

М. И. Дьяченко П. Л. Ульянов

МЕРА И ИНТЕГРАЛ

Факториал

Университетский учебник

М. И. Дьяченко П. Л. Ульянов

МЕРА И ИНТЕГРАЛ

Москва „Факториал“ 1998

ББК 22.162
Д 93
УДК 517.5

Д 93 Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. — М.: Изд-во «Факториал», 1998. — 160 с. — ISBN 5-88688-034-8.

Книга представляет собой вводный курс в теорию меры и интеграла и предназначена для начального знакомства с предметом.

Авторы настоящего пособия поставили своей целью создание учебника, максимально приближенного к университетскому курсу действительного анализа и опирающегося на многолетний опыт преподавания этой дисциплины на механико-математическом факультете Московского государственного университета.

Основные вопросы, рассматриваемые в книге — это теория меры, измеримые функции, интеграл Лебега.

Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.

Библиогр. 15.



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований.
Проект № 97-01-14094.

Научное издание

Дьяченко Михаил Иванович

Ульянов Петр Лаврентьевич

Мера и интеграл

Редактор *Васильева О. А.*

Оригинал-макет *Панкратьев К. Е.*

Формат 60 × 90/16. Гарнитура литературная. Усл. печ. л. 10. Бумага офсетная № 1. Подписано к печати 17.8.1998. Тираж 1000 экз. Заказ № 4243.

Издательство «Факториал», 117449, Москва, а/я 331; ЛР № 063537 от 22.07.1994.

Оригинал-макет подготовлен с использованием макропакета **AP-TeX**.

Отпечатано в ППП типографии «Наука» Академиздатцентра «Наука РАН». 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-88688-034-8

© М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов, 1998

© Факториал

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1	
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МЕРЫ	7
§ 1. Множества и операции над ними. Системы множеств	7
§ 2. Конечные меры на системах множеств	13
§ 3. Внешняя мера. Продолжение меры по Лебегу и по Жордану	19
§ 4. Мера Бореля. Меры Лебега—Стилтьеса	26
§ 5. σ -конечные меры. Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$	28
§ 6. Непрерывность и полнота мер	30
§ 7. Неизмеримые множества	32
§ 8. Прямые произведения мер	34
§ 9. Структура измеримых множеств	36
Глава 2	
ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ	42
§ 10. Определение и основные свойства	42
§ 11. Множество Кантора и кривая Кантора	48
§ 12. Сходимость по мере и ее свойства	51
§ 13. Сходимость почти всюду	55
Глава 3	
ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА	60
§ 14. Интеграл Лебега для простых функций	60
§ 15. Интеграл Лебега для произвольных измеримых функций	63
§ 16. Переход к пределу под знаком интеграла Лебега ...	71
§ 17. Дальнейшие свойства интеграла Лебега	76
§ 18. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана .	80

Глава 4

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА	83
§ 19. Теорема Лузина	83
§ 20. Заряды. Теорема Радона—Никодима	86
§ 21. σ -аддитивность прямого произведения мер. Теорема Фубини	93
§ 22. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства L_p	97
§ 23. Полнота и некоторые другие свойства пространств L_p	101

Глава 5

ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ И АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ	108
§ 24. Функции ограниченной вариации на отрезке	108
§ 25. Абсолютно непрерывные функции на отрезке	114
§ 26. Неопределенный интеграл Лебега	122
§ 27. Интегралы Римана—Стилтьеса и Лебега—Стилтьеса	130

Глава 6

ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ	136
§ 28. Гильбертово пространство	136
§ 29. Ортонормированные системы в гильбертовых пространствах	139
§ 30. Интерполирование линейных операторов в функциональных пространствах	144
§ 31. Некоторые теоремы о коэффициентах Фурье	149
§ 32. Теорема Карлемана и неусилимость теоремы Хаусдорфа—Юнга	154
Литература	159

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из наиболее важных математических дисциплин является анализ. Основным объектом изучения в анализе является функция. По поводу этого понятия Н. Н. Лузин [1, т. 3, с. 319–341] писал: «Оно не сложилось сразу, но, возникнув более двухсот лет тому назад в знаменитом споре о звучащей струне, подвергалось глубоким изменениям в начавшейся тогда энергичной полемике. С тех пор идут непрерывное углубление и эволюция этого понятия, которые продолжаются до настоящего времени. Поэтому ни одно отдельное формальное определение не может охватить всего содержания этого понятия...».

В связи с этим естественно отнести зарождение действительного анализа ко времени спора о колеблющейся струне (Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Д'Аламбер, Ж. Лагранж), хотя становление этой теории происходило в XIX в. (Ж. Фурье, О. Коши, Н. И. Лобачевский, П. Дирихле, Б. Риман, П. Л. Чебышев, К. Жордан).

В классическом анализе изучались в основном функции, имеющие определенную степень гладкости. Однако во второй половине XIX в. в анализе четко обрисовались некоторые ждавшие своего решения проблемы, касающиеся более общих классов функций, а также и более глубокого изучения гладких функций. К таким проблемам относились: проблема меры множества, длин кривых и площадей поверхностей, приближения и представления функций, первообразной и интеграла, взаимосвязи интегрирования и дифференцирования, почленного интегрирования и дифференцирования рядов, свойств функций, полученных в результате предельного перехода. Классические методы анализа не могли дать удовлетворительного ответа на вопросы такого типа. В связи с этим и возникла в конце XIX в. настоятельная необходимость пересмотра основ математического анализа, что было осуществлено в конце XIX – начале XX вв. на базе теории множеств. Этим завершилось создание основ современного действительного анализа.

Из сказанного видно, что действительный анализ может быть, с известной мерой условности, разделен на классический математический анализ и его более современную часть, основы

которой были заложены Э. Борелем, Р. Бэром и прежде всего А. Лебегом. В 1902 г. А. Лебег ввел чрезвычайно важное понятие меры множества. На основе этого понятия им была создана теория интеграла. Эти два понятия — мера и интеграл — составляют фундамент современного действительного анализа.

К настоящему времени написано немало хороших книг, освещающих различные аспекты действительного анализа. Прежде всего, нужно упомянуть монографии П. Халмоша [2] и С. Сакса [3], учебники А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [4], И. П. Натансона [5], Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя [6] и др.

Авторы настоящего пособия поставили своей целью создание учебника, максимально приближенного к университетскому курсу действительного анализа и опирающегося на многолетний опыт преподавания этой дисциплины на механико-математическом факультете Московского государственного университета. При этом были использованы наиболее удачные, по мнению авторов, подходы из упомянутых выше книг. Так, изложение теории меры в основном идет по схеме, предложенной А. Н. Колмогоровым и С. В. Фоминым [4], интеграл Лебега вводится по методике С. Сакса [3], при изложении теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций использованы некоторые рассуждения из книги И. П. Натансона [5]. Параграфы 31 и 32, связанные с теорией рядов Фурье, содержат доказательства, изложенные в известной монографии Н. К. Бари «Тригонометрические ряды» [7] и в одноименном двухтомнике А. Зигмунда [8].

В книге нашли свое отражение и методические разработки последних лет кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ. Это касается прежде всего изложения теории измеримых функций, а также теории неопределенного интеграла Лебега. Излагаемый материал полностью покрывает содержание лекционного курса действительного анализа, ныне читаемого на механико-математическом факультете МГУ в IV семестре, и отчасти — курса функционального анализа (V–VI семестры).

В качестве задачников по данным курсам авторы рекомендуют книги С. А. Теляковского [9], Ю. С. Очана [10] и А. А. Кириллова и А. Д. Гвишиани [11].

Авторы будут признательны за любые замечания по поводу содержания книги и способов изложения материала.

М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов

Г Л А В А 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МЕРЫ

§ 1. Множества и операции над ними. Системы множеств

Одним из основных понятий данного курса является понятие множества. На наш взгляд его разумно отнести к категории первичных, т. е. не определяемых через более простые. При этом, разумеется, следует иметь в виду, что неаккуратное использование термина «множество» может привести к противоречию. В качестве примера можно привести следующий хорошо известный парадокс Бертрانا Рассела.

Пусть S — это множество всех множеств. Тогда S состоит из двух подмножеств: P и N , где P состоит из множеств, являющихся элементами самих себя, а N , соответственно, из множеств, не являющихся собственными элементами. Тогда либо $N \in N$, и мы приходим к противоречию с определением N , либо $N \in P$. В последнем случае по определению P множество N должно являться собственным элементом, т. е. $N \in N$, и мы снова приходим к противоречию.

Таким образом, видно, что, оперируя с понятием множества, необходимо соблюдать большую осторожность. Поскольку к настоящему времени не было обнаружено парадоксов в ситуациях, когда множество составлялось из уже описанных ранее элементов, таких как точки пространства $\mathbb{R}^n$, функции на подмножествах $\mathbb{R}^n$ и т. д., упоминаемые в дальнейшем множества будут именно такими. Интересующихся более подробным изложением вопросов обоснования теории множеств отошлем к книге Ф. Хаусдорфа «Теория множеств» [12]. Отметим здесь лишь то, что в данном курсе безоговорочно принимается следующая аксиома Е. Цермело.

Пусть A — некоторое множество индексов и для любого $\alpha \in A$ задано некоторое множество B_α , причем $B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$

при $\alpha \neq \beta$, где через $\emptyset$ обозначено пустое множество. Тогда можно составить множество C , выбрав из каждого B_α по одному и только одному элементу.

Мы будем придерживаться обычных обозначений теории множеств, а именно:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}, \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}, \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \end{aligned}$$

и, наконец, запись $C = A \sqcup B$ означает, что $C = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$. Такое объединение ниже будем называть *дизъюнктым*.

В дальнейшем будут также использоваться стандартные тождества теории множеств. Не останавливаясь на их доказательстве ввиду его простоты, приведем здесь некоторые из этих тождеств:

- 1) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,
- 2) $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$,
- 3) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$,
- 4) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
- 5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
- 6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
- 7) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,
- 8) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
- 9) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

В дальнейшем будут использоваться такие определения для систем множеств.

Определение 1.1. Система множеств S называется *полукольцом*, если:

- 1) $\emptyset \in S$,
- 2) если $A, B \in S$, то $A \cap B \in S$,
- 3) если $A, A_1 \in S$ и $A_1 \subset A$, то существует конечное число таких множеств $A_2, \dots, A_n \in S$, что $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n = A$.

Если при этом существует такое $E \in S$, что для любого $A \in S$ множество $A \subseteq E$, то E называется *единицей полукольца*, а S — *полукольцом с единицей*.

Примеры

1. Множество полуинтервалов $\{[\alpha, \beta) \subseteq [a, b)\}$, включая пустой, образует полукольцо с единицей $[a, b)$.

2. Множество промежутков, т. е. интервалов, полуинтервалов или отрезков $\{\{\alpha, \beta\} \subseteq [a, b]\}$ образует полукольцо с единицей $[a, b]$.

3. Примеры, аналогичные первому и второму, можно построить в пространстве $\mathbb{R}^n$, где, например,

$$\{\alpha, \beta\} = \{\alpha_1, \beta_1\} \times \{\alpha_2, \beta_2\} \times \dots \times \{\alpha_n, \beta_n\}.$$

4. Совокупность всех открытых множеств на прямой не является полукольцом.

Определение 1.2. Непустая система множеств R называется *кольцом*, если из того, что $A, B \in R$, вытекает, что $A \Delta B \in R$ и $A \cap B \in R$. Кольцо с единицей называется *алгеброй*.

Утверждение 1.1. Если R — кольцо, то R — полукольцо. Кроме того, если $A, B \in R$, то $A \cup B \in R$.

Доказательство. $\emptyset = A \Delta A \in R$. Второе требование из определения полукольца, очевидно, выполняется. Далее, $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$, откуда вытекает, что если $A, A_1 \in R$ и $A_1 \subset A$ то $A = A_1 \sqcup A_2$, где $A_2 = A \setminus A_1 \in R$. Наконец, если $A, B \in R$, то $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \in R$. $\square$

Утверждение 1.2. Пересечение любого семейства колец является кольцом (возможно, состоящим лишь из пустого множества).

Доказательство. Пусть $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ — некоторое семейство колец и $R = \bigcap_{\alpha \in \Omega} R_\alpha$. Тогда, так как $\emptyset \in R_\alpha$ при любом $\alpha \in \Omega$, мы имеем $\emptyset \in R$, откуда ясно, что R — непустая система множеств. Пусть $A, B \in R$. Тогда $A, B \in R_\alpha$ при любом $\alpha \in \Omega$. Так как R_α — кольцо, отсюда вытекает, что $A \Delta B \in R_\alpha$ и $A \cap B \in R_\alpha$. Поскольку это справедливо для любого $\alpha \in \Omega$, получим, что $A \Delta B \in R$ и $A \cap B \in R$, а это и требовалось доказать. $\square$

Следствие 1.1. Пересечение любого семейства алгебр с одной и той же единицей является алгеброй.

Утверждение 1.3. Пусть X — некоторая система множеств. Тогда существует такое кольцо $R(X)$, что $X \subseteq R(X)$, и если некоторое кольцо $R_1 \supseteq X$, то $R \subseteq R_1$. Это кольцо называется *минимальным кольцом, содержащим данную систему множеств*. Если система X обладает единицей, то $R(X)$ является алгеброй.

Доказательство. Пусть $X = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$. Положим $B = \bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$, и пусть $M(X)$ — множество всех подмножеств B . Отметим, что если X имело единицу E , то $B = E$. Тогда $M(X)$ — кольцо и $X \subseteq M(X)$. Пусть $P = \{P_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ — совокупность всех колец, содержащих X и содержащихся в $M(X)$. Положим $R(X) = \bigcap_{\beta \in \Gamma} P_\beta$. Согласно утверждению 1.2 $R(X)$ — кольцо.

Далее, очевидно, что $X \subseteq R(X)$.

Пусть теперь R_1 — кольцо и $X \subseteq R_1$. Тогда согласно утверждению 1.2 $R_2 = R_1 \cap M(X)$ также является кольцом. Но $R_2 \in P$ и, следовательно, $R(X) \subseteq R_2 \subseteq R_1$, что и требовалось доказать. $\square$

Для дальнейшего понадобится одна лемма.

Лемма 1.1. Пусть S — полукольцо, множества $A, A_1, A_2, \dots, A_n \in S$, $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq A$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно не пересекаются. Тогда найдутся такие множества $A_{n+1}, \dots, A_m \in S$, что $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$.

Доказательство. Применим метод индукции. При $n = 1$ утверждение содержится в определении полукольца. Пусть $n > 1$ и утверждение уже доказано для $n - 1$ множества. Тогда

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \sqcup \left(\bigcup_{j=1}^s B_j \right).$$

Положим $D_j = A_n \cap B_j \in S$ при $j = 1, \dots, s$. По определению полукольца при любом $j \in [1, s]$ найдутся такие множества $\{C_{j,l}\}_{l=1}^{l_j}$ из S , что

$$B_j = D_j \sqcup \left(\bigcup_{l=1}^{l_j} C_{j,l} \right).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} A &= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \left(\bigcup_{j=1}^s \left(D_j \sqcup \left(\bigcup_{l=1}^{l_j} C_{j,l} \right) \right) \right) = \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \sqcup \left(\bigcup_{j=1}^s D_j \right) \sqcup \left(\bigcup_{j=1}^s \bigcup_{l=1}^{l_j} C_{j,l} \right). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что, так как

$$A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) = \emptyset$$

и $A_n \subset A$, мы имеем $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^s B_j$, откуда $A_n = \bigcup_{j=1}^s D_j$. Тем самым лемма полностью установлена. $\square$

Теорема 1.1. Пусть S — полукольцо. Тогда минимальное кольцо, содержащее S , — это $R(S) = K(S) = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : A_i \in S, i = 1, 2, \dots, n \right\}$, т. е. $R(S)$ является совокупностью всех конечных дизъюнктивных объединений множеств из S .

Доказательство. Очевидно, что любое кольцо, содержащее S , содержит и $K(S)$. Докажем, что $K(S)$ — кольцо. Пусть $A, B \in K(S)$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ и $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$, где все $A_i, B_j \in S$. Положим $C_{i,j} = A_i \cap B_j$ при $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, k$. Тогда $C_{i,j}$ попарно не пересекаются и

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^k C_{i,j} \in K(S).$$

Далее, по лемме 1.1

$$A_i = \left(\bigcup_{j=1}^k C_{i,j} \right) \sqcup \left(\bigcup_{s=1}^{s_i} D_{i,s} \right)$$

и

$$B_j = \left(\bigcup_{i=1}^n C_{i,j} \right) \sqcup \left(\bigcup_{l=1}^{l_j} E_{j,l} \right),$$

где $D_{i,s}, E_{j,l} \in S$ при всех i, j, k, l . Тогда

$$A \triangle B = \left(\bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{s=1}^{s_i} D_{i,s} \right) \right) \sqcup \left(\bigcup_{j=1}^k \left(\bigcup_{l=1}^{l_j} E_{j,l} \right) \right) \in K(S),$$

и теорема полностью доказана. $\square$

Установим еще одно вспомогательное утверждение, которое будет использовано в дальнейшем.

Лемма 1.2. Если S — полукольцо и $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$, то найдутся такие попарно не пересекающиеся множества $B_1, B_2, \dots, B_k \in S$, что каждое A_i представляется в виде объединения некоторых B_j .

Доказательство. Применим метод индукции. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для $n-1$, где $n > 1$ и $B_1, \dots, B_q$ — система множеств, удовлетворяющих условиям леммы для $A_1, \dots, A_{n-1}$. Положим $C_s = B_s \cap A_n$ при $s = 1, 2, \dots, q$. По лемме 1.1 имеем

$$A_n = \left(\bigsqcup_{s=1}^q C_s \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{p=1}^m D_p \right),$$

где $D_p \in S$ для любого p , и по определению полукольца

$$B_s = C_s \sqcup \left(\bigsqcup_{r=1}^{r_s} B_{s,r} \right)$$

при $s = 1, \dots, q$, где $B_{s,r} \in S$ при всех s, r . Тогда множества

$$\{C_s\}_{s=1}^q, \quad \{B_{s,r}\}_{s=1, r=1}^{q, r_s}, \quad \{D_p\}_{p=1}^m$$

попарно не пересекаются, лежат в полукольце и при $1 \leq i \leq n$ множество A_i представляется в виде объединения некоторых элементов из этого набора. Тем самым лемма установлена. $\square$

Замечание 1.1. Ясно, что если $A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, то любое множество B_i , входящее в представление A_n , входит и в представление некоторого A_i , где $1 \leq i \leq n-1$.

Определение 1.3. Система множеств R называется σ -кольцом (δ -кольцом), если R — кольцо и из того, что $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq R$, вытекает, что $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in R$ ($A = \bigcap_{i=1}^\infty A_i \in R$). Соответственно определяются σ -алгебра и δ -алгебра.

Утверждение 1.4. Любое σ -кольцо является δ -кольцом. Обратное, вообще говоря, неверно, но любая δ -алгебра является σ -алгеброй.

Доказательство. Пусть R — σ -кольцо и $A_i \in R$ при $i = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^\infty A_i = A_1 \setminus \bigcup_{i=2}^\infty (A_1 \setminus A_i) \in R.$$

Далее, если R — δ -алгебра с единицей E и $A_i \in R$ при $i = 1, 2, \dots$, то

$$\bigcup_{i=1}^\infty A_i = E \setminus \bigcap_{i=1}^\infty (E \setminus A_i) \in R.$$

В то же время δ -кольцо всех ограниченных подмножеств множества действительных чисел не является σ -кольцом.

Аналогично предыдущему, легко установить, что пересечение любого числа σ -колец является σ -кольцом и что существует наименьшее σ -кольцо, содержащее данную систему множеств. Если эта система множеств имеет единицу, то наименьшее σ -кольцо будет σ -алгеброй. $\square$

Определение 1.4. *Борелевской σ -алгеброй $\mathbf{B}$ в $\mathbb{R}^n$ называется наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые множества в $\mathbb{R}^n$.*

§ 2. Конечные меры на системах множеств

Определение 2.1. Пусть S — полукольцо множеств, и задано отображение $m: S \rightarrow [0, +\infty)$. Тогда m называется *мерой*, если из того, что $A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$, где $A, A_1, \dots, A_k \in S$, вытекает, что $m(A) = \sum_{i=1}^k m(A_i)$. Если же, вдобавок, для любых

таких $A, A_1, \dots, A_k, \dots \in S$, что $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, имеет место равенство $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$, то m называется *σ -аддитивной мерой*.

Установим два вспомогательных утверждения.

Лемма 2.1. *Если m — мера на полукольце S , множества $A, A_1, \dots, A_n \in S$ и $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$, то $m(A) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i)$.*

Доказательство. По лемме 1.2 найдутся такие попарно не пересекающиеся множества $B_1, \dots, B_s \in S$, что каждое из множеств $A_1, \dots, A_n, A$ может быть представлено в виде объединения некоторых B_j . При этом (см. замечание 1.1) любое B_l , используемое в разложении A , входит в разложение хотя бы одного из A_i , где $1 \leq i \leq n$. Кроме того, можно считать, что любое из множеств B_l входит в некоторое разложение. Тогда

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) \geq \sum_{j=1}^s m(B_j) \geq m(A),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 2.2. Если m — мера на полукольце S , множества $A, A_1, \dots, A_n \in S$, а множества $A_i \subseteq A$ при $i = 1, \dots, n$ и A_i попарно не пересекаются, то $m(A) \geq \sum_{i=1}^n m(A_i)$.

Доказательство. По лемме 1.1 найдутся такие множества $A_{n+1}, \dots, A_k \in S$, что $A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$. Тогда

$$m(A) = \sum_{i=1}^k m(A_i) \geq \sum_{i=1}^n m(A_i),$$

а это и надо было установить. $\square$

Следствие 2.1. Если m — мера на полукольце S , $A, A_1, \dots, A_n, \dots \in S$ и $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A$, то $m(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Доказательство. Так как для любого n имеем $\bigsqcup_{i=1}^n A_i \subseteq A$, по лемме 2.2 получаем

$$m(A) \geq \sum_{i=1}^n m(A_i).$$

Совершив предельный переход, установим справедливость следствия. $\square$

Теперь приведем важный пример, с которого, собственно, и началась теория меры.

Пусть S — полукольцо промежутков

$$\{a, b\} = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\} \subseteq [A_1, B_1] \times \dots \times [A_n, B_n] = [A, B].$$

Положим

$$m(\{a, b\}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Неотрицательность функции m очевидна. Докажем, что m аддитивна. Доказательство проведем индукцией по размерности пространства. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$ и аддитивность введенной функции уже установлена для размерности $n - 1$. Тогда если

$$\{a, b\} = \{a(1), b(1)\} \sqcup \dots \sqcup \{a(k), b(k)\} \subseteq [A, B],$$

то рассмотрим точки $a_n(1), b_n(1), a_n(2), b_n(2), \dots, a_n(k), b_n(k) \in [a_n, b_n]$. Упорядочив их в порядке возрастания, получим разбиение отрезка $[a_n, b_n]$: $a_n = c(0) < c(1) < \dots < c(l) = b_n$. Теперь положим

$$\begin{aligned} A(1) &= \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_{n-1}, b_{n-1}\} \times (a_n, c(1)), \\ A(2) &= \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_{n-1}, b_{n-1}\} \times (c(1), c(2)), \\ &\dots \\ A(l) &= \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_{n-1}, b_{n-1}\} \times (c(l-1), b_n) \end{aligned}$$

и $E(j, s) = \{a(j), b(j)\} \cap A(s)$ при $j = 1, \dots, k$ и $s = 1, \dots, l$. Тогда, обозначая через F_n проекцию множества F на $(n-1)$ -мерное подпространство, натянутое на первые $n-1$ базисных вектора, имеем

$$E(j, s)_n = \begin{cases} \{a(j)_1, b(j)_1\} \times \dots \times \{a(j)_{n-1}, b(j)_{n-1}\}, & \text{если } (c_{s-1}, c_s) \subseteq \{a(j)_n, b(j)_n\}, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда при любом s имеем

$$A(s)_n = \bigsqcup_{j=1}^k E(j, s)_n.$$

Используя предположение индукции, имеем

$$\begin{aligned} m(\{a, b\}) &= \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \sum_{s=1}^l \prod_{i=1}^{n-1} (b_i - a_i)(c(s) - c(s-1)) = \\ &= \sum_{s=1}^l m_{n-1}(A(s)_n)(c(s) - c(s-1)) = \\ &= \sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^k m_{n-1}(E(j, s)_n)(c(s) - c(s-1)) = \\ &= \sum_{s=1}^l \sum_{j: \{a(j)_n, b(j)_n\} \supseteq (c_{s-1}, c_s)} \prod_{i=1}^{n-1} (b_i(j) - a_i(j))(c(s) - c(s-1)) = \\ &= \sum_{j=1}^k \prod_{i=1}^{n-1} (b_i(j) - a_i(j)) \sum_{s: (c_{s-1}, c_s) \subseteq \{a(j)_n, b(j)_n\}} (c(s) - c(s-1)) = \\ &= \sum_{j=1}^k \prod_{i=1}^{n-1} (b_i(j) - a_i(j))(b_n(j) - a_n(j)) = \sum_{j=1}^k m(\{a(j), b(j)\}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.1. *Введенная в предыдущем примере мера σ -аддитивна.*

Доказательство. Пусть

$$\{a, b\} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \{a(i), b(i)\}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем n -мерный отрезок $[\alpha, \beta] \subseteq \{a, b\}$ так, чтобы выполнялось неравенство $m([\alpha, \beta]) > m(\{a, b\}) - \varepsilon/2$, и n -мерные интервалы $(\alpha(i), \beta(i)) \supseteq \{a(i), b(i)\}$ так, чтобы выполнялись неравенства $m((\alpha(i), \beta(i))) < m(\{a(i), b(i)\}) + \varepsilon/2^{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots$. Тогда, так как, очевидно, что

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i),$$

по лемме Гейне—Бореля можно выбрать конечное число интервалов, покрывающих $[\alpha, \beta]$: $(\alpha(i_j), \beta(i_j))$, где $j = 1, \dots, k$. По лемме 2.1

$$\begin{aligned} m(\{a, b\}) &< m([\alpha, \beta]) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^k m((\alpha(i_j), \beta(i_j))) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} m((\alpha(i), \beta(i))) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(m(\{a(i), b(i)\}) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right) \leq \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} m(\{a(i), b(i)\}), \end{aligned}$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем, что

$$m(\{a, b\}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(\{a(i), b(i)\}).$$

Обратное неравенство составляет утверждение следствия 2.1 и, таким образом, теорема установлена. $\square$

Приведенные выше примеры показывают, что полукольца, вообще говоря, являются довольно бедными системами множеств, а потому естественно ставить вопрос о распространении меры на более широкие классы. Первым шагом в этом направлении является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть m — мера на полукольце S и $R(S)$ — наименьшее кольцо, содержащее S . Тогда функция ν , задаваемая на элементе кольца $A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$, где $A_1, \dots, A_k \in S$, формулой*

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^k m(A_i),$$

является мерой на $R(S)$. При этом, очевидно, $\nu(A) = m(A)$ для $A \in S$.

Доказательство. Вначале проверим корректность определения функции ν . Если имеется другое представление $A = \bigsqcup_{r=1}^s B_r$, где $B_1, \dots, B_s \in S$, то, полагая $D_{i,r} = A_i \cap B_r \in S$, получим, что

$$A_i = \bigsqcup_{r=1}^s D_{i,r} \quad \text{и} \quad B_r = \bigsqcup_{i=1}^k D_{i,r}$$

для всех i и r , а потому,

$$m(A_i) = \sum_{r=1}^s m(D_{i,r}) \quad \text{и} \quad m(B_r) = \sum_{i=1}^k m(D_{i,r}).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^k m(A_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^s m(D_{i,r}) = \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^k m(D_{i,r}) = \sum_{r=1}^s m(B_r),$$

откуда и вытекает корректность определения функции ν . Ее неотрицательность очевидна. Далее, пусть $A, A_1, \dots, A_n \in R(S)$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$. Тогда для любого i имеем $A_i = \bigsqcup_{j=1}^{j_i} A_{j,i}$, где все $A_{j,i} \in S$. Отсюда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{j_i} A_{j,i} \in R(S),$$

а потому

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{j_i} m(A_{j,i}) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i),$$

и теорема 2.2 установлена. $\square$

Замечание 2.1. Ясно, что продолжение меры с S на $R(S)$ единственно.

Следующая теорема устанавливает важнейшее свойство продолженной меры.

Теорема 2.3. Если m — σ -аддитивная мера на полукольце S , то мера ν σ -аддитивна на кольце $R(S)$.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A, A_1, A_2, \dots \in R(S)$. Тогда $A = \bigcup_{j=1}^k B_j$ и $A_i = \bigcup_{l=1}^{l_i} B_{j,i,l}$ при $i = 1, 2, \dots$, где все $B_j, B_{j,i,l} \in S$. Полагая $C_{j,i,l} = B_j \cap B_{i,l}$ при всех j, i и l , получим

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{l_i} C_{j,i,l} \quad \text{и} \quad B_{i,l} = \bigcup_{j=1}^k C_{j,i,l}$$

при $j = 1, \dots, k, i = 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, l_i$. Отсюда в силу σ -аддитивности меры m имеем

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{j=1}^k m(B_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{l_i} m(C_{j,i,l}) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{l_i} \left(\sum_{j=1}^k m(C_{j,i,l}) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{l_i} m(B_{i,l}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i), \end{aligned}$$

а это и нужно было установить. $\square$

Отметим еще одно свойство σ -аддитивных мер на полукольцах, которое любопытно сравнить со следствием 2.1.

Следствие 2.2. Если ν — σ -аддитивная мера на кольце R , множества $A, A_1, A_2, \dots \in R$ и $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, то

$$\nu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

(здесь и далее допускаются бесконечные значения в неравенствах).

Действительно, если $B_1 = A_1 \cap A$ и $B_n = (A \cap A_n) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ при $n > 1$, то для любого n множество $B_n \in R$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

§ 3. Внешняя мера. Продолжение меры по Лебегу и по Жордану

В предыдущем параграфе изучалось продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Стандартный пример полукольца промежутков n -мерного отрезка показывает, что и минимальное кольцо, содержащее данное полукольцо, представляет из себя не слишком богатую систему множеств. Поэтому возникает вопрос о возможности дальнейшего продолжения меры. Оказывается, что это возможно сделать, если исходное полукольцо имеет единицу, а мера σ -аддитивна. Основными продолжениями в этом случае являются продолжения по Лебегу и по Жордану. Для их изучения нам понадобятся понятия соответствующих внешних мер.

Итак, пусть на полукольце S с единицей E задана σ -аддитивная мера m . Мы будем считать, что ν — это продолжение меры m на кольцо $R(S)$.

Определение 3.1. Если множество $A \subseteq E$, то его *внешняя мера Жордана*

$$\mu_J^*(A) = \inf_{\substack{A_1, \dots, A_n \in S: \\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i}} \sum_{i=1}^n m(A_i).$$

Определение 3.2. Если множество $A \subseteq E$, то его *внешняя мера Лебега*

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{A_1, A_2, \dots \in S: \\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Таким образом, с формальной точки зрения внешняя мера Лебега отличается от внешней меры Жордана не слишком сильно. Тем не менее, это принципиально разные понятия. Так, например, при стандартном определении меры на полукольце промежутков на отрезке $[0, 1]$ внешняя мера Лебега множества всех рациональных чисел равна 0, а внешняя мера Жордана этого множества равна 1. Отметим также, что наличие единицы в полукольце обеспечивает конечность внешней меры для любого $A \subseteq E$.

З а м е ч а н и е 3.1. Из следствия 2.2 вытекает, что если $A \in R(S)$, то $\mu_j^*(A) = \mu^*(A) = \nu(A)$. Действительно, если

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n B_i,$$

где $B_1, \dots, B_n \in S$, то по определению $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^n m(B_i) = \nu(A)$.

С другой стороны, если

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,$$

где $C_1, \dots, C_j, \dots \in S$, то согласно следствию 2.2

$$\nu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j).$$

Переходя в правой части последнего неравенства к нижней грани по всем наборам $\{C_j\}$, покрывающим A , получим, что $\nu(A) \leq \mu^*(A)$, а это и надо было проверить. Для меры Жордана доказательство аналогично.

З а м е ч а н и е 3.2. При любом $A \subseteq E$ выполнено неравенство $\mu^*(A) \leq \mu_j^*(A)$.

У т в е р ж д е н и е 3.1. Величина внешних мер Лебега и Жордана не изменится, если в определениях 3.1 и 3.2 рассматривать покрытия множества A только системами попарно непересекающихся множеств из S .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим этот факт для внешней меры Лебега (в случае меры Жордана доказательство такое же). Пусть $A \subseteq X$, множества $A_1, A_2, \dots \in S$ и $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Положим $B_1 = A_1$ и $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ при $i = 2, 3, \dots$. Тогда множества B_i попарно не пересекаются и $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Кроме того, $B_i \in R(S)$ при любом i . Поэтому

$$B_i = \bigsqcup_{j=1}^{j_i} C_{i,j}$$

при $i = 1, 2, \dots$, где все множества $C_{i,j} \in S$. Но тогда

$$A \subseteq \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{j_i} C_{i,j},$$

причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_i} m(C_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\inf_{\substack{C_1, C_2, \dots \in S: \\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) \leq \inf_{\substack{A_1, A_2, \dots \in S: \\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \mu^*(A).$$

Поскольку обратное неравенство очевидно, утверждение установлено. $\square$

Основное свойство внешней меры Лебега устанавливается в следующем утверждении.

Теорема 3.1. Если множества $B, B_1, B_2, \dots \subseteq E$ и $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, то

$$\mu^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i).$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда по определению внешней меры Лебега для любого i найдутся такие множества $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots \in S$, что $B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(A_{i,j}) < \mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Но тогда $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,j}$ и, следовательно,

$$\mu^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m(A_{i,j}) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и вытекает утверждение теоремы. $\square$

Следствие 3.1. Для любых $A, B \subseteq E$ имеет место оценка

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B).$$

Такое же утверждение справедливо и для внешней меры Жордана.

Доказательство. Действительно, считая для определенности, что $\mu^*(A) \geq \mu^*(B)$, и используя тот факт, что $A \subseteq B \cup (A \Delta B)$, по теореме 3.1 имеем $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B)$, а это и нужно было установить. $\square$

З а м е ч а н и е 3.3. Аналогичное теореме 3.1 утверждение справедливо и для внешней меры Жордана, но только для случая конечных объединений множеств. Доказательство этого факта проводится точно так же.

О п р е д е л е н и е 3.3. Скажем, что множество $A \subseteq E$ измеримо по Лебегу (по Жордану), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $A_\varepsilon \in R(S)$, что $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$ ($\mu_J^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$). Обозначим соответственно через M и M_J совокупность всех подмножеств E , измеримых по Лебегу и по Жордану.

Из замечания 3.2 следует, что $M_J \subseteq M$. Кроме того, ясно, что $R(S) \subseteq M_J \subseteq M$. Приведенный выше пример множества всех рациональных чисел на $[0, 1]$ показывает, что, вообще говоря, $M_J \neq M$.

Т е о р е м а 3.2. Множества M и M_J являются алгебрами.

