

В. Я. ПЕРМИНОВ

ФИЛОСОФИЯ И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

УДК 1.14
ББК 87
П 26

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского гуманитарного научного фонда (РГНФ)
проект № 00-03-16067

П 26 **Перминов В.Я.** Философия и основания математики.– М.: Прогресс-Традиция, 2001. — 320с.

ISBN 5-89826-098-6

Книга посвящена анализу философских вопросов, связанных с проблемой обоснования математики. Автор предлагает принципиально новые подходы к решению этих вопросов, основанные на понимании априорной природы исходных математических идеализаций. Дается систематическая критика философской основы классических программ обоснования математики. Рассматривается связь проблемы обоснования математики с основными направлениями современной теории познания.

ББК 87

© В.Я. Перминов , 2001
© Н.В. Кормер, оформление, 2001
© Прогресс-Традиция, 2001

ISBN 5-89826-098-6

Предисловие

Строгость и непреложность утверждений математики всегда привлекала философов и философски мыслящих ученых. Долгое время в математике хотели найти идеал теоретической науки, канон для построения всякого доказательного (в том числе и философского) знания. Идея математики как строгой науки нашла выражение в философских учениях прошлого: у Платона, Августина, Декарта, Лейбница, Канта. Однако уже с середины XIX века в теории познания стали появляться идеи об ограниченности и релятивности математического мышления. В настоящее время мы переживаем период, когда эти идеи преобладают в философском понимании математического мышления. Философия математики XX века, если брать ее в основных тенденциях, далека от традиционного рационализма и очевидным образом тяготеет к эмпиризму и релятивизму.

Утверждение о том, что человеческое знание не является абсолютным и что каждая наука находится в постоянном изменении своих понятий и принципов, высказанное в общей форме, конечно, не может быть оспорено. Однако его применение к математике вызывает сомнения. Общая идея изменчивости знания плохо согласуется с законами логики и простыми математическими истинами, которые существуя в течение тысячелетий, не обнаруживают никаких признаков опровержения или корректировки. Мы чувствуем, что прилагая эволюционный тезис к математическому знанию, мы совершаем некоторое насилие над истиной, распространяем в общем верное положение за пределы его действительной значимости. Является несомненным фактом, что математика содержит в себе *принципы*, обладающие абсолютной надежностью, имеющие вневременное значение, для которых общий релятивистский тезис не имеет силы.

Предметом данной книги является критическое рассмотрение релятивистской философии математики. Задача, которая здесь ставится, состоит в том, чтобы понять истоки строгости математического мышления и с этой точки зрения указать границы релятивистской критики математики. Позитивная часть книги состоит в обосновании деятельностной (праксеологической) теории познания, которая дает новую интерпретацию традиционного априоризма и является более при-

емлемой для решения современных философских и методологических проблем математики.

Анализ вопроса требует систематического рассмотрения интуитивных оснований математического доказательства, природы логических норм, основных программ обоснования математики, а также общей логики развития математических теорий. Эти вопросы составляют основное содержание книги. Затронуты также и некоторые более общие вопросы современной философии математики.

Заканчивая предисловие, хотел бы выразить благодарность участникам Семинара по философии математики при кафедре философии и методологии науки естественных факультетов и преподавателям механико-математического факультета МГУ, общение с которыми в течение многих лет стимулировало мои усилия по прояснению философских оснований математической науки.

Я хотел бы особо поблагодарить профессора В.Э. Войцеховича, который выступая в данном случае в качестве редактора издательства «Прогресс-Традиция», проделал исключительно большую работу по доведению рукописи до приемлемого для читателя состояния.

Кроме того, я глубоко признателен Российскому гуманитарному научному фонду за финансовую помощь в издании книги.

Автор

01.12.2000. Москва

Введение

После знаменитых теорем Геделя проблема обоснования математики зашла в идеологический тупик. Когда стало ясно, что логические методы не достигают здесь своих целей, математики и философы сделали вывод, что эта проблема неразрешима вообще и что математика в смысле обоснования не отличается принципиально от опытных наук. В философии математики стало преобладать мнение, что вера в надежность математических доказательств и непротиворечивость математических теорий покоится на опыте и не имеет никаких других оснований.

Критика традиционного образа математики приобрела сегодня всеобщий характер и сделалась почти модой. Философы, логики, историки математики и сами математики говорят о нестрогости математических доказательств, о ненадежности интуиции и о принципиальной неустранимости противоречий в фундаментальных математических теориях. Традиционный идеал математики как строгой науки сегодня, как кажется, полностью отвергнут. Некоторые философы предлагают рассматривать математическую теорию как вырожденный случай эмпирической теории, т. е. как теорию, подверженную корректировке и опровержению во всех своих элементах.

Математическая практика, однако, мало согласуется с такой идеологией. Каждый, кто в достаточной степени проник в логику математических рассуждений, ясно осознает, что математика — это не физика, что ее выводы не проверяются в опыте, они не являются исторически преходящими и никогда не корректируются опытом в том смысле, как это происходит с законами опытных наук. Математики в своем большинстве верят в абсолютную надежность внутренних понятий своей науки и никто не допускает возможности контрпримеров для теоремы Пифагора или основной теоремы алгебры, несмотря на то, что не существует строгого логического обоснования непротиворечивости геометрии и алгебры.

Практика математики, несмотря на все философские сомнения, всегда исходила и исходит до сих пор из ясного различения математики и опытной науки в смысле их надежности. Если некоторое теоретическое предсказание в физике оказывается неверным и с очевидностью

опровергается опытом, то ученые ищут погрешность не в математических преобразованиях (если они проверены и признаны правильными), а только в физических гипотезах, положенных в основу рассуждения. Таким образом, вопреки релятивистской философии некоторый методологический инстинкт принуждает нас рассматривать математику как систему абсолютно надежных утверждений и выводов.

Это означает, что релятивистская философия математики неадекватна, что она не отражает в должной мере специфику математики как науки и не дает теоретического обоснования математической практики. Эта философия, будучи безупречной на уровне абстрактных силлогизмов, входит в явное противоречие с практикой математического мышления и с историей математики, которая свидетельствует об абсолютной стабильности математических утверждений, когда-либо принятых математическим сообществом. Этот факт дает нам основание думать, что современные скептические выводы о положении дел в основаниях математики, сложившиеся под влиянием эмпирической теории познания, не отвечают сути дела.

В книге предполагается обсудить новый взгляд на проблему обоснования математики, проистекающий из понимания математики как априорной науки.

Идея априоризма в наше время не выглядит привлекательной. Ученые и философы в своем большинстве склонны рассматривать априоризм как пережиток схоластики, как исторически объяснимую, но, несомненно, ложную попытку разрешить фундаментальные проблемы теории познания. Надо признать, что такая оценка традиционного априоризма имеет некоторые основания. Система априористской философии, представленная И. Кантом в «Критике чистого разума», с современной точки зрения выглядит догматичной, противоречащей фактам науки (факту неевклидовых геометрий, в частности) и даже мистической, поскольку она без всякого объяснения приписывает конечному человеческому существу способность видения абсолюта — универсальных и неизменных форм мышления. Современная теория познания, органически впитавшая в себя идею эволюции и относительности, естественно, склонна рассматривать такое учение как неадекватное и имеющее только историческое значение.

И тем не менее, надо признать, что философия априоризма содержит в себе истины, которые не могут быть устранены. Это относится в особенности к пониманию природы математического знания. Философия априоризма опирается на факт, подтвержденный математической практикой и всей историей математической науки, что математика — не эмпирическая наука, что математические понятия имеют другой источник своего возникновения и другие законы развития. Философия

математики не может уйти от идей априоризма по той простой причине, что она не может закрыть глаза на ярко выраженные особенности математической науки и оставить их без объяснения.

Априористская философия математики не может быть отброшена, она может быть лишь приведена в соответствие с современной теорией познания. Здесь нужно согласиться с Э. Гуссерлем, который считал, что проблема априорного не только не решена, но пока еще и не поставлена должным образом[1]. Основной задачей данной книги является разработка новой концепции априоризма, приложимой к пониманию математики и к решению проблем ее обоснования.

Общей теоретической предпосылкой нашего рассмотрения является положение о практической природе познания. Понимание практики как глубинной основы познания, его высшего стимула и высшего критерия истины является важнейшим завоеванием теории познания XIX века. Прежние философы рассуждали об опыте и о разуме как об источниках истины, но они или не ставили вопроса о функции знания или давали на этот вопрос самые фантастические ответы. Еще Л. Фейербах объяснял развитие науки человеческим честолюбием. К. Маркс и Ч.С. Пирс впервые посмотрели на знание с точки зрения его назначения, его социальной функции и необходимой включенности в предметную (материальную) практику. Теория познания приобрела недостающий ей телеологический момент и способы объяснения, присущие телеологической науке. В этом плане впервые появляется возможность понять природу универсальных норм мышления и связанных с ними фундаментальных очевидностей сознания, на которых в конечном итоге покоится и все здание математической науки. Анализ последних оснований математического мышления требует анализа практики как источника общезначимых очевидностей и в этом смысле современная философия математики неизбежно должна быть праксеологической.

Что касается вопроса о месте математики в системе наук, то наиболее приемлемой является здесь формалистская концепция, согласно которой математика представляет собой не учение о мире, имеющее свой предмет, а лишь совокупность логических структур, предназначенных для описания различного рода реальных связей, открываемых опытными науками. С этой точки зрения к математическим теориям не применимы понятия истинности и ложности и к ним не может быть предъявлено требование обязательного соответствия какой-либо внешней реальности. Математическая теория рассматривается здесь не как описание мира, но лишь как метод, как чистая структура, которая может быть использована для моделирования реальных связей. Определяющей особенностью исходных принципов математической теории, с этой точки зрения, является не их очевидность или

соответствие какому-либо опыту, а их непротиворечивость, обеспечивающая способность теории транслировать истину от одних содержательных утверждений к другим.

Идея математики как формальной науки, противостоящей эмпирическим наукам, была с полной ясностью высказана уже полтора столетия назад Г. Грассманом в предисловии к «Учению о протяженности». «Верховное деление наук, — писал Грассман, — состоит в разделении их на реальные и формальные науки, из которых первые отображают в мышлении бытие, как самостоятельно противостоящее мышлению. Наоборот, формальные науки имеют своим предметом то, что полагается самим мышлением. Их истина заключается в согласии мышления с самим собой»[2]. Формалистская концепция математики также может быть подвергнута критике, но в настоящее время мы ясно осознаем то обстоятельство, что философия математики не может быть адекватной, если она не будет учитывать фундаментального разделения двух типов знания, которое лежит в ее основе.

Может показаться, что декларируемые установки, а именно, априоризм, прагматизм и формализм — слишком разнородны для того, чтобы быть совместимыми. Эти опасения, однако, не обоснованы. В действительности эти установки тесно связаны друг с другом и существенно предполагают друг друга. В настоящее время становится все более ясным, что рациональное обоснование априоризма может быть достигнуто только на основе понятия практики. Априоризм в настоящее время может быть принят только как праксеологический априоризм, заключающийся в признании универсальных форм мышления как независимых от конкретного опыта и продиктованных деятельностной установкой субъекта. С другой стороны, формалистская философия математики, несомненно, предполагает элементы априоризма как в понимании строгости доказательства, так и в общей концепции обоснования математики. «Школьная математика» Гильберта, на основе которой он хотел дать абсолютное обоснование непротиворечивости всех математических рассуждений, представляет собой не что иное как такого рода априорное знание, абсолютное и не подверженное эмпирической критике. Так же как и интуиционисты, Гильберт надеялся обосновать математику на априорных началах, придав им, однако, более строгое, собственно математическое определение[3]. Одна из задач данной книги состоит в том, чтобы показать, что попытка выявить априорное и абсолютно надежное ядро математики не бессмысленна и не безнадежна и что она является реализуемой при более глубокой разработке философии и методологии математической науки.

Уяснение того обстоятельства, что непротиворечивость является основным свойством математической теории и что в математике, в

принципе, приемлема любая дедуктивная система, обладающая непротиворечивостью, было громадным прогрессом в философии математики, истинным освобождением математического мышления от гнета внешнего мира. Эта важная идея была, однако, дополнена впоследствии ложным тезисом, согласно которому все математические утверждения, в том числе и самые элементарные, не более чем конвенции, в принципе допускающие замену и удерживаемые в обращении исключительно вследствие их простоты и удобства для некоторых конкретных целей. Это было ложным шагом, искажающим сущность математического знания. Утверждая приемлемость произвольных понятий и структур, удовлетворяющих требованию непротиворечивости, мы должны одновременно учитывать однозначную заданность и априорность исходных математических представлений и их однозначную обусловленность фундаментальной онтологией мышления. В понимании традиционной математики мы должны идти не за Пуанкаре и Витгенштейном, а за Фреге и Гуссерлем, которые настаивали на однозначной определенности исходных математических очевидностей и на их связи с фундаментальными формами мышления. Важнейшая задача, стоящая перед современной философией математики, состоит в обосновании центрального ядра математики как абсолютного, в теоретическом оправдании идеи предельно надежного обосновательного слоя, которая так или иначе присутствует во всех программах обоснования математики.

Современная философия математики должна соединить в себе три разнородных положения, а именно, тезис об идеальности и формальности математических структур, т. е. представление о математике как о совокупности чисто мысленных конструкций, ограниченных только требованием непротиворечивости, тезис об априорности исходных математических представлений, заключенных в традиционных разделах математики, таких как арифметика и элементарная геометрия, и тезис о реальности исходных математических представлений как непосредственно связанных с универсальной онтологией, лежащей в основе человеческого мышления. Задача книги состоит в том, чтобы показать возможность указанного синтеза и его продуктивность применительно к проблемам обоснования математики.

Рассуждения об обосновании математики должны исходить, очевидно, из некоторого достаточно ясного смысла самого этого понятия. В разные эпохи под обоснованием математики понимались различные вещи. Для математиков Древней Греции, столкнувшихся с проблемой несоизмеримых величин, проблема обоснования, как мы можем предполагать на основе дошедших до нас сведений, состояла в том, чтобы найти способы обращения с произвольными отношениями величин, не отбрасывая иррациональных величин и не отступая от точности

вычислений. Они разрешили эту проблему через использование геометрических построений. Математики XVII века усматривали неясные моменты в использовании мнимых и иррациональных чисел, которые не укладывались в принятые представления о математической реальности. Проблема обоснования состояла для них в отыскании убедительной реальной (физической или метафизической) интерпретации для этих чисел. Для математиков XVIII века, которые осознавали нестрогость алгоритмов дифференциального исчисления, проблема обоснования состояла в уточнении исходных понятий новой теории и в возвращении к идеалу строгости, который был задан классическими образцами. Проблема обоснования математики в XVIII веке была прежде всего проблемой строгости доказательства. Необходимая строгость была приобретена после определения основных понятий анализа на базе понятия предела. Для Г. Фреге и Л. Кронекера проблема обоснования математики состояла в ее унификации, в выявлении ее содержательной основы, обеспечивающей единство и строгость всей науки. Фреге хотел представить математику как ветвь логики, в то время как Кронекер был убежден, что такой исходной содержательной основой математики является арифметика. Г. Кантор и Д. Гильберт впервые сформулировали проблему обоснования математики как проблему обоснования непротиворечивости математических теорий. Очевидно, что это совершенно новое понимание обоснования, отличное от всех предшествующих. При такой постановке проблемы обоснование математики не связано непосредственно ни с унификацией математического знания, ни с поиском содержательной интерпретации для математических понятий и теорий.

Можно, конечно, рассматривать все исторически имевшие место подходы как равноправные и в равной мере заслуживающие внимания. Но это было бы плохой стратегией. Нетрудно видеть, что каждое понимание обоснования математики проистекало из методологических проблем своей эпохи и из идеала математики, т. е. из философии математики, преобладающей в данную эпоху. Стремление к обоснованию науки всегда исходит из некоторых гипотез о ее назначении, ибо по своей сути оно не может означать ничего другого как стремление максимально приблизить практику науки к идеалу, диктуемому ее предполагаемым назначением. Но это значит, что для определения правильного пути мы должны принять такое понятие обоснования, которое в наибольшей степени соответствует современному пониманию математики как науки. Мы, таким образом, должны сделать здесь философский выбор, а именно, выбор между современными гипотезами о сущности математики и ее назначении.

Сказанное выше уже в определенной степени определяет этот выбор. Если математика рассматривается как совокупность абстрактных структур, нацеленных в конечном итоге на то, чтобы быть точным языком и средством дедукции для опытных наук, то проблема ее обоснования сводится к обоснованию качеств, определяющих эту функцию математики, а именно, к обоснованию надежности ее доказательств и к установлению непротиворечивости ее теорий. Эти две задачи, непосредственно проистекающие из формалистского понимания сущности математического знания, будут основными в нашем исследовании. Всякие другие трактовки и цели обоснования мы должны рассматривать здесь как частные, побочные и заслуживающие внимания лишь в той мере, в которой они значимы для решения указанных основных задач.

Обосновательная деятельность в математике состоит из двух относительно автономных уровней: математического и философского. Применение принятой программы обоснования к конкретной теории представляет собой чисто математическую работу. Программа обоснования, однако, сама нуждается в обосновании, в установлении ее соответствия своей задаче. Здесь возникают философские и методологические проблемы, такие как проблема интуиции, проблема надежности содержательного доказательства, проблема допустимой логики и т. п. Любая программа обоснования математики содержит в себе систему допущений, имеющих философский или гносеологический характер. Надо признать, что несмотря на усилия, затраченные выдающимися философами и математиками XX века на прояснение и обоснование этих допущений, мы имеем здесь минимальное продвижение вперед и именно это обстоятельство является причиной того, что проблема обоснования математики все еще остается далекой от своего решения.

Имеются основания предполагать, что новые продвижения в решении проблемы обоснования математики придут не от логики, а станут возможными именно на основе радикального углубления философии математики. Довольно очевидно, что эмпирицистская философия математики не указывает здесь правильных перспектив. Отождествить математику с опытными науками в плане обоснования — слишком простое решение вопроса. Мы должны вспомнить здесь слова И. Канта, сказанные по поводу попыток вывести логику из психологии: «Смешение границ различных наук ведет не к расширению этих наук, но к их искажению»[4]. В настоящее время философия математики нуждается в прояснении специфики математического знания. И прежде всего мы должны избавиться от ложных эмпирических аналогий, которые вносят путаницу в само понимание проблемы обоснования математики.

Хотя философия сама по себе не может претендовать на полное решение проблемы обоснования математики, она может более или менее успешно выполнить свою часть работы. Она должна установить необходимые гносеологические критерии, в рамках которых сама проблема приобретает смысл и перспективу. Основная часть нашей работы будет состоять в обосновании праксеологического априоризма. Задача состоит в том, чтобы показать, что априоризм, жестко связывающий исходные математические представления с универсальной онтологией, позволяет отстаивать более оптимистические взгляды относительно возможности полного обоснования математических теорий.

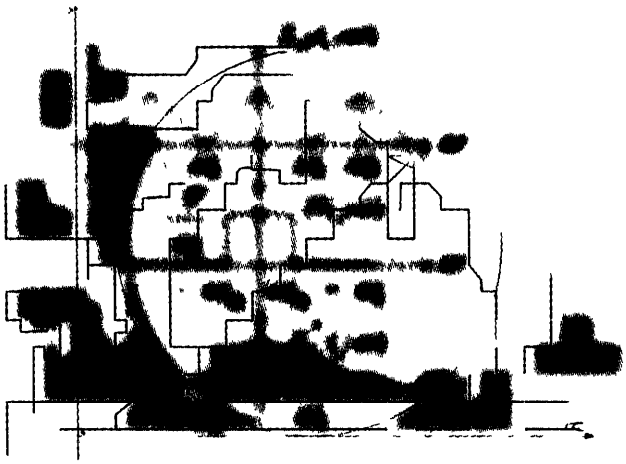
ЧАСТЬ 1
НАДЕЖНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

«Под интуицией я имею здесь в виду не веру в шаткое свидетельство человеческих чувств и не обманчивое суждение человеческого воображения, а прочное понятие ясного и внимательного ума, порожденное лишь естественным светом разума и благодаря своей простоте более достоверное чем сама дедукция...»

Р.Декарт. «Правила для руководства ума.»

«Всеми разделяется то убеждение, что геометрия со всеми своими истинами справедлива с безусловной всеобщностью для всех людей, всех времен, всех народов, для всех не только исторически фактических, но и для всех вообще мыслимых. Принципиальные предпосылки этого убеждения никогда не были обоснованы, потому, что никогда не были всерьез проблематизированы»

Э. Гуссерль. «Начало геометрии.»



Глава 1.

Ассерторическая и аподиктическая очевидность

Ключевым вопросом всей проблемы обоснования математики является вопрос о надежности математического доказательства. Если допустить, что все доказательства в какой-то степени ненадежны, то проблема обоснования математики, по крайней мере как проблема внутриматематическая, теряет смысл, ибо обоснование математической теории должно быть результатом безусловно надежного доказательства.

Мы верим в надежность признанного математического доказательства в том смысле, что не допускаем возможности контрпримеров к теореме, если все ее условия выполнены, и не допускаем возможности обнаружения в нем принципиальной неполноты доводов, если доказательство хорошо проверено и принято математическим сообществом. Человек, знакомый с геометрией, не сомневается в том, что теорема Пифагора доказана безупречно и что она достоверна в том смысле, что не существует прямоугольных треугольников, для которых не выполнялось бы соотношение $a^2 + b^2 = c^2$. Мы верим в надежность математических теорем как утверждений строго доказанных. Гносеологическая проблема состоит в том, чтобы понять истоки и обоснованность этой веры.

1. Понятие аподиктической очевидности

Необходимо прежде всего разделить такие понятия, как интуиция и очевидность, которые смешиваются в обычном словоупотреблении. Под словом интуиция обычно понимается процесс прозрения, схватывания истины, не подчиненный рациональным правилам и существенно зависящий от индивидуальных особенностей индивида: интуитивно ясное для одного, как правило, не является таковым для другого. Очевидность — это только видение истины, т. е. определенное состояние сознания. Те очевидности, с которыми мы имеем дело в математике, это никак не прозрения, доступные особо одаренным индивидам, а

напротив, — совершенно общезначимые тривиальности типа 2 + 2 = 4, против которых нельзя возражать. Такого рода очевидности сознания могут рассматриваться сами по себе, независимо от своей психологической основы, исключительно в логической связи друг с другом.

Система очевидностей, с которыми мы имеем дело в процессе познания, распадается на два существенно различных класса, а именно, на класс ассерторических и класс аподиктических очевидностей. К ассерторическим очевидностям относятся обычные очевидности опыта, которые имеют относительный характер и которые могут быть исправлены новым опытом. Особенностью аподиктических очевидностей является то, что они не поддаются такой корректировке и имеют, таким образом, внеэмпирический и внеисторический характер. Аподиктические очевидности представляют собой некоторого рода бесспорные факты сознания, не поддающиеся корректировке ни со стороны опыта, ни со стороны логики, ни со стороны какой-либо теории. Мы с полной ясностью осознаем, к примеру, что диагонали квадрата пересекаются в одной точке, что они при этом делятся пополам и т. п., и при этом осознаем также, что эти факты не могут быть поставлены под сомнение ни другими фактами, ни абстрактными рассуждениями. Такого рода факты, несомненно, имел в виду Декарт, когда он в своих «Правилах для руководства ума» определял интуицию как «несомненное понимание ясного и внимательного ума, которое порождается лишь светом разума и является более простым и более достоверным, чем сама дедукция»[1].

Мы воспринимаем с аподиктической очевидностью не только элементарные положения арифметики и геометрии, но также законы логики и некоторые универсальные принципы, относящиеся к метафизике. Никто не сомневается в том, что существуют материальные тела, что каждое явление имеет причину, что время необратимо и т.д. Мы не можем здесь утверждать противное. Мы должны признать, что человеческое познание связано с системой фундаментальных очевидностей, образующих глубинную основу мышления, которые лежат в основе всякой рациональной критики и потому не могут быть поколеблены какой-либо критикой. Эти общезначимые факты сознания мы будем обозначать в дальнейшем понятием аподиктической очевидности с тем чтобы, не связывать их с неопределенными психологическими процессами, которые ассоциируются с понятием интуиции.

Эмпирическая теория познания не допускает существования аподиктических очевидностей, поскольку она не допускает никакой внеисторичности и непогрешимости вообще. Рационалистические концепции знания, опирающиеся на идею непосредственной очевидности и необходимой истины, представляются в наше время старомодными

и окончательно опровергнутыми. Однако математика снова и снова возвращает нас к этим идеям. Эмпирическому воззрению противоречит сама история математики. Мы видим, что доказательства безусловно очевидные для Евклида, являются очевидными и для нас и, вообще, подавляющее число теорем, когда-либо принятых математиками в качестве доказанных, считаются доказанными и теперь. Это последнее было бы совершенно невозможно, если бы система очевидностей, на которых базируется математика, претерпевала изменения от столетия к столетию.

2. Основные типы математической очевидности

Анализ математической практики позволяет выделить следующие типы очевидностей как основные.

1. ***Эмпирическая очевидность.*** Мы имеем дело с такого рода очевидностью, когда математическая истина признается на основе некоторого опыта или общего представления, имеющего опытное происхождение. Если, как это делал Ньютон и многие из его современников, отождествить функцию с траекторией движения материального тела, тогда наличие производной для каждой непрерывной функции становится самоочевидным фактом, ибо движущееся тело всегда имеет некоторую скорость. Математики XVIII века не ставили вопроса о существовании производной для непрерывных функций по той причине, что интерпретация функции через движение представлялась им совершенно естественной и неустранимой из математической теории. Эмпирическая очевидность, как показывает уже приведенный пример, не является непогрешимой и по этой причине не является аподиктической очевидностью в указанном выше смысле. Такого рода очевидность не имеет обосновательного значения для математика, стремящегося к полной надежности своих выводов.

2. ***Очевидность аналогии.*** Это та очевидность, которая проистекает из перенесения на новый объект свойств известных и привычных нам объектов, которые в каких-то существенных отношениях сходны с ним. Аналогия — один из самых важных эвристических механизмов развития математики. Д. Пойа утверждал, что нет ни одного математического открытия, которое было бы сделано без помощи аналогии. Аналогия в математике чаще всего является и доказательной в том смысле, что заключения по аналогии в подавляющем числе случаев оправдываются затем собственной теорией новых объектов, т. е. приобретают статус строго доказанных. Однако очевидно, что такого рода заключения могут оказаться и ложными. История математики дает нам много примеров, когда аналогия использовалась скрыто и приводила

к ложному убеждению в успехе там, где его не было. Интересным примером такого рода ошибки является «доказательство» теоремы Ферма, представленное Г. Ламе в Парижскую Академию наук в 1847 году, которое покоилось на допущении безусловной применимости основной теоремы арифметики для поля комплексных чисел[2]. Это значит, что очевидность аналогии, имеющая несомненное эвристическое значение, также не может считаться строго доказательной.

3. ***Концептуальная очевидность.*** Этот тип очевидности основывается на образах, которые математики привносят в теорию извне, с тем, чтобы приблизить математические истины к ассоциациям обыденного опыта. Сколь бы сложной не была теория в своих внутренних конструкциях, как бы далеко она не уходила от обыденных представлений, ученые постепенно обживают ее, вводя образы, позволяющие непосредственно осязать ее внутренние связи и двигаться на этой основе к новым результатам. Так же как и эмпирическая очевидность, концептуальная очевидность связана с содержательной интерпретацией математических объектов. Различие состоит в том, что концептуальная очевидность генетически вторична по отношению к теории, она производна от существующей математической структуры и направлена исключительно на ее прояснение. Ясно, что концептуальная очевидность, как и эмпирическая, не имеет аподиктического характера и не может использоваться в математике в качестве обосновательного средства[3].

4. ***Предметная очевидность.*** Это очевидность, связанная с мысленными операциями в сфере идеальных предметов, которая лежит в основе математики и позволяет нам с полной определенностью утверждать, что 2 + 2 = 4, 5 + 7 = 12 и т. п. Предметная очевидность задает законы операций с идеальными предметами, которые предполагаются в процессе реального счета и предшествуют ему как устойчивое мысленное представление. Мы не считаем волны на море или мысли в голове человека, поскольку они не удовлетворяют или плохо удовлетворяют требованиям к вещам, поддающимся счету. Считаемые предметы должны быть стабильными, изолированными (различимыми) и аддитивными в том смысле, что операции с ними не должны вести к их соединению или исчезновению. Мы можем говорить, что арифметика применяется только к той реальности, в которой с достаточной точностью реализуются представления об идеальных предметах и их связях, лежащие в основе понятия числа, и сама арифметика должна рассматриваться прежде всего как описание этих представлений.

Предметная очевидность лежит не только в основе арифметики, но и в основе всех других математических наук. В алгебре мы отвлекаемся от мысленных единиц и от конкретных представлений об их соединениях и разделениях, а сосредоточиваем внимание на знаках

как эмпирически данных вещах и операциях с ними. Но наша уверенность в надежности алгебраических операций, конечно, покоится на том, что знаки и операции со знаками в достаточной степени удовлетворяют требованиям к идеальной предметности, лежащим в основе арифметики. При переходе к абстрактным областям математики мы заменяем операции с идеальными предметами — операциями с чувственными предметами, которые могут сохранять свойства идеальных предметов. Такая замена имеет тот смысл, что она позволяет говорить о числах и множествах за пределами их мысленного представления, сохраняя при этом безусловную надежность выводов, свойственную началам математической науки.

Предметная очевидность является аподиктической очевидностью в том смысле, что очевидный результат арифметического или знакового рассуждения не может быть поставлен под сомнение каким-либо логическим анализом или контрпримерами. Любое теоретическое рассуждение в математике было бы немедленно отвергнуто, если бы оно вошло в противоречие с выводами, достигнутыми на ее основе. Формализованное доказательство представляется для нас непогрешимым именно по той причине, что оно сводится к аподиктически очевидным манипуляциям с предметами (знаками). Философы, однако, преувеличивают значимость мышления на этом уровне, когда объявляют формализованное доказательство единственной подлинной гарантией надежности математического рассуждения.

5. ***Геометрическая очевидность.*** Это тот вид очевидности, который позволяет нам уверенно утверждать, что две прямые пересекаются в одной точке или что через две точки можно провести только одну прямую. Геометрическая очевидность отличается от арифметической тем, что она непосредственно связана с представлениями о пространстве, которые имеют лишь косвенное значение для арифметики и алгебры. Она имеет дело с предметами, важнейшим качеством которых является их непрерывность.

В элементарных случаях геометрическая очевидность имеет аподиктический характер, т. е. она не может быть подвергнута сомнению в своей надежности. Пусть, к примеру, мы доказываем утверждение, состоящее в том, что площадь параллелограмма равна площади прямоугольника с тем же основанием и с той же высотой, посредством мысленного разделения площади параллелограмма на части и составления из этих частей равновеликого прямоугольника. Может ли какое-либо более строгое рассуждение в будущем поколебать надежность нашего рассуждения и основанный на нем вывод? Конечно, нет. Мы отклонили бы всякое как угодно изощренное рассуждение

как софизм, если бы оно не подтверждало наш вывод, проистекающий из наглядных операций с фигурами. В этом смысле геометрическая очевидность совершенно аподиктична, ибо она, как и арифметическая, не может быть отвергнута или скорректирована на основе какого-либо логического анализа.

Надежность геометрической очевидности, однако, часто ставилась под сомнение. Ниже мы специально остановимся на рассмотрении этого вопроса.

6. ***Логическая очевидность.*** Мы обнаруживаем наличие этого вида очевидности прежде всего в непреложности логических норм, определяющих реальное математическое рассуждение. Студент-математик понимает доказательство своего преподавателя без какого-либо специального знакомства с логикой. Преподаватель, доказывая теорему и тщательно разъясняя относящиеся к делу понятия, обычно ничего не говорит о правилах логики. Он предполагает (и он не ошибается в этом!), что каждый из его слушателей воспринимает логические переходы как непосредственно очевидные и что эта очевидность непреложна в том смысле, что эти переходы не могут стать предметом дискуссии. Если доказано, что из A следует B, а из B следует C, то никто не будет подвергать сомнению, что из A следует C.

Логическая самоочевидность проявляется также в нашей способности однозначно фиксировать состав свойств, заключенных в определениях. Когда в процессе доказательства мы говорим, что объект A обладает свойством B по определению, то мы выносим заключение, обладающее безусловной аподиктической очевидностью, проистекающей из нашей способности однозначно фиксировать состав определения.

7. ***Очевидность структурного тождества.*** Этот вид непосредственной очевидности имеет место в каждом шаге математического рассуждения, где мы подводим некоторую ситуацию под определенное правило. Во всех таких случаях мы прежде всего фиксируем, что общая структура рассматриваемого выражения тождественна структуре (схеме), выраженной правилом. Акт подведения под правило не может быть рационализирован или формализован: он всецело базируется на нашей способности непосредственного отождествления структур на основе аподиктической очевидности. Здесь мы можем только сказать: «Смотри и убедись, что структура преобразуемой формулы именно та, которая требуется правилом». На самоочевидности структурного тождества основано установление всякого рода соответствий (изоморфизмов, гомоморфизмов и т. п.) между математическими объектами. Этот тип очевидности является, несомненно, аподиктическим и доказательным.

3. О надежности геометрической очевидности

Надежность геометрической очевидности неоднократно ставилась под сомнение. В XVIII веке Лагранж призывал математиков избавляться от чертежей в математических рассуждениях, ибо, по его мнению, как и механические аналогии, они снижают строгость и общность рассуждения. Критика геометрической очевидности продолжалась и XIX веке в связи с арифметизацией анализа. Б. Больцано полагал, что все утверждения анализа, сколь бы ясными они не были с геометрической точки зрения, должны получить собственно аналитическое обоснование, опирающееся на определения функций и их свойств. Он считал, что утверждения анализа, обладающие предельной универсальностью, не могут доказываться из соображений частной дисциплины, какой является геометрия[4]. Брауэр исключил геометрическую очевидность из оснований математики как дискредитированную появлением неевклидовых геометрий[5].

Внимательное рассмотрение проблемы показывает, однако, что принижение обосновательного статуса геометрической очевидности, присутствующее до сих пор в философии математики и в математической практике, не является оправданным. Конечно, современная математика далеко вышла за пределы геометрической наглядности и исследует большое число объектов, далеких от возможностей обычного пространственного представления. Мы не можем наглядно представить непрерывную функцию, не имеющую производной, кривую, целиком заполняющую квадрат, или способ рассечения шара на части, из которых можно составить два равновеликих ему шара, и множество других объектов, исследуемых в современной математике. Именно на такого рода факты указывают те математики и философы, которые говорят о крахе интуиции в современной математике[6].

Факт уменьшения сферы геометрической наглядности в современной математике не подлежит сомнению. Сама геометрия далеко вышла за границы обычной наглядности, и нетрудно понять, что процесс расширения математики за счет абстрактных объектов вполне закономерен и не может быть обращен вспять. Но здесь необходимо разделить разные вещи. Когда мы ставим вопрос о надежности геометрической очевидности, то нас интересует не то, как широка сфера ее использования, а лишь то, является ли эта очевидность *там, где она фактически используется*, достаточно надежной. Иными словами, нас интересует не вопрос об универсальности геометрической очевидности (этот вопрос разрешается однозначно и отрицательно), а вопрос о ее надежности, т. е. вопрос о том, является ли она надежной в сфе-

ре своего фактического применения. На вопрос, поставленный таким образом, мы имеем все основания ответить утвердительно.

Для уяснения сути дела рассмотрим процесс вычисления поверхности фигуры, которая известна как цилиндр Шварца. Если цилиндр высотой H разделить на n горизонтальных слоев и в основания каждого из слоев вписать k-угольник, то ребра, соединяющие соседние вершины многоугольников, образуют многогранную поверхность, вписанную в боковую поверхность цилиндра, состоящую из $2nk$ равных треугольников. Геометрическая интуиция подсказывает нам, что при неограниченном увеличении n и k (числа слоев, на которые разделен цилиндр, и числа сторон многоугольника, вписанного в основание слоя) площадь многогранной поверхности будет приближаться к площади боковой поверхности цилиндра. Простой расчет показывает, однако, что величина этого предела зависит от относительной скорости изменения n и k и, вообще говоря, может быть как угодно большой. Несостоятельность геометрической очевидности, как кажется, оказывается более чем убедительной[7].

В действительности, однако, никакого опровержения геометрической очевидности в данном случае не происходит. Прежде всего обратим внимание на следующий момент: при вычислении действительного предела многогранной поверхности, вписанной в цилиндр, мы должны неизбежно исходить из того факта, что эта поверхность состоит именно из $2nk$ граней и что площадь каждой грани равна половине произведения ее основания на высоту, т. е. из фактов школьной геометрии, обоснованных в рамках геометрической очевидности. Получается, что некорректность одной геометрической очевидности обнаруживается только на основе других очевидностей того же рода. Но это значит, что по крайней мере некоторая совокупность геометрических очевидностей должна быть признана как имеющая безусловный характер.

Главное, однако, состоит в следующем. Когда мы в рассматриваемом случае интуитивно заключаем, что площадь многогранной поверхности при увеличении числа ее граней имеет своим пределом поверхность цилиндра, то мы опираемся не на геометрический чертеж, относящийся к данному случаю, и не на тривиальные очевидности, зафиксированные в аксиомах геометрии, а исключительно на аналогию с некоторыми известными геометрическими фактами. Наша первоначальная гипотеза, в действительности, поддерживается следующим соображением: «Если периметр вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон стремится к длине окружности как к своему пределу, то естественно предположить, что площадь вписанной многогранной поверхности при неограниченном увеличении числа ее граней стремится к площади боковой

поверхности цилиндра». Но это не заключение на основе непосредственной геометрической очевидности, а заключение по аналогии, и, таким образом, мы можем говорить здесь лишь о ненадежности индуктивной гипотезы, неявно внедренной в исходное геометрическое рассуждение.

Рассмотрение примеров, которые обычно приводятся против геометрической очевидности, показывает, что все они основаны на смешении геометрической очевидности как непосредственного осуществления и созерцания геометрических конструкций с заключениями по аналогии или с индуктивными гипотезами относительно этих объектов. Эти примеры, таким образом, доказывают только некорректность индуктивной и эмпирической очевидности в сфере геометрии и ни в какой мере не опровергают аподиктического характера очевидностей, лежащих в ее основе. Может ли такой объект, как кривая, заполняющая весь квадрат, свидетельствовать против геометрической очевидности, если само ее построение опирается на эти очевидности? У нас нет никаких фактов, показывающих, что выводы, сделанные на основе очевидных геометрических построений, оказались бы несостоятельными с логической точки зрения. В действительности, мы никогда не признаем математические рассуждения правильными, если они будут расходиться с выводами, основанными на общезначимой геометрической конструкции. И в этом смысле факт, основанный на геометрической очевидности, столь же обязателен для математика, как и элементарный арифметический факт.

Тенденция к освобождению начал анализа от геометрической очевидности, которая наметилась в XVIII веке, сама по себе вполне законна. Объективно она была направлена на то, чтобы сузить до минимума интуитивное основание анализа как определенной математической дисциплины. Однако эта тенденция была ошибочно истолкована математиками и философами как освобождение математики от эмпирической наглядности, приводящей к заблуждениям. В основе этого истолкования лежало ошибочное представление о геометрии как опытной науке, как о науке, родственной механике, связанной с исследованием пространства как объекта, данного в опыте.

Противопоставляя геометрическую наглядность и аналитическое обоснование в качестве примера, Больцано рассматривал утверждение: «Если непрерывная функция при некоторых значениях аргумента A и B принимает значения, имеющие разные знаки, то существует значение аргумента равное C, при котором она равна нулю». Он считал, что хотя это положение убедительно геометрически, геометрическое его обоснование не может рассматриваться в качестве приемлемого. Теоремы о свойствах функций должны быть выведены, согласно

Больцано, только из чисто аналитического определения этих функций. Основная его идея, конечно, имеет методологический смысл и историческое оправдание. Однако убеждение в том, что опора на геометрию в анализе столь же ненадежна, как и опора на механику, ошибочно. Геометрическая очевидность — не очевидность механики: она, в действительности, не менее интеллектуальна, не менее авторитарна, чем очевидность арифметики и не менее обязательна для математики, чем последняя. Если бы Больцано строго аналитически доказал, что непрерывная функция, удовлетворяющая указанным условиям, может в некоторых случаях не иметь значения, равного нулю, то этим бы было доказано собственно, что определения анализа не соответствуют данной в интуиции непрерывности пространства, и анализ, несомненно, был бы перестроен в сторону такого соответствия. Самоочевидная геометрическая истина, заключенная в теореме Больцано–Коши, в принципе не может быть устранена из математики на основе каких-либо логических доводов. Но это значит, что ее геометрическое обоснование является не менее надежным, чем обоснование аналитическое.

Столь же несостоятелен и аргумент Брауэра. Тот факт, что наглядность евклидовой геометрии не распространяется на другие геометрические системы, не говорит о ненадежности этой очевидности в рамках самой евклидовой геометрии и о недостаточности ее для обоснования этой геометрии. Следуя своей логике, Брауэр должен был бы поставить под сомнение и обычную арифметическую очевидность, ибо существуют нестандартные арифметические системы, в которых она неприемлема.

Более адекватный взгляд на геометрическую очевидность был сформулирован Г. Фреге в его последних работах. Основную идею Фреге можно выразить в следующих двух тезисах:

1. Геометрическая очевидность, так же как и арифметическая, не содержит в себе никакого чувственного компонента и, вследствие этого, является чисто интеллектуальной, собственно математической и абсолютно надежной.

2. Геометрическая очевидность является более широкой, чем арифметическая, ибо она является источником идеи математической бесконечности. Вследствие этого, ее следует рассматривать в качестве базы содержательной унификации математического мышления в целом[8].

На данном этапе нам достаточно принять первый тезис Фреге, а именно, твердо установить то положение, что геометрическая очевидность является не менее надежной, чем очевидность арифметическая, предметная или логическая. Необходимо признать, что принижение геометрической очевидности в ее надежности и обоснователь ной роли является одним из самых тяжелых заблуждений философии ма-

тематики на протяжении последних двух столетий. Первейшая задача современной философии математики состоит в устранении этого предрассудка. Разумеется, это может быть сделано только на основе общего анализа природы аподиктической очевидности и ее места в структуре человеческого мышления.

4. Аподиктическая очевидность как основа доказательства

Любое математическое доказательство может быть разбито на части, на отдельные шаги, опирающиеся только на непосредственную очевидность. Если некоторый шаг доказательства не очевиден для нас или для тех, для кого мы доказываем теорему, то это шаг нуждается в дальнейшем разъяснении, в редукции к еще более тривиальным очевидностям. Доказательство принимается только тогда, когда каждый его шаг либо непосредственно очевиден, либо допускает редукцию к некоторой совокупности непосредственных очевидностей. Но это означает, что проблема надежности математического доказательства состоит, в конечном итоге, в выяснении надежности тезисов, на которые опирается математик в процессе своего рассуждения. Когда некоторая группа математиков приходит к заключению о правильности определенного доказательства, то этим выражается вера в то, что все очевидности, на которые оно опирается, относятся к классу аподиктических очевидностей.

Начиная с Декарта, математическое рассуждение связывается с представлением об абсолютной (некорректируемой) очевидности. В кантовской концепции математики аподиктическая очевидность определяет все элементы математического мышления. Математика, по Канту, самоочевидна в своих исходных объектах, которые даны in concreto в чистом априорном созерцании, она самоочевидна в системе своих исходных принципов (аксиом) и, наконец, она самоочевидна в своих доказательствах, поскольку, согласно Канту, «математические доказательства всегда протекают под руководством чистой интуиции, на основе всегда очевидного синтеза»[9].

Современная математика, конечно, не является в такой мере подчиненной требованию очевидности. Практика современного математического мышления требует только логической строгости в определении объектов и не предъявляет никаких требований относительно их непосредственной данности сознанию. Рассуждения в неевклидовой геометрии или в нестандартном анализе с самого начала исходят из утверждений, противоречащих интуиции. С современной точки зрения и аксиомы, и объекты математического рассуждения должны быть лишь логически определенными в том смысле, что они должны

быть выражены в терминах, допускающих редукцию к аподиктически очевидным или постулативно определенным объектам. В настоящее время мы хорошо понимаем, что требование самоочевидности аксиом и определений проистекало из узости взгляда традиционной философии математики и неприменимо к практике современного математического мышления.

Мы должны сохранить, однако, кантовский тезис о безусловной очевидности математического доказательства. Несмотря на возможную неочевидность объектов и аксиом само доказательство как система шагов, ведущих от посылок к следствиям, всегда должно оставаться прозрачным, ибо как уже сказано, неочевидные переходы не могут быть приняты в качестве доказательных: всякий шаг доказательства, претендующего на надежность, должен быть совершен либо в соответствии с аподиктически ясным правилом логики, либо на основе аподиктически ясного состава определения, либо на основе аподиктически очевидных преобразований содержательных посылок (аксиом).

