюда — «полусовершенные» кольца, которые встречались в книге. См. также статьи Фейта (1959) и Чейза (1960).

§ 5.5. Теорема о двух квадратах и метод диаграммного поиска были опубликованы автором (1964), но и Экман и Хилтон использовали ранее подобную технику. В недавней книге Джанса предложено чрезвычайно элегантное введение к дальнейшим результатам гомологической алгебры.

Мое первоначальное доказательство предложения 1 было иным. Оно было основано на следующем соображении, принадлежащем Гурса (1889), которое мы сформулируем здесь для модулей вместо групп.

ЛЕММА. Пусть G — подмодуль модуля $A \times B$. Тогда

$$\frac{\{a \in A \mid \exists b \in B (a, b) \in G\}}{\{a \in A \mid (a, 0) \in G\}} \cong \frac{\{b \in B \mid \exists a \in A (a, b) \in G\}}{\{b \in B \mid (0, b) \in G\}}.$$

В доказательстве предложения 1 был использован подходящий подмодуль модуля $B \times E$.

Обратно, нетрудно вывести лемму из предложения 1. Если записать ее кратко в виде

$$\frac{C}{D} \cong \frac{C'}{D'},$$

то утверждение легко следует из рассмотрения диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & D' & \rightarrow & C' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \rightarrow & G & \rightarrow & C' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \end{array}$$

с очевидными гомоморфизмами.

Приложение 1. Классическое обсуждение P -компоненты идеала можно найти у Норскотта (1953).

Приложение 2. Основой являются статьи Коннела (1963), Пасмана (1962), Ауслендера (1957), Маклафлина (1958) и Вильямайера (1959). Лемма Дитцмана взята из книги Куроша (стр. 338).

Вопрос о полупримитивности группового кольца более труден, чем вопрос о его полупервичности. Результаты в этом направлении были получены Вильямайером (1959), Амицуrom (1956) и Коннелом (1963).

Приложение 3. Эти результаты были любезно сообщены автору Коннелом. Они позволяют строить много интересных первичных и полупервичных колец, но при этом предполагается знакомство с материалом, к сожалению, не включенным в эту книгу. В дополнение к двум цитированным теоремам об абелевых группах без кручения предполагается известным понятие алгебры (кольцевое «расширение» коммутативного кольца в смысле упражнения 5.1), сепарабельного расширения поля и алгебры, центральной простой алгебры и тензорного произведения двух алгебр (см. упражнение 5.1.1).

БИБЛИОГРАФИЯ¹⁾

Приведенная библиография не является полной. Все книги, надеюсь, упомянуты, однако многие полезные статьи в нее не включены, в частности многие из тех, которые уже были перечислены в книге Джекобсона «Строение колец». Предпочтение отдано тем работам, которые действительно были использованы или в которых изложенный здесь материал получил дальнейшее развитие. Если журнал или номера страниц статьи не указаны, то это означает, что я видел работу лишь в рукописи.

Адзума я (Azumaya G.), Corrections and Supplementations to My Paper Concerning Krull-Remak-Schmidt's Theorem, *Nagoya Math. J.*, 1 (1950), 177—124.

Алберт (Albert A. A.), Modern Higher Algebra, Chicago, University of Chicago Press, 1947.

—, Linear Algebras, National Academy of Sciences-National Research Council Publication 502, Washington, 1957.

Амицур (Amitsur S. A.), The Radical of a Polynomial Ring, *Canad. J. Math.*, 8 (1956), 355—361.

—, On the Semi-simplicity of the Group Algebra, *Michigan Math. J.*, 6 (1959), 251—253.

Андерсон (Anderson F. W.), Lattice-ordered Rings of Quotients, *Canad. J. Math.*, 17 (1965), 434—448.

Андрунакиевич В. А., Арнаутков В. И., Рябухин Ю. М.*, Кольца, в сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки, ВИНТИ АН СССР)», М., 1967, 133—180.

Артин (Artin E.), The Influence of J. H. M. Wedderburn on the Development of Modern Algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58 (1950), 65—72.

—, Rings with Minimum Condition, Ann. Arbor University of Michigan Press, 1940.

Ауслендер (Auslander M.), On Regular Group Rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 658—664.

Банашевский (Banaschewski B.), On Projective and Injective Modules, *Arch. Math.*, 15 (1964), 271—275.

¹⁾ Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. —
Прим. ред.