Доказательство. Докажем теорему лишь для M , так как для M_J доказательство аналогично. Очевидно, что $E \in M$. Предположим, что множества $A, B \in M$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in R(S)$ так, чтобы $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon/2$ и $\mu^*(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Тогда, так как множества $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon, A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon \in R(S)$ и

$$\begin{aligned}(A \cap B) \Delta (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) &\subseteq (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon), \\ (A \Delta B) \Delta (A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon) &\subseteq (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon),\end{aligned}$$

имеем (см. теорему 3.1)

$$\mu^*((A \cap B) \Delta (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)) < \varepsilon$$

и

$$\mu^*((A \Delta B) \Delta (A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon)) < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает, что $A \cap B, A \Delta B \in M$, и, таким образом, теорема доказана. $\square$

Теорема 3.3. *На множестве M (M_J) функция μ^* (μ_J^*) аддитивна.*

Доказательство. Снова рассмотрим только случай M . Достаточно доказать аддитивность внешней меры для дизъюнктного объединения двух множеств из M . Итак, пусть $B, C \in M$ и $A = B \sqcup C$. Тогда по теореме 3.2 $A \in M$, а по теореме 3.1

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(C). \quad (3.1)$$

Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$ и выберем множества $B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S)$ так, чтобы $\mu^*(B \Delta B_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и $\mu^*(C \Delta C_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Поскольку

$$A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \subseteq (B \Delta B_\varepsilon) \cup (C \Delta C_\varepsilon),$$

по теореме 3.1

$$\mu^*(A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \leq 2\varepsilon. \quad (3.2)$$

Далее,

$$B_\varepsilon \cup C_\varepsilon = B_\varepsilon \sqcup (C_\varepsilon \setminus (B_\varepsilon \cap C_\varepsilon)),$$

и так как B и C не пересекаются, то

$$B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \subseteq (C_\varepsilon \setminus C) \cup (B_\varepsilon \setminus B).$$

Учитывая, что (см. замечание 3.1) на $R(S)$ функция μ^* совпадает с аддитивной функцией ν , откуда получаем, что

$$\begin{aligned} \mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) &= \mu^*(B_\varepsilon) + \mu^*(C_\varepsilon) - \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geq \\ &\geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - 2\varepsilon - \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда, используя следствие 3.1 и оценку (3.2), будем иметь

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - \mu^*(A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - 6\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(B) + \mu^*(C).$$

Отсюда и из неравенства (3.1) следует справедливость утверждения теоремы. $\square$

Таким образом, установлено, что функции μ^* и μ_J^* являются мерами на алгебрах M и M_J соответственно.

Определение 3.4. Мера $\mu = \mu^*$ на M называется *мерой Лебега*. Соответственно мера $\mu_J = \mu_J^*$ на M_J называется *мерой Жордана*.

Для меры Лебега устанавливаются следующие две теоремы.

Теорема 3.4. Множество M является σ -алгеброй.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots \in M$ и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Полагая $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \in M$ при $k = 2, 3, \dots$, видим, что $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. При любом фиксированном n , поскольку $\bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq A$, имеем

$$\sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \mu^*(A),$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) < \infty.$$

Теперь для заданного $\varepsilon > 0$ выберем N так, чтобы

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(B_i) < \varepsilon.$$

Далее, так как M является алгеброй, найдется такое множество $C \in R(S)$, что

$$\mu\left(C \Delta \bigcup_{i=1}^N B_i\right) < \varepsilon.$$

Поскольку

$$A \Delta C \subseteq \left(C \Delta \bigcup_{i=1}^N B_i\right) \cup \bigcup_{i=N+1}^{\infty} B_i,$$

воспользовавшись теоремой 3.1, получим

$$\mu^*(A \Delta C) \leq \varepsilon + \mu^*\left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} B_i\right) \leq \varepsilon + \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(B_i) < 2\varepsilon.$$

Тем самым измеримость A проверена, и теорема 3.4 установлена. $\square$

Теорема 3.5. *Мера Лебега μ σ -аддитивна на M .*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots \in M$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M$. Тогда $A \in M$ и по теореме 3.3 при любом n имеем

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) + \mu\left(\bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \geq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n),$$

откуда

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Обратное неравенство вытекает из теоремы 3.1, и наше утверждение доказано. $\square$

Заметим, что, как показывает все тот же пример множества рациональных чисел на отрезке $[0, 1]$, утверждение теоремы 3.4 уже, вообще говоря, несправедливо для меры Жордана. В то же время, результат теоремы 3.5 сохраняет силу и для μ_J , что является тривиальным следствием следующего утверждения.

Теорема 3.6. *Если $A \in M_J$, то $\mu(A) = \mu_J(A)$.*

Доказательство. Выше уже отмечалось, что $A \in M$ и (см. замечание 3.2)

$$\mu(A) \leq \mu_J(A).$$

С другой стороны, выбирая для заданного $\varepsilon > 0$ множество $B \in R(S)$ так, чтобы $\mu_J(A \triangle B) < \varepsilon$, будем иметь (см. следствие 3.1)

$$\begin{aligned} \mu_J(A) &\leq \mu_J(B) + \mu_J(A \triangle B) < \mu_J(B) + \varepsilon = \\ &= \mu(B) + \varepsilon \leq \mu(A) + \mu(A \triangle B) + \varepsilon \leq \mu(A) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда $\mu_J(A) \leq \mu(A)$, и утверждение установлено. $\square$

Таким образом, в этом параграфе были конструкции абстрактных мер Лебега и Жордана. Важнейшей из этих мер является мера Лебега, построенная на σ -алгебре подмножеств n -мерного отрезка $[a, b]$ и являющаяся продолжением меры, описанной в начале § 2. Эту меру в дальнейшем будем называть классической мерой Лебега.

З а м е ч а н и е 3.4. Если исходная мера была задана на полукольце промежутков n -мерного отрезка $[\alpha, \beta]$ равенством

$$m(\{a, b\}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i),$$

то исходя из процесса построения мер Лебега и Жордана ясно, что они будут инвариантны относительно сдвигов, т. е. множества E и $E + x = \{a + x: a \in E\}$, где $x \in \mathbb{R}^n$, при условии $E, E + x \subseteq [\alpha, \beta]$ либо одновременно неизмеримы, либо одновременно измеримы, причем в последнем случае их меры равны.

§ 4. Мера Бореля. Меры Лебега—Стилтьеса

Предположим, что мера Лебега μ была получена продолжением σ -аддитивной меры с полукольца промежутков n -мерного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$, а $\mathbf{B}_{a,b} = \{A \cap [a, b]: A \in \mathbf{B}\}$, где $\mathbf{B}$ — борелевская σ -алгебра (см. определение 1.4). Очевидно, что $\mathbf{B}_{a,b}$ также является σ -алгеброй и что если M — σ -алгебра множеств, измеримых по Лебегу, то $\mathbf{B}_{a,b} \subseteq M$.

О п р е д е л е н и е 4.1. *Мерой Бореля* называется мера, заданная на $\mathbf{B}_{a,b}$ и совпадающая там с мерой Лебега μ .

Ясно, что мера Бореля является σ -аддитивной мерой, заданной на некоторой σ -алгебре. В дальнейшем мы увидим, что область определения у меры Бореля уже, чем у соответствующей меры Лебега.

Еще одним важным классом мер являются меры Лебега—Стилтьеса на прямой.

Пусть $\varphi(x)$ — монотонно неубывающая на $\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ функция, непрерывная слева в любой точке и ограниченная на $\mathbb{R}^1$.

Далее, пусть дано полукольцо с единицей

$$S = \{\emptyset\} \sqcup \{[a, b) \subset \mathbb{R}: a < b\} \sqcup \{(-\infty, b) \subseteq \mathbb{R}\}$$

(где, возможно, $b = \infty$). Определим на S функцию m : $m([a, b)) = \varphi(b) - \varphi(a)$ и $m((-\infty, b)) = \varphi(b) - \varphi(-\infty)$, где $\varphi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ и $\varphi(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$. Ясно, что m — мера на S .

Т е о р е м а 4.1. *Мера m σ -аддитивна на S .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$[a, b) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i),$$

где a и b конечны. Далее, в силу того, что $\varphi(x)$ всюду непрерывна слева, для фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать точки $c_1 < a_1$, $c_2 < a_2, \dots$ и $d < b$ так, чтобы $\varphi(b) - \varphi(d) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\varphi(a_i) - \varphi(c_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ при $i = 1, 2, \dots$. Отметим, что

$$[a, d] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (c_i, b_i).$$

Тогда по лемме Гейне—Бореля найдется конечное число интервалов из правой части $(c_1, b_1), \dots, (c_n, b_n)$, покрывающих $[a, d]$, и тем более

$$[a, d] \subset \bigcup_{i=1}^n [c_i, b_i].$$

По лемме 2.1 имеем

$$\begin{aligned} m([a, b]) - \frac{\varepsilon}{2} &= \varphi(b) - \varphi(a) - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi(d) - \varphi(a) = \\ &= m([a, d]) \leq \sum_{i=1}^n m([c_i, b_i]) = \sum_{i=1}^n (\varphi(b_i) - \varphi(c_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\varphi(b_i) - \varphi(a_i)) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i, b_i]) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем, что

$$m([a, b]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i, b_i]). \quad (4.1)$$

Если

$$(-\infty, b) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

где b конечно и $A_1, \dots, A_i, \dots \in S$, то по доказанному выше

$$\begin{aligned} m((-\infty, b)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m([-n, b]) \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i \cap [-n, b]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Аналогично устанавливается, что оценки (4.1) и (4.2) справедливы и для $b = \infty$.

Обратное неравенство вытекает из следствия 2.1, и, таким образом, теорема установлена. $\square$

Определение 4.2. Мерой Лебега—Стилтьеса на прямой называется лебеговское продолжение описанной выше меры m .

Замечание 4.1. Мереу Лебега—Стилтьеса можно строить и на подмножествах отрезков прямой. Для этого достаточно продолжить функцию $\varphi(x)$ вне рассматриваемого отрезка ее значениями на концах отрезка.

Меры Лебега—Стилтьеса можно определять и в $\mathbb{R}^m$ при $m > 1$. Этот вопрос подробно изучается в книге Г. П. Толстова [13]. Мы приведем здесь только определение для двумерного случая. Пусть имеется прямоугольник $I = [a, b] \times [c, d]$, функция $\varphi(x, y): I \rightarrow \mathbb{R}$ и полукольцо $S = \{I(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subseteq I\}$. Пусть также для любого $I(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in S$ определена функция

$$m(I(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) = \varphi(\alpha, \gamma) - \varphi(\alpha, \delta) - \varphi(\beta, \gamma) + \varphi(\beta, \delta) \geq 0.$$

Тогда m будет мерой на S . Если же, вдобавок, для любой точки $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ и для любых $\alpha < x_0$, $\gamma < y_0$ выполнено равенство

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^-, \\ y \rightarrow y_0^-}} m(I(\alpha, x, \gamma, y)) = m(I(\alpha, x_0, \gamma, y_0)),$$

то эта мера будет σ -аддитивной на S . Соответствующие доказательства во многом аналогичны одномерным, но технически гораздо сложнее. Продолжая указанную выше меру по Лебегу, получим меру, которая называется мерой Лебега—Стилтьеса, порожденной функцией φ .

§ 5. σ -конечные меры. Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$

Пусть на полукольце S подмножеств некоторого множества X задана σ -аддитивная мера m и $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \in S$ при $i = 1, 2, \dots$. Продолжим m до σ -аддитивной меры ν на минимальном кольце $R(S)$. Заметим, что $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, где $B_1 = A_1$,

$B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \in R(S)$ при $i > 1$. Для любого i система $R_i = R(S) \cap B_i = \{C \cap B_i: C \in R(S)\}$ — кольцо с единицей B_i , а ν — σ -аддитивная мера на нем. Продолжим ее по Лебегу до σ -аддитивной меры μ_i , заданной на σ -алгебре M_i .

Определение 5.1. Множество $A \subseteq X$ называется *измеримым*, если для любого i множество $A \cap B_i \in M_i$. При этом положим

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_i)$$

(в этом равенстве допускаются и бесконечные значения).

Теорема 5.1. Совокупность M всех измеримых подмножеств X является σ -алгеброй.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $X \in M$. Далее, если $A, C \in M$, то при любом i выполнены условия $A \cap B_i \in M_i$ и $C \cap B_i \in M_i$, откуда $(A \cap C) \cap B_i = (A \cap B_i) \cap (C \cap B_i) \in M_i$ и $(A \Delta C) \cap B_i = (A \cap B_i) \Delta (C \cap B_i) \in M_i$. Поэтому $A \cap C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C) \cap B_i \in M$ и $A \Delta C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \Delta C) \cap B_i \in M$. Для бесконечного объединения множеств из M доказательство аналогично. $\square$

Теорема 5.2. Функция μ σ -аддитивна на M (и здесь в определении σ -аддитивности допускаются бесконечные значения в обеих частях равенства).

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, где $A_1, A_2, \dots \in M$. Тогда в силу σ -аддитивности мер μ_i имеем

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B_i)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Определение 5.2. Определенная выше функция μ называется σ -конечной мерой на $M^{1)}$.

Таким образом, построена σ -конечная σ -аддитивная мера Лебега. Однако было бы нехорошо, если бы эта мера зависела от первоначального представления $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Докажем, что это не так.

¹⁾ Еще раз напомним, что меры, которые рассматривались до сих пор, принимали лишь конечные неотрицательные значения.

Предположим, что, взяв за основу иное представление $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B'_i$ и проведя описанные выше построения, мы получим другую σ -аддитивную меру μ' , заданную на σ -алгебре M' .

Лемма 5.1. Пусть для некоторых i, j множество $C_{i,j} = B_i \cap B'_j \neq \emptyset$, а множество $A \subseteq C_{i,j}$ и $A \in M$. Тогда $A \in M'$ и $\mu'(A) = \mu(A)$.

Доказательство. Лемма сразу следует из того, что на $C_{i,j}$ меры μ и μ' являются лебеговскими продолжениями меры ν с кольца $R(S) \cap C_{i,j}$, а потому $M \cap C_{i,j} \equiv M' \cap C_{i,j}$ и $\mu(A) = \mu'(A)$. $\square$

Теорема 5.3. Мера μ задана корректно, т. е. $M = M'$ и $\mu \equiv \mu'$.

Доказательство. Пусть $A \in M$. Тогда для любых таких i, j , что $C_{i,j} \neq \emptyset$, множество $A \cap C_{i,j} \in M$. При этом

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap C_{i,j}).$$

С другой стороны, по лемме 5.1 множество $A \cap C_{i,j} \in M'$ и $\mu(A \cap C_{i,j}) = \mu'(A \cap C_{i,j})$. Тогда $A \in M'$ и

$$\mu'(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu'(A \cap C_{i,j}) = \mu(A),$$

а это и нужно было доказать. $\square$

Наиболее важным случаем построенной выше меры является классическая мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, построенная исходя из стандартной меры на полукольце промежутков.

§ 6. Непрерывность и полнота мер

Важными свойствами мер являются непрерывность и полнота.

Определение 6.1. Пусть на кольце R задана конечная мера μ . Пусть также для любой последовательности вложенных множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, где $A_1, A_2, \dots \in R$ и $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in R$, выполнено равенство

$$\mu(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i). \quad (6.1)$$

Тогда мера μ называется *непрерывной*.

Теорема 6.1. *Заданная на кольце R мера μ непрерывна тогда и только тогда, когда она σ -аддитивна.*

Доказательство. Пусть μ σ -аддитивна и $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, где множества A_i вложены и $A, A_1, A_2, \dots \in R$. Положим $B_i = A_i \setminus A_{i+1}$ при $i \geq 1$. Тогда

$$A_1 \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

откуда

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \setminus A) &= \mu(A_1) - \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mu(B_k) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (\mu(A_k) - \mu(A_{k+1})) \right) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n), \end{aligned}$$

т. е. имеет место равенство (6.1).

Теперь пусть мера μ непрерывна и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_1, A_2, \dots \in R$. Положим

$$B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \in R.$$

Тогда $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mu(A) - \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k) \right) = \mu(A) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Но это и означает, что

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Теорема полностью доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 6.1. Если мера μ σ -аддитивна на кольце R , то формула (6.1) остается справедливой и для ситуации, когда $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ и $A, A_1, A_2, \dots \in R$. Это сразу устанавливается с помощью множеств $B_i = A \setminus A_i$ при $i = 1, 2, \dots$

З а м е ч а н и е 6.2. При доказательстве теоремы 6.1 не использовалась неотрицательность меры μ .

Следствие 6.1. Если σ -конечная мера μ задана на некоторой σ -алгебре M , множества $A_1, A_2, \dots \in M$, причем $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ и $\mu(A_1) < \infty$, и $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, то

$$\mu(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

Доказательство. Согласно утверждению 1.4 множество $A \in M$. Далее, отметим, что совокупность множеств $M_1 = \{A \in M: \mu(A) < \infty\}$ является кольцом, причем мера μ σ -аддитивна на M_1 и $A, A_1, A_2, \dots \in M_1$. Теперь достаточно применить теорему 6.1. $\square$

Замечание 6.3. Пример последовательности множеств $A_n = [n, \infty)$ при $n = 1, 2, \dots$ показывает, что без условия конечности $\mu(A_1)$ утверждение следствия 6.1, вообще говоря, неверно.

Отметим, что меры Лебега (конечная), Жордана и Бореля являются непрерывными.

Определение 6.2. Заданная на кольце R подмножеств некоторого множества X мера μ называется *полной*, если из того, что $A \in R$, $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$, вытекает, что $B \in R$ и $\mu(B) = 0$.

Из определения мер Лебега и Жордана ясно, что они являются полными (мера Лебега и в σ -конечном случае). В то же время ниже мы увидим, что мера Бореля не полна.

§ 7. Неизмеримые множества

Из построения меры Лебега осталось неясным, существуют ли неизмеримые относительно этой меры множества. Ответ на этот вопрос зависит, во-первых, от исходной меры и, во-вторых, от принятия аксиомы выбора. Как уже говорилось в

ше, в данном курсе аксиома выбора принимается безоговорочно. Разумеется, неизмеримых множеств не будет, если, например, объявить меру подмножества действительной прямой равной 1 при условии, что это подмножество содержит точку 0, и 0 в противном случае. Однако для классической меры Лебега ($\mu([a, b]) = b - a$) такие множества есть. При построении неизмеримых множеств большую роль играет инвариантность классической меры Лебега относительно сдвигов (см. замечание 3.4).

Теорема 7.1. Пусть измеримое по Лебегу множество $A \subseteq [0, 1]$ и $\mu(A) > 0$. Тогда существует неизмеримое множество $F \subset A$.

Доказательство. Введем на $[0, 1]$ такое отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in Q$, где Q — множество рациональных чисел. Рефлексивность, симметричность и транзитивность в данном случае очевидны, а потому по известной алгебраической теореме

$$[0, 1] = \bigsqcup_{\alpha \in U} H_{\alpha}, \quad (7.1)$$

где H_{α} — соответствующий класс эквивалентности. В соответствии с аксиомой выбора образуем множество $E = \{x_{\alpha}\}_{\alpha \in U}$, содержащее ровно по одному представителю x_{α} из каждого класса H_{α} .

Теперь занумеруем все рациональные числа отрезка $[-1, 1]$. Получим последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $r_0 = 0$. Положим $E_n = E + r_n$ при $n = 1, 2, \dots$. Предположим, что при некоторых $n \neq m$ выполнено условие $E_n \cap E_m \neq \emptyset$. Тогда найдется число a , имеющее два представления: $x_{\alpha} + r_n = a = x_{\beta} + r_m$. Но отсюда $x_{\alpha} - x_{\beta} \in Q$, а поскольку в E не может быть двух разных представителей одного и того же класса, $x_{\alpha} = x_{\beta}$ и $r_n = r_m$, т. е. $n = m$. Полученное противоречие доказывает, что $E_n \cap E_m = \emptyset$ при $n \neq m$.

Предположим, что одно из множеств E_n содержит измеримое подмножество C_n положительной меры d . Тогда, в силу инвариантности меры Лебега относительно сдвига (см. замечание 3.4), при любом $m \geq 0$ множества $C_m = C_n - r_n + r_m \subseteq E_m$ будут измеримы и $\mu(C_m) = d$. Но

$$\bigsqcup_{n=0}^{\infty} C_n \subseteq \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq [-1, 2],$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(C_n) = \sum_{n=0}^{\infty} d \leq 3,$$

и мы пришли к противоречию.

С другой стороны (см. (7.1)), для любого $x \in [0, 1]$ найдутся такие $\alpha \in U$ и $n \geq 0$, что $x = x_\alpha + r_n$, т. е. $x \in E_n$. Поэтому

$$[0, 1] \subseteq \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Отсюда

$$A = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (A \cap E_n) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Если все множества F_n измеримы, то хотя бы одно из них должно иметь положительную меру (т. к. $\mu(A) > 0$), а это, как мы установили ранее, невозможно. Теорема 7.1 доказана. $\square$

§ 8. Прямые произведения мер

В данном параграфе будет изложена важная конструкция прямого произведения мер, которая позволяет ввести меру на подмножествах прямого произведения $X \times Y$, если нам заданы меры на полукольцах подмножеств X и Y .

Определение 8.1. Если A и B — два множества, то положим $A \times B = \{(x, y): x \in A \text{ и } y \in B\}$. Если S_1 и S_2 — две системы множеств, то $S_1 \times S_2 = \{A \times B: A \in S_1 \text{ и } B \in S_2\}$.

Теорема 8.1. Если S_1 и S_2 — полукольца, то и $S = S_1 \times S_2$ — полукольцо.

Доказательство. Очевидно, что $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in S$. Пусть $A = A_1 \times A_2$ и $B = B_1 \times B_2$, где $A_1, B_1 \in S_1$ и $A_2, B_2 \in S_2$. Тогда $A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in S$. Наконец, если $B \subseteq A$, то $B_1 \subseteq A_1$ и $B_2 \subseteq A_2$. Отсюда существуют такие $C_2, \dots, C_k \in S_1$ и $D_2, \dots, D_n \in S_2$, что

$$A_1 = B_1 \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^k C_i \right) \quad \text{и} \quad A_2 = B_2 \sqcup \left(\bigsqcup_{j=2}^n D_j \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A &= \left(B_1 \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^k C_i \right) \right) \times \left(B_2 \sqcup \left(\bigsqcup_{j=2}^n D_j \right) \right) = \\ &= B \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^k (C_i \times B_2) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=2}^n (B_1 \times D_j) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=2}^k \bigsqcup_{j=2}^n (C_i \times D_j) \right), \end{aligned}$$

а это и надо было установить. $\square$

Определение 8.2. Пусть m_1 и m_2 — конечные меры, заданные на полукольцах S_1 и S_2 соответственно. Тогда назовем их *прямым произведением* $m = m_1 \times m_2$ функцию, заданную на полукольце $S = S_1 \times S_2$ формулой $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2)$, где $A_1 \in S_1$ и $A_2 \in S_2$.

Теорема 8.2. Функция m является мерой на S .

Доказательство. Неотрицательность m очевидна. Пусть

$$A = A_1 \times A_2 = \bigsqcup_{k=1}^n (A_1(k) \times A_2(k)).$$

Тогда по лемме 1.2 существуют такие наборы попарно непересекающихся множеств $\{C_i\}_{i=1}^N \subseteq S_1$ и $\{D_j\}_{j=1}^M \subseteq S_2$, что множества A_1 , $A_1(k)$ при $k = 1, 2, \dots, n$ и A_2 , $A_2(k)$ при $k = 1, 2, \dots, n$ представляются в виде дизъюнктивных объединений некоторых C_i и D_j соответственно. Пусть

$$A_1(1) = \bigsqcup_{i \in \Omega(1)} C_i, \quad \dots, \quad A_1(n) = \bigsqcup_{i \in \Omega(n)} C_i$$

и

$$A_2(1) = \bigsqcup_{j \in \Gamma(1)} D_j, \quad \dots, \quad A_2(n) = \bigsqcup_{j \in \Gamma(n)} D_j.$$

При этом

$$A_1 = \bigsqcup_{i=1}^N C_i \quad \text{и} \quad A_2 = \bigsqcup_{j=1}^M D_j.$$

Тем самым,

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{j=1}^M (C_i \times D_j) &= A_1 \times A_2 = \bigsqcup_{k=1}^n (A_1(k) \times A_2(k)) = \\ &= \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{i \in \Omega(k)} \bigsqcup_{j \in \Gamma(k)} (C_i \times D_j), \end{aligned}$$

откуда ясно, что при любых фиксированных целых $i \in [1, N]$ и $j \in [1, M]$ найдется такое единственное $k \in [1, n]$, что $i \in \Omega(k)$ и $j \in \Gamma(k)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m(A(k)) &= \sum_{k=1}^n m(A_1(k) \times A_2(k)) = \\ &= \sum_{k=1}^n m_1(A_1(k)) m_2(A_2(k)) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in \Omega(k)} m_1(C_i) \right) \left(\sum_{j \in \Gamma(k)} m_2(D_j) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i \in \Omega(k)} \sum_{j \in \Gamma(k)} m_1(C_i) m_2(D_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M m_1(C_i) m_2(D_j) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_1(C_i) \sum_{j=1}^M m_2(D_j) = m_1(A_1) m_2(A_2) = m(A). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Ниже, в § 21, будет установлено, что если меры m_1 и m_2 σ -аддитивны, то σ -аддитивной будет и мера m .

§ 9. Структура измеримых множеств

Для дальнейшего нам понадобится такой результат о структуре измеримых по Лебегу множеств.

Теорема 9.1. Пусть μ — σ -конечная мера Лебега на σ -алгебре M , полученная продолжением некоторой σ -аддитивной меры с полукольца S , множество $A \in M$ и $\mu(A) < \infty$. Тогда A можно представить в виде

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus A_0,$$

где множества $A_{i,j} \in R(S)$ при $i, j = 1, 2, \dots$; $A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq \dots$ для любого i ; если $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$ при $i = 1, 2, \dots$, то $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, $\mu(B_1) < \infty$; $A_0 \in M$ и $\mu(A_0) = 0$.

Доказательство. По определению меры Лебега для любого натурального i найдется такое множество $C_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{i,j} \supset A$, где $D_{i,j} \in S$, что $\mu(C_i \setminus A) < \frac{1}{i}$. Положим $B_i = \bigcap_{r=1}^i C_r$ при $i = 1, 2, \dots$. Тогда $B_i = \bigcup_{l=1}^{\infty} E_{i,l}$, где все $E_{i,l} \in S$. Кроме того, множества B_i монотонно не возрастают, $\mu(B_1) = \mu(C_1) < \infty$ и $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A\right) = 0$. Обозначая $A_{i,j} = \bigcup_{l=1}^j E_{i,l} \in R(S)$ при $j = 1, 2, \dots$, установим справедливость теоремы. $\square$

В ряде вопросов теории функций большое значение имеют понятия открытых и замкнутых множеств. Вообще говоря, они никак не связаны с теорией меры. Однако для классической меры Лебега на подмножествах отрезка в $\mathbb{R}^n$ такая связь существует.

З а м е ч а н и е 9.1. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ являются измеримыми относительно классической меры Лебега. Для открытых множеств это вытекает из измеримости любого открытого интервала, а также из того, что произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения не более чем счетного набора открытых интервалов. Замкнутые же множества измеримы, поскольку измеримы их дополнения.

С л е д с т в и е 9.1. Пусть μ — классическая мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ и множество A измеримо по Лебегу. Тогда справедливы представления

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \setminus P_1 \quad \text{и} \quad A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \cup P_2,$$

где множества $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$ и G_i открыты при всех i , $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$ и F_j замкнуты при всех j , а $\mu(P_1) = \mu(P_2) = 0$.

Доказательство. Прежде всего напомним что открытым в $\mathbb{R}^n$ называется множество, содержащее вместе с каждой точкой некоторую сферу положительного радиуса, а замкнутым называется множество, дополнение к которому открыто.

Утверждение достаточно установить для множеств конечной меры. Поскольку в случае классической меры Лебега любое множество из $R(S)$ отличается от открытого лишь на множество меры 0, а объединение любого числа открытых множеств сно-

ва является открытым множеством, первое утверждение следствия вытекает из теоремы 9.1. Далее, если множество A измеримо, то измеримо и его дополнение $CA = \mathbb{R}^n \setminus A$. Применяя к CA уже доказанную часть следствия и снова переходя к множеству A , устанавливаем справедливость и второй части следствия. $\square$

Сказанное выше приводит к следующему эквивалентному определению классической меры Лебега на $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 9.1. Для произвольного множества $A \subseteq [a, b]$ определим внешнюю и внутреннюю меры Лебега равенствами

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \inf\{\mu(B): B \text{ открыто и } A \subseteq B \subseteq [a, b]\}, \\ \mu_*(A) &= \sup\{\mu(B): B \text{ замкнуто и } A \supseteq B\}.\end{aligned}$$

Теперь скажем, что A *измеримо* в том и только в том случае, когда $\mu^*(A) = \mu_*(A)$. Это общее значение называется *мерой* A .

В связи с изложенным выше установим одно свойство замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 9.2. Пусть A — измеримое относительно классической меры Лебега μ подмножество $\mathbb{R}^n$ и точка $x \in A$. Тогда скажем, что x является *точкой усиленного разрежения* для A , если найдется открытый шар $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n: |x - y| < r\}$ с $r > 0$, для которого $\mu(B_r(x) \cap A) = 0$.

Л е м м а 9.1. Пусть F — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $\mu(F) > 0$. Тогда найдется такое замкнутое множество $K \subseteq F$, что $\mu(F \setminus K) = 0$ и ни одна точка K не является его *точкой усиленного разрежения*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть D — это совокупность всех точек усиленного разрежения множества F и $B_x = B_{r(x)}(x)$ — соответствующий шар из определения 9.2 для $x \in D$. Тогда множество

$$A = \bigcup_{x \in D} B_x$$

открыто и, следовательно, множество $K = F \setminus A$ замкнуто. Докажем, что

$$\mu(A \cap F) = 0. \quad (9.1)$$

Действительно, если эта мера положительна, то найдется цепочка таких строго вложенных друг в друга шаров

$$A \supset B_{r_1}(y_1) \supset B_{r_2}(y_2) \dots \supset B_{r_m}(y_m) \supset \dots$$

с радиусами $r_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, что $\mu(B_{r_m}(y_m) \cap F) > 0$ при всех m . Эти шары стягиваются к некоторой точке z . В силу замкнутости F и вложенности всех шаров в A имеем $z \in A \cap F$. Но тогда по построению точка z лежит в некотором шаре, мера пересечения которого с F равна нулю, и мы пришли к противоречию. Поэтому (9.1) выполняется и, поскольку $F \setminus K = A \cap F$, выполнено равенство $\mu(F \setminus K) = 0$. Наконец, из условия (9.1) вытекает, что для любого открытого шара B выполнено условие $\mu(F \cap B) = \mu(K \cap B)$, а потому никакая точка множества K не является его точкой усиленного разрежения. Тем самым лемма установлена. $\square$

Теперь установим характеристическое свойство открытых множеств на прямой, справедливое только в одномерной ситуации. Оно будет нужно для дальнейших рассуждений.

Теорема 9.2. Пусть открытое множество $A \subseteq \mathbb{R}^1$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, где один или два интервала могут иметь бесконечные концы и, разумеется, объединение может быть конечным.

Доказательство. Введем на A следующее отношение эквивалентности: $x \sim y$, если интервал $(x, y) \subseteq A$. Тогда A можно представить в виде дизъюнктного объединения классов эквивалентности. Поскольку любое непересекающееся множество интервалов на прямой не более чем счетно, теорема будет установлена, если мы докажем, что каждый класс эквивалентности является интервалом.

Пусть K — такой класс. Положим $a = \inf_{x \in K} x$ и $b = \sup_{y \in K} y$. Будем считать, что $a > -\infty$ и $b < \infty$, иначе доказательство только упрощается. Если $c \in (a, b)$, то существуют такие $x \in (a, c)$ и $y \in (c, b)$, что $(x, y) \subseteq A$, откуда $c \in K$. Таким образом, $(a, b) \subseteq K$. Предположим, что $a \in K$. Тогда для некоторого $d \in (0, b - a)$ интервал $(a - d, a + d) \subseteq A$. Но по доказанному точка $a + \frac{d}{2} \in K$, откуда $a - \frac{d}{2} \in K$, и мы получили противоречие с определением a . Аналогично проверяется, что $b \notin K$. $\square$

В заключение, установим один важный технический результат, который представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 9.3 (теорема Витали). Пусть μ — классическая мера Лебега на прямой, а E — ограниченное подмножество прямой. Тогда если T_0 — такая система невырожденных отрезков, что для любого $x \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$

найдется такой отрезок $I = I(x, \varepsilon) \in T_0$ с $\mu(I) < \varepsilon$, что $x \in I$ (в этом случае говорят, что множество E покрыто системой T_0 в смысле Витали), то можно выбрать такую не более чем счетную систему непересекающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq T_0$, что

$$\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = 0.$$

Доказательство. Отметим, что в силу ограниченности множества E можно считать, что все отрезки системы T_0 лежат внутри некоторого интервала (a, b) . Процесс выделения отрезков проведем индуктивно. Вначале определим величину

$$A_1 = \sup_{I \in T_0} \mu(I) < \infty.$$

Выберем отрезок $I_1 \in T_0$ так, чтобы $\mu(I_1) > \frac{1}{2} A_1$. После этого определим множество

$$T_1 = \{I \in T_0: I \cap I_1 = \emptyset\}.$$

Предположим теперь, что нами уже выбраны непересекающиеся отрезки $I_1, I_2, \dots, I_m$ и построены множества $T \supset T_1 \supset \dots \supset T_m$. Если множество $T_m = \emptyset$, то полагаем $A_{m+1} = A_{m+2} = \dots = 0$ и считаем процесс законченным, в противном случае положим

$$A_{m+1} = \sup_{I \in T_m} \mu(I)$$

и выберем отрезок $I_{m+1} \in T_m$ так, чтобы $\mu(I_{m+1}) > \frac{1}{2} A_{m+1}$. После этого определим множество

$$T_{m+1} = \{I \in T_m: I \cap I_{m+1} = \emptyset\}.$$

В результате мы построим конечную или счетную систему непересекающихся отрезков $Q = \{I_k\}$. Очевидно также, что числа $A_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Если I — некоторый невырожденный отрезок, то через $5I$ будем обозначать отрезок с тем же центром, длина которого в 5 раз больше длины I .

Сначала рассмотрим случай, когда выделенная нами последовательность отрезков конечна: $I_1, I_2, \dots, I_n$. Тогда если бы нашлась точка

$$x \in E \setminus F \equiv E \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k,$$

то, согласно условию, нашелся бы и отрезок $I(x, \varepsilon) \in T_n$, где $\varepsilon > 0$ — расстояние от x до замкнутого множества F , а это противоречит тому, что $T_n = \emptyset$. Следовательно, в рассматриваемом случае $E \subset F$ и теорема установлена. Если же система отрезков счетна, то положим

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Пусть l — натуральное число и $x \in E \setminus S$. Тогда, так как

$$x \notin F_l = \bigcup_{k=1}^l I_k,$$

и множество F_l замкнуто, найдется отрезок $I(x, l) \in T_0$, содержащий точку x и не пересекающийся с F_l . Очевидно, что $I(x, l) \in T_l$. Так как $\mu(I(x, l)) > A_k$ для достаточно больших k , найдется такое натуральное $m > l$, что $I(x, l) \in T_{m-1} \setminus T_m$. В этом случае $I(x, l) \cap I_m \neq \emptyset$ и $\mu(I(x, l)) < A_m < 2\mu(I_m)$. Но отсюда следует, что $I(x, l) \subset 5I_m$. Поэтому

$$E \setminus S \subseteq \bigcup_{k=l}^{\infty} 5I_k,$$

а тогда

$$\mu^*(E \setminus S) \leq \sum_{k=l}^{\infty} \mu(5I_k) = 5 \sum_{k=l}^{\infty} \mu(I_k).$$

Ввиду того что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < b - a < \infty,$$

а число l произвольно, отсюда вытекает, что $\mu^*(E \setminus S) = 0$, а это и нужно было установить. $\square$

С л е д с т в и е 9.2. Если выполнены условия теоремы Витали, то можно выбрать такую конечную систему непересекающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^n \subseteq T_0$, что

$$\sum_{k=1}^n \mu(I_k) > \frac{1}{2} \mu^*(E).$$

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

§ 10. Определение и основные свойства

Определение 10.1. Тройка (X, M, μ) , где M — σ -алгебра с единицей X , а μ — σ -аддитивная мера на M , называется *измеримым пространством*. Если $\mu(X) < \infty$, то будем называть это пространство *конечным*, а если мера μ σ -конечна на M , то σ -конечным.