Доказательство, аподиктически очевидное в каждом своем шаге, не может быть дезавуировано каким-либо контрпримером или последующим анализом доказательства. Будучи выполненным и подтвержденным математическим сообществом, оно представляет собой абсолютный факт наличия логической связи, с которым должно считаться всякое другое построение в данной теории. Вопрос о том, достижимы ли в математике законченные доказательства, сводится к вопросу, обеспечивает ли естественная эволюция математического доказательства полное очищение его от ассерторических очевидностей.

Теория в процессе своего развития может существенно изменять состав своих базовых очевидностей. В элементарной геометрии мы исходим из непосредственной очевидности пространственных объектов и их свойств. Символы еще не играют здесь существенной роли. Переходя к аналитическому изложению геометрии, мы отодвигаем геометрическую наглядность в сторону, заменяя ее непреложностью аналитического (знакового) рассуждения. В неевклидовых геометриях связь с пространственной очевидностью разрывается почти полностью. Хотя мы продолжаем здесь опираться на чертежи, но они уже не обладают здесь той авторитарностью, которой они обладали в элементарной геометрии: чертеж выступает здесь лишь в качестве условной иллюстрации и мы не можем предъявлять здесь каких-либо претензий к доказательству, исходя из наглядного представления фигуры. На первое место здесь выдвигается логическая и предметная очевидность.

Различные математические теории, таким образом, в зависимости от содержания и уровня абстрактности могут опираться на различные

типы аподиктических очевидностей. Они, в частности, могут быть свободными от некоторых из этих типов. Переход к алгебре устраняет мысленный арифметический синтез, формализация геометрии устраняет пространственное воображение, переход к конструктивному рассуждению требует отказа от интуитивно ясных операций классической логики. Формализация теории представляет собой ни что иное как редукцию всех типов очевидности к предметной и логической очевидности.

Принципиально важно, однако, то, что мы не можем избавиться от очевидности полностью: ни одна математическая теория не может быть построена без опоры на некоторый тип непосредственной очевидности. Аподиктическая очевидность — необходимая предпосылка любого строгого рассуждения и основа его надежности.

Выступая против геометрической наглядности, многие математики в начале XX века ставили задачу освободить математическое доказательство от всякой очевидности и свести его к системе всюду контролируемых логических шагов. При этом упускался из виду тот простой факт, что сама логика также покоится на некоторого рода непосредственной очевидности и что применение ее к цепочкам символов предполагает очевидность структурного тождества. В одной из своих ранних статей Б. Рассел заявлял, что сведение всей чистой математики, включая геометрию, к формальной логике, является роковым ударом для философии Канта, так как показывает возможность геометрических доказательств, не опирающихся на чертежи[10]. Это, конечно, верно в том смысле, что доказательства в формализованной теории не связаны с признанием истинности посылок на основе чертежа. Рассел, однако, рассматривает устранение геометрической наглядности как устранение очевидности вообще и даже как устранение самой проблемы очевидности из философии математики. Он не ставит вопроса о надежности тех очевидностей, на которых основано чисто символическое доказательство. Кант здесь более близок к истине. В настоящее время мы хорошо понимаем, что математическая теория не может существовать, не опираясь на тот или иной тип аподиктической очевидности[11].

Существуют две математические теории, полностью удовлетворяющие кантовским требованиям к очевидности. Это арифметика и евклидова геометрия. Это генетически первичная и логически фундаментальная часть математики, имеющая вневременное значение. Она некорректируема и безусловно предшествует всем другим утверждениям и конструкциям в математике. Мы будем говорить в дальнейшем об этих теориях как об априорной части математического знания или об априорном центре математики.

Современная математика несравненно шире своей априорной части, основанной на аподиктически очевидных принципах. Существует

множество геометрических систем, в которых обычная геометрическая наглядность неприменима, существует математический анализ, где теорема Больцано-Коши неверна и т. п. И тем не менее априорная математика была и остается истинной основой математической науки. Обычная арифметика и евклидова геометрия — не просто элементарная часть математики, но базовый круг очевидностей, к которому в конечном итоге редуцируется любое математическое рассуждение. В этом смысле элементарная математика была и всегда останется методологической основой математического мышления. И в тех теориях, в которых мы уходим от самоочевидности объектов и аксиом, мы продолжаем двигаться в рамках априорных очевидностей логики и элементарной математики. Только эти исходные очевидности, принадлежащие к генетическому центру математики, дают нам уверенность в правильности выводов на всех уровнях математического мышления.

Это дает нам возможность утверждать, что сфера математики определяется множеством выводов, редуцируемых к аподиктической очевидности. В этом плане мы можем определить математику как мышление на уровне аподиктической очевидности.

Аподиктическая очевидность — это генетическая основа математики, необходимый элемент содержания каждой математической теории и, наконец, необходимая основа любого математического рассуждения в том смысле, что любое доказательство приобретает для нас понятность и непреложность ровно в той мере, в которой оно редуцируется к уровню аподиктической очевидности. Отсюда ясно, что обоснование надежности математического доказательства — это не проблема логики, а прежде всего эпистемологическая проблема, связанная с прояснением природы аподиктической очевидности.

Глава 2.

Надежность и строгость доказательства

Если мы признаем факт существования аподиктических очевидностей и их абсолютную надежность, состоящую в их неуязвимости для контрпримеров, то вопрос о существовании абсолютно надежных доказательств сводится к вопросу, в какой мере историческая эволюция доказательства в рамках теории гарантирует его полное очищение от ассерторических очевидностей. Здесь возможны (и фактически существуют) две гипотезы. Первая из них, которую можно назвать релятивистской, состоит в том, что историческое очищение доказательства представляет собой бесконечный процесс, ведущий к повышению его надежности и строгости, но никогда не достигающий предела. С этой точки зрения, в математике могут существовать более надежные и менее надежные доказательства, но не существует и не может существовать доказательств окончательных, завершенных и абсолютно надежных. Вторая гипотеза, которую можно назвать фундаменталистской, состоит в том, что процесс вызревания математического доказательства конечен и что математики, по крайней мере в развитых теориях, имеют дело с завершенными доказательствами. Здесь будут приведены аргументы в пользу последней гипотезы.

1. Основные характеристики математического доказательства

Будем называть доказательство *надежным* или *завершенным*, если оно не может быть опровергнуто посредством контрпримеров. Будем называть доказательство *строгим* или *герметичным*, если оно не содержит в себе неявных (не оговоренных в условиях) предпосылок. Надежное доказательство, очевидно, может быть нестрогим. Таковы почти все геометрические доказательства Евклида: эти доказательства не подвержены контрпримерам и подтверждаются как корректные во всех последующих более строгих изложениях геометрии, но они, очевидно, не являются строгими, поскольку опираются на предпосылки, не содержащиеся в оговоренных условиях. С другой стороны, мыслимы строгие доказательства, идеально правильные в системе

принятых канонов, но нарушающие правила обычной логики, а потому ненадежные, подверженные контрпримерам при содержательной истинности посылок.

Будем называть доказательство *достоверным* по отношению к некоторой области объектов, если оно истинно в отношении этой области, т. е. если его заключение, исходящее из содержательно истинных посылок, соответствует фактическому положению дел в этой области. Будучи надежным и строгим, доказательство может оказаться недостоверным вследствие приближенного характера интерпретации или неадекватности правил вывода применительно к данной области объектов. Вопрос о достоверности математических доказательств систематически возникает в сфере логического обоснования математических теорий. Генценовское доказательство непротиворечивости арифметики, будучи совершенно строгим по внутренней логике рассуждения, обычно не рассматривается в качестве гарантирующего фактическое отсутствие противоречий в формализованной арифметике. Вопрос о достоверности доказательств мы будем рассматривать позднее. Наша первая задача будет состоять в том, чтобы выявить признаки, позволяющие судить о полной (абсолютной) надежности и о полной (абсолютной) строгости математического доказательства.

Философы-релятивисты будут отрицать законность самой постановки вопроса, настаивая на том, что идея абсолютности столь же мало приложима к математическому рассуждению, как и ко всякому другому. Математическая практика, однако, несомненно выделяет группу доказательств, которые вследствие своей простоты и обозримости никогда не вызывали никаких сомнений относительно своей завершенности и абсолютной значимости для теории. Это прежде всего все те доказательства, которые состоят в выводе простых следствий из аподиктически очевидных посылок на основании простых правил логики. Чистые аподиктические доказательства абсолютно надежны по той причине, что всякий контрпример к теореме был бы в этом случае опровержением аподиктически очевидной аксиомы или правила вывода. Однако такого рода опровержения, как мы выяснили выше, в принципе невозможны. Доказательство теоремы о площади параллелограмма, о котором говорилось выше, основанное на самоочевидном преобразовании исходной фигуры, является аподиктически очевидным во всех своих шагах и, вследствие этого, абсолютно надежным. Всякое доказательство, редуцируемое к уровню аподиктической очевидности, должно быть признано абсолютно надежным.

Отрицать наличие абсолютно надежных связей в математике так же невозможно, как отрицать существование предмета, находящегося у нас перед глазами. Наша уверенность и в том, и в другом случае

продиктована самыми общими условиями познания, определяющими саму его возможность, и потому она не может быть подвергнута сомнению. Это общее соображение, однако, не позволяет нам определить истинную сферу надежных рассуждений в математике. Для решения этой последней задачи мы должны уточнить сами критерии математической надежности и решить вопрос об их объективной значимости. Мы должны ответить на вопрос, с какой степенью надежности математическое сообщество может фиксировать надежность доказательства в конкретном случае. Иначе говоря, мы должны обосновать объективную значимость наших суждений о надежности и строгости доказательства.

2. Абсолютная критериальность математического сообщества

В своем становлении доказательство проходит разные ступени. Первоначально оно может использовать интуитивные понятия, не являющиеся в достаточной степени определенными, а также скрытые эмпирические и индуктивные доводы и, таким образом, быть далеким от идеала непреложного, абсолютно надежного умозаключения. Иными словами, доказательство на первых стадиях своего становления может опираться как на аподиктические, так и на ассерторические очевидности, и пока это так, надежность доказательства остается проблематичной. Вопрос о надежности математического доказательства сводится к вопросу о том, обеспечивает ли естественная эволюция математической теории полное очищение своих доказательств от ассерторических элементов. Анализ логики развития математического знания дает утвердительный ответ на этот вопрос.

Истинность этого положения в достаточной степени подтверждается историей математики. Хотя новые доказательства могут корректироваться и даже опровергаться, они тем не менее никогда не корректируются до бесконечности. Для любого математического доказательства, как показывает опыт, наступает стадия окончательного признания, достигнув которой, оно может изменяться лишь в плане логического упрощения, обобщения или интерпретации результата, но не в плане сомнений относительно наличия теоремы, т. е. самого факта следования определенных выводов из определенной системы посылок. Опыт показывает, что любое математическое доказательство по истечении определенного времени либо устраняется критикой как ошибочное, либо достигает состояния завершенности, полной внутренней определенности, гарантирующей его надежность. Математическая практика не подтверждает факта постоянной корректировки

теорем и уточнения их условий, что наблюдалось бы в случае бесконечности процесса его становления как надежного. Любая математическая теорема неизбежно стабилизируется, приобретая значение непреложного факта в рамках теории.

Возможность абсолютного освобождения математического рассуждения от ассерторических доводов обусловлена прежде всего особым статусом аподиктической очевидности в нашем сознании. Будучи деятельностным по своей природе, различение аподиктического и ассерторического является сущностным для нашего сознания, определяющим его саморефлексию. Сколь непреложно мы воспринимаем содержание аподиктической истины, столь же непреложно мы воспринимаем и сам факт ее аподиктичности. Иными словами, различие между ассерторической и аподиктической очевидностью дано нашему сознанию с аподиктической очевидностью. Это обстоятельство лежит в основе нашей способности отличать доказательство от цепочки умозаключений, имеющих только вероятный характер, и определяет эффективность механизма очищения математических рассуждений от допущений ассерторического порядка. Математик, конечно, может незаметно для самого себя использовать ассерторические допущения, но, как правило, в дальнейшем он обнаруживает свою ошибку. Субъективная убедительность доказательства, имеет, с этой точки зрения, вполне объективные основания: она состоит в уверенности, что каждый его шаг осуществлен в рамках аподиктической очевидности.

Несравненно более сильной и, как показывает практика, абсолютной критериальной способностью обладает сообщество математиков. Если доказательство признано как надежное не только автором, но и сообществом математиков, то практически это является полным обоснованием его абсолютной надежности. Абсолютная критериальность математического сообщества проистекает из того обстоятельства, что всякая аподиктичность выступает для человеческого сознания как интерсубъективность, как нечто безусловно приемлемое всеми. Отдельный математик, вследствие определенных субъективных особенностей своего мышления, может достаточно долго не замечать некоторой неявной предпосылки в своих рассуждениях. Но если ошибка субъективна, то в высшей степени маловероятно, что она не будет замечена другими математиками, в противном случае надо было бы предположить, что в ней заключается некоторая интерсубъективность. Практически сообщество математиков доводит любое доказательство до полной ясности всех его шагов и либо включает его в класс абсолютно признанных истин, либо отвергает его. Имея в виду это обстоятельство, мы будем говорить, что сообщество математиков обладает *абсолютной критериальностью* в отношении надежности математического доказательства. Суть этого положения состоит в том, что не

существует доказательств, относительно которых математическое сообщество *не вынесло бы окончательного вердикта в исторически конечное время.* Известно много примеров ошибочных доказательств, которые в течение некоторого времени признавались математиками в качестве истинных, но все такие ошибки, если теорема приобретала известность и вовлекалась в практику, обычно раскрывались еще при жизни автора.

Тезис об абсолютной критериальности математического сообщества, как кажется, можно поставить под сомнение, исходя из тривиального вероятностного соображения, состоящего в том, что если отдельный математик по разным причинам не гарантирован от ошибок, то не гарантировано от них и сообщество математиков: хотя и с очень малой вероятностью, но оно может заблуждаться относительно любой истины и как угодно длительное время. Это рассуждение, однако, ошибочно. Оно не учитывает принципиальной конечности и системности математического рассуждения.

3. Конечность математических доказательств

Возможность абсолютной очистки доказательства от дефектов существенно связана с его конечностью. Математическое доказательство представляет собой конечную процедуру или, точнее говоря, деятельность в конечном поле возможностей. По содержанию своих понятий математическая теория может быть как конечной, так и бесконечной, т. е. как связанной с понятием бесконечности, так и не связанной с ним. Однако как процедура обоснования некоторого тезиса доказательство представляет собой всегда конечную цепь логических переходов. Всякое доказательство распадается на конечное число шагов, относительно каждого из которых мы можем поставить вопрос о его законности и решить его общезначимым образом через соотнесение со сферой аподиктической очевидности. Фундаментальным отличием математического доказательства от всех других типов рассуждения является его проверяемость через редукцию к аподиктической очевидности всех его шагов.

Математическое доказательство является не углублением содержания теории, не совершенствованием ее понятий, но скорее построением конструкции в пространстве готовых объектов, возможные действия с которыми однозначно заданы их определениями. Но такого рода комбинаторная деятельность в конечном пространстве объектов либо не достигает цели, либо получает абсолютное завершение. Рассмотрим в качестве примера процесс решения простой шахматной задачи. Пусть ситуация на доске такова, что белые начинают и дают

мат в два хода, и пусть сообщество шахматистов признало, что это действительно так, и что мат для черных в данной ситуации неизбежен. Допускаем ли мы, что это заключение относительно и что некий сверхгениальный шахматист найдет здесь выход из положения и спасет черных? Конечно, нет. И нетрудно понять, на чем базируется здесь наша уверенность. Шахматная ситуация определена конечным числом фигур, каждая из которых может влиять на нее лишь конечным числом движений. Шахматист признает неизбежность мата, если он видит, что у него нет возможности сдвинуть короля в безопасное место, что ни одна из фигур не может прикрыть его от шаха или уничтожить нападающую фигуру. Для абсолютного решения вопроса здесь достаточно просмотреть конечное число вариантов защиты и если не один из них не может быть реализован, шахматист должен признать неизбежность мата и эта констатация является абсолютной, не подверженной корректировке при сохранении установленных правил шахматной игры.

Этот не совсем математический пример фиксирует сущностную черту математического доказательства и механизмов его проверки. Отдельный математик, конечно, может сделать техническую ошибку, либо допустить вывод, не являющийся общезначимым, но это исключено для сообщества в целом, по крайней мере ясно, что оно не может не обнаружить этой ошибки в процессе анализа доказательства. Математическое доказательство как деятельность в конечном поле аподиктически определенных комбинаций имеет абсолютный и с полной определенностью фиксируемый результат. Математические рассуждения отличаются от содержательных не тем, что они гарантированы от ошибок, а тем, что они *неизбежно достигают полного освобождения от ошибок*, т. е. состояния полной надежности.

Разница между решением шахматной задачи и математическим доказательством состоит лишь в том, что точные определения математических объектов, а иногда и допустимых правил действия не заданы с самого начала, а вырабатываются в самой «игре». Математическая игра в отличие от шахматной на некотором этапе может обходиться без точной кодификации правил действия с некоторыми фигурами (объектами), опираясь лишь на общее согласие играющих. Здесь могут возникать неясности и недоразумения, неявное использование доводов ассерторического порядка и т. п. Однако это различие не меняет сути дела, ибо созревание системы доказательств, относящихся к теории, неизбежно приводит к однозначному определению всех объектов на базе исходных понятий и к устранению всех недоразумений. Сторонники релятивистской концепции доказательства могли бы защитить свой тезис о вечной незавершенности доказательства, если бы они могли показать, что в математическом доказательстве могут

существовать шаги, не допускающие редукции к первичным, аподиктически определенным переходам.

Доказательство математической теоремы по своей сути является деятельностью с идеальными предметами, которая, как и деятельность с реальными предметами, имеет категорический характер в плане результата. Трехлетний ребенок уверенно строит пирамиду из кружочков, накладывая их один на другой по величине. Его знания о мире еще незначительны, ему предстоит длинный путь углубления своих представлений о мире, но то, что он сделал сейчас, является абсолютным: расположить кружочки по величине более совершенным образом не удастся более ни ему и никому другому. Комбинация в конечном множестве объектов, удовлетворяющая заданному свойству, достигнута и сам вопрос о ее относительности является абсурдным. Можно, конечно, возразить следующим образом: «Расположение кружочков по величине окончательно, если принять неизменными (абсолютно стабильными) представления о большем и меньшем, которыми ребенок руководствовался. Но могут измениться и эти представления». Это возражение, несмотря на всю его гипотетичность, можно принять. Тогда мы будем говорить о *предельной* завершенности конечной комбинации, т. е. о такой завершенности, которая не может быть поставлена под сомнение в рамках существующей категориальной сетки. Представляется, однако, что различие между предельным и абсолютным в данном случае не имеет практического смысла.

Математическое доказательство — не мышление в собственном смысле слова, характеризующееся бесконечным приближением теории к объекту, а построение комбинации в конечном множестве объектов, имеющих определенные свойства. Завершенность такой комбинации является предельно общезначимой, поскольку и ее свойства и каждый шаг ее построения фиксируются с аподиктической очевидностью.

Гносеологическая особенность рассматриваемой ситуации состоит в том, что мы наблюдаем здесь возможность непосредственного перехода от субъективного и только вероятного мнения отдельных индивидов к абсолютному мнению математического сообщества, утверждающего факт полной надежности доказательства, невозможности его опровержения. Здесь, однако, нет ничего незаконного, противоречащего теории вероятностей, ибо мнение математического сообщества относится к анализу конечной конструкции на базе *предельно достоверного* разделения аподиктических и ассерторических очевидностей. Математическое доказательство представляет собой конечную конструкцию в сфере аподиктически очевидного. Все отклонения от абсолютности на этом уровне являются случайными и устраняемыми в конечное время.

4. Системность математической теории

Здесь надо учесть еще одно обстоятельство, а именно, специфическую системность математики. Математическая теория является жесткой системой в том смысле, что каждая доказательная связь обусловлена здесь многими другими доказательными связями. Каждое доказательство связано с доказательствами, проведенными раньше, и само оно становится основой других доказательств и подтверждением результатов, полученных другими путями. Математическое доказательство не может существовать вне перекрещивающейся сетки доказательств, согласованных с ним. Математическая теория в этом смысле может быть уподоблена огромному кроссворду, где каждое слово многократно проверяется через все другие. Разница с обычным кроссвордом состоит лишь в большей жесткости (внутренней детерминированности) математического кроссворда. В обычном кроссворде, чтобы считать слово угаданным, мы должны обеспечить его согласование с другими словами в двух или трех точках. В математической теории каждое доказательство представляет собой слово, которое должно совпадать с существующим массивом слов во всех своих точках, т. е. быть истинным во всех своих промежуточных результатах.

Отсюда ясно, что зрелая теория полностью исключает некорректные доказательства. Доказательство имеет шансы содержать некорректное допущение только на той стадии своего развития, пока оно находится на периферии теории и не связано достаточно жестко с другими теоремами. Но по мере своего вызревания любое доказательство погружается в центр теории, в разработанную часть кроссворда, где все его леммы должны стать доказанными теоремами или аксиомами, а все объекты однозначно определенными на основе первичных объектов. Отсюда ясно, что интуитивность выводов и неопределенность объектов в математическом рассуждении — сугубо временное состояние, возможное лишь на начальном этапе его становления.

Аргумент системности представляется, в частности, важным для понимания статуса современных компьютерных доказательств. Многие математики склонны думать, что доказательства математических теорем, осуществленные с использованием сложных программ, не могут считаться надежными и что они, в лучшем случае, могут рассматриваться в качестве гипотез направляющих поиск[12]. Здесь, однако, упускается из виду то обстоятельство, что надежность доказательства проверяется не только прямым анализом его шагов, но и его согласованностью с другими доказательствами. Учитывая это обстоятельство, можно утверждать, что компьютерная математика также не ограничена в своем движении к надежности. Одна программа может проверять

другую и, как и в случае с обычными доказательствами, полная коррекция доказательства потребует лишь конечное число проверок.

Мы можем заключить, что математическое сообщество, в действительности, обладает достаточными критериями абсолютной надежности доказательств. Если общее признание доказательства представляет субъективный (хотя и в высшей степени надежный) критерий такого рода, то включенность доказательства в центр теории, согласованность его с другими доказательствами, является объективным и однозначным критерием. Математика является абсолютно надежной наукой в том смысле, что теоремы, записанные в учебниках, не имеют шансов быть опровергнутыми.

Вероятностные соображения типа того, что если может заблуждаться один математик, то может заблуждаться на неопределенное время и математическое сообщество в целом, что повторные проверки не способны вывести нас за рамки вероятного результата и т. п., являются неприемлемыми для понимания эволюции математического доказательства. Идеальная математическая схема распределения вероятностей не является законом развития реальных систем. С теоретической точки зрения имеется вероятность того, что все молекулы газа соберутся в одной точке сосуда, но практически этого никогда не произойдет, поскольку молекулы не являются идеально независимыми в своем движении, как это предполагает теория вероятностей. С абстрактно теоретической точки зрения можно допустить, что все человечество с какой-то степенью вероятности может заблуждаться, считая истинным равенство 2 + 2 = 4. Но это допущение не учитывает системности теории. Ошибка в таком равенстве, будь она реальной, должна была бы войти в тысячи других равенств, в бесконечный кроссворд математических слов и остаться при этом незамеченной. Если бы такая ситуация действительно могла иметь место, то ее нельзя было бы считать случайной. Этот факт можно было бы объяснить только наличием некоторой другой системы аподиктических очевидностей, что в принципе исключено их статусом.

Ситуация с достижимостью окончательного доказательства в математической теории может быть сформулирована как задача полной (предельной) настройки в конечной саморегулирующейся системе. Если имеется система с конечным числом состояний, упорядоченных по некоторому параметру, и имеется постоянно действующий фактор, способствующий с преобладающей вероятностью переходу от данного состояния к более высокому, то можно утверждать, что такого рода система достигает предельного (наилучшего) состояния в конечное время. Каждое доказательство содержит в себе конечное число ошибок и его историческое совершенствование может быть представлено в

виде конечной последовательности состояний, упорядоченных по возрастанию корректности. Теоретическая коммуникация, в которую доказательство включено, является постоянно действующим фактором, обеспечивающим его переход от одного состояния к более высокому.

В математической теории, как и в любой теории, возможны ошибки, идущие от человека, от ограниченности его внимания и памяти, т. е. здесь происходит обычное движение от несовершенного к более совершенному. Основная особенность математики, отличающая ее от эмпирических наук, состоит в том, что она достигает абсолюта в смысле окончательного установления своих истин и в смысле предельно ясной констатации этого состояния в конкретных случаях.

5. Вторичность строгости

В отличие от надежности, которая относится к интуитивной основе доказательства, строгость характеризует доказательство с его формальной, лингвистической стороны, с точки зрения корректности определений и полноты явно выраженных посылок. Это другая сторона доказательства, имеющая свои особенности.

Мы должны разделить два существенно различных подхода к пониманию окончательной строгости. Если речь идет об окончательной строгости как об отсутствии скрытых допущений в *конкретном* доказательном рассуждении, то полная строгость в этом смысле безусловно достижима. Аксиоматическое изложение теории полностью решает эту задачу. Если же мы ставим вопрос о достижении окончательной строгости в общем плане, в смысле выявления критериев, гарантирующих строгость доказательства в любом конкретном случае, то мы должны признать, что эта задача неразрешима. В отличие от критерия надежности математического доказательства, который во всех случаях сводится к аподиктической очевидности его шагов, универсального критерия строгости, значимого для всех доказательств, не существует.

Сторонники фаллибилистской философии математики исходят из этого последнего положения, выводя отсюда недостижимость полной строгости и в первом смысле, а также и недостижимость его полной надежности. Этот ход мысли является центральным в концепции доказательства И. Лакатоса. Неизбежность появление новых критериев строгости, соответствующих новой системе объектов, рассматривается Лакатосом как углубление анализа доказательства, способное дезавуировать любое из признанных доказательств. Этот ход мысли выглядит достаточно правдоподобным, поскольку он соответствует положению дел в опытных науках. Появление новых принципов в физике приводит, как правило, к корректировке старых в смысле их опровер-

жения или ограничения сферы их действия. Однако эта схема взаимодействия принципов непригодна для математики.

Область объектов математики от самых простых до самых сложных может быть представлена в виде системы расширяющихся кругов, каждый из которых имеет качественные особенности, не встречающиеся у предыдущих групп объектов. Переходя к новому кругу объектов, мы можем встретиться с противоречиями и вынуждены будем наложить ограничения на логику выводов, в которых раньше не было необходимости. Так, математики XVIII века, оперируя с бесконечными рядами по правилам обыкновенной алгебры, пришли к множеству противоречий, которые они не смогли преодолеть, пока Коши не указал на необходимость теорем существования. В начале XX века оперирование с логическими функциями высших порядков привело к парадоксам и к необходимости наложения ограничений на область определения таких функций. Эти ограничения были сформулированы в виде известных запретов в теории типов и в аксиоматической теории множеств. Мы должны, таким образом, признать, что система критериев строгости исторически обогащается, и что мы не можем претендовать на установление полной системы такого рода критериев, которая не обнаружила бы в дальнейшем своей недостаточности. Это следует из того, что мы не можем заранее описать особенностей всех типов объектов, которыми предстоит заниматься математике в будущем.

Релятивистский тезис относительно строгости доказательства исходит из допущения, что новые, более жесткие критерии строгости могут, в принципе, перевести в класс нестрогих любое доказательство, которое принималось до этого как безусловно строгое. Это допущение, однако, несостоятельно: оно покоится на ложном понимании субординации между строгостью и надежностью в математическом рассуждении.

Как мы уже выяснили, абсолютно надежное доказательство, проведенное на уровне аподиктической очевидности, может быть нестрогим, нуждающимся в более точном выражении своих предпосылок. Доказательство является надежным (завершенным), если все его неявные посылки относятся к сфере аподиктической очевидности. В этом случае контрпример невозможен, хотя доказательство может не обладать полной строгостью. Строгость — это лингвистическая характеристика доказательства, качество терминологической оболочки, санкционирующее надежность доказательства. Но надежность как таковая должна существовать уже до этой санкции как качество, выработанное на уровне содержания.

Можно сформулировать принцип, утверждающий логическую первичность надежности перед строгостью, состоящий в том, что доказательство, признанное надежным, не может быть отвергнуто с точки

зрения каких-либо критериев строгости. Надежность является первичной характеристикой доказательства в том смысле, что надежно доказанная теорема есть факт, с которым должны считаться все критерии строгости, в том числе и те, которые будут введены в будущем. Наглядное рассуждение, сводящее площадь параллелограмма к площади прямоугольника, не строго, но мы отвергли бы любые критерии строгости, которые поставили бы его под сомнение. Надежное доказательство является в принципе строгим в том смысле, что оно будет неизбежно подтверждено в любом более строгом варианте теории.

Переходя к более широкому кругу объектов, мы уточняем критерии строгого рассуждения, прибавляя новые критерии, которые не учитывались раньше. Однако эти новые критерии, будучи необходимыми в новой области объектов, не затрагивают старых объектов, а точнее, они являются всегда тривиально выполнимыми по отношению к ним. Доказательства существования, введенные Коши, были важными для наведения порядка в анализе, но они ничего не изменили в геометрии и алгебре, поскольку в этих областях существование объектов доказывается самим способом их введения, а именно аподиктически очевидной конструкцией в конечном множестве простых объектов. Можно сказать поэтому, что вновь вводимые критерии строгости не имеют обратной силы: они реально значимы лишь для новых областей и всегда вводятся лишь при условии сохранения всех доказательств, признанных надежными.

Отсюда и необычная с точки зрения методологии опытных наук ситуация: не имея полной системы критериев строгости, мы имеем несомненную возможность говорить о полной строгости относительно конкретных математических доказательств и теорий. Появление новых критериев строгости может привести к более точному определению понятий, лежащих в основе доказательства, но оно не может отвергнуть признанное доказательство по существу, в смысле следования определенных выводов из определенных посылок. Строгость анализа доказательства определяется полностью особенностями данной теории, и она абсолютна в том смысле, что не может измениться с появлением новых критериев в новых областях математики. Можно сказать, что математическая строгость определяется локальным и, вследствие этого, абсолютным образом. Доказательство, строгое в рамках арифметической теории, будет всегда оставаться таковым, какие бы новые критерии строгости не появились в будущем.

Высший закон математического мышления состоит в том, что интуиция первична перед языком и достигнутое на уровне аподиктической очевидности не может быть отвергнуто какими-либо уточнениями на уровне языка. Формализация теории вторична по отношению к ее содержанию, ибо она принимается как адекватная только в том случае,

если она охватывает ее интуитивно признанное содержание. Формалистское представление математики имеет смысл, но прояснение природы математического мышления должно исходить из анализа его интуитивной основы, факта его редукции к аподиктической очевидности. Мы должны взять от Канта и Брауэра их предельно ясное понимание первичности содержательной (интуитивной) основы математики перед ее языковым и логическим представлением.

Надежность и строгость — две относительно независимые линии эволюции доказательства к своему совершенству. Обе эти линии совпадают на первом этапе становления доказательства, когда увеличение строгости означает вместе с тем и увеличение его надежности. В общем, однако, это разные линии. Достигнув полной надежности, доказательство продолжает совершенствоваться в строгости, т. е. в своем языке, в полноте и систематичности выражения посылок и логических средств. Стадиями этого совершенствования являются аксиоматизация и формализация теории. При осуществлении аксиоматизации становление строгости в первом смысле (как строгости определенной теории) достигает своего завершения, хотя это не прекращает эволюции математической строгости вообще, заключающейся в появлении новых критериев строгости, значимых для новых областей математики.

Релятивистское истолкование математической строгости не учитывает того простого факта, что содержание в математике первично перед его формой и что новые критерии строгости ни в какой мере не могут влиять на статус сложившихся, интуитивно оправданных теорий и выводов.

6. О достоверности математических доказательств

Разъяснение понятий надежности и строгости доказательства позволяет нам высказать также и некоторые соображения относительно условий его достоверности. Понятие достоверности доказательства, как уже было сказано, приобретает смысл при приложении математической теории к некоторой внешней для нее системе связей, будь это система представлений опытной науки (механика, к примеру) или система отношений другой математической теории (использование алгебры в геометрии и т. п.). Оценка некоторого доказательства как достоверного зависит, очевидно, как от качества самого доказательства, так и от качества интерпретации теории. Надежное доказательство является абсолютно достоверным для любой сферы, для которой понятия математической теории получают несомненно корректную (аподиктически очевидную) интерпретацию. Это значит, что критерий достоверности тот же самый, что и критерий надежности, и сводится к

аподиктической очевидности всех шагов рассуждения. Отсюда ясно также, достоверность математического доказательства, как и его надежность, не нуждается в критериях формальной строгости. В практических приложениях доказательство должно обладать лишь надежностью, т. е. аподиктической очевидностью своих внутренних переходов и однозначностью (аподиктической очевидностью) предметной интерпретации, реализуемой в рамках очевидности структурного тождества. При соблюдении этих условий математическое доказательство применительно к некоторой области приложения обеспечивает заключения на уровне истинности принципов, определяющих эту область.

Проблема достоверности математического доказательства выходит на первый план при решении проблем обоснования математики, где мы должны доказательно рассуждать о свойствах одной математической теории в рамках другой. Для нас важно здесь то положение, что полная достоверность достигается на содержательном уровне, без апелляции к аксиоматическому или формальному построению теории, в которой идет рассуждение. В этом плане получает теоретическое оправдание гильбертовская установка на возможность абсолютно достоверных заключений о непротиворечивости формальной теории в метатеории, имеющей содержательный характер.

В математике в отличие от опытных наук мы достигаем абсолюта в виде некорректируемых доказательств, которые обладают полной надежностью, полной строгостью и полной достоверностью во внешнем применении. Математическое рассуждение, как и всякое другое, не гарантировано от ошибок и заблуждений, но вместе с тем каждая сложившаяся математическая теория формирует неразрушимый центр, который может изменяться в дальнейшем лишь в своем языке и к которому неприложимо требование корректировки или опровержения. Другое положение, вытекающее из изложенного, состоит в том, что завершенность математического доказательства достигается и с полной ясностью фиксируется на содержательном этапе развития теории, независимо от степени ее аксиоматизации и формализации. Мы должны отклонить релятивистскую концепцию доказательства, которая лишает содержательное рассуждение строгости и надежности, полагая, что и то, и другое окончательно устанавливается только посредством его формализованного представления. Абсолютизация формального аспекта доказательства, непонимание строгости содержательного мышления — одно из самых пагубных заблуждений современной философии и методологии математики во многом определившее узость и недостаточность существующих подходов к ее обоснованию.

Глава 3.

Априорность и реальная значимость исходных представлений математики

Основное положение, из которого мы исходили при описании особенностей математического доказательства, состоит в том, что в его основе лежит система некорректируемых очевидностей, которая является глубинной основой исходных математических теорий и операциональной основой математического мышления вообще. Принимая это положение, мы, естественно, приходим к некоторому варианту априористской философии математики.

Математический априоризм диктуется самой практикой математического мышления. Мы все осознаем самоочевидность и некорректируемость утверждений элементарной математики типа: 2 + 2 = 4 и безусловную интерсубъективность и историческую устойчивость признанных доказательств. Практика математического мышления постоянно демонстрирует нам первичность интуитивной основы математического рассуждения перед всяким его лингвистическим оформлением и общезначимый характер этой основы. Это значит, что математический априоризм не может быть отвергнут, он может быть лишь более или менее правильно объяснен с теоретико-познавательных позиций.

Слабость традиционного априоризма состоит прежде всего в неспособности объяснить сам факт априорного знания. В этой главе будет изложена новая концепция априоризма, которая исходит из понимания математических очевидностей как универсальных структур мышления, порожденных его практической ориентацией.

1. Априорность категорий и логики

Понятие практики как фундаментальное для теории познания было выдвинуто в XIX веке двумя выдающимися мыслителями, а именно К. Марксом и Ч.С. Пирсом. Более глубоким и более соответствующим нашей задаче является марксистское понимание практики как предметной преобразовательной деятельности общества в целом.

В марксисткой теории познания подчеркивается, что практика является стимулом познания, основой познания (в смысле наличного материала и средств), а также высшим критерием истинности теорий и

идей. К этим несомненно верным положениям необходимо добавить еще одно, состоящее в том, что практика является нормативной основой познания, т. е. источником универсальных норм, которым подчинено всякое мышление. Это положение важно в том отношении, что оно дает нам возможность понять априорное знание без каких-либо мистических гипотез, исходя только из естественных задач мышления.

Если некоторая развивающаяся и функционирующая система является частью другой более широкой системы, то в своих функциях она неизбежно подчинена целям этой последней системы и общие регулятивы ее развития могут быть поняты только при рассмотрении этого функционального соподчинения. Этот абстрактный системный принцип должен быть руководящим и при нашем подходе к проблемам теории познания. Познавательная деятельность человека — это функциональная часть его практической деятельности, а это значит, что высшие нормы, регулирующие познавательную деятельность, имеют праксеологическую природу и должны быть выведены в конечном итоге из практической функции знания.

Праксеологические нормы мышления зафиксированы прежде всего в категориальных принципах. Всякое знание мы строим как относящееся к объектам, которые находятся в пространстве и времени, обладают определенной структурой, подчинены требованию причинной связи и т. п. Нетрудно понять, что мы имеем здесь дело с общими требованиями к структуре представлений, проистекающими из их практической значимости. Теория, которая не основывалась бы на различении объектов по пространственным и временным характеристикам, не подчинялась бы общим свойствам причинно-следственных связей, не отделяла бы материального от идеального, случайного от необходимого и т. п., не могла бы быть квалифицирована как знание, ибо она заведомо не могла бы быть использована для координации действий в какой-либо сфере опыта. Знание развивается в интенции на практическое использование, оно должно быть соединено с практикой и, вследствие этого, оно принимается в качестве знания только в том случае, если оно выражено в категориях практики. Универсальные онтологические категории и принципы, связанные с ними («причина раньше следствия», «время необратимо» и т. п.) должны быть поняты в этом плане как ограничения на структуру представлений, проистекающие из их практической значимости, из практической ориентации мышления вообще.

Другой нормативной структурой сознания, проистекающей непосредственно из практики, является система логических норм, которой абсолютно подчинено всякое понятийное мышление. Если категории ограничивают содержание представлений, являются системой очевидностей, лежащих в основе определения предмета мышления вообще,

то логические нормы — это ограничения на структуру понятий (значений) и возможные их связи. Между категориальной и логической нормативностью существует параллелизм, состоящий в том, что система логических норм определена системой категориального видения мира и задана ею однозначно. Констатация этого параллелизма лежит в основе кантовского учения о категориях рассудка.

Категориальные и логические представления не являются эмпирическими в собственном смысле слова. Они отличаются от эмпирических представлений прежде всего по объекту отражения: в них фиксируются не какие-либо частные или общие свойства объектов, но сама структура деятельности, ее необходимые онтологические основания. Деятельность всегда связана с объектом, который противостоит субъекту, и этот универсальный момент деятельности мы выражаем в категории материи. Мы можем действовать, только опираясь на органическую связь явлений, при которой появление одних из них с необходимостью влечет появление других, и это необходимо ведет нас к пониманию мира явлений как универсально причинно обусловленного. Деятельность навязывает нам объектную, причинную и временную структуру знания, поскольку знание, не определенное в этих категориях, безразлично для практики и, таким образом, не является знанием вообще.

Категориальные представления *внеэмпиричны*, ибо они обусловлены только универсальными целями знания и, по этой причине, безразличны к конкретному содержанию опыта. Кант безусловно прав в том, что в категориях не содержится ничего эмпирического: система представлений, определяющая синтез понятий вообще, не может зависеть от подразделений, продиктованных содержанием опыта[13].

Категориальные представления *эквифинальны* в том смысле, что любой индивидуальный опыт приводит нас, в конечном итоге, к одной и той же, неизменной и единой для всего человечества, системе категориальных представлений. Глубинные представления о пространстве, времени, причинности одинаковы у всех народов независимо от эпохи и географического положения. Здесь мы можем вспомнить глубокую аналогию Лейбница, в которой универсальные принципы разума отождествляются с прожилками в глыбе мрамора, которая при любых (возможных) ударах распадается по одним и тем же линиям, обнажая предначертанную в ней фигуру Геракла[14]. Существенно различаясь по составу конкретных представлений о мире, все люди едины в категориальных очевидностях, ибо они навязаны не опытом, а исключительно структурой деятельности.

Категориальные представления *самоочевидны*. Мы имеем здесь дело не с эмпирической очевидностью, ограниченной рамками частного

опыта, а с аподиктической очевидностью, которая обусловлена универсальным и нормативным характером этих принципов. Аподиктическая очевидность категориальных и логических представлений проистекает не из опыта и привычки, как это имеет место в случае эмпирических представлений, но из необходимой ориентации мышления на деятельность. Такого рода очевидность внеисторична, ибо она не зависит от развития практики и расширения области исследуемых объектов. Она не подвержена историческому изменению и не может быть скорректирована на основе опыта или посредством какой-либо рациональной критики. Сама аподиктическая очевидность может быть определена, таким образом, как внеэмпирическая очевидность, обусловленная универсальным деятельностным отношением человека к миру.

Система категориальных представлений вневременна в том смысле, что она не изменяется с расширением сферы опыта и области исследуемых объектов. Современный человек склонен думать, что любое суждение, относящееся к сфере знания, может быть рассмотрено критически и изменено в результате этой критики. Это убеждение, однако, не совсем верно. Человек не подвергает сомнению свое собственное существование, факт мышления, существование внешнего мира, пространства, времени и т. п. Внимательное рассмотрение структуры знания приводит нас к выводу, что в действительности человек мыслит на основе аподиктических очевидностей, которые являются предпосылкой всякого акта мышления и которые не могут быть изменены вследствие каких-либо результатов самого мышления. Критический анализ таких суждений, как «Я существую», «Время необратимо», «Всякое явление имеет причину» и т. п., важен для понимания их природы, но этот анализ не может иметь своей целью изменение или опровержение этих утверждений. Эти принципы — не индуктивные обобщения на основе опыта и не выводы теоретической науки, а онтологические представления о реальности, навязанные практической ориентацией мышления. Они обладают высшей достоверностью для сознания и являются его последней и наиболее твердой основой.

Мы должны признать наличие в структуре знания двух принципиально отличных друг от друга систем представлений — эмпирических и категориальных. Разница здесь не количественная: категории не просто более общие или более абстрактные понятия, чем эмпирические, они не просто более универсальны и не просто более очевидны. Система представлений, связанная с категориями и с логикой, лежит принципиально в другом измерении и качественно отличается от системы эмпирических представлений как по генезису, так и по функции.

В категориях мы раскрываем особую реальность, невыразимую в частных понятиях, поскольку все частные представления строятся на

основе категорий. Категории в этом смысле образуют первичную и абсолютно автономную сферу представлений. Мы будем называть эту сферу представлений категориальной онтологией или категориальным видением мира.

2. Априорность исходных представлений математики

Априорность математики нуждается в особом обосновании, даже если наличие априорного знания в виде логики и категорий принято. Здравый человеческий рассудок может примириться с априорностью логических принципов, но законы арифметики являются более содержательными, тесно связанными с операциями опыта и, вследствие этого, мало согласующимися с общей идеей внеопытного знания.

Косвенное соображение в пользу положения об априорности истин элементарной математики проистекает из самоочевидности этих истин. Как уже сказано, априорные истины даны сознанию в особой степени очевидности, которая преобладает над очевидностями, относящимися к содержанию знания. Таковы, к примеру, нормы логического умозаключения. Но в таком случае, сама аподиктическая очевидность может быть использована в качестве критерия априорного знания. Если мы посмотрим на исходные представления арифметики и геометрии, то должны будем признать, что они являются аподиктически очевидными, либо полученными из аподиктически очевидных истин на основе аподиктически очевидных мысленных операций. Пифагорейский тезис, согласно которому ложь не может быть присоединена к утверждениям о числах, понятен современному математику ничуть не в меньшей мере, чем математикам (да и всем людям) во все времена. Элементарные арифметические и геометрические истины даны человеческому сознанию с непреложностью и этот факт заставляет нас признать, что здесь мы имеем дело с представлениями, отличными от представлений опытных наук.

Общее теоретическое обоснование априорности исходных математических идеализаций требует рассмотрения структуры универсальной онтологии. То, что мы называем универсальной, абстрактной или категориальной онтологией, состоит из двух существенно различных частей, которые можно назвать, соответственно, причинной и предметной онтологией. Чтобы действовать, мы нуждаемся в наличии причинных связей. Причинность является, таким образом, универсальным онтологическим основанием деятельности. Система онтологических категорий, включающая категории материи, пространства, времени, причинности, случайности, необходимости, бытия, небытия и т. п.,

является целостной в том смысле, что все эти категории описывают аспекты реальности, определяющие деятельность, а точнее, акт деятельности в его необходимых онтологических предпосылках. Эта часть онтологии может быть названа каузальной или динамической, так как в центре ее находится представление о причинной связи, определяющее практическое отношение человека к миру.