- Банашевский (Banaschewski N.), Quotient Extensions of Modules, *Math., Nachr.*, **28** (1965), 245—255.
- , Maximal Rings of Quotients of Semi-simple Commutative Rings, *Arch. Math.*, **16** (1965), 414—420.
- , On Coverings of Modules, *Math. Nachr.*, **31** (1965), 57—72.
- Басс (Bass H.), Finitistic Homological Dimension and a Homological Generalization of Semi-primary Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 466—488.
- , Injective Dimension in Noetherian Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102** (1962), 18—29.
- , Torsion Free and Projective Modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102** (1962), 319—327.
- Бергман (Bergman G. M.), A Ring Primitive on the Right but Not on the Left. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 473—475.
- Беренс* (Behrens F. A.), *Algebren*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1965.
- Биркгоф (Birkhoff G.), On the Structure of Abstract Algebras, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **31** (1935), 433—454.
- , Subdirect Unions in Universal Algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 764—768.
- , Universal Algebra, *Proc. First Canad. Math. Congr.* 1945, 310—326.
- , Lattice Theory, *Amer. Math. Soc.*, Colloquium Publications 25, Rev. ed., American Mathematics Society, New York, 1948. (Русский перевод: Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, М., 1952.) Third (new) edition, 1967.
- Бокуть Л. А., Жевлаков К. А., Кузьмин Е. Н.*, Теория колец, в сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1968 (Итоги науки, ВИНТИ АН СССР)», М., 1970, 9—56.
- Браун, Маккой (Brown B., McCoy N. H.), Radicals and Subdirect Sums, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 46—58.
- , The Radical of a Ring, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 495—499.
- , The Maximal Regular Ideal of a Ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 165—171.
- Брауэр (Brauer R.), Non-commutative Rings, Multigraphed lecture notes, Cambridge, Harvard University Press.
- Брейнерд, Ламбек (Brainerd B., Lambek J.), On the Ring of Quotients of a Boolean Ring, *Canad. Math. Bull.*, **2** (1959), 25—29.
- Бурбаки (Bourbaki N.), *Algèbre*, Chapter 5 (Fasc. 16), Hermann & Cie, Paris, 1956. (Русский перевод: Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля, упорядоченные группы (IV—VI гл.), «Наука», М., 1965.)
- , *Algèbre*, Chapter 8 (Fasc. 23), Hermann & Cie, Paris, 1958. (Русский перевод: Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы (VII—IX гл.), «Наука», М., 1966.)

- Бурбаки (Bourbaki N.), *Algèbre Commutative*, Chapters 1—4 (Fasc. 27, 28), Hermann & Cie, Paris, 1961. (Русский перевод: Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, «Мир», М., 1971.)
- Бэр (Baer R.), Abelian Groups which Are Direct Summands of Every Containing Group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 800—806.
- Ван-дер-Варден (Van der Waerden B.), *Algebra*, I, Springer, Berlin, 1960; II, Springer, Berlin, 1959.
- Вильямайер (Villamayor O. E.), On the Semi-simplicity of Group Algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 621—627; **10** (1959), 27—31.
- , On Weak Dimension of Algebras, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 941—951.
- Габриэль (Gabriel P.), Des Catégories Abéliennes, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 323—448.
- Говоров В. Е., Кольца, над которыми плоские модули являются свободными, *ДАН СССР*, **144**, № 5 (1962), 965—967.
- Голди (Goldie A. W.), The Jordan-Hölder Theorem for General Abstract Algebras, *Proc. London Math. Soc.*, **52** (1950), 107—131.
- , On Direct Decompositions, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **48** (1952), 1—34.
- , Decomposition of Semi-simple Rings, *J. Lond. Math. Soc.*, **31** (1956), 40—48.
- , The Structure of Prime Rings under Ascending Chain Conditions, *Proc. London Math. Soc.*, **8** (1958), 589—608.
- , Semi-prime Rings with Maximum Condition, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **10** (1960), 201—220.
- , Non-commutative Principal Ideal Rings, *Arch. Math.*, **13** (1962), 214—221.
- , Rings with Maximum Condition, Multigraphed lecture notes, Yale University Press, New Haven, 1961.
- Гротендик, Дьедонне (Grothendieck A., Dieudonné J.), *Éléments de Géométrie Algébrique*, I (Inst. des Hautes Études Scient., Publications Mathématiques, 4.) Presses Universitaires de France, Paris, 1960.
- Гурса (Goursat E.), Sur les Substitutions Orthogonales... *Ann Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), **6** (1889), 9—102.
- Дейринг (Deuring M.), *Algebren*, Chelsea and Springer, New York, 1948.
- Джанс (Jans J. P.), *Rings and Homology*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- Джекобсон (Jacobson N.), *Theory of Rings*, American Mathematical Society Surveys, Vol. 2, New York, American Mathematical Society, 1943. (Русский перевод: Джекобсон Н., Теория колец, ИЛ, М., 1952.)
- , *Lectures in Abstract Algebra, I: Basic Concepts*, Princeton, N. J., D. Van Nostrand Company, 1951.