Определение 10.2. Пусть (X, M, μ) — измеримое пространство, множество $A \in M$, а функция $f(x): A \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Тогда $f(x)$ называется *измеримой* в том и только в том случае, когда для любого $c \in \mathbb{R}^1$ полный прообраз $f^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in X: c < f(x) \leq \infty\} \in M$.

Замечание 10.1. Подчеркнем, что в определении учитывается тот факт, что f задана на измеримом множестве A . Отметим также, что тройка $(A, A \cap M, \mu)$ также является измеримым пространством, а потому ниже всегда можно предполагать, что f определена на единице измеримого пространства.

В дальнейшем, если будет говориться, что функция $f(x)$ измерима на множестве E , то подразумевается, что имеется измеримое пространство (X, M, μ) (вообще говоря σ -конечное) и что множество $E \in M$. Далее, если множества $A, B \in M$, $B \subseteq A$, $\mu(A \setminus B) = 0$ и некоторое свойство выполняется в каждой точке множества B , то мы будем говорить, что это свойство выполняется почти всюду на A .

Определение 10.3. Если $f(x)$ и $g(x)$ — две измеримые на X функции, причем $f(x) = g(x)$ почти всюду на X , то они называются *эквивалентными*.

Замечание 10.2. Поскольку все открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ измеримы относительно классической меры Лебега, любая функция, заданная на измеримом подмножестве $\mathbb{R}^n$ и непрерывная на нем, является измеримой относительно соответствующего измеримого пространства.

Лемма 10.1. Пусть функция f измерима на (X, M, μ) . Тогда измеримы множества $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(+\infty)$, $f^{-1}(\mathbb{R}^1)$ и $f^{-1}((a, b))$, где a и b могут быть и бесконечными.

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, +\infty]) \in M$$

и

$$f^{-1}(-\infty) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-n, +\infty]) \in M.$$

Теперь ясно, что и $f^{-1}(\mathbb{R}^1) \in M$. Далее, при любом $c \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$f^{-1}([c, +\infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(c - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \in M.$$

Отсюда

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, +\infty]) \setminus f^{-1}([b, +\infty]) \in M,$$

и лемма установлена. $\square$

Теорема 10.1. Если функция f измерима на (X, M, μ) , а B — борелевское подмножество $\mathbb{R}^1$, то $f^{-1}(B) \in M$.

Доказательство. Пусть $S = \{A \subseteq \mathbb{R}^1: f^{-1}(A) \in M\}$. Тогда $\mathbb{R}^1 \in S$ и если $A, C \in S$, то

$$f^{-1}(A \cap C) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(C) \quad \text{и} \quad f^{-1}(A \Delta C) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(C),$$

т. е. $A \cap C \in M$ и $A \Delta C \in M$. Кроме того, если $A_1, A_2, \dots \in M$, то

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in M.$$

Отсюда ясно, что S — σ -алгебра. Кроме того, из последнего соотношения, леммы 10.1 и теоремы 9.2 вытекает, что S содержит все открытые подмножества $\mathbb{R}^1$. Тогда по определению борелевской σ -алгебры $\mathbf{B}$ как минимальной σ -алгебры, содержащей все открытые множества, $\mathbf{B} \subseteq S$, и теорема доказана. $\square$

Замечание 10.3. Как будет показано ниже, даже для непрерывных функций, заданных на отрезке, вообще говоря, нельзя утверждать, что прообраз любого множества, измеримого относительно классической меры Лебега, также измерим относительно этой меры.

Теорема 10.2. Если функция $f(x)$ измерима и конечна на (X, M, μ) (здесь и ниже конечной мы будем называть функцию, принимающую только конечные значения в каждой точке своей области определения), причем $f(X) \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^1$, где G — открытое множество, а функция $g(y)$ непрерывна на G , то суперпозиция $g(f(x))$ измерима на (X, M, μ) .

Доказательство. Прежде всего отметим, что функция $g(f(x))$ принимает только конечные значения. Поэтому для любого $c \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$\begin{aligned} F_c &= (g(f))^{-1}((c, +\infty]) = (g(f))^{-1}((c, +\infty)) = \\ &= \{x \in X: f(x) \in g^{-1}((c, +\infty))\}. \end{aligned}$$

Согласно свойствам непрерывной функции, множество $E_c = g^{-1}((c, +\infty))$ открытое, а значит, тем более борелевское. Поэтому по теореме 10.1 $F_c = f^{-1}(E_c) \in M$, и наше утверждение доказано. $\square$

Здесь естественно возникает вопрос: верно ли, что и композиция двух измеримых функций является измеримой функцией? В следующем параграфе будет показано, что это, вообще говоря, неверно.

Теорема 10.3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и конечны на (X, M, μ) , а a и b — некоторые числа, то функции $af(x) + bg(x)$ и $f(x)g(x)$ также измеримы на этом пространстве. Кроме того, если $g(x)$ не обращается в 0 ни в одной точке, то измеримой будет и функция $\frac{f(x)}{g(x)}$. Конечность функций здесь требуется лишь затем, чтобы не надо было специально определять результаты операций сложения, умножения и деления.

Доказательство. Поскольку линейная функция непрерывна на $\mathbb{R}^1$, мы имеем, что если функция $f(x)$ измерима и конечна, то по теореме 10.2 при любом $a \in \mathbb{R}^1$ измеримы функции $af(x)$ и $f(x) + a$.

Пусть теперь функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и конечны. Рассмотрим множество

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X: f(x) > g(x)\} = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{x \in X: f(x) > r_n\} \cap \{x \in X: g(x) < r_n\}) \in M, \end{aligned}$$

где $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — это все рациональные числа, каким-либо образом занумерованные. Поэтому при любом $c \in \mathbb{R}^1$ множество

$$A_c = \{x \in X: f(x) + g(x) > c\} = \{x \in X: f(x) > c - g(x)\} \in M,$$

и первая часть теоремы установлена.

Теперь отметим, что если функция $f(x)$ измерима и конечна, то по теореме 10.2 измерима и функция $f^2(x)$. Но тогда измеримо и произведение измеримых функций $f(x)g(x) = \frac{1}{4}((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2)$.

Наконец, если функция $g(x)$ измерима, конечна и не обращается в нуль на X , то, так как функция $\frac{1}{y}$ непрерывна на открытом множестве $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$, из теоремы 10.2 следует, что функция $\frac{1}{g(x)}$ также измерима. С учетом уже установленной измеримости произведения, это завершает доказательство теоремы. $\square$

З а м е ч а н и е 10.4. По ходу доказательства теоремы 10.3 была установлена измеримость множества точек, в которых одна измеримая функция больше другой (ясно, что предположение о конечности этих функций здесь несущественно).

З а м е ч а н и е 10.5. Представляется естественным считать, что

- 1) $\infty \pm a = \infty$ при любом $a \in \mathbb{R}^1$;
- 2) $-\infty \pm a = -\infty$ при любом $a \in \mathbb{R}^1$;
- 3) $a \times (\pm\infty) = \pm\infty$ при $a > 0$;
- 4) $a \times (\pm\infty) = \mp\infty$ при $a < 0$;
- 5) $\infty + \infty = \infty - (-\infty) = \infty$;
- 6) $-\infty - \infty = -\infty + (-\infty) = -\infty$;
- 7) $\infty \times \infty = (-\infty) \times (-\infty) = \infty$;
- 8) $-\infty \times \infty = \infty \times (-\infty) = -\infty$.

Кроме того, формально можно положить

- 9) $0 \times (\pm\infty) = 0$;
- 10) $\infty - \infty = -\infty - (-\infty) = 0$.

При таких соглашениях в дальнейшем мы будем пользоваться теоремами об измеримости суммы и произведения измеримых функций без требования конечности этих функций. Заметим еще, что если мера μ полна, а функции $f(x)$ и $g(x)$ конечны почти всюду, то можно считать, что на «плохом» множестве результат операций сложения и умножения определен произвольным образом.

Теорема 10.4. Если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых функций на пространстве (X, M, μ) , то функции $\varphi(x) = \sup_n f_n(x)$ и $\psi(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ также измеримы на этом пространстве. Разумеется, измеримыми также будут нижняя грань и нижний предел последовательности измеримых функций.

Доказательство. Для любого $c \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$\{x \in X: \varphi(x) \in (c, +\infty]\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: f_n(x) \in (c, +\infty]\} \in M,$$

и измеримость $\varphi(x)$ доказана. Отсюда при любом $k = 1, 2, \dots$ измерима функция $\varphi_k(x) = \sup_{n \geq k} f_n(x)$. Но тогда для любого c имеем

$$\{x \in X: \psi(x) \in (c, +\infty]\} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X: \varphi_k(x) \in (c + \frac{1}{r}, +\infty]\} \in M,$$

и теорема полностью доказана. $\square$

Следствие 10.1. В условиях теоремы 10.4 функция $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ измерима на множестве $E \subseteq X$, на котором она существует (предел может быть и бесконечным).

Доказательство. Множество E — это множество, на котором совпадают верхний и нижний пределы последовательности функций. По теореме 10.4 эти пределы измеримы, следовательно, измеримо и E . Но на множестве E функция $F(x)$ совпадает с измеримой функцией $\psi(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, и следствие установлено. $\square$

Замечание 10.6. Если мера μ полна, функции $f_1(x), f_2(x), \dots$ измеримы на множестве E и $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ почти всюду на E , то и функция $f(x)$ будет измерима на множестве E .

Теорема 10.5. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) , то ее конечная производная измерима на множестве своего существования относительно классической меры Лебега.

Доказательство. Рассмотрим так называемую верхнюю производную функции

$$\bar{f}'(x) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, множество

$$\begin{aligned} \{x \in (a, b): \bar{f}'(x) > c\} = \\ = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 < |h| < \frac{1}{n}} \left\{ x \in (a, b): x+h \in (a, b) \text{ и } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > c + \frac{1}{r} \right\} \end{aligned}$$

измеримо даже по Борелю (внутреннее объединение является открытым множеством). Отсюда вытекает измеримость верхней производной. Аналогично устанавливается и измеримость нижней производной

$$\underline{f}'(x) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Множество существования конечной обычной производной E — это множество точек, где верхняя и нижняя производные конечны и равны. Из доказанного выше видно, что E измеримо, а поскольку на E выполнено равенство $f'(x) = \bar{f}'(x)$, теорема полностью установлена. $\square$

Справедливо и следующее более общее утверждение (приводимое ниже простое доказательство было любезно сообщено Ю. Е. Куприковым).

Теорема 10.6. *Если функция $f(x)$ измерима на интервале (a, b) , то ее конечная производная измерима на множестве своего существования относительно классической меры Лебега.*

Доказательство. Пусть произвольная функция $y(x)$ измерима на (a, b) . Тогда, поскольку при любом натуральном n и любом $t \in \mathbb{R}$ множество

$$\left\{ x \in (a, b): \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} y(x+h) > t \right\}$$

открыто, функции $g_n(x) = \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} y(x+h)$ измеримы для $n = 1, 2, \dots$. В этом случае, измеримыми будут и функции

$$y_n(x) = g_n(x) - y(x) = \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} (y(x+h) - y(x))$$

при $n = 1, 2, \dots$. Теперь, для заданной $f(x)$ и для любого $c \in \mathbb{R}$ положим $y(x) = f(x) - cx$. По доказанному выше, множество

$$\begin{aligned} & \left\{ x \in (a, b): \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > c \right\} = \\ & = \left\{ x \in (a, b): \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} > 0 \right\} = \\ & = \{ x \in (a, b): y_n(x) > 0 \} \end{aligned}$$

измеримо. Таким образом, установлена измеримость функций

$$f_n(x) = \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

при $n = 1, 2, \dots$. Отсюда, измеримой является и так называемая *правая верхняя производная* функции $f(x)$

$$\bar{f}'_+(x) = \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Аналогичным образом устанавливается измеримость *левой верхней производной*

$$\bar{f}'_-(x) = \limsup_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Но тогда измеримой является и *верхняя производная* функции

$$\bar{f}'(x) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \max(\bar{f}'_+(x), \bar{f}'_-(x)).$$

Таким же образом устанавливается измеримость *нижней производной*, после чего доказательство теоремы 10.6 заканчивается так же, как и доказательство теоремы 10.5.

§ 11. Множество Кантора и кривая Кантора

Построим множество Кантора на отрезке $[0, 1]$. Проведем его построение индуктивно. Пусть $J_1^0 = [0, 1]$. На первом шаге выделим из середины отрезка $J_1^0 = [0, 1]$ интервал I_1^1 длины $\mu(I_1^1) = \frac{1}{3}\mu(J_1^0) = \frac{1}{3}$, т. е. $I_1^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. После этого остались невыделенными два отрезка J_1^1 и J_2^1 , причем мера каждого

из них равна $\frac{1}{3}$. Теперь предположим, что на $(n-1)$ -м шаге ($n > 1$) мы выделили 2^{n-2} интервалов $I_1^{n-1}, \dots, I_{2^{n-2}}^{n-1}$, мера каждого из которых равна $\frac{1}{3^{n-1}}$, и после этого остались невыделенными 2^{n-1} отрезков $J_1^{n-1}, \dots, J_{2^{n-1}}^{n-1}$ той же длины. Тогда на n -м шаге из середины любого отрезка J_k^{n-1} , где $1 \leq k \leq 2^{n-1}$, выделим интервал I_k^n длины $\frac{1}{3}\mu(J_k^{n-1})$. При этом $\mu(I_k^n) = \frac{1}{3^n}$ и в результате невыделенными останутся 2^n отрезков $J_1^n, \dots, J_{2^n}^n$, каждый длины $\frac{1}{3^n}$.

Теперь определим множества

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n$$

и

$$P = [0, 1] \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} J_k^n. \quad (11.1)$$

Обычно канторовским множеством называют множество P , хотя, строго говоря, следует называть P замкнутым канторовским множеством, а G — открытым канторовским множеством.

Основные свойства канторовского множества P таковы:

- 1) P замкнуто;
- 2) P нигде не плотно, т. е. в любом интервале найдется подинтервал, свободный от точек множества P ;
- 3) мощность множества P есть континуум;
- 4) классическая мера Лебега $\mu(P) = 0$.

Первое и второе свойства очевидны, четвертое сразу вытекает из представления (11.1) и непрерывности меры Лебега, а третье свойство есть следствие того, что множество P с точностью до счетного множества концов интервалов, составляющих G , есть множество точек отрезка $[0, 1]$, троичное разложение которых содержит лишь цифры 0 и 2. Отметим также, что нетрудно построить по той же схеме множество, обладающее свойствами 1)–3), но имеющее положительную меру Лебега.

Множество Кантора, как правило, применяется для конструирования контрпримеров. Оно также используется при построении кривой Кантора, которое мы сейчас проведем.

Вначале индуктивно построим вспомогательную функцию $\bar{\varphi}(x)$, которая будет определена на множестве T , состоящем из концов всех отрезков J_k^n , где $n = 0, 1, \dots$ и $1 \leq k \leq 2^n$

или, что то же самое, в концах всех смежных интервалов множества G , а также в точках 0 и 1. На нулевом шаге определим функцию $\bar{\varphi}(x)$ в концах отрезка $J_1^0 = [0, 1]$ так: $\bar{\varphi}(0) = 0$ и $\bar{\varphi}(1) = 1$. Далее, пусть после $n - 1$ шага, где $n \geq 1$, функция $\bar{\varphi}(x)$ определена в концах отрезков $J_1^{n-1}, \dots, J_{2^{n-1}}^{n-1}$. Тогда на n -м шаге определим $\bar{\varphi}(x)$ в тех концах отрезков $J_1^n, \dots, J_{2^n}^n$, где она еще не определена.

Именно, если $J_k^{n-1} = [a, b]$, то $J_{2k-1}^n = [a, c]$ и $J_{2k}^n = [d, b]$, где $a < c < d < b$. Тогда положим

$$\bar{\varphi}(c) = \bar{\varphi}(d) = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}(a) + \bar{\varphi}(b)).$$

Таким образом, функция $\bar{\varphi}(x)$ определена. Из построения очевидно, что $\bar{\varphi}(x)$ монотонно возрастает на T (поскольку она обладает этим свойством на каждом шаге построения) и что функция $\bar{\varphi}(x)$ принимает на T все значения вида $\frac{k}{2^n}$, где $n = 0, 1, \dots$ и $1 \leq k \leq 2^n$.

Определим функцию

$$\varphi(x) = \sup_{y \in E: y \leq x} \bar{\varphi}(y). \quad (11.2)$$

Тогда по своему определению функция $\varphi(x)$ монотонно неубывает на $[0, 1]$. Кроме того, в силу монотонности функции $\bar{\varphi}(x)$ на множестве T , при $x \in T$ выполнено равенство $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$. Отсюда ясно, что множество значений функции $\varphi(x)$ всюду плотно на отрезке $[0, 1]$, а следовательно, она непрерывна. Наконец (см. определение функции $\bar{\varphi}(x)$ и (11.2)), функция $\varphi(x)$ постоянна на интервалах, образующих множество G .

Таким образом, можно выделить следующие основные свойства функции $\varphi(x)$, которую и называют *кривой Кантора*:

1. Функция $\varphi(x)$ монотонно неубывает на отрезке $[0, 1]$.
2. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, 1]$.
3. Производная $\varphi'(x) = 0$ при $x \in G$, т. е. почти всюду на $[0, 1]$.
4. Функция $\varphi(x)$ не является тождественно постоянной на $[0, 1]$.

Продemonстрируем полезность построенной функции.

Теорема 11.1. *Существуют такая непрерывная функция $f(x)$, взаимно однозначно отображающая отрезок $[0, 1]$ на себя, и такая измеримая на этом отрезке относительно классической меры Лебега функция $g(x)$, что*

1) композиция $g(f(x))$ неизмерима на $[0, 1]$;

2) для некоторого измеримого по Лебегу множества E прообраз $f^{-1}(E)$ неизмерим.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — это кривая Кантора. Тогда функция $\psi(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + x)$ монотонна, строго возрастает на $[0, 1]$ и переводит $[0, 1]$ в $[0, 1]$. По известной теореме математического анализа обратная функция $f(x) = \psi^{-1}(x)$ существует и обладает теми же свойствами. Далее, функция $\psi(x)$ переводит любой из интервалов, составляющих множество G , в интервал в два раза меньшей длины. Отсюда ясно, что $\mu(\psi(G)) = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\mu(\psi(P)) = \frac{1}{2}$. По теореме 7.1 в множестве $\psi(P)$ найдется неизмеримое подмножество Q .

Терерь положим $E = \psi^{-1}(Q)$. Поскольку $E \subseteq P$, $\mu(P) = 0$ и мера Лебега полна, множество E измеримо по Лебегу. В то же время множество $Q = f^{-1}(E)$ неизмеримо, и свойство 2 установлено. Для получения свойства 1 достаточно взять функцию $g(x) = X_E(x)$, т. е. $g(x) = 1$ при $x \in E$ и $g(x) = 0$ при $x \notin E$. Тогда функция $g(f(x)) = X_Q(x)$ неизмерима. $\square$

З а м е ч а н и е 11.1. Попутно нами установлено, что мера Бореля неполна, и что класс множеств, измеримых по Борелю на прямой, уже класса множеств, измеримых относительно классической меры Лебега.

З а м е ч а н и е 11.2. Ниже мы систематически будем пользоваться обозначением $X_E(x)$ для функции, равной 1 на множестве E и 0 вне этого множества. Эту функцию называют *характеристической функцией* множества E .

§ 12. Сходимость по мере и ее свойства

Предположим, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$ — измеримые и конечные на измеримом пространстве (X, M, μ) функции.

О п р е д е л е н и е 12.1. Говорят, что последовательность $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на X при $n \rightarrow \infty$ (*сходится по мере на X*), если для любого $\varepsilon > 0$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Поскольку определение сходимости по мере существенно отличается от определений поточечной и равномерной сходимости, установим некоторые свойства этой сходимости.

Теорема 12.1. *Предел последовательности функций, сходящихся по мере, единственен с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ и $f_n(x) \Rightarrow g(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого n имеем

$$\begin{aligned} \{x \in X: |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} &\subseteq \\ &\subseteq \{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}, \end{aligned}$$

откуда ясно, что $\mu(\{x \in X: |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0$, т. е. $f(x) = g(x)$ почти всюду. $\square$

Теорема 12.2. *Пусть $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ и $g_n(x) \Rightarrow g(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $f_n(x) + g_n(x) \Rightarrow f(x) + g(x)$ при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Утверждение теоремы сразу вытекает из верного для любого $\varepsilon > 0$ и для любого n включения

$$\begin{aligned} \{x \in X: |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| > \varepsilon\} &\subseteq \\ &\subseteq \{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X: |g_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 12.3. *Если $\mu(X) < \infty$, открытое множество $G \subseteq \mathbb{R}^1$, функция $g(x)$ непрерывна на множестве G , а последовательность $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$, причем все функции $f_n(x)$ и функция $f(x)$ отображают множество X в G , то $g(f_n(x)) \Rightarrow g(f(x))$ при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$. Из теоремы 9.2 вытекает, что справедливо представление

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

где все множества K_n компактны в $\mathbb{R}^1$, т. е. замкнуты и ограничены, и $K_1 \subset K_2 \subset \dots$. Рассмотрим прообразы $E_n = f^{-1}(K_n)$ при $n = 1, 2, \dots$. При этом $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ и

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

По теореме о непрерывности меры можно подобрать r так, чтобы

$$\mu(A) \equiv \mu\left(X \setminus \bigcup_{n=1}^r E_n\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Пусть $\rho > 0$ — расстояние от компакта $K = \bigcup_{n=1}^r K_n$ до замкнутого множества $F = \mathbb{R}^1 \setminus G$. Определим компакт

$$K' = \{y \in \mathbb{R}^1: \min_{x \in K} |x - y| \leq \frac{\rho}{2}\} \subset G.$$

Тогда функция $g(x)$ равномерно непрерывна на K' , и, следовательно, существует такое $\delta > 0$, что при $x, y \in K_0$ и $|x - y| < \delta$ имеем $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Выберем N таким образом, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство

$$\mu(B_n) \equiv \mu\left(\left\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \min\left(\frac{\rho}{2}, \delta\right)\right\}\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Теперь $\mu(A \cup B_n) < \gamma$, а если $x \in X \setminus (A \cup B_n)$, то $f(x) \in K \subset K'$, $f_n(x) \in K'$ и $|f_n(x) - f(x)| < \delta$, откуда $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 12.1. Если $\mu(X) < \infty$ и последовательность $f_n(x)$ сходится по мере к $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$, то $f_n^2(x) \Rightarrow f^2(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Если же, вдобавок, функции $f(x)$ и $f_n(x) \neq 0$ при $n = 1, 2, \dots$ не обращаются в нуль на X , то $\frac{1}{f_n(x)} \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 12.1. Как показывает пример последовательности $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ на прямой $\mathbb{R}^1$, условие конечности меры X существенно для справедливости следствия 12.1.

Следствие 12.2. Если $\mu(X) < \infty$, последовательность $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ и $g_n(x) \Rightarrow g(x)$ при $n \rightarrow \infty$, то $f_n(x)g_n(x) \Rightarrow f(x)g(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Утверждение сразу вытекает из теоремы 12.2, следствия 12.1 и следующих равенств:

$$\begin{aligned} (f_n(x) + g_n(x))^2 &= f_n^2(x) + 2f_n(x)g_n(x) + g_n^2(x), \\ (f(x) + g(x))^2 &= f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x). \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 12.3. Если $\mu(X) < \infty$, $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ и $g_n(x) \Rightarrow g(x)$ при $n \rightarrow \infty$, причем функции $g(x)$ и $g_n(x)$ при $n = 1, 2, \dots$ не обращаются в нуль на X , то $\frac{f_n(x)}{g_n(x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ при $n \rightarrow \infty$.

В заключение этого параграфа установим критерий Коши для сходимости по мере.

Теорема 12.4. *Для того чтобы последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась по мере к конечной измеримой функции на X , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $\gamma > 0$ нашлось такое число N , что при $n, m \geq N$ выполняется неравенство*

$$\mu(\{x \in X: |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \gamma.$$

Доказательство. Вначале докажем необходимость. Если $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$, то при любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ найдется такое число N , что при $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\mu\left(\left\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Но тогда при $n, m \geq N$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X: |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) &< \mu\left(\left\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \\ &\mu\left(\left\{x \in X: |f_m(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma. \end{aligned}$$

Теперь установим достаточность. Ясно, что можно выбрать возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы для множеств

$$A_i = \{x \in X: |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| > 2^{-i}\}$$

выполнялась оценка $\mu(A_i) < 2^{-i}$. Пусть

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i.$$

Тогда, очевидно, $\mu(A) = 0$. Если же $x \in X \setminus A$, то числовая последовательность $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна, и, стало быть, существует конечный предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x) = f(x).$$

Согласно следствию 10.1 функция $f(x)$ измерима на $X \setminus A$, и, доопределив ее нулем на множестве A , получим, что $f(x)$ измерима на X .

Докажем, что $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на X при $n \rightarrow \infty$. Прежде всего, для любого натурального m , если

$$x \notin \bigcup_{i=m+1}^{\infty} A_i,$$

то при $i, j \geq m+1$ имеем

$$|f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x)| \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} 2^{-r} = 2^{-m},$$

откуда и $|f(x) - f_{n_i}(x)| \leq 2^{-m}$. Поэтому при $i \geq m+1$ имеем

$$\mu(\{x \in X: |f_{n_i}(x) - f(x)| > 2^{-m}\}) \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu(A_r) < 2^{-m}.$$

Теперь, для фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ подберем такое N , что при $n, r \geq N$ выполняется неравенство

$$\mu\left(\left\{x \in X: |f_n(x) - f_r(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

После этого возьмем m таким, что $2^{-m} < \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$, и зафиксируем $n_i > N$ с $i \geq m+1$. Тогда при $n \geq N$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) &< \mu\left(\left\{x \in X: |f_n(x) - f_{n_i}(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \\ &+ \mu\left(\left\{x \in X: |f_{n_i}(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma, \end{aligned}$$

что и требовалось установить. $\square$

§ 13. Сходимость почти всюду

В этом параграфе снова будем предполагать, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$ — измеримые и конечные на измеримом пространстве (X, M, μ) функции.

Определение 13.1. Говорят, что последовательность $f_n(x)$ *сходится к $f(x)$ почти всюду на X* при $n \rightarrow \infty$, если найдется такое множество $E \in M$, что $\mu(X \setminus E) = 0$ и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $x \in E$.

З а м е ч а н и е 13.1. В приведенном определении (так же как и ранее, в определении сходимости по мере) можно считать, что все $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$ конечны лишь почти всюду на X . В этом случае надо положить

$$X_1 = X \setminus \left(\{x \in X: f(x) = \pm\infty\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: f_n(x) = \pm\infty\} \right) \right)$$

и проводить все рассуждения для X_1 . Кроме того, если мера μ полна, то можно не требовать заранее измеримости функции $f(x)$.

Л е м м а 13.1. Пусть $E = \{x \in X: f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ при } n \rightarrow \infty\}$. Тогда

$$X \setminus E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in X: |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m} \right\} \equiv \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка $x \in X \setminus E$ в том и только в том случае, когда $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$. Но последнее по определению означает, что для некоторого m_0 при любом $n \geq 1$ найдется такое $k > n$, что $|f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m_0}$. Переходя к формальной записи этого утверждения, устанавливаем справедливость леммы. $\square$

Т е о р е м а 13.1. Пусть $\mu(X) < \infty$. Тогда последовательность $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на X в том и только в том случае, когда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X: |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} \right) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно установить, что сходимость почти всюду эквивалентна тому, что для любого натурального m

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m} \right) = 0.$$

В обозначениях леммы 13.1 сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на X эквивалентна тому, что $\mu(X \setminus E) = 0$ или

$$\mu \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m} \right) = 0.$$

Но это, в свою очередь, равносильно тому, что для любого m выполнено равенство

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}\right) = 0.$$

Определим для фиксированного m множества $G_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}$ при всех n . Тогда $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$. Для завершения доказательства остается только заметить, что по теореме о непрерывности меры

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n). \quad \square$$

Следствие 13.1. Если $\mu(X) < \infty$ и последовательность функций $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на X , то $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

Замечание 13.2. Пример последовательности функций $f_n(x) = X_{[-n, n]}(x)$ на $\mathbb{R}^1$ показывает, что без условия $\mu(X) < \infty$ теорема 13.1 и следствие 13.1, вообще говоря, неверны.

Может возникнуть вопрос: не эквивалентны ли понятия сходимости функциональных последовательностей по мере и почти всюду на множествах конечной меры? Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Теорема 13.2 (пример Рисса). Существует последовательность, сходящаяся по мере на отрезке $[0, 1]$, но не сходящаяся почти всюду.

Доказательство. Для $n = 0, 1, \dots$ и $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ положим

$$\varphi_{n,k}(x) = X_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}(x).$$

Отметим, что для любого натурального $m \geq 1$ существует единственная такая пара (n, k) , что $n \geq 0$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$ и $m = 2^n + k$. Определим функции $f_m(x) = \varphi_{n,k}(x)$ при $m = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\mu(\{x \in [0, 1]: |f_m(x)| > 0\}) = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$, откуда $f_m(x) \Rightarrow 0$. В то же время в любой точке отрезка $[0, 1]$ бесконечно много членов последовательности $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ равно 0 и бесконечно много членов этой последовательности равно 1, откуда ясно, что сходимости нет ни в одной точке.

Тем не менее справедлив следующий результат.

Теорема 13.3 (теорема Рисса). Пусть (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство и последовательность $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на X . Тогда существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ почти всюду на X .

Доказательство. Сначала предположим, что $\mu(X) < \infty$. Возьмем $n_0 = 1$ и для $k = 1, 2, \dots$ выберем натуральное $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы

$$\mu\left(\left\{x \in X: |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}.$$

Докажем, что последовательность $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на X . Действительно, если заданы $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, то подберем m_0 так, чтобы $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$ и $\frac{1}{2^{m_0-1}} < \delta$. Тогда при $m > m_0$ имеем

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{x \in X: |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right) &\leq \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{x \in X: |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} < \delta. \end{aligned}$$

Применяя теорему 13.1, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения.

Пусть теперь мера σ -конечна на X , т. е. $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, где $\mu(B_i) < \infty$ при $i = 1, 2, \dots$. Поскольку $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на X , для любого i последовательность $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на B_i . Согласно уже доказанному, можно выделить подпоследовательность $f_{1, n(1)} \rightarrow f(x)$ почти всюду на B_1 . Поскольку эта подпоследовательность по-прежнему сходится по мере на любом B_i , из нее, в свою очередь, можно выделить подпоследовательность $f_{2, n(2)} \rightarrow f(x)$ почти всюду на B_2 . Продолжая этот процесс дальше, и рассматривая диагональную последовательность $\{f_{k, n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, видим, что для любого i эта последовательность сходится почти всюду на B_i , т. е. почти всюду на X , что и требовалось доказать. $\square$

Чрезвычайно важным является следующий результат, проясняющий взаимосвязь между сходимостью почти всюду и равномерной сходимостью.

Теорема 13.4 (теорема Егорова). Если $\mu(X) < \infty$ и последовательность функций $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на X , то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое измеримое множество $E_\varepsilon \subseteq X$, что $\mu(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на E_ε .

Доказательство. Из теоремы 13.1 следует, что для каждого m найдется такое n_m , что

$$\mu\left(\bigcup_{k=n_m}^{\infty} \left\{x \in X: |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) \equiv \mu(G_m) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Положим

$$E_\varepsilon = X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m.$$

Тогда

$$\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(G_m) < \varepsilon.$$

Если теперь задано некоторое $\gamma > 0$, то, выбирая натуральное m так, чтобы $\frac{1}{m} < \gamma$, получим, что при $k > n_m$

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} < \gamma$$

для любого $x \in E_\varepsilon$, а это и требовалось установить. $\square$

З а м е ч а н и е 13.3. Пример последовательности функций из замечания 13.2 показывает, что без условия $\mu(X) < \infty$ теорема Егорова, вообще говоря, неверна.

Одним из важнейших результатов, устанавливаемых с помощью теоремы Егорова, является теорема Лузина о взаимосвязи понятий непрерывности и измеримости на отрезках в $\mathbb{R}^n$. Она будет установлена ниже.

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 14. Интеграл Лебега для простых функций

Определение 14.1. Пусть конечная действительнозначная функция $f(x)$ измерима на σ -конечном измеримом пространстве (X, M, μ) и принимает лишь конечное число значений, причем любое ненулевое значение принимается на множестве конечной меры. Тогда функция $f(x)$ называется *простой* на X (иногда указание на множество X будет опускаться). Иными словами, функция $f(x)$ простая, если

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k X_{E_k}(x),$$

где $E_k \in M$, $E_k \cap E_j = \emptyset$ при $k \neq j$ и $\mu(E_k) < \infty$, если $c_k \neq 0$.

Замечание 14.1. Отметим, что в определении простой функции всегда можно считать, что $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ и $\bigcup_{k=1}^n E_k = X$.

Определение 14.2. Пусть действительнозначная функция $f(x)$ является простой на X и

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k X_{E_k}(x), \quad (14.1)$$

где $\bigcup_{k=1}^n E_k = X$. В этом случае определим *интеграл Лебега*

$$L\text{-} \int_X f(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(E_k)$$

(здесь формально считаем, что $0\infty = 0$). Заметим, что здесь, как и в определении 14.1, не предполагается, что $c_k \neq c_j$ при $k \neq j$.

Замечание 14.2. Если $\mu(X) < \infty$, то функция $f(x) \equiv C$ является простой на X и

$$\int_X f(x) d\mu = C\mu(X).$$

Лемма 14.1. *Величина интеграла Лебега от простой функции $f(x)$ не зависит от способа ее представления в виде (14.1).*

Доказательство. Пусть имеются два представления:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k X_{E_k}(x) = \sum_{j=1}^m d_j X_{D_j}(x),$$

где $\bigsqcup_{k=1}^n E_k = \bigsqcup_{j=1}^m D_j = X$ и $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Тогда каждое из d_j равно одному из c_k . Определим при $k = 1, 2, \dots, n$ множества $\Gamma_k = \{j: d_j = c_k\}$. Тогда, очевидно, $E_k = \bigsqcup_{j \in \Gamma_k} D_j$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^n c_k \mu(E_k) = \sum_{k=1}^n c_k \sum_{j \in \Gamma_k} \mu(D_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \Gamma_k} d_j \mu(D_j) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(D_j),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 14.1 (линейность по функции). *Если $f(x)$ и $g(x)$ — простые функции на X , а $a, b \in R$, то функция $af(x) + bg(x)$ также является простой на X и*

$$\int_X (af(x) + bg(x)) d\mu = a \int_X f(x) d\mu + b \int_X g(x) d\mu.$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k X_{E_k}(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{j=1}^m d_j X_{F_j}(x),$$

где $\bigsqcup_{k=1}^n E_k = \bigsqcup_{j=1}^m F_j = X$. Тогда

$$af(x) + bg(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (ac_k + bd_j) X_{E_k \cap F_j}(x),$$

т. е. функция $af(x) + bg(x)$ действительно является простой. Далее, принимая во внимание лемму 14.1, получим

$$\begin{aligned} \int_X (af(x) + bg(x)) d\mu &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (ac_k + bd_j) \mu(E_k \cap F_j) = \\ &= a \sum_{k=1}^n c_k \sum_{j=1}^m \mu(E_k \cap F_j) + b \sum_{j=1}^m d_j \sum_{k=1}^n \mu(E_k \cap F_j) = \\ &= a \sum_{k=1}^n c_k \mu(E_k) + b \sum_{j=1}^m d_j \mu(F_j) = a \int_X f(x) d\mu + b \int_X g(x) d\mu, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Сформулируем еще несколько очевидных утверждений об интегралах Лебега от простых функций.