Причинная онтология, однако, не исчерпывает всей сферы универсальных онтологических представлений. Для того чтобы действовать, мы нуждаемся не только в идеальных представлениях о причинных связях, но и в идеальных представлениях о предметах, с которыми мы действуем. Передвигая и вращая предметы, мы должны рассматривать их как те же самые. В процессе действия мы неизбежно опираемся на допущение тождества предметов и их внутренних связей, т. е. на идеальные представления о предметах как удовлетворяющих общим условиям деятельности. Точно так же, как деятельность вырабатывает у нас идеальные представления об универсальности причинной связи, она вырабатывает и представления о мире как совокупности идеальных предметов, которые конечны в пространстве и времени, относительно стабильны в своих формах, отделены друг от друга и т.д. Наряду с каузальной онтологией, которая выражает собой идеальные условия акта действия, мы имеем систему праксеологических идеализаций, которая может быть названа предметной онтологией и которая представляет собой систему идеализированных представлений о предметах, проистекающую из общих условий деятельности.

Адекватное понимание математики как априорного знания достигается при осознании того факта, что в основе исходных математических идеализаций лежат универсальные представления предметной онтологии, выработанные деятельностью. Генетически первичные математические теории, а именно арифметика и евклидова геометрия, исходят из их общезначимых представлений предметной онтологии, выражая собой формальный или формализуемый аспект этой онтологии. Представления, лежащие в основе математических понятий, — не абстракции и не теоретические идеализации, а интуиции, проистекающие из деятельностной ориентации познающего субъекта. Математика с этой точки зрения есть формальная онтология мира, схватывающая универсальные качества его предметной структуры, и она безусловно априорна в том смысле, что ее исходные интуиции не содержат в себе каких-либо эмпирических констатаций.

Обычный довод против априористского истолкования истин арифметики и геометрии исходит из факта их содержательности, приложимости к описанию счета и измерения в мире реальных предметов и свойств. Мы охотно верим, что ребенок усваивает арифметические

истины в опыте, посредством манипулирования камешками и пряниками. Этот ход мысли, однако, не выявляет сути этих истин. Анализ процедур счета и измерения показывает, что они существенно определены представлениями идеальной предметности и имеет смысл только в рамках ограничений, предписываемых предметной онтологией. Как уже сказано, мы не пытаемся определить точное число волн на поверхности воды или число переживаний в нашей душе за определенное время суток. Наша деятельность счета ограничена ситуациями, соответствующими требованиям идеальной предметности и никакая сфера реальных объектов не может изменить этих требований. Арифметика представляет в своей сущности не что иное, как точное описание этих требований, продиктованных универсальной онтологией мышления. Но это означает, что законы арифметики не порождены процедурами счета, и их общезначимость и убедительность для нашего сознания проистекает не из практики счета, а из безусловной самоочевидности предметной онтологии. Ошибка философов-эмпириков состоит в том, что пытаются вывести понятие числа из операции счета, истолковывая сферу приложения арифметики в качестве источника ее истин. Они, как говорил Фреге, смешивают применение математической истины с самой этой истиной[15].

То же самое, очевидно, относится и к процедуре измерения. Эта процедура была бы невозможной без предварительных представлений о количестве и величине, которые априорны и имеют свои истоки в структуре практики, т. е. в деятельностной установке человеческого мышления вообще. Мы должны отбросить идею, согласно которой необходимость измерения участков земли в хозяйственной практике людей была решающим фактором возникновения геометрической науки. Разливы Нила вряд ли сыграли ту роль в появлении геометрии, которую им приписывают эмпирически настроенные историки математики. В действительности, историческое становление первичных математических структур — это прежде всего результат развития самосознания, оформления в понятиях фундаментальных праксеологических интуиций, которые выявляются практической ориентацией мышления вообще и в очень малой степени зависит от возможности их приложения.

Онтологическая основа теории сама по себе не задает однозначно ее исходных определений и окончательное их установление связано с допущениями, не имеющими онтологического оправдания. Представление об абстрактной арифметической единице и о совокупности единиц имеет несомненно онтологическую природу, но при установлении системы операций, задающих математическую структуру, мы можем иметь несколько вариантов, которые не противоречат общему предметному видению. Если мы делаем главным для себя момент

пересчета, связанного с перебором предметов, составляющих совокупность, и отождествляем количество предметов с количеством необходимых операций, то мы приходим к структуре арифметики. Если же мы делаем значимым для себя разделение предметов на тождественные и нетождественные, то мы приходим к операции теоретико-множественного объединения, при которой прибавление предметов, тождественных уже содержащимся во множестве, не изменяет этого множества. Мы можем, таким образом, утверждать, что на одной и той же онтологической основе могут возникать различные операциональные структуры, вследствие различия в интенциональных установках, не предопределенных предметной онтологией. Понимание становления первичных математических структур требует, таким образом, учета двух полюсов, которые выражаются в понятиях онтологии и интенциональности.

3. Онтологическая основа первичной математики

Общие суждения содержат в себе разную степень необходимости. Из суждений «Все лебеди белые», «Все люди смертны» и «Все явления имеют причину» первое суждение обладает только эмпирической, второе — теоретической, третье — категориальной или онтологической необходимостью. Лишь последняя необходимость является подлинной или абсолютной необходимостью. Несомненно, что математические представления относятся к этому последнему уровню необходимости, они обладают той же непреложностью для сознания, что и универсальные категориальные принципы.

Первичные представления математики покоятся на идеализациях, имеющих необходимую значимость для сознания, а именно, на предметной онтологии, порожденной деятельностной ориентацией мышления. Арифметические и геометрические аксиомы могут быть поняты как теоретические экспликации предметной онтологии: они представляют собой формальные структуры, фиксирующие в себе принципы предметной онтологии. Гуссерлевское понимание исходных математических теорий как формальной онтологии и как учения о предметности вообще содержит в себе существенный момент истины[16].

Важно понять, что отношение между исходными математическими теориями и предметной онтологией не является приближенным отражением в смысле эмпирической абстракции или формализации. Арифметика и геометрия, в действительности, являются адекватным и единственно возможным определением предметной онтологии, ибо здесь нельзя говорить о компонентах идеальной предметности, остающихся за пределами их формальной экспликации. Исходные представления арифметики и евклидовой геометрии сами есть подлинное

понятийное выражение универсальной онтологии: они являются одновременно и частью теоретических систем, имеющих специальное назначение, и частью универсальной онтологии, лежащей в основании всякого мышления.

Самоочевидность исходных математических представлений имеет таким образом объективное основание — это признак онтологической значимости этих представлений, принадлежности их к универсальной форме мышления. Представление не может принадлежать к универсальной форме мышления, если оно не обладает особой очевидностью для сознания, способностью преобладать над всеми другими типами очевидности. Первичность категориальной очевидности — фундаментальное условие самого существования знания. Отделение формы мышления от его содержания дано человеческому сознанию с предельной определенностью, на которой основана всякая другая определенность мышления. Аподиктическая очевидность абсолютно критериальна в том смысле, что она лежит в основе всех критериев разделения как внутри содержательного, так и внутри формального знания.

Сказанное обосновывает сформулированный выше критерий завершенности математического доказательства. Сведение доказательства к аподиктически очевидным шагам — это сведение его к утверждениям, освященным принадлежностью к форме мышления, т. е. к предельно надежному основанию мышления. Принятие математическим сообществом некоторого доказательства как завершенного — не акт согласия, обусловленного обстоятельствами психологического или социокультурного значения, а констатация факта на уровне категориальных, а следовательно, внеисторических представлений. Это подтверждается всей историей математики: все доказательства, убедительные для Евклида, являются убедительными и для нас. Понимание истоков математической очевидности дает основание утверждать, что математика имеет единое и вневременное основание надежного рассуждения, ни в какой мере не зависящее от изменений в содержании опытных наук.

Понимание онтологической природы исходных математических представлений дает исчерпывающее объяснение факту их синтетичности. Известные аргументы, которые приводит Кант в защиту этого тезиса, искусственны и уязвимы для критики. Действительно, не просто согласиться с положением, что 5 + 7 не заключают в себе числа 12. Логицисты вполне убедительно опровергали это положение[17]. Арифметика как теория, основанная на определениях, содержит в себе также и аналитические суждения, и строгое отделение одних от других на уровне непосредственной очевидности недостижимо. При обосновании синтетичности математики мы должны исходить не из конкретных примеров, а из обоснования гносеологического статуса математической теории в целом. Арифметика синтетична потому, что она имеет

основу в онтологических представлениях и, следовательно, в какой-то части своих принципов является содержательной и описательной наукой. Мы должны, таким образом, понять исходные математические теории как связанные с определенными представлениями о реальности и как заданные этими представлениями в своей структуре.

Деятельностная трактовка исходных математических представлений позволяет разрешить старый вопрос об отношении геометрии к представлениям механики, который возник в конце XIX века при обсуждении статуса неевклидовых геометрий. Г. Гельмгольц в своей известной статье «О происхождении и значении аксиом геометрии» утверждал, что геометрия не существовала бы вообще, если бы человек не имел общения с твердыми телами и с их измерением. Представления механики или физической геометрии для Гельмгольца безусловно первичны перед теоретической, собственно математической геометрией. Б. Рассел вполне резонно возражал, что само представление о твердом теле уже предполагает идею величины и равенства величин[18]. Эта неясность может быть устранена только на основе представления об идеальной предметности. Геометрия, несомненно, с самого начала основана на представлении об идеально твердом теле, но это не представление, взятое из опыта или заимствованное из представлений механики. Идеально стабильное тело геометрии — это представление универсальной онтологии, на основе которого сформировались как определения самой геометрии, так и первичные идеализации механики. Геометрия — это онтологически истинная система представлений, применимая к классификации и измерению твердых тел, данных в опыте.

Было бы ошибочным, однако, отождествить онтологию математики с ее предметом, родственным предмету физики, химии и других опытных наук. Мы должны здесь учесть формальный характер математического мышления. Математика как формальная дисциплина развивается не через анализ предмета, а только через формальное развертывание исходных интуиций. Геометр, исходя из интуиции пространства, не исследует пространство как предметную реальность: он направляет свои усилия исключительно на создание формальной системы суждений, соответствующей этим интуициям и поддающейся логическому анализу. Будет правильным поэтому говорить, что абстрактная предметная онтология является квазипредметом или интуитивной основой математики. Первичная математика жестко детерминирована предметной онтологией, как и физика она имеет внешнее основание для своих понятий, но как формальная структура она не относится к этому основанию как к предмету, анализ которого мог бы дать контрпримеры для ее утверждений.

Говоря об априорности математики, мы говорим прежде всего о ее исходных принципах и фактах. Онтологическая значимость арифметических аксиом не говорит об онтологической значимости арифметики во всей системе ее внутренних определений и, тем более, это не относится к математике в целом. Математическое знание, как мы можем понять его в настоящее время, разделяется на две части: на знание априорное, онтологически определенное в своих исходных интуициях, и на знание формальное, оправданное только внутренней логикой математики и приложениями. В настоящее время мы не можем говорить об априорности математики вообще, но можем настаивать на том, что математика содержит в себе априорный центр, являющийся основой ее метода и конечной инстанцией ее обоснования.

Математическая теория может появиться на любой содержательной основе в качестве формальной экспликации любой достаточно ясной системы связей. Здесь появляется соблазн понять математическую теорию как результат структурирования опыта и математику в целом — как учение о структурах или образцах, выявляемых на основе опыта[19]. В философском плане такой подход неприемлем, ибо он не вскрывает специфики исходных математических представлений. Мы не поймем сущности математики как науки и особенностей ее метода, если не уясним того обстоятельства, что исходные математические структуры имеют онтологический, а не эмпирический характер, что интуитивную основу математики составляют не чувственные образы и не модели теоретической науки, а универсальные представления о реальности, порожденные деятельностью.

4. Слабость традиционного априоризма

Понятие a priori по отношению к логическим и математическим истинам систематически стал использовать Г.В. Лейбниц. Он полагал, что все математические истины врождены («потенциально находятся в душе человека») и что они аналитичны в том смысле, что их можно свести к системе простых самотождественных утверждений[20]. Подобно Платону Лейбниц верил в то, что принципы математики относятся к подлинной реальности и содержат в себе истины о мире, недоступные для опытного познания.

Теория кантовского априоризма является более развитой в теоретическом отношении. Кант отделил априорность от врожденности и ясно осознал то обстоятельство, что математика в отличие от логики имеет дело с некоторым содержанием, лежащим вне ее, и, таким образом, представляет собой систему синтетического знания. Главное достижение Канта состоит в разделении содержания и формы мышления и в

обосновании того факта, что математическое знание относится к *форме мышления* и обладает принципиально иными характеристиками, чем знание, основанное на опыте. Кант, таким образом, отделил математику от опытных наук как науку о форме мышления. Он отделил ее также и от логики как синтетическое знание от знания аналитического. Математика, по Канту, связана с априорными формами чувственного созерцания: геометрия понимается Кантом как теория, выражающая в своих понятиях априорное представление о пространстве, арифметика аналогичным образом соотносится с представлением о времени.

С точки зрения обоснования математики наиболее важным является то, что наряду с опытом и логикой Кант указал третью интуитивную основу знания — систему априорных представлений, на основе экспликации которых возникает математика. Деятельностная трактовка математики является в своей сути ничем иным как реабилитацией и рационализацией этой установки Канта.

Слабость кантовского априоризма в обосновании математики проистекает из непроясненности истоков априорного знания. Априорное знание понимается Кантом в качестве формы мышления, присущей ему *по его природе*. Форма мышления не врождена, но и не определена чем-либо, лежащим за пределами мышления. Априорное у Канта, таким образом, не имеет никакой генетической или логической детерминации в реальном мире, позволяющей делать о нем теоретически обоснованные суждения. Само его существование как знания, отличного от знания, полученного на основе опыта, остается проблематичным. Оно не определено должным образом также и в смысле своего объема. Общие признаки априорных представлений (такими признаками являются у Канта необходимость и всеобщность) оказываются на практике совершенно недостаточными. Основываясь на этих признаках, Кант включает в сферу априорного знания всю систему аналитических суждений, а также и ньютоновские принципы механики, в которых он усматривает априорные основы теоретического естествознания[21]. Эти примеры уже показывают, что Кант не провел достаточно ясной границы между априорным и апостериорным, которую мы могли бы принять сегодня в качестве обоснованной.

Недостаточность общего гносеологического обоснования идеи априорного знания сказывается и на философии математики Канта. Кант не выделил подлинной категориальной основы математического мышления: простой анализ показывает, что соотнесение арифметики с понятием времени искусственно и не соответствует сути дела[22]. По аналогии с эмпирической чувственностью Кант ограничивает чистую чувственность сферой конкретных образов, создав тем самым существенные затруднения для объяснения абстрактной математики. Кан-

товская теория математики, наконец, должна быть признана ошибочной и в том отношении, что она произвольно ограничивает сферу математического знания, сводя его к онтологически означенным структурам, а именно к арифметике и евклидовой геометрии. Появление неевклидовых геометрий сделало ясным, что математика как теоретическая дисциплина определена более широкой познавательной задачей и не привязана к экспликации представлений, заключенных в универсальной онтологии мышления.

Гуссерль стремится придать понятию априорного знания максимальную объективность, освободив его от элементов антропоморфизма, имеющих место в кантовской теории: Кант, как известно, допускал, что существа иной природы могут иметь другие априорные представления. С точки зрения Гуссерля априорные представления не зависят ни от объекта, ни от субъекта мышления и являются совершенно одинаковыми для любого познающего существа, будь это люди, чудовища или боги[23]. Это несомненно более правильная установка, которая раскрывает истинный статус априорных представлений. В «Идеях к чистой феноменологии и феноменологической философии» Гуссерль предпринимает попытку понять логику становления априорных представлений, которая отсутствует в кантовской теории познания. Гуссерлевское учение об эйдосах при всех его проблемах устраняет кантовский номинализм в философии математики, связывающий априорную чувственность с созерцанием конкретных образов. Теория Гуссерля проясняет роль интенциональных установок сознания в формировании математических структур. Изложенные выше соображения уже показывают, что без учета этого момента становление математических идеализаций не может быть адекватно понято.

Гуссерль, однако, существенно ослабляет установки кантовского априоризма в том смысле, что он допускает эмпирическое опосредование в становления априорных представлений. Вместе с радикальными эмпириками он допускает, что арифметика и геометрия как теоретические науки не могли возникнуть иначе, как на основе счета и измерения. Становление геометрии, по его мнению, было бы невозможно без протогеометрии — грубой эмпирической геометрии, создаваемой в первичных измерениях[24]. Если априорное у Канта независимо от опыта и в генетическом, и в логическом отношении (он допускает здесь только неспецифическое влияние опыта, не определяющее содержания априорного знания), то у Гуссерля априорное знание с самого начала опосредовано миром феноменов, оно предполагает наличие конкретного переживания и является независимым от опыта только логически, в качестве сформировавшейся идеализированной структуры.

Это включение опыта в формирование априорных структур сознания сдвигает феноменологию в сторону эмпиризма и ставит ее перед проблемой объяснения интерсубъективности и стабильности этих структур. Гуссерль пытается объяснить особенности математического знания на основе анализа языка как средства коммуникации и унификации представлений. Этот подход, однако, неадекватен, ибо языковая деятельность уже предполагает наличие общезначимых категориальных представлений. С праксеологической точки зрения основная слабость феноменологии заключена в отказе ее от анализа целевых установок мышления. Универсальность и интерсубъективность априорных форм сознания нельзя обосновать вне телеологии мышления, вне анализа его сущностных задач. Исключив анализ целей мышления как неприемлемую метафизику, Гуссерль вынужден выводить нормы мышления из самого его материала, что неизбежно возвращает его к идее относительности всех принципов. Представление об актах идеации, выявляющих в текучем материале абсолютные и общезначимые формы, выглядит в этом случае либо чистой декларацией, либо антропологической гипотезой, не имеющей рационального обоснования.

Основной недостаток традиционного априоризма — его имманентность, понимание форм мышления как присущих сознанию *по его природе* или как извлекаемых из чистых феноменов сознания посредством активности рефлектирующего эго. Формы мышления, однако, не могут быть обоснованы из самого мышления, без исследования его внешней детерминации, без понимания общей логики субъектно-объектного отношения. Деятельностная теория познания указывает нам на *практику* как на общую задачу мышления и как на естественную предпосылку его высших принципов.

Мы должны решительно отказаться от натуралистических интерпретаций априоризма, предлагаемых современной эволюционной эпистемологией. Эволюционный подход важен для общего понимания истории и методологии математики, но он бесперспективен в своей претензии вскрыть основания универсальных норм мышления. Эволюционная теория познания понимает первичные операциональные структуры математики как отражение и закрепление схем повторяющегося опыта, истолковывая априорные принципы математики как отражение такого рода поведенческих структур[25]. Очевидно, что эволюционная эпистемология пытается реабилитировать априоризм через его сведение к определенной форме эмпиризма и натурализма. Априоризм вообще и математический априоризм, в частности, обосновываются здесь исключительно в рамках опыта, через разделение данных опыта на менее устойчивые и более устойчивые, закрепленные эволюцией. Теряется представление о категориальной природе исходных

математических идеализаций и о действительных основаниях надежности математического мышления.

Трудности традиционного априоризма устраняются в деятельностной теории познания. Природа математики может быть понята только тогда, когда мы установим связь между математической очевидностью и очевидностью фундаментальных структур мышления, т. е. тогда, когда мы в полной мере осознаем онтологические основания математических идеализаций.

5. Реальность математических объектов

Праксеологическое понимание интуитивной основы математического мышления позволяет нам по новому посмотреть на старый спор о реальности математических абстракций: являются ли эти абстракции фикциями, изобретением человеческого ума, либо они содержат в себе некоторое содержание, предопределенное структурой мира, в котором мы существуем. Изложенные соображения дают нам возможность защитить математический реализм и прояснить его действительные основания.

Необходимо разделить методологическое и философское понимание математического реализма. Методологический реализм сводится к утверждению, что в математике в качестве непосредственно истинных могут приниматься не только утверждения о конкретных предметах (числах, фигурах), но и утверждения об абстрактных сущностях, таких, как множество действительных чисел и т. п. Номиналисты полагают, что подлинной надежностью обладают только высказывания о конкретных объектах, таких, как натуральные числа и операции с ними. Этот спор в настоящее время нужно считать законченным: методология математики в достаточной степени прояснила тот факт, что строго номиналистическое построение математики не может быть осуществлено.

Для проблемы обоснования математики более важной является идея метафизического реализма, который стремится найти за математическими абстракциями некоторого рода реальное существование[26]. Праксеологическое понимание математических идеализаций решает этот вопрос в положительном смысле. Конечно нельзя думать, что математическому треугольнику соответствует реальный треугольник, существующий в некотором поднебесном мире, как это думал Платон. Идея субстанциального существования математических объектов неприемлема. Но с другой стороны ясно, что система исходных представлений математики не вымысел, не конвенция и не плод свободного воображения. Система исходных математических идеализаций однозначно определена структурой предметной онтологии, и в этом смысле

она имеет несомненную объективную значимость, прямое отношение к структуре нашего мира. Числа и фигуры — мысленные представления, существующие только в голове математиков и в этом смысле они идеальны. Но они — необходимые представления сознания, мышление без которых также невозможно, как оно невозможно без представлений о причинности и времени. В этом смысле математические объекты — необходимые составляющие деятельностной картины мира и, следовательно, объекты, имеющие реальную значимость.

В своем отношении к миру человек строит два уровня представлений: теоретические представления, систематизирующие данные опыта, и онтологические представления, фиксирующие в себе необходимые условия акта деятельности. Оба этих уровня представлений обладают объективной значимостью, ибо оба они определены и подтверждены практическим отношением человека к миру. И если математическая теория в своих исходных интуициях задана категориальной онтологией, то ей не может быть отказано в статусе реально значимой теории. Соглашаясь с теми, кто говорит, что законы математики — не законы природы, мы тем не менее имеем право настаивать на их связи со структурой реальности, выраженной в категориях. Этот ход мысли приобретает полную ясность, если мы перейдем от Канта, который считал категории только формой мышления, к Гегелю, который считал их также и формами бытия вещей. Праксеологическая теория познания оправдывает позицию Гегеля, указывая тем самым и путь для понимания смысла утверждений о реальности исходных математических идеализаций.

Анализ показывает, что существуют три смысла, в которых мы можем понимать утверждение о реальности (реальной значимости) математического объекта. Во-первых, мы можем говорить о системе первичных математических объектов в целом как однозначно детерминированных системой онтологических представлений. Мы понимаем, что в отличие от героев сказок и мифов эти объекты не являются продуктом свободного установления: они являются необходимыми структурами сознания, а следовательно, и необходимыми структурами реальности.

Во-вторых, мы можем понимать реальность математического объекта также и в смысле его прямого соответствия некоторым аспектам универсальной онтологии. При определении реальной значимости математических объектов в первом смысле мы исходили из факта онтологической детерминации математической теории в целом. Праксеологическая точка зрения, однако, не запрещает установления в отдельных случаях и прямой корреляции отдельных математических объектов с определенными аспектами универсальной онтологии. Рассматривая

понятие материальной точки в механике, мы можем указать на элементы физического опыта, лежащие в основе этой абстракции, такие, как независимость силы действия предмета от его объема и т. п. Аналогичным образом мы можем прояснить понятие числа как отражение отношения единичности и множественности, универсально значимое для всякой деятельности. Понятие числа может быть понято как реально значимое или реальное в том смысле, что оно отражает в себе некоторый важный аспект универсальной онтологии. Хотя возможности реализации такого подхода невелики, они несомненно существуют и соответствуют пониманию исходных математических понятий как обусловленных структурой универсальной онтологии.

Математические объекты реальны также и в том смысле, что в отличие от чистых фикций они обладают обязательной интерпретацией в мире опыта. Как уже было сказано, человеческое познание и сама человеческая деятельность были бы невозможными, если бы эмпирическая реальность радикально расходилась с представлениями, выраженными в онтологии. Мы не можем утверждать в качестве абсолютно истинного суждения, что все явления имеют причину, но само наше существование говорит о том, что достаточное количество явлений подчиняется этому правилу и что категориальные представления, связанные с причинностью, всегда интерпретируемы в мире опыта. Не все реальные совокупности объектов могут быть подведены под понятие числа или под понятие множества, но само наше существование и процесс деятельности доказывают наличие объектов в эмпирическом мире, которые с достаточной точностью воспроизводят основные свойства этих идеальных образов.

Праксеологический априоризм, таким образом, отличается от традиционного тем, что он является одновременно и реализмом. Связывая исходные математические идеализации с универсальной онтологией, праксеологический априоризм оправдывает традиционную веру математиков в реальную значимость математических объектов и теорий. От кантовского априоризма с его абсолютной имманентностью форм мышления мы должны возвратиться к априоризму Лейбница, для которого универсальные принципы мышления выступают одновременно и в качестве основополагающих характеристик реальности. Ясно, что такого рода реализм относится только к генетически исходной группе математических понятий, имеющих онтологическую значимость. К внутренним объектам теории, полученным на основе конструкции, применение понятий априорности и реальности не имеет смысла.

Сказанное позволяет понять рациональный смысл известных высказываний К. Гёделя о реальном статусе математических объектов.

Гёдель, как известно, настаивал на том, что математика имеет дело со специфическими математическими объектами, существующими во внечувственном мире, до и независимо от математических теорий[27]. Он допускал также, что наряду со способностью к чувственному восприятию человек обладает способностью внечувственного восприятия, обеспечивающего ему доступ в мир математических объектов. «Несмотря на свою несхожесть с чувственным восприятием, — писал Гёдель, — мы имеем нечто подобное ему также и для объектов теории множеств, что усматривается в том факте, что аксиомы теории множеств навязаны нам как несомненно истинные»[28].

С онтологической точки зрения идея Гёделя о реальном статусе математических объектов может быть понята как указание на предметную онтологию, существующую *независимо от математики* и определяющую структуру исходных математических понятий. Поскольку предметная онтология является выражением структуры мира, выявляемой деятельностью, то исходные математические идеализации следует считать обусловленными реальностью в той же мере, что и законы физики. Идея Гёделя об аналоге восприятия, раскрывающего мир математических объектов, также имеет смысл. Из самого факта онтологического видения мира следует, что наряду с чувственным восприятием предметов человеческое сознание опирается также и на внечувственное видение мысленных объектов типа пространства, времени, материальной точки и прямой линии. Мы должны признать факт интеллектуальной интуиции, навязывающей нам законы идеальной предметности. Законченный ряд натуральных чисел недопустим эмпирически, но необходим с точки зрения интеллектуальной интуиции. Гёдель безусловно прав в том, что исходные очевидности математики — это не очевидности опыта и не продукт систематизации опыта. Математические предметы могут рассматриваться только как акты мысленного конструирования в рамках фундаментальных очевидностей сознания.

Современные теории математического реализма неудовлетворительны вследствие отсутствия подлинного анализа онтологии математики. Не проясняя связи математических идеализаций с деятельностной онтологией, современный математический реализм сводится либо к обоснованию (абстрактного) объективизма в духе Канта и Гуссерля, либо к попыткам прямого соотнесения математики с физической реальностью того типа, который дается эволюционной эпистемологией. Натуралистические подходы, однако, столь же несостоятельны, как и подходы чисто идеалистические, рассматривающие математические понятия как произвольные конструкции сознания.

Г. Штейнгауз в своей статье о математической строгости защищает два, на первый взгляд, противоречащих друг другу суждения. Он

убежден, что математика никогда не обосновывала своих утверждений на основе опыта, никогда не была «подобием экспериментального естествознания» и что вместе с тем она не шахматная игра, правила которой могут быть изменены по нашему произволу, поскольку ее принципы отражают реальность[29]. Представляется, что главная задача современной философии математики состоит в согласовании этих двух несомненно истинных положений. Мы должны понять, что исходные принципы математики не имеют никакого отношения к опыту и к исторически меняющейся психологии людей, а с другой стороны, они однозначно навязаны нам и, следовательно, имеют прямое отношение к структуре нашего мира. Решение этой проблемы состоит в понимании онтологии как основы математических представлений. Анализ онтологического основания математического мышления оправдывает как априорность, так и реальность математического знания.

Основная проблема современной философии математики состоит в том, чтобы прояснить отношение математических понятий к аспектам реальности, составляющим онтологическое основание математического мышления. Мало кто сомневается, что существует некоторое изначальное видение реальности, определяющее структуру исходных математических представлений. Речь идет здесь лишь об определении истоков и характера этого видения. Мы очертили здесь контуры новой философии математики, основанной на представлении о деятельностной природе исходных математических идеализаций.

Глава 4.

Критика релятивизма

С изложенной точки зрения существование законченных доказательств не подлежит сомнению. Более того, мы имеем основания утверждать, что к этому классу относится подавляющее большинство всех доказательств, принятых математическим сообществом. Этот вывод подтверждается практикой математического мышления и историей математики. Все концепции доказательства, которые ставят под сомнение надежность и строгость математического мышления, с этой точки зрения должны быть признаны несостоятельными.

Критика релятивизма, однако, не будет вполне убедительной без рассмотрения его собственных аргументов. Мы должны представить эти аргументы в систематической форме и найти истоки содержащихся в них заблуждений.

1. Лакатосовский эмпирицизм

Сомнения в строгости математического доказательства (в возможности достижения полной строгости) высказывались в XX веке многими математиками и философами. В большинстве случаев, однако, эти суждения имели абстрактный характер и не подкреплялись систематической аргументацией. В серии статей, появившихся в The British yournal for the philosophy of science в 1960–1963 гг., И. Лакатос, по-видимому, впервые представил эти сомнения в достаточно концептуализированной форме. Аргументы Лакатоса заслуживают подробного рассмотрения, так как до сих пор они остаются основой всей релятивистской критики математики.

Замысел Лакатоса состоял в том, чтобы показать, что математическое доказательство никогда не избавляется от возможности контрпримеров и, таким образом, никогда не становится абсолютно строгим и надежным. Лакатос не разделяет понятий строгости и надежности и говорит только о строгости, понимая под ней отсутствие контрпримеров, т. е. надежность в определенном здесь смысле. Используя конкретный пример, а именно догадку Л. Эйлера о том, что вершины, ребра и грани многогранника всегда связаны соотношением

$V - E + F = 2$, он показывает, как под влиянием контрпримеров математики переходили ко все новым и новым доказательствам этой догадки, не достигая при этом его полного завершения.

С логической точки зрения контрпримеры у Лакатоса разделяются на три типа:

1. *Локальные, но не глобальные.* Такого рода контрпримеры опровергают отдельные утверждения (леммы), используемые в доказательстве, не ставя под сомнение истинность доказываемого утверждения (догадки). Контрпримеры этого типа говорят об ошибочности некоторых предположений, используемых в доказательстве, и являются эвристическими контрпримерами, побуждающими к уточнению доказательства.

2. *Локальные и одновременно глобальные.* Такого рода контрпримеры опровергают как догадку, так и некоторую лемму, используемую при доказательстве. Они не ставят под сомнение правильность догадки, так как подтверждают общее логическое правило, согласно которому контрпример для догадки обязан быть контрпримером по крайней мере для одной из лемм, включенных в доказательство. Однако сам факт появления такого рода контрпримеров, т. е. объектов, интуитивно близких к объектам, о которых идет речь в теореме и все-таки не удовлетворяющих ей, указывает на узость теоремы (догадки), на возможность распространения ее на новые объекты, которые при принятых условиях оказываются за пределами обсуждения. Мы, таким образом, имеем здесь дело с эвристическими контрпримерами, побуждающими к обобщению условий теоремы.

3. *Глобальные, но не локальные.* Это тот случай, когда объект, удовлетворяя всем условиям теоремы и всем промежуточным леммам, не удовлетворяет самой теореме. Такого рода контрпримеры свидетельствуют о неполноте условий, о наличии скрытых предпосылок в рассуждении, т. е. о нестрогости доказательства. Мы имеем здесь дело с логическими контрпримерами, отвергающими доказательство.

Лакатос стремится показать, что эволюция доказательства никогда не доводит его до такой степени совершенства, при которой оно получило бы полную гарантию от контрпримеров, в том числе и от контрпримеров этого последнего типа. Таким образом, Лакатос отрицает идею абсолютной надежности и абсолютной строгости доказательства, т. е. идею завершенного доказательства вообще.

В своей реакции на контрпримеры доказательство, по Лакатосу, проходит несколько стадий. Основные из них следующие:

1. ***Стадия устранения монстров.*** На этой стадии мы избавляемся от контрпримеров, придумывая повод, исключающий его из числа объектов, удовлетворяющих условиям. Мы изобретаем аргументы, показывающие, что предполагаемый контрпример, в действительности,

не является таковым, поскольку он вообще не относится к множеству объектов, о которых идет речь в теореме. Это происходит через уточнение смысла понятий, входящих в формулировку теоремы. Некоторые исторические контрпримеры к теореме Эйлера, как показывает Лакатос, были сняты через уточнение понятия многогранника, которое лишало спорную фигуру права называться многогранником и сохраняло возможность говорить о теореме Эйлера как применимой ко всему множеству многогранников.

2. ***Стадия устранения исключений.*** Это та стадия в доказательстве, на которой мы осознаем, что объекты, к которым относится теорема, являются лишь подклассом некоторого более широкого класса объектов. Мы теперь явным образом ограничиваем условия теоремы, начиная ее с выражений типа: «Все простые многогранники...», «Все выпуклые многогранники...» и т. п. Строгость теоремы зависит теперь от точности ограничивающих условий.

3. ***Стадия анализа доказательства.*** Устранение монстров и устранение исключений могут проходить по Лакатосу без рассмотрения доказательства как такового. Здесь мы находимся на уровне гипотез ad hoc, которые могут быть более или менее удачными, но никогда не могут гарантировать точности условий и полной надежности теоремы. Этот недостаток устраняется по Лакатосу лишь тогда, когда мы от анализа контрпримеров переходим к анализу доказательства с намерением выявить упущения в его логике, ставшие причиной контрпримеров. В процессе анализа доказательства мы либо доказываем вспомогательные леммы, сводя их к тривиальным леммам типа 2 + 2 = 4, либо, если они не поддаются такой редукции, помещаем их в условие теоремы, ограничивая сферу истинности теоремы областью действия этих новых условий.

Вопрос о том, может ли математическое доказательство достигнуть уровня полной строгости или завершенности, сводится теперь к вопросу, можем ли мы на какой-либо стадии анализа доказательства гарантировать отсутствие в доказательстве логических (глобальных, но не локальных) контрпримеров. Ответ Лакатоса состоит в том, что этот идеал в подавляющем числе случаев объективно недостижим. Даже в тех случаях, в которых мы можем предполагать законченность доказательства, мы в принципе не можем выработать исчерпывающих аргументов, обосновывающих этот факт. Наша уверенность здесь при всей ее субъективной ясности обречена на то, чтобы оставаться иррациональной.

Для двух первых способов уточнения доказательства этот вывод Лакатоса представляется достаточно убедительным. Метод устранения

монстров и метод устранения исключений основаны на том, чтобы посредством конечного числа признаков исключить, в принципе, бесконечное многообразие объектов, не удовлетворяющих теореме. Нет никаких гарантий того, что эта задача является выполнимой для всех классов объектов. Во всяком случае ясно, что двигаясь таким образом по линии, так сказать, исчерпывания отрицательной бесконечности, мы не имеем возможности зафиксировать момент завершения процесса, даже если бы этот момент фактически оказался достигнутым.

Лакатос считает, что и метод анализа доказательства, будучи наиболее эффективным с точки зрения устранения контрпримеров, также не гарантирует полного успеха в уточнении доказательства. Тривиальные леммы, к которым сводится рассуждение в этом случае, по мнению Лакатоса, также не обладают полной надежностью. История математики, говорит Лакатос, постоянно демонстрирует нам, что тривиально истинные леммы могут превратиться в тривиально ложные и что леммы, опущенные в доказательствах вследствие их полной очевидности, «могут быть не только неверными, но и несовместимыми»[30]. Уточнение доказательства в стремлении сделать его окончательно строгим представляет собой, по Лакатосу, бесконечный спуск, останавливающийся в данное время на том уровне, где существующие критерии строгости не обнаруживают контрпримеров или логических дефектов. В развитии математических теорий этот спуск проявляется в том, что каждое поколение математиков стремится все более ограничить сферу непосредственных очевидностей, считая необходимым доказать то, что ранее принималось без доказательства. Но прогресс, достигаемый посредством такого увеличения строгости, всегда остается лишь относительным, не устраняющим возможности новых контрпримеров.

Лакатос согласен с тем, что любое реальное доказательство сводится в конечном итоге к последовательности тривиальных переходов, которые мы принимаем только на основе их непосредственной очевидности. Однако он не допускает очевидностей, заслуживающих абсолютного доверия. Он убежден в том, что каждая из этих тривиальных очевидностей может сохранять в себе некоторую некорректность и, таким образом, может стать источником новых контрпримеров.

Строгость доказательства, делает вывод Лакатос, всегда относительна, она зависит от исторически изменяющегося уровня строгости анализа доказательства, т. е. от критериев строгости, которые не остаются неизменными. Мы, считает Лакатос, принимаем теорему в качестве строгой не потому, что она достигла некоторого абсолютного основания и гарантирована от контрпримеров, а потому, что в данный момент она не имеет видимых контрпримеров и видимых логических дефектов с точки зрения принятых критериев строгости. «При

каждой «революции строгости», — пишет Лакатос,— анализ доказательства проникал все глубже в доказательство вплоть до обосновательного слоя, хорошо знакомого основного знания, где верховно правила кристально ясная интуиция, строгость доказательства, а критика изгонялась. Таким образом, различные уровни строгости доказательства отличаются только местом, где должен остановиться критицизм и должно начаться подтверждение. «Достоверность» никогда не может быть достигнута, «основания» никогда не могут быть обоснованы, но «хитрость разума» превращает всякое увеличение строгости в увеличение содержания, в цель математики»[31].

Функция доказательств, по Лакатосу, состоит не в том, чтобы обеспечить безупречный вывод догадки из определенных условий, а в том, чтобы максимально улучшить догадку. Смысл доказывания теорем состоит не в достижении абсолютной строгости, но лишь в постоянном приближении к ней.

2. Критика концепции Лакатоса

Общее направление мысли Лакатоса непосредственно связано с попперовским учением относительно предпосылок человеческого мышления. В «Логике научного исследования» К. Поппер так выражает свою мысль: «В эмпирическом базисе объективной науки нет ничего «абсолютного». Наука не покоится на твердом фундаменте фактов. Жесткая структура ее теории поднимается, так сказать, над болотом. Она подобна зданию, воздвигнутому на сваях. Эти сваи забивают в болото, но не достигают никакого естественного или «донного» основания. Если мы перестаем забивать сваи дальше, то вовсе не потому, что достигли твердой почвы. Мы останавливаемся тогда, когда убеждены, что сваи достаточно прочны и способны, по крайней мере некоторое время, выдерживать тяжесть нашей структуры»[32]. Основная мысль Лакатоса та же самая. Она сводится к тому, что математика не является исключением в ряду теоретических наук, и что ее утверждения, будучи более обоснованными, не являются обоснованными абсолютно, а ее доказательства, будучи более надежными и устойчивыми, чем объяснения в опытных науках, никогда не являются абсолютно надежными и абсолютно устойчивыми.

Изложенный выше подход к пониманию надежности математического доказательства делает логику наших возражений совершенно определенной. С точки зрения праксеологической теории очевидности основная ошибка Лакатоса состоит в том, что он не отделяет ассерторических очевидностей от аподиктических и не осознает особого обосновательного статуса последних. Это убеждение Лакатоса

существенно связано с эмпирическим воззрением на математику, согласно которому математические очевидности в своей основе являются очевидностями эмпирического и индуктивного порядка. Это воззрение, однако, не обосновано, и оно полностью опровергается на основе более глубокого анализа природы первичных математических идеализаций. Если первичные очевидности математики относятся к универсальной форме мышления, то они внеэмпиричны, вневременны и недоступны для корректировки на основе каких-либо контрпримеров. Но это значит, что регресс в посылках не может быть бесконечным. Он неизбежно задерживается на уровне аподиктических очевидностей или посредством однозначно определенных утверждений, принятых в качестве аксиом.

Лакатос смешивает понятия строгости и надежности доказательства, выводя недостижимость надежности из недостижимости окончательной строгости. Ясно, что строгость доказательства может возрастать и после достижения им полной надежности. Аксиоматизация и формализация несомненно увеличивают строгость доказательств, но они никогда не дезавуируют законченных содержательных доказательств в смысле зависимости определенных следствий от определенных посылок. Совершенствование языка и критериев строгости в зрелой теории не опровергает принятых теорем, а ориентируется на них как на свой исходный и абсолютный базис. Бесконечный процесс обновления языка математики и уточнения критериев строгости не означает бесконечной корректировки посылок и бесконечного процесса устранения контрпримеров. Историческое углубление анализа доказательства не может поколебать завершенные доказательства и систему признанных теорем.

Лакатос прав в том, что каждая новая эпоха в математике сужает чисто интуитивный базис математики, заключая в строгие определения те понятия и утверждения, которые использовались раньше на интуитивном уровне. История понятий числа, функции, множества, алгоритма и т. п. хорошо иллюстрирует то положение, что все интуитивное, имплицитное в математике рано или поздно эксплицируется, оформляется в точном языке, задается аксиоматически и формализуется. Но Лакатос, несомненно, ошибается, допуская, что такого рода экспликация очевидностей может поставить под сомнение признанные утверждения теории. Эта идея не находит никакого подтверждения в истории математического мышления и противоречит общей логике соподчинения строгости и надежности в математическом рассуждении. В действительности, новые критерии строгости принимаются только в том случае, если они согласуются с уже признанным содержанием

математики. Анализ доказательства не проникает в сферу сложившегося математического знания, которая представляет, таким образом, систему абсолютных и некорректируемых дедуктивных связей.

Лакатос убежден в том, что математики не имеют и не могут иметь объективных критериев строгости, достаточных для того, чтобы однозначно зафиксировать факт строгого доказательства даже в тех случаях, в которых мы его в действительности достигли. В этом положении Лакатоса есть доля истины, состоящая в том, что не существует полной системы требований и процедур, которая позволяла бы во всех случаях производить проверку доказательства и выносить окончательный вердикт относительно его строгости. Однако позиция, проистекающая из идеи аподиктической очевидности, указывает нам путь к позитивному решению проблемы. Мы можем утверждать, что каждое доказательство неизбежно приходит к стадии завершенности, исключающей контрпримеры, и что мы обладаем объективными критериями этой стадии. Этот критерий состоит, во-первых, в признании доказательства математическим сообществом, а во-вторых, во вхождении его в центр математической теории. С этой точки зрения, доказательства, признанные математическим сообществом и существенно задействованные в теории, следует считать абсолютно завершенными и неуязвимыми для критики. Эти критерии окончательной строгости, не будучи логическими, тем не менее являются общезначимыми и объективными.

Еще одно заблуждение Лакатоса, существенно определяющее его позицию, состоит в неадекватном понимании статуса математических определений. Лакатос убежден (эта идея особенно ясно выражена в последних разделах его книги), что любое определение может быть неявно расширено, и это обстоятельство само по себе может быть источником контрпримеров. Доводы, которые Лакатос приводит здесь, страдают неясностью и оторванностью от практики математического рассуждения. Можем ли мы, к примеру, привести контрпример к теореме Пифагора, расширив понятие прямой? Конечно, при развитой фантазии можно постараться это сделать, приписав прямой, к примеру, некоторые свойства кривой линии, но вряд ли кто будет считать рассуждение, основанное на такой фантазии, рассуждением в рамках геометрии Евклида. Математическое понятие в отличие от понятия эмпирического на определенной стадии зрелости жестко определяется через другие понятия теории и его произвольное расширение (явное или неявное) тем самым совершенно исключается. Мы не можем изменить свойства прямой, не изменив свойств плоскости, точки, треугольника и т.д., т. е. не разрушив системы понятий теории вообще. Зрелая математическая теория не только однозначно определяет

структуру своих доказательств, но и свою собственную структуру, причем таким образом, что исключается всякая возможность переопределения ее основных понятий.

Расширение понятия, чреватое контрпримерами, возможно только на первоначальном уровне его становления, когда оно еще не вошло в жесткую систему принятых определений. Контрпримеры при доказательстве теоремы Эйлера, которые анализирует Лакатос, возникают до тех пор, пока мы рассматриваем многогранник на интуитивном уровне, вне его строгого логического определения, и они немедленно исчезают, как только это понятие редуцируется к адекватной системе понятий, раскрывающей его содержание. Доказательство теоремы Эйлера в рамках современной топологии никем не подвергается сомнению. Диалектика доказательств и опровержений, ярко продемонстрированная Лакатосом в своей книге, безусловно имеет место на этапе становления теорем, но она не может быть отнесена к любой теореме и не может служить основанием для заключения о релятивности математического доказательства вообще. Используя аналогию Поппера, мы можем сказать, что в математике, как и во всякой другой науке, мы начинаем забивать сваи в болото, но в отличие от других наук эти сваи достигают здесь твердого грунта, абсолютного обосновательного слоя, не подверженного изменению. Центр зрелой математической теории является неразрушимым в том смысле, что он не допускает никаких контрпримеров и никаких опровержений. Здесь может обнаружиться недостаток строгости, но никогда не будет места для критики надежности.