- Джекобсон (Jacobson N.), *Lectures in Abstract Algebra, II: Linear Algebra*, Princeton, N. J., D. Van Nostrand Company, 1953.
- , *Structure of Rings*, Amer. Math. Soc. Colloquium, Vol. 36, Rev. ed. Providence, R. I., 1964. (Русский перевод первого издания 1956 г.: Джекобсон Н., *Строение колец*, ИЛ, М., 1961.)
- Джонсон (Johnson R. E.), *Prime Rings*, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 799—809.
- , *The Extended Centralizer of a Ring over a Module*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 891—895.
- , *Representations of Prime Rings*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 351—357.
- , *Semi-prime Rings*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 375—388.
- , *Structure Theory of Faithful Rings, I, II*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 508—522, 523—544.
- , *Structure Theory of Faithful Rings, III: Irreducible Rings*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 710—717.
- , *Quotient Rings of Rings with Zero Singular Ideal*, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 1385—1392.
- , *Principal Right Ideal Rings*, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 297—301.
- , *Distinguished Rings of Linear Transformations*, *Trans. Am. Math. Soc.*, **111** (1964), 400—412.
- , *Prime Matrix Rings*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 1099—1105.
- Джонсон, Уонг (Johnson R. E., Wong E. T.), *Quasi-injective Modules and Irreducible Rings*, *J. Lond. Math. Soc.*, **36** (1961), 260—268.
- Диксон (Dickson L. E.), *Algebras and Their Arithmetics*, New York, G. E. Stechert and Company, 1938.
- Дьедонне (Dieudonné J.), *Les Produits Tensoriels*, *Ann. Ecole Norm.*, **64** (1947), 101—117.
- , *Les Idéaux Minimaux dans les Anneaux Associatifs*, *Proc. Int. Cong. Mathematicians*, **2** (1950), 44—48.
- Жантиль (Gentile E. R.), *On Rings with One-sided Field of Quotients*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 380—384.
- , *Singular Submodule and Injective Hull*, *Indag. Math.*, **24** (1962), 426—433.
- Жаффар (Jaffard P.), *Les Systèmes d'Idéaux*, Paris, Dunod, 1960.
- Зарисский, Самюэль (Zariski O., Samuel P.), *Commutative Algebra. I*, D. Van Nostrand Company, Princeton, 1958. (Русский перевод: Зарисский О., Самюэль Р., *Коммутативная алгебра, I*, ИЛ, М., 1963.)
- Елизаров В. П.*, *Кольца частных, Алгебра и логика*, **8**, № 4 (1969), 381—424.
- Капланский (Kaplansky I.), *Modules over Dedekind Rings and Valuation Rings*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 327—340.

- Капланский (Kaplansky I.), Infinite Abelian Groups, Ann Arbor, University of Michigan Press, 1954; II ed., 1969.
- , Rings of Operators, W. A. Benjamin, New York, 1968.
- , Projective Modules, *Ann. Math.*, **68** (1958), 372—377. (Русский перевод в сб. «Математика», 4:1 (1960), 3—8.)
- Картан, Эйленберг (Cartan H., Eilenberg S.), Homological Algebra, Princeton University Press, Princeton, 1956. (Русский перевод: Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960.)
- Каш (Kasch F.), Projektive Frobenius-Erweiterungen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse (1960—1961), 89—109.
- Ко (Koh K.), A Note on a Self-injective Ring, *Canad. Math. Bull.*, **8** (1965), 29—32.
- Кон (Cohn P. M.), On the Embedding of Rings in Skew Fields, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **11** (1961), 512—530.
- , Universal Algebra, New York, Harper & Row, 1965. (Русский перевод: Кон П., Универсальная алгебра, ИЛ, М., 1968.)
- Коннел (Connell I. G.), On the Group Ring, *Can. J. Math.*, **15** (1963), 650—685.
- , A Number Theory Problem Concerning Finite Groups and Rings, *Canad. Math. Bull.*, **7** (1964), 23—24.
- Круль (Kruhl W.), Idealtheorie, Chelsea and Springer, New York, 1948.
- Курош А. Г. Теория групп, изд. 3-е дополн., «Наука», М., 1967.
- Кертес* (Kertész A.), Vorlesungen über Artinsche Ringe, Akademiai Kiado, Budapest, 1967.
- Кэртис, Райнер (Curtiss C. W., Reiner J.), Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, New York, Interscience Publishers, 1962. (Русский перевод: Кэртис К., Райнер И., Представления конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», М., 1969.)
- Лавер (Lawvere F. W.), Functorial Semantics of Algebraic Theories, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **50** (1963), 869—872.
- Ламбек (Lambek J.), Goursat's Theorem and the Zassenhaus Lemma, *Canad. J. Math.*, **10** (1957), 45—56.
- , On the Structure of Semi-prime Rings and their Rings of Quotients, *Canad. J. Math.*, **13** (1961), 392—417.
- , On the Calculus of Syntactic Types, *Proc. Symp. in Appl. Math.*, **12** (1961), 166—178.
- , On Utumi's Ring of Quotients, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 363—370.
- , A Module is Flat if and Only if Its Character Module is Injective, *Canad. Math. Bull.*, **7** (1964), 237—343.
- , Goursat's Theorem and Homological Algebra, *Canad. Math. Bull.*, **7** (1964), 597—608.