Утверждение 14.1. Если простая функция $f(x) \geq 0$ на X , то

$$\int_X f(x) d\mu \geq 0.$$

Следствие 14.1. Если $f(x)$ и $g(x)$ — простые функции и $f(x) \geq g(x)$ на X , то

$$\int_X f(x) d\mu \geq \int_X g(x) d\mu.$$

Утверждение 14.2. Если $f(x)$ — простая функция, то

$$\left| \int_X f(x) d\mu \right| \leq \int_X |f(x)| d\mu.$$

Утверждение 14.3 (линейность по множеству). Если $f(x)$ — простая функция и $X = A \sqcup B$, где $A, B \in M$, то

$$\int_X f(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_B f(x) d\mu.$$

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующим понятием.

Определение 14.3. Последовательность заданных на некотором множестве E функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *неубывающей* (невозрастающей) на этом множестве, если для любого $x_0 \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ является неубывающей (невозрастающей). Этот факт сокращенно будем записывать в виде $f_n(x) \uparrow (f_n(x) \downarrow)$.

Теорема 14.2. Пусть (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство, и пусть множество $E \in M$. Тогда если $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность простых неотрицательных функций на E , $g(x)$ — простая неотрицательная функция на E и для любого $x \in E$ выполнено неравенство $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \geq g(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu \geq \int_E g(x) d\mu.$$

Доказательство. Если предел бесконечен, то неравенство очевидно. Пусть этот предел конечен. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. Определим функцию

$$g(x) = \sum_{k=1}^m a_k X_{E_k}(x),$$

где $E_k \cap E_l = \emptyset$ при $k \neq l$, $\mu(E_k) < \infty$ при всех k и $0 < a_1 < \dots < a_m$. Определим для $n = 1, 2, \dots$ множества $F_n = \{x \in E: g_n(x) < g(x) - \varepsilon\}$ и положим $F = \bigcup_{k=1}^m E_k$. Поскольку в силу монотонности последовательности $\{g_n(x)\}$ имеем $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ и $\mu(F_1) \leq \mu(F) < \infty$, согласно следствию 6.1 $\mu(F_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому для любого n имеем

$$\begin{aligned} \int_E g(x) d\mu &= \int_{F_n} g(x) d\mu + \int_{F \setminus F_n} g(x) d\mu \leq \int_{F_n} g(x) d\mu + \int_F (g_n(x) + \varepsilon) d\mu = \\ &= \sum_{k=1}^m a_k \mu(F_n \cap E_k) + \int_F g_n(x) d\mu + \varepsilon \mu(F) \leq \\ &\leq a_m \mu(F_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu + \varepsilon \mu(F). \end{aligned}$$

В силу произвольности n и $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

§ 15. Интеграл Лебега для произвольных измеримых функций

Как и в предыдущем параграфе, будем считать, что задано σ -конечное измеримое пространство (X, M, μ) и множество $E \in M$. Кроме того, здесь и далее мы будем придерживаться определений арифметических операций с бесконечными величинами из замечания 10.5. Если функция $f(x)$ определена и неотрицательна на множестве $E \in M$, то обозначим

$$\begin{aligned} Q_f &= \{\text{неотрицательные простые функции } h(x) \text{ на } E: \\ &\quad h(x) \leq f(x) \text{ при всех } x \in E\}. \end{aligned}$$

Определение 15.1. Пусть $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция на E . Тогда назовем *интегралом Лебега* этой функции по данному множеству следующее число:

$$\int_E f(x) d\mu = \sup_{h(x) \in Q, E} \int_E h(x) d\mu$$

(здесь допускается и бесконечное значение). Если данный интеграл конечен, то будем говорить, что $f(x) \in L(E)$ (функция $f(x)$ *интегрируема по Лебегу* на множестве E).

Теперь для произвольной измеримой функции $f(x)$ на $E \in M$ определим две функции

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{и} \quad f_-(x) = \max(-f(x), 0) = -(f(x) - f_+(x)).$$

Определение 15.2. Если функция $f(x)$ измерима на множестве E , то будем говорить, что $f(x) \in L(E)$, в том и только в том случае, когда одновременно $f_+(x) \in L(E)$ и $f_-(x) \in L(E)$. Если последние условия выполняются, то положим

$$\int_E f(x) d\mu = \int_E f_+(x) d\mu - \int_E f_-(x) d\mu.$$

Замечание 15.1. Из определений 15.1 и 15.2 ясно, что если $E, A \in M$ и $A \subset E$, а функция $f(x)$ измерима на E , то $f(x) \in L(A)$ в том и только в том случае, когда $f(x)X_A(x) \in L(E)$. При этом если $f(x) \in L(A)$, то

$$\int_A f(x) d\mu = \int_E f(x)X_A(x) d\mu.$$

Утверждение 15.1. Для простых функций значения интеграла Лебега, полученные согласно определениям 14.2 и 15.2, совпадают.

Доказательство. Если простая функция неотрицательна, то утверждение сразу вытекает из следствия 14.1. Для функций произвольного знака надо еще воспользоваться теоремой 14.1. $\square$

Утверждение 15.2. Если $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — неубывающая последовательность простых неотрицательных функций на E и $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu = \int_E g(x) d\mu.$$

Доказательство. Существование и измеримость функции $g(x)$ очевидна (еще раз отметим, что мы не исключаем из рассмотрения функции, принимающие бесконечные значения). Из определения интеграла ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu \leq \int_E g(x) d\mu.$$

Обратно, если неотрицательная простая функция $h(x) \leq g(x)$ на E , то $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \geq h(x)$, откуда по теореме 14.2 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu \geq \int_E h(x) d\mu.$$

Переходя к верхней грани по всем таким $h(x)$, устанавливаем справедливость утверждения. $\square$

Следующая лемма чрезвычайно важна и будет многократно использована ниже.

Лемма 15.1. Пусть $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция на E . Тогда существует неубывающая на E последовательность неотрицательных простых функций $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, сходящаяся к $f(x)$ в каждой точке $x \in E$.

Доказательство. Представим множество E в виде

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

где $\mu(E_n) < \infty$ при $n = 1, 2, \dots$ (если $\mu(E) < \infty$, то берем $E_2 = E_3 = \dots = \emptyset$). Положим

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^m}, & \text{если } \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{k}{2^m}, \\ & \text{и } x \in \bigcup_{k=1}^m E_k, \text{ где } k = 1, 2, \dots, 2^{2^m}; \\ 2^m, & \text{если } f(x) \geq 2^m \text{ и } x \in \bigcup_{k=1}^m E_k; \\ 0, & \text{если } x \notin \bigcup_{k=1}^m E_k. \end{cases}$$

Докажем, что эта последовательность монотонно неубывает на множестве E . Пусть m — натуральное число и точка $x \in E$. Если $f_m(x) = 0$, то $f_{m+1}(x) \geq 0 = f_m(x)$. Если $f_m(x) = 2^m$, то $x \in \bigcup_{k=1}^m E_k$ и $f(x) \geq 2^m$, а следовательно, $f_{m+1}(x) \geq 2^m$.

Если же $f(x) = \frac{k}{2^m}$, где $1 \leq k < 2^m$, то $x \in \bigsqcup_{k=1}^m E_k$ и

$$f(x) \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right) = \left[\frac{2k}{2^{m+1}}, \frac{2(k+1)}{2^{m+1}} \right).$$

Поэтому либо $f_{m+1}(x) = \frac{2k}{2^{m+1}}$, либо $f_{m+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{m+1}}$, но в обоих случаях $f_{m+1}(x) \geq f_m(x)$.

Теперь докажем, что при $x \in E$ функции $f_m(x) \rightarrow f(x)$. Действительно, если $x \in E$ и $f(x) < \infty$, то для некоторого m_0 должны выполняться условия $x \in \bigsqcup_{k=1}^{m_0} E_k$ и $f(x) \leq 2^{m_0}$. Поэтому при $n \geq m_0$ имеем $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$. Если же $f(x) = \infty$, то для достаточно больших m получим $f_m(x) = 2^m$. Тем самым лемма установлена. $\square$

Теорема 15.1. Если $f(x)$ и $g(x)$ — неотрицательные измеримые функции на E , то

$$\int_E (f(x) + g(x)) d\mu = \int_E f(x) d\mu + \int_E g(x) d\mu.$$

Далее, если $E = A \sqcup B$, где $A, B \in M$, то

$$\int_E f(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_B f(x) d\mu.$$

Здесь, как всегда, считаем, что $\infty + \infty = \infty$.

Доказательство. По лемме 15.1 построим последовательности простых функций $f_n(x) \uparrow f(x)$ и $g_n(x) \uparrow g(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $(f_n(x) + g_n(x)) \uparrow (f(x) + g(x))$ и, используя теорему 14.1 и утверждение 15.2, получим

$$\begin{aligned} \int_E (f(x) + g(x)) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n(x) + g_n(x)) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu + \int_E g(x) d\mu. \end{aligned}$$

Аналогично, используя утверждения 14.3 и 15.2, получим

$$\begin{aligned} \int_E f(x) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_B f(x) d\mu, \end{aligned}$$

а это и требовалось доказать. $\square$

Теорема 15.2. Пусть (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство, и пусть множество $E \in M$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1. Если $\mu(E) = 0$, а $f(x)$ — измеримая функция на E , то $f(x) \in L(E)$ и

$$\int_E f(x) d\mu = 0.$$

2. Если мера μ полна, функция $f(x) \in L(E)$ и $g(x) = f(x)$ почти всюду на E , то $g(x) \in L(E)$ и

$$\int_E g(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu.$$

Если здесь заранее потребовать измеримости функции $g(x)$, то можно отказаться от условия полноты меры μ .

3. Если функция $f(x) \in L(E)$, то

$$\mu(\{x \in E: f(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

Доказательство. 1. Очевидно из определения.

2. Достаточно доказать равенство интегралов для неотрицательных $f(x)$ и $g(x)$. Функция $g(x)$ измерима (только в этом месте мы пользуемся полнотой меры μ). Пусть $E_1 = \{x \in E: f(x) = g(x)\} \in M$. По условию теоремы $\mu(E \setminus E_1) = 0$. Тогда по теореме 15.1 и уже доказанному пункту 1 получаем

$$\begin{aligned} \int_E g(x) d\mu &= \int_{E_1} g(x) d\mu + \int_{E \setminus E_1} g(x) d\mu = \int_{E_1} g(x) d\mu = \\ &= \int_{E_1} f(x) d\mu = \int_{E_1} f(x) d\mu + \int_{E \setminus E_1} f(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu, \end{aligned}$$

а это и требовалось установить.

3. Снова рассмотрим случай, когда $f(x) \geq 0$ на E . Обозначим $E_1 = \{x \in E: f(x) = +\infty\} \in M$. Предположим, что $\mu(E_1) > 0$. Тогда, полагая $E_2 = E_1$, если $\mu(E_1) < \infty$, и $E_2 \subset E_1$, $E_2 \in M$, $0 < \mu(E_2) < \infty$, в противном случае, определим простые функции $h_n(x) = nX_{E_2}(x)$ при $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $h_n(x) \leq f(x)$ при $n = 1, 2, \dots$ и $x \in E$, по определению интеграла Лебега имеем

$$\infty > \int_E f(x) d\mu \geq \sup_n \int_E h_n(x) d\mu = \sup_n n\mu(E_2) = \infty,$$

что приводит к противоречию. Тем самым теорема доказана. $\square$

Утверждение 15.3. Если функция $f(x) \in L(E)$, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f(x) \in L(E)$ и

$$\int_E \alpha f(x) d\mu = \alpha \int_E f(x) d\mu.$$

Доказательство. Согласно теореме 10.3 и замечанию 10.5 функция $\alpha f(x)$ измерима на E . Отметим, кстати, что по третьему пункту теоремы 15.2 функция $f(x)$ конечна почти всюду, а потому соглашения замечания 10.5 несущественны, если мера μ полна. Далее, если $\alpha = 0$, то функция $\alpha f(x) = 0$ на E , а тогда

$$\int_E \alpha f(x) d\mu = 0.$$

Пусть теперь $\alpha > 0$. Тогда $\alpha f(x) = (\alpha f(x))_+ - (\alpha f(x))_- = \alpha f_+(x) - \alpha f_-(x)$. Отметим, что если неотрицательная простая функция $h(x) \leq f_+(x)$ при $x \in E$, то неотрицательная простая функция $\alpha h(x) \leq \alpha f_+(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_E f(x)_+ d\mu &= \sup_{h(x) \leq f_+(x)} \int_E h(x) d\mu = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{\alpha h(x) \leq \alpha f_+(x)} \int_E \alpha h(x) d\mu = \frac{1}{\alpha} \int_E \alpha f_+(x) d\mu. \end{aligned}$$

Для $f_-(x)$ дело обстоит аналогично, откуда и получаем требуемое утверждение. Сходным образом рассматривается и случай $\alpha < 0$. $\square$

Теперь мы можем в полном объеме доказать важнейшую теорему о линейности интеграла Лебега по функции.

Теорема 15.3. Если функции $f(x), g(x) \in L(E)$, то функция $f(x) + g(x) \in L(E)$ и

$$\int_E (f(x) + g(x)) d\mu = \int_E f(x) d\mu + \int_E g(x) d\mu.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $f(x) \geq 0$ и $g(x) \leq 0$ при $x \in E$. Положим $E_1 = \{x \in E: f(x) + g(x) \geq 0\}$ и $E_2 = \{x \in E: f(x) + g(x) < 0\}$. Тогда по теореме 15.1 и утверждению 15.3 имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_1} f(x) d\mu &= \int_{E_1} (f(x) + g(x)) d\mu + \int_{E_1} (-g(x)) d\mu = \\ &= \int_{E_1} (f(x) + g(x)) d\mu - \int_{E_1} g(x) d\mu. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} - \int_{E_2} g(x) d\mu &= \int_{E_2} (-f(x) - g(x)) d\mu + \int_{E_2} f(x) d\mu = \\ &= - \int_{E_2} (f(x) + g(x)) d\mu + \int_{E_2} f(x) d\mu. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Из формул (15.1) и (15.2) следует, что $f(x) + g(x) \in L(E)$ и (см. теорему 15.1)

$$\begin{aligned} \int_E (f(x) + g(x)) d\mu &= \int_E (f(x) + g(x))_+ d\mu - \int_E (f(x) + g(x))_- d\mu = \\ &= \int_{E_1} (f(x) + g(x)) d\mu + \int_{E_2} (f(x) + g(x)) d\mu = \\ &= \int_{E_1} f(x) d\mu + \int_{E_1} g(x) d\mu + \int_{E_2} f(x) d\mu + \int_{E_2} g(x) d\mu = \\ &= \int_E f(x) d\mu + \int_E g(x) d\mu. \end{aligned}$$

Теперь для произвольных интегрируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ теорема вытекает из уже доказанного равенства и из того, что $f(x) + g(x) = (f_+(x) + g_+(x)) - (f_-(x) + g_-(x))$. $\square$

С л е д с т в и е 15.1. Если функции $f(x), g(x) \in L(E)$, а числа $a, b \in R$, то функция $af(x) + bg(x) \in L(E)$ и

$$\int_E (af(x) + bg(x)) d\mu = a \int_E f(x) d\mu + b \int_E g(x) d\mu.$$

Этот результат является непосредственным следствием утверждения 15.3 и теоремы 15.3.

Т е о р е м а 15.4. Пусть функция $f(x)$ измерима на E . Тогда $f(x) \in L(E)$ в том и только в том случае, когда $|f(x)| \in L(E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению $f(x) \in L(E)$ в том и только в том случае, когда одновременно $f_+(x) \in L(E)$ и $f_-(x) \in L(E)$. Далее, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, откуда по теореме 15.1 имеем

$$\int_E |f(x)| d\mu = \int_E f_+(x) d\mu + \int_E f_-(x) d\mu.$$

Из последнего равенства, с учетом неотрицательности входящих в него интегралов, видно, что $|f(x)| \in L(E)$ в том и только в том

случае, когда одновременно $f_+(x) \in L(E)$ и $f_-(x) \in L(E)$, что и требовалось доказать. $\square$

З а м е ч а н и е 15.1. Из определения интеграла Лебега видно, что если $f(x) \in L(E)$, то

$$\left| \int_E f(x) d\mu \right| \leq \int_E |f(x)| d\mu.$$

Теорема 15.5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на E , $f(x) \in L(E)$ и $|g(x)| \leq |f(x)|$ при $x \in E$. Тогда функция $g(x) \in L(E)$ и

$$\int_E |g(x)| d\mu \leq \int_E |f(x)| d\mu.$$

В качестве важного частного случая здесь содержится утверждение, что интеграл Лебега от неотрицательной функции неотрицателен.

Доказательство. Из теоремы 15.4 следует, что достаточно доказать наше утверждение для неотрицательных функций $f(x)$ и $g(x)$. Пусть простая неотрицательная функция $h(x) \leq g(x)$ при $x \in E$. Тогда, тем более, $h(x) \leq f(x)$ при $x \in E$. Поэтому

$$\int_E h(x) d\mu \leq \int_E f(x) d\mu. \quad (15.3)$$

Переходя в левой части неравенства (15.3) к верхней грани по всем $h(x) \in Q_g$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Из только что доказанной теоремы вытекают такие широко используемые результаты.

Следствие 15.2. Если $\mu(E) < \infty$, функция $f(x)$ измерима на E и для некоторой постоянной $C > 0$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq C$ при $x \in E$, то $f(x) \in L(E)$ и

$$\left| \int_E f(x) d\mu \right| \leq \int_E |f(x)| d\mu \leq C\mu(E).$$

Следствие 15.3. Если функции $f(x), g(x) \in L(E)$ и $g(x) \leq f(x)$ при $x \in E$, то

$$\int_E g(x) d\mu \leq \int_E f(x) d\mu.$$

В заключение этого параграфа приведем такой результат.

Утверждение 15.2. Пусть $\mu(E) < \infty$, функция $f(x)$ измерима на E и $-\infty < A < f(x) < B < \infty$ при $x \in E$. Пусть также T — разбиение отрезка $[A, B]$ вида $A = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = B$, определены множества $R_k = \{x \in E: y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, и число $\lambda(T) = \max_{1 \leq k \leq n} (y_k - y_{k-1})$.

Тогда если

$$F_T = \sum_{k=1}^n y_k \mu(R_k),$$

то

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} F_T = L \int_E f(x) d\mu. \quad (15.4)$$

Доказательство. Введем функцию

$$f_T(x) = \sum_{k=1}^n y_k X_{R_k}(x).$$

Тогда, очевидно, $f_T(x)$ — простая функция, и согласно определению 14.2

$$F_T = L \int_E f_T(x) d\mu.$$

Далее, поскольку при $x \in E$ выполнено неравенство $|f_T(x) - f(x)| \leq \lambda(T)$, по теореме 15.3 и следствию 15.2 получаем, что

$$\left| F_T - L \int_E f(x) d\mu \right| = \left| \int_E (f_T(x) - f(x)) d\mu \right| \leq \lambda(T) \mu(E),$$

откуда и вытекает требуемое утверждение. $\square$

З а м е ч а н и е 15.2. Равенство (15.4) может быть принято за определение интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции на множестве конечной меры. Именно так определял интеграл А. Лебег (см., например, [14]).

§ 16. Переход к пределу под знаком интеграла Лебега

Как и в предыдущем параграфе, будем предполагать, что (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство и множество $E \in M$. Весьма важными результатами для любого интеграла являются теоремы о предельном переходе. Для интеграла Лебега основными являются нижеследующие три теоремы.

Теорема 16.1 (теорема Беппо Леви). Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ измеримы на E , причем $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$ для любого $x \in E$. Тогда если $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, то

$$\int_E f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu$$

(здесь, как обычно, допускаются бесконечные значения как функций, так и интегралов).

Доказательство. Положим $g_1(x) = f_1(x)$, $g_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$, $\dots$, $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, $\dots$. Все эти функции, очевидно, неотрицательны и (см. замечание 10.5) измеримы на E . Используя лемму 15.1, построим для любого фиксированного n последовательность неотрицательных простых функций $\psi_{m,n}(x) \uparrow g_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ на множестве E . Определим при $m = 1, 2, \dots$ функции

$$F_m(x) = \sum_{n=1}^m \psi_{m,n}(x).$$

Тогда при $m \geq 1$ и $x \in E$ будем иметь

$$F_{m+1}(x) - F_m(x) = \sum_{n=1}^m (\psi_{m+1,n}(x) - \psi_{m,n}(x)) + \psi_{m+1,m+1}(x) \geq 0.$$

Кроме того, для всех m выполняются неравенства

$$F_m(x) \leq \sum_{n=1}^m g_n(x) = f_m(x) \leq f(x)$$

и для любого фиксированного N

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) \geq \sum_{n=1}^N \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_{m,n}(x) = \sum_{n=1}^N g_n(x) = f_N(x),$$

откуда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = f(x).$$

Согласно утверждению 15.2 получаем, что

$$\int_E f(x) d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E F_m(x) d\mu. \quad (16.1)$$

В то же время, поскольку для всех m и $x \in E$ выполняется неравенство $0 \leq F_m(x) \leq f_m(x) \leq f(x)$, для любого m имеем

$$\int_E F_m(x) d\mu \leq \int_E f_m(x) d\mu \leq \int_E f(x) d\mu. \quad (16.2)$$

Из формул (16.1) и (16.2) вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_E f_m(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu.$$

Таким образом, теорема доказана. $\square$

Следствие 16.1. Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \in L(E)$, причем $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$ для любого $x \in E$ и существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\sup_n \int_E f_n(x) d\mu \leq C. \quad (16.3)$$

Тогда $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in L(E)$ (а следовательно, $f(x)$ конечна почти всюду на E) и

$$\int_E f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu.$$

Иногда именно это утверждение называют *теоремой Беппо Леви*.

Доказательство. Рассмотрим функции $\psi_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$ при $n = 1, 2, \dots$. Ясно, что эта последовательность удовлетворяет условиям теоремы 16.1, а потому для неотрицательной измеримой функции

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = f(x) - f_1(x)$$

имеем

$$\int_E \psi(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu - \int_E f_1(x) d\mu. \quad (16.4)$$

Из условия (16.3) вытекает, что $\psi(x) \in L(E)$. Следовательно, $f(x) = \psi(x) + f_1(x) \in L(E)$. Последнее утверждение следствия 16.1 получаем из равенства (16.4). $\square$

Следствие 16.2. Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ измеримы и неотрицательны на E и функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Тогда

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) d\mu.$$

Доказательство. Введем функции

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда эта последовательность удовлетворяет условиям теоремы 16.1. Поэтому

$$\int_E f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_E f_k(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) d\mu,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 16.2 (теорема Фату). Пусть мера μ полна, а $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на E неотрицательных функций и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ почти всюду на множестве E . Тогда

$$\int_E f(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu.$$

Доказательство. Положим $\varphi_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$ для $n = 1, 2, \dots$ и $x \in E$. Тогда $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ для всех n и x и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

для $x \in E_1$, где $\mu(E \setminus E_1) = 0$. Применяя теорему Беппо Леви, получим

$$\int_E f(x) d\mu = \int_{E_1} f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1} \varphi_n(x) d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n(x) d\mu.$$

Так как при всех n имеем

$$\int_E \varphi_n(x) d\mu \leq \int_E f_n(x) d\mu,$$

отсюда вытекает требуемое утверждение. $\square$

З а м е ч а н и е 16.1. В теореме Фату и в доказываемой ниже теореме Лебега можно отказаться от условия полноты меры μ , если либо потребовать сходимости $f_n(x) \rightarrow f(x)$ не почти всюду, а всюду на множестве E , либо добавить условие измеримости предельной функции $f(x)$ на множестве E .

З а м е ч а н и е 16.2. Пример последовательности $f_n(x) = nX_{(0, \frac{1}{n})}(x) \rightarrow 0$ на отрезке $[0, 1]$ показывает, что в теореме Фату нельзя предельное неравенство заменить на равенство.

Т е о р е м а 16.3 (теорема Лебега). Пусть мера μ полна, а $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность измеримых на E функций, что существует функция $F(x) \in L(E)$, для которой $|f_n(x)| \leq F(x)$ при всех n и $x \in E$, и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ почти всюду на множестве E . Тогда функция $f(x) \in L(E)$ и

$$\int_E f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что по теореме 15.5 функции $f_n(x) \in L(E)$ при $n = 1, 2, \dots$. Поскольку из-за полноты меры μ функция $f(x)$ измерима на E , $f(x) \in L(E)$. Теперь рассмотрим при $n = 1, 2, \dots$ функции $\varphi_n(x) = F(x) + f_n(x)$ и $\psi_n(x) = F(x) - f_n(x)$. Тогда все эти функции неотрицательны на E , интегрируемы на этом множестве и почти всюду на E имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = F(x) + f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = F(x) - f(x).$$

По теореме Фату

$$\begin{aligned} \int_E F(x) d\mu + \int_E f(x) d\mu &= \\ &= \int_E (F(x) + f(x)) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (F(x) + f_n(x)) d\mu = \\ &= \int_E F(x) d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_E F(x) d\mu - \int_E f(x) d\mu &= \int_E (F(x) - f(x)) d\mu \leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (F(x) - f_n(x)) d\mu = \\ &= \int_E F(x) d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu \leq \int_E f(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu,$$

т. е. существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu,$$

и теорема Лебега доказана. $\square$

С л е д с т в и е 16.3. *Утверждение теоремы Лебега остается верным, если условие сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к функции $f(x)$ почти всюду на множестве E заменить на условие сходимости по мере.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку по теореме Рисса некоторая подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на E , по теореме Лебега функция $f(x) \in L(E)$. Предположим, что интегралы от $f_n(x)$ не сходятся к интегралу от $f(x)$. Тогда существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{f_{n_k}(x) = g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, что при любом k имеем

$$\left| \int_E g_k(x) d\mu - \int_E f(x) d\mu \right| > \varepsilon_0. \quad (16.5)$$

В то же время $g_k(x) \Rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$, и по теореме Рисса найдется подпоследовательность $g_{k_l}(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на E . Тогда по теореме Лебега

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_E g_{k_l}(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu,$$

что противоречит неравенству (16.5). $\square$

§ 17. Дальнейшие свойства интеграла Лебега

В этом параграфе снова будем считать, что (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство и множество $E \in M$. Прежде всего докажем важную теорему о линейности интеграла по множеству.

Теорема 17.1. Пусть функция $f(x) \in L(E)$ и

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

где множества E_n измеримы при всех n . Тогда для любого n функция $f(x) \in L(E_n)$ и

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x) d\mu.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $f(x) \geq 0$. Очевидно, что для любого n выполняется неравенство $|f(x)X_{E_n}(x)| \leq f(x)$, откуда $f(x)X_{E_n}(x) \in L(E)$ или, что то же самое, $f(x) \in L(E_n)$. Кроме того,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x)X_{E_k}(x).$$

Тогда согласно следствию 16.2

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f(x)X_{E_k}(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) d\mu,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Следующая теорема говорит о непрерывности интеграла Лебега как функции множества.

Теорема 17.2 (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега). Пусть функция $f(x) \in L(E)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если множество $A \in M$, $A \subset E$ и $\mu(A) < \delta$, то

$$\int_A |f(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство. Из условия ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда функция $f(x)$ неотрицательна. Выберем простую неотрицательную функцию $h(x) \leq f(x)$ так, чтобы

$$0 \leq \int_E f(x) d\mu - \int_E h(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть

$$h(x) = \sum_{k=1}^n a_k X_{E_k}(x),$$

где множества E_k попарно не пересекаются. Тогда возьмем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(\max_{1 \leq k \leq n} a_k + 1)}.$$

Теперь если $A \in M$, $A \subset E$ и $\mu(A) < \delta$, то

$$\begin{aligned} \int_A f(x) d\mu &= \int_A f(x) d\mu - \int_A h(x) d\mu + \int_A h(x) d\mu \leq \\ &\leq \int_E f(x) d\mu - \int_E h(x) d\mu + \int_E \sum_{k=1}^n a_k X_{E_k \cap A}(x) d\mu < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k \cap A) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1 \leq k \leq n} a_k \sum_{k=1}^n \mu(E_k \cap A) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1 \leq k \leq n} a_k \mu(A) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 17.3 (неравенство Чебышева). Пусть неотрицательная функция $f(x) \in L(E)$. Тогда если определить для $\lambda > 0$ множество

$$E_\lambda = \{x \in E: f(x) > \lambda\},$$

то справедливо неравенство

$$\mu(E_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int f(x) d\mu.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 15.5

$$\begin{aligned} \int_E f(x) d\mu &= \int_{E_\lambda} f(x) d\mu + \int_{E \setminus E_\lambda} f(x) d\mu \geq \\ &\geq \int_{E_\lambda} f(x) d\mu \geq \int_{E_\lambda} \lambda d\mu = \lambda \mu(E_\lambda), \end{aligned}$$

что эквивалентно доказываемому утверждению. $\square$

Следствие 17.1. Если измеримая на E функция $f(x)$ неотрицательна и

$$\int_E f(x) d\mu = 0,$$

то $f(x) = 0$ почти всюду на E .

Доказательство. Из неравенства Чебышева для любого натурального n имеем

$$\mu\left(\left\{x \in E: f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$$

Поскольку

$$\{x \in E: f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E: f(x) > \frac{1}{n}\right\},$$

$$\mu(\{x \in E: f(x) > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in E: f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0. \quad \square$$

До сих пор мы практически не могли судить об интегрируемости по Лебегу той или иной конкретной функции, не являющейся простой. Следующий результат позволит нам сделать это для функций, измеримых на множествах конечной меры.

Предварительно введем некоторые обозначения. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве E . Введем множества

$$F_k(f) = \{x \in E: |f(x)| \geq k\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Теорема 17.4 (критерий интегрируемости по Лебегу на множествах конечной меры). Пусть $\mu(E) < \infty$ и функция $f(x)$ измерима на E . Тогда $f(x) \in L(E)$ в том и только в том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)) < \infty. \quad (17.1)$$

В частности, любая ограниченная измеримая функция на множестве конечной меры интегрируема по Лебегу.

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку интегрируемость измеримой функции эквивалентна интегрируемости ее модуля, теорему достаточно доказать для неотрицательных $f(x)$. Определим функцию

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{F_k(f)}(x).$$

Поскольку, очевидно, $h(x) \leq f(x) \leq h(x) + 1$ для любого $x \in E$ и $\mu(E) < \infty$, функция $f(x) \in L(E)$ в том и только в том случае, когда $h(x) \in L(E)$. Согласно следствию 16.2

$$\int_E h(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E X_{F_k(f)}(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)).$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы. $\square$

§ 18. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана

Заметим, что, несмотря на доказанный в предыдущем параграфе критерий интегрируемости по Лебегу, мы можем практически вычислить интеграл Лебега лишь для простых функций. Для классической меры Лебега на отрезке в $\mathbb{R}^n$ этот недостаток отчасти устраняется следующей теоремой.

Теорема 18.1. Пусть μ — классическая мера Лебега на n -мерном отрезке $[a, b]$, функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке и

$$\text{R-} \int_{[a, b]} f(x) dx = I.$$

Тогда $f(x) \in L((a, b))$ и

$$\text{L-} \int_{(a, b)} f(x) d\mu = I.$$

Доказательство. Пусть $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Для каждого $r \geq 1$ и $s = 1, 2, \dots, n$ определим точки $x_s(k) = a_s + \frac{k}{2^r}(b_s - a_s)$, где $k = 0, 1, \dots, 2^r$. Пусть также $\Delta_s(k) = [x_s(k-1), x_s(k)]$ при $k = 1, 2, \dots, 2^r - 1$ и $\Delta_s(2^r) = [x_s(2^r - 1), x_s(2^r)]$. Далее, при всех $r \geq 1$ и $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, где $k_s = 1, 2, \dots, 2^r$ при $s = 1, 2, \dots, n$, положим $E_k = \Delta_1(k_1) \times \Delta_2(k_2) \times \dots \times \Delta_n(k_n)$ и определим величины

$$m_{r,k} = \inf_{x \in E_k} f(x)$$

и

$$M_{r,k} = \sup_{x \in E_k} f(x).$$

Теперь введем функции

$$\underline{f}_r(x) = \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} M_{r,k} X_{E_k}(x) \quad \text{и} \quad \underline{f}_r(x) = \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} m_{r,k} X_{E_k}(x)$$

при $r = 1, 2, \dots$

Заметим, что при любом r функции $\bar{f}_r(x)$ и $\underline{f}_r(x)$ — простые, а по определению интеграла Римана

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{L-} \int_{(a, b)} \bar{f}_r(x) d\mu &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} M_{r,k} \prod_{s=1}^n \frac{b_s - a_s}{2^r} = \\ &= I = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} m_{r,k} \prod_{s=1}^n \frac{b_s - a_s}{2^r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{L-} \int_{(a, b)} \underline{f}_r(x) d\mu. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Кроме того, для любого $x \in [a, b]$ имеем $\bar{f}_r(x) \geq f(x) \geq \underline{f}_r(x)$, последовательность $\bar{f}_r(x)_{r=1}^\infty$ не возрастает, а последовательность $\underline{f}_r(x)_{r=1}^\infty$ — не убывает на отрезке $[a, b]$. Тогда при $x \in [a, b]$ существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{f}_r(x) = \bar{f}(x) \geq f(x) \geq \underline{f}(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{f}_r(x).$$

При этом по следствию 16.1 (см. (18.1))

$$L\text{-}\int_{(a,b)} \bar{f}(x) d\mu = I = L\text{-}\int_{(a,b)} \underline{f}(x) d\mu. \quad (18.2)$$

Отсюда

$$\int_{(a,b)} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)| d\mu = \int_{(a,b)} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x)) d\mu = 0,$$

и применяя следствие 17.1, получим, что $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$ почти всюду на (a, b) . Последнее равенство означает, что $\bar{f}(x) = f(x) = \underline{f}(x)$ почти всюду на (a, b) и (см. (18.2))

$$L\text{-}\int_{(a,b)} f(x) d\mu = I.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

З а м е ч а н и е 18.1. Пример функции Дирихле, равной нулю во всех иррациональных точках одномерного отрезка $[0, 1]$ и единице во всех рациональных точках этого отрезка, показывает, что даже не всякая ограниченная интегрируемая по Лебегу функция интегрируема по Риману.

Несколько более сложным образом интеграл Лебега связан с несобственным интегралом Римана на отрезке. С одной стороны, пример из замечания 18.1 показывает, что из интегрируемости по Лебегу, вообще говоря, не вытекает и интегрируемость в несобственном смысле по Риману. С другой стороны, функция $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ при $x \in (0, 1]$ интегрируема по Риману в несобственном смысле, но не интегрируема по Лебегу. В то же время справедлив, например, следующий результат.