Слабость концепции Лакатоса проявляется более всего в том факте, что она противоречит фактам истории математики. Если бы Лакатос был прав, если бы наше бесконечное движение к строгости было действительно связано с постоянной корректировкой тривиальных лемм, то все наши теоремы постоянно распухали бы от добавления все новых и новых ранее упущенных лемм. Ничего подобного в реальной математике не происходит. Замечательный факт, относящийся к существованию математических теорий, состоит в том, что никакие контрпримеры никогда не разрушали их признанных результатов. Контрпримеры в математике всегда возникали только на периферии теории, в точках ее роста и полностью устранялись ее систематическим построением.

Лакатосовская критика математического доказательства должна быть, таким образом, полностью отвергнута. Она является ценной лишь в том отношении, что побуждает более внимательно исследовать *основания* нашей веры в *строгость* математического рассуждения.

3. О китчеровской критике априоризма

Некоторые общие аргументы в защиту математического релятивизма были приведены Ф. Китчером в его книге «Природа математического знания» (1984). Если Лакатос опровергал строгость математического доказательства, исходя из его строения и логики становления, то Китчер нацелен скорее на общее философское оправдание релятивизма: он намерен доказать невозможность какой-либо стоящей альтернативы эмпиризму и релятивизму в философии математики. Особое место он уделяет критике априорного созерцания, которая признается в кантовской философии математики в качестве источника исходных математических представлений.

Кантовская версия априоризма, по мнению Китчера, неявно предполагает разрыв между объектом, созерцаемым in concreto, и понятием объекта вообще, к которому разум восходит, опираясь на это конкретное чувственное представление. Здесь, считает Китчер, возникает проблема отбрасывания несущественных свойств (irrelevance problem): мы должны уяснить критерии, на основе которых случайные свойства исходного созерцаемого объекта отделяются от необходимых. Почему, к примеру, при интуитивном восприятии остроугольного треугольника, мы заключаем, что сумма углов треугольника равна двум прямым, но не заключаем, что все треугольники остроугольны? Для того чтобы преодолеть эту трудность, мы должны, по мнению Китчера, наряду с интуицией объекта как такового допустить интуицию, разделяющую существенное от несущественного в его свойствах, т. е. интуицию более высокого порядка, не допускаемую ни в одной из версий априоризма. Китчер усматривает здесь регресс к бесконечности, которая подрывает идею априорного созерцания в целом. Кантовская версия априоризма порождает, по мнению Китчера, и другую проблему (practical impossibility problem), состоящую в том, чтобы понять, как может быть дано в чистой интуиции то, что не может быть дано в опыте, а следовательно, и в конкретном представлении (к примеру, деление отрезка до бесконечности). Наконец, считает Китчер, здесь неизбежно возникает проблема точности отражения (exactness problem): на каком основании мы можем быть уверены, что в интуитивном видении объекта мы приписываем ему в точности те свойства, которые он в действительности имеет. Речь идет здесь очевидно об адекватности интуитивного видения математических объектов и об устойчивости свойств, фиксируемых в чистом созерцании[33].

Указанные проблемы, по мнению Китчера, непреодолимы для априоризма, а следовательно, обоснование надежности математического доказательства, опирающееся на какую-либо версию априорной интуиции, не может быть удовлетворительным. Соображения, происте-

кающие из анализа априоризма и из реальной практики современной науки, по мнению Китчера, достаточны для того, чтобы считать неразумной саму возможность формировать абсолютную веру на базе какой-либо интуиции. Интуиция, считает Китчер, будь она конструктивистской или платонистской, хорошо или плохо определенной, не может нести той познавательной нагрузки, которую предписывает ей априоризм[34].

Хотя математическая теория и не может быть отвергнута прямым экспериментом, она, по мнению Китчера, подвержена косвенному (теоретическому и социальному) опровержению. Если, к примеру, геометрическая система, не включающая в себя некоторого утверждения евклидовой геометрии, становится более пригодной для теоретического описания реальности, то истинность этого утверждения в определенном смысле ставится под сомнение. С этой точки зрения практика современной математической физики может рассматриваться в качестве дополнительного аргумента против априоризма[35].

Надо признать, что указанные Китчером моменты фиксируют действительные слабости кантовского априоризма. Отвергнув эмпиризм в обосновании математики, Кант сохранил основную конструкцию эмпиризма, оставив конкретный чувственный образ в качестве исходного для всей системы математических представлений. Но тем самым сохраняется проблема становления принципов математики, имеющих универсальное значение, которую эмпирическая теория познания решает на основе понятия абстракции. В этом плане вопросы Китчера законны. Он прав в том, что следуя своей логике, Кант либо должен был приписать сознанию некоторые общие математические представления с самого начала, либо оставить математику на уровне тривиальностей, данных в непосредственном созерцании.

Эти проблемы, однако, устраняются при деятельностной трактовке априоризма. Созерцание конкретного чувственного объекта само по себе, конечно, не дает нам основания отвлекаться от одних его свойств как случайных и удерживать другие как необходимые. Основания для такого отвлечения открываются здесь только на основе опыта и индукции. Однако ситуация меняется при переходе к сфере априорной конкретности. Процесс формирования математических образов определяется здесь не чувственным восприятием конкретного, но операциональной мысленной активностью субъекта в сфере праксеологических идеализаций. Посредством мысленной вариации мы создаем здесь весь ряд допустимых объектов и с самого начала имеем дело не только с данным конкретным треугольником, но и с треугольником вообще, как общим представлением, достигаемым в сфере интеллектуальной

вариации. Доказательство теоремы о сумме углов треугольника является универсальным вследствие того факта, что возможность всех необходимых для этого построений не зависит ни от величины углов, ни от длины сторон треугольника, т. е. оно устойчиво ко всем возможным вариациям этой фигуры. Опираясь на изображение остроугольного треугольника, мы можем доказывать теорему о треугольнике вообще по той причине, что мы доказываем ее, опираясь на те и только на те аспекты представления о треугольнике, которые остаются неизменными в рамках его сущностной вариации[36].

Вторая проблема, которую ставит Китчер, а именно, проблема практической нереализуемости априорных требований к математическим объектам, также связана со спецификой априорного знания. В эмпирической сфере мы можем утверждать лишь то, что обосновано конечным опытом, и должны рассматривать все остальное лишь в качестве более или менее вероятной гипотезы. Эмпирические утверждения не выходят за пределы конечного. Онтологические утверждения, напротив, продиктованы интенциями деятельности, и они органически связаны с идеей бесконечности, ибо всякая человеческая деятельность есть выход за пределы конечного. Возможность бесконечной делимости отрезка есть следствие бесконечности пространства и времени, а эти последние представления — необходимая праксеологическая гипотеза, проистекающая из ориентации нашей деятельности на преодоление конечности. Мы должны понять, что чувственный опыт не определяет истин онтологии. Онтология вместе с зависимыми от нее принципами математики продиктована деятельностью, а именно, универсальными регулятивами деятельности. Постулирование бесконечности — необходимая часть категориальной онтологии, а вследствие этого, и необходимый аспект исходных математических представлений.

Вопрос о точности отражения объекта в понятиях имеет смысл в отношении объектов опыта, допускающих автономное исследование, но он не имеет отношения к объектам априорным. Принципы, продиктованные в аподиктической интуиции, являются исходными принципами мышления и не могут ставиться под сомнение в рамках рационального мышления. Свойства треугольника заданы в сфере аподиктической очевидности, т. е. на предельном уровне точности, доступном для мышления. Вопрос о точности описания свойств объектов, заданных с аподиктической очевидностью, не может быть признан корректным.

Возможное уменьшение веса элементарной математики в будущей физике также не может рассматриваться в качестве веского аргумента против априоризма. Априорность математической теории не означает ее эмпирической универсальности. Уже в дискуссиях о неевклидовых геометриях в конце XIX века было хорошо осознано, что нали-

чие многих геометрий в структуре математики и их широкая применимость в физике не подрывают особого статуса евклидовой геометрии, ее уникального положения как необходимой формы видения реальности. Наличие многих геометрий говорит о том, что не вся математика априорна, но сам по себе этот факт не опровергает тезиса об априорности евклидовой геометрии.

Китчеровскую критику априоризма надо признать последовательной, если встать на почву психологической теории познания, из которой он исходит. С психологической точки зрения нельзя доказать наличие такой сущности, как аподиктическая очевидность, и с этой точки зрения выглядит вполне законным его тезис, что всякая интуиция столь же ограничена и ненадежна, как и сила обычного восприятия[37]. Представляется, однако, что сама идея психологической теории познания является несостоятельной. Любая теория познания прежде всего должна выявить принципы, имеющие интерсубъективное значение, и по этой причине она не может исходить из фактов психологии и их обобщений. Эти факты приобретают гносеологический статус только тогда, когда они санкционируются целевыми установками познания, т. е. тогда, когда они приобретают праксеологическое обоснование. Психологическая теория познания оставляет без объяснения основные факты, связанные с математикой: непреложность исходных математических утверждений и историческую стабильность признанных математических доказательств.

4. Психологический и социокультурный релятивизм

Существуют и другие аргументы против математической строгости, основанные на фактах психологии мышления. В качестве примера можно рассмотреть соображения П.Дж. Девиса, согласно которым никакое математическое рассуждение не может претендовать на окончательную строгость уже по той причине, что человеческая деятельность по узнаванию и воспроизведению символов, с которой связано математическое доказательство, не может быть идеально надежной. Уже арифметика больших чисел, считает Девис, не может вызывать полного доверия. Он пишет: «...Арифметика больших чисел может быть построена только с уменьшающейся надежностью. Как только мы уходим от тривиальных сумм, арифметические операции покрываются туманом неопределенности»[38]. Наша вера в то, что прибавление числа 12345 к числу 54321 дает в результате именно 666666, считает Девис, в значительной степени представляет собой гипотезу, которая может быть опровергнута. По его мнению, современные математические рассуждения, в особенности, когда они в достаточной степени

сложны, переполнены ошибками, которые невозможно устранить. «Таким образом, — пишет он, — будучи далекими от рассуждений, основанных на разуме, или от задачи исчерпывающего понимания, доказательства в книгах по современным разделам математики являются часто только стилизованным менуэтом, который автор вытанцовывает вместе со своим читателем, чтобы достичь определенной социальной цели. То, что начиналось с разума, стало эстетикой и имеет тенденцию превратиться в анастезию»[39]. Девис полагает, что практика математики и понимание ограниченных возможностей человека отклоняют все претензии априоризма и платонизма.

Близкие воззрения на природу доказательства изложены в статье В.А. Успенского «Семь размышлений о философии математики». В отличие от Девиса Успенский делает акцент на социокультурном контексте доказательства: изменчивый характер самых фундаментальных верований, лежащих в основе рационального мышления, исключает, по его мнению, возможность математических рассуждений, имеющих вневременное значение. Успенский исходит из положения, что доказательство — это убедительное рассуждение, убеждающее нас настолько, что с его помощью мы способны убеждать других[40]. Представление о доказательстве при таком его понимании оказывается неразрывно связанным с языковыми средствами и с социальной психологией человеческого общества. Поскольку и то, и другое меняется с ходом истории, то неизбежно меняются и наши оценки, относящиеся к качеству доказательств. «Если математика и абсолютна, — заключает Успенский, — то только на уровне повседневного опыта — точно так же как абсолютна ньютоновская физика применительно к явлениям средних размеров»[41].

Очевидно, что здесь мы приходим к некоторому крайнему релятивизму. Если у Лакатоса доказательства, не будучи идеально надежными, тем не менее, имеют тенденцию к увеличению надежности, то в понимании доказательства, которое мы видим у Девиса и Успенского, такая тенденция исключена.

При психологическом обосновании релятивности доказательства упускается из виду объективная системность математики, тот факт, что неверный результат неизбежно обнаруживает себя в «кроссворде» математической теории, входя в столкновение с другими результатами. Математика очищает себя от ошибок не только через проверку доказательств, но и посредством системности теории. Каждое доказательство может иметь ошибки, но вместе с тем каждое доказательство полностью освобождается от них, включаясь в центр теории и во взаимодействие с другими доказательствами. Если бы действительно математики ошибались в сложении таких чисел как 12345 и 54321, то

тогда мы имели бы удивительное и необъяснимое явление гармонического сочетания многих тысяч ложных утверждений и совокупного соответствия системы этих утверждений практике. Изложенные выше соображения о конечном характере процесса проверки в математике полностью исключают такую возможность.

Наиболее веский аргумент против психологической и социокультурной релятивизации математического доказательства дает сама математическая практика. Математики, в большинстве случаев, конечно, верят в полную надежность и окончательность признанных доказательств: вряд ли кто допускает, что на новом уровне строгости, с точки зрения некоторых новых представлений об убедительности мы объявим в качестве не вполне надежных элементарные законы арифметики, основную теорему алгебры или доказательство того, что аксиома параллельных не выводима из других аксиом евклидовой геометрии. Нет никакого сомнения в том, что В.А. Успенский как логик ни минуты не сомневается в том, что непротиворечивость исчисления высказываний и неполнота арифметики доказаны абсолютно, и что соответствующие теоремы не подлежат пересмотру. Надежность признанных доказательств представляет собой факт, подтверждаемый всей историей математики, и этот факт не может быть поставлен под сомнение на основе абстрактных доводов эмпирической или социокультурной философии науки.

Здесь надо обратить внимание на то обстоятельство, что аргументы от фактических возможностей человека и человечества в целом не имеют прямого отношения к философскому вопросу о надежности математики и к критике априоризма. Тезис, который защищает математический априоризм, состоит не в том, что математики не могут делать ошибок или что эти ошибки не могут быть скрытыми некоторое время, а в том, что в математике в отличие от опытных наук в конечном итоге достигается полная определенность, не подверженная какой-либо ревизии в будущем. При защите априоризма мы можем абстрагироваться от времени и средств, которые требуются для достижения этой определенности в конкретных случаях. То, что обсуждает Девис, — вопрос практики, а не вопрос гносеологического статуса математических утверждений. Вопрос о том, обладаем ли мы способностью не впадать в ошибки в процессе поиска математических доказательств, и вопрос о том, достигаем ли мы завершенности доказательства, — это разные вопросы. Специфика математического мышления состоит в том, что отрицательный ответ на первый вопрос вполне совместим с положительным ответом на второй.

М.А. Розов высказывает идею, что бытие математических объектов может быть понято как бытие элементов нормативных систем, воспро-

изводимых на основе механизма социальной эстафеты, который состоит в подражании образцам мыслительной деятельности. Поскольку образец не определяет однозначно способов своей реализации, то математические структуры, по Розову, в принципе не могут обладать абсолютной стабильностью и однозначностью[42].

Такое понимание статуса математических объектов, конечно, не может быть принято. Оно ошибочно прежде всего потому, что противоречит бесспорному факту, состоящему в наличии единой, общезначимой и устойчивой в своих связях системы математических теорий. Ничто в математике не доказывает многозначности или неопределенности математических понятий. Для объяснения статуса объектов математики необходима не историческая, а функциональная точка зрения, объясняющая априорное знание из самого акта действия. Если бы все человечество потеряло на время память и прервало бы все исторические эстафеты, то, возродившись к жизни, оно бы неизбежно воспроизвело реальную логику, арифметику и абстрактную онтологию в том же самом виде, ибо эти структуры поддерживаются не в силу традиции, но под давлением функции, т. е. из необходимости действовать. Утверждение «2 + 2 = 4» укоренено в нашем сознании не потому, что оно, подобно некоторому обычаю, передается из поколения в поколение, а потому, что оно необходимо функционально. Оно неизбежно воспроизводится в любую эпоху как элемент априорной формы мышления, продиктованной деятельностью.

Релятивизм в современной философии математики проистекает прежде всего из слабости общей теории познания, которая все еще не может преодолеть установок эмпиризма и психологизма. Философ-эмпирицист, видя перед собой вечные истины математики, не пытается объяснить их как факты особой природы, а пытается подчинить их универсальной схеме, нацеленной на объяснение всякого знания на основе опыта. Подобно средневековому схоласту он не объясняет факты, а ведет борьбу с ними. Он пытается доказать, что несмотря на поразительную надежность математические теоремы все-таки не абсолютно надежны и в этом отношении могут быть поставлены рядом с истинами эмпирических наук. Этот устойчивый предрассудок может быть устранен только через восстановление и углубление теории априорного знания.

Наш вывод о завершенности зрелых математических доказательств покоится на двух посылках, обоснованных в рамках праксеологического априоризма, а именно на тезисе о существовании аподиктических очевидностей, неуязвимых для контрпримеров, и на тезисе о конечном характере доказательства как специфической деятельности

в сфере идеальной предметности. Признание этих положений полностью опровергает всякий релятивизм в понимании математического доказательства и математического мышления в целом, ибо отсюда следует, что всякое математическое доказательство в процессе своего совершенствования в течение конечного времени освобождается от всех очевидностей, не имеющих аподиктического характера.

Для построения адекватной философии математики мы должны признать факт особой достоверности математики и оставить попытки отождествления ее с опытными науками. Мы должны признать, что математика покоится на твердом фундаменте аподиктической очевидности, которая является ее генетической основой, ее высшей логикой, основой ее доказательств и, наконец, естественной базой, на которой может быть построено ее обоснование.

Часть II
НАДЕЖНОСТЬ ЛОГИЧЕСКИХ НОРМ

«Принципы логики являются краеугольными камнями, скрепленными в вечный фундамент, доступный человеческрому разуму, но не смещаемый им»

Г.Фреге. «Основные законы арифметики.»

«Логика - своего рода ультрафизика, описание «логического строения» мира, воспринимаемого путем своеобразного ультраопыта...»

Л. Витгенштейн. «Замечания по основаниям математики.»



Глава 1.
Рационализм и эмпиризм в истолковании логики

В предшествующем изложении мы не ставили вопроса о логике, предполагая, что интуитивно ясные и постоянно используемые нормы логики являются абсолютно надежным элементом математического рассуждения. Однако здесь также имеются трудности. Чтобы избавиться от парадоксов, Рассел должен был ввести ограничения на логическую форму определений и тем самым существенно ограничил обыденную интуицию логики, которая не содержит такого рода ограничений. Интуиционистский запрет на использование закона исключенного третьего по отношению к бесконечным множествам также ограничивает обыденную логическую интуицию, которая никогда не ставит под сомнение универсальность этого закона. Предельно ясная логическая аксиома, предполагающая существование определяющей характеристики для каждого интуитивно выделяемого множества, известная под названием аксиомы свертывания, оказалась несовместимой с несомненно истинными утверждениями логики и теории множеств. При наличии этих фактов оправдание логических норм посредством простой ссылки на их интуитивную ясность или широкую употребимость не выглядит достаточно убедительным. Очевидно, что продвижение к обоснованию математики не может избежать стадии методологического сомнения в самой логике обоснования и в логике математического мышления в целом.

Мы будем исходить здесь из понимания логики как системы универсальных норм, порожденных практической ориентацией мышления. Исходные моменты такого понимания были уже намечены выше, при изложении общей концепции праксеологического априоризма. Эта концепция будет представлена здесь в более развернутом виде и с более определенной ориентацией на проблему обоснования математики.

Мы можем говорить о логике, в основном, в трех смыслах: как о системе норм, фактически определяющих мышление (реальная логика), как о системе формальных структур определенного типа (математическая логика) и, наконец, как о теории реальных отношений, выраженных на языке математической логики (логика причинности, логика

времени и т. п.). Проблема обоснования математики требует прежде всего прояснения статуса реальной логики.

1. Теория логики у Аристотеля и Эпиктета

Вопрос о природе логических законов возник вместе с возникновением логики как науки. Аристотель не только выявил элементарные правила построения суждений и умозаключений, но он создал также и первое учение о логике как об особом типе знания. Хотя в общих суждениях о познании Аристотель подчеркивал первичность чувств перед всеми другими познавательными способностями, его высказывания о логике далеки от прямолинейного эмпиризма. Законы логики, по Аристотелю, это общие аксиомы бытия, данные нам с абсолютной достоверностью. Закон непротиворечия, считает Аристотель, является «самым достоверным из всех начал, по отношению к которому невозможно ошибиться». Этот закон — не гипотеза, а абсолютный элемент всякого мышления, «то, что необходимо знать человеку, если он познает хоть что-нибудь»[1].

Законы логики имеют у Аристотеля одновременно и онтологическое, и гносеологическое истолкование. Принцип противоречия он формулирует чаще всего как универсальный закон природы, как тезис, согласно которому невозможно, чтобы одно и то же вместе было и не было присуще одному и тому же в одном и том же смысле. Этот же принцип часто формулируется и как тезис, относящийся к высказываниям: «невозможно, чтобы противоречивые утверждения были истинными по отношению к одному и тому же в одном и том же смысле»[2]. Первичным для Аристотеля является онтологическое толкование: принципы логики — это прежде всего универсальные законы бытия, и именно вследствие этого они являются необходимой основой мышления. Теория логики у Аристотеля построена в целом в соответствии с его общей познавательной установкой, согласно которой разум человека содержит в себе готовые и окончательные формы, которые выявляются опытом и практикой познания.

Попытки доказать законы логики проистекают, по Аристотелю, из невежества, ибо люди не понимают, что всего доказать невозможно. Общие принципы бытия, фиксируемые в законах логики, не подлежат доказательству. Аристотель, однако, допускает возможность строгого опровержения мнений, направленных против этих законов. Мысли, высказанные здесь Аристотелем, нетривиальны и важны для современных дискуссий о природе логики.

Отказ от закона противоречия привел бы, согласно Аристотелю, прежде всего к отказу от определения вещей по их сущности. Если,

говорит Аристотель, «быть человеком» и «не быть человеком» совместимы, тогда понятие «человек» не имеет никакого ограничения и становится неопределенным. Отказ от закона противоречия, считает Аристотель, есть отказ от принципа, согласно которому каждая вещь может быть определена по своим существенным признакам и, таким образом, от определенности мышления вообще.

Отказ от принципа противоречия привел бы к невозможности понимать кого-либо. «Если же все одинаково говорят и неправду и правду, то тому, кто так считает, нельзя будет что-нибудь произнести и сказать, ибо он вместе говорит и да и нет. Но если у него нет никакого мнения, а он только одинаково что-то полагает и не полагает, то какая, в самом деле, разница между ним и ребенком? А особенно это очевидно из того, что на деле подобных взглядов не придерживается никто: ни другие люди, ни те, кто высказывает это положение. Действительно, почему такой человек едет в Мегару, а не остается дома, воображая, что туда едет? И почему он прямо на рассвете не бросается в колодец или в пропасть, если окажется рядом с ними, а совершенно очевидно проявляет осторожность, вовсе не полагая, таким образом, что попасть туда одинаково нехорошо и хорошо? Стало быть ясно, что одно он считает лучшим, а другое не лучшим. Но если так, то ему необходимо признавать одно человеком, другое нечеловеком, одно сладким, другое несладким»[3].

Это последнее соображение Аристотеля заслуживает внимания. Он указывает здесь на то обстоятельство, что даже те, которые на словах отвергают законы логики, на деле признают их или, лучше, принуждены признавать их. К этой мысли Аристотеля непосредственно примыкает более позднее рассуждение Эпиктета, направленное против скептиков. Если бы, говорит Эпиктет, я был слугой господина, который утверждает, что все тождественно, то я бы очень просто заставил его признать, что он ошибается. Попросил бы он масла, а я принес бы ему уксусу. Он бы раскричался, а я бы сказал ему: «Видит бог, нельзя определить разницу между маслом и уксусом». И если бы, говорит Эпиктет, я имел 3–4 рабов, которые были бы заодно со мной, то я бы довел этого господина до сумасшествия или заставил бы отказаться от своей философии[4].

Речь здесь идет не о законе противоречия, а скорее о законе тождества, но общая идея совпадает с аргументом Аристотеля: человек, отвергающий логику, противоречит самому себе, так он вынужден признавать их на деле. Эпиктет говорит об этом следующим образом: «К здравому и очевидному прибегают из необходимости и возражающие против этого. И, пожалуй, самым важным доказательством того, что нечто есть очевидно, можно было бы привести то, что и возражающему против этого оказывается необходимым прибегать к этому»[5].

Таким образом, мы видим, что уже в древности были выдвинуты два принципа оправдания логики как безусловного знания: внутренний — непосредственная очевидность для сознания, и внешний — неизбежность признания в практике. Прогресс последующей философии состоит в том, что в настоящее время мы, как кажется, можем сформулировать эти доводы в более определенной форме и согласовать их друг с другом.

2. Кантовская теория логики

Существенный сдвиг в понимании смысла логики был сделан И. Кантом. Воззрения Канта на логику могут быть сведены к следующим положениям:

1. Логика — это наука о правилах действия рассудка по его форме, независимо от содержания (материи) мышления. Логика может быть уподоблена грамматике, которая исследует формы выражения мысли в языке, независимо от предметов, о которых идет речь.

2. Цель логики состоит в установлении согласия мышления с самим собой. В этом плане система правил логики может быть понята как внешний или формальный критерий истины. Вопросу, согласуется ли знание с предметом, считает Кант, должен предшествовать вопрос, согласуется ли оно по форме с самим собой.

3. Логика не исследует реальный процесс мышления и не связана с психологией в установлении своих законов. В логике, по Канту, вопрос идет не о случайных, а о необходимых правилах, не о том, как мы мыслим, а о том, как мы должны мыслить.

4. Логика не органон знания, не орудие достижения истины, но лишь его канон, способ представления его в понятиях. Органоном логика является столь же мало, как и общая грамматика.

5. Логика — наука a priori. Логика не может брать своих принципов из какой-либо другой науки, она может содержать лишь законы a priori, которые необходимы и которые касаются рассудка вообще. Логика не может обосновываться на основе какой-либо частной науки.

6. Законы логики для мыслящего разума продиктованы как непреложные и аподиктически очевидные. Логика — догматическое наставление a priori, где все усматривается посредством разума без каких-либо наставлений опыта. Логические ошибки, считает Кант, не могут быть глубокими: они неизбежно исчезают при внимательной проверке.

7. Необходимость, лежащая в основе умозаключений, не что иное как априорная необходимость рассудка и разума. Основное правило силлогизма «Все, что принадлежит признаку вещи, принадлежит и самой вещи» выражает общий принцип действия рассудка, заключающийся в подведении явлений под правило. Логическое мышле-

ние само по себе непогрешимо, ошибки возникают лишь вследствие влияния чувственности[6].

Наиболее важным моментом в кантовской трактовке логики является устанавливаемый им параллелизм между логикой и категориями. Каждой категории рассудка соответствует у Канта тип суждения. Первой группе категорий (единство, множество, всеобщность) соответствуют суждения единичные, особенные, всеобщие, категориям реальности, отрицания и ограничения — суждения утвердительные, отрицательные, бесконечные и т.д., для всех групп категорий. Этот параллелизм, для Канта, — не просто заслуживающая внимания симметрия, но соответствие, объясняющее глубинный механизм понятийного мышления. Подведение под категории и образование суждения, т. е. категориальный и логический аспекты мышления выступают у него необходимыми сторонами каждого акта мышления. «Та же самая функция, которая дает единство представлениям в одном суждении, сообщает также единство чистому синтезу различных представлений: это единство, выраженное в общей форме, называется чистым понятием рассудка»[7].

Главная особенность логики Канта — ее абсолютно имманентный характер. Она не зависит у него ни от строения мира, ни от деятельности человека, ни от исторической практики мышления: она представляет собой чистый механизм мышления, обусловленный самим мышлением и действующий единообразно по отношению к любому содержанию знания. Всякий опыт становится, оформляется в рамках логики, но сама логика не является результатом опыта: как универсальная форма мышления она дана мыслящему сознанию a priori и однозначно.

3. Эмпиризм Милля и Спенсера

XIX век, характеризующийся преклонением перед опытным изучением природы, отвернулся от априоризма Канта как от некоторого рода схоластики, пережившей свое время. Нормы логики стали рассматриваться как правила, выработанные в практике самого мышления. Наиболее яркое выражение эта установка нашла в работах Г. Спенсера. «Пока не будет показано, — писал Спенсер в «Основаниях психологии», — что сознание логической необходимости имеет отличное от опытного происхождение, и притом происхождение более высокого характера, мы должны принимать, что сознание логической необходимости есть такой же продукт опытов, как и сознание всякой другой необходимости»[8].

Логика, согласно Спенсеру, относится к объективным наукам. Законы логики выражают прежде всего необходимые зависимости между вещами. Силлогизм, по Спенсеру, отражает зависимости между предметами. Если же законы логики выражают зависимости между

мыслями, то лишь постольку, поскольку эти зависимости сформированы соответственно зависимостям между вещами.

Спенсер хорошо осознавал основную трудность такого понимания логики. Законы логики, в отличие от законов, изучаемых опытными науками, даны нашему сознанию с абсолютной непреложностью и несовместимы с идеей опытной корректировки. Для объяснения этого факта Спенсер обращается к эволюционным идеям. Необходимо различать, считает Спенсер, опыт отдельного индивида и опыт рода. Наиболее часто повторяющиеся представления закрепляются и становятся принадлежностью рода, необходимой предпосылкой его мышления. «Я смотрю на данные мыслительности как на данные a priori для индивида и как на данные a aposteriori для всего того рода индивидов, в котором он составляет последнее звено»[9]. Непреложность законов логики, таким образом, объясняется у Спенсера, их связью с аспектами реальности, которые важны для эволюции и прочно закреплены эволюцией в родовом сознании.

Родовые истины, по Спенсеру, связаны с особой интуицией, с психологической невозможностью мыслить иначе. Особенность логики и математики состоит в том, что они обосновываются не в опыте, а только на основе такого рода интуиции. «Мы не можем указать никакого другого ручательства за истинность логических интуиций, кроме того, на которое опираются все интуиции, принимаемые за достоверные, а именно кроме невозможности мыслить их иначе»[10].

Будучи последовательным в эмпирическом понимании познания, Спенсер не придает своему критерию абсолютного значения. Он считает, что критерий «немыслимости иного» — наивысший критерий опытного подтверждения и истинности, но не критерий, обеспечивающий абсолютную истинность. Опыт показывает, что всякое познание относительно, и вещи, которые когда-то были немыслимыми для человечества, оказались существующими. Применительно к логике это значит, что правила, определяющие наши умозаключения, не абсолютны и не исключают ошибки. Логический вывод предельно надежен, но не абсолютно надежен. Логическое умозаключение имеет тенденцию к деградации с увеличением числа его шагов.

Итак, мы видим, что Спенсер стремится обосновать надежность логики, оставаясь на позициях последовательного натурализма. Кантовское априорное превращается у него в исторически приобретенное, конечно, теряя при этом свою абсолютность. Логика очень надежна, но не абсолютно надежна, поскольку силлогизм только продукт систематизации опыта. Она почти закончена в своих схемах, но не совсем закончена, поскольку человеческий опыт продолжается.

Близкую концепцию логики мы видим у Милля в его «Системе логики». Милль, однако, выводит логику не из законов природы, а из

законов мышления. Законы логики для него просто технические правила мышления, базирующиеся на законах психологии. Логика, считает Милль, должна получить окончательное оправдание в несомненных фактах психической жизни. Закон противоречия представляет, по Миллю, одно из самых ранних обобщений опыта. «Первоначальным основанием его (закона противоречия — *В.П.*), — пишет Милль, — я считаю тот факт, что уверенность и отрицание суть два различных духовных состояния, исключающих одно другое; это мы знаем по самому простому наблюдению над нашим собственным духом. Если мы будем наблюдать внешние явления, то мы также найдем, что свет и тьма, звук и тишина, движение и покой, равенство и неравенство, предыдущее и последующее, последовательность и одновременность и, вообще, всякое положительное и соответствующее ему отрицательное явление представляют собой факты различные, стоящие в резкой противоположности друг с другом: одного из них всегда не бывает налицо, раз присутствует другой. Обобщением всех этих фактов я и считаю аксиому, о которой идет речь»[11].

Более глубокое отличие Милля от Спенсера состоит в том, что логическая необходимость у него существенно базируется на конвенциях. Аксиома силлогизма для него — не индуктивное обобщение опыта, а просто определение понятия класса, согласованное с фактическим употреблением соответствующего представления в языке. В этом же духе он истолковывает и внутреннюю необходимость общих принципов логики. «Утвердительное и соответствующее ему отрицательное суждение суть не два независимых утверждения, связанные друг с другом только своею взаимной несовместимостью. Тот факт, что если отрицательное утверждение истинно, то утвердительное должно быть ложно, — это действительно только тождественное предложение выражает только ложность утвердительного и не имеет никакого другого смысла и значения. Поэтому «начало противоречия» следовало бы лишить той торжественной формулировки, которая придает ему вид основной противоположности, проникающий всю природу. Его следовало бы выразить в более простой формуле: «Одно и то же предложение не может быть в одно и то же время и истинным и ложным»[12]. Истинность принципов логики, таким образом, обусловлена значением терминов, содержащихся в их формулировке.

Милль — сторонник эмпирического обоснования логики в том смысле, что он отвергает идею априорности в любой ее форме. Однако идея конвенции, существенно внедренная в его теорию, отделяет его от тех эмпириков, которые хотели увидеть в законах логики прямое отражение опыта. Логическая необходимость основана у него на соглашениях, хотя эти соглашения не произвольны, а определены фактами психической жизни.

4. Априоризм Гуссерля

Новый поворот к рационалистическому истолкованию логики был сделан Э. Гуссерлем в «Логических исследованиях» (1901). Основное направление рассуждений Гуссерля — критика психологизма в обосновании логических норм. Психология как эмпирическая наука, как наука, имеющая в своей основе приближенные законы, считает Гуссерль, в принципе не может быть основанием для идеально точных законов, какими являются законы логики. Другое возражение, которое выдвигает Гуссерль против психологизма, исходит из факта аподиктической очевидности логических принципов. «...Нам убедительно ясна, — говорит Гуссерль, — не простая вероятность, а истинность логических законов. ...Против самой истины, воспринимаемой нами с внутренней убедительностью, бессильна и самая сильная психологическая аргументация: вероятность не может спорить против истины, предположение против очевидности. Пусть тот, кто остается в сфере общих соображений, поддается обманчивой убедительности психологических аргументов, достаточно бросить взгляд на какой-либо из законов логики, обратить внимание на настоящий его смысл и на внутреннюю убедительность, с которой воспринимается его истинность, что бы положить конец этому заблуждению»[13].

Теория логики Канта, по мнению Гуссерля, не свободна от антропоморфизма. Освобождая априорное знание от эмпирического и психологического в личностном плане, Кант сохраняет в нем некоторую связь с природой человека вообще как представителя определенного рода живых существ, он, в принципе, допускает возможность иных форм восприятия пространства и времени у существ другой природы. Априорное у Гуссерля абсолютно в том смысле, что оно не зависит от субъекта мышления ни в личностном, ни в родовом плане: оно определяется только самим познавательным отношением и не допускает каких-либо вариаций при переходе от одного типа мыслящих существ к другим. Система законов логики, по Гуссерлю, едина для любого мышления, будь то мышление людей, богов, чудовищ или ангелов[14]. Идея априорного знания как знания логически независимого от субъекта доводится у Гуссерля до своего предела.

Позитивная концепция логики Гуссерля основана на различении между эмпирическими и эйдетическими феноменами сознания и на соответствующем различении фактологических и эйдетических наук. Эмпирическая теория познания стремилась обосновать все типы понятий и все его структуры, исходя исключительно из непосредственной данности опыта, из непосредственного чувственного восприятия мира. Гуссерль расширяет эту систему непосредственно данного. По его мнению, существуют два уровня непосредственной данности: уро-

вень опыта и уровень эйдосов, родов бытия, схватываемый в сущностной (эйдетической) интуиции. Фиксируя непосредственные данности опыта, человек не ставит вопроса об их обосновании: теоретическое мышление не может претендовать на опровержение или корректировку опыта, так как он дан в этот момент нашему сознанию. Аподиктически очевидные связи на уровне эйдосов, по Гуссерлю, столь же непосредственно даны сознанию и должны приниматься как столь же непреложная данность. Феноменология, считает Гуссерль, является истинным позитивизмом, преодолевающим ограниченность традиционного, радикально эмпирического позитивизма.

Содержание логики как науки проистекает из эйдетической интуиции истины. Мы можем иметь смутное представление об истинности конкретных суждений, касающихся положения дел в мире, но мы имеем ясное представление об истинах, касающихся самой истины. Логика, по Гуссерлю, одна из эйдетических наук, а именно формальная эйдетическая наука, фиксирующая аподиктически очевидные связи, относящиеся к эйдосу истины. «...Основные логические истины выражают не что иное, как известные истины, коренящиеся в самом смысле (содержании) известных понятий, как то: понятие истины, ложности, суждения (положения) и т. п.»[15]. Логика аналитична, поскольку она не выходит за рамки разъяснения указанных сущностных понятий.

Логик говорит не о реальном психологическом механизме мышления, а о его идеальной структуре, соответствующей понятию истины. Формулируя принцип непротиворечия, мы не утверждаем, что наше реальное мышление протекает в соответствии с этим законом (люди достаточно часто мыслят противоречиво), мы утверждаем лишь то, что идеальное понятие истины запрещает нам считать противоречащие суждения об одном предмете в качестве истинных[16]. Ясно, что этот идеальный запрет должен быть нормой для всякого знания, если это действительное знание, имеющее своей целью достижение истины.

Гуссерль отвергает идею логики как нормативной науки, которая выдвигалась Зигвартом и рядом других его современников. Нормативная наука формирует оценочные утверждения, исходя из некоторых ценностей высшего порядка и из целевой установки, относящейся к определенному знанию. Такова, к примеру, этика, которая, исходя из категорического императива или из каких-либо иного принципа, пытается найти подход к нравственной оценке конкретных жизненных ситуаций. Гуссерль считает, что логика не является сущностно нормативной наукой, ибо она не подчинена какой-либо высшей цели, объединяющей все ее принципы. Логику следует понимать прежде всего как идеально теоретическую науку, которая описывает отношения в идеальном царстве значений. Нормативная функция логики, по Гуссерлю, вторична. В этом отношении она тождественна арифметике, которая прежде

всего описывает связи чисел в их отвлеченной идеальности, и только потом использует их в качестве правил счета. «Основные положения логики сами по себе не суть нормы, а только действуют как нормы»[17].

В «Логических исследованиях» идея обоснования логики сводится у Гуссерля к уяснению факта ее априорности и аподиктической очевидности. «...Все «чисто логические» законы истинны a priori. Они обосновываются и оправдываются не через индукцию, а через аподиктическую очевидность»[18].

В «Идеях к чистой феноменологии и феноменологической философии» (1913) Гуссерль подходит к определению логики через разделение универсальной и региональной онтологии. Существуют регионы знания, характеризующиеся специфическими типами предметности и существуют региональные онтологии — сущностные (эйдетические и априорные) принципы, относящиеся к этим регионам. Евклидова геометрия является региональной онтологией физики, фиксирующей в себе сущностные характеристики материальной предметности. Каждая предметная область, по Гуссерлю, явно или скрыто опирается на сущностные (априорные) представления, определяющие особенности ее предмета. Выявление и классификация региональных онтологий является одной из задач феноменологического анализа.

В отличие от геометрии логика и арифметика представляют собой универсальную онтологию, фиксирующую принципы предметности вообще, независимые от их региональных особенностей. Формальная логика возможна потому, что она абстрагируется от «материи» логического познания и мыслит в себе таковую в неопределенно свободно вариативной всеобщности (в качестве «чего-нибудь»)[19]. Логика и арифметика, таким образом, отделяются от других априорных принципов, которые так или иначе связаны со специфической (региональной) предметностью.

В работе «Суждение и опыт. Введение в генеалогию логики» Гуссерль ставит важную проблему генезиса (конституирования) логических принципов в процессе познания. Основные идеи логики (представление о различии, тождестве, отрицании, части и целом и т.д.) порождаются, по Гуссерлю, в сфере изначального (допредикативного) опыта и доводятся до общезначимых и универсальных представлений посредством механизма эйдетической редукции и вариации[20]. Генезис высших принципов познания оказывается связанным у Гуссерля с его самой низшей ступенью, а именно, со сферой непосредственного переживания (чувственного восприятия, воспоминания и фантазии). Гуссерль, таким образом, отрицает генетическую независимость логики от опыта, которая представляет собой существенный момент кантовского ее понимания.

Необходимая генетическая связь всей сферы априорного знания со сферой непосредственных переживаний — основная особенность гуссерлевского априоризма, которая делает проблематичным само отнесение философии Гуссерля к традиции априоризма. Кант не ставил и не мог поставить вопроса о том, какой аспект опыта фиксируется в понятиях пространства, времени или в принципах логики, ибо априорное знание для него трансцендентально, оно по своей сути — структура разума, определенная самим разумом: оно может лишь выявляться под воздействием опыта, но ни в каком отношении не определяется им. Ядро феноменологического анализа состоит в попытке понять априорные структуры сознания в логике их становления, через выяснение необходимой схемы их конституирования на основе первичного опыта и внутренних модификаций сознания.

Критическая значимость концепции Гуссерля бесспорна. Он, несомненно, показал слабость психологического понимания и обоснования логики. Однако его позитивная программа не выглядит достаточно определенной и пригодной для убедительного разрешения трудностей. Гуссерль убежден, что исходя из переживаний как непосредственной самоочевидной данности, человеческое сознание способно посредством некоторых мысленных процедур (сущностной интуиции, идеации, эйдетической вариации и т. п.) привести индивида к знанию непсихологическому и некорректируемому в сфере опыта. Он, таким образом, постулирует наличие в человеческом сознании познавательных механизмов, которые основываясь на опыте, способны выводить нас за его пределы, приводить к вечным содержательным истинам и абсолютным нормам, высвечивать в относительном и текущем абсолютное и неизменное. Неясное сводится к еще более неясному: абсолютность логики — к сущностной интуиции сознания, способной усматривать абсолютное.

Другой недостаток концепции Гуссерля, относящийся непосредственно к логике, состоит в некритическом объединении ее с арифметикой и теорией множеств в рамках универсальной математики (mathesis universalis). Эти три дисциплины образуют у него сферу формальной онтологии как теории, нацеленной на прояснение предметности вообще. Нетрудно, однако, видеть искусственность этого объединения. Если предметом логики являются значения и их связи, то предметом арифметики и теории множеств — некоторые более специфические конструкции, явно не имеющие характера необходимости для всякого акта мышления. С методологической точки зрения гуссерлевская концепция логики недостаточна в том смысле, что она не содержит в себе обоснованных критериальных принципов. Поскольку она не раскрывает механизма сущностной интуиции и не очерчивает области идеальных законов, то она очень мало может нам помочь в

отделении надежной логики от логики сомнительной. Но именно этот момент нам важен для выбора оснований математической теории.

5. Операционализм Пиаже

В 50-х годах XX века Ж. Пиаже разработал теорию логики, которая восстанавливает права опыта в развитии и обосновании логических норм. Пиаже считает возможным отказаться от априоризма, не впадая при этом в релятивизм, проистекающий из прямолинейного эмпирического объяснения логики. Логика, по мнению Пиаже, как и всякая другая понятийная система, предполагает опыт, но это опыт, имеющий особое содержание. В процессе контакта с окружающим миром человек, по Пиаже, приобретает опыт двоякого рода. «Если все знания ребенка, — пишет он, — предполагают эксперимент для своего возникновения, то это психологическое утверждение не оправдывает эмпиризма, потому что существует две формы эксперимента: эксперимент физический, ведущий к абстракции свойств, взятых от своих предметов, и эксперимент логико-математический с абстракцией по отношению к действиям или операциям, осуществляемым над предметам, а не по отношению к самому предмету как он есть»[21]. Когда ребенок сравнивает камешки друг с другом по качеству, цвету и т. п., то он находится в сфере собственно физического или конфигуративного опыта. Когда же ребенок считает камешки, то он отвлекается от всех их физических качеств: он имеет дело с ними как с тождественными единицами, которые различаются лишь порядком, в котором они фигурируют как объекты операций. Абстракция числа, таким образом, не физическая абстракция, но абстракция процедуры, абстракция действия, рефлективное понятие, отражающее структуру специфического человеческого поведения, процедуру упорядочения. Мы должны различать, таким образом, физический (конфигуративный) и логико-математический опыт и, соответственно, физические (простые) и логико-математические (рефлективные) абстракции. Недостаток традиционного эмпиризма в обосновании математики и логики состоит, по Пиаже, в отождествлении этих двух уровней опыта и в несостоятельных попытках вывести логические и математические операции из представлений физического опыта. Априоризм, напротив, мистифицирует статус законов логики, объявляя их внеопытными и не подверженными влиянию опыта.

Внутренние, психологические операции представляют, по Пиаже, интериоризацию внешних, материальных операций. Они представляют собой действия, «которые прежде, чем выполняться на символах, выполнялись на объектах»[22]. Логика же как система символических операций является отражением более высокого порядка, а именно, она

является идеализированным отражением структуры внутренних психологических операций. Логика, таким образом, не может считаться априорной наукой, ибо в ее основе лежит вполне определенное содержание, а именно, — схемы мысленных операций, продиктованные структурой приспособительных действий человека в предметном мире.