- Ламбек (Lambek J.), On the Ring of Quotients of a Noetherian Ring, *Canad. Math. Bull.*, 8 (1965), 279—289.
- *, Completions of Categories, Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.
- *, Torsion Theories, Additive Semantics, and Rings of Quotients, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- Леви (Levy L.), Torsion-free and Divisible Modules over Non-integral Domains, *Canad. J. Mat.*, 15 (1963), 132—151.
- , Unique Subdirect Sums of Prime Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106 (1963), 64—76.
- Лезье, Крузо (Lesieur L., Croisot R.), Sur les Anneaux Premiers, Noethériens à Gauche, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 76 (1959), 161—183.
- , Algèbre Noéthérienne Non-commutative. (Mémorial des sciences mathématiques. Fasc. 44.), Gauthier-Villars, Paris, 1963.
- , Coeur d'un Module, *J. Math.*, 42 (1963), 367—407.
- Ленг* (Lang S.), Алгебра, «Мир», М., 1968.
- Маккой (McCooy N. H.), Subdirectly Irreducible Commutative Rings, *Duke Math. J.*, 12 (1945), 381—387.
- , Rings and Ideals (Carus Math. Monographs, 8), Menascha, Wis., Mathematical Association of America, 1948.
- , Prime Ideals in General Rings, *Amer. J. Math.*, 71 (1949), 823—833.
- , The Prime Radical of a Polynomial Ring, *Publ. Math. (Debrecen)*, 4 (1956), 161—162.
- , A Note on Finite Unions of Ideals and Subgroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 633—637.
- , Certain Classes of Ideals in Polynomial Rings, *Canad. J. Math.*, 9 (1957), 352—362.
- , The Theory of Rings, Macmillan Company, New York, 1964.
- Маклафлин (McLaughlin J. E.), A Note on Regular Group Rings, *Mich. Math. J.*, 9 (1958), 127—128.
- Маклейн (MacLane S.), An Algebra of Additive Relations, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.*, 47 (1961), 1043—1051.
- , Homology, Berlin, Springer-Verlag OHG; New York, Academic Press, 1963. (Русский перевод: Маклейн С., Гомология, «Мир», М., 1965.)
- , Categorical Algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71 (1965), 40—106.
- Мальцев А. И., О включении ассоциативных систем в группы, II, *Матем. сб.*, 8 (50) (1940), 251—264.
- , Об общей теории алгебраических систем, *Матем. сб.*, 35 (1954), 3—20.
- Маранда (Maranda J.-M.), Injective Structures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 110 (1964), 98—135.
- Марес (Mares E. A.), Semi-perfect Modules, *Math. Z.*, 82 (1963), 347—360.
- Матлис (Matlis E.), Injective Modules over Noetherian Rings, *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 511—528.

- Мёрдох (Murdoch D. C.), Subrings of the Maximal Ring of Quotients Associated with Closure Operations, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 723—743.
- Михалев А. В., Скорняков Л. А.,* Модули, в сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1968 (Итоги науки. ВИНТИ АН СССР)», 1970, 57—100.
- Мишина А. П., Скорняков Л. А.,* Абелевы группы и модули, «Наука», М., 1969.
- Морита, Кавада, Тахикава (Morita K., Kawada Y., Tachikawa H.), On Injective Modules, *Math. Z.*, **68** (1957), 217—226.
- Нагата (Nagata M.), Local Rings, New York, Interscience Publishers, 1962.
- Нейман Б. (Neumann B. H.), Groups with Finite Classes of Conjugate Elements, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **1** (1951), 178—187.
- Нейман Дж. (von Neumann J.), On Regular Rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **22** (1936), 707—713.
- Норткотт (Northcott D. G.), Ideal Theory, Cambridge Tracts in Mathematics, 42, London, Cambridge University Press, 1953.
- , An Introduction to Homological Algebra. Lond., Cambridge University Press, 1960.
- Ософская (Osofsky Barbara), Rings All of Whose Finitely Generated Modules are Injective, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 645—650.
- , On Ring Properties of Injective Hulls, *Canad. Math. Bull.*, **7** (1964), 405—413.
- Пасман (Passman D. S.), Nil Ideals in Group Rings, *Mich. Math. J.*, **9** (1962), 375—384.
- Пирс* (Pierce R.) Introduction to the theory of abstract algebras, London, 1968.
- Познер (Posner E. C.), Prime Rings Satisfying a Polynomial Identity, *Proc. Am. Math. Soc.*, **11** (1960), 180—183.
- Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Гостехиздат, М., 1954.
- Рибенбойм (Ribenboim P.), Modules and Rings, Multi-graphed lecture notes, London, Ont, Queen's University, 1965.
- *, Rings and Modules, New York, London, Sydney, Toronto, 1969.
- Розенберг, Зелинский (Rosenberg A., Zelinsky D.), Finiteness of the Injective Hull, *Math. Z.*, **70** (1959), 372—380.
- , Annihilators, *Port. Math.*, **20** (1961), 53—65.
- Сандерсон (Sanderson D. F.), A Generalization of Divisibility and Injectivity in Modules, *Canad. Math. Bull.*, **8** (1965), 505—513.