Т е о р е м а 18.2. Пусть μ — классическая мера Лебега на одномерном отрезке $[a, b]$, функция $f(x)$ неотрицательна

и интегрируема по Риману на этом отрезке в несобственном смысле, причем

$$\text{R-}\int_{a_+}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +0} \text{R-}\int_{a+t}^b f(x)dx = I.$$

Тогда $f(x) \in L((a, b))$ и

$$\text{L-}\int_{(a, b)} f(x)d\mu = I.$$

Доказательство. Пусть $E_n = \left[a + \frac{1}{n}, b \right]$ при $n \geq n_0$, где $\frac{1}{n_0} < b - a$, и функции

$$f_n(x) = f(x)X_{E_n}(x).$$

Тогда в силу неотрицательности функции $f(x)$ последовательность $f_n(x) \uparrow f(x)$ на $(a, b]$. Далее, при любом $n \geq n_0$ по теореме 18.1 функция $f_n(x) \in L((a, b))$ и

$$\text{L-}\int_{(a, b)} f_n(x)d\mu = \text{L-}\int_{E_n} f(x)d\mu = \text{R-}\int_{a + \frac{1}{n}}^b f(x)dx \leq I.$$

Применяя следствие 16.1, получим

$$\text{L-}\int_{(a, b)} f(x)d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{L-}\int_{E_n} f(x)d\mu = I,$$

а это и нужно было установить. $\square$

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

§ 19. Теорема Лузина

В этом параграфе мы докажем теорему Лузина. Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Определение 19.1. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она называется *непрерывной* на этом множестве, если для любого $x \in A$ выполнено равенство

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in A}} f(y) = f(x).$$

Лемма 19.1. Пусть F — такое замкнутое подмножество n -мерного отрезка $[a, b]$, что ни одна точка этого подмножества не является его точкой усиленного разрежения (см. § 9), а $f(x)$ — функция, непрерывная на F . Тогда существует непрерывная на $[a, b]$ функция $g(x)$, совпадающая на F с функцией $f(x)$.

Доказательство. Для любого $y \in [a, b]$ определим расстояние $\rho(y) = \rho(y, F) = \inf_{x \in F} |x - y|$. Ясно, что функция $\rho(y)$ непрерывна на $[a, b]$ и что $\rho(y) > 0$ при $y \in [a, b] \setminus F$. Для каждого $y \in [a, b] \setminus F$ определим множество $E(y) = B_{2\rho(y)}(y) \cap F$, где $B_r(z)$ — шар с центром в точке z радиуса r . Теперь введем функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in F, \\ \frac{1}{\mu(E(x))} \int_{E(x)} f(u) d\mu(u) & \text{при } x \in [a, b] \setminus F. \end{cases}$$

Поскольку множество F не имеет точек усиленного разрежения, по определению расстояния $\mu(E(x)) > 0$ для любого $x \in [a, b] \setminus F$

и, следовательно, функция $g(x)$ определена корректно. На множестве F она, очевидно, совпадает с $f(x)$. Установим непрерывность функции $g(x)$.

Поскольку функция $\rho(y)$ непрерывна на $[a, b]$, функция $g(x)$ на $[a, b] \setminus F$ является композицией непрерывных отображений, а потому и сама непрерывна на $[a, b] \setminus F$. Рассмотрим случай, когда $x \in F$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $y \in F$ и $|y - x| < \delta$ выполнялось неравенство $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Пусть теперь $y \in [a, b]$ и $|y - x| < \frac{\delta}{2}$. Если $y \in F$, то доказывать нечего, а если $y \notin F$, то $\rho(y) < \frac{\delta}{2}$ и потому для любого $z \in E(y)$ выполнено неравенство $|z - x| < \delta$. Следовательно (см. следствие 15.2),

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &= |g(y) - f(x)| = \frac{1}{\mu(E(y))} \left| \int_{E(y)} (f(u) - f(x)) d\mu(u) \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon \mu(E(y))}{\mu(E(y))} = \varepsilon, \end{aligned}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 19.2. Пусть $h(x)$ — простая функция на $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $Q \subset [a, b]$, что $\mu([a, b] \setminus Q) < \varepsilon$ и функция $h(x)$ непрерывна на Q по множеству Q .

Доказательство. Сначала отметим, что если функция $\varphi(x)$ постоянна на замкнутом множестве $F \subset \mathbb{R}^n$, то она непрерывна на этом множестве. Если теперь

$$h(x) = \sum_{k=1}^n a_k X_{E_k}(x),$$

где

$$[a, b] = \bigsqcup_{k=1}^n E_k,$$

то (см. следствие 9.1) можно выбрать замкнутые множества $F_k \subset E_k$ так, чтобы $\mu(E_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{n}$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда множество

$$Q = \bigsqcup_{k=1}^n F_k$$

будет искомым. $\square$

Теорема 19.1 (теорема Лузина). Пусть $f(x)$ — конечная и измеримая относительно классической меры Лебега на n -мерном отрезке $[a, b]$ функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция $g(x) = g_\varepsilon(x)$, что

$$\mu(\{x \in [a, b]: f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для неотрицательной функции $f(x)$. Используя лемму 15.1, построим последовательность простых функций $h_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ и $x \in [a, b]$. Далее, по лемме 19.2 для каждого n выберем замкнутое множество $F_n \subset [a, b]$ так, чтобы $\mu([a, b] \setminus F_n) < 2^{-n}$ и чтобы функция $h_n(x)$ была непрерывна на F_n . Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N так, что $2^{-N+2} < \varepsilon$. Отметим, что если

$$B = \bigcap_{n=N}^{\infty} F_n,$$

то

$$\mu([a, b] \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$$

и последовательность непрерывных на B функций $\{h_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ сходится на этом множестве к функции $f(x)$. По теореме Егорова можно выбрать множество $B_1 \subset B$, на котором эта сходимость будет равномерной и такое, что $\mu(B \setminus B_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. При этом (см. следствие 9.1) множество B_1 можно также считать замкнутым. По известной теореме из курса математического анализа, функция $f(x)$ непрерывна на множестве B_1 . Это множество замкнуто, и применяя лемму 9.1, можно найти замкнутое множество $F \subseteq B_1$, не имеющее точек усиленного разрежения и такое, что $\mu(B_1 \setminus F) = 0$. Для завершения доказательства теоремы остается только продолжить непрерывную на F функцию $f(x)$ до непрерывной на $[a, b]$ функции $g(x)$, воспользовавшись леммой 19.1.

З а м е ч а н и е 19.1. В теореме Лузина, разумеется, можно считать, что функция $f(x)$ конечна лишь почти всюду на $[a, b]$.

Представляется любопытным, что вариант теоремы Лузина, упомянутый в замечании 19.1, допускает несложное обращение.

У т в е р ж д е н и е 19.1. Если функция $f(x)$ определена на n -мерном отрезке $[a, b]$ и такова, что для любого $\varepsilon > 0$

найдется непрерывная на $[a, b]$ функция $g(x) = g_\epsilon(x)$, для которой $\mu(\{x \in [a, b]: f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$, где μ — классическая мера Лебега, то $f(x)$ измерима на $[a, b]$ относительно μ и конечна почти всюду на $[a, b]$.

Доказательство. Для $n = 1, 2, \dots$ подберем непрерывные на $[a, b]$ функции $g_n(x)$ так, чтобы для множеств $E_n = \{x \in [a, b]: f(x) \neq g_n(x)\}$ выполнялось неравенство $\mu(E_n) < 2^{-n}$. Поскольку

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in [a, b]: |f(x) - g_n(x)| > 0\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) \leq 2^{-k+1} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, по теореме 13.1 последовательность $g_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Тогда, согласно следствию 10.1 и замечанию 10.6, функция $f(x)$ измерима на $[a, b]$. Наконец, для каждого n имеем

$$\mu(\{x \in [a, b]: f(x) = \pm\infty\}) \leq \mu(E_n) < 2^{-n},$$

а потому $f(x)$ конечна почти всюду на $[a, b]$. $\square$

§ 20. Заряды. Теорема Радона—Никодима

Определение 20.1. Пусть M — σ -алгебра с единицей X , а Φ — σ -аддитивная действительнoзначная функция на M . Тогда Φ называется *зарядом*.

Таким образом, заряд — это знакопеременная σ -аддитивная мера.

Определение 20.2. Пусть заряд Φ задан на σ -алгебре M с единицей и множество $A \in M$. Тогда A называется *положительным (отрицательным)* относительно Φ , если для любого множества $B \in M$, $B \subseteq A$ выполнено неравенство $\Phi(B) \geq 0$ ($\Phi(B) \leq 0$).

Нашей ближайшей целью будет показать, что для любого заряда Φ множество X может быть разложено в дизъюнктное объединение положительного и отрицательного, относительно данного заряда, множеств, причем такое разложение в определенном смысле единственно. Нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Лемма 20.1. Пусть Φ — заряд на σ -алгебре M с единицей X , и пусть существует такое множество $B \in M$, что $\Phi(B) < 0$. Тогда найдется отрицательное множество $B_0 \in M$, $B_0 \subseteq B$, $\Phi(B_0) < 0$.

Доказательство. Для упрощения записи множества $A \in M$ будем называть измеримыми. Если для любого измеримого $A \subseteq B$ имеем $\Phi(A) \leq 0$, то B само отрицательно. Предположим, что

$$\gamma(B) = \sup_{A \in M, A \subseteq B} \Phi(A) > 0.$$

Сначала предположим, что $\gamma(B) = \infty$ (хотя из устанавливаемой ниже теоремы 20.1 будет видно, что этот случай невозможен). Тогда можно выбрать измеримое множество $A_1 \subset B$ так, что $\Phi(A_1) > 1$. При этом если $B_1 = B \setminus A_1$, то $\Phi(B_1) < \Phi(B)$. Если $\gamma(B_1) < \infty$, то процесс заканчивается, а если нет, то можно выбрать измеримое $A_2 \subset B_1$ так, что $\Phi(A_2) > 1$, и т. д. Предположим, что мы можем продолжать такой выбор сколько угодно долго. Тогда мы получим последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств $A_1, A_2, \dots$ с $\Phi(A_i) > 1$ при $i = 1, 2, \dots$. Но в этом случае

$$\Phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty,$$

и мы приходим к противоречию. Поэтому для некоторого k получим, что $\gamma(B_k) < \infty$, причем $\Phi(B_k) < 0$. В этом случае будем искать удовлетворяющее условиям леммы множество B_0 среди измеримых подмножеств множества B_k . В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем, что $0 < \gamma(B) < \infty$.

Выберем измеримое множество $A_1 \subset B$ так, чтобы $\Phi(A_1) > \frac{\gamma(B)}{2}$, и пусть $B_1 = B \setminus A_1$. Тогда $\Phi(B_1) < \Phi(B)$ и $\gamma(B_1) < \frac{\gamma(B)}{2}$. Если $\gamma(B_1) = 0$, то можно взять $B_0 = B_1$, в противном случае можно повторить изложенную выше операцию. В итоге либо на некотором шаге будет найдено отрицательное подмножество B , либо мы построим цепочку таких вложенных измеримых множеств $B \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$, что $\Phi(B_{j+1}) < \Phi(B_j)$ и

$$\gamma(B_j) \leq \frac{\gamma(B)}{2^j} \quad (20.1)$$

при $j = 1, 2, \dots$. В этом случае можно взять

$$B_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Отметим, что согласно теореме 6.1 и замечанию 6.2 $\Phi(B_0) < \Phi(B)$, а из неравенства (20.1) следует, что не существует измеримого множества $A \subset B_0$ с $\Phi(A) > 0$. $\square$

Теорема 20.1. Пусть Φ — заряд на σ -алгебре M с единицей X . Тогда существует такое множество $A_+ \in M$, что оно положительно, а множество $A_- = X \setminus A_+$ отрицательно относительно заряда Φ . Представление $X = A_+ \sqcup A_-$ называется разложением Хана заряда Φ .

Доказательство. Обозначим множество всех отрицательных множеств $A \in M$ через M_- и положим $\alpha = \inf_{A \in M_-} \Phi(A)$. Будем считать, что $\alpha < 0$, иначе доказывать нечего. Пусть последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ из M_- такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(A_n) = \alpha$. Тогда множество

$$A_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M_-$$

и для любого n выполнено равенство $\Phi(A_-) \leq \Phi(A_n)$, откуда $\Phi(A_-) = \alpha$ (поэтому, в частности, $\alpha > -\infty$).

Докажем, что множество $A_+ = X \setminus A_-$ положительно. Если это не так, то существует измеримое $B \subset A_+$ с $\Phi(B) < 0$. Согласно лемме 20.1, можно выбрать отрицательное множество $B_0 \subset B$ с $\Phi(B_0) < 0$. Но в этом случае множество $C = A_- \sqcup B_0$ отрицательно и $\Phi(C) < \Phi(A_-) = \alpha$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Установим единственность, в соответствующем смысле, разложения Хана.

Утверждение 20.1. Пусть Φ — заряд на σ -алгебре M с единицей X и $B_+ \sqcup B_- = X = A_+ \sqcup A_-$ — два разложения Хана. Тогда для любого $E \in M$ имеем $\Phi(E \cap A_+) = \Phi(E \cap B_+)$ и $\Phi(E \cap A_-) = \Phi(E \cap B_-)$.

Доказательство. Поскольку множество $E \cap (A_+ \setminus B_+)$ одновременно является подмножеством и A_+ и B_- , $\Phi(E \cap (A_+ \setminus B_+)) = 0$. Аналогично, $\Phi(E \cap (B_+ \setminus A_+)) = 0$. Поэтому

$$\Phi(E \cap A_+) = \Phi(E \cap (A_+ \cap B_+)) = \Phi(E \cap B_+).$$

Аналогично устанавливается второе равенство. $\square$

Определение 20.3. Если Φ — заряд на σ -алгебре M с единицей X и $X = A_+ \sqcup A_-$ — его разложение Хана, то можно однозначно определить две σ -аддитивные меры $\Phi^+(E) = \Phi(E \cap A_+)$ и $\Phi^-(E) = -\Phi(E \cap A_-)$. Разложение $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ называется *разложением Жордана заряда Φ* , а мера $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$ — *полной вариацией исходного заряда*.

Определение 20.4. Пусть (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство, а Φ — заряд на M . Тогда Φ называется *абсолютно непрерывным относительно меры μ* , если из того что $E \in M$ и $\mu(E) = 0$, вытекает, что $\Phi(E) = 0$.

Лемма 20.2. Пусть (X, M, μ) — конечное измеримое пространство, а Φ — σ -аддитивная мера на M , абсолютно непрерывная относительно меры μ , и $\Phi \neq 0$. Тогда существуют такое натуральное число n и такое множество $B \in M$, что $\mu(B) > 0$ и B положительно относительно заряда $\psi_n = \Phi - \frac{1}{n}\mu$.

Доказательство. Пусть $X = A_+(i) \sqcup A_-(i)$ — разложение Хана относительно заряда ψ_i , где $i = 1, 2, \dots$. При этом можно считать, что $A_+(1) \subseteq A_+(2) \subseteq \dots$. Далее, пусть

$$A_+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_+(i) \quad \text{и} \quad A_- = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_-(i).$$

Очевидно, что $X = A_+ \sqcup A_-$. Тогда для любого i имеем $\psi_i(A_-) < 0$, т. е. $\Phi(A_-) \leq \frac{1}{i}\mu(A_-)$, откуда $\Phi(A_-) = 0$. Поэтому $\Phi(A_+) > 0$, а следовательно, и $\mu(A_+) > 0$. Согласно теореме 6.1 и замечанию 6.1 найдется такое n , что $\mu(A_+(n)) > 0$. Но по определению множество $A_+(n)$ положительно относительно заряда ψ_n , что и завершает доказательство. $\square$

Теперь мы установим основной результат данного параграфа.

Теорема 20.2 (теорема Радона—Никодима). Пусть (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство, а Φ — заряд на M , абсолютно непрерывный относительно меры μ . Тогда существует такая функция $f(x) \in L(X) \equiv L(X, M, \mu)$, что для любого $A \in M$

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu. \quad (20.2)$$

При этом если для некоторой другой функции $g(x) \in L(X)$ равенство (20.2) также выполняется для всех $A \in M$, то $f(x) = g(x)$ почти всюду относительно меры μ .

Доказательство. Благодаря наличию разложения Жордана, достаточно доказать теорему для случая, когда Φ — мера. Сначала рассмотрим случай $\mu(X) < \infty$. Тогда определим множество

$$F = \left\{ f(x) \in L(X): f(x) \geq 0 \text{ на } X \right. \\ \left. \text{и } \int_A f(x) d\mu \leq \Phi(A) \text{ для любого } A \in M \right\}.$$

Пусть также

$$S = \sup_{f(x) \in F} \int_X f(x) d\mu \leq \Phi(X).$$

Тогда найдется такая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subseteq F$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = S.$$

Определим при $n = 1, 2, \dots$ и $x \in X$ функцию $g_n(x) = \max_{1 \leq k \leq n} f_k(x)$. Тогда по теореме 10.4 $g_n(x)$ измерима на X , а поскольку

$$g_n(x) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \in L(X),$$

и $g_n(x) \in L(X)$ при всех n . Проверим, что $g_n(x) \in F$. Неотрицательность этой функции очевидна. Далее,

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) X_{E_k}(x), \quad \text{где } X = \bigcup_{k=1}^n E_k.$$

Отсюда для любого $A \in M$ имеем

$$\int_A g_n(x) d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k \cap A} f_k(x) d\mu \leq \sum_{k=1}^n \Phi(E_k \cap A) = \Phi(A),$$

т. е. действительно $g_n(x) \in F$. Заметим, что функции $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$ образуют неубывающую на X последовательность. Определим функцию $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$. Поскольку при $n = 1, 2, \dots$

$$\int_X g_n(x) d\mu \leq S,$$

согласно следствию 16.1 функция $f(x)$ конечна почти всюду на X , $f(x) \in L(X)$, функция $f(x) \in F$ и

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu \leq S,$$

откуда

$$\int_X f(x) d\mu = S.$$

Теперь рассмотрим заряд

$$\lambda(A) = \Phi(A) - \int_A f(x) d\mu$$

для любого $A \in M$. Этот заряд, очевидно, неотрицателен (т. е. является σ -аддитивной мерой) и абсолютно непрерывен относительно меры μ . Предположим, что $\lambda \not\equiv 0$. Тогда по лемме 20.2 найдутся такое n и такое множество $B \in M$, что $\mu(B) > 0$ и для любого измеримого $A \subseteq B$ имеем $(\lambda - \frac{1}{n}\mu)(A) \geq 0$, т. е. $\frac{1}{n}\mu(A) \leq \lambda(A)$. Определим функцию $h(x) = f(x) + \frac{1}{n}X_B(x)$ при $x \in X$. Тогда для любого $A \in M$ имеем

$$\begin{aligned} \int_A h(x) d\mu &= \int_A f(x) d\mu + \frac{1}{n}\mu(A \cap B) \leq \\ &\leq \int_{A \setminus B} f(x) d\mu + \Phi(A \cap B) \leq \Phi(A \setminus B) + \Phi(A \cap B) = \Phi(A). \end{aligned}$$

Поэтому $h(x) \in F$, в то время, как

$$\int_X h(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu + \frac{1}{n}\mu(B) > S.$$

Полученное противоречие показывает, что $\lambda \equiv 0$ на M , и для случая конечного измеримого пространства доказательство существования завершено.

Пусть теперь $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $\mu(E_n) < \infty$ при $n = 1, 2, \dots$

Согласно уже рассмотренному случаю, для каждого n найдется такая функция $f_n(x) \in L(E_n)$, что для любого множества $A \in M \cap E_n = M_n$

$$\Phi(A) = \int_A f_n(x) d\mu. \quad (20.3)$$

Заметим, что все функции $f_n(x)$ неотрицательны на области своего определения. Продолжим их нулем на все множества X и положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Тогда

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n) = \Phi(X) < \infty,$$

откуда $f(x) \in L(X)$. Нужное нам равенство (20.2) сразу вытекает из равенств (20.3).

Проверим единственность с точностью до почти всюду построенной функции. Если для любого $A \in M$

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu,$$

то, обозначая

$$X_1 = \{x \in X: f(x) > g(x)\} \quad \text{и} \quad X_2 = \{x \in X: f(x) < g(x)\},$$

получим, что

$$\int_{X_1} (f(x) - g(x)) d\mu = 0.$$

Последнее равенство возможно, только если $\mu(X_1) = 0$. Аналогично, $\mu(X_2) = 0$, и теорема Радона—Никодима полностью доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 20.1. В теореме Радона—Никодима нельзя отказаться от абсолютной непрерывности заряда Φ относительно меры μ . Это можно продемонстрировать на примере, когда μ — классическая мера Лебега на отрезке $[0, 1]$, а

$$\Phi(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{1}{2} \in E, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§ 21. σ -аддитивность прямого произведения мер. Теорема Фубини

Сначала докажем теорему о σ -аддитивности произведения σ -аддитивных мер на полукольцах, которая упоминалась в восьмом параграфе.

Теорема 21.1. Пусть меры m_1 и m_2 σ -аддитивны на полукольцах S_1 и S_2 соответственно. Тогда определенная в § 8 мера $m = m_1 \times m_2$ на полукольце $S = S_1 \times S_2$ также σ -аддитивна.

Доказательство. Пусть

$$A = A_1 \times A_2 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_1(k) \times A_2(k)),$$

где $A_1, A_1(1), A_1(2), \dots \in S_1$ и $A_2, A_2(1), A_2(2), \dots \in S_2$. Рассмотрим полукольцо $S'_1 = S_1 \cap A_1$ с единицей A_1 . Тогда m_1 — σ -аддитивная мера на S'_1 и ее можно продолжить по Лебегу. Обозначим результат такого продолжения через λ_1 . Теперь определим при $x \in A_1$ и $k = 1, 2, \dots$ функцию $f_k(x) = m_2(A_2(k))X_{A_1(k)}(x)$. Тогда $f_k(x)$ — простая функция на A_1 и, так как для каждого $x \in A_1$

$$\bigsqcup_{k: x \in A_1(k)} A_2(k) = A_2,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k: x \in A_1(k)} m_2(A_2(k)) = m_2(A_2)X_{A_1}(x).$$

Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_1} f_k(x) d\lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty} m_2(A_2(k))m_1(A_1(k)) < \infty.$$

Поскольку, согласно следствию 16.2, здесь можно поменять местами суммирование и интегрирование,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} m(A_1(k) \times A_2(k)) &= \sum_{k=1}^{\infty} m_1(A_1(k))m_2(A_2(k)) = \\ &= \int_{A_1} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) d\lambda_1 = \lambda_1(A_1)m_2(A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Определение 21.1. Если меры μ_1 и μ_2 σ -аддитивны на полукольцах S_1 и S_2 с единицами X_1 и X_2 соответственно, то их *прямым произведением* $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ мы будем называть лебеговское продолжение меры $m = \mu_1 \times \mu_2$ с полукольца $S = S_1 \times S_2$ с единицей $X = X_1 \times X_2$ на лебеговскую σ -алгебру. Таким же образом будет обозначаться и произведение σ -конечных мер.

В дальнейшем до конца этого параграфа будем считать, что S_1 и S_2 — это σ -алгебры. Как всегда, через $R(S)$ обозначим наименьшее кольцо, содержащее полукольцо S , а через M — лебеговскую σ -алгебру, на которой определена мера $\mu = \mu_1 \times \mu_2$.

Прежде чем мы сможем в полном объеме доказать теорему Фубини, установим некоторые ее частные случаи. Предварительно введем такое обозначение. Если множество $E \subset X = X_1 \times X_2$, то при любом $x \in X_1$ обозначим через $E(x) \subseteq X_2$ соответствующее сечение, т. е.

$$E(x) = \{y \in X_2: (x, y) \in E\}.$$

Аналогично, при любом $y \in X_2$ определяется сечение $E(y) \subseteq X_1$.

Теорема 21.2. Пусть меры μ_1 и μ_2 σ -конечны и полны, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, множество $E \in M$ и $\mu(E) < \infty$. Тогда для почти всех, относительно меры μ_1 , точек $x \in X_1$ сечение $E(x) \in S_2$, $\mu_2(E(x)) \in L(X_1, S_1, \mu_1)$ и

$$\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2(E(x)) d\mu_1. \quad (21.1)$$

Здесь мы произвольным образом доопределяем функцию $\mu_2(E(x))$ в тех точках, где она не существует. Разумеется, аналогичное представление остается справедливым и если мы поменяем ролями μ_1 и μ_2 .

Доказательство. Ясно, что утверждение теоремы справедливо для множеств $E \in S$, а тогда, в силу линейности обеих частей формулы (21.1), и для $E \in R(S)$. Предположим, что утверждение теоремы выполняется для цепочки вложенных множеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ из M , $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ и $\mu(B) < \infty$. Проверим, что теорема остается справедливой и для множества B . Действительно, для любого $x \in X_1$ имеем $B(x) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(x)$. Тогда для почти всех $x \in X_1$ множество $B(x) \in S_2$. Далее, для почти

всех $x \in X_1$ функции $\mu_2(A_j(x)) \uparrow \mu_2(B(x))$ при $j \rightarrow \infty$. Поэтому, в силу полноты меры μ_1 , функция $\mu_2(B(x))$ измерима на X_1 , и, используя теорему Беппо Леви и теорему о непрерывности меры, получим, что

$$\int_{X_1} \mu_2(B(x)) d\mu_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X_1} \mu_2(A_j(x)) d\mu_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu(B).$$

Точно так же устанавливается, что если условия теоремы справедливы для цепочки вложенных множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ из M , $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ и $\mu(A_1) < \infty$, то она остается справедливой и для множества B .

Пусть теперь $E \in M$ и $\mu(E) = 0$. Тогда по теореме 9.1 это множество можно представить в виде

$$E = F(E) \setminus A_0(E) \quad \text{где} \quad F(E) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}, \quad (21.2)$$

где $A_{i,j} \in R(S)$, $i, j = 1, 2, \dots$; $A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq \dots$ для любого i ; если $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots$, то $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, $\mu(B_1) < \infty$; $A_0(E) \in M$ и $\mu(A_0(E)) = 0$. Выше была установлена справедливость теоремы для $F(E)$. Так как $\mu(E) = 0$, соответствующее множество $F(E)$ также имеет меру 0. Тогда, поскольку

$$\int_{X_1} \mu_2(F(E)(x)) d\mu_1 = 0$$

и подинтегральная функция неотрицательна, мы получаем, что $\mu_2(F(E)(x)) = 0$ для почти всех $x \in X_1$ относительно меры μ_1 . Поскольку $E \subseteq F(E)$ и мера μ_2 полна, отсюда вытекает, что и $\mu_2(E(x)) = 0$ для почти всех $x \in X_1$ относительно меры μ_1 . Тогда из-за полноты меры μ_1 функция $\mu_2(E(x))$ μ_1 -измерима и

$$\mu(E) = 0 = \int_{X_1} \mu_2(E(x)) d\mu_1,$$

т. е. для измеримых множеств E меры 0 теорема установлена.

Пусть, наконец, произвольное измеримое $E \in M$ и $\mu(E) < \infty$. Тогда снова имеет место представление (21.2). Теорема уже установлена для множеств $A_0(E)$ и $F(E)$, а тогда в силу аддитивности меры и линейности интеграла, утверждение справедливо и для множества E . $\square$

Теорема 21.3. Пусть меры μ_1 и μ_2 σ -конечны и полны, множество $E \in M$, функция $f(x, y)$ измерима на E и неотрицательна. Тогда для почти всех $x \in X_1$, относительно меры μ_1 , функция $f(x, y)$ μ_2 -измерима, функция

$$\Phi(x) = \int_{E(x)} f(x, y) d\mu_2$$

μ_1 -измерима и

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{X_1} \Phi(x) d\mu_1 = \int_{X_1} \int_{E(x)} f(x, y) d\mu_2 d\mu_1.$$

Аналогичная формула остается справедливой и если мы поменяем ролями μ_1 и μ_2 .

Доказательство. По теореме 21.2 утверждение верно для характеристических функций μ -измеримых множеств с конечной мерой. Тогда оно справедливо и для любой простой функции на E . Теперь построим согласно лемме 15.1 последовательность неотрицательных простых функций $g_n(x, y) \uparrow f(x, y)$ на E . Применяя к данной последовательности теорему Беппо Леви (в правой части — вначале для внутреннего интеграла, а затем — для внешнего) и теорему об измеримости предела последовательности измеримых функций, установим справедливость теоремы в общем случае. $\square$

Из только что доказанного результата моментально следует утверждение, которое обычно и называют теоремой Фубини.

Теорема 21.4. Пусть меры μ_1 и μ_2 σ -конечны и полны, множество $E \in M$ и функция $f(x, y) \in L(E)$. Тогда для почти всех относительно меры μ_1 $x \in X_1$ функция $f(x, y)$ μ_2 -измерима, функция

$$\Phi(x) = \int_{E(x)} f(x, y) d\mu_2 \in L(X_1, M_1, \mu_1)$$

и

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{X_1} \Phi(x) d\mu_1 = \int_{X_1} \int_{E(x)} f(x, y) d\mu_2 d\mu_1.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для другого повторного интеграла.

Замечание 21.1. Следует отметить, что в общем случае даже существование обоих повторных интегралов и их равенство не влечет существования двойного интеграла. В качестве примера можно рассмотреть функцию $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$ при $(x, y) \in [-1, 1]^2 \setminus \{0\}$ и классическую меру Лебега на $[-1, 1]^2$.

§ 22. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства L_p

В этом параграфе будем придерживаться следующих обозначений.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Определим число

$$q = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{при } 1 < p < \infty, \\ \infty & \text{при } p = 1, \\ 1 & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Таким образом, всегда $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Л е м м а 22.1. Для любых $a, b \geq 0$ и $1 < p < \infty$ справедливо неравенство

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим на плоскости кривую $y = x^{p-1}$ при $x \geq 0$. Пусть S_1 — это площадь фигуры, ограниченной данной кривой, осью OX и прямой $x = a$, а S_2 — площадь фигуры, ограниченной этой же кривой, осью OY и прямой $y = b$. Тогда, очевидно,

$$ab \leq S_1 + S_2 = \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Т е о р е м а 22.1 (неравенство Гёльдера). Пусть $1 < p < \infty$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на σ -конечном измеримом пространстве (X, M, μ) и таковы, что $|f(x)|^p, |g(x)|^q \in L(X)$. Тогда $f(x)g(x) \in L(X)$ и

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_X |g(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (22.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если хотя бы один из интегралов в правой части неравенства (22.1) равен нулю, то и соответствующая функция равна нулю почти всюду на X . В этом случае и произведение $f(x)g(x) = 0$ почти всюду на X , а тогда утверждение теоремы, очевидно, верно. Пусть теперь

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = A^p \quad \text{и} \quad \int_X |g(x)|^q d\mu = B^q,$$

где $A, B \neq 0$. Тогда если $\varphi(x) = \frac{f(x)}{A}$ и $\psi(x) = \frac{g(x)}{B}$, то

$$\int_X |\varphi(x)|^p d\mu = \int_X |\psi(x)|^q d\mu = 1,$$

и согласно лемме 22.1 и теореме 15.5

$$\int_X |\varphi(x)\psi(x)| d\mu \leq \int_X \frac{|\varphi(x)|^p}{p} d\mu + \int_X \frac{|\psi(x)|^q}{q} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

а отсюда сразу вытекает утверждение теоремы. $\square$

Теорема 22.2 (неравенство Минковского). Пусть $1 \leq p < \infty$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на σ -конечном измеримом пространстве (X, M, μ) и таковы, что $|f(x)|^p, |g(x)|^p \in L(X)$. Тогда $|f(x) + g(x)|^p \in L(X)$ и

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. При $p = 1$ наше утверждение сразу следует из теоремы 15.5. Пусть $p > 1$. Тогда, поскольку для любого $x \in X$

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \max(|f(x)|^p, |g(x)|^p) \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

то мы имеем $|f(x) + g(x)|^p \in L(X)$. Далее, отметим, что для любого $x \in X$

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| + |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)|.$$

Тогда, поскольку $(p-1)q = p$, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} \int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu &\leq \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ &\times \left(\left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right). \quad (22.2) \end{aligned}$$

Если

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu = 0,$$

то утверждение теоремы очевидно. В противном случае, для обеих частей неравенства (22.2) на

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

получаем требуемое утверждение. $\square$

Дадим теперь важное определение линейного нормированного пространства.

Определение 22.1. *Линейным нормированным пространством* называется пара $(L, \|\cdot\|)$, где L — линейное пространство над полем K , $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, а функция $\|\cdot\|: L \rightarrow [0, \infty)$, причем

- 1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любого $x \in L$ и для любого $\lambda \in K$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in L$.

В ряде случаев, когда это не может привести к путанице, линейное нормированное пространство обозначают просто L .

Определение 22.2. Пусть $1 \leq p < \infty$, а (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство. Тогда введем множество

$$\widehat{L}_p(X) = \left\{ \text{измеримые на } X \text{ функции } f(x): \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty \right\},$$

и $J_0(X)$ — совокупность всех измеримых на X функций, которые почти всюду на этом множестве равны нулю. Наконец, обозначим факторпространство $\widehat{L}_p(X)/J_0(X)$ через $L_p(X)$. Если $f(x) \in L_p(X)$, то положим

$$\|f(x)\| = \|f(x)\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отметим, что для вычисления нормы можно брать любого представителя из соответствующего функционального класса. С учетом этого в дальнейшем мы часто будем говорить об элементах пространства $L_p(X)$, как о функциях.

З а м е ч а н и е 22.1. Из неравенства Минковского следует, что $(L_p, \|\cdot\|_p)$ является линейным нормированным пространством.

Замечание 22.2. С учетом введенных обозначений неравенства Гёльдера и Минковского можно, соответственно, записать так:

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \|f(x)\|_p \|g(x)\|_q$$

и

$$\|f(x) + g(x)\|_p \leq \|f(x)\|_p + \|g(x)\|_p.$$

Определение 22.3. Пусть (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство. Тогда введем множество

$$\widehat{L}_\infty(X) = \left\{ \text{измеримые на } X \text{ функции } f(x): \|f(x)\|_\infty = \right. \\ \left. = \operatorname{ess\,sup}_X |f(x)| = \inf\{C > 0: \mu(\{x \in X: |f(x)| > C\}) = 0\} < \infty \right\},$$

и обозначим факторпространство $\widehat{L}_\infty(X)/J_0(X)$ через $L_\infty(X)$. Естественным образом норма $\|\cdot\|_\infty$ определена и на пространстве L_∞ .

Замечание 22.3. Неравенства Гёльдера и Минковского можно очевидным образом обобщить на случай $p = \infty$ (и, соответственно, $q = 1$). Кроме того, ясно, что $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ является линейным нормированным пространством.

Замечание 22.4. В случае когда X — это множество всех натуральных чисел, а мера любого множества — это число его элементов, неравенства Гёльдера и Минковского будут выглядеть так:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Последние неравенства часто называют неравенствами Гёльдера и Минковского для рядов. Отметим также, что в этом случае пространства $L_p(X)$, где $1 \leq p \leq \infty$, обозначаются l_p .

Замечание 22.5. В дальнейшем мы будем рассматривать пространства $L_p(X)$ не только действительныхзначных,

но и комплекснозначных функций. Измеримость в данном случае будет пониматься как одновременная измеримость действительной и мнимой частей, а понятие нормы остается тем же. Аналогично и интегрируемость по Лебегу комплекснозначной функции определяется как одновременная интегрируемость действительной и мнимой части с соответствующим равенством для интегралов. Ниже мы будем в некоторых местах рассматривать интегралы от таких функций.

Следующее утверждение представляет собой простейший вариант теоремы вложения.

Утверждение 22.1. Если $\mu(X) < \infty$ и $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, то $L_{p_2}(X) \subset L_{p_1}(X)$, т. е. если $f(x) \in L_{p_2}(X)$, то $f(x) \in L_{p_1}(X)$ и справедливо неравенство

$$\|f(x)\|_{p_1} \leq C(p_1, p_2, \mu(X)) \|f(x)\|_{p_2}.$$

Доказательство. Если $p_2 = \infty$, то утверждение очевидно. В противном случае, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\|f(x)\|_{p_1}^{p_1} = \int_X |f(x)|^{p_1} d\mu \leq \left(\int_X |f(x)|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{p_1}{p_2}} (\mu(X))^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}},$$

а это эквивалентно доказываемому утверждению. $\square$

Замечание 22.6. Рассмотрение функций вида $x^a X_{(0,1)}(x)$ и $x^a X_{(1,\infty)}(x)$ позволяет установить, что, во-первых, вложения в утверждении 22.1, вообще говоря, строгие и, во-вторых, это утверждение уже неверно для множеств X с σ -конечной мерой.