Эта установка Пиаже очевидным образом сталкивается с аргументом Гуссерля, согласно которому точные правила логики не могут базироваться на нестрогих принципах психологии. Пиаже устраняет эту трудность через понимание логики как теоретической системы. Логические нормы формируются, по его мнению, не как простые описания или индуктивные обобщения психических операций, а лишь как формальные и идеализированные схемы этих операций: соотношение здесь такое же как между физикой и математической физикой или между реальной геометрией, основанной на опыте, и математической геометрией, заданной посредством системы аксиом. Геометрия реального пространства, взятая непосредственно из измерений, всегда будет неточной и нестрогой, но это не относится к математической геометрии как к идеализированной системе, заданной на основе аксиом. «Логика, — пишет Пиаже, — это аксиоматика разума, по отношению к которой психология интеллекта — соответствующая экспериментальная наука»[23]. Идеальная модель не вполне соответствует системе реальных отношений и наоборот, но тем не менее оправдание структуры идеальной модели может быть найдено только через указание на определенную структуру реальных отношений.

Исходя из этих соображений, Пиаже приходит к выводу, что законы логики должны быть обоснованы в конечном итоге в рамках психологии мышления. «Каноны формальных логических операций, — пишет он, — должны быть установлены и оправданы в психологии интеллекта»[24].

Очевидно, что теория Пиаже достаточно близка к теории Милля. И в том, и в другом случае логика выводится из реального процесса мышления. Существенное отличие состоит в том, что в основе логических норм у Пиаже лежат не абстрактные состояния сознания, а операции мышления, т. е. некоторый более конкретный и более определенный аспект психической жизни. Выявляя предметные операции как первичный источник логики, Пиаже делает становление логических норм предметом точного экспериментального исследования. Пиаже полагает, что его концепция логики, которую он называет операционализмом, позволяет примирить традиционную тяжбу эмпиризма и рационализма в истории логики, установить действительную связь между психологией и логикой и дать реальное обоснование природы логических норм.

Теория логики Пиаже выглядит более естественной и более приемлемой с точки зрения здравого смысла, чем априоризм Гуссерля,

основанный на таинственном механизме «схватывания сущности». Однако в теоретическом отношении, в плане прояснения статуса логических норм, она также не обеспечивает сколько-нибудь существенного прогресса. Пиаже сводит логические нормы с небес априорности и придает им статус теоретических идеализаций. Но, тем самым, он становится уязвимым для всех традиционных аргументов, выдвинутых против эмпирического обоснования логики. Сравнение логики с математической физикой и с геометрией не устраняет трудностей. Конечно, геометрия как математическая теория не опровергается в опыте в смысле исправления отдельных теорем или аксиом. Но как средство описания эмпирических моделей евклидова геометрия часто обнаруживает свою недостаточность и дополняется другими геометриями. Допускает ли Пиаже, прибегая к сравнению логики и геометрии, что углубление операционального опыта может привести к созданию других логик, отличных от общепринятой? Положительный ответ на этот вопрос ведет к признанию относительности логических норм, отрицательный же — неприемлем для Пиаже, поскольку вся его теория направлена против априористских претензий логики. Таким образом, нужно признать, что фундаментальная проблема абсолютности-относительности логических норм в теории Пиаже остается открытой.

Оправдывая принятие закона противоречия в логике, Пиаже пишет: «Понятие является ни чем иным как схемой действия или операции, и только выполняя действия, порождающие A и B, мы можем констатировать совместимы они или нет. Далекие от того, чтобы «применять принцип», эти действия организуются согласно внутренним условиям связи между ними, и именно структура этой организации составляет реальное мышление и соответствует тому, что в аксиоматическом плане принято называть принципом противоречия»[25]. Нетрудно видеть, что такое объяснение закона противоречия фактически повторяет миллевское его объяснение с той лишь разницей, что несовместимость переживаний заменяется несовместимостью действий. Но в таком случае этот закон превращается в чисто индуктивное обобщение, хотя и высокой степени надежности и, таким образом, теряет свою абсолютную значимость.

Концепция Пиаже страдает также абстрактностью, оторванностью от методологических проблем науки, связанных с логикой. Делая классическое исчисление высказываний идеалом законченной логической системы, Пиаже принимает и закон исключенного третьего как столь же надежный, что и другие законы логики, не предпринимая, однако, никакой попытки ответить на известные возражения против этого закона, выдвинутые интуиционизмом. Здесь мы имеем дело, конечно, не со случайным упущением и не с ограниченностью эрудиции автора,

а с явной недостаточностью концепции в целом для решения такого рода спорных методологических вопросов.

6. Философия логики Куайна

В. Куайн стремится понять логику в рамках грамматики, на основе понятия о грамматической структуре предложений. В основе его теории логики лежит понятие логической истины, которое определяется через понятие грамматической структуры предложения и через понятие выполнимости. Предложение, согласно Куайну, следует считать логически истинным, если все предложения, имеющие ту же грамматическую структуру, являются истинными[26]. Истины логики — это, таким образом, истины, сохраняющиеся при всех изменениях высказывания, не нарушающих его структуры.

Задача логики состоит в исследовании связи предложений по истинности. Практика мышления заставляет нас комбинировать из простых предложений более сложные или раскладывать сложные предложения на простые. Логика, по Куайну, призвана гарантировать адекватность этих процедур, составляющих сущность научного и обыденного мышления. Логика занимается не установлением того, на каких объектах выполняются простые предложения, а лишь определяет, исходя из условного допущения их истинности, какие из составных утверждений будут истинными. Логика исследует эти связи и в обратном направлении: зная, что данное составное предложение истинно, она пытается установить, какие альтернативы в смысле истинности имеются для составляющих его простых предложений.

Понятие логики у Куайна, таким образом, исходит из понятий грамматики. Он отделяет, однако, свою концепцию логики от чисто грамматического подхода Карнапа, который считал возможным определить логические истины только на основе структуры языка, вне отношения к предметной истинности. В основе определения логической истины, считает Куайн, должны лежать две вещи, а именно *грамматика*, которая есть часть лингвистики, и *истина*, не принадлежащая к лингвистике[27].

Система логических истин, по Куайну, существует независимо от математики. Эта независимость проявляется прежде всего в том, что логическая истинность может быть определена без привлечения каких-либо математических понятий. В формальном плане логические исчисления отличаются от математических теорий тем, что в них выполняется процедура разрешимости, которая отсутствует в математических теориях. Логика несравненно беднее математики по содержанию своих понятий и, как таковая, в принципе не может быть достаточной

базой обоснования математики. Построения Фреге и Рассела, редуцирующие математические теории к логике, были основаны на неявном расширении логики за счет утверждений, не принадлежащих к ней.

Логика не является эмпирической наукой, ибо она не корректируется в зависимости от фактов, данных в опыте. Куайн считает, однако, что абсолютное противопоставление логики опытным наукам не является законным. Все типы знания, по его мнению, следует рассматривать лишь как более или менее удаленные от опыта и включенные в единую систему, нацеленную на объяснение опыта. Логика и математика, с этой точки зрения, также имеют эмпирическое подтверждение и косвенное оправдание на основе опыта. Исходя из этого взгляда, Куайн не исключает возможности изменения некоторых принципов логики под влиянием изменений в содержании знания. Идея особой логики квантовой механики не представляется ему заведомо абсурдной[28].

Ясно, что для Куайна нет проблемы обоснования надежности логики в том смысле, в каком она стояла для Фреге или для Гуссерля. Если логика не априорна и не является изолированной от опыта, то ее обоснование не может отличаться принципиально от обоснования опытных наук. Рациональное обоснование логики в этом случае — не обоснование абсолютной надежности, а лишь установление адекватности ее принципов современному состоянию знания.

В философии логики Куайна, как мы видим, содержится значительная доля эмпиризма и релятивизма. Эта концепция характерна для философии науки конца XX века, преобладающей особенностью которой является релятивизм и антиаприоризм.

Хотя проведенное рассмотрение не обладает полнотой, оно уже выявляет бедность и методологическую слабость существующей философии логики. Старые проблемы: априорного-апостериорного, аналитического-синтетического, нормативного-теоретического и т. п. — все еще далеки от своего разрешения: мы не можем поставить принципы логики рядом с законами опытных наук и не можем объявить ее системой вечных истин, независимых от мира и нашей деятельности в мире. Современные концепции логики являются слишком абстрактными для того, чтобы быть полезными для методологии математики. Они не дают нам убедительного обоснования надежности логических норм и, тем самым, оставляют нас совершенно безоружными перед лицом различных форм логического скептицизма. Ясно, что мы не можем подойти к решению проблемы обоснования математики, не установив полного доверия к логике.

Глава 2.

Праксеологическая теория логики

Слабость существующих концепций логики в значительной мере предопределена тем, что они рассматривают логические нормы в отрыве от функции знания, от его сущностных целей. Мы можем понять природу этих норм только через рассмотрение универсальных требований практики к структуре знания. Мы будем исходить из того положения, что знание имеет только одно назначение — назначение практическое, что любое знание развивается в ориентации на практику и нормировано ею в своих высших принципах.

Принимая этот общий тезис, мы входим в область метафизики, от которой многие философы хотели бы избавиться. Борьба с метафизикой, однако, не может быть оправдана. Философия — теоретическая наука, ее успех состоит в объяснительной и унифицирующей силе ее теорий, и она должна быть открыта для гипотез любого рода, способствующих этой цели.

1. Логика и онтология

Современная метафизика может быть только метафизикой деятельности. Мы должны рассматривать человека прежде всего как действующее существо и все его представления о мире, вплоть до элементарных чувственных восприятий как подчиненные установке на действие и на эффективность действия. Созерцательного восприятия мира не существует. Человек нацелен на действие и видит мир прежде всего в категориях действия. Фундаментальность логики как высшей нормативной структуры состоит в том, что она непосредственно связана с деятельностным видением мира и с системой онтологических категорий, в которых оно выражено.

Мы должны признать наличие двух уровней представлений в сознании человека — эмпирических представлений, порожденных опытом, и категориальных представлений, порожденных деятельностью. Если первые относятся к связям в объекте, то вторые — к самому акту действия. На этом втором (рефлексивном) уровне порождается система онтологических категорий, отражающих необходимые условия

акта действия. Категории материи, пространства, времени, причинной связи и т. п. — выражают в себе необходимые условия акта действия и, тем самым, и важнейшие подразделения бытия, выявляемые посредством действия. Эти подразделения относятся к самому акту действия и безразличны к характеристикам объектов, на которые направлено действие в том или другом случае. Основное заблуждение эмпирической теории познания состоит в том, что она пытается понять все человеческие представления как опытные и индуктивные, все абстрактные понятия — как результат восхождения от конкретных представлений, данных в опыте. Она трактовала категории как только высшие абстракции или идеализации. В действительности, универсальные онтологические категории — это интуиции деятельности, выработанные актами деятельности, не имеющие никакой генетической связи с подразделениями в мире опыта. Эмпирические подразделения, в действительности, вторичны по отношению к категориям, так как они возможны только при наличии категориальных интуиций, определяющих процесс систематизации опыта.

Сторонники априоризма справедливо указывали на первичность категориальных представлений относительно опыта и настаивали на строгом разделении этих представлений с представлениями, полученными на основе опыта. Они, однако, мистифицировали сетку категорий, истолковывая ее как структуру самого разума, как продукт чистого созерцания, таинственной идеирующей абстракции и т. п. В действительности, мы имеем здесь дело лишь с универсальными представлениями, продиктованными практической установкой познающего субъекта. Наряду с отражающими очевидностями мы должны говорить здесь об очевидностях нормирующих, обусловленных общей задачей мышления.

Деятельностные категории определяют высшую и абсолютную нормативность мышления. Некоторые представления о мире немыслимы для нас, запрещены категориально, поскольку они не соответствуют практической нацеленности знания. Для того чтобы знание было практически приложимым, оно должно быть представлено в категориях деятельности, оно должно иметь обязательную форму, продиктованную деятельностью. На категориальном уровне мы запрещаем явления, не имеющие материального носителя, находящиеся вне пространства и времени, не имеющие причинной детерминации и т. п. Явление, не имеющее причины, запрещено, поскольку оно недоступно для предсказания и практического воздействия. Абстрактная онтология имеет исключительно праксеологический характер: она запрещает ситуации, не совместимые с возможностью практического действия. Категориальные ограничения являются отрицательными критериями истинности

в том смысле, что знание, находящееся за пределами этих ограничений, не может претендовать на истинность. Категориальные ограничения держат нас в рамках объективной осмысленности и практической приложимости знания.

Мы подойдем к пониманию природы логики, если поймем ее наряду с категориями как одну из ограничительных (нормативных) систем, проистекающих из требований практики. Если категориальные принципы ограничивают содержание представлений, запрещая праксеологически ложные представления, то логические принципы — это требования к структуре языка, проистекающие из той же самой цели. Логика может быть понята как система запретов на форму суждений, несовместимых с требованием их практической значимости (истинности).

Между категориями и логикой существует прямая связь. Сущностные ограничения на содержание мышления, заложенные в категориях, неизбежно превращаются в необходимые ограничения на форму языка, обладающие характером необходимости. В этом состоит глубинная основа параллелизма логики и категорий, замеченная Кантом. Категориальные и логические ограничения на структуру понятий одинаково универсальны, поскольку они проистекают из универсальных задач мышления. Глубинный параллелизм логики и онтологии проистекает из единства задачи, которой подчинены обе эти нормативные структуры.

Кантовская трактовка связи между категориями и логикой с современной точки зрения во многом неудовлетворительна. Логический синтез у Канта первичен и порождает систему категорий как свой онтологический коррелят. В действительности, у нас нет необходимости подчинять категории логике или наоборот. Обе эти понятийные структуры порождены деятельностной ориентацией мышления и должны рассматриваться как равноправные и коррелятивные друг другу. Каждой форме суждения Кант ставит в соответствие определенную и единственную категорию. Нетрудно видеть, что столь жесткий параллелизм в действительности не имеет места. Структура логических понятий не повторяет структуру онтологических категорий, а представляет собой специфическую нормативную структуру, приспособленную к задачам языкового мышления.

Идея параллелизма, однако, истинна в том смысле, что и система категорий, и система логических норм однозначно определены практической установкой сознания и непосредственно соотнесены друг с другом. Безусловно верно, что подведение явлений под ту или иную форму суждения обусловлено их подведением под определенную совокупность категорий. В сущности, это один и тот же процесс. В этом смысле идея параллелизма онтологии и логики должна быть исходным пунктом всякого адекватного понимания логики.

2. Логика как теория истины

Праксеологическая трактовка логики позволяет прояснить связь между принципами логики и понятием истины. Каждое понятие имеет значение, которое заключается прежде всего в совокупности предметов (реальных или мыслимых), подпадающих под это понятие. Предложение языка выражает определенную связь значений, их соединение, раздельность, включенность друг в друга и т. п., которую мы называем суждением или смыслом этого предложения. Грамматически различные предложения могут выражать один и тот же смысл, и в этом плане мы вправе говорить о суждении как о логической форме предложения, которая остается постоянной с изменением его собственно грамматической оболочки.

Суждение в своей сущности — это мысленная связь значений, гипотеза о некоторой реальности, которая может быть либо истинной, либо ложной. Согласно Аристотелю, истину говорит тот, кто считает разъединенное разъединенным и связанное связанным[29]. Можно сказать, что истинность представляет собой функцию, сопоставляющую мысленные образы с реальным положением дел. Суждение «На улице холодно» истинно, если на улице действительно холодно. Слово «действительно» обозначает здесь некоторую внемысленную (практическую) операцию, соотносящую суждение и реальность.

Здесь важно зафиксировать несколько моментов. Первый из них состоит в том, что логика опирается на общее гносеологическое понятие истины, в основе которого лежит идея соотнесения суждения с реальностью. В этом смысле логика неразрывно связана с общей теорией познания. Важно понять также, что гносеологическая истина в логике — не приближенная истинность эмпирического знания, а абсолютная (идеальная) истинность, не допускающая изменения или корректировки. Идея абсолютной истины — не фикция и не бесполезная метафизическая конструкция, а представление, составляющее основу логики, интуитивный критерий правильности ее законов. Необходимо иметь в виду, наконец, то обстоятельство, что в отличие от теории познания и методологии науки логика полностью абстрагируется от рассмотрения фактических возможностей установления истины. Логическое рассмотрение исходит из условного допущения абсолютной истинности суждений. Задача логики состоит в том, чтобы исходя из допущения истинности некоторых суждений, определить всю систему истинных суждений, вытекающих из этого допущения. Логика исследует необходимые связи между суждениями на основе предположения об их абсолютной истинности.

Принципы логики в своей сущности представляют собой запреты на типы суждений, заведомо несовместимые с понятием истины. Говоря,

что недопустимы суждения вида «A и не-A», мы утверждаем тем самым, что суждения, обладающие такой формой, ни при каких условиях не могут претендовать на истинность. Нам не нужно здесь гипотез о том, как устанавливается истинность суждения A в том или другом случае, и может ли она быть установлена вообще. Логический принцип непротиворечия утверждает лишь то, что суждение, состоящее из утверждения и отрицания определенного смысла, несовместимо с понятием его истинности. В основе логики, таким образом, лежит общезначимая идея истины, исключающая определенные формы суждения как находящиеся за ее пределами.

Логика, таким образом, может быть определена как система ограничений на логическую форму языка, проистекающая из требования абсолютной истинности суждений. Логика предъявляет только те требования к истинности высказываний, которые выразимы в терминах их формы. В этом плане она может быть понята как формальное или отрицательное определение понятия истины, как определение той сферы, за пределами которой суждение перестает быть истинным уже вследствие своей формы. В этом плане система логических принципов — это формальная теория истинности, ограничивающая класс истинных суждений на основе их формы.

При прояснении сущности логики философы, вообще говоря, прибегали к различным трактовкам понятия истинности. В основе логической концепции Лейбница лежит онтологическое понятие истины, которое является коррелятом реального положения дел в мире, не зависящего от мышления и самого существования мыслящих существ. Концепция логики Куайна опирается на семантическое понятие истины, задаваемое через понятие выполнимости. Деятельностный анализ логики ориентирует нас на гносеологическое понятие абсолютной истины как определяющее для понимания природы и функции логики.

3. Праксеологическая дедукция логических норм

Основная задача философии логики состоит в обосновании принципов, относящихся к реальной логике. Почему приняв A в качестве истинного, мы не можем считать истинным суждение не-A и т.д. Как устанавливаются эти принципы и что делает их столь устойчивыми и непреложными для сознания? Мы нуждаемся в прояснении того, почему нормы логики именно таковы, а не другие. Откуда у нас столь ясная и твердая идея абсолютной истины, которая не допускает никаких других законов соподчинения истинных суждений, чем те, которые зафиксированы в принятых законах логики? Здесь возможны различные гипотезы. Мы можем считать эти принципы установленными на

основе опыта, на основе психологических операций мышления, соглашениями, продуктом эволюционного отбора и т.д.

С праксеологической точки зрения ответ на этот вопрос возможен лишь при понимании истинности как практической эффективности. Мы должны понять истину в контексте практики. Вопрос о том, что требует истина от знания, с этой точки зрения равносилен вопросу, что требует практика от знания, какие общие ограничения она накладывает на него. Человек не просто стремится к истине как к некоторому абстрактному видению сущности вещей, он стремится к истине как к средству действия. Интуиция истинности с этой точки зрения есть интерсубъективная интуиция эффективности знания, которая абсолютно господствует над всем нашим мышлением и ограничивает разнообразие возможных типов суждений в тех аспектах, в которых они заведомо выходят за пределы возможной практической значимости. Но это значит, что принципы логики представляют собой регулятивы знания с точки зрения его эффективности, и они должны быть выведены из общих условий эффективности знания.

Праксеологическая основа элементарных принципов логики в достаточной степени очевидна. Закон непротиворечия может быть понят с этой точки зрения как необходимая норма всякого мышления, обусловленная самой необходимостью различения объектов действия. Всякая практика основана на определении будущего через исключение альтернатив. Но разделение практически значимых альтернатив основано на различении ситуаций в плане *наличия* или *отсутствия* в них определенных компонентов, т. е. в плане дихотомии бытия и небытия вещей и их признаков. Одновременное принятие бытия и небытия неприемлемо, так как оно отвергает сам принцип исключения альтернатив, лежащий в основе практической ориентации. Если некто утверждает, что событие и произойдет, и не произойдет, то он отказывается от исключения альтернатив и высказывает суждение бесполезное для практики или, точнее, — дезориентирующее практику.

Мы можем сказать, суждение в форме «A и не-A» неприемлемо для нас, поскольку оно не соответствует направленности мышления на действие. Суждение, утверждающее одновременно некоторое бытие и небытие, не может быть принято в качестве истинного, ибо оно не может быть основой практической ориентации, лежащей в основе познавательной активности.

Понятие деятельности, таким образом, позволяет дать строгое обоснование тому положению Аристотеля, что принцип противоречия — не гипотеза, а нечто необходимое для всякого знания. Этот принцип необходим для всякого знания вследствие того, что он выражает его высшую целевую установку.

В этом плане может быть понята и необходимость закона исключенного третьего. Этот закон проистекает из требования определенности суждений, которое непосредственно связано с их возможной практической значимостью. Суждения или система суждений могут быть средством для действия только при достаточной определенности понятий. Утверждение, логически неопределенное, не истинно или истинно не вполне. Но если мы предполагаем абсолютную истинность суждения, то явно или неявно предполагаем также и его полную определенность, строгое ограничение значений входящих в него понятий. Все наши суждения исходят из идеального предположения, что объем каждого включенного в него понятия имеет строгие границы, и некоторая вещь в таком случае либо подпадает под него, либо нет, — третьего не дано. Закон исключенного третьего, таким образом, выражает не что иное, как идеальное требование определенности суждений, проистекающее из требования их абсолютной истинности.

Аналогичным образом мы можем объяснить и закон тождества, утверждающий постоянство содержания понятий, используемых в рассуждении. Реальные понятия в реальном рассуждении, конечно, не обладают полным постоянством, да мы и не имеем никаких критериев, позволяющих установить полное тождество значений понятия в различных случаях его использования. Закон тождества — это праксеологическое требование, отступление от которого делает суждение неопределенным и бесполезным в плане практической ориентации. Этот закон выражает одно из условий понятийного оформления знания, без соблюдения которого результаты нашего мышления не имели бы никакой ценности.

Важнейшим принципом, лежащим в основании логики, является принцип импликации, состоящий в том, что из истинного вытекает только истинное. Это определенного рода методологический критерий вывода, общее предписание ко всей системе правил вывода, состоящее в том, что ни одно из этих правил ни по отдельности, ни в совокупности с другими не может допустить перехода от истинных утверждений к ложным. Он также может быть понят как методологическое требование к понятию идеальной истины. Логическое мышление исходит из понятия идеальной истинности посылок, которая связана с представлением об их некорректируемости. Допущение, что истинные посылки содержат в себе нечто ложное, несовместимо с идеей их некорректируемости.

Существенную роль в определении объема реальной логики занимают самоочевидные связи таких понятий как «все» и «некоторые», соответствующие категориям части и целого. На использовании этих понятий строится силлогистика и связанные с ней схемы умозаключений. Особенность данной ситуации состоит в том, что связь части

и целого, лежащая в основе этих принципов, невыводима непосредственно из практической установки мышления. Здесь мы имеем дело с утверждениями аналитического или тавтологического порядка, которые даны нам с аподиктической очевидностью. Мы воспринимаем как непосредственно очевидный и безусловный факт то положение, что из истинности утверждения «Все A есть B» следует истинность утверждения «Некоторые A есть B». При обосновании такого рода принципов мы должны исходить из необходимой связи между праксеологической природой принципов и свойством их аподиктической очевидности. Факт аподиктической очевидности и интерсубъективности этих тавтологий говорит об их деятельностной природе, об их обусловленности системой интуиций, порожденных деятельностной ориентацией мышления.

Мы видим, таким образом, что тезис о практической обусловленности логики подтверждается не только общими соображениями о практической ориентации мышления, но и анализом содержания основных логических норм. Каждая из них может быть обоснована в своей необходимости исходя из сущностных требований к мышлению со стороны практики.

4. Аналитичность и реальность логики

Логика как особый тип знания может быть понята через раскрытие таких ее характеристик, как универсальность, априорность, аналитичность, реальность, нормативность и самоочевидность.

Логика универсальна в том смысле, что ее законы относятся к понятиям вообще и не имеют каких-либо содержательных ограничений для своего применения. Как форма мышления, проистекающая из его общей цели, она едина для всякого понятийного мышления. Логика, используемая в биологии, истории и географии, не может отличаться от логики математических умозаключений, а логика обыденного мышления не может отличаться от логики науки. Всюду, где человек стремится выразить некоторую истину в понятиях, он подчинен единым правилам категориального синтеза, а следовательно, и единой логике. Другое дело, что в одних науках мы имеем возможность давать точные определения и строить сложные цепи умозаключений и не имеем для этого условий в других. Различие здесь не в логике, а в характере определений, который зависит от предмета науки.

Универсальность законов логики часто ставилась под сомнение. Гегель полагал, что законы диалектики опровергают или, по крайней мере, ограничивают действие законов формальной логики. А. Бергсон считал, что формальная логика не имеет никакой силы за сферой исследования твердых тел и механических движений. Брауэр ограничивал логику в ее применении к бесконечным множествам. Биркгофф и

Нейман претендовали на создание особой логики квантовой механики, заменяющей в этой науке обычную логику, т. е. считали возможным обусловить законы логики типом научных теорий или характером предмета, к которому они относятся.

Все эти опровержения универсальности логики имеют общую основу: они исходят из понимания логических принципов как некоторого рода индуктивных или квазииндуктивных обобщений, т. е. на явном или неявном признании тезиса, согласно которому все нормативные принципы, регулирующие познание, проистекают из опыта и являются, в конечном итоге, отражением определенных аспектов опыта. Праксеологическая теория логики отвергает такого рода релятивизм как противоречащий сущности логического знания.

Логика *априорна*, поскольку ее принципы не зависят от опыта в своем генезисе и предшествуют любому акту мышления в качестве его предварительного условия. Логика не основана на психологии: ее законы относятся не к состояниям сознания и не к операциям мышления, а лишь к структуре языка, в котором выражаются результаты мышления. Эта структура задается общей деятельностной ориентацией мышления и имеет не большее отношение к психологии, чем ко всякой другой науке. Законы логики как законы телеологические принципиально отличаются от законов опытных наук, имеющих индуктивный или квазииндуктивный статус. Мы можем говорить об априорности логики, понимая под этим внеопытный, необходимый и универсальный характер ее законов.

Важнейшей особенностью логики является *аналитичность* ее принципов. Тезис об аналитичности законов логики становится достаточно очевидным уже из простого их рассмотрения, которое показывает, что каждый такой закон является не чем иным, как разъяснением используемых в нем исходных смыслов, таких как «не», «и», «или» и т. п. Утверждая, что из $\forall x\ F(x)$ следует $\exists x\ F(x)$, мы опираемся на интуитивно ясное понимание отношения между целым и частью и неприемлемость того положения, чтобы некоторый признак, принадлежащий всем объектам, не принадлежал бы некоторым из них. Это противоречило бы *принятому смыслу* слов «все» и «некоторые».

Аналитичность логики проистекает из ее функции как универсальной языковой нормы. Отображение содержания в суждениях может происходить только через соподчинение значений на основе предварительно принятых смыслов, которые мы называем логическими константами. Необходимое требование к константам, проистекающие из сущности языковой коммуникации, — это стабильность и общезначимость. Если принятые смыслы обладают стабильностью и общезначимостью, то возможны преобразования суждений в соответствии с этими смыслами, которые и составляют сущность логического анализа языка.

Органическая связь логики с онтологией проистекает из того обстоятельства, что только онтологические представления могут дать систему стабильных и общезначимых смыслов, лежащих в основе кодирования предметного содержания в суждениях, в основе понимания этих суждений и установления безусловных смысловых тождеств между суждениями. Отсюда следует, что принципы логики — это те и только те утверждения, которые разъясняют смысл логических констант. Законы логики аналитичны, ибо они — не что иное, как описание первичных смыслов языка, на основе которых задаются все другие смыслы.

Философы-конвенционалисты допускают возможность иных логик, ибо логика, по их мнению, может быть изменена как любой принцип построения языка, принятый по соглашению или сформировавшийся стихийно. Онтологическая теория логики исключает такое понимание как основанное на заблуждении. Мы выяснили, что законы логики подчинены целевой установке мышления, являются раскрытием понятия истины применительно к форме суждений. Это значит, что принципы логики являются аналитическими на двух уровнях: каждый из принципов раскрывает смысл содержащихся в нем констант, и все принципы вместе раскрывают гносеологическое определение истины применительно к форме суждений. Этот второй уровень аналитичности является более глубоким и определяющим. С этой точки зрения мы можем понять то обстоятельство, что система смысловых констант, лежащих в основе логики, с самого начала формируется как определенная целостность, соответствующая своей функции: она должна быть общезначимой (категориально определенной) и достаточно полной для выражения структуры возможных суждений. Целевая детерминация логики ставит ее в жесткую корреляцию с онтологией и исключает какие-либо изменения, не обусловленные изменениями в категориальной структуре мышления.

В отличие от математики логика является системой чисто нормативного знания. Система законов может пониматься либо как описание некоторых связей в предмете, либо как система норм, которым должно подчиняться это описание. Любой признанный теоретический закон является одновременно и нормой, и кажется естественным предположить, что всякая норма, в свою очередь, покоится на некотором теоретическом основании. Так думал Гуссерль, полагая, что и арифметика, и логика в одинаковой мере являются теоретическими дисциплинами. Арифметика имеет несомненную теоретическую направленность: она нацелена на описание идеальной предметности, на ее представление в понятиях безотносительно к какой-либо нормативной функции. Гуссерль прав в том, что нормативность арифметики — явление вторичное, возникающее на основе ее теоретической зрелости.

Анализ, однако, показывает, что принципы логики с самого начала формируются не как законы описания, а как законы долженствования, они говорят не о том, как связаны значения и смыслы в практике мышления, а о том, как они должны быть связаны в соответствии с критерием истинности. Логика, таким образом, не отражательная, а телеологическая, чисто нормативная наука, проистекающая исключительно из целевой ориентации мышления. Она представляет собой проекцию цели мышления на его языковую форму. В своей аргументации Гуссерль упускает из виду наличие универсальной нормативности, которая не предполагает каких-либо теоретических предпосылок. Мир значений и их связей — не предмет описания для логика, а исключительно объект нормирования. То же самое относится и к понятию истины. Истинность в логике не предмет анализа, а лишь целевая интуиция, т. е. чисто регулятивное представление. Система строгих законов, связанных с понятием истинности, может быть только системой внешних норм, причем формулировка этих норм не предполагает сущностного описания каких-либо реальных аспектов мышления, точно так же как формулировка общего принципа причинности не предполагает исследования конкретных причинных связей.

Здесь мы имеем принципиальное различие между арифметикой и логикой как двумя понятийными системами, непосредственно связанными с универсальной онтологией. Будучи онтологически определенной, логика как наука реализует особый тип связи с онтологической основой, который основан лишь на прояснении ее аналитического аспекта. Если арифметику мы можем понять как отражение в понятиях идеально предметных представлений, то для логики мы не имеем соответствующего позитивного аспекта онтологии, с которым она могла бы быть сопоставлена в качестве его теоретической экспликации. Логика в отличие от арифметики не эксплицирует синтетических истин онтологии, а лишь проясняет лежащие в их основе фундаментальные (категориальные) смыслы, такие, как «и» (сосуществование во времени), «или» (возможное разделение существования во времени) и т. п.

Тем не менее, логика является *реальной* в смысле ее необходимой коррелятивности с универсальной онтологией. Теоретическая система является реальной в отношении некоторого содержания, если ее принципы осмыслены в рамках этого содержания и если эта система запрещает некоторые ситуации. Ясно, что оба этих требования выполняются в отношении между логикой и онтологией. Различие в плане синтетичности-аналитичности принципов здесь не существенно, так как оно говорит не об осмысленности или неосмысленности этих принципов, но лишь о различном распределении смысла (между субъектом и предикатом в предложении как лингвистической системе) в принципах и в их системе.

Система теоретического знания указывает нам на некоторую градацию типов реальности, идущую от физики к логике. Физическая теория реальна в том смысле, что она имеет предмет исследования, который определяет состав ее принципов и является основой их корректировки. Первичные математические теории обладают квазипредметом (интуитивной основой), который определяет состав их принципов, но не является источником контрпримеров. Система логических принципов не имеет предмета в каком-либо смысле и как чисто нормативная наука определяет свой состав исключительно общей целью знания. Тем не менее ее онтологическая основа не может быть оспорена, ибо смыслы, которые она фиксирует, относятся к онтологии и задают *некоторую* структуру нашего мира[30].

Логика фиксирует в себе предельно бедное онтологическое содержание. Но это сущностно необходимое содержание, ибо именно оно определяет структуру реальных суждений и обеспечивает саму рациональность мышления. Онтологическая реальность (означенность) логических норм является их сущностным признаком и дает нам важный критерий определения истинного состава логики.

Логика как наука характеризуется также особой *самоочевидностью* своих принципов. Мы говорим, что принципы логики даны нам с аподиктической очевидностью, подчеркивая тем самым, что очевидность этих принципов качественно иная, чем очевидность эмпирических утверждений, обоснованных опытом. Мы выяснили, что аподиктическая очевидность — это очевидность праксеологическая, особая очевидность, имеющая деятельностное происхождение. Анализ праксеологических истоков логической очевидности позволяет понять ее обосновательный статус. С этой точки зрения является безусловно истинным положение Гуссерля о том, что самоочевидность принципов логики является их истинным и полным обоснованием.

5. Надежность логических норм

Тезис об аналитичности принципов логики часто используется для обоснования их конвенционального и релятивного характера. Если законы логики определены системой принятых смыслов, то можно допустить историческую подвижность этих смыслов и, как следствие, возможность различных логик, выполняющих функцию кодификации строгого мышления. Такова, в сущности, позиция Карнапа и Витгенштейна. Праксеологическое понимание природы логических констант полностью устраняет возможность такого рода допущений. Еще Кант выяснил, что фундаментальные логические смыслы полностью определены в категориях бытия и времени. Смысл выражения «A и B» состоит в том, что объекты A и B сосуществуют во времени, «A или

B» означает, что в данное время существует по крайней мере один их этих объектов, и т.д. Анализируя значение констант, мы видим, что их система задана категориальным видением мира и не может быть сдвинута каким-либо субъективным произволом или развитием позитивного знания о мире. Аналитичность логики, таким образом, не тождественная ее конвенциональности.

Надежность логики радикально отличается от надежности теоретических законов, корректируемых опытом. Логические законы — это высшие нормы мышления, продиктованные его общей задачей, и они, в отличие от теоретических законов, не могут быть подвергнуты критике с точки зрения содержания мышления. Фреге прав в том, что логические законы — это фундаментальные принципы мышления, которые мы можем осознать, но которые мы не можем корректировать[31]. Неизменность и однозначная заданность логических очевидностей проистекает из того факта, что это нормы мышления, определяемые его целевой установкой. Историческое развитие знания не может влиять на структуру аподиктических очевидностей, проистекающих из универсальной практической ориентации мышления.

Логика связана с онтологией и, в принципе, можно допустить, что обе эти структуры претерпевают некоторую историческую эволюцию. Смысл сказанного выше состоит не в том, что логика не подвержена абсолютно никаким изменениям, а в том, что эти изменения не относятся к изменениям, которые обусловлены опытом. Гипотетически допустимые изменения в логике — это изменения в принципиально другом измерении: они могут проистекать только из изменения фундаментального практического отношения человека к миру, которое не связано с простым увеличением наших знаний и навыков.

Эволюция норм логики, даже если она возможна, является безусловно иррациональной в том смысле, что она не может быть предвосхищена и учтена в рамках рационального мышления. Это положение можно пояснить сравнением логики с системой координат в физике и астрономии. При описании движения тел на Земле мы рассматриваем в качестве абсолютной систему координат, связанную с Землей, исследуя движение тел в солнечной системе, мы рассматриваем в качестве основной систему координат, связанную с Солнцем, некоторые расчеты, наконец, могут потребовать перехода к системе координат, связанной с эклиптикой, и т.д. Переход от одной системы координат к другой здесь рационален в том смысле, что, работая в узкой системе координат, мы осознаем характер ее относительности, а следовательно, и возможные варианты более адекватных систем. Нетрудно видеть, что такой подход полностью исключен в отношении к логике. В любой конкретный исторический момент мы должны опираться

на существующую логику как на абсолютную и единственно возможную. Изменение категориальных и логических принципов возможно только как чисто практическое и абсолютно иррациональное явление, ибо никакая теоретическая критика не может выйти за рамки существующей логики и наметить контуры другой логики. Это значит, что в любом рассуждении признанные (аподиктически очевидные) нормы логики должны рассматриваться как абсолют, как последние координаты мышления, за пределами которых не существует точек опоры.

Основной недостаток современной философии логики состоит в том, что она не осознает в полной мере степени абсолютности логики. Ученые и философы критиковали и продолжают критиковать принципы логики так, как если бы они были некоторыми общими положениями, полученными на основе *опыта* и индукции. Такой подход не соответствует действительному статусу логики. Мы должны понять тот факт, что априорные структуры, данные нам в виде принципов универсальной онтологии и логики, являются предельной системой координат, лежащей в основе нашего мышления и не подлежат рациональной критике по той причине, что они предполагаются в качестве абсолютных во всякой такой критике. Они должны быть приняты в качестве предельно надежных, ибо всякая надежность измеряется в конечном итоге степенью согласия с этими принципами.

6. Слабость современной философии логики

Деятельностная точка зрения оправдывает кантовскую концепцию логики в ее основе. У Канта нет обоснования генезиса и структуры логики, но есть четкая система принципов, определяющая статус логики как науки. Деятельностная точка зрения оправдывает эти принципы в качестве абсолютно истинных. Кант был несомненно прав в своем понимании реальной логики как системы абсолютного и неизменного знания.

Гуссерлевская концепция логики должна быть оценена двояко. Общая характеристика логики как априорного знания, покоящегося на аподиктической очевидности, данная им в «Логических исследованиях» является несомненно верной.

Гуссерль поставил проблему освобождения теории логики от привнесений натурализма, историзма и психологизма, а также проблему прояснения ее подлинной генеалогии. Основной недостаток гуссерлевской теории логики состоит в очевидной недостаточности разработанных в ней методов для решения указанных задач. Если идеация, отправляясь от чувственных данных (переживаний), претендует на установление априорных принципов знания, каковыми, по Гуссерлю,

являются принципы логики, то она должна быть оправдана как нечто отличное от обычной абстракции, которая дает только относительное знание. Несмотря на постоянную декларацию этого различия Гуссерль не дал его приемлемого рационального оправдания ни в «Логических исследованиях», ни в последующих работах. То же самое относится и к понятию конституирования, которое заменяет идею непосредственного схватывания в более поздних работах Гуссерля.

Усилия Гуссерля направлены на то, чтобы свести самоочевидность норм мышления к самоочевидности первичного опыта, определяющего идентификацию и различение феноменов. Содержание логических принципов, согласно его схеме, намечается в сфере феноменов, в структуре первичных восприятий и очищается в процессе мысленной фантазии (эйдейтической вариации) и языковой коммуникации, поднимаясь до состояния стабильности и несомненности априорного знания. С деятельностной точки зрения эта полуэмпирическая схема не может иметь обосновательного значения. Попытка найти основания нормативных структур в феноменах сознания, без учета целевых установок мышления, является бесперспективной. Ошибочным моментом гуссерлевской концепции логики является также ее отождествление с математикой. Гуссерль некритически принимает здесь логицисткую доктрину Дедекинда и Фреге, имевшую влияние в последние десятилетия XIX века.

Основная проблема философии логики Пиаже та же самая, что и у Гуссерля — это проблема генезиса логических принципов. Пиаже подходит к решению вопроса как ученый-натуралист, заменяя гуссерлевское вневременное конституирование рассмотрением реального и экспериментально проверяемого становления логических норм в психологии мышления. Теория Пиаже является более системной и телеологической в том отношении, что становление логики рассматривается в контексте приспособительной деятельности человека: все мысленные операции субъекта обусловлены, по Пиаже, стремлением к равновесию со средой и могут быть поняты в своей структуре только на основе своей функции. Однако, несмотря на столь отчетливый деятельностный акцент, концепция Пиаже существенно сходна с концепцией Гуссерля в общей схеме обоснования: так же, как и Гуссерль, Пиаже стремится понять принципы логики на основе их генетически первичных и конкретных предпосылок. Схема генезиса логики у Пиаже проста: процесс деятельности заставляет ребенка принять конкретные схемы операций, относящиеся к различным аспектам опыта, а слияние этих операций обеспечивает, в конечном итоге, «вертикальный сдвиг» — образование идеализированных схем операций, отражающих конкретные структуры мышления. Эта картина, будучи убедительной для здравого смысла, не выдерживает критики с точки зрения теории по-

знания. Здесь мы имеем, очевидно, тот же самый индуктивизм, что и у Гуссерля, заключающийся в намерении найти основу для универсальных норм мышления в материале мышления и в способности мышления к генерализации частных структур.

Разумеется, индуктивное наращивание структур, о котором говорит Пиаже, имеет место в процессе становления индивидуального сознания. Но мы должны здесь понять наличие особых целевых структур, которые испытывая воздействие конкретных факторов, тем не менее не определяются ими в своем содержании. Во взаимодействии целевых и индуктивных структур мышления ведущими являются целевые структуры. Мы не можем понять законы логики иначе, чем через раскрытие общих целей знания, независимых от его содержания. Мы можем, поэтому, понять структуру логических норм на основе понятия истины, но не можем вывести ее из анализа содержания опыта, научных теорий или из операций деятельности.

Позиция Куайна обладает той особенностью, что она отвлекается от психологических аспектов логики и исследует ее как обусловленную только грамматикой и понятием истины. Эта концепция, однако, также не может быть принята как сколько-нибудь удовлетворительная. Несмотря на более абстрактный и гносеологически выдержанный стиль, она не выходит за рамки натуралистического индуктивизма. Нетрудно видеть, что законы логики у Куайна не накладываются на язык в качестве высших норм, обусловленных целью мышления, а извлекаются из него в качестве некоторых абстракций и идеализаций. Логика у Куайна индуктивна, поскольку выводится из грамматического материала как структура, соответствующая этому материалу. В методологическом отношении это обоснование отличается от обоснования Гуссерля и Пиаже только характером первичного материала. Логика при таком понимании ее генезиса оказывается в принципе зависимой от эволюции грамматики и от развития содержания мышления.

В философии логики Куайна заложены две установки, которые с праксеологической точки зрения должны быть признаны ошибочными. Это прежде всего холистическая идея, состоящая в том, что все знание образует единую систему, производную от опыта и что корректировка опытного знания неизбежно ведет к перестройке всех других типов знания. Эта идея искажает действительный характер взаимодействия уровней знания. Утверждения, связанные с формой мышления, не изменяются с изменением содержания мышления, хотя они и включены в общую структуру знания, направленную на предсказание опыта. Другой принципиальный недостаток концепции Куайна состоит в ее ориентации на понятие семантической истины. Ценность семантического исследования логико-математических исчислений не подлежит сомнению. В рамках теории моделей обоснованы важнейшие в методологи-

ческом отношении факты, такие, как полнота исчисления предикатов, неполнота арифметики, независимость аксиомы выбора от других аксиом теории множеств и т. п. Однако обоснование логики, заключающееся в оправдании универсальности и надежности логических норм, остается за пределами семантического подхода. Семантика вторична по отношению к принятому исчислению и она не определяет логики, заложенной в исчислении. Логическая семантика основана на операциональном понимании истины, на уточнении смысла связи между знаком и значением, в то время как принципы логики отражают в себе телеологическое понимание истины, связанное с понятием деятельности. Семантика способствует решению обосновательных проблем лишь в тех случаях, в которых она оказывается связанной со сферой аподиктической очевидности. Но это значит, что семантическая истина предполагает онтологическую истину как свое глубинное основание.

Значительную роль в обсуждении логики на протяжении всего XX века играла идея конвенции, которая выдвигалась на первый план в рассуждениях Р. Карнапа и Л. Витгенштейна. В настоящее время довольно ясно, что эта идея не может занимать сколько-нибудь существенного места в обосновании логики. Идея конвенции имеет смысл в тех ситуациях, в которых имеют место различные практически реализуемые альтернативы, и она мало приложима к случаям, которые демонстрируют предопределенность и необходимость. Мы не можем считать продуктом конвенции воззрения, которые в одинаковом виде навязываются всем людям в течение тысячелетий. В случае логики проблема как раз состоит в прояснении столь жесткой исторической детерминации, исключающей всякий реальный выбор. Проясняя истоки детерминации логических и математических истин, деятельностная точка зрения устраняет всякие основания для идеи конвенции.

Современная философия логики, таким образом, не решает вопроса о надежности логических принципов и, более того, она склонна решать этот вопрос отрицательно, в духе релятивизма и скептицизма. Послекантовское развитие теории логики было, несомненно, продуктивным (в смысле появления новых идей), но оно, вместе с тем, характеризовалось постоянным отступлением от трансцендентализма Канта и, таким образом, несомненной деградацией теории в целом. Деятельностная теория познания позволяет отвергнуть эти заведомо неадекватные подходы и наметить пути обоснования логики как системы абсолютного (предельно надежного) знания.

7. Пути обоснования логики

Под обоснованием логики следует понимать идентификацию некоторой системы принципов в качестве истинно логических, т. е. не подверженных корректировке. Существование такого ядра логики явно

или неявно предполагается всеми программами обоснования математики.