- Сас Г. (Szász G.), Introduction to Lattice Theory, New York, Academic Press, 1963.
- Сас Ф. (Szász F.), Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptideale, III, *Acta Math.*, **14** (1963), 447—461.
- Са Чин-хан* (San Chin-han), Abstract Algebra, New York, Academic Press, 1967.
- Сикорский (Sikorsky R.), Boolean Algebras, Berlin, Springer-Verlag OHG, 1960; II ed., 1964. (Русский перевод: Сикорский Р., Булевы алгебры, «Мир», М., 1968.)
- Скорняков Л. А., * Кольца, В сб. «Алгебра. Топология, 1962 (Итоги науки, ВИНТИ АН СССР)», М., 1963, 59—79.
- *, Модули, В сб. «Алгебра. Топология, 1962 (Итоги науки, ВИНТИ АН СССР)», М., 1963, 80—89.
- *, Модули, В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия, 1965. (Итоги науки, ВИНТИ АН СССР)», М., 1967, 181—216.
- *, Гомологическая классификация колец, Математ. вестн., **4**, № 4 (1967), 415—434.
- *, Лекции по гомологической алгебре, Математ. вестн., **5**, № 1 (1968), 71—113.
- Талентайр (Talentyre T. D.), Quotient Rings of Rings with Maximum Condition on Right Ideals, *J. London, Math. Soc.*, **38** (1963), 439—450.
- Тамари (Tamari D.) On the Embedding of Birkhoff-Witt Rings in Quotient Fields, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 197—202.
- Тевари (Tewari K.), Complexes over a Complete Algebra of Quotients, *Canad. J. Math.*, **19** (1967), 40—57.
- Томинага (Tomimaga H.), Some Remarks on Radical Ideals, *Math. J. Okayama Univ.*, **3** (1954), 139—142.
- , A Note on Matrix Rings, *Math. J. Okayama Univ.*, **4** (1955), 189—191.
- Тьеррен (Thierrin G.), On Duo Rings, *Canad. Math. Bull.*, **3** (1960), 167—172.
- , Anneaux Métaprimitifs, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 199—205.
- Уайлер (Wyler O.), Categories of Structures, Technical report 32, Albuquerque, N. M., University of New Mexico, 1963.
- Уитни (Whitney H.), Tensor Products of Abelian Groups, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 495—528.
- Уокер К., Уокер Э. (Walker C. L., Walker E. A.), Quotient Categories and Rings of Quotients, *Trans. Amer. Math. Soc.* (в печати).
- Уонг, Джонсон (Wong E. T., Johnson E.), Self-injective Rings, *Canad. Math. Bull.*, **2** (1959), 167—174.
- Утуми (Utumi Y.), On Quotient Rings, *Osaka Math. J.*, **8** (1956), 1—18.

- Утуми (Utumi Y.), On a Theorem on Modular Lattices, *Proc. Japan Acad.*, **35** (1959), 16—21.
- , A Remark on Quasi-Frobenius Rings, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960), 15—17.
- , On Continuous Regular Rings and Semi-simple Self-injective Rings, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 597—605.
- , On Continuous Regular Rings, *Canad. Math. Bull.*, **4** (1961), 63—69.
- , On Rings of Which Any One-sided Quotient Rings Are Two-sided, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 141—147.
- , A Note on Rings of Which Any One-sided Quotient Rings Are Two-sided, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 287—288.
- , A Theorem of Levitzki, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 286.
- , On Prime I-Rings with Uniform One-sided Ideals, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 583—596.
- Файн, Гиллман, Ламбек (Fine N. J., Gillman L., Lambek J.), Rings of Quotients of Rings of Functions, McGill University Press, Montreal, 1965. (См. также *Notices Am. Math. Soc.*, **7** (1960), 980; **8** (1961), 60—61.)
- Фейт (Faith C.), Rings with Minimum Condition on Principal Ideals I; II, *Arch. Math.*, **10** (1959), 327—330; **12** (1961), 179—181.
- , Orders in Simple Artinian Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 61—64.
- , Lectures on Injective Modules and Quotient Rings, Lecture notes in Mathematics, 49, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- , Утуми (Faith C., Utumi Y.), On a New Proof of Löffler's Theorem, *Acta Math.*, **14** (1963), 369—371.
- , Baer Modules, *Arch. Math.*, **15** (1964), 266—270.
- , Quasi-injective Modules and Their Endomorphism Rings, *Arch. Math.*, **15** (1964), 166—174.
- , On Noetherian Prime Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 53—60.
- , Intrinsic Extensions of Rings, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 505—512.
- Феллер (Feller E. H.), Properties of Primary Noncommutative Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 79—91.
- , Noetherian Modules and Noetherian Injective Rings, *Tôhoku Math. J.*, **17** (1965), 130—138.
- Феллер, Своковский (Feller E. H., Swokowski E. W.), Reflective N -prime Rings with the Ascending Chain Condition, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **99** (1961), 264—271.
- , On Ring Extensions for Completely Primary Noncommutative Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105** (1962), 251—263.
- , The Ring of Endomorphisms of a Torsion-free Module, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 41—42.
- Финдлей (Findlay G. D.), Reflexive Homomorphic Relations, *Canad. Math. Bull.*, **3** (1960), 131—132.