§ 23. Полнота и некоторые другие свойства пространств L_p

Сначала дадим два определения.

Определение 23.1. Пусть $(L, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и пусть $F = \{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность его элементов. Тогда эта последовательность называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что при любых $m, n > N$ выполняется неравенство $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Если же найдется такой элемент $f \in L$, что $\|f_n - f\| \rightarrow 0$

при $n \rightarrow \infty$, то говорят, что f является *пределом* последовательности F (в тех случаях, когда рассматриваются различные определения предела, данный предел называется *пределом по норме пространства* $(L, \|\cdot\|)$).

Очевидно, что любая последовательность элементов линейного нормированного пространства, имеющая предел, фундаментальна.

Определение 23.2. Пусть $(L, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство и любая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел. Тогда данное пространство называется *полным*.

Сейчас мы подробнее рассмотрим вопрос о полноте пространств L_p . Предварительно установим один вспомогательный результат.

Лемма 23.1. Пусть (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство, $1 \leq p < \infty$ и $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность элементов пространства $L_p(X)$. Тогда существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, что подпоследовательность $f_{n_k}(x)$ сходится почти всюду на X к конечной функции $f(x)$.

Доказательство. Выберем последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ таким образом, чтобы $\|f_n(x) - f_{n_k}(x)\|_p < \frac{1}{2^k}$ при $n \geq n_k$. Сначала рассмотрим случай $\mu(X) < \infty$. Тогда (см. утверждение 22.1) $\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|_1 < C \frac{1}{2^k}$, где постоянная C зависит лишь от p и от меры множества X . Рассмотрим ряд

$$|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| = \Phi(x).$$

Согласно следствию 16.2

$$\int_X \Phi(x) d\mu < \infty,$$

а тогда по теореме 15.2(3) функция $\Phi(x)$ конечна почти всюду на X . Это означает, что ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

абсолютно сходится, а следовательно, сходится почти всюду на X . Поскольку при любом k k -я частичная сумма этого ряда

совпадает с $f_{n_k}(x)$, для множеств X с конечной мерой лемма установлена.

Если же

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m,$$

где $\mu(E_m) < \infty$, $m = 1, 2, \dots$, то, поскольку для любой функции $g(x) \in L_p(X)$ и для любого натурального m норма $\|g(x)\|_{L_p(E_m)} \leq \|g(x)\|_{L_p(X)}$, по уже доказанному последовательность $f_{n_k}(x)$ сходится почти всюду на E_m к конечной функции $f_m(x)$. Полагая функцию $f(x) = f_m(x)$ при $x \in E_m$, $m = 1, 2, \dots$, завершаем доказательство леммы. $\square$

Теорема 23.1. Если (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство и $1 \leq p \leq \infty$, то пространство $L_p(X)$ является полным.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $p < \infty$. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L_p(X)$. Тогда, применяя лемму 23.1, выделим из нее подпоследовательность $f_{n_k}(x)$, сходящуюся почти всюду на X к конечной функции $f(x)$. Доопределим $f(x)$ нулем в тех точках, где сходимости нет. Тогда она будет измерима на X . Поскольку для почти всех $x \in X$ $|f_{n_k}(x)|^p \rightarrow |f(x)|^p$ при $k \rightarrow \infty$, из теоремы Фату (см. также замечание 16.1) следует, что функция $f(x) \in L_p(X)$. Далее, если задано $\varepsilon > 0$, то можно выбрать K_0 так, что при $q, r > K_0$ будем иметь $\|f_q(x) - f_r(x)\|_p < \varepsilon$. Учитывая, что почти всюду на X $|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)|^p \rightarrow |f_{n_k}(x) - f(x)|^p$ при $l \rightarrow \infty$, и снова применяя теорему Фату, получим, что $\|f_{n_k}(x) - f(x)\|_p < \varepsilon$ при $n_k > K_0$. Но в этом случае при $r > K_0$ имеем $\|f_r(x) - f(x)\|_p < 2\varepsilon$, и теорема установлена.

Теперь рассмотрим случай $p = \infty$. Определим числа $a_{m,n} = \|f_n(x) - f_m(x)\|_{\infty}$, $m, n = 1, 2, \dots$. Пусть

$$E_{m,n} = \{x \in X: |f_n(x) - f_m(x)| > a_{m,n}\}.$$

По определению нормы в пространстве $L_{\infty}(X)$ имеем $\mu(E_{m,n}) = 0$ при всех m и n . Но тогда на множестве

$$E = X \setminus \bigcup_{m,n=1}^{\infty} E_{m,n}$$

рассматриваемая последовательность равномерно фундаментальна. Согласно известной теореме из курса математическо-

го анализа, в этом случае на множестве E последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится. Доопределив предельную функцию нулем на $X \setminus E$ и учитывая, что $\mu(X \setminus E) = 0$, завершим доказательство теоремы. $\square$

Следующая теорема устанавливает еще одно важное свойство пространств L_p .

Теорема 23.2. Пусть (X, M, μ) — σ -конечное измеримое пространство и $1 \leq p < \infty$. Тогда если функция $f(x)$ измерима и неотрицательна на X , и $F_f(t) = F(t) = \mu(\{x \in X: f(x) > t\})$ при $t > 0$, то имеет место равенство

$$\int_X f^p(x) d\mu = p \int_{(0, \infty)} t^{p-1} F(t) dt,$$

где через dt обозначена классическая мера Лебега на $(0, \infty)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ — простая, а именно

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k X_{E_k}(x),$$

где $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$, множества E_k попарно не пересекаются и имеют конечную меру. Тогда

$$f^p(x) = \sum_{k=1}^n c_k^p X_{E_k}(x)$$

и

$$F(t) = \begin{cases} \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n) & \text{при } 0 < t < c_1, \\ \mu(E_2) + \dots + \mu(E_n) & \text{при } c_1 \leq t < c_2, \\ \dots & \dots \\ \mu(E_n) & \text{при } c_{n-1} \leq t < c_n, \\ 0 & \text{при } t \geq c_n. \end{cases}$$

Формально полагая $c_0 = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} p \int_{(0, \infty)} t^{p-1} F(t) dt &= p \sum_{k=1}^n \left(\sum_{r=k}^n \mu(E_r) \right) \int_{c_{k-1}}^{c_k} t^{p-1} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{r=k}^n \mu(E_r) \right) (c_k^p - c_{k-1}^p) = \sum_{k=1}^n c_k^p \mu(E_k) = \int_X f^p(x) d\mu, \end{aligned}$$

и в этом случае требуемое равенство установлено. В общей ситуации построим, согласно лемме 15.1, последовательность неотрицательных простых функций $h_n(x) \uparrow f(x)$ на X . По теореме Беппо Леви

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n^p(x) d\mu = \int_X f^p(x) d\mu. \quad (23.1)$$

Далее, ясно, что последовательность $\{F_{h_n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает на $(0, \infty)$ и по теореме о непрерывности меры

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{h_n}(t) = F_f(t)$$

при $t \in (0, \infty)$. Снова применяя теорему Беппо Леви, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} t^{p-1} F_{h_n}(t) dt = \int_{(0, \infty)} t^{p-1} F_f(t) dt. \quad (23.2)$$

Кроме того, как было установлено выше,

$$\int_X h_n^p(x) d\mu = p \int_{(0, \infty)} t^{p-1} F_{h_n}(t) dt. \quad (23.3)$$

Из формул (23.1)–(23.3) вытекает утверждение теоремы. $\square$

О п р е д е л е н и е 23.3. Пусть $(L, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство и множество $A \subset L$. Тогда A называется *всюду плотным* в L , если для любого $x \in L$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $y \in A$, что $\|x - y\| < \varepsilon$.

Рассмотрим более подробно важный случай, когда X является отрезком или прямой, а μ — классическая мера Лебега. В ряде вопросов очень важно бывает указать сравнительно простое всюду плотное множество в пространствах L_p .

Т е о р е м а 23.3. Пусть $1 \leq p < \infty$, а μ — классическая мера Лебега. Тогда для $-\infty < a < b < \infty$ в пространстве $L_p([a, b])$ всюду плотными являются множества непрерывных на этом отрезке функций, многочленов и многочленов с рациональными коэффициентами. В пространстве $L_p(\mathbb{R})$ всюду плотным является множество непрерывных финитных (т. е. обращающихся в 0 вне некоторого отрезка) функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале рассмотрим $L_p([a, b])$. Нам надо доказать, что для любой функции $f(x) \in L_p([a, b])$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная на $[a, b]$ функция $g(x)$,

что $\|f(x) - g(x)\|_p < \varepsilon$. Понятно, что этот факт достаточно установить для неотрицательных функций $f(x)$. Далее, пусть $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и $f(x) \in L_p([a, b])$. Построив согласно лемме 15.1 последовательность неотрицательных простых функций $h_n(x) \uparrow f(x)$ на $[a, b]$, по теореме Лебега о предельном переходе получим, что

$$\|f(x) - h_n(x)\|_p^p = \int_{[a, b]} |f(x) - h_n(x)|^p d\mu \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда функция $f(x)$ — простая. При этом из очевидных соображений можно считать, что $f(x) = X_E(x)$, где измеримое множество $E \subseteq [a, b]$. Построим согласно определению классической меры Лебега множество

$$E_1 = \bigsqcup_{q=1}^m (a_q, b_q)$$

так, чтобы $\mu(E \Delta E_1) < \varepsilon$. При этом

$$\|X_E(x) - X_{E_1}(x)\|_p^p = (\mu(E \Delta E_1))^p < \varepsilon^p.$$

Отсюда вытекает, что наша задача свелась к нахождению непрерывной функции, которая приближает характеристическую функцию данного интервала (c, d) с заданной точностью ε . Такой функцией является для достаточно малых γ непрерывная функция $g_\gamma(x)$, равная нулю вне (c, d) , единице на $[c + \gamma, d - \gamma]$ и линейная на оставшихся интервалах. Таким образом, установлена плотность множества непрерывных функций в $L_p((a, b))$.

Применяя известную теорему Вейерштрасса о существовании для любой непрерывной функции $g(x)$ на $[a, b]$ последовательности многочленов $\{P_k(x)\}_{k=1}^\infty$, сходящейся к ней равномерно, а также очевидное неравенство

$$\left(\int_{(a, b)} |g(x) - P_k(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq (b - a)^{\frac{1}{p}} \max_{x \in [a, b]} |g(x) - P_k(x)|,$$

легко доказать, что и множество всех многочленов всюду плотно в $L_p((a, b))$. По тем же причинам этим свойством обладают и многочлены с рациональными коэффициентами.

Перейдем теперь к рассмотрению пространств $L_p(R)$. Из теоремы Лебега о предельном переходе вытекает, что если

$\varepsilon > 0$, то для достаточно большого N будем иметь $\|f(x) - f(x)X_{[-N, N]}(x)\|_p < \varepsilon$. Кроме того, по уже доказанной части теоремы найдется такая непрерывная на $[-N, N]$ функция $g(x)$, что $\|f(x) - g(x)\|_{L_p([-N, N])} < \varepsilon$. Взяв непрерывную на R функцию

$$g_\gamma(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \in [-N, N], \\ 0 & \text{при } |x| \geq N + \gamma, \\ \text{линейна} & \text{на оставшихся интервалах} \end{cases}$$

и выбрав достаточно малое $\gamma > 0$, будем иметь $\|f(x) - g_\gamma(x)\|_p < 3\varepsilon$, а это эквивалентно доказываемому утверждению. $\square$

ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ И АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 24. Функции ограниченной вариации на отрезке

Определение 24.1. Пусть отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ и функция $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда для любого разбиения отрезка $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ положим

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Если величина

$$V_a^b(f) = \sup_T V_T(f) < \infty,$$

то будем говорить, что $f(x)$ — *функция ограниченной вариации* на отрезке $[a, b]$ ($f(x) \in V([a, b])$).

Замечание 24.1. Ясно, что если $f(x) \in V([a, b])$, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$, точнее, для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f).$$

Теорема 24.1. Если функция $f(x) \in V([a, b])$ и $a < c < b$, то $f(x) \in V([a, c])$ и $f(x) \in V([c, b])$, причем

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Доказательство. Если $T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = c\}$ и $T_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = b\}$ — разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, соответственно, то $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = c < y_1 < \dots < y_m = b\}$ будет разбиением отрезка $[a, b]$. При этом, очевидно, $V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f)$. Ввиду

произвольности разбиений T_1 и T_2 отсюда вытекает, что $f(x) \in V([a, c])$, $f(x) \in V([c, b])$ и

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f). \quad (24.1)$$

С другой стороны, пусть разбиение $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Образует разбиение T' , добавив к разбиению T точку c , если она не входила в T , либо взяв $T' \equiv T$ в противном случае. Разбиение T' представляет собой объединение разбиений T_1 и T_2 отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно. Поэтому

$$V_T(f) \leq V_{T'}(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Так как разбиение T произвольно, отсюда и из оценки (24.1) вытекает утверждение теоремы. $\square$

Очевидно, что если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то $f(x) \in V([a, b])$ и $V_a^b(f) = |f(a) - f(b)|$. Оказывается, что класс функций ограниченной вариации на отрезке не слишком далек от класса монотонных на этом отрезке функций.

Утверждение 24.1. Если функция $f(x) \in V([a, b])$, то $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ монотонно неубывают на отрезке $[a, b]$. При этом можно считать, что $f_1(x) = V_a^x(f)$ при $x \in [a, b]$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что по теореме 24.1 функция $f_1(x) = V_a^x(f)$ монотонно неубывает на $x \in [a, b]$. Далее, если $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$ и $a \leq x < y \leq b$, то по теореме 24.1

$$f_2(y) - f_2(x) = V_x^y(f) - f(y) + f(x) \geq V_x^y(f) - |f(y) - f(x)| \geq 0,$$

что и завершает доказательство. $\square$

Теорема 24.2. Пусть функции $f(x), g(x) \in V([a, b])$, α и β — некоторые числа. Тогда $\alpha f(x) + \beta g(x) \in V([a, b])$ и $f(x)g(x) \in V([a, b])$. При этом

$$V_a^b(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| V_a^b(f) + |\beta| V_a^b(g)$$

и

$$V_a^b(fg) \leq V_a^b(f) \max_{x \in [a, b]} |g(x)| + V_a^b(g) \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Если, вдобавок, для некоторой постоянной $C > 0$ имеем $|g(x)| \geq C$ при $x \in [a, b]$, то и функция $\frac{1}{g(x)} \in V([a, b])$, причем

$$V_a^b\left(\frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{C^2} V_a^b(g). \quad (24.2)$$

Доказательство. Введем разбиение $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Тогда

$$\begin{aligned} V_T(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^n |(\alpha f(x_k) + \beta g(x_k)) - (\alpha f(x_{k-1}) + \beta g(x_{k-1}))| \leq \\ &\leq |\alpha| \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |\beta| \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \\ &\leq |\alpha| V_a^b(f) + |\beta| V_a^b(g) \quad (24.3) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} V_T(fg) &= \sum_{k=1}^n |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| |g(x_k)| + \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| |f(x_{k-1})| \leq \\ &\leq V_a^b(f) \max_{x \in [a, b]} |g(x)| + V_a^b(g) \max_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (24.4) \end{aligned}$$

Переходя в левых частях оценок (24.3) и (24.4) к верхним границам по всевозможным разбиениям T , установим два первых утверждения теоремы.

Далее, если $|g(x)| \geq C$ при $x \in [a, b]$, то

$$V_T\left(\frac{1}{g}\right) = \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{g(x_k)} - \frac{1}{g(x_{k-1})} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{|g(x_k) - g(x_{k-1})|}{|g(x_k)| |g(x_{k-1})|} \leq \frac{1}{C^2} V_a^b(g),$$

откуда сразу следует неравенство (24.2). $\square$

Теорема 24.3. Пусть $f(x) \in V([a, b])$ и точка $x_0 \in [a, b]$. Тогда непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 равносильна непрерывности в этой точке функции $f_1(x) = V_a^{x_0}(f)$.

Доказательство. Если $f_1(x)$ непрерывна в точке x_0 , то, поскольку

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq V_{x_0}^{x_0+h} = |f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)|,$$

функция $f(x)$ также непрерывна в этой точке.

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 . Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Дадим оценку разности $f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)$, считая для определенности, что $x_0 < b$ и $h > 0$. Возьмем такое

разбиение $T = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ отрезка $[x_0, b]$, что $V_T(f) > V_{x_0}^b(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. Теперь выберем такое $\delta > 0$, что $\delta < x_1 - x_0$ и если $0 < h < \delta$, то $|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при таких h имеем

$$\begin{aligned} f_1(x_0+h) - f_1(x_0) &= V_{x_0}^{x_0+h}(f) = \\ &= V_{x_0}^b(f) - V_{x_0+h}^b(f) < V_T(f) - V_{x_0+h}^b(f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq |f(x_0+h) - f(x_0)| + |f(x_0+h) - f(x_1)| + \\ &\quad + \sum_{k=2}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| - V_{x_0+h}^b(f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq |f(x_0+h) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теперь перейдем к доказательству теоремы о дифференцировании функции ограниченной вариации. Нам понадобятся вспомогательные утверждения, в которых будет говориться о верхних и нижних производных монотонной функции (по поводу определения этих производных см. теорему 10.5). Под μ будет пониматься классическая мера Лебега.

Утверждение 24.2. Если функция $f(x)$ монотонно неубывает на $[a, b]$, то при любом $x \in (a, b)$ выполнены неравенства $\bar{f}'(x) \geq \underline{f}'(x) \geq 0$.

Данное утверждение очевидно.

Лемма 24.1. Пусть функция $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$, множество $E \subseteq (a, b)$, число $p \geq 0$ и для любого $x \in E$ выполнено неравенство $\underline{f}'(x) \leq p$. Тогда $\mu^*(f(E)) \leq p\mu^*(E)$, где μ^* — внешняя мера.

Доказательство. Возьмем произвольные числа $p_0 > p$ и $\varepsilon > 0$, и пусть G — такое открытое подмножество (a, b) , что $E \subseteq G$ и $\mu(G) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Далее, для любой точки $x \in E$ найдется последовательность отличных от нуля чисел $h_n = h_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \leq p_0$$

при всех n . Для упрощения записи предположим, что $h_n(x) > 0$ при всех $x \in E$ и $n = 1, 2, \dots$. Мы можем также считать, что все $h_n(x)$ настолько малы, что отрезок $[x, x+h_n(x)] \subset G$. Пусть $d_n(x) = [x, x+h_n(x)]$ и $D_n = [f(x), f(x+h_n(x))]$ при $x \in E$

и $n = 1, 2, \dots$. Так как функция $f(x)$ строго возрастает, все отрезки $D_n(x)$ — невырожденные. Поскольку $\mu(D_n(x)) \leq p_0 h_n$ для всех x и n , множество отрезков $D = \{D_n(x)\}_{n=1, x \in E}^\infty$ покрывает образ $f(E)$ в смысле Витали. По теореме Витали можно выделить не более, чем счетное число попарно непересекающихся отрезков $\{D_k(x_k)\}_{k=1}^\infty \subseteq D$ так, чтобы

$$\mu^*\left(f(E) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k(x_k)\right) = 0.$$

Отметим, что при этом попарно не пересекаются и отрезки $\{d_k(x_k)\}_{k=1}^\infty \subset G$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu^*(f(E)) &\leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k(x_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k(x_k)) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f(x_k + h_k) - f(x_k)) \leq p_0 \sum_{k=1}^{\infty} h_k = p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \mu(d_k(x_k)) = \\ &= p_0 \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} d_k(x_k)\right) \leq p_0 \mu(G) \leq p_0(\mu^*(E) + \varepsilon). \end{aligned}$$

В силу произвольности $p_0 > p$ и $\varepsilon > 0$ отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Л е м м а 24.2. Пусть число $q > 0$, функция $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$, множество $E \subseteq (a, b)$, в каждой точке множества E функция $f(x)$ непрерывна и $\bar{f}'(x) \geq q$. Тогда $\mu^*(f(E)) \geq q\mu^*(E)$, где μ^* — внешняя мера.

Доказательство. Возьмем произвольные числа $q_0 \in (0, q)$ и $\varepsilon > 0$, и пусть G — такое открытое множество, что $G \supseteq f(E)$ и $\mu(G) \leq \mu^*(f(E)) + \varepsilon$. Для любой точки $x \in E$ найдется такая последовательность отличных от нуля чисел $h_n = h_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \geq q_0$$

при всех n . Снова предположим, что $h_n(x) > 0$ при всех $x \in E$ и $n = 1, 2, \dots$. Как и при доказательстве предыдущей леммы, введем следующие обозначения: $d_n(x) = [x, x + h_n(x)]$ и $D_n = [f(x), f(x + h_n(x))]$ при $x \in E$ и $n = 1, 2, \dots$. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точках множества E мы можем считать, что все $D_n(x) \subset G$. Далее, множество отрезков $\{d_n(x)\}_{n=1, x \in E}^\infty$

покрывает E в смысле Витали. По теореме Витали можно выделить не более чем счетное число попарно непересекающихся отрезков $\{d_k(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} d_k(x_k)\right) = 0.$$

Так как функция $f(x)$ строго возрастает, отрезки $\{D_k(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ также попарно не пересекаются. Тогда

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} d_k(x_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(d_k(x_k)) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \leq \frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^{\infty} (f(x_k + h_k) - f(x_k)) = \frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k(x_k)) = \\ &= \frac{1}{q_0} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k(x_k)\right) \leq \frac{1}{q_0} \mu(G) \leq \frac{1}{q_0} (\mu^*(f(E)) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Так как числа $q_0 < q$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, отсюда получаем утверждение леммы. $\square$

Теорема 24.4. Если функция $f(x)$ монотонно неубывает на $[a, b]$, то почти всюду на (a, b) существует конечная производная $f'(x) \in L((a, b))$, причем

$$\int_{(a, b)} f'(x) d\mu \leq f(b) - f(a). \quad (24.5)$$

При этом мы, разумеется, считаем, что функция $f'(x)$ произвольным образом доопределена в тех точках, где она не существует.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + x$ при $x \in [a, b]$. Тогда $g(x)$ строго возрастает на $[a, b]$. Пусть E — множество точек непрерывности функции $g(x)$ на $[a, b]$. Тогда множество $[a, b] \setminus E$ не более чем счетно. Обозначим через Q_+ совокупность всех положительных рациональных чисел и введем в рассмотрение множества $E_{\infty} = \{x \in E: \underline{f}'(x) = \infty\}$ и $E_{p, q} = \{x \in E: \underline{f}'(x) < p < q < \bar{f}'(x)\}$ при любых таких $p, q \in Q_+$, что $p < q$.

Если $\mu^*(E_{\infty}) = a > 0$, то согласно лемме 24.2 имеем $\mu^*(g(E_{\infty})) > ra$ для любого $r < \infty$, что невозможно. Следовательно, множество E_{∞} измеримо и $\mu(E_{\infty}) = 0$. Далее, согласно леммам 24.1 и 24.2 при любых $p < q$ имеем

$$q\mu^*(E_{p, q}) \leq \mu^*(g(E_{p, q})) \leq p\mu^*(E_{p, q}),$$

что возможно только при $\mu^*(E_{p,q}) = 0$. Поскольку множество точек недифференцируемости функции $g(x)$ на (a, b) имеет вид

$$A = ((a, b) \setminus E) \cup E_\infty \cup \left(\bigcup_{p, q \in Q_+ : p < q} E_{p,q} \right),$$

получаем равенство $\mu(A) = 0$, т. е. функция $g(x)$ дифференцируема почти всюду на (a, b) . Поэтому и функция $f(x) = g(x) - x$ дифференцируема почти всюду на (a, b) .

Продолжим функцию $f(x)$ на всю прямую, положив $f(x) = f(a)$ при $x < a$ и $f(x) = f(b)$ при $x > b$. Введем функции $F_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right)$ при $x \in [a, b]$ и $n = 1, 2, \dots$. Эти функции неотрицательны и $F_n(x) \rightarrow f'(x)$ почти всюду на (a, b) . Кроме того,

$$\begin{aligned} L\text{-}\int_{(a,b)} F_n(x) d\mu &= R\text{-}\int_a^b F_n(x) dx = n \left(\int_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - \int_a^b f(x) dx \right) = \\ &= n \left(- \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) dx + \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(b) dx \right) \leq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Применив теорему Фату, получим, что $f'(x) \in L((a, b))$ и выполняется оценка (24.5). $\square$

Следствие 24.1. Если функция $f(x) \in V([a, b])$, то почти всюду на (a, b) существует конечная производная $f'(x) \in L((a, b))$.

Замечание 24.2. Пример кривой Кантора на отрезке $[0, 1]$ показывает, что в формуле (24.5) неравенство, вообще говоря, нельзя заменить на равенство.

§ 25. Абсолютно непрерывные функции на отрезке

Определение 25.1. Пусть функция $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда будем говорить, что функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ ($f(x) \in AC([a, b])$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой такой системы непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^\infty$ из отрезка $[a, b]$, что

$$\sum_{k=1}^\infty (b_k - a_k) < \delta,$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е 25.1. Очевидно, что если функция $f(x) \in AC([a, b])$, то $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Т е о р е м а 25.1. Пусть функции $f(x), g(x) \in AC([a, b])$, α и β — некоторые числа. Тогда $\alpha f(x) + \beta g(x) \in AC([a, b])$ и $f(x)g(x) \in AC([a, b])$. Если, вдобавок, функция $g(x)$ не обращается в нуль на $[a, b]$, то и функция $\frac{1}{g(x)} \in AC([a, b])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данного утверждения фактически не отличается от доказательства теоремы 24.2. Отметим лишь, что при доказательстве абсолютной непрерывности функции $\frac{1}{g(x)}$ надо использовать тот факт, что, поскольку функция $g(x)$ не обращается в нуль на $[a, b]$ и является непрерывной на этом отрезке, найдется такое $C > 0$, что $|g(x)| > C$ при всех $x \in [a, b]$. $\square$

Т е о р е м а 25.2. Пусть функция $f(x) \in AC([a, b])$, а функция $g(y) \in AC([\alpha, \beta])$ и монотонна на этом отрезке, причем $g: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$. Тогда композиция $f(g(y)) \in AC([\alpha, \beta])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности будем считать, что функция $g(y)$ монотонно неубывает на $[\alpha, \beta]$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое $\delta > 0$, что для любой такой системы непересекающихся интервалов $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ из отрезка $[a, b]$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \delta,$$

выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon. \quad (25.1)$$

Далее, воспользовавшись абсолютной непрерывностью функции $g(y)$, подберем такое $\gamma > 0$, что для любой такой системы непересекающихся интервалов $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ из отрезка $[\alpha, \beta]$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) < \gamma,$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(\beta_k) - g(\alpha_k)| < \delta. \quad (25.2)$$

Отметим, что для любой такой системы все невырожденные интервалы из множества $\{(g(\alpha_k), g(\beta_k))\}_{k=1}^{\infty}$ попарно не пересекаются. Поэтому (см. оценки (25.1) и (25.2))

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(g(\beta_k)) - f(g(\alpha_k))| < \varepsilon,$$

т. е. функция $f(g(y)) \in AC([\alpha, \beta])$, что и требовалось доказать. $\square$

Чуть ниже будет приведен пример, показывающий, что без условия монотонности функции $g(y)$ теорема 25.2, вообще говоря, неверна.

Связь между абсолютно непрерывными функциями и функциями ограниченной вариации проявляется следующим результатом.

Утверждение 25.1. Если функция $f(x) \in AC([a, b])$, то $f(x) \in V([a, b])$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$ и подберем соответствующее $\delta > 0$ из определения абсолютной непрерывности. Далее, выберем натуральное n так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n} < \delta$. Пусть $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{l-1} < x_l = b\}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Добавим к этому разбиению те точки набора $\{y_i = a + \frac{(b-a)i}{n}\}_{i=0}^n$, которые не входят в T , и полученное разбиение обозначим через $T' = \{a = z_0 < z_1 < \dots < z_{m-1} < z_m = b\}$. Но тогда

$$V_T(f) \leq V_{T'}(f) \leq \sum_{k=1}^n \sum_{y_{k-1} < z_i \leq y_k} |f(z_i) - f(z_{i-1})| \leq \sum_{k=1}^n 1 = n,$$

откуда $V_a^b(f) \leq n < \infty$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 25.2. Как показывает пример кривой Кантора, не всякая функция ограниченной вариации является абсолютно непрерывной.

З а м е ч а н и е 25.3. Пусть функция $f(x) = \sqrt{x}$ при $x \in [0, 1]$, а непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция $g(y)$ имеет вид

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x = \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{n^2} & \text{при } x = \frac{1}{2n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \text{линейна} & \text{на оставшихся интервалах.} \end{cases}$$

Нетрудно показать, что обе эти функции абсолютно непрерывны (впрочем, это проще вывести из результатов следующего параграфа), в то время как композиция $f(g(y)) = \sqrt{g(y)}$ даже не является функцией ограниченной вариации.

Пусть функция $f(x) \in AC([a, b])$. Тогда, согласно утверждениям 24.1 и 25.1, справедливо представление $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ монотонно неубывают на отрезке $[a, b]$, причем $f_1(x) = V_a^x(f)$ при $x \in [a, b]$. В дальнейшем будет использовано следующее наблюдение.

У т в е р ж д е н и е 25.2. Если функция $f(x) \in AC([a, b])$, то и функции $f_1(x), f_2(x) \in AC([a, b])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 25.1 достаточно установить абсолютную непрерывность функции $f_1(x)$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Подберем соответствующее $\delta > 0$ из определения абсолютной непрерывности функции $f(x)$. Рассмотрим такую систему непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ из отрезка $[a, b]$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta.$$

Для любого k подберем разбиение $T_k = \{a_k = z_{0,k} < z_{1,k} < \dots < z_{n_k,k} = b_k\}$ отрезка $[a_k, b_k]$ так, чтобы

$$V_{T_k}(f) > V_{a_k}^{b_k}(f) - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Тогда, поскольку интервалы системы $\{(z_{i-1,k}, z_{i,k})\}_{k=1, i=1}^{\infty, n_k}$ попарно не пересекаются, а сумма их длин не превосходит δ , имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)| &= \sum_{k=1}^{\infty} V_{a_k}^{b_k}(f_1) < \sum_{k=1}^{\infty} V_{T_k}(f) + \varepsilon = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} |f(z_{i,k}) - f(z_{i-1,k})| + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

что эквивалентно доказываемому утверждению. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится еще одно определение.

Определение 25.2. Пусть функция $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$, а μ — классическая мера Лебега на прямой. Тогда будем говорить, что функция $f(x)$ *обладает* на $[a, b]$ *N -свойством Лузина*, если для любого такого измеримого множества $E \subset [a, b]$, что $\mu(E) = 0$ множество $f(E)$ также измеримо и $\mu(f(E)) = 0$.

Полезность введенного определения можно продемонстрировать следующей теоремой.

Теорема 25.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда для того, чтобы образ любого измеримого относительно меры μ множества $E \subseteq [a, b]$ был измерим относительно той же меры, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ обладала N -свойством Лузина на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Пусть, вначале, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и обладает N -свойством на этом отрезке, а множество $E \subseteq [a, b]$ измеримо относительно классической меры Лебега μ . Тогда, согласно следствию 9.1,

$$E = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right) \cup P,$$

где все множества F_k замкнуты, а $\mu(P) = 0$. Но в этом случае

$$f(E) = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f(F_k) \right) \cup f(P).$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ все множества $f(F_k)$ замкнуты, а так как $f(x)$ обладает N -свойством, множество $f(P)$ измеримо. Поэтому измеримо и множество $f(E)$.

Предположим теперь, что для любого измеримого $E \subseteq [a, b]$ множество $f(E)$ также измеримо. Допустим, что при этом найдется такое E_0 , $\mu(E_0) = 0$, что $\mu(f(E_0)) > 0$. Выделим, согласно теореме 7.1, неизмеримое множество $B \subset f(E_0)$, и пусть полный прообраз множества B в E_0 есть $f^{-1}(B) \cap E_0 = A \subset E_0$. Тогда A измеримо, а множество $f(A) = B$ — неизмеримо. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Теорема 25.4. Если функция $f(x) \in AC([a, b])$, то она обладает N -свойством Лузина на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Пусть множество $E \subset [a, b]$ и $\mu(E) = 0$. Для заданного $\varepsilon > 0$ подберем $\delta > 0$ из определения

абсолютной непрерывности. Согласно следствию 9.1 найдется открытое множество $G \supset E$ с мерой $\mu(G) < \delta$. По теореме 9.2 это множество можно представить в виде

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Пусть при $k = 1, 2, \dots$ образ $f([a_k, b_k]) = [c_k, d_k] = [f(x_k), f(y_k)]$. Ясно, что при этом интервалы $\{(\min(x_k, y_k), \max(x_k, y_k))\}_{k=1}^{\infty}$ попарно не пересекаются и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \mu(G) < \delta.$$

Но поскольку

$$f(E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} [c_k, d_k],$$

мы имеем

$$\mu^*(f(E)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (d_k - c_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает, что $\mu^*(f(E)) = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, абсолютно непрерывные на отрезке функции непрерывны, имеют ограниченную вариацию и обладают N -свойством. Оказывается, что справедливо и обратное утверждение. Для его доказательства понадобится один вспомогательный результат о функциях ограниченной вариации. Предварительно дадим соответствующее определение.

Определение 25.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда ее *индикатрисой Банаха* называется функция $N(y)$, определенная на отрезке $[m, M]$, где $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, а $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, и равная числу корней уравнения $f(x) = y$ на отрезке $[a, b]$ ($N(y)$ может принимать и значение ∞).

Л е м м а 25.1. Если непрерывная функция $f(x) \in V([a, b])$, то индикатриса Банаха $N(y) \in L([m, M])$.

Доказательство. Рассмотрим для произвольного натурального n промежутки $d_i = \left[a + \frac{(i-1)(b-a)}{2^n}, a + \frac{i(b-a)}{2^n} \right)$

при $i = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ и $d_{2^n} = \left[a + \frac{(2^n - 1)(b - a)}{2^n}, b \right]$. Пусть $m_i = \inf_{x \in d_i} f(x)$ и $M_i = \sup_{x \in d_i} f(x)$, а $\omega_i = M_i - m_i$. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{2^n} \omega_i \leq V_a^b(f). \quad (25.3)$$

Далее, рассмотрим при $i = 1, 2, \dots, 2^n$ функции

$$L_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{если уравнение } f(x) = y \text{ не имеет корней на } d_i, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Иными словами, $L_i(y) = X_{[m_i, M_i]}(y)$. Ясно, что

$$\int_{[m, M]} L_i(y) d\mu = \int_{[m_i, M_i]} 1 d\mu = \omega_i.$$

Определим функцию

$$N_n(y) = \sum_{i=1}^{2^n} L_i(y).$$

Из способа разбиения отрезка $[a, b]$ на отрезки d_i видно, что $N_n(y) \leq N_{n+1}(y)$ для любого натурального n и для любого $y \in [m, M]$.