Особая трудность этой задачи состоит в том, что пути обоснования частных понятийных систем здесь не применимы. Логика не может быть оправдана на основе какого-либо опыта, она не обосновывается в рамках математики и не может быть выведена из структуры языка или из структуры какого-либо объекта, являющегося предметом специального исследования. Ни рационалистические и ни эмпирические теории логики до сих пор не открыли нам никаких критериев, позволяющих отделять надежные логические принципы от ненадежных.

Ценность праксеологической концепции логики состоит в том, что она намечает определенный сдвиг в указанном отношении. Выявляя онтологическую природу логических принципов, она указывает на некоторые подходы к их обоснованию.

Первый теоретически обоснованный путь может состоять здесь в праксеологической дедукции принципов. Такие законы, как закон непротиворечия, закон исключенного третьего и закон импликации, непосредственно проистекают из общей цели мышления и, таким образом, обосновываются как абсолютные с точностью до устойчивости самой этой цели. Поскольку эта цель не может быть уничтожена без уничтожения мышления и человечества в целом, то такое обоснование является обоснованием абсолютности законов логики для всякого эффективного мышления. Наличие праксеологической дедукции определенного принципа означает его принадлежность к реальной логике, обладающей универсальной значимостью и абсолютной надежностью.

Второй приемлемый путь оправдания логических норм состоит в их оправдании на основе аподиктической очевидности. Важнейший прогресс, осуществляемый в праксеологической теории логики, состоит в оправдании статуса аподиктической очевидности как обосновательной инстанции. Праксеологическая точка зрения позволяет понять внепсихологическую и объективную природу аподиктической очевидности, принципиальное отличие ее от различных типов индуктивной очевидности и позволяет обосновать критерий аподиктической очевидности в качестве высшего критерия выявления и обоснования логических и математических аксиом. Существуют принципы логики, которые мы должны принять как абсолютные и предельно обоснованные, опираясь исключительно на их общезначимость и непосредственную данность сознанию. К таким принципам несомненно относятся схемы непосредственных выводов, лежащие в основе силлогистики. Мы имеем здесь дело с истинно аналитическими суждениями, с тавтологиями, имеющими категориальную основу.

Мы можем возвратиться здесь к критерию «немыслимости иного», на который опирался Спенсер при обосновании принципов логики.

Праксеологическая теория логики вскрывает объективную основу этого принципа. За немыслимостью иных принципов логики лежит онтологическая обусловленность данных принципов, которая является высшей степенью их обоснования. Вечный двигатель в некотором смысле возможен, ибо он запрещен только физическими законами. Беспричинное явление запрещено абсолютно, ибо оно запрещено онтологически. Принципы реальной логики мы можем считать абсолютно обоснованными на том основании, что отступление от них немыслимо и, следовательно, запрещено онтологически.

Мы можем, наконец, продвинуться в обосновании логики на уровне рациональных рассуждений о логике, а именно, через критику различного рода ложных учений о ее составе. Мы будем исходить здесь из методологического правила Аристотеля, согласно которому при отсутствии прямых доказательств для принципа, мы можем иметь строгие доказательства ложности принципов, которые ему противоречат. Мы обосновываем логику, устраняя ложные альтернативы и, в частности, устраняя ложные пристройки к логике, проистекающие из непонимания статуса этой науки. Мы очищаем логику от всего нелогического. Важность такого рода очистительной работы не подлежит сомнению. С точки зрения обоснования математики решающее значение имеет для нас реабилитация абсолютности логики, достигаемая на основе ее онтологического обоснования.

Глава 3.

Логика и математика

Изложенные соображения позволяют высказать более определенные суждения об отношении логики к математике. Основная трудность состоит здесь в многозначности и неопределенности термина «логика». Онтологическая теория естественно приводит нас к понятию реальной логики как совокупности норм языкового мышления, имеющих онтологическое обоснование. Наша задача состоит в том, чтобы определить состав реальной логики и прояснить ее место в структуре математического мышления.

Эту задачу нельзя решить на уровне общих определений. Мы будем двигаться здесь методом критики, исключая из принятого содержания логического знания элементы, заведомо не удовлетворяющие представлению о природе реальной логики. Такого рода отрицательная стратегия дает возможность подойти к определению истинного объема реальной логики и к выявлению ее сущностных связей с математикой.

1. Исключение предметных логик

Прежде всего мы должны уяснить отличие реальной логики от предметных логик. С развитием логической символики появились специфические логические исчисления, направленные на описание некоторого рода содержательных связей. Такова, к примеру, логика причинности. Поскольку причинное следование обычно выражается суждением «Если a, то b», то естественно возникает желание определить его как некоторый коррелят логического следования. Так появляется понятие каузальной импликации и соответствующие формальные исчисления, моделирующие причинную связь. Логическая экспликация интуиции времени привела к построению логик времени.

Ясно, что построенные таким образом «логики» не относятся к сфере реальной логики. Они нацелены на отражение реальных связей и являются обычными содержательными теориями. В этих исчислениях мы имеем дело не с логикой, а с использованием логических понятий и символов для моделирования некоторых отношений реальности.

В основе предметной логики всегда лежит специфическое понятие истинности, не совпадающее с общим определением логической истинности. Формула $a \rightarrow a$, являющаяся тавтологией логики, бессмысленна с точки зрения каузальной импликации, а формула: $aCb \rightarrow (a \rightarrow b)$, где C — символ каузальной импликации, будучи истинной в логике причинности, заведомо не является тавтологией реальной логики. Предметная логика, к какому содержанию она бы не относилась, не может быть интерпретирована на основе логической истинности, поскольку она неизбежно включает в себя синтетические утверждения, характеризующие это частное содержание и невыразимые в операциях реальной логики.

К числу предметных логик относится, несомненно, и так называемая логика квантовой механики. Логика квантовой механики исходит из факта наличия в языке физики неопределенных или бессмысленных суждений. Если мы скажем, что электрон в данное время имеет точную координату и в то же время точное значение импульса, то мы высказываем не истинное и не ложное, а бессмысленное утверждение, поскольку, в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга, две эти величины не могут быть определены одновременно в своем точном значении. Биркгоф и Нейман поставили задачу сформулировать правила, позволяющие из этой троякой совокупности посылок получать только осмысленные высказывания. Г. Рейхенбах показал, что трехзначное исчисление высказываний, соединенное с двузначностью метаязыковых оценок истинности, содержит в себе все допустимые здесь схемы вывода[32].

В чисто математическом плане мы имеем здесь дело с осмысленной и хорошо определенной задачей. Мы вправе также утверждать, что исчисление Рейхенбаха отражает специфические смысловые связи в теории квантовой механики. Можно ли, однако, рассматривать это исчисление как некоторую более адекватную логику физики и как возможное обогащение системы реальной логики? Эмпирическая теория логики положительно отвечает на этот вопрос. Куайн склонен видеть в исчислении Рейхенбаха возможную основу новой более совершенной логики. Логика, по его мнению, связана с опытом и не может полностью игнорировать требования физики.

С праксеологической точки зрения мы имеем здесь неприемлемое смешение реальной логики с предметным исчислением. То, что мы называем логикой квантовой механики, является лишь формальным описанием определенной теоретической модели, но никоим образом не логикой, определяющей форму мышления вообще. Исчисление Рейхенбаха может оказаться полезным в качестве теоретической или метатеоретической систематизации в рамках физической теории, но

мы не имеем никаких оснований для допущения, что это исчисление, отражающее особенности конкретной физической модели, может обогатить или скорректировать систему реальной логики, связанную с универсальной онтологией и проистекающую из универсальных целевых требований к структуре знания.

Другой пример предметной логики — это интуиционистская логика Брауэра. Привязав все понятия логики к понятию построения, Брауэр, заменил универсальную логику математического мышления, имеющую категориальные истоки, исчислением, описывающим понятие математического построения. Ясно, что это исчисление имеет ничуть не больше прав на универсальность, чем логика причинности, логика времени или логика квантовой механики. Интуиционистская логика описывает законы математического конструирования и ничего больше. Опыт показывает, что такая логика принципиально ограничена и недостаточна для построения математики.

К предметным логикам относятся также и модальная логика, построенная на экспликации отношения между категориями необходимости и возможности. Реальная логика исходит из понятия абсолютной истины и предполагает лишь необходимые связи значений. Категория возможности имеет не большую значимость для реальной логики, чем категория времени: в обоих случаях мы получаем формальные структуры, полезные для теоретического анализа логики, но не имеющие значения нормативной основы мышления. Реальное умозаключение не использует и не может использовать схем модальной логики. Аристотель, несомненно, смешивал логику и онтологию, рассматривая вопрос о будущем морском сражении в качестве логической проблемы.

Если мы понимаем реальную логику как систему норм, соединяющих понятия и суждения в практике рассуждения, то предметные логики должны быть полностью исключены из состава реальной логики. Реальная логика универсальна, она относится исключительно к определению смысла логических констант, но не к экспликации какого-либо теоретического или онтологического содержания.

2. Исключение формальных обобщений

Мы должны строго отделить реальную логику от математической логики. Достаточно ясно, что исчисления математической логики — лишь формальные расширения схем реальной логики, не имеющие отношения к логике как нормативной основе мышления.

Простым примером в этом отношении являются многозначные логики. По аналогии с двузначной логикой мы можем строить формальные

исчисления с любым числом значений истинности, но ясно, что здесь мы имеем дело не с расширением принципов реальной логики, а только с формальными их обобщениями, не имеющими статуса логики как нормативной основы мышления.

Не относится к реальной логике и такая логическая конструкция, как логика многоместных предикатов. Строгая запись математических утверждений в ряде случаев требует использования символики многоместных предикатов. Утверждение, что для любых двух точек x и y, лежащих на прямой, найдется точка z, равноудаленная от них обоих, может быть записано формулой $(x)(y)\exists z\ B(x, y, z)$, где предикат B означает трехместный предикат «быть равноудаленным». Если это утверждение истинно для определенных x, y и z, то для них будет заведомо ложным утверждение $B(x, z, y)$ и мы можем написать истинную формулу: $\neg\exists x\exists y\exists z\ (B(z, x, y)\&B(x, z, y))$, которая является теоремой геометрии. Однако сама эта запись, будучи вполне корректной, не дает нам средств вывода, принадлежащих логике многоместных предикатов. Это и понятно: чистое логическое следование может основываться либо на свойствах логических отношений между высказываниями, которые зафиксированы в логике высказываний, либо на свойствах кванторов, которые определены аксиомами узкого исчисления предикатов. Других оснований для чисто логического перехода не существует. Логика отношений, таким образом, играет в математике экспликативную роль и приобретает дедуктивное значение только в том случае, когда применяется как математическая структура, описывающая конкретные множества с заданными отношениями типа симметричности, транзитивности и т. п. С этой точки зрения мы можем утверждать, что логика отношений, введенная Д. Шредером и Б. Расселом, которая была воспринята многими философами в начале XX века как существенное обогащение традиционной логики, является, в действительности, специфической метаматематической теорией, полезной для аксиоматического построения арифметики и теории множеств, но никак не расширяющей сферы реальной логики.

Аналогичное соображение справедливо и для логики предикатов высших порядков. Формальное представление арифметики с самого начала требует использования предикатов второго порядка, так как аксиома индукции не может быть записана конечным образом в исчислении предикатов первого порядка. Но содержит ли в себе это исчисление новую систему аподиктически очевидных логических истин? Ответ здесь также должен быть отрицательным. Исчисление предикатов второго и более высоких порядков важно для логического анализа математики в том плане, что оно позволяет выразить исходные принципы математических теорий в их истинном логическом

соподчинении. Это исчисление, как показывает теория типов, может служить также основой для формулировки правил, ограничивающих область допустимых объектов математического рассуждения. Однако было бы ошибочным ставить формулы этой логики наряду с первичными интуитивно ясными принципами реальной логики. Здесь мы имеем дело снова только с логико-подобной структурой, заведомо выходящей за сферу категориально оправданной и абсолютно обоснованной реальной логики. Логики высшего порядка должны рассматриваться как приемлемые математические структуры, но не как часть реальной логики, определенной общими целями знания[33].

Развитие математической логики совершенствует логику как средство описания математических форм, как базу для теории формальных определений, как систему понятий, необходимых для анализа доказательства и т. п., но оно не обогащает системы собственно логических истин, не увеличивает системы аподиктически очевидных схем, определяющих шаги доказательства. Реальное математическое рассуждение опирается только на интуитивно ясные формы, которые в полном своем объеме зафиксированы в традиционной логике.

3. Реальная логика и естественные исчисления

Отказываясь от признания логики отношений и логики предикатов высшего порядка в качестве части логики, Куайн пишет: «...Я бы предложил проводить границу между логикой и математикой именно по линии классической логики кванторов»[34]. Реальная логика, однако, не может быть отождествлена и с элементарными логическими системами, поскольку любое исчисление наряду с аподиктически очевидными принципами, признанными практикой мышления, всегда содержит множество формул, которые не являются интуитивно ясными и не могут выступать в качестве основы фактического содержательного умозаключения. Реальная логика интуитивно ясна и по этой причине в принципе не может быть отождествлена с системой формул какого-либо исчисления.

Анализ математической практики показывает, что существует совсем небольшое число самоочевидных логических форм (схем), которые лежат в основе любого доказательства. Это такие формы, как закон непротиворечия, закон исключенного третьего, закон транзитивности следования, закон контрапозиции, правило приведения к абсурду и т. п. Если прибавить к этим простым схемам логики высказываний формулы, выражающие силлогистику и схемы непосредственных умозаключений на основе кванторов, то мы получим фактически

все логическое оборудование математики, т. е. всю систему логических норм, которая определяет ход содержательного математического доказательства и его аподиктическую непреложность. Эта простая и безусловно конечная система норм, данная нам с аподиктической очевидностью, и составляет истинное содержание реальной логики в отличие от различного рода формальных исчислений.

В истории логики мы видим постоянное колебание в определении ее объема. Для Канта вся логика сводилась к силлогистике. Он был убежден в том, что всякий дедуктивный метод — это силлогистический метод. В XIX столетии это мнение существенно изменилось. К логике были отнесены все формальные логические исчисления, которые были истолкованы как расширение принципов реального мышления. Л. Кутюра в своей «Алгебре логики» (1906) утверждал, что истинной логикой математики является логика отношений, установленная Расселом[35]. М. Шлик в «Общей теории познания» (1925) возвращается к позиции Канта. «Современная логика в форме, развитой Б. Расселом, — пишет Шлик, — несомненно, предлагает нам более удобные процедуры вывода, чем силлогистика. За пределами этого, однако, все аргументы, направленные против доминирующей роли силлогизма, доказывают только то, что в действительном мышлении человек не движется вперед посредством силлогизма — и это в действительности неопровержимый психологический факт. Но они не в состоянии опровергнуть тезис, что представление абсолютно строгой системы истины, поскольку это представление подразумевается абсолютно строгим и полным, может всегда быть выполнено в форме силлогизма»[36].

Шлик здесь не совсем прав. Реальная логика существенно шире силлогистики по своему объему. Законы логики высказываний, постоянно используемые в математических доказательствах, не могут быть сведены к силлогистике. Однако в приведенном высказывании содержится важная мысль, состоящая в том, что логические исчисления, полезные для экспликации математических утверждений и теорий, не могут рассматриваться как однопорядковые с реальной логикой. Логика реального вывода более бедна и ограничена в своем объеме.

Реальная логика является не только конечной, но и в определенном смысле законченной наукой. Если логика как наука о логических принципах, несомненно, развивается и постоянно обогащается новыми положениями, то логика как система принципов, *фактически определяющих вывод*, как система *дедуктивно значимых интуиций*, порожденных практикой, является исторически стабильной, предельно устойчивой в том смысле, что она не может быть устранена или видоизменена под влиянием каких-либо достижений в науке или в практике. Это обстоятельство подтверждается и историей математики. Анализ «Начал» Евклида показывает, что в них используются совершенно те же

логические средства, что и в современных математических доказательствах, причем — все эти средства. Мы можем с полной определенностью утверждать, что несмотря на многообразие и сложность современных математических теорий, реальное рассуждение современного математика в плане логики ничем не отличается от мышления таких математиков как Гиппократ и Евклид: в том и другом случае оно движется в очень узком кругу аподиктически очевидных норм, таких, как закон непротиворечия, закон исключенного третьего и т.д. Кант был, конечно, не прав, когда утверждал, что логика как наука достигла в силлогистике Аристотеля полного завершения, но он не ошибался в том (несомненно, он имел в виду прежде всего этот факт), что система логических норм, реально определяющих человеческое мышление, является абсолютно стабильной и не меняется с изменением содержания и объема знания.

Историческое развитие логики как науки совершенствует средства теоретического анализа доказательства, но не средства самого доказательства. Реальная логика по своей сути является абсолютным и инвариантным компонентом человеческого мышления.

Классические логические исчисления являются, несомненно, более близкими к реальной логике, чем различного рода формальные конструкции типа многозначных логик и т. п. Их можно назвать *естественными исчислениями*, так как они эксплицируют понимание логического следования, лежащее в основе реальной логики. Исчисление высказываний содержит в себе все возможные схемы умозаключений, не нарушающие принцип «из истинного следует только истинное». Это исчисление имеет гносеологическое значение, ибо оно может быть понято как отрицательное определение истины, очерчивающее границу, за которой рассуждение является заведомо ложным.

Но и естественные исчисления не определяют состава реальной логики. Это ясно уже из того, что все такие исчисления содержат в качестве универсально истинных утверждения, противоречащие интуиции логического следования. Для исчисления высказываний это такие формулы как $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, $A\&A \rightarrow B$ и др., известные под наименованием парадоксов материальной импликации. Это значит, что множество принципов реальной логики представляет собой лишь некоторое конечное и формально неопределяемое подмножество тавтологий естественного исчисления, которые выделяются только на основе критерия аподиктической очевидности.

Многие логики, однако, не согласятся с таким заключением. Они верят, что система норм реальной логики может быть выявлена и строго определена посредством некоторых простых ограничений, наложенных на естественные исчисления. Эта идея лежит в основе так называемых релевантных логик. Опираясь на понятие семантической

информации, А. Андерсон и Н. Белнап предложили новые варианты элементарных логических исчислений, которые, по их мнению, полностью соответствуют интуиции реального вывода. Аналогичные подходы были предложены Е.К. Войшвилло[37].

Формальный успех здесь имеет место, так как эти исчисления уже не содержат парадоксальных формул, противоречащих интуиции реального вывода. В целом, однако, этот путь уточнения реальной логики представляется бесперспективным. Любое логическое исчисление содержит в себе бесконечное число форм и заведомо не содержит критериев, выделяющих формы реальной логики. Здесь неизбежно возникает проблема сравнения различных исчислений друг с другом по их адекватности в отношении реальной логики, которая неразрешима в рамках формального подхода. Мы не можем определить объем реальной логики посредством анализа исчислений и их внутренних критериев.

Будучи основой всякой рациональности, реальная логика является в принципе иррациональной и неформальной: ее содержание не может быть адекватно определено в каких-либо символических и теоретических системах. Существует только один подлинный критерий, очерчивающий область реальной логики, — критерий аподиктической очевидности. Система реальной логики дана человеческому мышлению исключительно на уровне аподиктической очевидности, как последнее основание мышления, не допускающее внутреннего теоретического определения.

Иррациональность реальной логики не означает ее смутности или неопределенности. Уяснение сущности аподиктической очевидности позволяет понять, что определенность на основе аподиктической очевидности является высшей степенью определенности, той определенностью, которая лежит в основе всякой другой определенности в системе человеческого знания.

4. Проблема разделения

Как мы выяснили, логика строго отделяется от математики по признакам аналитичности-синтетичности и нормативности-теоретичности. Мы можем углубить это разделение через рассмотрение таких качеств логики, как универсальность, конечность и содержательность.

Логика как универсальное знание противостоит математике как системе частного знания. Математика является частной или специальной наукой, ибо математическая теория в силу ее формального и замкнутого характера может быть нацелена только на специфический тип интерпретаций и никогда не нацелена на содержательное знание

вообще. Хотя математическая теория имеет в принципе бесконечное число интерпретаций, достаточно очевидно, что все они ограничены узкими фрагментами опыта, соответствующими ее специфической структуре. Ни одна математическая теория не может претендовать на универсальную сферу приложения. Математическая теория — это всегда специальная теория, имеющая хотя и неопределенное, но заведомо ограниченное поле приложения. Логика универсальна в том смысле, что она относится к понятиям вообще и ко всякому знанию, независимо от его содержания. Логика противостоит математике точно так же, как она противостоит всякой науке, имеющей частный или специальный характер.

Важной характеристикой логики является ее конечность. Логическая трактовка класса безразлична к его содержанию, в частности, она безразлична к разделению конечного и бесконечного, которое включено в самые элементарные математические понятия. Для того чтобы от логического понятия класса, мы могли перейти к понятию числа или множества, мы должны прибавить к этому понятию определения количества и порядка, т. е. систему допущений, связанную с идеей бесконечности. Редукция математики к логике не может быть реализована без явного или неявного включения в логику предметных (математических) понятий и принципов, связанных с бесконечностью. Несостоятельность установки логицизма следует, таким образом, из самого статуса логики как системы понятий, не связанной с идеей бесконечности.

Логика отличается от математики как знание содержательное (интуитивное) от знания формального. Математическая теория является формальной по своей сути, поскольку полнота ее аксиом и богатство ее внутренних определений составляют главное условие ее эффективности. Исходя из определенного класса интуиций, математическая теория развивается в сторону логической законченности принципов и полноты внутренних определений, которые в конечном итоге всегда выходят за пределы первичной интуитивной ясности. Формальные принципы для логики, как мы установили, являются лишь внешней и неадекватной формой. Реальная логика функционирует только как система интуитивно ясных принципов, относящихся к языковым категориям. Она не вводит производных определений и, как таковая, не может быть адекватно представлена в форме теоретической дисциплины.

Принципы логики и принципы математики различны по своему содержанию. Принципы логики говорят не об объектах, а только о языковых формах, они говорят только об объемах понятий и об их связях по включению, т. е. о классах, безотносительно к их конкретным содержательным характеристикам. Логика отделена от математики как учение о языке от учения о реальности, как система аподиктических

требований, относящаяся исключительно к форме языка, от понятий и суждений, имеющих предметное содержание.

Логика, в отличие от математики, является беспредпосылочным знанием: она обусловлена только самим фактом языкового мышления и ни в какой мере не зависит в своих формах от математики или какой-либо другой науки. Она требует автономного обоснования, независимого от допущений частных наук. С этой точки зрения является полностью несостоятельной интуиционистская идея выведения логики из математической практики.

Мы, таким образом, должны настаивать на сущностном различии логики и математики. Логика противостоит математике как знание универсальное — знанию специальному, как знание аналитическое — знанию синтетическому, как знание содержательное — знанию формальному и, наконец, как знание нормативное и телеологическое — знанию предметному и отражательному. Логика и математика — дисциплины, находящиеся в принципиально различных измерениях и независимые друг от друга в своей интуитивной основе.

Традиционное объединение логики и математики как единой системы знания, противостоящей знанию, основанному на опыте (Matesis universalis у Лейбница и Гуссерля, формальное знание у Грассмана) имеет смысл, но оно скрывает важную границу внутри самого этого единства, проходящую между логикой и математикой как аналитическим и, соответственно, синтетическим знанием. Эта граница была отмечена Кантом, но не была разъяснена им в достаточной степени. Праксеологическая трактовка логики позволяет увидеть глубинные основания этого различия и провести четкое разделение математики и логики как наук принципиально различного типа.

Логика, в действительности, не более близка к математике, чем к любой другой науке. Убеждение в особой связи логики с математикой, в особом генетическом родстве этих дисциплин — методологическое заблуждение, проистекающее исключительно из более регулярного использования правил логики в математических рассуждениях. Математика не выводится из логики, точно так же как логика не выводится из математической практики. Адекватная программа обоснования математики должна исходить из понимания логики как универсально нормативной структуры, стоящей над всеми науками, которая абсолютно первична перед математикой и не нуждается в ней в плане своего обоснования.

Эти общие соображения позволяют нам сформулировать простые критерии, решающие проблему разграничения в некоторых важных случаях. Из онтологического понимания логики следует требование *формальности* логических норм, независимости их от содержания понятий. Законность этого критерия следует из того, что логика имеет

дело со значениями и их связями вообще, без различения их по содержанию. Суждения, связанные с предметностью и содержанием, не могут принадлежать к логике. В этом плане можно рассмотреть аксиому выбора, которую Д. Гильберт склонен был относить к общим логическим принципам[38]. При понимании реальной логики как системы норм для значений вообще, мнение Гильберта не может быть принято. Аксиома выбора приписывает элементам множества достаточно специальную характеристику, которая не присутствует у всех множеств и никак не может быть выведена из принципов, определяющих необходимые связи значений. Эта аксиома фиксирует в себе определенные характеристики идеальной предметности, вследствие чего имеет синтетический и заведомо внелогический характер.

Анализ аксиомы выделения позволяет, напротив, отнести ее к суждениям обладающим логической истинностью. Суть этой аксиомы состоит в утверждении того положения, что для любого множества A и для любого хорошо определенного предиката B, существует множество членов x множества A, удовлетворяющих предикату B. Нетрудно видеть, что эта аксиома является конкретизацией применительно к понятию множества правила определения через род и вид, которое необходимо для мышления о всяком предмете. При определенности предиката B для всякого отдельного элемента и при истинности закона исключенного третьего, гарантирующего возможность поэлементной проверки любого множества, полное задание множества B становится всегда достижимым. Аксиома выделения может быть понята, таким образом, как результат применения универсального логического принципа к предметной сфере, которая заведомо гарантирует условия его выполнимости. Мы видим, что истинность аксиомы выделения в отличие от аксиомы выбора обусловлена только общими логическими требованиями, предваряющими определение любого математического объекта.

Из онтологической концепции логики следует также требование *универсальности*, состоящее в том, что собственно логические принципы не должны содержать в себе предикатов, замена которых на другой предикат приводила бы к потере их истинности. В качестве некоторого рода пограничного случая здесь можно рассмотреть аксиомы равенства, выражаемые следующими двумя положениями:

$$1.\ x = x;$$

$$2.\ x = y \rightarrow (F(x) = F(y)).$$

Если мы будем рассматривать эти положения сами по себе или в составе чисто логического исчисления, то они будут рассматриваться как логические аксиомы, определяющие производную логическую константу «=», относящуюся к предметам и свойствам вообще. Сомнение

возникает в том случае, когда эти равенства включены в математический формализм, в котором присутствуют независимые от логики собственно математические определения равенства (через процедуру счета, измерения и т. п.). В этом случае аксиомы равенства могут быть поняты как утверждения, задающие общую схему этих частных определений равенства и, таким образом, как общие математические принципы. Мы имеем здесь определенную двойственность, состоящую в том, что одни и те же аксиомы могут рассматриваться одновременно и как логические принципы, относящиеся к объектам и предикатам вообще, и как аналитические суждения, раскрывающие общую идею определенного класса математических определений. Ясно, однако, что между этими интерпретациями не может возникнуть противоречий. Мы исходим здесь из того, что любое математическое равенство включает в себя идею рефлексивности и транзитивности и, таким образом, предполагает истинность указанных аксиом. Это значит, что мы имеем здесь дело с универсальными логическими принципами, имеющими нормативное значение для математики.

Куайн высказывает мнение, что аксиомы равенства являются «более логическими, чем математическими». Его основной аргумент состоит в том, что эти аксиомы, будучи присоединены к элементарным логическим исчислениям, не нарушают их полноты[39]. Характеристики «более» и «менее», однако, мало приемлемы для строгого разделения логического и математического знания. Аргумент «от полноты» важен, но он относится к пониманию логики как исчисления и не имеет подлинного гносеологического характера. Достаточно очевидно, что принципы, решающие проблему разделения логики и математики в данном случае, могут быть только гносеологическими, опирающимися на сущностные характеристики логического знания.

Определение сферы реальной логики требует ее выделения из сферы логических исчислений, а также и отделения от общих математических истин, оправданных на основе аподиктической очевидности. Проведенное рассмотрение показывает, что эти границы имеют существенно различный характер. Если первая из них устанавливается только на основе критерия аподиктической очевидности, то вторая, как представляется, может быть определена на основе рациональных признаков, проистекающих из общего понимания реальной логики. Есть основания думать, что в рамках теории познания мы можем обосновать достаточную систему такого рода признаков и сделать границу между логикой и математикой не менее ясной, чем граница между логикой и эмпирическими науками.

5. Логика как механизм дедукции

Прояснение смысла и объема реальной логики важно для понимания ее места в математике, ибо мы должны говорить здесь не о логических исчислениях, а о схемах истинностных преобразований, относящихся к реальной логике.

Механизм действия логики как средства дедукции проистекает из ее связи с понятием абсолютной истины. Все наше мышление подчинено идеалу абсолютной истины и ограничено нормами, проистекающими из этого идеала. Механизм действия логики состоит в приложении идеальных требований, проистекающих из понятия истины, к реальным суждениям. Если система суждений абсолютно истинна, то она должна подчиняться закону непротиворечия, если она истинна, то она должна исключать неопределенные понятия и, следовательно, должна подчиняться закону исключенного третьего и т. д. Логическая дедукция является ничем иным, как исключением форм суждений, не удовлетворяющих априорному требованию истинности знания.

По отношению к математике нетривиальным является вопрос об отношении логики к внелогическим средствам дедукции. Ясно, что математический вывод основывается не только на правилах логики. Математическое рассуждение существенно опирается на собственно математические очевидности и, в некоторых случаях, оно может быть свободным от логики. Переходы от одной формулы к другой, основанные на определениях объектов, не требуют применения собственно логических схем. Так, переходя от выражения $(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})$ к выражению $a^2 + b^2$, мы опираемся исключительно на определения правил действия с действительными числами и с мнимой единицей. В этом переходе мы не используем каких-либо правил логики, хотя здесь несомненно присутствует предельно надежная дедукция. Многие достаточно объемные математические рассуждения основаны целиком на такого рода предметных определениях и не содержат в себе каких-либо логических правил.

Некто может сказать, что при переходе от $(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})$ к $a^2 + b^2$ просматривается правило силлогизма, выражаемое формулой: $((A \to B) \to (B \to C)) \to (A \to C)$. Нетрудно, однако, видеть, что это правило появляется здесь лишь постфактум, только в качестве итоговой схемы, но не в качестве схемы, обосновывающей шаги доказательства, так как каждый шаг доказательства здесь полностью определен ссылкой на интуитивно ясное математическое определение.

Являются внелогическими все доказательства, связанные с построением. Осуществляя построение, мы опираемся только на свойства объектов, которые используются в построении и не обращаемся к логической дедукции как таковой. Являются внелогическими и все

геометрические доказательства, основанные на непосредственно очевидных геометрических преобразованиях.

Таким образом, надо признать, что в математическом мышлении имеется существенно внелогический компонент, обеспечивающий, тем не менее, надежную дедукцию. Даже если бы математикам было запрещено опираться на логические правила вывода, то математика не перестала бы существовать в качестве дедуктивной и строгой науки. Эта ситуация легко объясняется из того факта, что существует несколько относительно независимых типов аподиктической очевидности, которые определяют надежное математическое рассуждение.

Эти факты позволяют нам понять рациональный смысл интуиционистского истолкования логики. Интуиционистская математика, если посмотреть на нее с точки зрения соотношения математики и логики, является не чем иным, как попыткой полного освобождения математики от логики, попыткой представить математику как систему выводов, опирающихся только на собственно математические интуиции. Брауэр склонен был думать, что математическое рассуждение внелогично по своей природе, и что оно может двигаться исключительно на основе внутренних очевидностей, определяемых понятием построения. Правила логики понимаются, с этой точки зрения, только как схемы математических доказательств, выявленные в практике конструктивного рассуждения.

Сама практика интуиционизма показала, что возможности внелогических средств недостаточны и что для представления математики во всей ее значимой части мы нуждаемся также и в формах чистой логики.

Правильное решение вопроса о месте логики в математике должно исходить из понимания общих целей математического мышления. Если мы вправе предположить, что в своем историческом развитии математика стремится к построению максимально богатой совокупности непротиворечивых систем, способных быть основой моделирования реальных связей и процессов, то ясно, что оно будет опираться на любые очевидности, полноценные в дедуктивном отношении и будет использовать их в максимальных пределах, в плане реализации этой общей задачи. Математические и логические интуиции представляют собой два глубинных корня математического мышления, два независимых измерения, определяющих возможности расширения сферы математического мышления.

Это значит, что математическое мышление имеет двоякую интуитивную основу: оно опирается одновременно и на собственно математические (предметные) очевидности, и на логические (нормативные) очевидности, проистекающие из общих целей мышления. Математика с этой точки зрения является соединением логики как чи-

стой нормативности с идеально предметными представлениями, порожденными деятельностью.

6. Дефиниторная и экспликативная функция логики

Функция логики в математике не ограничена процессом дедукции. Логика выполняет в математическом рассуждении по крайней мере еще две функции: она устанавливает правила построения определений и вырабатывает язык для адекватного представления математических утверждений и теорий. Эти функции (назовем их, соответственно, функцией дефиниции и экспликации) существенно автономны и заслуживают особого рассмотрения.

Математические теоремы выводятся не только из аксиом, а из аксиом и определений, причем именно обогащение системы определений являются источником усложнения и обогащения математической теории. Каждое новое определение конкретизирует объект исследования и увеличивает информативность теории в целом. Развитая математическая теория несравненно более информативна, чем система исходных допущений (аксиом), и это происходит, несомненно, вследствие усложнения ее совокупного объекта, которое достигается введением производных определений.

Дефиниторная функция логики, будучи подчинена функции дедукции, тем не менее имеет самостоятельное значение. Наряду с логическими правилами, осуществляющими дедукцию, мы имеем правила, обеспечивающие введение определений, и в этом смысле мы должны говорить о логике определений как о самостоятельной системе логических принципов. Такие правила, как принцип равенства определяемого и определяющего по объему понятия и принцип порочного круга, — это не правила перехода от одних суждений к другим, а правила *введения объектов*, о которых мы можем вести речь. Сюда же могут быть отнесены и ограничения теории типов, определяющие область значений логических функций.

Говоря о принципах логики, мы чаще всего имеем в виду формулы, лежащие в основе умозаключений, и склонны связывать надежность математического мышления исключительно с надежностью этого рода принципов. Между тем принципы, определяющие введение новых понятий, как показывает практика, представляются в этом отношении не менее важными. Многие факты говорят о том, что обоснование логики определений является значительно более сложной задачей, чем обоснование логики дедукции. Главная трудность состоит здесь в том, что дефиниторные правила не связаны с аподиктической очевидностью, которая определяет систему универсальных

правил дедукции, и не определены полностью принципами дедукции. Практика показывает, что каждая математическая теория в принципе определяет свой комплекс приемлемых определений. Если понятие множества всех множеств приводит к противоречию в теории множеств, то аналогичное по общности и по логической схеме понятие категории всех категорий, является вполне корректным[40]. Это значит, что логика определений не может рассматриваться только в рамках анализа общих принципов логики. Проблема обоснования логики определений требует особого анализа.

Требует особого рассмотрения также и экспликативная функция логики. Логические символы вводятся в современные математические работы, как правило, не с целью демонстрации строгости доказательств и не с целью строгого обоснования существования объектов. Они необходимы прежде всего для систематического представления объектов теории, выявления их логического соподчинения, а также для представления принципов теории в точной и общезначимой форме. Как уже было отмечено выше, логика многоместных предикатов и логика отношений выполняют в математике прежде всего функцию экспликации.

7. Автономия логики

Философия XX столетия базировалась на представлении о логике как о науке, тесно связанной с математикой. Это представление возникло из развития логики в XIX веке, когда трудами Д. Буля и Е. Шредера была показана возможность представления логических принципов в простых формальных исчислениях. Математизация логики привела к возрождению философии математики Лейбница, которая рассматривала логику как часть всеобщей математики.

Представление о логике как о науке, имеющей особое отношение к математике, нашло выражение и в программах ее обоснования. Логицизм рассматривал логику как истинное основание математики и основу всех математических понятий: отношение между логикой и математикой понималось здесь как отношение между начальной и зрелой стадиями одной и той же системы понятий. Интуиционистская программа также устраняет особый статус логики, рассматривая логические нормы в качестве схем, выявляемых практикой математических доказательств. Не разделяя идеи о полной редукции математики к логике или наоборот, Гильберт, тем не менее, исходил из того представления, что логические и математические понятия обусловлены друг другом в такой степени, которая исключает возможность их автономного обоснования. Программа обоснования математики, по его мнению, не должна требовать строгого разделения этих двух типов понятий[41].

В действительности, однако, между логикой и математикой не существует столь тесной связи. С деятельностной точки зрения логика столь же мало зависит от математики, как и от опытных наук. Мы выяснили, что логика — это априорная чисто языковая структура, имеющая одинаковое отношение ко всем типам знания. Логика не изменила бы своего состава при полном отсутствии математики в системе наук, и развитие математики не может изменить состава реальной логики.

Единство логики и математики с этой точки зрения может быть признано лишь в том смысле, что исходные принципы математики наряду с логикой входят в состав априорного знания, заданного универсальной онтологией мышления. Это единство, однако, относительно. Мы не можем согласиться с Гуссерлем, что логика объединена с математикой «предметностью вообще», и не можем признать идеи Пиаже, согласно которой логика и математика порождены единым («логико-математическим») опытом. В действительности, логика не вытекает из математики и не определяет содержание математических теорий. Логика и математика относятся к различным аспектам онтологии и имеют различные функции в познании. Мы выяснили, что между утверждениями логики и математики лежит жесткая разграничительная линия, определенная понятиями универсальности, аналитичности и нормативности. Гильберт, конечно, прав в том, что нельзя построить математической теории, не опираясь на логические понятия, и нельзя построить логического исчисления, не используя идеи числа и порядка, но этот факт относится к формальному представлению теорий и не проясняет истинного статуса логики. Мы должны ясно осознать то обстоятельство, что логика как система регулятивных принципов полностью определяется в рамках чисто языковых категорий и столь же мало зависит от существования математики, как и от существования какой-либо другой частной науки. Обычное соединение логики с математикой в их общем противопоставлении эмпирическому знанию затемняет ее истинный статус. Возможность формального представления логических принципов не устраняет того положения, что логика является содержательной теорией, описывающей структуру языка. Можно сказать, что логика образует особый тип содержательного знания, которое основано на строгих понятиях и допускает формальное представление.

Строгое разграничение между логикой и математикой важно в методологическом отношении. Осознание абстрактной, чисто языковой сущности логики устраняет претензии логицизма на выведение из логики содержания математики, а также и претензии интуиционизма на корректировку логики в процессе расширения математической практики. Обе эти установки искажают статус логических принципов. Должна быть отклонена и формалистская трактовка логики как системы исчислений, органически связанных с математикой. Мы должны понять

логику как чисто лингвистическую структуру, как теорию значений, не зависимую от содержания математики и от содержания мышления вообще, обусловленную только общей целью мышления, и, следовательно, имеющую статус абсолютной нормы в отношении любого знания. Понимание абсолютности логики важно в том отношении, что оно возвращает осмысленность проблеме окончательного обоснования математики, которая дискредитирована современной релятивистской философией науки.

Глава 4.

Интуиционистская критика закона исключенного третьего

Брауэровская критика классической логики является более радикальной, чем критика Рассела, ибо она посягает не только на правила определений, обусловленные особенностями теории, но и на элементарные законы, лежащие в основе дедукции. Брауэр отвергает надежность самоочевидных принципов, относящихся к сфере реальной логики.

Принято считать, что Брауэр показал ненадежность закона исключенного третьего и связанных с ним логических принципов, таких, как правило снятия двойного отрицания, правила де Моргана и т. п. Критика Брауэра признана математическим сообществом в том плане, что требование конструктивности лежит в основе большинства современных подходов к проблеме обоснования математики. Можно сказать, что эта критика вошла в практическую психологию математиков, ибо даже в тех областях математики, где классическая логика используется в полном объеме, авторы не упускают случая отметить конструктивный характер своих рассуждений, желая сказать этим, что эти рассуждения не содержат в себе сомнительных моментов. Математики и философы говорят о ненадежности закона исключенного третьего как о некотором хорошо известном и несомненном факте.

Праксеологическая концепция логики очевидным образом противостоит этой критике. Если интуитивно ясные принципы реальной логики являются требованиями, связанными с целевой установкой понятийного мышления вообще, то они строго универсальны и не могут быть отменены или ограничены для какой-либо частной сферы знания. Основные аргументы на этот счет уже изложены. Рассмотрение вопроса, однако, было бы неполным без анализа собственных аргументов Брауэра.

1. Аргументы Брауэра

Самой общей основой критики закона исключенного третьего у Брауэра является идея содержательности математики. Эта идея, которая

была уже у Аристотеля, состоит в том, что рассуждения математиков, в конечном итоге, должны относиться к конкретным предметам, которые, подобно фактам опытных наук, даны непосредственно и с полной определенностью. Лагранж и Гаусс выступали против использования в математике актуальной бесконечности на том основании, что мы не можем схватить ее в представлении и приписать ей определенные свойства. Рост абстрактности математики в XIX веке усугубил ситуацию. Сторонники содержательности и наглядности увидели, что математика наполняется объектами, относительно которых мы можем нечто утверждать или отрицать лишь на основе дедукции, исходя из определений и постулатов (иногда довольно искусственных), но не на основе их непосредственного восприятия и проверки. Глубинная основа возражений Кронекера против теории множеств Кантора состояла именно в этом неприятии наглядно неконтролируемой абстрактности.

Здесь же находятся и истоки позиции Брауэра. В отличие от Кантора и Гильберта, которые были готовы включить в математику любые непротиворечивые понятия, Брауэр ставил своей задачей построение *истинной* математики, все понятия которой наполнены определенным содержанием. Он был убежден, что Пеано отрывает математику от ее основы, превращает ее в набор лингвистических форм, которым ничего не соответствует в действительности. В своей первой работе об основаниях математики он пишет о логистике Пеано и Рассела: «Она (логистика — *В.П.*) не дает нам ничего для оснований математики, поскольку она остается радикально отделенной от математики... Чтобы предохранить себя от противоречий, она должна существовать как механическая стенография *языка математики*, который сам по себе *не математика*, а не более, чем подверженное ошибкам средство, используемое математиками для передачи математических утверждений друг другу и для удержания их в памяти»[42]. Сторонники символической школы, по его мнению, упускают из виду, что «между совершенством математического языка и совершенством математики не существует никакой ясной связи»[43].

Исходя из этих соображений, Брауэр сформулировал строгий критерий приемлемости математических суждений. Этот критерий он усмотрел в свойстве интуитивной ясности исходных математических объектов и в конструктивном введении производных объектов и их свойств. Отрицательная критика абстрактной математики, которая преобладала у Кронекера, была заменена позитивной программой представления математики на основе понятия конструктивности. Все аргументы Брауэра против классической логики прямо или косвенно связаны с этим критерием приемлемости математических суждений. Можно выделить (конечно, со значительной степенью условности) шесть таких аргументов[44].

1. ***От понятия математического существования.*** Математическое рассуждение может осуществляться в двух формах: как основанное на интуитивно ясной конструкции объекта и как вывод из принятых посылок, посредством некоторого набора логических принципов («логическая калькуляция»). Первичной для Брауэра является первая форма. Расширение математического знания за счет логики допустимо, по его мнению, лишь в тех пределах, в которых оно не выводит за рамки конструктивного подтверждения. Закон исключенного третьего, очевидно, не согласуется с такой установкой. «Если мы, — пишет Брауэр, — на некоторое время оставим идею конструирования и будем свободно оперировать логическими правилами, следуя *принципу силлогизма, закону непротиворечия* и *закону исключенного третьего*, то можем ли мы быть уверенными в том, что каждая часть нашего рассуждения может быть подтверждена через возвращение к методу конструирования? Можно показать, что эта уверенность является вполне обоснованной для первых двух законов, но не для последнего»[45]. Если конструктивность объектов признана в качестве их необходимого свойства, то закон исключенного третьего не имеет универсальной значимости, поскольку он требует признания объектов, недоступных для конструктивного анализа. Логика, по Брауэру, не должна приводить к результатам, недостижимым на основе конструктивной интуиции.

2. ***От понятия логического отрицания.*** Если утверждение о существовании объекта (свойства) понимать как возможность его построения (предъявления в конкретном виде), а отрицание как сведение к абсурду допущения о возможности построения, то отрицание отрицания некоторого свойства, очевидно, не тождественно его утверждению. Рассмотрим следующий пример. Зададим действительное число P следующим образом: если в десятичном разложении числа π имеется последовательность цифр 0123456789 и 0 является k-м знаком разложения, то $P = 0{,}33\ldots3$, где после запятой стоит ровно k троек; если же такой последовательности цифр не существует, то $P = 0{,}333\ldots = 1/3$. Согласно построению, число P не может быть иррациональным, но, с другой стороны, мы не можем утверждать и его рациональности, поскольку не можем его предъявить, т. е. указать какой из двух случаев имеет место в действительности. Таким образом, отрицание отрицания свойства в общем случае не является достаточным для его утверждения, что очевидно противоречит смыслу закона исключенного третьего как универсально значимого логического принципа[46].