- Финдлей (Findlay G. D.), Multiplicative Ideal Theory and Rings of Quotients, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **68**, Part I (1968), 30—53.
- Финдлей, Ламбек (Findlay G. D., Lambek J.), A Generalized Ring of Quotients I; II; *Canad. Math. Bull.*, **1** (1958), 77—85, 155—167.
- Флайшер (Fleischer I.), A Note on Subdirect Products, *Acta Math.*, **6** (1955), 463—465.
- Фудзивара (Fujiwara T.), On the Existence of Algebraically Closed Algebraic Extensions, *Osaka Math. J.*, **8** (1956), 23—33.
- Фукс* (Fuch L.), Частично упорядоченные алгебраические системы, «Мир», М., 1965.
- Халмош (Halmos P. R.), Boolean Algebras, Multigraphed lecture notes Chicago, University of Chicago Press, 1959.
- , Lectures on Boolean Algebras. Princeton, N. Y., D. Van Nostrand Company, 1963.
- Херстейн (Herstein I. N.), Theory of Rings, Multigraphed lecture notes, Chicago, University of Chicago Press, 1961.
- , A Theorem of Levitzki, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 213—214.
- *, Noncommutative Rings, New York, 1968.
- Хилтон, Ледерман (Hilton P. J., Ledermann W.), On the Jordan-Hölder Theorem in Homological Monoids, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **10** (1960), 321—334.
- Хилтон, Уайли (Hilton P. J., Wylie S.), Homology Theory, London, Cambridge, University Press, 1960. (Русский перевод: Хилтон П. Дж., Уайли С., Теория гомологий, «Мир», М., 1966.)
- Христенсен (Christensen J.), On Maximal Rings of Right Quotients, *Canad. Math. Bull.*, **5** (1962), 147—149.
- Чейз (Chase S. U.), Direct Product of Modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 457—473.
- Шода (Shoda K.), Allgemeine Algebra, *Osaka Math. J.*, **1** (1949), 182—225.
- , Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, *Osaka Math. J.*, **4** (1952), 133—144.
- , Berichtigung zu den Arbeiten über die Erweiterungen algebraischer Systeme, *Osaka Math. J.*, **9** (1957), 239—240.
- Цассенхауз (Zassenhaus H. J.), The Theory of Groups, New York, Chelsea Publishing Company, 1958.
- Экман, Шопф (Eckmann B., Schopf A.), Über injective Moduln, *Arch. Math.*, **4** (1953), 75—78.
- Ятегаонкар (Jategaonkar), Left Principal Ideal Rings, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абелева группа 9
- Автоморфизм 20
- Адзумая теорема 127
- Аксиома выбора 31
- Аннулятор 60
- Аннуляторный идеал 72, 178
- Артинов модуль 39
- Артиново кольцо 110
- Атом 45, 82
- Атомная булева алгебра 82

- Базис открытых множеств 79
 - свободного модуля 132
- Билинейное отображение 187
- Бимодуль 88, 101
- Бифунктор 193, 214
- Большой подмодуль 99, 162
- Булева алгебра 14
- Булево кольцо 14

- Веддербёрна — Артина теорема 108
- Векторное пространство 88, 106
- Верхняя грань 16
- Внешность 81
- Внутренность 80
- Вполне приводимое кольцо 106
 - приводимый модуль 99
 - примарное кольцо 59
 - упорядоченное множество 17

- Главный идеал 90
- Гомоморфизм 20, 30, 191
- Гомоморфное отношение 21
- Группа 9
 - характеров 143
- Групповое кольцо 234
- Делимая абелева группа 142
- Делитель нуля 47
- Дискретная топология 83

- Дистрибутивная структура 12
- Дитцмана лемма 233
- Дифференцирование 162
- Дополнение элемента 12
- Дробь 64
- Дуализация 140
- Дуальная булева алгебра 15
- Дуальный фильтр 55

- Естественный изоморфизм функторов 195

- Закон модулярности 25
- Замкнутое множество 78
- Замкнутый элемент 17
- Замкнутость относительно конечных произведений 51
- Замыкание 78

- Идеал 24
 - главный 90
 - нильпотентный 93
 - обратимый 162
 - первичный 90
 - плотный 63
 - правый 32
 - — минимальный 85
 - — сингулярный 17
 - — собственный 32
 - примитивный (справа) 86
 - простой 47
- Идемпотент 33
- Изоморфизм 20
- Инъективная оболочка 149
- Инъективный модуль 141