Теперь если в некоторой точке $y \in [m, M]$ индикатриса Банаха $N(y) = k < \infty$, то для достаточно большого n все прообразы точки y попадут в разные отрезки d_i , а потому $N_n(y) = k$ для $n \geq K = K(y)$. Если же $N(y) = \infty$, то $N_n(y) \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, последовательность $N_n(y) \uparrow N(y)$ на $[m, M]$. Поскольку (см. (25.3))

$$\int_{[m, M]} N_n(y) d\mu = \sum_{i=1}^{2^n} \omega_i \leq V_a^b(f),$$

применив следствие 16.1, убеждаемся в справедливости леммы. $\square$

Теорема 25.5 (теорема Банаха—Зарецкого). Если $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция ограниченной вариации, обладающая N -свойством Лузина, то $f(x) \in AC([a, b])$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого натурального n существует такая система попарно непересекающихся интервалов $\{d_{i,n} = (a_{i,n}, b_{i,n})\}_{i=1}^{\infty}$ из отрезка $[a, b]$, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_{i,n} - a_{i,n}) < \frac{1}{2^n}, \quad (25.4)$$

в то время как

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_{i,n}) - f(a_{i,n})| > \varepsilon_0. \quad (25.5)$$

Положим $m_{i,n} = \inf_{x \in d_{i,n}} f(x)$ и $M_{i,n} = \sup_{x \in d_{i,n}} f(x)$. При $n = 1, 2, \dots$ введем множества

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} d_{i,n}$$

и

$$A = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=r}^{\infty} E_n.$$

Из условия (25.4) вытекает, что $\mu(A) = 0$, а тогда и $\mu(f(A)) = 0$.

Как и при доказательстве леммы 25.1, рассмотрим при $i = 1, 2, \dots$ и $y \in [m, M]$ функции

$$L_{i,n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если уравнение } f(x) = y \text{ не имеет корней на } d_{i,n}, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и

$$N_n(y) = \sum_{i=1}^{\infty} L_{i,n}(y).$$

При этом (см. следствие 16.2 и формулу (25.5))

$$\int_{[m, M]} N_n(y) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} (M_{i,n} - m_{i,n}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_{i,n}) - f(a_{i,n})| > \varepsilon_0. \quad (25.6)$$

Отметим, что при любом n имеем (см. лемму 25.1) $N_n(y) \leq N(y) \in L([m, M])$, где $N(y)$ — индикатриса Банаха функции $f(x)$. Пусть $C = \{y \in [m, M]: N(y) = \infty\}$ и $Z = \{y \in [m, M]: N_n(y) \neq 0 \text{ при } n \rightarrow \infty\}$. Поскольку $N(y) \in L([m, M])$, имеем $\mu(C) = 0$.

Пусть $y \in Z \setminus C$. Тогда найдется подпоследовательность $N_{n_k}(y) \geq 1$ при $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, для любого k

найдется такое $x_k \in E_{n_k}$, что $f(x_k) = y$. Так как $y \notin C$, а стало быть, $N(y) < \infty$, среди точек x_k может быть лишь конечное число различных. Поэтому по крайней мере одна из них (которую мы обозначим через x_0) принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Но тогда $x_0 \in A$, откуда $y \in f(A)$. Отсюда имеем $\mu(Z) \leq \mu(f(A)) + \mu(C) = 0$.

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(y) = 0$ для почти всех $y \in [a, b]$. Учитывая ограниченность сверху этих функций индикатрисой Банаха, по теореме Лебега будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[m, M]} N_n(y) d\mu = 0,$$

что противоречит неравенству (25.6). Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы. $\square$

§ 26. Неопределенный интеграл Лебега

Пусть μ — классическая мера Лебега на отрезке $[a, b]$, а функция $f(x) \in L(a, b)$. Тогда определим функцию

$$F(x) = \int_{[a, x]} f(t) d\mu$$

при $x \in [a, b]$. Назовем ее *неопределенным интегралом Лебега* функции $f(x)$ (естественность такого определения будет ясна из дальнейших результатов).

Утверждение 26.1. *Функция $F(x) \in AC([a, b])$.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. По теореме об абсолютной непрерывности интеграла Лебега, найдется такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $E \subset [a, b]$, $\mu(E) < \delta$, имеем

$$\int_E |f(t)| d\mu < \varepsilon.$$

Теперь если $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — такая система непересекающихся интервалов отрезка $[a, b]$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta,$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{[a_k, b_k]} f(t) d\mu \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[a_k, b_k]} |f(t)| d\mu = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)} |f(t)| d\mu < \varepsilon, \end{aligned}$$

а это и надо было проверить. $\square$

Введем теперь в рассмотрение так называемую *максимальную функцию*. Пусть $F(x)$ — неопределенный интеграл Лебега функции $f(x) \in L([a, b])$. Тогда положим

$$M(x; f) = \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right|$$

при $x \in (a, b)$.

Для установления дальнейших результатов нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Лемма 26.1. Если функция $f(x) \in L([a, b])$, а $F(x)$ — ее неопределенный интеграл Лебега, то при всех $\lambda > 0$ справедлива оценка

$$\mu(E_\lambda) \equiv \mu(\{x \in (a, b): M(x; f) > \lambda\}) \leq \frac{4}{\lambda} \|f(x)\|_1.$$

Доказательство. Прежде всего установим, что множество E_λ измеримо. Действительно,

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 < |h| < \frac{1}{n}} \left\{ x \in (a, b): x+h \in (a, b) \right. \\ &\quad \left. \text{и } \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| > \lambda + \frac{1}{m} \right\} \equiv \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 < |h| < \frac{1}{n}} E_{\lambda, h}. \end{aligned}$$

Так как при всех h и λ функции $\Phi(x, h) = \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right|$ непрерывны по x , все множества $E_{\lambda, h}$ открыты. Поэтому множество E_λ борелевское, а следовательно, и измеримое. Теперь заметим, что для любого $x \in E_\lambda$ существует последовательность $\{h_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, сходящаяся к нулю и такая, что $\Phi(x, h_m(x)) > \lambda$ при всех m и $x \in (a, b)$. Тогда совокупность отрезков $\{[x -$

$-|h_m(x)|, x + |h_m(x)|\}_{m=1, x \in (a, b)}$ покрывает множество E_λ в смысле Витали. Применив следствие 9.2, установим существование такого набора попарно непересекающихся отрезков $\{[x_i - |h_i|, x_i + |h_i|]\}_{i=1}^n$, что

$$\sum_{i=1}^n 2|h_i| > \frac{1}{2}\mu(E_\lambda).$$

С другой стороны,

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^n |h_i| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{[x_i - |h_i|, x_i + |h_i|]} f(t) d\mu \right| \leq \int_{[a, b]} |f(t)| d\mu.$$

Из последних двух оценок и вытекает утверждение леммы. $\square$

Отметим, что оценки, аналогичные только что установленной, называются оценками слабого типа. В последнее время они часто используются в различных доказательствах. Примером может служить следующее утверждение (его можно было бы установить исходя из теоремы о существовании почти всюду производной у монотонной функции на отрезке, но мы дадим более простое доказательство).

Теорема 26.1. Если функция $f(x) \in L([a, b])$, а $F(x)$ — ее неопределенный интеграл Лебега, то для почти всех $x \in (a, b)$ существует $F'(x) = f(x)$.

Доказательство. Определим согласно теореме 23.3 последовательность таких непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^\infty$, что $\|\varphi_i(x) - f(x)\|_1 < 1/i^4$ при $i = 1, 2, \dots$. Определим при $i = 1, 2, \dots$ функции

$$\psi_i(x) = f(x) - \varphi_i(x) \quad \text{и} \quad \Psi_i(x) = \int_{[a, x]} |f(t) - \varphi_i(t)| d\mu.$$

По лемме 26.1 имеем

$$\mu(A_i) \equiv \mu\left(\left\{x \in (a, b): M(x, \psi_i) > \frac{1}{i^2}\right\}\right) \leq \frac{4}{i^2} \frac{1}{i^4} = \frac{4}{i^2}.$$

Применяя неравенство Чебышева, получим

$$\mu(B_i) \equiv \mu\left(\left\{x \in (a, b): |\psi_i(x)| > \frac{1}{i^2}\right\}\right) \leq \frac{1}{i^2} \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i^2}.$$

Теперь определим множество

$$Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} (A_i \cup B_i)$$

и положим $E = (a, b) \setminus Q$. Тогда, поскольку для каждого $k > 1$ имеем

$$\mu(Q) \leq \mu\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} (A_i \cup B_i)\right) \leq \sum_{i=k}^{\infty} (\mu(A_i) + \mu(B_i)) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{5}{i^2} \leq \frac{5}{k-1},$$

мера $\mu(Q) = 0$. Пусть $x \in E$. Тогда найдется такое $i = i(x)$, что $x \notin A_j \cup B_j$ при $j > i$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Фиксируем некоторое $k > \max\left(i, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ и затем, учитывая непрерывность функции $\varphi_k(x)$, подберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \varphi_k(t) d\mu - \varphi_k(x) \right| < \varepsilon$$

и чтобы

$$\left| \frac{\Psi_k(x+h) - \Psi_k(x)}{h} \right| \leq \frac{2}{k^2}$$

при $0 < |h| < \delta$. Тогда при $0 < |h| < \delta$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f(t) d\mu - f(x) \right| &\leq \left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} (f(t) - \varphi_k(t)) d\mu \right| + \\ &+ |f(x) - \varphi_k(x)| + \left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \varphi_k(t) d\mu - \varphi_k(x) \right| < \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \varepsilon < 4\varepsilon, \end{aligned}$$

а отсюда сразу вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Верен и обратный результат.

Теорема 26.2. Пусть функция $F(x) \in AC([a, b])$. Тогда почти всюду на (a, b) существует производная $F'(x) = f(x) \in L([a, b])$ и $F(x) = \int_{[a, x]} f(t) d\mu + F(a)$ при $x \in [a, b]$.

Доказательство. Поскольку, как было установлено в утверждении 25.2, любую функцию $F(x) \in AC([a, b])$ можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих

на $[a, b]$ абсолютно непрерывных функций, теорему достаточно доказать для монотонно неубывающей $F(t)$. В этом случае определим на полукольце интервалов $\{[c, d] \subseteq [a, b]\}$ меру $m([c, d]) = F(d) - F(c)$ (см. § 4) и продолжим ее по Лебегу. Получим некоторую меру ν , заданную на σ -алгебре M_ν . Пусть классическая мера Лебега μ задана на σ -алгебре M_μ подмножеств $[a, b]$. Тогда на σ -алгебре $M = M_\mu \cap M_\nu$ заданы две меры — μ и ν . Предположим, что множество $E \in M$ и $\mu(E) = 0$. Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$ и мы выбрали соответствующее $\delta > 0$ из определения абсолютной непрерывности функции $F(x)$. Тогда множество E можно покрыть счетным числом полуинтервалов $\{[a_i, b_i)\}_{i=1}^\infty$, для которых

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu([a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta.$$

Можно считать (см. утверждение 3.1), что эти промежутки попарно не пересекаются. Учитывая, что функция $F(x)$ монотонна, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu([a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) < \varepsilon.$$

Это означает, что $\nu(E) = 0$, т. е. мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ . По теореме Радона—Никодима найдется функция $f(x)$, интегрируемая по Лебегу на полуинтервале $[a, b]$ относительно меры μ и такая, что для каждого множества $E \in M$ имеем

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu.$$

В частности,

$$\nu([a, x]) = F(x) - F(a) = \int_{[a, x]} f(x) d\mu = \int_{[a, x]} f(x) d\mu$$

при $a \leq x < b$. По непрерывности то же равенство справедливо и для $x = b$. Наконец, по теореме 26.1 почти всюду на $[a, b]$ имеет место равенство $F'(x) = f(x)$. Тем самым, теорема полностью доказана. $\square$

Теорема 26.1 позволяет установить одно любопытное свойство измеримых множеств на прямой. Предварительно дадим определение.

О п р е д е л е н и е 26.1. Пусть E — измеримое относительно классической меры Лебега подмножество прямой $\mathbb{R}^1$ и точка $x \in \mathbb{R}^1$. Тогда будем говорить, что x — *точка плотности* множества E , если существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\mu([x-h, x+h] \cap E)}{2h} = 1.$$

С л е д с т в и е 26.1. Почти все точки измеримого множества на прямой являются его точками плотности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай, когда измеримое множество $E \subseteq [a, b]$. Определим при $x \in [a, b]$ функцию

$$F(x) = \int_{[a, x]} X_E(t) d\mu.$$

Тогда по теореме 26.1 почти всюду на $[a, b]$ имеем $F'(x) = X_E(x)$, откуда ясно, что для почти всех $x \in E$ выполнено равенство $F'(x) = 1$. Но в любой такой точке x имеем

$$1 = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\mu([x-h, x+h] \cap E)}{2h},$$

а это и требовалось установить. $\square$

Теоремы 26.1 и 26.2 дают эквивалентное описание класса абсолютно непрерывных функций как класса неопределенных интегралов Лебега. Теперь мы установим теоремы об интегрировании по частям и о замене переменной в интеграле Лебега.

Теорема 26.3 (теорема об интегрировании по частям). Пусть функции $F(x), G(x) \in AC([a, b])$. Тогда выполняется равенство

$$\int_{[a, b]} F(x)G'(x) d\mu = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a, b]} G(x)F'(x) d\mu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 25.1 функция $F(x)G(x) \in AC([a, b])$. Тогда по теореме 26.2 имеем

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{[a, b]} (F(x)G(x))' d\mu.$$

Для завершения доказательства остается только заметить, что

$$(F(x)G(x))' = F(x)G'(x) + F'(x)G(x). \quad \square$$

Теорема 26.4 (теорема о замене переменной). Пусть функция $f(x) \in L((a, b))$, а функция $G(y) \in AC([c, d])$ монотонна на отрезке $[c, d]$, $G(c) = a$ и $G(d) = b$. Тогда функция $f(G(y))G'(y) \in L((c, d))$ и имеет место равенство

$$\int_{[a, b]} f(x) d\mu = \int_{[c, d]} f(G(y))G'(y) d\mu.$$

Доказательство. Сначала дадим независимое доказательство для случая, когда и обратная функция $G^{-1}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$. Введем функцию

$$F(x) = \int_{[a, x]} f(t) d\mu \in AC([a, b]).$$

Согласно теореме 25.2 функция $H(y) = F(G(y)) \in AC([c, d])$. Тогда по теореме 26.2 имеем $H'(y) \in L([c, d])$ и

$$\int_{[a, b]} f(x) d\mu = F(b) - F(a) = H(d) - H(c) = \int_{[c, d]} H'(y) d\mu.$$

Далее, заметим, что если A — это множество таких точек отрезка $[a, b]$, что либо $F'(x)$ не существует, либо $F'(x) \neq f(x)$, то в силу абсолютной непрерывности функции $G^{-1}(x)$ имеем $\mu(G^{-1}(A)) = 0$. Тогда почти всюду на $[c, d]$ выполняется равенство

$$H'(y) = F'(G(y))G'(y) = f(G(y))G'(y),$$

и в этом случае теорема полностью установлена.

Теперь рассмотрим общую ситуацию. Пусть S — полукольцо промежутков отрезка $[a, b]$ и $E = [a', b'] = [G(\alpha), G(\beta)] \in S$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} X_E(x) d\mu &= \mu(E) = G(\beta) - G(\alpha) = \\ &= \int_{[\alpha, \beta]} G'(y) d\mu = \int_{[c, d]} X_E(G(y))G'(y) d\mu, \end{aligned} \quad (26.1)$$

т. е. для функции $X_E(x)$ утверждение теоремы справедливо. В силу линейности интеграла Лебега формула (26.1) остается справедливой и для характеристической функции произвольного множества $E \in R(S)$.

Теперь предположим, что задана некоторая последовательность измеримых подмножеств отрезка $[a, b]$: $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ и $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, причем для функций $X_{E_i}(x)$ при $i = 1, 2, \dots$ верно равенство (26.1) (здесь, разумеется, предполагается и существование интеграла Лебега в правой части указанного равенства). Тогда, поскольку $X_{E_i}(G(y))G'(y) \uparrow X_E(G(y))G'(y)$ на $[a, b]$, по теореме Б. Леви формула (26.1) верна и для функции $X_E(x)$. Аналогичное утверждение справедливо и для характеристической функции множества $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, если E_i , $i = 1, 2, \dots$ — измеримые подмножества отрезка $[a, b]$, $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ и формула (26.1) верна для каждой функции $X_{E_i}(x)$.

Согласно теореме 9.1, если множество $E \subseteq [a, b]$ измеримо по Лебегу, то

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i,j} \setminus E_0 \equiv F(E) \setminus E_0,$$

где все $E_{i,j} \in R(S)$, для любого фиксированного i выполнены условия $E_{i,1} \subseteq E_{i,2} \subseteq \dots$ и если $E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i,j}$, то $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$, а $\mu(E_0) = 0$. При этом можно считать, что $E_0 \subset F(E)$. По доказанному выше для характеристической функции множества $F(E)$ формула (26.1) верна. Теперь предположим, что E — произвольное измеримое множество с $\mu(E) = 0$. Тогда и $\mu(F(E)) = 0$. Поскольку $X_{F(E)}(G(y))G'(y) \geq 0$ для всех y и

$$\int_{[c,d]} X_{F(E)}(G(y))G'(y) d\mu = 0,$$

нетрудно видеть, что $X_{F(E)}(G(y))G'(y) = 0$ почти всюду на $[c, d]$. Но в этом случае и $X_E(G(y))G'(y) = 0$ почти всюду на $[c, d]$, откуда в силу полноты классической меры Лебега вытекает, что эта функция измерима на $[c, d]$ и для нее выполняется равенство (26.1). Если теперь рассмотреть произвольное измеримое множество $E \subseteq [a, b]$, то, так как формула (26.1) верна для функций $X_{F(E)}(x)$ и $X_{E_0}(x)$,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} X_E(x) d\mu &= \int_{[a,b]} X_{F(E)}(x) d\mu = \\ &= \int_{[c,d]} X_{F(E)}(G(y))G'(y) d\mu = \int_{[c,d]} X_{F(E)}(G(y))G'(y) d\mu - 0 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[c, d]} X_{F(E)}(G(y))G'(y) d\mu - \int_{[c, d]} X_{E_0}(G(y))G'(y) d\mu = \\
&= \int_{[c, d]} X_E(G(y))G'(y) d\mu,
\end{aligned}$$

т. е. и в этом случае верно равенство (26.1).

Снова пользуясь линейностью интеграла Лебега, получаем, что утверждение теоремы выполнено для любой простой функции. Пусть $f(x)$ — неотрицательная измеримая на $[a, b]$ функция. Построим последовательность простых неотрицательных функций $f_n(x) \uparrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ на $[a, b]$. Тогда, так как $f_n(G(y))G'(y) \uparrow f(G(y))G'(y)$, по теореме Б. Леви имеем

$$\begin{aligned}
\int_{[a, b]} f(x) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f_n(x) d\mu = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[c, d]} f_n(G(y))G'(y) d\mu = \int_{[c, d]} f(G(y))G'(y) d\mu. \quad (26.2)
\end{aligned}$$

Если же произвольная функция $f(x) \in L([a, b])$, то, представляя $f(x)$ в виде разности двух неотрицательных функций из $L([a, b])$ и пользуясь равенством (26.2), установим справедливость теоремы 26.4 в общем случае. $\square$

§ 27. Интегралы Римана—Стилтьеса и Лебега—Стилтьеса

О п р е д е л е н и е 27.1. Пусть функции $f(x), g(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$. Для произвольного разбиения отрезка $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ с отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ при $i = 1, 2, \dots, n$ построим интегральную сумму

$$S_g(f; T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_g(f; T) = I,$$

где параметр разбиения $\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$, то число I называется *интегралом Римана—Стилтьеса* от a до b функции $f(x)$ по функции $g(x)$ и обозначается

$$I = R-S- \int_a^b f(x) dg(x).$$

В тех случаях, когда это не может привести к путанице, буквы (R-S) перед интегралом будем опускать.

Ясно, что классический интеграл Римана есть частный случай интеграла Римана—Стилтьеса, когда функция $g(x) \equiv x$.

Далее, из определения очевидно, что интеграл Римана—Стилтьеса линеен как по функции $f(x)$, так и по функции $g(x)$, точнее, если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ и существуют интегралы

$$\int_a^b f_1(x) dg(x) \quad \text{и} \quad \int_a^b f_2(x) dg(x),$$

то существует и интеграл

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) dg(x) = \alpha \int_a^b f_1(x) dg(x) + \beta \int_a^b f_2(x) dg(x),$$

а если существуют интегралы

$$\int_a^b f(x) dg_1(x) \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) dg_2(x),$$

то существует и интеграл

$$\int_a^b f(x) d(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)) = \alpha \int_a^b f(x) dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x) dg_2(x).$$

Утверждение 27.1. *Если существует интеграл*

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

и $a < c < b$, то существуют и интегралы

$$\int_a^c f(x) dg(x) \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x) dg(x),$$

причем

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x). \quad (27.1)$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. По условию существует такое $\delta > 0$, что для любых двух таких разбиений T_1

и T_2 отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками, что $\lambda(T_1), \lambda(T_2) < \delta$, выполнено неравенство $|S_g(f; T_1) - S_g(f; T_2)| < \varepsilon$. Теперь если $T_1(1)$ и $T_2(1)$ — два разбиения отрезка $[a, c]$ с отмеченными точками и $\lambda(T_1(1)), \lambda(T_2(1)) < \delta$, то дополним их одними и теми же точками до разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a, b]$ так, чтобы выполнялась оценка $\lambda(T_1), \lambda(T_2) < \delta$. В этом случае

$$|S_g(f; T_1(1)) - S_g(f; T_2(1))| = |S_g(f; T_1) - S_g(f; T_2)| < \varepsilon.$$

Применяя критерий Коши, получим, что существует

$$\lim_{\lambda(T(1)) \rightarrow 0} S_g(f; T(1)) = (R - S) \int_a^c f(x) dg(x).$$

Существование интеграла по отрезку $[c, b]$ устанавливается совершенно аналогично, а равенство (27.1) очевидно. $\square$

Интересно, что обратное утверждение неверно.

З а м е ч а н и е 27.1. Если взять функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

и

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

то, как нетрудно видеть, существуют интегралы

$$\int_{-1}^0 f(x) dg(x) = \int_0^1 f(x) dg(x) = 0,$$

в то время как интеграл

$$\int_{-1}^1 f(x) dg(x)$$

не существует.

Следующая теорема выражает одно любопытное свойство интеграла Римана—Стилтьеса.

Т е о р е м а 27.1 (формула интегрирования по частям).
Если существует интеграл

$$\int_a^b g(x) df(x),$$

то существует и интеграл

$$\int_a^b f(x) dg(x),$$

причем

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) df(x).$$

Доказательство. Пусть $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} S_g(f, T) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)(f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)) + f(\xi_n)g(x_n) - f(\xi_1)g(x_0) = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \left[g(a)(f(\xi_1) - f(a)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)(f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)) + g(b)(f(b) - f(\xi_n)) \right]. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть не что иное, как $S_f(g, T')$, где $T' = \{a \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n-1} \leq \xi_n \leq b\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $x_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ при $i = 0, 1, \dots, n$, где формально возьмем $\xi_0 = a$ и $\xi_{n+1} = b$. Ясно, что $\lambda(T') \leq 2\lambda(T) \leq 4\lambda(T')$. Поэтому существует

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_g(f; T) &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \lim_{\lambda(T') \rightarrow 0} S_f(g; T') = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) df(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Установим одно достаточное условие существования интеграла Римана—Стилтьеса, обобщающее соответствующее условие для интеграла Римана.

Теорема 27.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $g(x) \in V([a, b])$. Тогда существует интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dg(x),$$

причем

$$|I| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| V_a^b(g). \quad (27.2)$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной непрерывностью функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, подберем $\delta > 0$ так, чтобы при $x, y \in [a, b]$ и $|x - y| < \delta$ выполнялось неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(V_a^b(g) + 1)}.$$

Пусть T_1 и T_2 — два такие разбиения отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками, что $\lambda(T_1), \lambda(T_2) < \delta$. Объединяя точки разбиений T_1 и T_2 , составим разбиение T и произвольным образом выберем для него отмеченные точки. Пусть $T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Тогда

$$T = \{x_0 = x_{1,0} < x_{1,1} < \dots < x_{1,k_1} = x_1 = x_{2,0} < x_{2,1} < \dots < x_{n,k_n} = b\}.$$

При этом

$$\begin{aligned} |S_g(f, T) - S_g(f, T_1)| &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} f(\xi_{i,k})(g(x_{i,k}) - g(x_{i,k-1})) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} (f(\xi_i) - f(\xi_{i,k}))(g(x_{i,k}) - g(x_{i,k-1})) \right| \leq \\ &\leq \max_{i,k} |f(\xi_i) - f(\xi_{i,k})| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} |g(x_{i,k}) - g(x_{i,k-1})| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(V_a^b(g) + 1)} V_a^b(g) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку такая же оценка справедлива и для $|S_g(f, T) - S_g(f, T_2)|$, получаем отсюда, что $|S_g(f, T) - S_g(f, T_2)| \leq \varepsilon$. Применяя критерий Коши, убеждаемся в существовании интеграла. Поскольку, очевидно, для любого разбиения T имеем $|S_g(f, T)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| V_a^b(g)$, справедливо и неравенство (27.2). Теорема установлена. $\square$

Теперь дадим определение интеграла Лебега—Стилтьеса. Пусть функция $g(x) \in V([a, b])$. Представим ее в виде разности

двух неубывающих функций: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$, где $g_1(x) = V_a^x(g)$. Переопределим в случае необходимости функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ в точках разрыва так, чтобы они стали непрерывны слева на интервале (a, b) . Тогда согласно результатам § 4 каждая из этих функций порождает измеримое пространство с мерой Лебега—Стилтьеса — $([a, b], M_1, \nu_1)$ и $([a, b], M_2, \nu_2)$ соответственно. Отметим, что обе эти меры определены на σ -алгебре $M = M_1 \cap M_2$. Определим заряд $\nu = \nu_1 - \nu_2$.

Определение 27.2. Пусть функция $f(x)$ измерима на пространстве $([a, b], M, \nu)$. Тогда назовем ее *интегрируемой по Лебегу—Стилтьесу* относительно заряда ν ($f(x) \in \in LS([a, b], \nu)$) в том случае, когда одновременно $f(x) \in L([a, b], \nu_1)$ и $f(x) \in L([a, b], \nu_2)$. Если эти условия выполнены, то положим

$$L\text{-}S\text{-}\int_{[a, b]} f(x) d\nu = L\text{-}\int_{[a, b]} f(x) d\nu_1 - L\text{-}\int_{[a, b]} f(x) d\nu_2.$$

Из определения ясно, что свойства интегралов Лебега—Стилтьеса определяются свойствами интеграла Лебега.

Совершенно аналогично, используя понятие меры Лебега—Стилтьеса для $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, можно и для этого случая определить интеграл Лебега—Стилтьеса. Подробное изложение этой теории можно найти в книге Г. П. Толстова [13].

Г Л А В А 6

ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ

§ 28. Гильбертово пространство

О п р е д е л е н и е 28.1. Пусть L — линейное пространство над $\mathbb{C}$. Тогда оно называется *евклидовым*, если задано такое отображение $(\cdot, \cdot) \rightarrow \mathbb{C}$, что:

1) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ для всех $x, y, z \in L$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для всех $x, y \in L$;

3) (x, x) — действительное неотрицательное число, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Это отображение называется *скалярным произведением*.

Аналогично определяется и евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$. Естественно, в этом случае в правой части условия 2) нет знака сопряжения. В дальнейшем будут рассматриваться только комплексные евклидовы пространства, так как в действительном случае доказательства лишь упрощаются.

Примером евклидова пространства может служить $L_2(E)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_E f(x) \overline{g(x)} d\mu.$$

В частности, евклидовым будет пространство l_2 .

Проверим, что в любом евклидовом пространстве можно естественным образом ввести норму (см. § 22). Введем при $x \in L$ функцию $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. При этом требования 1 и 2 определения 22.1, очевидно, выполняются.

Теорема 28.1 (неравенство Коши—Буняковского). Для любых $x, y \in L$ имеем $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$.

Доказательство. Если $(x, y) = 0$, то утверждение очевидно. В противном случае положим $(x, y) = \rho e^{i\alpha}$, где $\rho \in (0, \infty)$ и $0 \leq \alpha < 2\pi$. Пусть $z = e^{-i\alpha} x$. Тогда $\|z\| = \|x\|$. Для любого действительного t имеем

$$0 \leq \|z + ty\|^2 = (z + ty, z + ty) = (z, z) + t(z, y) + t(y, z) + t^2(y, y).$$

По определению z имеем

$$(z, y) = e^{-i\alpha}(x, y) = \rho = e^{i\alpha} \overline{(x, y)} = e^{i\alpha}(y, x) = (y, z).$$

Поэтому при всех t

$$t^2(y, y) + 2t(y, z) + (z, z) \leq 0.$$

Отсюда дискриминант данного квадратного трехчлена

$$(z, y)^2 - \|z\|^2 \|y\|^2 = |(x, y)|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \geq 0,$$

и теорема доказана. $\square$

Следствие 28.1. Функция $\|\cdot\|$ является нормой.

Доказательство. Достаточно проверить неравенство треугольника. Для любых $x, y \in L$ имеем

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 28.1. Непосредственно проверяется, что для любых элементов x, y евклидова пространства выполняется тождество параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Определение 28.2. Если евклидово пространство бесконечномерно и полно относительно введенной нормы, то оно называется *гильбертовым*.

Отметим, что по теореме 23.1 пространство $L_2(E)$ является гильбертовым.

Определение 28.3. Пусть L — полное линейное нормированное пространство и L_1 — его линейное подпространство. Если для любой сходящейся в L последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ элементов L_1 ее предел $x \in L_1$, то подпространство L_1 называется *замкнутым*.

Теорема 28.2. Пусть H — гильбертово пространство, L — замкнутое подпространство H и $x \in H \setminus L$. Тогда существует единственный такой элемент $y \in L$, что $\rho(x, L) = \inf_{z \in L} \|x - z\| = \|x - y\|$.

Доказательство. Пусть последовательность $Y = \{y_n\}_{n=1}^\infty$ элементов L такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \rho(x, L).$$

Согласно замечанию 28.1

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2x - y_n - y_m\|^2 = \\ &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4(\rho(x, L))^2. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть данного неравенства мала при больших n и m , последовательность Y фундаментальна. Пусть $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. В силу замкнутости L элемент $y \in L$. Так как норма — непрерывная функция (см. неравенство треугольника), имеем

$$\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \rho(x, L).$$

Теперь установим единственность. Предположим, что для некоторого $z \in L$ норма $\|z - x\| = \rho(x, L)$. Тогда по замечанию 28.1

$$\begin{aligned} \|z - y\|^2 &= 2\|x - y\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4\left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2 \leq \\ &\leq 4(\rho(x, L))^2 - 4(\rho(x, L))^2 = 0, \end{aligned}$$

а это и нужно было установить. $\square$

Теорема 28.3. Пусть H — гильбертово пространство, L — замкнутое подпространство пространства H ($L \neq H$) и $L_\perp = \{y \in H: (x, y) = 0 \text{ при всех } x \in L\}$. Тогда $H = L \oplus L_\perp$, т. е. для любого $x \in H$ существует единственное разложение $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L_\perp$.

Доказательство. Сначала докажем, что $L \cap L_{\perp} = \{0\}$. Действительно, если $x \in L \cap L_{\perp}$, то $(x, x) = 0$, откуда $x = 0$. Поэтому если разложение существует, то оно единственно.

Пусть $x \in H$. Если $x \in L$, то полагаем $y = x$ и $z = 0$. В противном случае по теореме 28.2 найдем такое $y \in L$, что $\|x - y\| = \rho(x, L)$. Положим $z = x - y$. Докажем, что $z \in L_{\perp}$. Пусть $s \in L$. Тогда функция действительного переменного $f(t) = \|x - y - ts\|^2$ имеет минимум при $t = 0$, а так как эта функция — квадратный трехчлен, то она дифференцируема по t и

$$f'(0) = (z, s) + (s, z) = 2 \operatorname{Re}(s, z) = 0.$$

Рассматривая вместо s элемент $is \in L$, получим из аналогичных соображений, что

$$0 = \operatorname{Re}(is, z) = \operatorname{Re} i(s, z) = -\operatorname{Im}(s, z).$$

Таким образом, $(s, z) = 0$, т. е. $z \in L_{\perp}$, что и требовалось доказать. $\square$

§ 29. Ортонормированные системы в гильбертовых пространствах

Определение 29.1. Пусть H — евклидово пространство и система $\{e_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subset H$, где A — некоторый набор индексов. Тогда эта система называется *ортонормированной*, если

$$(e_{\alpha}, e_{\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{при } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Определение 29.2. Пусть H — евклидово пространство и система $\{e_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subset H$. Тогда эта система называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Утверждение 29.1. Если система ортонормирована, то она линейно независима.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда существуют такие элементы $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n} \in H$ и такие одновременно не равные нулю числа $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$, что

$$\beta_1 e_{\alpha_1} + \dots + \beta_n e_{\alpha_n} = 0. \quad (29.1)$$

Пусть для определенности $\beta_1 \neq 0$. Тогда, домножая скалярно обе части равенства (29.1) на e_{α_1} получим, что $\beta_1 = 0$. Данное противоречие доказывает утверждение. $\square$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением счетных ортонормированных систем.

Теорема 29.1 (процесс ортогонализации Гильберта—Шмидта). Пусть H — евклидово пространство, и пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ — линейно независимая последовательность. Тогда существует такая ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, что для любого k подпространства F_k и E_k , представляющие собой линейные оболочки множеств $\{f_n\}_{n=1}^k$ и $\{e_n\}_{n=1}^k$ соответственно, совпадают.

Доказательство. Проверим утверждение по индукции. Поскольку все $f_i \neq 0$ (иначе система была бы линейно зависима), можно определить

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}.$$

Очевидно, что $(e_1, e_1) = 1$ и $E_1 = F_1$. Пусть уже построены элементы $e_1, \dots, e_{k-1}$, удовлетворяющие условию теоремы. Тогда положим

$$e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}, \quad \text{где } e'_k = f_k - \sum_{n=1}^{k-1} (f_k, e_n) e_n.$$

Проверим предположение индукции. При $n = 1, 2, \dots, k-1$ имеем $(e'_k, e_n) = (f_k, e_n) - (f_k, e_n) = 0$, откуда $(e_k, e_n) = 0$. Далее, очевидно, что $(e_k, e_k) = 1$ и что $f_k \in E_k$. Тогда $F_k \subseteq E_k$. Кроме того, по предположению индукции

$$\sum_{n=1}^{k-1} (f_k, e_n) e_n \in F_{k-1},$$

а потому $e_k \in F_k$ и $E_k \subseteq F_k$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 29.2 (неравенство Бесселя). Пусть H — евклидово пространство и $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в H . Тогда для любого $x \in H$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq (x, x) = \|x\|^2.$$

Доказательство. Фиксируем некоторое N и обозначим через L_N линейную оболочку векторов $e_1, \dots, e_N$. По теореме 28.3 $H = L_N \oplus (L_N)_{\perp}$, откуда

$$x = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k + y,$$

где $(y, e_j) = 0$ при $j = 1, \dots, N$. Умножая скалярно обе части последнего равенства на e_k ($k = 1, 2, \dots, N$), получим, что $\alpha_k = (x, e_k)$. Далее,

$$\begin{aligned} (x, x) &= \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k + y, \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k + y \right) = \\ &= \sum_{k,j=1}^N \alpha_k \overline{\alpha_j} (e_k, e_j) + (y, y) = \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 + (y, y) \geq \sum_{k=1}^N |(x, e_k)|^2. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности N отсюда вытекает требуемое неравенство. $\square$

Числа (x, e_n) при $n = 1, 2, \dots$ называются *коэффициентами Фурье* элемента x по ортонормированной системе E .

Следствие 29.1. Пусть H — евклидово пространство и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в H . Тогда для любого $x \in H$ последовательность $\{(x, e_n)\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ (см. § 22).