3. ***От парадоксов.*** Глубинной причиной парадоксов, обнаружившихся в теории множеств, является по Брауэру использование понятий, не имеющих математического (конструктивного) смысла, в частности, использование классической логики за пределами ее значимости. Законы классической логики — это только законы языка математики. Они

приводят к бессмыслице и противоречиям, если начинают прилагаться к неконструктивным понятиям, к «математическим словам», не имеющим отношения к истинной математике. «Можно показать, — пишет Брауэр, — что парадоксы возникают из той же путаницы, что и у Эпименида, а именно, они возникают там, где законы языка математики распространяются на язык математических слов, который не связан с математикой. ...В конечном итоге все парадоксы исчезают, когда мы ограничиваем свои рассуждения системами, которые могут быть эксплицитно построены на основе базовой интуиции, другими словами, когда мы рассматриваем математику как предшествующую логике, а не наоборот»[47].

4. ***От неразрешимости.*** Если оба компонента формы «A или не-A» истолковываются в смысле некоторой процедуры (построения или доказуемости), то утверждение этой формы в качестве универсального принципа становится, по мнению Брауэра, ничем иным как утверждением разрешимости всех проблем. «Вопрос о значимости принципа исключенного третьего, — пишет Брауэр, — эквивалентен вопросу о том, могут ли существовать неразрешимые проблемы. Нет никакого достаточного основания, которое иногда высказывается, что не существует никаких неразрешимых проблем»[48].

В отличие от приведенных выше этот аргумент является более общим, так как он не предполагает конструктивного истолкования утверждения и отрицания. Здесь достаточно предположить, что утверждение и отрицание связаны с доказуемостью в каком-либо смысле. Он покоится на предположении (которое впоследствии было строго доказано К. Геделем), что существуют истинные математические высказывания, неразрешимые в системе.

5. ***От непроверяемости.*** Закон исключенного третьего безусловно применим к конечным множествам, ибо «для свойств, полученных с помощью закона исключенного третьего внутри специфически конечных систем, всегда достижимо их эмпирическое подтверждение, если мы имеем достаточно времени в своем распоряжении»[49]. Для бесконечных множеств такая проверка в принципе невозможна. Закон исключенного третьего, считает Брауэр, имеет определенный смысл и по отношению к бесконечному множеству элементов, если для конкретного свойства P мы можем показать, что любой элемент этого множества либо обладает свойством P, либо не обладает им. В некоторых случаях это возможно. Так, для каждого из натуральных чисел мы можем утверждать, что оно либо простое, либо составное, так как мы имеем способ эффективного определения принадлежности числа либо к множеству простых, либо к множеству составных чисел. Для множества свойств, однако, такой процедуры не существует. Здесь

может иметь место неразрешимая или, по крайней мере, еще неразрешенная проблема и мы не имеем основания a priori предполагать выполнимость закона «A или не-A» для каждого из таких свойств. Мы не имеем оснований, считает Брауэр, утверждать, к примеру, что каждое из множеств некоторой совокупности множеств либо конечно, либо бесконечно, ибо такое утверждение предполагает наличие процедуры отображения любого множества из этой совокупности либо на начальный отрезок натурального ряда, либо его или его части, — на множество чисел натурального ряда в целом[50].

Некто может возразить в том смысле, что существует объективное положение дел, независимое от наблюдателя, и что на самом деле все-таки существует только одно из двух: либо A, либо не-A. Эти возражения, считает Брауэр, исходят из незаконной объективации математических истин, из метафизического предположения, что и после того, как человечество будет уничтожено, они будут существовать наряду с законами природы. Ценность интуиционистской математики, по его мнению, состоит в том, что она освободила математическое мышление от апелляции «к гипотетическому всеведующему существу»[51]. Г. Вейль писал в поддержку этой идеи Брауэра: «Принцип исключенного третьего для таких утверждений (для утверждений принадлежности или непринадлежности некоторого свойства всем числам натурального ряда — *В.П.*) мог бы быть справедливым для Бога, способного обозревать все натуральные числа как бы единым взором, но не для человеческой логики»[52].

6. ***Генетический аргумент.*** Брауэр считает, что в своем развитии логика зависит от многих факторов и, в принципе, даже в сфере обычного мышления возможны различные логики. Он не исключает возможности, что люди, изолированные от нашей цивилизации, могут иметь существенно иную логику[53]. В своем развитии логика зависит от объектов мышления и изменяется с изменением содержания мышления. Традиционная логика математического доказательства сформировалась через оперирование с конечными совокупностями объектов. Вследствие привычки ее законам был приписан априорный характер и были утеряны представления об условиях ее применимости, связанные с ее происхождением. Сбои, которые начинает давать классическая логика в применении к бесконечным множествам, в этом плане вполне естественны. «...Догма универсальной истинности закона исключенного третьего должна рассматриваться как феномен истории цивилизации того же порядка, как и долго державшееся верование в рациональность числа π или вера в то, что небесный свод вращается вокруг Земли»[54].

Аргументы 1–4 можно назвать логическими, поскольку они исходят из некоторых фактов логики (из рассмотрения структуры чистых дока-

зательств существования, из факта неполноты теории и т.д.). Последние два аргумента являются методологическими или философскими, так как предполагают определенные допущения о природе логики и о праве математика высказывать априорные (недоступные проверке) суждения о бесконечных множествах.

2. Критика логических аргументов

Идея содержательности математики достаточно естественна для математиков XIX века. Она проистекает из понимания математики как науки о некоторых непреложных фактах, данных с очевидностью, подобных фактам опытных наук. Рост абстрактности математики вошел в противоречие с таким представлением о ее предмете. Методологический конфликт между сторонниками содержательной и сторонниками символьной математики был неизбежен.

Нечто подобное наблюдалось и в физике. Многие физики воспринимали рост абстрактности своей науки как уход от истинного предмета физики, подмену его математическими фикциями. Постепенно, однако, было понято, что целью физики является не отыскание наглядного и понятного для всех механизма явлений, а предсказание и объяснение явлений из минимума принципов, которые сами по себе могут быть далеко не очевидными. Как только было понято предсказательное, чисто дедуктивное значение физических теорий, традиционные требования наглядности и понятности физических принципов были отброшены как излишние, не проистекающие из функции физической теории.

Аналогичное изменение в методологических воззрениях произошло и в математике. В настоящее время уже достаточно ясно, что задача математических теорий состоит не в описании некоторой очевидности, а в построении систем объектов и операций, полезных для моделирования реальных отношений, открываемых в науке и технике. С этой точки зрения, которую можно назвать функциональной или прагматической, требования содержательности и интуитивной ясности понятий, которые были столь существенными для Гаусса, Кронекера и Брауэра, представляются произвольными ограничениями, не проистекающими из сущности (назначения) математики. Это относится и к требованию конструктивности. Никто не откажется от использования математической теории только потому, что некоторые ее посылки не обладают интуитивной ясностью или конструктивностью. Математическая практика далеко вышла за пределы этих ограничений. Но это значит, что основной аргумент Брауэра против закона исключенного третьего покоится на произвольном допущении о природе математической теории, не проистекающем из ее назначения.

В основе второго аргумента Брауэра лежит определенное понимание утверждения и отрицания, которое Брауэр считает необходимым принять для сферы истинной математики. В классической математике эти понятия дополняют друг друга так, что отрицание истины есть ложь и отрицание лжи есть истина, вследствие чего двойное отрицание всегда приводит нас в исходную позицию. В принципе и при конструктивном определении математического существования эта симметрия могла бы быть сохранена, если бы мы определили отрицание как просто отсутствие построения. Закон исключенного третьего остался бы в таком случае общезначимым и означал бы относительно определенного объекта, что либо его построение существует, либо нет. Но Брауэр определяет отрицание не просто как отсутствие осуществленного построения объекта, но как наличие некоторого рассуждения, а именно, доказательства абсурдности предположения о существовании этого объекта. Но тем самым немедленно разрушается классическая дихотомия истинности и ложности, ибо фактическое отсутствие построения, очевидно, не тождественно доказательству его принципиальной невозможности. Операция отрицания становится более сложной и двойное отрицание уже не приводит нас к исходному состоянию. Так появляются псевдообъекты типа действительного числа, относительно которого абсурдно утверждение его иррациональности и в то же время невозможно утверждение рациональности.

Вопрос о том, насколько законным является принятое Брауэром определение отрицания, сводится к вопросу о том, насколько это определение продиктовано функцией математики. Подход с этой позиции позволяет утверждать, что никакого опровержения закона исключенного третьего здесь также не происходит. Единственный мотив, оправдывающий принятие в интуиционистской математике именно такого определения отрицания — это стремление сделать операцию отрицания содержательной, определить ее через понятие построения. Но, как уже было сказано, требование содержательности не проистекает из приложений математики и не может определять логику математического мышления.

Специфика отрицания в классической логике состоит в том, что оно обеспечивает двузначность этой логики. В настоящее время мы имеем все доводы за то, что двузначность реальной логики проистекает из глубинных предпосылок мышления и не может быть устранена на основе каких-либо частных фактов или произвольных определений.

Для многих математиков начала XX века представлялось достаточно убедительным допущение Брауэра о том, что источником парадоксов, обнаруженных в теории множеств, является использование закона исключенного третьего за пределами его значимости. В настоящее время, однако, эта гипотеза не выглядит убедительной. Еще в начале

XX века Б. Рассел показал, что все известные парадоксы устраняются при принятии естественных ограничений при определении понятий, которые он сформулировал в своей теории типов. Э. Цермело (1908) показал, что возможно непротиворечивое аксиоматическое представление теории множеств при запрете на отношение самопринадлежности множеств, т. е. при исключении выражений вида $X \in X$. А.Н. Колмогоров в статье «О принципе tertium non datur» (1925) установил, что для широкого класса математических рассуждений закон исключенного третьего совершенно безопасен: он не может быть источником парадоксов, ибо парадоксы, содержащиеся в классической теории, неизбежно воспроизводились бы и в аналоге этой теории, не использующей закон исключенного третьего. Аналогичное заключение следует также и из результата К. Гёделя (1933), согласно которому все противоречия классической арифметики, если такие существуют, воспроизводятся и в интуиционистской арифметике. Мы можем с полной определенностью утверждать: со времен Брауэра логика не получила ни одного результата, подтверждающего предположение, что закон исключенного третьего является источником парадоксов в теории множеств. Исследования, в общем, подтверждают идею Рассела, согласно которой возникновение парадоксов обусловлено логикой определений, но не логикой дедукции.

Аргумент от неразрешимости наиболее весом, так как он основан на логическом факте, который не может быть поставлен под сомнение: многие математические теории неполны и далеко не все проблемы разрешимы в смысле доказательства A или не-A. Однако этот аргумент, если подходить к делу достаточно строго, также бьет мимо цели. Когда мы говорим, что в теории возможна ситуация, при которой некоторое утверждение недоказуемо и неопровержимо, то мы делаем высказывание о доказуемости, относящееся к метатеории. А именно, мы утверждаем, что формула «A или не-A» не является универсальной в метаязыке при определенной ее интерпретации (существует доказательство A или существует доказательство не-A). Но почему ограничение, существенное для метатеории, для характеристики системы доказательств должно истолковываться и как ограничение на логику самих доказательств, то есть на логику теории? Общее логическое рассмотрение показывает, что указанное метатеоретическое ограничение будет сохраняться при различных изменениях логики доказательства. Метатеоретическая формула «A или не-A», в общем случае, не универсальна и для классических, и для интуиционистских теорий. Никакой прямой связи между логикой теории и логикой метатеории не существует. Но это значит, что допустимая логика доказательства в теории должна иметь некоторое автономное оправдание, по крайней

мере, ясно, что ее возможные ограничения не проистекают непосредственно из ограничений, значимых для метатеории. При строгом различении между логикой теории и логикой метатеории то положение, что не все проблемы разрешимы, никак не может быть истолковано как аргумент для отказа от классической логики.

3. Критика философских аргументов

Традиционная философия исходила из идеи универсальности логических норм и их независимости от материала мышления. Эта позиция с полной ясностью была выражена И. Кантом. Согласно Канту, логика — это наука не для частных видов предметов, но для предметов вообще. Логика, по Канту, может быть уподоблена грамматике, которая исследует формы выражения мысли, независимо от предметов, о которых идет речь. С этой точки зрения интуиционистские ограничения, конечно, неприемлемы.

Многие логики и философы допускали зависимость логических норм от опыта. У Дж.Ст. Милля, как мы видели, логика представляет собой систему конвенций, отражающих связь между психическими состояниями субъекта. У Спенсера логика отражает общую структуру вещей и в этом смысле также зависит от некоторого аспекта реальности. В принципе, и у Милля, и у Спенсера логика может изменяться в процессе эволюции человеческого мышления. Но важно отметить, что в обоих этих случаях логика зависит от некоторого общего (идеального или материального) основания, и ее возможное изменение не нарушает ее универсальности: это изменение может быть здесь лишь переходом от одной системы универсальных норм к другой. Логика в таком ее понимании не априорна, но неизменно универсальна, одинакова для индивидов и всех областей знания.

Брауэр в своем понимании логики занял крайне релятивистскую позицию: логика зависит у него от типа рассматриваемых объектов и, таким образом, заведомо и неаприорна, и неуниверсальна. Логика математики может отличаться у него от логики обычного языка, а логика теории множеств должна быть другой, чем логика арифметики. С точки зрения современной теории познания эта позиция является совершенно неудовлетворительной. Наиболее значимые современные концепции логики — операционалистская и эволюционная — оправдывают идею универсальности логических норм. Позиция Брауэра опровергается и историей науки. Зависимость логики от содержания мышления, очевидно, должна была бы проявиться в истории науки, которая полна переворотов, связанных со сменой объектов мышления. До настоящего времени мы, однако, не имеем здесь ни одного ясного примера, подтверждающего идею Брауэра о возможной перестройке логики.

Факт универсальности логики становится предельно ясным в рамках праксеологической концепции познавательных норм, в которой логика понимается как система требований к форме мышления, продиктованная практической ценностью знания. С этой точки зрения логика универсальна, поскольку ее внутренняя структура не связана с каким-либо конкретным опытом и с эмпирическими подразделениями вообще.

Законы логики являются идеально нормативными в том смысле, что они идут от должного, от идеальных задач знания, но не от его реального состояния. На этом, собственно, основан и сам механизм действия логических норм. Наше знание, как правило, далеко от истины, понятия не обладают определенностью, исходные суждения не согласованы друг с другом. Но в теоретическом мышлении, на уровне формального соподчинения понятий, мы действуем с ним исходя из предположения абсолютной истинности посылок, полной определенности понятий и непротиворечивости исходных описаний. Это дает возможность увидеть отклонения нашего знания от идеала и внести изменения в систему наших посылок. Эффективность логики как механизма дедукции состоит, таким образом, в априорном приложении идеала к некоторому явно не идеальному положению дел. Трактовка логики как зависимой от материала мышления лишает ее принципы нормативного статуса, ибо индуктивное знание не может быть строгой нормой для другого индуктивного знания. Логика эффективна именно за счет своей идеальности, полной независимости от материала мышления.

Идея зависимости логики от материала мышления, на которой настаивал Брауэр, является с этой точки зрения элементарным заблуждением, проистекающим из упрощенного эмпирического понимания структуры научного знания, типичного для XIX века. Те же истоки имеет и культурологический релятивизм, согласно которому различные цивилизации могут иметь различную логику. Эта идея также не подтверждается фактически и не находит никаких доводов в рациональной теории познания.

С праксеологической точки зрения мы должны отвергнуть также и общий тезис Брауэра о первичности математики перед логикой. Брауэр, несомненно, прав в том, что математика базируется на собственных интуициях, и что математик не нуждается в логике, когда он движется на уровне интуитивно ясных математических конструкций. Мы должны признать наличие интуитивной основы математики, независимой от логики. Исходя из этой правильной и глубокой идеи, Брауэр пытался определить логику на основе математики, дать ее принципам математическое истолкование и, таким образом, установить точные границы ее действия. Он пытался свести логику к математике, точно так же как Фреге и Рассел пытались осуществить обратную редукцию. В настоящее время, однако, ясно, что оба эти проекта являются

бесперспективными. Хотя математика в своих исходных интуициях независима от логики но и логика не в меньшей степени независима от математики, ибо она базируется на очевидностях иной природы, имеющих более общий характер и не связанных со спецификой математического знания.

Замысел Брауэра состоял в том, чтобы построить математику совершенно независимо от логики, основываясь только на собственно математической интуиции, связанной с идеей построения. То, что при этом называется логикой, — это не часть классической логики и не логика вообще, а только система схем преобразования, соответствующих понятию конструктивности, запись переходов, сохраняющих конструктивность в языке классической логики. Различие между классической и интуиционистской логикой состоит не в том, что последняя не содержит тех или иных форм вывода, но в смысловой основе, с которой они связаны: если классическая логика опирается на категориальные интуиции, представляя собой универсальную онтологию мышления, то интуиционистская логика базируется только на интуиции конструирования, то есть на представлениях специального вида. Интуиционистская логика, таким образом, — это не общая логика математического мышления, а лишь средство систематизации той части математики, которая допускает внелогическое (конструктивное) представление.

С праксеологической точки зрения мы должны отбросить и требование проверяемости. Идея проверяемости законов логики несостоятельна, поскольку эти законы — не индуктивные обобщения на основе опыта, а нормы, накладываемые на мышление его функцией. Мы запрещаем принятие A и не-A одновременно не потому, что знаем, что нигде в мире A и не-A не могут сосуществовать, а потому, что такое принятие разрушило бы практическую ориентацию нашего знания, потому, что теория отвечающая на наши вопросы суждениями в форме «A и не-A» не имеет для нас практической ценности. Аналогичным образом, мы утверждаем «A или не-A» в качестве истинного и универсального принципа не потому, что он в достаточной степени проверен в опыте, а по той причине, что этот принцип заключает в себе требование точности понятий, проистекающее из допущения истинности посылок рассуждения. Деление всех вещей в мире относительно любого признака A на два класса: A или не-A — идет не от фактов, не от возможности проверки, а от фундаментального подразделения бытия и небытия, имеющего праксеологическую природу и лежащего в основе всякого рационального мышления. Эти законы — не обобщения опыта, а нормы, навязанные функцией знания.

Здесь мы видим эмпирические и индуктивистские истоки мышления Брауэра. Высказывания о конечных множествах, по его мнению,

надежны, поскольку можно достичь их подтверждения, просматривая элементы множества друг за другом. Это представление, имеющее смысл в сфере опытного знания (на нем основано различение полной и неполной индукции), становится смутным и практически бессодержательным в применении к математике. П. Бернайс справедливо указывал на то обстоятельство, что очень большие конечные множества столь же недостижимы для нас в смысле проверки, как и множества бесконечные[55]. Это значит, что и для конечных множеств существует только принципиальная возможность проверки, некая совершенно неуловимая тень проверки. Дело не в том, что граница между проверяемым и непроверяемым в математике проведена Брауэром неточно, а в том, что сама идея проверяемости перенесена в математику незаконно, без должного понимания природы математического знания. Простые арифметические равенства, которые проверены несчетное число раз в обыденной практике, являются безусловными для нашего сознания отнюдь не в результате совокупности этих проверок. Логика и арифметика имеют не эмпирическое, а онтологическое основание своей безусловной значимости.

Не все математические свойства в одинаковой степени разрешимы. Мы имеем конечную процедуру определения того, является ли данное натуральное число простым или составным, но мы не имеем аналогичной процедуры относительно свойства рациональности — иррациональности действительных чисел. Связывать приемлемость принципов логики с определенными свойствами со степенью их разрешимости, настаивать на том, что утверждение «Каждое натуральное число либо простое, либо составное» является более надежной посылкой математического рассуждения, чем утверждение «Каждое действительное число либо рационально, либо иррационально» — значит искажать статус логики как универсальной нормативной структуры, подчинять нормы логики внутренним особенностям понятийных систем и степени определенности понятий. В действительности, логика не имеет отношения к такого рода внутренним особенностям понятий. В частности, она никак не связана и с различением конечного и бесконечного, сколь бы важным оно не являлось для понимания математики как науки.

Идея проверяемости у Брауэра имеет очевидную связь с критикой метафизики в позитивистской философии науки. «Мы будем мыслить строго, если устраним метафизические доводы из наших рассуждений и будем принимать только те положения, которые проверяемы в опыте» — таков методологический тезис позитивизма и он, в определенном смысле, переносится Брауэром на математику[56]. Закон исключенного третьего дает повод для обвинения в метафизичности, ибо он содержит в себе допущение о *действительном положении дел*, независимом от наблюдателя и от возможностей наблюдения вообще.

Позитивистская идея научной строгости состоит в том, чтобы избавиться от такого рода допущений и обосновать научное знание вплоть до самых высших его принципов только в рамках эмпирической проверки. Несостоятельность этой идеи в настоящее время очевидна. Последней основой нашего знания является не чувственный опыт и основанная на нем система проверок, как это думали позитивисты, а система категориальных интуиций, в которых происходит упорядочение опыта, и которые сами по себе не зависят от опыта и не проверяются им. Логика — часть этой высшей структуры мышления, ее утверждения метафизичны в полном смысле этого слова, ибо они не взяты из опыта и не поддаются опытной корректировке, и вместе с тем они являются необходимой структурой мышления, основой строгости и всякой возможной проверки. Математическая интуиция производна от категориальной (метафизической) интуиции, математическая строгость основана в конечном итоге на метафизической строгости, на безусловной интуитивной ясности категорий пространства, времени, части и целого, порядка и т. п. Мы должны понять тот простой факт, что наиболее строгая часть человеческого мышления в принципе непроверяема, ибо она как последняя система координат лежит в основе всякой проверки и всякого строгого мышления. Брауэр прав в том, что опираясь на закон исключенного третьего, мы входим в область метафизических (принципиально непроверяемых) утверждений, но он заблуждается, считая такой выход связанным с потерей строгости и определенности мышления. В действительности, выход к метафизике в форме аподиктически очевидных принципов логики является выходом к априорной системе координат, к необходимым и наиболее надежным условиям понятийного мышления вообще, и, таким образом, к наивысшей возможной строгости. Закон исключенного третьего является неотъемлемой частью этой априорной нормативной сетки, и классическая математика, принимая этот закон, нигде не отступает от уровня предельной строгости.

Предпосылка *всеведения*, которая связана с законом исключенного третьего, представляет собой в действительности не что иное, как идеальное допущение о реальности, обусловленное практической ориентацией мышления. Бог Вейля, обозревающий весь мир и знающий истинное положение дел как в конечных, так и в бесконечных последовательностях, — не мистика, которую надо устранить из науки ради ее строгости, но необходимая предпосылка мыслящего субъекта, нацеленного на истину и действие. Хотя человеческий опыт ограничен, логика теоретического мышления исходит из предпосылки абсолютной истинности, имеет идеальный и телеологический характер и в этом смысле не может отличаться от логики Бога. Она отражает не фактические возможности человека, а минимальные требования к реальности,

относительно которой имеет смысл задача рационального познания. Идея проверки законов логики должна быть, таким образом, оставлена как несостоятельная, проистекающая из прямолинейного эмпиризма, типичного для методологического мышления прошлого века.

Мы должны, таким образом, заключить, что вся философия, лежащая в основе брауэровской критики классической логики, является ошибочной. Мы не можем согласиться сегодня ни с тезисом о зависимости логических норм от содержания мышления, ни с требованием их проверки, ни с положением о первичности математики перед логикой. Расхождения в понимании логики существуют и в настоящее время. Но брауэровский релятивизм не может рассматриваться сегодня даже в качестве слабой альтернативы, ибо у нас нет ни малейших оснований думать о логических принципах как производных от каких-либо частных представлений. По самой своей сути нормы логики абсолютно универсальны и не зависят от материала мышления. Логика конечного и логика бесконечного не могут отличаться друг от друга. В обоих случаях мы имеем дело только с системами понятий, претендующими на рациональность, и обе системы в одинаковой степени подчинены общим принципам рациональности, которые заданы целью мышления. Математик может утверждать, что каждое множество либо конечно, либо бесконечно, ничуть не с меньшим правом, чем он утверждает тот факт, что каждое число либо четно, либо нечетно. Исходная ошибка Брауэра состояла в том, что он принял за условное и изменчивое то, что в действительности является безусловным и внеисторическим.

Надо сказать, что у Брауэра нет философии логики в полном смысле этого слова, ибо нет систематической защиты основных тезисов и рассмотрения необходимого для этого круга идей. Здесь мы имеем дело скорее с некоторой достаточно произвольной гипотезой ad hoc, которая казалась ему соответствующей общему замыслу конструктивной перестройки математики. Тем более удивительным является тот факт, что изобретенный им миф о ненадежности закона исключенного третьего до сих пор имеет большое число сторонников и оказывает влияние на практику математического мышления.

Методологическая реабилитация закона исключенного третьего, конечно, не ведет к упразднению или ограничению интуиционистской математики. Математическая теория, из каких бы мотивов она не выросла, будет существовать, пока существуют внешние и внутренние запросы к ней. Интуиционистская математика продуктивна в этом отношении и, таким образом, будет оставаться существенной частью современной математики. Но современная философия математики должна устранить претензии интиционизма на построение единственно истинной и единственно строгой математики.

4. Несостоятельность логического релятивизма

В основе методологической установки Брауэра лежит то положение, что содержание математики определяет структуру логики и новые математические понятия могут потребовать новой логики. Это, несомненно, релятивистская позиция, поскольку она допускает историческую эволюцию логики и сосуществование различных логик.

Логический релятивизм находит полную поддержку в современной теории познания, которая в своей основе является эмпирической и релятивистской. Наиболее характерная философия XX века — это, несомненно, философия К. Поппера, основанная на идее, что не существует авторитетных источников знания и ни один источник не является абсолютно надежным. Принципы логики, согласно Попперу, также не имеют полной надежности и мы мыслим тем надежнее, чем более слабую логику мы используем[57]. М. Бунге в своей книге «Интуиция и наука» пишет: «Законы логики и не априорны и не вечны, вопреки утверждениям логицистов. Они гипотезы, сформулированные человеком при изучении языка, с помощью которого он выражал свое знание ограниченных групп явлений. Как следствие этого, законы логики надлежит считать непреложными регулирующими принципами, но допускающими внесение в них исправлений гипотезами. ...Между логикой и другими науками существует отношение не односторонней зависимости, но взаимного прогрессирующего приспособления»[58]. Взгляд на логику как на систему норм, в принципе подверженных корректировке, мы видим часто и у самих логиков. Куайн, как мы видели, допускает зависимость логических норм от изменения физической картины мира. Аналогичную идеи высказывает Х. Патнем. По его мнению, при определенных обстоятельствах «ревизия аксиом арифметики и даже пропозиционального исчисления ...вполне мыслима»[59]. А.А. Марков считал, в практике мышления в принципе допустимы и практически сосуществуют различные логики[60]. Очевидно, что такого рода воззрения могут проистекать только при рассмотрении логических норм как рядовых теоретических принципов, подверженных влиянию науки и практики.

Релятивизация логики существенно обусловлена идеей конвенции, появившейся в философии математики в начале XX века. Так как абстрактные математические теории типа неевклидовой геометрии нельзя было объяснить ссылкой на опыт, то единственная возможность их объяснения, как представлялось, состояла в том, чтобы понять их как конвенции, полезные для описания реального мира и связей в самой математике. Эта идея оказала влияние и на понимание логики. Л. Витгенштейн считал, что законы логики — это законы языковой игры, имеющей смысл относительно некоторой задачи, которые могут

измениться с изменением этой задачи. Определенным проявлением конвенционалистского подхода является также идея о том, что законы логики создаются профессионалами — логиками[62]. В действительности, реальная логика однозначно обусловлена категориальной структурой мышления и ни в какой степени не зависит от возможностей индивидуального творчества.

Идея релятивности логики поддерживается также и натуралистическими концепциями, которые низводя ее принципы до уровня теоретических идеализаций, делают актуальным вопрос о степени их исторической устойчивости. Это относится к эволюционной концепции логики, а также и к операционалистской теории Ж. Пиаже. В обоих этих случаях принципы логики понимаются в качестве идеализированного отражения некоторой предметной сферы и, таким образом, имеют статус теоретических истин, подверженных корректировке.

Наши рассуждения были направлены на то, чтобы показать несостоятельность всех этих доводов. Реальная логика абсолютна. Она не зависит ни от исторического расширения опыта, ни от новых теорий физики, ни от соглашений и ни от конструирования новых логических систем. Она однозначно навязана целевой установкой мышления и представляет собой предельно устойчивую систему смыслов, в рамках которой приобретают смысл и определенность все другие представления. Мы имеем здесь дело с последней системой координат, определяющей ценность рациональной аргументации, которая в принципе не может быть изменена на основе какой-либо осмысленной аргументации. Истоки релятивистской философии логики состоят в непонимании природы ее принципов.

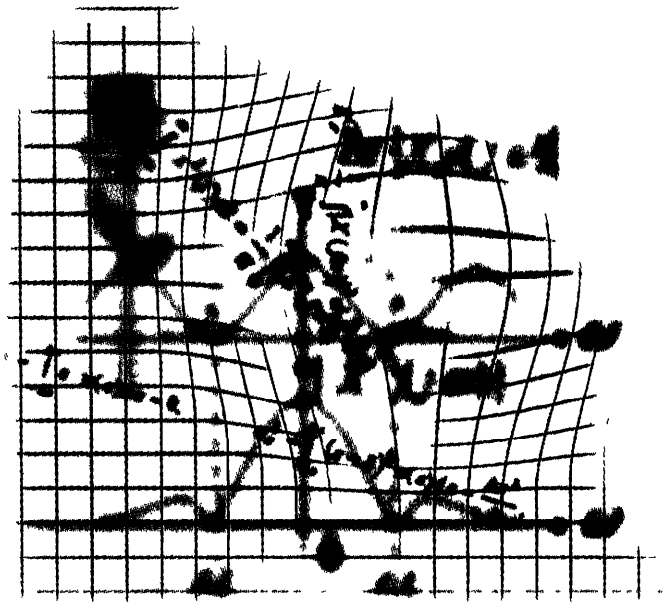
Проблема надежности логики была поставлена в начале XX века фактом парадоксов и интуиционистской критикой логики. Здесь были намечены, в действительности, две проблемы: проблема корректности определений и проблема надежности правил дедукции. Первая проблема, связанная с анализом парадоксов, предполагает исследование особенностей введения понятий в различных математических теориях и, вследствие этого, не может быть решена на уровне абстрактного обсуждения природы логики. Однако проведенное обсуждение важно, так как проясняет сферу логических принципов, образующих абсолютный фундамент математического мышления.

Мы перейдем к рассмотрению существующих программ обоснования математики. Признание законченности (абсолютности) зрелых математических доказательств и абсолютной надежности классической логики существенно расширяет обосновательный слой и позволяет защищать более оптимистический взгляд на возможность полного обоснования математики, чем тот, который принят в современной философии математики.

Часть III
ОНТОЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

«Логика и математика, также как и физика, построены на аксиомах с реальным содержанием, от которого невозможно отделаться»

К.Гедель. «Расселовская математическая логика.»



Глава 1.

Истина и непротиворечивость

Проведенный анализ сущности математического доказательства и истоков надежности классической логики позволяет нам перейти к рассмотрению проблемы обоснования математики, которая в своей основе состоит в обосновании непротиворечивости математических теорий.

Прежде всего следует разделить математический и философский подходы к проблеме, различающиеся по своим целям и средствам. Математический анализ проблемы нацелен на рассмотрение теории в соответствии с определенной программой обоснования. Теория познания исследует сами принципы и программы обоснования в плане их соответствия природе и функции математического знания. Философское обсуждение не предполагает математической строгости и однозначных выводов, однако общее понимание достигнутых результатов и перспектив решения проблемы в целом невозможно без достаточной ясности на этом уровне. Наши рассуждения будут нацелены на прояснение предпосылок этого второго уровня.

Общая методология программ обоснования математики, выдвинутая в начале XX века, с современной точки зрения должна быть признана совершенно неудовлетворительной. Она содержала в себе множество принципиальных ошибок, которые, по существу, определили неудачу этих программ. Это положение в значительной мере сохраняется и в настоящее время. Наша задача состоит в пересмотре и радикальном изменении сложившихся здесь взглядов. В основу нового подхода будет положено понятие *онтологической истинности*, устанавливающее связь исходных математических принципов с категориальной структурой мышления.

1. Общее понимание проблемы обоснования

Современная проблема обоснования математики, как уже сказано, сводится к обоснованию непротиворечивости математических теорий.

Естественный путь достижения прогресса в этом направлении состоит в том, чтобы свести вопрос о непротиворечивости сложных теорий к непротиворечивости теорий, более простых и непроблематичных в этом отношении. Первым строгим рассуждением такого рода, проведенным при ясной постановке проблемы непротиворечивости, является доказательство Лобачевским непротиворечивости неевклидовой планиметрии через редукцию ее к геометрии сферы[1]. Широко известны последовавшие за этим другие относительные доказательства непротиворечивости неевклидовой геометрии, предложенные Бельтрами, Клейном и Пуанкаре. Д. Гильберт дал строгое доказательство сводимости вопроса о непротиворечивости евклидовой геометрии к непротиворечивости арифметики[2].

Относительные доказательства неизбежно приводят к выделению теорий, относительное обоснование которых не является возможным. Для математики XX века — это две теории, а именно арифметика и теория множеств. Хотя принципы арифметики выразимы в понятиях теории множеств, мы имеем здесь, в действительности, существенно различные и, в определенном смысле, взаимодополняющие математические теории. Многие соображения показывают, что теоретико-множественное понимание числа мало соответствует прояснению этого понятия. Мы обеднили бы понимание математики и саму проблему обоснования, если бы стали рассматривать арифметику как только некоторую подструктуру теории множеств.

Особое место в обосновании современной математики занимает арифметика действительных чисел, являющаяся основой математического анализа. Теория действительных чисел может быть понята как занимающая некоторое среднее положение между арифметикой и теорией множеств, ибо с одной стороны, она опирается на алгебраические положения, имеющие несомненно финитную и дискретную природу, а с другой, — на идею непрерывности, отражающую континуальный характер множества действительных чисел. П. Бернайс в свое время выдвинул критерий приемлемости программы обоснования математики, согласно которому судьба каждой такой программы зависит от того, в какой мере она справляется с задачей обоснования математического анализа[3]. С этой точки зрения обоснование теории действительных чисел является более значимой задачей, чем обоснование арифметики или теории множеств.

Все эти три теории, имеющие первостепенное значение для понимания основ современной математики, хорошо исследованы в своих предпосылках, доведены до полной содержательной ясности и стабильности своих принципов. Это обстоятельство существенно, ибо само по себе оно уже является аргументом за логическую надежность

существующей математики, независимо от успехов собственно логического обоснования этого факта.

Современное обсуждение проблемы обоснования математики идет преимущественно в рамках специальных логических исследований и прибегает к методологическим и философским соображениям в самых крайних случаях, к примеру, для обоснования той установки, что финитное доказательство является более надежным, чем доказательство, опирающееся на свойства бесконечных множеств. Изложенные выше представления об онтологической основе математики позволяют нам более внимательно взглянуть на эту сторону дела и превратить эти эпизодически используемые доводы в систематическое средство обоснования математики.

Мы выяснили, что исходные математические теории обладают естественной (онтологической) интерпретацией, которую нельзя смешивать с какой-либо вторичной эмпирической интерпретацией. Утверждения, которые Евклид предпосылает своей геометрии, — это не аксиомы и не приближение к аксиомам, а описание онтологии геометрии, не имеющее никакого отношения к системе аксиом в ее современном лингвистическом понимании. Доказательства Евклида базируются на естественной онтологии, и они точны, поскольку они соответствуют этой онтологии. Позднейшее развитие геометрии отодвинуло онтологию в сторону, сделав опорой математического мышления формальную связь суждений. Проблема обоснования математики требует возвращения к этой первичной инстанции математической достоверности.

Наша проблема состоит, таким образом, в том, чтобы посмотреть на современные проблемы обоснования математики с точки зрения естественной онтологии математического мышления. Это, конечно, также частная точка зрения, но, как это будет показано, она позволяет прояснить и устранить затруднения, непреодолимые для чисто логического подхода. В основу нового подхода будет положено понятие *онтологической истинности*, устанавливающее связь исходных математических принципов с категориальной структурой мышления.

2. Понятие онтологически истинной математики

Понятие истины в математике является достаточно сложным. Мы должны отделять друг от друга, по крайней мере, пять значений этого понятия, которые так или иначе используются в общих характеристиках математического мышления. Это формальная истина, которая тождественна выводимости суждения из принципов, семантическая истина, определяемая через выполнимость принципов данной теории на

объектах другой формальной теории, эмпирическая истина, означающая наличие эмпирической интерпретации принципов математической теории, онтологическая истинность, выражающая особое отношение исходных принципов математики к категориальной картине мира, и фактуальная истина, характеризующая отношение общих принципов математической теории к системе фактов (теорем), образующих ее генетическую основу. Для проблемы обоснования наиболее важными являются онтологическое и фактуальное понимание истинности математических утверждений.

В «Науке и гипотезе» А. Пуанкаре высказал мнение, что истинность или ложность могут быть приписаны математической теории только в связи с определенной ее интерпретацией, т. е. только по отношению к комплексу (М + Ф), где М — математическая теория, а Ф — ее физическая интерпретация, но не по отношению к математической теории как таковой. А.Д. Александров выразил эту мысль, сравнивая математическую теорию с техническим приспособлением. «Мы не задаем вопроса, — пишет он, — истинен станок или нет, нам важно работает он или нет. То же самое относится и к математической теории. Она не истинна и не ложна, а лишь эффективна или неэффективна»[4]. С этой точки зрения сравнение математических теорий друг с другом по их истинности не имеет никакого смысла.

Формалистская трактовка математической истины имеет определенный смысл: она отражает взгляд на математику с точки зрения ее функции. Ценность математической теории состоит в ее способности транслировать истину, переводить одну систему содержательных допущений в другую, а это значит, что она состоит в логической совместности своих принципов, но не в тех или иных истинностных ассоциациях, с которыми они генетически связаны. Очевидно, что приемлемость математической теории не требует ее истинности в эмпирическом или в каком-либо ином смысле. Этот момент формалистской философии математики важен для понимания структуры современной математики и практики ее использования в науке.

Однако, характеризуя математику только как совокупность формальных систем, обладающих свойством непротиворечивости, мы упускаем из виду важное подразделение, существенное для обоснователь-ной методологии. Математические теории, будучи равноправными как непротиворечивые структуры, отнюдь не равнозначны в плане своего отношения к системе внематематических представлений. Хотя неевклидова геометрия столь же безупречна в формальном смысле, как и евклидова, и имеет приложения в науке, мы понимаем, что в отличие от евклидовой геометрии она представляет собой все-таки некоторую искусственную конструкцию, не имеющую оправдания в общезначимой пространственной интуиции. В этом плане мы можем

говорить о евклидовой геометрии как о теории, обладающей *онтологической истинностью* или *реальностью* своих принципов. Праксеологическая теория математических идеализаций проясняет смысл и важность этого различения.

Мы будем говорить, что в системе математического знания существует подсистема *онтологически истинной математики*, которая оправдывается в своих посылках предметной онтологией мышления. Как бы ни расширялась математика, сколь бы сложные и удаленные от здравого смысла и очевидности теории она ни делала предметом своего анализа, в ее центре существовала и всегда будет существовать сфера первичной, евклидианской математики, принципы которой общезначимы и продиктованы фундаментальной онтологией мышления. Рассматривая математическое знание в целом, мы вправе говорить, что оно распадается на два типа теорий: теории *онтологически истинные* и теории *правильные*, или *логически непротиворечивые*. Систему математических утверждений, обладающих истинностью в указанном смысле, будем называть *онтологической базой* или *онтологическим ядром* математики. Из изложенной выше теории математических идеализаций следует, что сфера онтологической истинности совпадает со сферой аподиктической очевидности.

Мы не можем строго очертить область суждений, относящихся к онтологическому ядру математики (онтологические характеристики не могут быть определены в логических или математических терминах), но очевидно, что сюда относятся прежде всего две основные и генетически первичные структуры математики, а именно, арифметика, евклидова геометрия. Эти структуры истинны в том смысле, что они детерминированы универсальной онтологией мышления и сами относятся к составу универсальных форм мышления, продиктованных деятельностью.

Указанные теории более фундаментальны по отношению к другим математическим теориям в том смысле, что они проистекают из общей онтологической основы мышления, но не из конкретного его содержания и, таким образом, они необходимы для любой мыслимой математики, в каком бы физическом мире она не возникла. Перефразируя Пуанкаре, можно сказать, что в какой бы мир мы не переселились, какие бы математические образы нам не пришлось изобрести для описания этого нового мира (это могла бы быть существенно иная математика), математические теории, составляющее ее онтологическое ядро, не могут исчезнуть или измениться, ибо эта часть математики отражает не фактический мир, а только деятельностную онтологию и, следовательно, она обусловлена только одной особенностью этого мира, а именно, наличием условий для действия. В этом плане можно говорить о различии между *физической* и *онтологической* математикой:

физическая математика отражает структуры реального (фактического) мира и в принципе может меняться вследствие изменения его характеристик, в то время как онтологическая математика зависит лишь от категориального видения мира и инвариантна для всех миров, допускающих возможность деятельности и мышления.

3. Природа обосновательного слоя

Онтологически истинная математика занимает особое место в структуре математики и в том смысле, что она составляет последнюю инстанцию надежности математического мышления. Анализируя логику математического доказательства, мы выяснили, что доказательство, к какой бы области математики оно не относилось, принимается в качестве надежного только в том случае, если его шаги оправданы в сфере аподиктической очевидности. Это полностью относится и к логике обоснования математических теорий. Логическое обоснование не может быть не чем иным, как только редукцией математических теорий к теориям и принципам, оправданным на основе аподиктической очевидности, т. е. к теориям, относящимся к сфере онтологически истинной математики. Указание на сферу онтологически истинной математики является с этой точки зрения подлинным и наиболее адекватным определением обосновательного слоя.

Хотя формалистски мыслящие философы не склонны делить математические теории по их близости к какой-либо онтологии, практика обоснования математики так или иначе заставляет их проводить такое различие, ибо никакая программа обоснования математики не может существовать без выделения круга несомненно надежных положений, заданных в общезначимой интуиции. Сами формалисты, как и представители других направлений обоснования, затратили много усилий, пытаясь определить область математических суждений, которым можно было бы приписать статус непосредственной истинности и непротиворечивости. Они задают эту область через понятия финитности, обозримости и т. п. Мы должны оправдать эту стихийную практику как определенное приближение к сфере онтологической истинности.

Как уже сказано, понятие истинности в математике используется в нескольких существенно различных смыслах. В настоящее время становится все более ясным, что проблема обоснования математики не может быть решена ни на уровне синтаксиса, ни на уровне семантики, а тем более, в плане рассмотрения отношения математических теорий к опыту. Онтологическое рассмотрение истины является единственно возможным путем для определения обосновательного слоя и для рационального анализа различных программ обоснования математики.

Мы будем исходить из тождества онтологической истинности и обосновательной надежности математических принципов, т. е. будем предполагать, что всякая система обосновательных принципов содержится в системе онтологически истинной математики и всякая онтологически истинная часть математики может выступать в качестве базы абсолютного (предельного надежного) обоснования в сфере математического мышления. Мы будем, таким образом, исходить из того, что возможности внутреннего обоснования математики однозначно определены объемом онтологически истинной математики и возможностью редукции к этой сфере остального содержания математического знания.

С точки зрения философской теории обоснования математики здесь наиболее важны два вопроса: в какой мере онтологически истинная математика является надежной и каким образом мы можем провести точную границу между этой частью математики и всей остальной математикой, если известно, что собственно математические понятия недостаточны для определения сферы онтологической истинности.

Ответ на первый вопрос уже достаточно ясен. Из онтологического статуса математических принципов и теорий следует их предельная надежность как базы обоснования. Можно допустить, что онтологически истинная математика, т. е. часть математики, продиктованная универсальной онтологией мышления, также в чем-то относительна, как все созданное человеческим интеллектом. Но понимая статус предметной онтологии, мы, вслед за Спенсером, можем сказать, что даже если система онтологически истинных представлений математики также ненадежна, то все-таки ничего более надежного в математике мы не имеем. Мы должны согласиться, таким образом, с тем, что если онтологическая истинная математика и не дает абсолютного обоснования, то она, тем не менее, дает максимально надежное обоснование, возможное в рамках рационального мышления вообще. Это значит, что если задача надежного обоснования математических теорий вообще имеет смысл, то она не может быть не чем иным, как только редукцией их содержания к сфере онтологически истинной (аподиктически очевидной) математики. Если бы кто-то смог свести проблему надежности математического анализа и теории множеств к надежности арифметики и логики, то он, несомненно, достиг бы предела обоснования, превзойти который невозможно. Не претендуя на абсолютность в безусловном смысле, мы тем не менее могли бы говорить в этом случае об абсолютном обосновании основного содержания современной математики.