- Канонический мономорфизм 65
 - эпиморфизм 23
- Квазиинъективный модуль 167

- Китайская теорема об остатках 97
 Классическая дробь 66
 Классически полупростое кольцо 106
 Классическое кольцо частных 66
 — правое кольцо частных 173
 Ковариантный функтор 193
 Кольцо 10
 — артиново 110
 — булево 14
 — вполне приводимое 106
 — — примарное 59
 — групповое 234
 — классически полупростое 106
 — коммутативное 10
 — локальное 57, 123
 — метапримитивное 231
 — наследственное справа 139
 — нётерово 110
 — первичное 90
 — подпрямо неразложимое 53
 — полунаследственное справа 139
 — полупервичное 51, 93
 — полупримитивное 51, 95
 — полупростое 51, 106
 — полусовершенное 120
 — примарное 59
 — примитивное (справа) 86
 — простое 86
 — рационально полное 67
 — регулярное 56, 57
 — самоинъективное 77—78
 — частных 68
 — — классическое 66
 — — — правое 173
 — — — полное 65
 — — — правое 151
 Коммутативное кольцо 10
 Компактное топологическое пространство 78
 Композиционный ряд 38
 P -компонента идеала 223
 Конгруэнция 22
 Конечная топология 89
 Конечномерный модуль 162
 Контравариантный функтор 193
 Короткая точная последовательность 201
 Крулля — Ремака — Шмидта — Веддербёрна теорема 44
 Линейное преобразование 88
 Линейно упорядоченное множество 11
 Локальное кольцо 57, 123
 Локальный идемпотент 125
 Максимальное существенное расширение 147
 Максимальный идеал 47
 — элемент 31
 Малый подмодуль 149
 Матричная единица 182
 Метапримитивное кольцо 231
 Минимальный правый идеал 85
 Многообразие 10
 Модуль 28
 — артинов 39
 — без кручения 210
 — вполне приводимый 99
 — инъективный 141
 — квазиинъективный 167
 — конечномерный 162
 — неприводимый 85
 — неразложимый 42
 — нётеров 39
 — однородный типа T 168
 — плоский 204, 206
 — проективный 132
 — свободный 132
 — точный 86
 — характеров 143
 Модулярная структура 25
 Моноид 9
 Мономорфизм 20
 Наследственное справа кольцо 139
 Неделитель нуля 173
 Неприводимый модуль 85
 Неразложимый модуль 42
 — в пересечение подмодуль 168
 Несократимая дробь 66
 Нётеров модуль 39
 Нётерово кольцо 110

- Нижний конус 74
Нижняя грань 16
Ниль-идеал 118
Ниль-подмножество 114
Нильпотентный идеал 93
— элемент 50, 92
Носитель 234
Нулевой гомоморфизм 200
- Область значений 198
— определения 198
— целостности 47, 210
Образ 198
Обратимый идеал 162
— справа элемент 85, 94
— элемент 47
Обратное отношение 28
Обратный элемент 47
Однородная компонента 102
Однородный модуль типа T 168
Операция замыкания 17
Ортогональное множество
идемпотентов 120
Ортогональные идемпотенты 33
Отделимые точки 225
Открытое множество 78
- Пасмана лемма 232
Первичное кольцо 90
Первичный идеал 90
— радикал 49—50, 92
Плоский модуль 204, 206
Плотная подгруппа 68
Плотное подмножество 90, 231
Плотный идеал 63
— подмодуль 154
Подкольцо 19
Поднятие идемпотентов 108
Подпрямое произведение 52
Подпрямо неразложимое кольцо 53
Поле 10, 47
Полная абелева группа 142
— булева алгебра 17
— структура 16
Полное кольцо частных 65
— правое кольцо частных 151
Полугруппа 9
Полунаследственное справа
кольцо 139
Полупервичное кольцо 51, 93
- Полупрimitивное кольцо 51, 95
Полупростое кольцо 51, 106
Полусовершенное кольцо 120
Полуструктура 11
Полярность 77
Пополнение Дедекинда — Мак-
нейла 75
— сечениями 75
Правое кольцо частных 158—
159
Правый идеал 32
— R -модуль 28
— порядок 182
— сингулярный идеал 170
Примарное кольцо 59
Примитивное (справа) кольцо
86
Примитивный (справа) идеал
86
— идемпотент 120
Принцип полного упорядочива-
ния 31
Проективное накрытие 149
Проективный модуль 132
Простое кольцо 86
Простой идеал 47
Прямая сумма 33
— — внешняя 34, 130
Прямое произведение 32
Прямой мономорфизм 145
— эпиморфизм 134
Пучок 228
- Радикал 49, 94
— Джекобсона 49, 94
— модуля 98
Размерность векторного про-
странства 107
Рациональное пополнение 167
Рационально полное кольцо 67
Регулярное кольцо 56—57
— открытое множество 81
- Самоинъективное кольцо 77—
78
Свободный модуль 132
Связывающие гомоморфизмы
218
Сечение 228
Сингулярный подмодуль 170
— правый идеал 170

- Смежный класс 22
Собственный правый идеал 32
— фильтр 55
Строго нильпотентный элемент 92
Структура 12
— с дополнениями 12
Сумма абелевых групп 25
Существенное расширение 146

Тело 10, 85
Тензорное произведение 186
Терциарный радикал 169
Теорема Гильберта о базисе 115
— плотности 88
Топологическое пространство 78
Топология произведения 89
Точная верхняя грань 12, 16
— нижняя грань 16
— пара 199
— последовательность 199
Точный модуль 86
— слева функтор 202
— справа функтор 202

Ультрафильтр 55
Упорядоченное множество 10
Условие Ore 174

Фактор 38
Фильтр 55
Фиттинга лемма 42
Функтор 193

Хаусдорфово топологическое пространство 225

Цассенхауза лемма 37
Центр 32
Централизатор 242
Центральный элемент 32
Цепь подмодулей 38
Цоколь 98
Цорна лемма 31