Теорема 29.3 (теорема Рисса—Фишера). Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в H и задана последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$. Тогда существует такое $x \in H$, что $c_n = (x, e_n)$ при $n = 1, 2, \dots$ и

$$\left\| x - \sum_{n=1}^k c_n e_n \right\| \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть

$$f_k = \sum_{n=1}^k c_n e_n$$

при $k = 1, 2, \dots$. Тогда для любого натурального m имеем

$$\|f_{k+m} - f_k\|^2 = \left\| \sum_{n=k+1}^{k+m} c_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=k+1}^{k+m} |c_n|^2 \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $f_k \rightarrow x$ в H при $k \rightarrow \infty$. Далее, для любого n и для любого $k > n$ имеем

$$|(x, e_n) - c_n| = |(x, e_n) - (f_k, e_n)| \leq \|x - f_k\| \|e_n\| = \|x - f_k\|. \quad (29.2)$$

Так как правая часть неравенства не зависит от n и стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$, отсюда $(x, e_n) = c_n$, что и требовалось доказать. $\square$

Аналогично равенству (29.2) проверяется справедливость следующего утверждения.

Утверждение 29.2. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве H и

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

где равенство понимается в смысле нормы пространства H , то $(x, e_n) = a_n$ при всех n .

Определение 29.3. Линейное нормированное пространство называется *сепарабельным* в том случае, когда в нем существует счетное всюду плотное множество.

Заметим, что из доказанной ранее теоремы 23.3 следует сепарабельность пространств $L_p([a, b])$ при $1 \leq p < \infty$. Очевидно также, что сепарабельны пространства l_p при $1 \leq p < \infty$. В то же время несложно показать, что пространства $L_{\infty}([a, b])$ и l_{∞} не сепарабельны.

Определение 29.4. Пусть H — гильбертово пространство и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — линейно независимая система в H . Тогда эта система называется *базисом* в том случае, когда для любого $x \in H$ можно единственным образом подобрать такие комплексные числа $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

где равенство понимается в смысле нормы пространства H .

Теорема 29.4. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда в H существует ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — всюду плотное множество в H . Последовательно удалим из него линейно

зависимые элементы. Для простоты будем считать, что исходная система линейно независима. Отметим, что замыкание линейной оболочки элементов X совпадает с H . Применим к X процесс ортогонализации Гильберта—Шмидта. Получим такую ортонормированную систему $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, что замыкание линейной оболочки элементов E совпадает с H . Докажем, что E — базис. Пусть $x \in H$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, последовательность $\{(x, e_n)\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$. По теореме Рисса—Фишера найдется элемент гильбертова пространства

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n.$$

Согласно утверждению 29.2 $(x - y, e_n) = 0$ при всех n . Предположим, что $z = x - y \neq 0$. Тогда подберем такой элемент вида

$$P = \sum_{n=1}^N a_n e_n,$$

что $\|z - P\| < \frac{1}{2}\|z\|$. Тогда $(z, P) = (x - y, P) = 0$ и

$$\|z\|^2 = (z, z) = (z, z - P) \leq \|z\| \|z - P\| < \frac{1}{2}\|z\|^2.$$

Полученное противоречие показывает, что $z = 0$. Единственность представления вытекает из утверждения 29.2. $\square$

С л е д с т в и е 29.2 (равенство Парсеваля). *Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H , то для каждого $x \in H$ имеет место равенство*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначая

$$P_k = \sum_{n=1}^k (x, e_n) e_n$$

при $k = 1, 2, \dots$ и используя неравенство Бесселя, получим

$$\begin{aligned} \left| \|x\|^2 - \sum_{n=1}^k |(x, e_n)|^2 \right| &= | \|x\|^2 - (P_k, P_k) | = \\ &= |(x - P_k, x - P_k) + (x - P_k, P_k) + (P_k, x - P_k)| \leq \\ &\leq \|x - P_k\|^2 + 2\|x\| \|x - P_k\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать. $\square$

Теперь мы можем установить важный результат, говорящий о том, что по-существу есть лишь одно сепарабельное гильбертово пространство. Предварительно дадим определение.

Определение 29.5. Два евклидовых пространства называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное линейное отображение этих пространств, сохраняющее скалярное произведение.

Следствие 29.3. *Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны.*

Доказательство. Мы докажем, что всякое сепарабельное гильбертово пространство H изоморфно пространству l_2 . Для этого выберем в H согласно теореме 29.4 ортонормированный базис и поставим в соответствие любому элементу последовательность его коэффициентов Фурье по этому базису. Взаимная однозначность данного отображения вытекает из теорем 29.2, 29.3 и определения базиса, а его линейность очевидна. По следствию 29.2 это отображение сохраняет норму, а тогда, в силу равенств

$$\operatorname{Re}(x, y) = \frac{(x, y) + \overline{(x, y)}}{2} = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

и

$$\operatorname{Im}(x, y) = \frac{(x, y) - \overline{(x, y)}}{2i} = \frac{1}{2} (\| -ix + y \|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2),$$

сохраняется и скалярное произведение. $\square$

На этом мы закончим изложение теории гильбертовых пространств, отсылая заинтересованных читателей к книге А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [4].

§ 30. Интерполирование линейных операторов в функциональных пространствах

Теория линейных операторов в банаховых пространствах является одной из наиболее интересных и хорошо развитых областей функционального анализа. Не ставя задачу дать ее сколько-нибудь полное изложение, мы приведем лишь некоторые определения и установим простейшие свойства, необходимые для дальнейшего.

Пусть $\mathcal{L}_1 = (\mathcal{L}_1, \|\cdot\|_1)$ и $\mathcal{L}_2 = (\mathcal{L}_2, \|\cdot\|_2)$ — два линейных нормированных пространства над одним и тем же полем $\mathbf{K}$. Здесь, как и ранее, считаем, что $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbf{K} = \mathbb{C}$.

Определение 30.1. *Линейным оператором* из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$ называется такое отображение $A: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, что для любых $x, y \in \mathcal{L}_1$ и для любых $a, b \in \mathbb{K}$ выполнено равенство $A(ax + by) = aA(x) + bA(y)$.

Определение 30.2. Пусть A — линейный оператор из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$ и $x \in \mathcal{L}_1$. Тогда A называется *непрерывным* в точке x , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $y \in \mathcal{L}_1$ и $\|y\|_1 < \delta$ имеем $\|A(x + y) - A(x)\|_2 < \varepsilon$.

Замечание 30.1. Из линейности оператора A вытекает, что его непрерывность в некоторой точке эквивалентна непрерывности A в любой точке. Поэтому в дальнейшем мы будем вести речь просто о непрерывных операторах. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, отметим также, что построение разрывных линейных операторов, как правило, не вызывает труда, когда пространство $\mathcal{L}_1$ не полно, но требует привлечения аксиомы выбора в противном случае.

Определение 30.3. Пусть A — линейный оператор из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$. Тогда он называется *ограниченным*, если величина

$$\|A\|_{\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2} = \|A\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|A(x)\|_2 < \infty.$$

Утверждение 30.1. Пусть A — линейный оператор из L_1 в L_2 . Тогда его непрерывность и ограниченность эквивалентны.

Доказательство. Пусть A ограничен. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\| + 1}$. В этом случае при $x \in L_1$, $\|x\|_1 < \delta$ имеем $\|A(x)\|_2 \leq \|A\| \|x\|_1 < \varepsilon$, т. е. A непрерывен.

Обратно, пусть A непрерывен. Подберем такое $\delta > 0$, что при $x \in L_1$, $\|x\|_1 < \delta$ выполнено неравенство $\|A(x)\|_2 < 1$. Тогда если $x \in L_1$ и $\|x\|_1 < 1$, то

$$\|A(x)\|_2 = \frac{1}{\delta} \|A(\delta x)\|_2 \leq \frac{1}{\delta}.$$

Следовательно, A ограничен и утверждение доказано. $\square$

В дальнейшем будет рассматриваться такая ситуация. Пусть даны два σ -конечных измеримых пространства (X_1, Σ_1, μ) и (X_2, Σ_2, ν) , а линейное отображение A переводит некоторое подмножество пространства μ -измеримых комплекснозначных

функций на X_1 в пространство ν -измеримых комплекснозначных функций на X_2 . Положим для любого $y > 0$ и для любой функции $f(x)$ из области определения A

$$E_y(Af) = \{t \in X_2: |(Af)(t)| > y\}.$$

Определение 30.4. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $1 \leq r < \infty$. Говорят, что рассмотренный выше оператор A имеет *сильный тип* (p, r) , если он является непрерывным оператором из $L_p(X_1)$ в $L_r(X_2)$. Далее, если для любого $y > 0$ и для любой функции $f(x) \in L_p(X_1)$ выполнено неравенство

$$\nu(E_y(Af)) \leq \left(\frac{M}{y} \|f\|_p\right)^r,$$

где M зависит только от A , то говорят, что A имеет *слабый тип* (p, r) .

Утверждение 30.2. Если A имеет *сильный тип* (p, r) , то A имеет и *слабый тип* (p, r) , причем в качестве M можно взять $\|A\|$.

Доказательство. Используя неравенство Чебышева, получим, что для любого $y > 0$

$$\|A\| \|f\|_p \geq \|Af\|_r \geq (\nu(E_y(Af)))^{\frac{1}{r}} \cdot y,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 30.1 (частный случай интерполяционной теоремы Марцинкевича). Пусть $1 \leq r < p < \infty$ и оператор A имеет одновременно *слабый тип* (p, p) и (r, r) с постоянными M_1 и M_2 соответственно. Тогда для любого q из интервала (r, p) A имеет *сильный тип* (q, q) , причем

$$\|A\|_{L_q(\mu) \rightarrow L_q(\nu)} \leq K M_1^{1-\tau} M_2^\tau, \quad \text{где } \frac{1}{q} = (1-\tau)\frac{1}{p} + \tau\frac{1}{r},$$

а постоянная K зависит только от τ , p и r и ограничена при $\tau \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ с $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Доказательство. Рассмотрим для произвольной измеримой на X_1 функции $f(x)$ функцию распределения $F(u) = F_f(u) = \mu(E_u(f))$ при $u > 0$, где $E_u(f) = \{x \in X_1: |f(x)| > u\}$.

Аналогичные функции будем рассматривать и для второго измеримого пространства. Мы будем пользоваться обозначениями $\|\cdot\|_{s,\mu}$ и $\|\cdot\|_{s,\nu}$ для норм в пространствах $L_s(X_1)$ и $L_s(X_2)$ соответственно.

Согласно теореме 23.2 при любом $s \in [1, \infty)$ имеем

$$\int_{X_1} |f(x)|^s d\mu = s \int_{(0,\infty)} u^{s-1} F(u) du,$$

где через du обозначена классическая мера Лебега на $(0, \infty)$.

Пусть $f(x) \in L_q(X_1)$. Положим $f(x) = \bar{f}(x) + \bar{\bar{f}}(x)$, где

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)| \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда при любом $x \in X_1$ либо $|\bar{\bar{f}}(x)| > 1$, либо $\bar{\bar{f}}(x) = 0$, откуда $\|\bar{\bar{f}}(x)\|_{q,\mu}^r \leq \|f(x)\|_{q,\mu}^q < \infty$, в то время как $\|\bar{f}(x)\|_{p,\mu}^p \leq \|f(x)\|_{q,\mu}^q < \infty$. Следовательно, определено $(Af)(t) = (A\bar{f})(t) + (A\bar{\bar{f}})(t)$.

Обозначим через F и G функции распределения для f и Af соответственно. Тогда

$$\|(Af)(t)\|_{q,\nu}^q = q \int_{(0,\infty)} y^{q-1} G(y) dy = 2^q q \int_{(0,\infty)} y^{q-1} G(2y) dy. \quad (30.1)$$

Для фиксированного $z > 0$, которое будет определено позднее и будет зависеть от y , положим $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)| \leq z, \\ \frac{f(x)}{|f(x)|} z & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $|f_1(x)| = \min(|f(x)|, z)$ и $|f(x)| = |f_1(x)| + |f_2(x)|$ при всех $x \in X_1$. Пусть $h_1 = Af_1$ и $h_2 = Af_2$, а F_1, F_2, G_1, G_2 — функции распределения для f_1, f_2, h_1, h_2 соответственно. Так как для любого $t \in X_2$ выполнено неравенство $|(Af)(t)| \leq |(Af_1)(t)| + |(Af_2)(t)|$, если $|(Af)(t)| > 2y$, то либо $|h_1(t)| > y$, либо $|h_2(t)| > y$. Поэтому, используя условие теоремы, получаем, что

$$G(2y) \leq G_1(y) + G_2(y) \leq M_1^p y^{-p} \|f_1(x)\|_{p,\mu}^p + M_2^r y^{-r} \|f_2(x)\|_{r,\mu}^r. \quad (30.2)$$

По определению функции f_1 имеем $F_1(u) = F(u)$ при $0 < u \leq z$; $F_1(u) = 0$ при $u > z$ и $F_2(u) = F(u+z)$ при $u > 0$. Учитывая (30.1) и (30.2), получаем

$$\begin{aligned} 2^{-q} q^{-1} \|Af\|_{q,\nu}^q &= M_1^p \int_{(0,\infty)} y^{q-p-1} \left(\int_{X_1} |f_1(x)|^p d\mu \right) dy + \\ &\quad + M_2^r \int_{(0,\infty)} y^{q-r-1} \left(\int_{X_1} |f_2(x)|^r d\mu \right) dy = \\ &= M_1^p p \int_{(0,\infty)} y^{q-p-1} \left(\int_{(0,z)} u^{p-1} F(u) du \right) dy + \\ &\quad + M_2^r r \int_{(0,\infty)} y^{q-r-1} \left(\int_{(z,\infty)} (u-z)^{r-1} F(u) du \right) dy. \end{aligned}$$

Здесь интегрируются неотрицательные функции, измеримость которых как функций двух переменных очевидна. По теореме Фубини мы имеем право изменить порядок интегрирования. Кроме того, положим

$$B = M_1^{\frac{p}{p-r}} \cdot M_2^{-\frac{r}{p-r}},$$

откуда

$$M_1^p B^{q-p} = M_1^{\frac{p}{p-r}} M_2^{\frac{p-r}{p-r}} = M_1^{(1-\tau)q} M_2^{\tau q} = M_2^r B^{q-r}.$$

Теперь если взять $z = \frac{y}{B}$, то, учитывая, что $(u-z)^{r-1} \leq u^{r-1}$ при всех $u > z$, получим

$$\begin{aligned} 2^{-q} q^{-1} \|Af\|_{q,\nu}^q &\leq M_1^p p \int_{(0,\infty)} u^{p-1} F(u) \left(\int_{(Bu,\infty)} y^{q-p-1} dy \right) du + \\ &\quad + M_2^r r \int_{(0,\infty)} u^{r-1} F(u) \left(\int_{(0,Bu)} y^{q-r-1} dy \right) du = \\ &= \frac{M_1^p p}{p-q} \int_{(0,\infty)} u^{p-1} (Bu)^{q-p} F(u) du + \\ &\quad + \frac{M_2^r r}{q-r} \int_{(0,\infty)} u^{r-1} (Bu)^{q-r} F(u) du = \\ &= \frac{M_1^p p}{q(p-q)} B^{q-p} \|f\|_{q,\mu}^q + \frac{M_2^r r}{q(q-r)} B^{q-r} \|f\|_{q,\mu}^q = \\ &= \left(\frac{p}{q(p-q)} + \frac{r}{q(q-r)} \right) M_1^{(1-\tau)q} M_2^{\tau q} \|f\|_{q,\mu}^q, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

§ 31. Некоторые теоремы о коэффициентах Фурье

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть задано конечное измеримое пространство (X, Σ, μ) и в соответствующем гильбертовом пространстве $L_2(X)$ есть ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, состоящая из ограниченных функций, т. е. для некоторого $M > 0$ имеем $|\varphi_n(x)| \leq M$ при всех $x \in X$ и $n = 1, 2, \dots$. Неравенство Бесселя и теорема Рисса—Фишера дают исчерпывающее описание поведения коэффициентов Фурье функций из гильбертова пространства. Однако в данном случае равномерная ограниченность функций из системы Φ и конечность меры X дают возможность определить коэффициенты Фурье и для функций $f(x) \in L_p(X)$ при $1 \leq p < \infty$ равенством

$$c_n(f) = \int_X f(x) \overline{\varphi_n(x)} d\mu.$$

Естественным образом возникает вопрос о возможности распространения теорем Бесселя и Рисса—Фишера и на случай $p \neq 2$. Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 31.1 (теорема Пэли). *При упомянутых выше условиях выполнены следующие утверждения:*

1. Если $1 < p \leq 2$ и функция $f(x) \in L_p(X)$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^p n^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p M^{\frac{2-p}{p}} \|f(x)\|_{p, \mu},$$

где постоянная C_p зависит лишь от p .

2. Если числа $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что для некоторого $q \in [2, \infty)$

$$R_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q n^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то найдется такая функция $f(x) \in L_q(X)$, что $c_n(f) = c_n$ при $n = 1, 2, \dots$ и частичные суммы $S_n = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $L_q(X)$. Кроме того,

$$\|f\|_{q, \mu} \leq C_{\frac{q}{q-2}} M^{\frac{q-2}{q}} R_q,$$

где $C_{\frac{q}{q-2}}$ — постоянная из первой части теоремы.

Доказательство. 1. Пусть σ -аддитивная мера ν определена на подмножествах множества натуральных чисел, причем $\nu(\{n\}) = \frac{1}{n^2}$. Определим оператор A , отображающий интегрируемые по Лебегу на X функции в последовательности, равенством $Af = \{nc_n(f)\}_{n=1}^\infty$. По неравенству Бесселя

$$\|Af\|_{2,\nu} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{2,\mu},$$

откуда A имеет сильный, а значит и слабый, тип $(2, 2)$ с постоянной $M_1 = 1$. Докажем, что A также имеет слабый тип $(1, 1)$ с постоянной $M_2 = 2M$. Пусть функция $f(x) \in L_1(X)$, причем $\|f\|_{1,\mu} \neq 0$ (иначе требуемое неравенство очевидно). Тогда при $y > 0$ имеем

$$\nu(E_y(Af)) = \sum_{n: |nc_n(f)| > y} \frac{1}{n^2} = \Sigma_1.$$

Но если n таково, что $|nc_n(f)| > y$, то

$$y \leq n \int_X |f(x)| |\varphi_n(x)| d\mu \leq nM \|f\|_{1,\mu},$$

откуда $n \geq \frac{y}{M\|f\|_{1,\mu}}$. Поэтому

$$\Sigma_1 \leq \sum_{n \geq \frac{y}{M\|f\|_{1,\mu}}} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{\frac{y}{M\|f\|_{1,\mu}}} = \frac{2M\|f\|_{1,\mu}}{y},$$

и нужное нам неравенство установлено. Применяя теорему 30.1 с $\tau = \frac{2-p}{p}$, получим, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^p n^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} = \|Af\|_{p,\nu} \leq C_p M^{\frac{2-p}{p}} \|f(x)\|_{p,\mu},$$

что и требовалось доказать.

2. Возьмем $p = \frac{q}{q-1}$. Определим для фиксированного натурального n функцию

$$g_n(x) = S_n(x) |S_n(x)|^{q-2}.$$

Поскольку система Φ состоит из ограниченных функций, $g_n(x) \in L_p(X)$. Теперь, применяя уже доказанную часть теоремы, по-

лучим

$$\begin{aligned}\|S_n\|_{q,\mu}^q &= \left| \int_X S_n(x) \overline{g_n(x)} d\mu \right| = \left| \sum_{k=1}^n c_k \int_X \varphi_k(x) \overline{g_n(x)} d\mu \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^n c_k \overline{c_k(g_n)} \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| k^{\frac{q-2}{q}} |c_k(g_n)| k^{\frac{p-2}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^q k^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ &\times \left(\sum_{k=1}^n |c_k(g_n)|^p k^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p M^{\frac{2-p}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^q k^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}} \|g_n\|_{p,\mu} = \\ &= C_p M^{\frac{q-2}{q}} \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^q k^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}} \|S_n\|_{q,\mu}^{\frac{q-1}{q}}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|S_n\|_{q,\mu} \leq C_p M^{\frac{q-2}{q}} \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^q k^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (31.1)$$

Отсюда очевидным образом следует, что последовательность $S_n(x)$ фундаментальна в $L_q(X)$, следовательно, найдется такая функция $f(x) \in L_q(X)$, что $\|f - S_n\|_{q,\mu} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда из оценки (31.1) вытекает, что

$$\|f\|_{q,\mu} \leq C_p M^{\frac{q-2}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q k^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Наконец, если $k \geq 1$, то для любого $n > k$ имеем

$$\begin{aligned}\left| c_k - \int_X f(x) \overline{\varphi_k(x)} d\mu \right| &= \left| \int_X (S_n(x) - f(x)) \overline{\varphi_k(x)} d\mu \right| \leq \\ &\leq \|S_n - f\|_{q,\mu} M(\mu(X))^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности, получим, что $c_k = c_k(f)$, и теорема полностью доказана. $\square$

Другой важной теоремой, описывающей поведение коэффициентов Фурье, является теорема Рисса. Для ее установления нам понадобится один вспомогательный результат из теории числовых рядов.

Лемма 31.1. Пусть числа $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Если $2 \leq q < \infty$, $q' = \frac{q}{q-1}$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^q n^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}} \leq B_q \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

2. Если $1 < p \leq 2$, $p' = \frac{p}{p-1}$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \geq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Здесь B_q и B_p — положительные постоянные, зависящие лишь от q и p соответственно.

Доказательство. Мы установим только первое неравенство, поскольку второе доказывается совершенно аналогично. С учетом того, что $q-1 \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^q n^{q-2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^q n^{q-2} \leq 2^{q-2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2^k}^q 2^{k(q-1)} = \\ &= 2^{q-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{2^k}^{\frac{q}{q-1}} 2^k \right)^{q-1} \leq 2^{2q-3} \left(a_1^{q'} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2^k}^{q'} 2^{k-1} \right)^{q-1} \leq \\ &\leq 2^{2q-3} \left(a_1^{q'} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} a_n^{q'} \right)^{q-1} \leq 2^{3q-4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{q'} \right)^{q-1}, \end{aligned}$$

что эквивалентно доказываемому утверждению. $\square$

Отметим еще такой факт, представляющий самостоятельный интерес.

Утверждение 31.1. Коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L_1(X)$ по равномерно ограниченной ортонормированной системе стремятся к нулю.

Доказательство. Если все $\varphi_n(x)$ не превосходят по модулю M , то выберем для заданного $\varepsilon > 0$ простую функцию $g(x)$ так, чтобы $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Тогда, очевидно $|c_n(f) - c_n(g)| \leq M\varepsilon$ для любого n . В то же время $g(x) \in L_2(X)$ и, согласно неравенству Бесселя, $c_n(g) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из этих двух наблюдений и вытекает справедливость нашего утверждения. $\square$

Теорема 31.2 (теорема Рисса). При условиях и обозначениях, сформулированных в начале параграфа, выполнены следующие утверждения.

1. Если $1 < p \leq 2$ и функция $f(x) \in L_p(X)$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq K_p M^{\frac{2-p}{p}} \|f(x)\|_{p,\mu},$$

где постоянная K_p зависит лишь от p .

2. Если числа $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что для некоторого $q \in (1, 2]$

$$T_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то найдется такая функция $f(x) \in L_{\frac{q}{q-1}}(X)$, что $c_n(f) = c_n$ при $n = 1, 2, \dots$ и

$$\|f\|_{\frac{q}{q-1}, \mu} \leq K_q M^{\frac{q-2}{q}} T_q, \quad (31.2)$$

где постоянная K_q зависит лишь от q .

Доказательство. 1. В силу утверждения 31.1 можно так переставить ненулевые коэффициенты $\{c_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$, что их модули будут монотонно невозрастать. Обозначим получившуюся последовательность через $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть также $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующие функции из системы Φ . Тогда по лемме 31.1(2) и теореме Пэли имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \\ &\leq B_p^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^p k^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p^{-1} C_p M^{\frac{2-p}{p}} \|f(x)\|_{p,\mu}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2. Обозначим $q' = \frac{q}{q-1}$. Из условия следует, что числа $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому, как и при доказательстве пункта 1, можно рассмотреть последовательности $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. По лемме 31.1(1) получаем, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^{q' k^{q'-2}} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq B_{q'} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = B_{q'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (31.3)$$

Отсюда по теореме Пэли существует такая функция $f(x) \in L_{q'}(X)$, что при любом k справедливо равенство $d_k = \int_X f(x) \overline{\psi_k(x)} d\mu$,

$$\sigma_m = d_1 \psi_1(x) + \dots + d_m \psi_m(x) \rightarrow f(x) \quad (31.4)$$

при $m \rightarrow \infty$ в пространстве $L_{q'}(X)$ и (см. (31.3)) выполняется неравенство (31.2). Таким образом, мы уже проверили, что если $c_n \neq 0$, то $c_n(f) = c_n$. Пусть n таково, что $c_n = 0$. Тогда функция $\varphi_n(x)$ не входит в систему Ψ , а потому $\int_X \sigma_m(x) \overline{\varphi_n(x)} d\mu = 0$ при всех m . Учитывая (31.4), отсюда несложно вывести, что и в этом случае $c_n(f) = 0 = c_n$. Тем самым, теорема доказана. $\square$

Замечание 31.1. Для более подробно обсуждаемой в следующем параграфе тригонометрической системы теоремы 31.1 и 31.2 носят название теорем Харди—Литльвуда и Хаусдорфа—Юнга соответственно, по именам математиков, установивших их для упомянутой системы до того, как были получены теоремы Пэли и Рисса.

§ 32. Теорема Карлемана и неусилимость теоремы Хаусдорфа—Юнга

В предыдущем параграфе речь шла об общих ортонормированных системах в функциональных пространствах и ничего не говорилось о конкретных примерах таких систем. Самой известной из них, пожалуй, является тригонометрическая система $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$, ортонормированная в пространстве $L_2([0, 2\pi])$ с классической мерой Лебега (теория тригонометрических рядов Фурье очень подробно рассматривается в монографиях Н. К. Бари [7] и А. Зигмунда [8]). Существует и много других важных ортонормированных систем, но изложение их теории выходит за рамки этой книги. Тригонометрическая же система понадобится нам для демонстрации невозможности распространения результата первой части теоремы Хаусдорфа—Юнга на $p > 2$, а второй — на $q > 2$. Для этого будут использоваться так называемые полиномы Рудина—Шапиро, представ-

ляющие и самостоятельный интерес. Приведем вначале необходимые пояснения. Пусть имеется полином вида

$$P(t) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_n e^{int},$$

где $|\varepsilon_n| = 1$ при любом n . Тогда

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} |P(t)| \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|P(t)\|_2 \geq \frac{1}{3} \sqrt{N+1}.$$

Таким образом, ни при каком выборе чисел ε_n , равных по модулю 1, нельзя сделать максимум модуля $P(x)$ по порядку меньше $\sqrt{N}$. В то же время, порядок $\sqrt{N}$ может быть достигнут даже при выборе $\varepsilon_n = \pm 1$. Точнее, справедливо даже несколько более сильное утверждение.

Л е м м а 32.1 (Рудин—Шапиро). *Существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $\varepsilon_n = \pm 1$ при всех n и*

$$\left| \sum_{n=0}^N \varepsilon_n e^{int} \right| < 5\sqrt{N+1}$$

при $t \in [0, 2\pi]$ и $N = 0, 1, \dots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = e^{it}$. Построим индуктивно две последовательности полиномов $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{Q_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Положим $P_0(x) \equiv Q_0(x) \equiv 1$, и пусть

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + x^{2^k} Q_k(x); \quad Q_{k+1}(x) = P_k(x) - x^{2^k} Q_k(x).$$

при $k = 0, 1, \dots$

Ясно, что при любом k степени $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ равны $2^k - 1$, а потому первые 2^k коэффициентов полинома $P_{k+1}(x)$ совпадают с аналогичными коэффициентами полинома $P_k(x)$. По той же причине все коэффициенты полиномов $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ равны ± 1 . Теперь можно положить ε_n равным коэффициенту при x^n в полиномах $P_k(x)$, $P_{k+1}(x)$, $\dots$, где $2^k - 1 \geq n$. Учитывая, что $x = e^{it}$, рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} |P_{k+1}(x)|^2 + |Q_{k+1}(x)|^2 &= P_k(x) \overline{P_k(x)} + P_k(x) \overline{x^{2^k} Q_k(x)} + \\ &+ x^{2^k} Q_k(x) \overline{P_k(x)} + x^{2^k} Q_k(x) \overline{x^{2^k} Q_k(x)} + P_k(x) \overline{P_k(x)} - \\ &- P_k(x) \overline{x^{2^k} Q_k(x)} - x^{2^k} Q_k(x) \overline{P_k(x)} + x^{2^k} Q_k(x) \overline{x^{2^k} Q_k(x)} = \\ &= 2(|P_k(x)|^2 + |Q_k(x)|^2) = 4(|P_{k-1}(x)|^2 + |Q_{k-1}(x)|^2) = \dots \\ &\dots = 2^{k+1}(|P_0(x)|^2 + |Q_0(x)|^2) = 2^{k+2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| \sum_{n=0}^{2^k-1} \varepsilon_n e^{int} \right| < \sqrt{2} 2^{\frac{1}{2}k}$$

при всех k .

Введем следующее обозначение. Если полином $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l$ и $n \leq l$, то n -я частичная сумма $S_n(P, x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Теперь установим, что если $k \geq 0$ и $0 \leq n < 2^k$, то $|S_n(P_k, x)| \leq (2 + \sqrt{2}) 2^{\frac{1}{2}k}$ и $|S_n(Q_k, x)| \leq (2 + \sqrt{2}) 2^{\frac{1}{2}k}$ для всех x . Проверим это по индукции. При $k=0$ данное утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для $k=m$, и пусть $0 \leq n < 2^{m+1}$. Тогда если $n < 2^m$, то

$$|S_n(P_{m+1}, x)| = |S_n(P_m, x)| < (2 + \sqrt{2}) 2^{\frac{1}{2}m} < (2 + \sqrt{2}) 2^{\frac{1}{2}(m+1)}.$$

Если же $2^m \leq n < 2^{m+1}$, то

$$\begin{aligned} |S_n(P_{m+1}, x)| &\leq |P_m(x)| + |S_{n-2^m}(Q_m, x)| \leq \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}(m+1)} + (2 + \sqrt{2}) 2^{\frac{1}{2}m} = (2 + \sqrt{2}) 2^{\frac{1}{2}(m+1)}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $|S_n(Q_{m+1}, x)| \leq (2 + \sqrt{2}) 2^{\frac{1}{2}(m+1)}$.

Теперь можно установить оценку теоремы. Если задано натуральное N , то подберем $k \geq 0$ так, чтобы $2^{k-1} - 1 \leq N < 2^k$. Тогда

$$\left| \sum_{n=0}^N \varepsilon_n e^{int} \right| = |S_N(P_k, x)| \leq (2 + \sqrt{2}) 2^{\frac{1}{2}k} = 2(1 + \sqrt{2}) 2^{\frac{1}{2}(k-1)} \leq 5\sqrt{N+1},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 32.1 (Карлеман). *Существует такая 2π -периодическая непрерывная на всей прямой функция $f(x)$, что для ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе при любом $p \in [1, 2)$ имеем*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^p = \infty.$$

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность из теоремы Рудина—Шапира. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}k} \frac{1}{k^2} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \varepsilon_n e^{int} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}k} \frac{1}{k^2} f_k(t). \quad (32.1)$$

По лемме 32.1 имеем

$$|f_k(t)| \leq \left| \sum_{n=0}^{2^k-1} \varepsilon_n e^{int} \right| + \left| \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} \varepsilon_n e^{int} \right| \leq 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}k}.$$

Отсюда по теореме Вейерштрасса ряд (32.1) сходится равномерно, а его сумма, которую мы обозначим через $f(x)$, является непрерывной на всей прямой функцией. При этом, очевидно, коэффициенты Фурье $c_n(f) = \varepsilon_n 2^{-\frac{1}{2}k} \frac{1}{k^{2p}}$, если $2^{k-1} \leq n < 2^k$, где $k = 1, 2, \dots$. Тогда при любом $p \in [1, 2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^p = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}kp} \frac{1}{k^{2p}} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} 1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(1-\frac{p}{2})k} k^{-2p} = \infty,$$

а это и надо было проверить. $\square$

Из теоремы Карлемана вытекает невозможность усиления первой части теоремы Хаусдорфа—Юнга.

В заключение, покажем, что и вторая часть теоремы Хаусдорфа—Юнга не допускает усиления.

Теорема 32.2. *Существует такой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int}, \quad (32.2)$$

что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^p < \infty$$

при всех $p > 2$, но ряд (32.2) не является рядом Фурье никакой интегрируемой по Лебегу на $[0, 2\pi]$ функции.

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}k} k^2 \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \varepsilon_n e^{int} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}k} k^2 f_k(t). \quad (32.3)$$

Ясно, что при любом $p > 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^p = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(1-\frac{p}{2})k} k^{2p} < \infty.$$

Как было отмечено при доказательстве предыдущей теоремы, $|f_k(t)| \leq 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}k}$ при всех t , а с другой стороны, $\|f_k(t)\|_2 > 2^{\frac{1}{2}k}$. Поэтому

$$2^k < \int_{[0, 2\pi]} |f_k(t)|^2 dt \leq \max_{t \in [0, 2\pi]} |f_k(t)| \cdot \|f_k(t)\|_1 \leq 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}k} \cdot \|f_k(t)\|_1$$

или $\|f_k(t)\|_1 > \frac{1}{10} 2^{\frac{1}{2}k}$. Следовательно, для L_1 -нормы разности частичных сумм ряда (32.3) имеем оценку

$$\|S_{2^k-1}(t) - S_{2^{k-1}-1}(t)\|_1 = 2^{-\frac{1}{2}k} k^2 \|f_k(t)\|_1 > \frac{1}{10} 2^{-\frac{1}{2}k} k^2 2^{\frac{1}{2}k} = \frac{1}{10} k^2.$$

С другой стороны, если бы ряд (32.3) был рядом Фурье некоторой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$, то при всех k выполнялось бы неравенство (мы пользуемся хорошо известной оценкой интеграла от модуля тригонометрического ядра Дирихле)

$$\begin{aligned} & \|S_{2^k-1}(t) - S_{2^{k-1}-1}(t)\|_1 \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_{[0, 2\pi]} \left| \int_{[0, 2\pi]} f(x+t) \left(\frac{\sin(2^k-1+1/2)t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{\sin(2^{k-1}-1+1/2)t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) dt \right| dx \leq \\ & \leq \|f(x)\|_1 \int_{[0, 2\pi]} \left| \frac{\sin(2^k-1+1/2)t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{\sin(2^{k-1}-1+1/2)t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt \leq C(f)k, \end{aligned}$$

где $C(f) = \text{const}$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

З а м е ч а н и е 32.1. Выше теорема Карлемана была установлена только для частного случая тригонометрической системы. Однако и для других ограниченных в совокупности ортонормированных систем справедливо аналогичное утверждение. Подробности можно найти в книге Б. С. Кашина и А. А. Саакяна [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лузин Н. Н. Собрание сочинений. — М.: Физматгиз, 1958.
2. Халмош П. Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.
3. Сакс С. Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
5. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
6. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: ИЛ, 1954.
7. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1 и 2. — М.: Мир, 1965.
9. Теляковский С. А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. — М.: Наука, 1980.
10. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу. — М.: Просвещение, 1981.
11. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979.
12. Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.-Л.: ОНТИ, 1937.
13. Толстов Г. П. Мера и интеграл. — М.: Наука, 1976.
14. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. — М.-Л.: ГТТИ, 1934.
15. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984.