Частичное произведение 27
Частные 26

Шраера теорема 38
Шура лемма 87

Эквационально определенный класс 10
Эндоморфизм 20
Эпиморфизм 20

Ядро 198

УКАЗАТЕЛЬ МЕНЕЕ ОБЩЕПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $a \wedge b = \inf \{a, b\}$ 11
 $a \vee b = \sup \{a, b\}$ 12
 $\psi \circ \varphi$ композиция или произведение 20
 $\varphi * \psi$ композиция или произведение 20
 $A \cdot B$ A над B 26
 $B \cdot A$ B под A 26
 $\sum^{\oplus}$ внешняя прямая сумма 34
 $B(R)$ булева алгебра центральных идемпотентов 45
 K^* аннулятор 60, 72, 178
 $Q = Q(R)$ полное правое кольцо частных 65, 151
 $Q_{cl} = Q_{ol}(R)$ классическое (правое) кольцо частных 66, 173
 $B^*(R)$ булева алгебра аннуляторных идеалов 72
 X^{Δ} множество всех верхних граней множества X 74
 X^{∇} множество всех нижних граней множества X 74
 $D(S)$ пополнение Дедекинда — Макнейла 75
 $\Gamma A = \{P \in \Pi \mid A \not\subseteq P\}$ 79
 $\Delta V = \bigcap_{P \subset V} P$ 80
 $R[x]$ кольцо многочленов 97, 115
 $L[A]$ структура подмодулей 100
 M_R^* модуль характеров 143
 $I_R = I(R_R)$ 151
 $H = H(R) = \text{Hom}_R(I, I)$ 151
 $J(M_R)$ сингулярный подмодуль 170
 A^r правый аннулятор идеала A 178
 $B \oslash_s A$ B над A 190
 $B \oslash_t C$ B под C 190
 $\beta \oslash \alpha, \beta \oslash \gamma, \beta \oslash \alpha$ 191
 $\text{Im } l, \text{Ker } 2$ 213
 A_P P -компонента 223
 $A^P = \{q \in Q \mid q^{-1}A \not\subseteq P\}$ 226
 AG 234
 ωH 235
 A^l левый аннулятор правого идеала 236
 $C(g), C(r^*)$ централизатор 242
 G^* 242
 G^+ 250
 tr 251

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Введение	7
Глава 1. Основные алгебраические понятия	9
§ 1.1. Кольца и связанные с ними алгебраические системы	9
§ 1.2. Подкольца, гомоморфизмы и идеалы	19
§ 1.3. Модули, прямые произведения и прямые суммы	28
§ 1.4. Классические теоремы об изоморфизмах	36
Глава 2. Некоторые вопросы теории коммутативных колец	47
§ 2.1. Простые идеалы в коммутативных кольцах	47
§ 2.2. Простые идеалы в некоторых классах коммутативных колец	55
§ 2.3. Полное кольцо частных коммутативного кольца	62
§ 2.4. Кольца частных коммутативных полупервичных колец	71
§ 2.5. Пространства простых идеалов	78
Глава 3. Классическая теория ассоциативных колец	85
§ 3.1. Примитивные кольца	85
§ 3.2. Радикалы	92
§ 3.3. Вполне приводимые модули	98
§ 3.4. Вполне приводимые кольца	103
§ 3.5. Артиновы и нётеровы кольца	110
§ 3.6. Поднятие идемпотентов	118
§ 3.7. Локальные и полусовершенные кольца	123
Глава 4. Инъективность и близкие вопросы	130
§ 4.1. Проективные модули	130
§ 4.2. Инъективные модули	140
§ 4.3. Полное кольцо частных	151
§ 4.4. Кольца эндоморфизмов инъективных модулей	162
§ 4.5. Регулярность кольца частных	169
§ 4.6. Классические кольца частных	173
§ 4.7. Теорема Фейта — Утуми	181

Глава 5. Введение в гомологическую алгебру	186
§ 5.1. Тензорное произведение модулей	186
§ 5.2. Функторы Hom и $\otimes$	191
§ 5.3. Точные последовательности	198
§ 5.4. Плоские модули	206
§ 5.5. Функторы Tor и Ext	212
Приложения	222
Функциональные представления	222
Групповое кольцо	232
Полупервичные групповые кольца. <i>Ян Коннел</i>	250
Комментарии	255
Библиография	263
Предметный указатель	273
Указатель менее общепринятых обозначений	277

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу:

129820. Москва, И—110, ГСП
1-й Рижский пер., д. 2,
издательство «Мир».

И. Л а м б е к КОЛЬЦА И МОДУЛИ

редактор *Г. М. Цукерман*

Художник *Н. А. Фильчагина*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов*

технический редактор *И. К. Дерва*

Корректор *В. И. Бедель*

дано в набор 2/III 1971 г.

Подписано к печати 27/IX 1971 г.

умага № 2. $84 \times 108 \frac{1}{32} = 4,38$ бум. л. 14,70 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 12,29.

Изд. № 1/5817. Цена 85 к. Зак. 1027.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при
Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29