4. Праксеологическое обоснование исходных принципов

Проблема строгого выделения сферы онтологической истинности является более трудной. Мы, естественно, не можем ограничиться здесь примерами, показывающими, что существуют математические суждения, надежность которых не вызывает сомнений. Мы нуждаемся в общих критериях, позволяющих ответить на вопрос, относится ли некоторое утверждение (аксиома, принцип) к сфере онтологически истинной математики или нет. Тождественность этой сферы сфере аподиктической очевидности не может нам здесь помочь, поскольку аподиктическая очевидность также не может быть выражена на основе каких-либо определенных признаков. Здесь, как кажется, мы имеем круг, из которого нет выхода в рамках строгого мышления.

Ситуация, однако, не является совсем безнадежной. В общем, она аналогична тому, что мы уже имели в случае выявления абсолютно надежных доказательств. Как мы выяснили, неопределенность в различении аподиктической и ассерторической очевидности, вообще говоря, не является препятствием для вынесения совершенно определенных решений о завершенности конкретных доказательств.

Анализ статуса предметной онтологии позволяет высказать здесь два положения, на первый взгляд, противоречащих друг другу. Во-первых, мы должны принять как безусловно обоснованное то положение, что различие между аподиктической (онтологической) и ассерторической очевидностью является фундаментальным, лежащим в основе всех других различий и поэтому заведомо не поддающимся адекватному определению в частных понятиях. Брауэр совершенно справедливо настаивал на том, что сфера интуитивно ясных построений не может быть определена в логике или в каких-либо математических понятиях. Финитность как математическое понятие в принципе также не может быть привести нас к точному определению сферы онтологически истинности. Все такого рода критерии могут рассматриваться только как некоторые приближения к понятию онтологической истинности, полезные для решения частных задач. Мы должны утверждать, таким образом, что система онтологической истины в принципе неопределима в строгих математических понятиях. Это, очевидно, отрицательный тезис, который усиливает сомнения в возможности строгого обоснования математики.

Но здесь имеется другая, более позитивная сторона дела. Общая иррациональность, содержащаяся в понятии аподиктической очевидности, не исключает того положения, что в отдельных случаях мы можем строго доказать принадлежность того или другого математического утверждения к сфере онтологически истинной математики. Выше

были сформулированы аргументы, призванные обосновать то положение, что закон исключенного третьего является онтологически истинным и, следовательно, свободным от дефектов, о которых говорили сторонники интуиционизма. Выяснение генезиса законов логики, их обусловленности деятельностной ориентацией сознания является одновременно и их обоснованием в качестве предельно надежных.

В этом состоит суть праксеологического обоснования математических и логических истин: анализ генезиса математического принципа может быть одновременно и обоснованием его абсолютной надежности. Это обстоятельство открывает нам перспективу рационального оправдания обосновательного слоя. Исходя из онтологического статуса математической истины, мы можем по отношению к любому спорному принципу поставить вопрос о его принадлежности к сфере онтологически истинной математики или к онтологическому ядру математики. Мы получаем здесь подход к рациональному оправданию самоочевидных принципов, который дает возможность критики существующих программ обоснования, а также и возможность их совершенствования через расширение обосновательного слоя.

В качестве примера, проясняющего эту общую установку, мы можем рассмотреть положение о бесконечности натурального ряда. Логически это утверждение, очевидно, недоказуемо. Если мы истолкуем его натуралистически как возможность до бесконечности увеличивать совокупность материальных тел или частиц, то истинность его будет проблематичной вследствие того, что физическая бесконечность для нас недоступна. Ясно, что общезначимость и аподиктическая очевидность этого положения покоится не на логике и не на опыте, а на идеализированных и необходимых для человеческого сознания представлениях о реальности. Мы уже выяснили характер и статус этих представлений. Идея бесконечности натурального ряда непосредственно проистекает из основных допущений предметной онтологии. С праксеологической точки зрения натуральный ряд чисел не создан богом, не выведен из опыта и не является произвольной конструкцией нашего интеллекта, он однозначно продиктован практической ориентацией сознания как понятийный коррелят необходимых представлений об идеальной предметности.

К такого рода категориальным утверждениям должна быть отнесена также и аксиома непрерывности. Математическая непрерывность не может быть оправдана опытом и не может быть введена на основе каких-либо более частных математических истин. Мы задаем ее, в конечном итоге, в качестве несомненной истины, соответствующей нашему представлению непрерывной величины. Важно понять, что

здесь мы имеем дело не с опытной идеализацией и не с произвольным соглашением, но с экспликацией категориального основания математического мышления. В основе математики лежит не только идея предметности, но и идея экстенсивной величины, обладающей однородностью, бесконечной делимостью и непрерывностью.

Философы начала XX века хотели полностью освободиться от понятия величины при обсуждении оснований математики, указывая на то обстоятельство, что это понятие не обладает ясностью без предварительного определения его на основе понятий числа и порядка[5]. Внутренние определения величины, конечно, имеют смысл, но устранение идеи величины как предваряющей математическое мышление лишает нас возможности понять истинный статус этого понятия. Анализ статуса аксиом бесконечности и непрерывности позволяет понять, что мы имеем здесь дело с представлениями, фиксирующими категориальные, а следовательно, незыблемые основания математики.

5. Ограниченность финитизма

Современные представления о строгости обоснования существенно связаны с идеями конструктивизма и финитизма. Желая установить предельно строгие основания математической теории, мы не хотели бы иметь в качестве исходных никаких принципов, которые не оправдываются простыми и, по возможности, конечными процедурами и конструкциями. Эта установка, как кажется, поддерживается всей практикой математики. Никто не будет возражать против того, что элементарная математика, ограничивающая себя конечными объектами и конечными конструкциями, является наиболее надежной частью математики.

Важно, однако, понять тот факт, что требования финитности и конструктивности в математике существенно связаны с идеологией эмпирического мышления. Аристотель мотивировал свое неприятие актуальной бесконечности тем, что бесконечность, которая не оставляет ничего за своими пределами, для нас фактически недостижима, а следовательно, неопределенна и непознаваема[6]. Аналогичная мотивировка преобладает и в новой философии науки, отправляющейся от опытной определенности знания. Здравый смысл и эмпирическая методология науки предпочитают конечное бесконечному по той причине, что первое, в принципе, доступно для проверки. Требование конечной определенности перешло и в программы обоснования математики, даже те, которые апеллируют, в общем, к очевидности неэмпирического характера. Брауэровский конструктивизм и гильбертовский финитизм имеют прямую связь с методологией эмпирического знания, поскольку они исходят из того положения, что в математике по настоящему

истинно только то, что можно фактически обозреть и непосредственно проверить в своих свойствах. Брауэр думал, что конечное в математике более надежно, поскольку оно в принципе допускает «полное эмпирическое подтверждение» (empirische Bestatigung)[7]. Установка на конечное как на предельно надежное и единственно возможное основание математики не поколеблена и в настоящее время, несмотря на ее полное поражение в практике обоснования.

Праксеологическое понимание первичных математических идеализаций позволяет нам устранить эту установку как противоречащую сущности математического знания. Установка на конечность упускает из виду, прежде всего, тот факт, что проверяемость в конечной математике в большинстве случаев имеет чисто условный характер. Как уже неоднократно указывалось критиками интуиционизма, операции с большими числами столь же недоступны для фактической проверки, как и операции с бесконечными величинами. При рассмотрении закона исключенного третьего мы уже рассмотрели этот вопрос. Логические и математические истины по своей сущности не имеют никакого отношения к критерию фактической проверяемости. Основное заблуждение финитизма состоит, однако, в том, что он не учитывает органического соединения конечного и бесконечного в структуре исходных математических идеализаций. Мы должны признать, что бесконечность включена в самые элементарные математические идеализации. Простая идея точки, несомненно, включает в себя все трудности, связанные с понятием бесконечности. Требование обоснования бесконечного на основе конечного, по большому счету, является наивным и должно быть оставлено. Проблема установления обосновательного слоя состоит не в выявлении финитной основы, а в определении сферы онтологически истинной математики.

Нужно признать, что современная философия математики все еще базируется на традиционных и поверхностных по своей сути представлениях о статусе понятия бесконечности. Упускается глубинная связь бесконечности с первичными математическими идеализациями и с онтологическим основанием математики. Бесконечность истолковывается обычно как вторичное понятие, введенное для теоретического оправдания операций с конечными величинами, которое, в принципе, может быть элиминировано из теории как всякое определение, выполняющее функцию упрощения теоретического языка. Мы должны прежде всего понять ошибочность этого представления и отказаться от тезиса, согласно которому обоснование математики должно быть оправданием бесконечного на основе конечного. Эта схема уже отвергнута как не реализуемая вследствие известных логических ограничений. Нам важно уяснить тот факт, что она несостоятельна и в рамках

общего гносеологического понимания математических идеализаций. Логическое обоснование математики, в действительности, может протекать только как редукция к сфере онтологически истинных суждений, которая наряду с финитными содержит также и трансфинитные суждения. В адекватной логике обоснования математики проблема состоит не в отделении конечного от бесконечного, а скорее в отделении бесконечного, которое нуждается в обосновании, от того бесконечного, которое имеет непосредственное онтологическое обоснование.

Сказанное не означает, что критерий финитности не может быть полезным в решении обосновательных задач. Мы можем, к примеру, определить математическое рассуждение как финитное, если оно допускает представление в рекурсивной арифметике. Такого рода рассуждение должно быть принято как предельно доказательное вследствие того, что оно опирается только на арифметические очевидности, однозначно определенные в рамках предметной онтологии. Аналогичным образом могут быть оправданы и другие версии финитизма. Мы оправдываем финитизм здесь не из эмпирических соображений, не из возможности фактической проверяемости посредством перебора случаев, а из онтологических оснований арифметического мышления: мы считаем теорию финитной, поскольку ее внутренняя логика коррелятивна логике арифметики, которую мы можем считать оправданной из онтологических соображений. Финитность приобретает в этом случае обосновательный смысл, так как она освобождается от всякого рода эмпирических ассоциаций.

6. Принципы онтологического обоснования математики

Понятие онтологической истинности позволяет нам наметить новую методологию обоснования математики, отличающуюся от существующей большей общностью и последовательностью аргументации.

Программы обоснования математики отличаются друг от друга обосновательной задачей (целью обосновательного исследования), выбором обосновательного слоя и приемлемой логикой. Задача методологии обоснования состоит в максимальной рационализации каждого из этих моментов. Основные трудности обоснования математики состоят, в действительности, не в решении специальных логических задач, а в оправдании стратегии обоснования, в оправдании надежности и универсальности принятой программы обоснования.

Принципиальная недостаточность классических программ обоснования математики заключается прежде всего в отсутствии рациональных аргументов, определяющих границы обосновательного слоя. Ни

одна из этих программ не сформулировала четких критериев для сферы непроблематичной математики, которая могла бы быть положена в основу обосновательной редукции. Ссылки Фреге и Рассела на связь логики с универсалиями имели общий характер и не указывали никаких критериев для выделения сферы надежной логики. Вся ставка была сделана на убедительность простых определений и процедур, которые, как предполагалось, должны были быстро привести к реализации общей идеи. То же самое относится и к методологическим установкам интуиционизма и формализма. Каждая программа выделяла свою сферу безусловной надежности, которая подвергалась критике в других программах.

Теория онтологической истинности дает нам некоторый ориентир, позволяющий поставить выбор обосновательного слоя на рациональную основу. С праксеологической точки зрения мы можем говорить об *абсолютном обосновательном слое математики* как о той ее части, которая обладает онтологической истинностью, принадлежит к форме мышления, а следовательно, является гарантированной в плане логической непротиворечивости. Мы не можем определить эту сферу математики посредством однозначных математических критериев, но мы можем обосновать принадлежность к ней исходных положений арифметики, геометрии, логики и теории множеств. Эта возможность открывает путь к обоснованию существенной части современного математического знания.

Теория онтологической истины позволяет дать строгое обоснование надежности обосновательного слоя, принятого в существующих программах. Мы можем, в частности, привести систему доводов, оправдывающих надежность финитных и конструктивных рассуждений в сфере их действия. Это обстоятельство важно в том отношении, что оно устраняет доводы крайнего скептицизма, сторонники которого исключают возможность достижения полной надежности вообще (вследствие относительности любого доказательства и т. п.). Деятельностная трактовка доказательства отвергает такого рода крайний скептицизм и намечает принципы выявления класса абсолютно надежных обосновательных рассуждений.

Первые программы обоснования появились в борьбе с парадоксами бесконечности и их естественная методологическая установка состояла в том, чтобы обосновать бесконечность на основе конечного. Положение Гильберта, согласно которому оперирование с бесконечным может быть сделано надежным только на основе конечного, легло в основу всех программ обоснования, сформулированных в начале XX века. Наиболее радикальным следствием онтологического анализа проблемы является отказ от этой установки. Мы берем за основу

то положение, что разделение между непроблематичной и проблематичной математикой проходит не по линии финитное — нефинитное, а по линии онтологически истинное и не обладающее онтологической истинностью. Мы, таким образом, определяем обосновательный слой как сферу *онтологически истинной математики*, которая может содержать как финитные, так и нефинитные положения.

Праксеологическая теория логики устраняет дискуссию по поводу приемлемой логики обоснования. Она оправдывает тезис об абсолютной надежности всех принципов классической логики, определенных в сфере аподиктической очевидности.

Выделяя единую сферу онтологической истинной математики, мы фактически сливаем все существующие программы в одну, которая исходит из общей задачи редукции основных теорий математики к сфере онтологически истинной математики. Этот общий подход, основанный на выявлении онтологически истинной математики как единой базы редукции, мы будем называть *онтологической программой* обоснования математики в противовес программам, опирающимся на частные определения обосновательного слоя и логики.

Основной смысл подхода, основанного на понятии онтологической истинности, заключается, таким образом, в рационализации и расширении существующих обосновательных программ. Выбор обосновательного слоя, логических средств и самих целей обоснования не должен быть случайным. Программа обоснования математики должна быть обоснована в теории познания; она должна исходить из понимания специфики математического знания и природы математических идеализаций. От программ существенно догматических мы должны перейти к программам теоретическим (логико-гносеологическим), в которых доводы гносеологического порядка будут предшествовать собственно логическим построениям.

7. Понятие онтологической совместности

Мы можем сформулировать методологический постулат, который вытекает из намеченного подхода и который будет лежать в основе всех наших последующих рассуждений. Этот постулат (мы будем называть его принципом онтологической совместности) состоит в том, что любая система онтологически истинных утверждений в математике является логически непротиворечивой. Речь идет о возможности прямого перехода от онтологической истинности некоторой системы суждений к ее абсолютной непротиворечивости. Важность этого принципа состоит в том, что он позволяет непосредственно заключать о

непротиворечивости любой системы аксиом, обладающей свойством аподиктической очевидности.

Этот принцип не произволен. Он вытекает из общей теории логических норм и из понятия онтологической истинности. Логика по своей сути — это система правил трансляции истинности. Она не может войти в противоречие с каким-либо истинным описанием объекта. Система любых истин совместна и несовместность описания говорит о его ложности в некоторых моментах. Таково общее отношение истинности и логической непротиворечивости, вытекающее из статуса логики. В эмпирических науках мы не можем непосредственно переходить от истинности суждений к их непротиворечивости по той причине, что истинность системы эмпирических утверждений всегда проблематична. Мы осуществляем здесь только обратный переход, а именно из замеченной противоречивости описания заключаем о ложности некоторых его компонентов. Но если математическое знание в своих исходных утверждениях строго коррелятивно предметной онтологии, относительно которой мы вправе утверждать ее инвариантность для человеческого мышления и, таким образом, предельную истинность, то мы вправе заключить от аподиктической очевидности аксиом к их абсолютной онтологической истинности, а следовательно, и к их безусловной непротиворечивости. Исходные математические теории, такие, как арифметика и евклидова геометрия, являются, с этой точки зрения, несомненно непротиворечивыми, поскольку принципы, на которых они базируются, полностью детерминированы универсальной онтологией.

Вариант перехода от аподиктической очевидности к логической корректности мы уже использовали в теории доказательства. Мы исходили из того положения, что если все шаги доказательства являются аподиктически очевидными, то доказательство в целом является логически безупречным, не допускающим контрпримеров. Если выразить эту предпосылку формально, то она будет выглядеть следующим образом:

$$AE(p) \rightarrow R(p),$$

где AE — аподиктическая очевидность, а R — надежность доказательства. Принципиальный момент этого умозаключения состоит в том, что от некоторой чисто эпистемологической характеристики доказательства, фиксируемой социально (внелогически), мы переходим к его логической характеристике, а именно к утверждению о невозможности его опровержения посредством логического анализа или контрпримеров.

Аналогичная запись, относящаяся к обоснованию математической теории, будет иметь, очевидно, следующий вид:

$$AE(\Sigma a) \rightarrow \text{Consis}(\Sigma a),$$

где Σa — некоторая система математических аксиом, Consis(Σa) — свойство ее логической совместности. Мы фиксируем здесь переход от онтологической истинности как некоторой эпистемологической характеристики системы аксиом к ее логической характеристике. Важно понять, что в обоих случаях мы имеем дело не с произвольными постулатами, позволяющими уйти от трудностей логического обоснования, а с принципами, проистекающими из глубинной природы математического знания.

Среди 23 проблем, сформулированных Д. Гильбертом в его знаменитом докладе на Втором международном конгрессе математиков в 1901 г., в числе первых стоит проблема доказательства непротиворечивости арифметики. В отличие от большинства проблем из этого списка эта проблема все еще не может считаться окончательно разрешенной. Вторая теорема Гёделя (1931), по мнению большинства, является отрицательным решением этой проблемы, однако другая теорема Гёделя (1932), может быть истолкована в смысле ее положительного решения, поскольку она показывает, что непротиворечивость классической арифметики полностью предопределена непротиворечивостью арифметики интуиционистской, непротиворечивость которой трудно поставить под сомнение[8]. Но это значит, что собственно математические соображения до сих пор не дают нам оснований для однозначного решения этой проблемы. Мы нуждаемся здесь в некотором более глубоком проникновении в основания аргументации.

Принцип онтологической совместности, очевидно, позволяет нам утверждать непротиворечивость арифметики, исходя исключительно из факта аподиктической очевидности ее аксиом. Мы исходим здесь из того, что установление факта праксеологической природы аксиом некоторой теории означает одновременно и обоснование их истинности, а также и обоснование их непротиворечивости. В рамках анализа понятия онтологической истинности мы можем показать, что эта вера не может нас подвести, что аподиктически очевидные факты математики, детерминированные универсальной онтологией, не могут войти в противоречие друг с другом. Отсутствие математического обоснования непротиворечивости теорий элементарной математики, таким образом, не означает, что мы не имеем никаких рациональных аргументов для веры в их непротиворечивость и верим в эту непротиворечивость только на основе индукции.

Онтологическая программа обоснования математики, таким образом, отказывается от задачи логического обоснования арифметики и других элементарных теорий математики, базирующихся на аподиктически очевидной аксиоматике. Арифметика и геометрия с самого начала признаются здесь безусловно непротиворечивыми вследствие

онтологической истинности представляющих их аксиом. Усилия, затраченные математиками и логиками на доказательство непротиворечивости арифметики, могут рассматриваться с этой точки зрения лишь как логические упражнения, доказывающие то, истинность чего вообще нельзя подвергать сомнению. Праксеологическая теория математических идеализаций позволяет принять непротиворечивость элементарной математики как простой факт, как следствие онтологической истинности принципов, лежащих в ее основе.

Программа обоснования математики является эффективной, если она демонстрирует свою эффективность для достаточно широкого круга математических теорий. Мы можем исходить из критерия Бернайса как вполне оправданного. Проблема обоснования математики будет состоять тогда в том, чтобы ответить на вопрос, достаточен ли факт непротиворечивости элементарных математических теорий для обоснования непротиворечивости классического анализа и той части теории множеств, которая вовлечена в его систематическое изложение. Есть все основания думать, что на этот вопрос может быть дан утвердительный ответ.

Общий план действий, который будет реализован в ближайших главах, будет состоять в рассмотрении традиционных программ обоснования математики с точки зрения возможных путей расширения их обосновательного слоя на основе понятия онтологической истинности.

Глава 2.

Непротиворечивость логистических систем

Логицистский подход к обоснованию математики проистекает из идеи сводимости математики к логике, которая была сформулирована еще Лейбницем и получила поддержку в развитии методов математической логики в XIX веке. Логицизм исходит из предположения, что все понятия математики могут быть определены на основе понятий, относящихся к логике, и все теоремы математики могут быть представлены в виде общезначимых логических суждений. Замысел логицизма как программы обоснования математики состоял в том, чтобы свести вопросы, относящиеся к обоснованию надежности принципов и методов математики, к вопросу о надежности простых логических исчислений.

Имеется область математических суждений, сводимость которых к логике не подлежит сомнению. Сюда относятся все арифметические утверждения, которые фиксируют связи между числами и числовыми формулами. Но как показывает анализ, эта область не является достаточной для целей программы. Имеётся строгое обоснование неосуществимости логицистского замысла уже по отношению к арифметике и в этом смысле программу логицизма в настоящее время следует считать полностью опровергнутой.

Положение, однако, меняется, если мы перейдем от логического рассмотрения проблемы к рассмотрению гносеологическому. Хотя гносеологический анализ не реабилитирует программу логицизма в ее первоначальных целях, он открывает возможности ее использования для доказательства непротиворечивости важных фрагментов математического знания. Мы должны здесь обсудить эти возможности.

1. Программа логицизма

В своей работе «Основания арифметики» (1884) Г. Фреге наметил путь обоснования арифметики на основе логического определения понятия числа. Редукция арифметики к логике означала для Фреге и логическое обоснование математики в целом, поскольку он был убежден, что вся математика может быть обоснована на базе арифметики.

Исходной базой обоснования математики являются у Фреге аксиомы логики, принятые на основе понятия логической (семантической) истины. Аксиомы арифметики должны быть представимы, по его замыслу, как истинные суждения в рамках этой системы аксиом. Фреге не ставит вопроса о формальном (синтаксическом) обосновании непротиворечивости арифметики. Он полагает, что непротиворечивость математической теории есть следствие истинности ее принципов.

Фреге считает совершенно несостоятельной эмпирическую концепцию числа как понятия, сформировавшегося в процессе счета. Философы, объясняющие понятие числа из опыта счета, смешивают, по его мнению, сферу приложения арифметических истин с самими этими истинами. Он отклоняет и кантовское понимание числа как объекта, данного в чистом созерцании. Созерцание, по мнению Фреге, как всякая чувственность вообще, не может вывести нас за пределы узкого круга истин. Он убежден, что все то, что Кант стремится обосновать через восприятие в чистом созерцании, может быть строго доказано из аналитически истинных положений логики. Фреге не соглашается также и с аксиоматическим подходом к определению числа, который был предложен Пеано и Гильбертом. Задача обоснования арифметики, считает Фреге, состоит в раскрытии подлинного смысла числа, как оно используется в науке и в обыденной жизни. Аксиоматика заведомо не решает этой задачи, так как она указывает лишь на неопределенную совокупность объектов, удовлетворяющих аксиом[9].

За основу определения числа Фреге берет теоретико-множественное понятие эквивалентности классов, определяемое в свою очередь на основе понятия взаимно-однозначного соответствия. Конкретное число n характеризуется при таком подходе как класс эквивалентных классов, содержащих n элементов[10]. Собственно математическая задача Фреге состояла в демонстрации того, что такое определение может быть адекватно переведено на язык логики, и что все интуитивно ясные отношения между числами натурального ряда могут быть воспроизведены как отношения между чисто логическими объектами и доказаны в виде логических истин.

Признано, что Фреге достиг существенного успеха в реализации своей программы. Он обосновал первичные принципы арифметики, имеющие важное значение для ее последовательного аксиоматического построения, а именно, отсутствие предшествующего элемента для нуля, невозможность повторения одного и того же элемента в последовательности чисел, а также принцип индукции, который он формулирует как необходимость передачи свойства от первого элемента к последнему в наследственных рядах элементов. Исходя из определения наследственного ряда, Фреге пытался также строго доказать

положение о его бесконечности, т. е. об отсутствии в нем последнего элемента[11]. Постепенно, однако, было понято, что это последнее доказательство содержит в себе круг, т. е. скрытую предпосылку, равнозначную доказываемому тезису. Эта скрытая предпосылка получила в дальнейшем название аксиомы бесконечности.

Судьба теории Фреге хорошо известна. Б. Рассел обнаружил в ней возможность противоречивого рассуждения, которое известно сегодня под названием парадокса Рассела. Он показал, что если определить понятие нормального множества как множества, не содержащего себя в качестве своего элемента, то нельзя выяснить, является ли множество всех нормальных множеств нормальным или ненормальным: допущение его нормальности приводит к строгому выводу его ненормальности и наоборот. Поскольку рассуждения Рассела не выходили за сферу методов, разрешенных теорий Фреге, то эта теория была поставлена под сомнение в плане внутренней согласованности своих принципов.

Рассел продолжил исследования Фреге, поставив задачу выявить истоки парадоксов в логических исчислениях и найти средства их устранения. В исследованиях Рассела наиболее важными с современной точки зрения являются два момента, а именно, изобретение теории типов, вскрывающей источник парадоксов, и прояснение того факта, что некоторые принципы, существенные для построения арифметики и теории множеств, не являются истинами логики.

Суть теории типов состоит в том, что математические высказывания делятся на классы в соответствии с областью их определения. Пусть имеется некоторая область исходных объектов a, b, c и т. д. К первому типу относятся высказывания о свойствах этих объектов: f(a), $g(b)$ и т.д. Ко второму типу относятся высказывания о свойствах этих свойств, т. е. высказывания вида: $F(f)$, $F(g)$ и т. д. К третьему типу относятся высказывания о свойствах свойств и т. д. Основное правило теории типов состоит в том, что каждый предикат относится только к определенному типу и может быть определен только на объектах нижележащих уровней. Он не может быть применен к объектам своего или более высокого уровня[12]. С этой точки зрения выражения вида $f(a)$, $F(g)$ либо истинны, либо ложны, в то время как выражения вида $f(f)$, $f(g)$, $f(F)$ не истинны и не ложны, а бессмысленны. Ошибка Фреге, по мнению Рассела, состояла в том, что он допускал неограниченную область определения для любой логической функции.

Ограничения Рассела являются эффективными в том смысле, что они позволяют устранить все известные парадоксы логики и теории множеств. Парадокс Рассела, в частности, оказывается невыводимым вследствие некорректности понятия нормальности всех нормальных множеств — как понятия, имеющего форму $f(f)$.

Рассел был убежден, что исправленная таким образом логицистская программа будет достаточна для обоснования математики, в том числе и таких ее разделов, как теория множеств. В фундаментальном труде «Principia Mathematica» (1910–1913) Рассел и Уайтхед предприняли попытку обосновать на этих принципах арифметику и теорию множеств. Этот труд, с одной стороны, продемонстрировал возможности логического анализа математики, а с другой — выявил его принципиальную ограниченность. Одним из результатов исследования явилось открытие того факта, что систематическое изложение математики нуждается в утверждениях, не редуцируемых к логике. Было установлено, что к таким положениям относятся аксиома бесконечности, аксиома выбора и аксиома сводимости, устанавливающая корреляцию между понятиями высших уровней и понятиями первого уровня.

Этот результат принципиально важен для философии математики, ибо он показал ошибочность мнения Лейбница и многих его последователей, что математика не содержит ничего кроме усложненных логических определений и их связей. Это значит, что математика не есть логика, что математическое мышление покоится на существенно иных основаниях, чем чистая логика. Мы поняли, в частности, что логика принципиально конечна в содержании своих понятий, и что введение бесконечности в формальную теорию является прерогативой собственно математического мышления.

Сам Рассел истолковал этот факт в релятивистском духе как неустранимую гипотетичность математического мышления. Он сделал отсюда вывод, что математические теории истинны лишь в той мере, в которой истинна наша гипотеза о бесконечности предметов во Вселенной. Поскольку никакой опыт не может дать нам ни положительного, ни отрицательного ответа на этот вопрос, то мы должны понимать математику как науку, всегда сохраняющую гипотетический элемент в своей основе.

В «Principia Mathematica» в предисловии к разделу «Количество» Рассел и Уайтхед пишут: «Большие трудности этого раздела порождаются теоремами существования и проблемой типов. Эти трудности исчезают, если принимается аксиома бесконечности, хотя кажется неприемлемым строить теорию, которая, может быть, на две трети зависит от допущения, что число объектов во Вселенной не является конечным. Мы должны приучить себя не прибегать к этому допущению, кроме тех случаев, где оно является крайне необходимым. Когда аксиома бесконечности действительно необходима, она помещается нами в класс гипотез, так что все утверждения теории будут истинными, даже в том случае, если эта аксиома ложна»[13]. Рассел имеет в виду здесь то, что вместо теоремы T, которая зависит от аксиомы

бесконечности, мы можем принять утверждение Infin $ax \subset T$, которое является истинным и доказуемым в рамках логических предпосылок.

Логицистская программа обоснования математики, таким образом, опровергла себя в процессе своего развития. Оказалось, что математика не сводится к логике и зависит от положений, надежность которых должна быть оправдана за пределами логики. Принимая этот факт, мы, однако, должны отклонить натуралистические и скептические выводы Рассела как недостаточно обоснованные. Очевидно, что Рассел исходит здесь из позитивистской дихотомии формального и содержательного, согласно которой утверждения, не относящиеся к логике, имеют эмпирическую и индуктивную основу. Эта, однако ложная посылка. Выходя за пределы логики, математика еще не выходит за пределы онтологии и отрицательный результат логицистского анализа не является достаточным для отказа математики от претензии на внеэмпирическое обоснование своих исходных принципов.

2. Изменение задачи

В настоящее время идея сведения к логике не рассматривается как перспективная для обоснования математики. Существует мнение, что в отличие от интуиционизма и формализма логицизм не выработал продуктивных идей и в настоящее время может рассматриваться как имеющий лишь исторический интерес. Такая оценка представляется не совсем верной. Она исходит только из факта нереализуемости исходных задач программы и не учитывает возможности использования логицистского подхода в более широком контексте. Теория онтологической истинности позволяет рассматривать логицистскую редукцию как один из путей обоснования аксиоматической теории множеств.

Мы будем исходить здесь из того принципиально важного факта, что значительная часть содержания математики сводится к логике и что несводимые утверждения представляют собой абстрактные утверждения, относящиеся к классу аподиктически очевидных истин. Констатация этого факта открывает возможность обоснования непротиворечивости аксиоматических систем, которые в составе своих аксиом не выходят за рамки онтологически истинных суждений.

Общий результат логицистского анализа можно выразить следующим образом. Достаточная аксиоматическая база для обоснования теории множеств (пока мы можем отвлечься от факта существенно различных аксиоматических представлений содержательной теории множеств) может быть представлена в виде $(L + \Delta M)$, где L — система аксиом, редуцируемых к логике, а ΔM — система математических аксиом, имеющих внелогическое содержание. Общий результат логицистского анализа, достигнутый Расселом и Уайтхедом, состоит

в том, что к этой последней группе аксиом относятся две аксиомы, а именно, аксиома бесконечности, аксиома выбора[14]. Будем называть аксиоматику $(L+\Delta M)$ логицистской основой математики. То, что указанные аксиомы (аксиомы, относящиеся к ΔM) несводимы к логике, — это в настоящее время бесспорно доказанный факт, и в этом смысле программа логицизма терпит полное поражение. Но задача обоснования математики и задача сведения математики к логике — это различные задачи. Если бы нам удалось, не проводя редукции ΔM к L, тем не менее обосновать непротиворечивость $(L + \Delta M)$, то задача обоснования теории, имеющей данную структуру, была бы решена в соответствии с ее пониманием, разъясненным выше, т. е. как обоснование непротиворечивости теории, имеющей определенное аксиоматическое представление.

Чисто логическое решение этой проблемы маловероятно. Наиболее перспективный и, по всей видимости, единственно возможный здесь путь — это путь эпистемологического анализа аксиом и прямого доказательства их непротиворечивости, опирающегося на понятие онтологической истинности. Изложенные выше представления о природе аподиктической очевидности и о путях непосредственного эпистемологического обоснования непротиворечивости дают общую схему решения проблемы, которая может состоять в обосновании онтологической истинности систем аксиом вида $(L + \Delta M)$. Мы, таким образом, возвращаемся к установке Фреге, а именно к обоснованию непротиворечивости математической теории на основе содержательной истинности ее принципов, с той лишь разницей, что семантическая истинность, на которую ориентировалась теория Фреге, заменяется здесь истинностью онтологической. Обоснование этого тезиса требует более детального рассмотрения содержания аксиом, содержащихся в ΔM, и прежде всего аксиомы бесконечности и аксиомы выбора.

3. Онтологическая истинность аксиомы бесконечности

Общая идея онтологического оправдания аксиомы бесконечности была уже намечена выше. Этот вопрос, однако, требует более детального анализа.

Истоки проблемы бесконечности в рамках логицистской программы достаточны ясны. Замысел этой программы состоял в том, чтобы вывести все свойства натурального ряда из логического определения числа. Для обыденного арифметического мышления проблемы бесконечности натурального ряда не существует, поскольку предполагается, что исходя из единицы, посредством последовательного прибавления единицы мы можем дойти до любого как угодно большого числа. Для

логициста этот простой довод запрещен, ибо он должен был бы в этом случае принять представление о порождении одной совокупности идеальных предметов из другой, которая не задается непосредственно логическим определениием числа. Это значит, что утверждение о бесконечности должно быть выведено здесь из принятых определений. Проблема, таким образом, возникает по той причине, что логицизм ставит своей задачей развить теорию натурального числа без опоры на представление «следовать за» как исходное.

Фреге был убежден в аналитичности арифметики и не сомневался в том, что все положения о строении натурального ряда, в том числе и положение о его бесконечности (о наличии последующего элемента для каждого его члена), могут быть доказаны на основе его общего логического определения. Заслуга Рассела состоит в том, что он понял внелогический характер этого требования. Он, однако, заводит дело в тупик, трактуя аксиому бесконечности как утверждение о бесконечности предметов во Вселенной, и объявляя значительную часть математики, зависимой от соответствующей физической гипотезы. Это, конечно, ложное направление мышления, стирающее границу между математикой и физикой и, при последовательном проведении, устраняющее возможность строгого обоснования математических теорий.

Действительное разрешение проблемы состоит в понимании категориальной природы числа. Один из основных тезисов Фреге состоит в том, что носителем числа являются не вещи, а понятия. Разумеется, верно, что вещь как таковая не определяет какой-либо числовой характеристики. Процессу счета должно предшествовать представление о считаемом множестве и его элементах, соответствующих понятию единичного объекта. Однако это положение Фреге скорее затемняет проблему обоснования арифметики, чем проясняет ее. Принадлежность числа к понятию, в действительности, несущественна для понимания законов арифметики, ибо арифметические единицы ведут себя независимо от их предметной интерпретации, т. е. от типа понятий, с которыми они эпизодически связываются. Законы арифметики заданы не сферой их приложения, а только свойствами идеальной предметности.

Мы должны строго различать физическое число, которое является характеристикой реальной совокупности, полученной на основе ее соотнесения с идеальной совокупностью, и собственно математическое число как характеристику самой идеальной совокупности, которая должна быть понята без ссылки на реальную совокупность вещей и операцию счета. Трудность ответа на прямой вопрос: «Что такое число?» проистекает из того, что это понятие опирается на категориальные интуиции, не допускающие определения, а также и из того, что понятие числа на этом уровне не является исходным, а может быть

задано только на основе более элементарных представлений, принятых за исходные. В основе числа как онтологического понятия лежат три представления, а именно, представление о единичной вещи, о совокупности вещей и об элементарной порождающей операции, увеличивающей совокупность вещей на одну вещь. Если эти представления приняты, то математическое число может быть понято как характеристика идеальной совокупности, указавающая ее место в упорядоченной последовательности совокупностей, полученной на основе элементарной порождающей операции. Действительной основой арифметических представлений является не логика и не процесс счета, а идея мысленного порождения идеальных совокупностей.

В онтологической характеристике числа мы, таким образом, должны принять естественное представление о порождении числового ряда, начиная с единицы, которое принято в интуиционистской теории арифметики и которое в наибольшей степени соответствует его обыденной интуиции. Интуиционистское понимание числа страдает психологичностью, поскольку оно апеллирует к активности сознания, порождающего двоичность из единичности и т. п. Для онтологического понимания числа психологическая активность индивида не имеет значения, ибо мы говорим здесь о предметах и их совокупностях как о категориальных представлениях, имеющих интерсубъективный характер.

Понятие единичного объекта и единичной операции как категориально осмысленных сущностей задает весь ряд арифметических объектов — чисел, кроме нуля. Число нуль не имеет онтологического содержания: оно должно быть понято как формальный объект, введенный с целью обобщения операции вычитания. Очевидно, что число, определенное таким образом, не опирается на теоретико-множественные понятия, такие, как пустой класс и эквивалентность классов[15].

Это понимание числа является достаточным в том смысле, что оно делает все существенные свойства натурального ряда самоочевидными, проистекающими из его построения. Если каждая новая совокупность отличается от предыдущей только прибавлением одного объекта, то ряд не будет содержать разрывов, которые могли бы быть заполнены членами, относящимися к этому ряду. Ряд, построенный таким образом, не будет иметь возвращений назад вследствие того, что каждый новый член этого ряда совокупностей будет отличаться от всех совокупностей, построенных ранее. Этот ряд, наконец, неограничен в своем продолжении вследствие идеальной природы совокупностей, к которым он относится.

Идея бесконечности натурального ряда, или, в более общем плане, идея неограниченного увеличения любой предметной совокупности, органически содержится в абстракции идеальной предметности,

которая лежит в основе математического мышления. Здесь мы можем повторить аргумент Канта, относящийся к бесконечной делимости пространства. «... Пространство есть такое целое, которое при всяком разложении в свою очередь все еще представляет собой пространство и потому оно делимо до бесконечности»[16]. Поскольку идеальный предмет, будучи присоединен к множеству предметов, не изменяет свойств этого множества (по свойству аддитивности идеальной предметности), то эта операция всегда сохраняет возможность ее повторения.

Бесконечность натурального ряда проистекает, таким образом, из его идеальности, из того факта, что он является чисто мысленной конструкцией, не связанной с какими-либо реальными (физическими) ограничениями. Арифметика описывает не структуру Вселенной, а лишь онтологию мышления, она относится не к физическому миру, а к идеализированной предметности, законы которой не зависят от опыта[17]. Это, однако, только отрицательное условие, определяющее возможность бесконечности как мысленной операции. Позитивное условие, определяющее его необходимость для сознания, состоит в деятельностной ориентации сознания, в его необходимой направленности на выход за пределы конечного. Математическая бесконечность в этом плане должна пониматься как представление, порожденное необходимой деятельностной ориентации сознания. Бесконечность привнесена в математику не опытом и не логикой, а предметной онтологией, которая является подлинным интуитивным основанием арифметики и математического мышления в целом.

Отсюда следует, что мы не можем перестроить идею числа, а можем лишь прояснить, систему категориальных представлений, в рамках которых оно задано[18].

Обоснование теории множеств требует признания актуальной бесконечности, а именно, утверждения о существовании множества, заключающего в себе все конечные множества. Утверждение актуальной бесконечности представляется более сильным тезисом, так как предполагает завершенность потенциально бесконечного процесса порождения. Пересчет чисел, однако, не может быть закончен, и актуальная бесконечность представляется, вследствие этого, некоторой фиктивной сущностью, недостижимой даже в мысли. Отторжение актуальной бесконечности в философии и методологии математики существенно связано с ее восприятием как чисто интеллектуальной фикции, не допускающей строгого определения.

Теория познания, начиная с Аристотеля, настроена критически в отношении этого понятия. Неприятие актуальной бесконечности мы видим у таких математиков как Лагранж, Лобачевский, Гаусс, Кронекер, Брауэр и Пуанкаре[19]. В «Учении о трансфинитном» Кантор говорит о

враждебном отношении к идее актуальной бесконечности Гельмгольца и Кронекера[20]. Критика актуальной бесконечности, таким образом, имеет длительную традицию, сложившуюся задолго до появления логических трудностей в современной математике.

В принципе, проблема приемлемости актуальной бесконечности, полностью решена Г. Кантором, на основе выявления ее связи с потенциальной бесконечностью. Из существования потенциальной бесконечности логически не вытекает существование бесконечности актуальной. Однако кроме логической необходимости существует методологическая необходимость, определяющая логику образования понятий. Методология математики говорит о том, что актуальная бесконечность коррелятивна бесконечности потенциальной и введение одной из них предполагает использование другой. Всюду, где мы утверждаем наличие потенциальной бесконечности, мы неизбежно утверждаем и наличие порождающей функции, относящейся к бесконечному числу элементов, которые эквивалентны друг другу в смысле принадлежности к этой функции. Но такого рода эквивалентность задает класс, состоящий из бесконечного числа элементов, рассматриваемый в качестве единой и завершенной целостности. В методологическом плане, таким образом, наличие потенциальной бесконечности предполагает представление об актуальной бесконечности как о сфере элементов, соответствующих функции бесконечного порождения. Действуя с порождающими функциями как с целостными объектами, мы в действительности действуем с бесконечными множествами, которые они представляют. Очевидно, что любая система уравнений предполагает пересечение множеств решений, которые, в частности, могут быть бесконечными. Но это значит, что актуальная бесконечность, как и бесконечность потенциальная, внедрена в самые основания математического мышления.

Этот момент хорошо осознавал Г. Кантор. Он считал, что область изменения функции не может быть сама чем-то переменным, ибо в этом случае отсутствовало бы всякое твердое основание рассуждений; поэтому эта область является определенным актуально бесконечным множеством значений. Использование понятия потенциально бесконечного, считает Кантор, имеет понятие актуальной бесконечности в качестве своей необходимой предпосылки. Мы имеем основание утверждать, что Кантором было дано полное обоснование актуальной бесконечности, основывающееся на его логической симметрии с бесконечностью потенциальной.

Современные дискуссии относительно приемлемости актуальной бесконечности проистекают исключительно из ложной философии математики, требующей для каждого математического понятия некоторого коррелята в действительности. Эта натуралистическая логика про-

является в подходе Гильберта. Если потенциальную бесконечность Гильберт рассматривает как оправданную опытом и абсолютно надежную, то актуальную бесконечность он понимает только в качестве искусственной конструкции, требующей финитного обоснования. «Мы видели, что бесконечное не реализуется нигде, оно не присутствует в природе, а без специальных мер предосторожности оно недопустимо и в качестве основы нашего мышления. Уже в этом я усматриваю некоторый важный параллелизм природы и мышления, основополагающую согласованность между опытом и теорией»[21].

Теория онтологической истины устраняет этот ложный параллелизм, закрывающий путь к адекватному пониманию природы исходных математических понятий. С онтологической точки зрения мы вправе утверждать полную симметрию актуальной и потенциальной бесконечности, состоящую в том, что оба эти представления в одинаковой мере обусловлены универсальной онтологией мышления и оба они в соответствии с принципом совместности идеально совместимы с онтологически оправданной частью математики. Парадоксы, требующие корректировки аксиом теории множеств, не могут поставить под сомнение истинность простой аксиомы бесконечности, утверждающей существование счетного множества.

При обосновании актуальной бесконечности мы находим некоторую опору в теоретико-познавательном учении Канта, одним из основных положений которого является утверждение об идеях разума как регулятивных понятиях, не имеющих коррелята в действительности, а обозначающих лишь внутреннюю логику движения самой мысли. От конечного числа причинных связей, данных в опыте, мы, по Канту, неизбежно переходим к идее Природы, от представления о конкретных психических актах — к понятию Души как безусловной целостности и т. д. Мы можем не соглашаться с Кантом в его толковании состава идей разума или (в каких-то других моментах) логики их генезиса, но является совершенно несомненным, что допущение идеальных целостностей лежит в основе человеческого мышления и что за каждым из этих идеальных представлений стоит представление о завершенной бесконечности. Идея завершенного натурального ряда в этом плане — это не столько математическая идея, сколько идея внутренней логики мышления вообще, принимающего идеальные целостности как результат завершенного движения, и она не менее первична для математического мышления, чем идея его бесконечного становления.

Мы должны осознать то обстоятельство, что утверждение актуальной бесконечности, как и утверждение бесконечности потенциальной, не имеют никакого отношения к опыту и к миру самому по себе. Обе эти идеи представляют собой лишь регулятивные формы мышления, проистекающие из его практической ориентации. Они остались бы

теми же самыми при любом положении дел в мире, оставляющим возможность для мышления и действия. Б. Рассел считал, что аксиома бесконечности может быть истинной в одном мире и быть ложной в другом. С натуралистической точки зрения это, конечно, верно. Если физики правы в том, что число атомов во Вселенной конечно, то можно утверждать, что аксиома бесконечности является ложной во всех мирах. Эта аксиома, однако, является истинной для всякого теоретического мира, ибо она есть необходимая часть универсальной онтологии мышления.

Конечно, нельзя считать, что все типы математической бесконечности являются оправданными онтологически. Онтология оправдывает лишь утверждения о существовании простых видов бесконечности, а именно, она оправдывает допущение потенциальной бесконечности натурального ряда, минимальной актуальной (счетной) бесконечности и бесконечности континуума как реальной непрерывности. Все остальные типы бесконечностей имеют чисто операциональное значение и должны быть обоснованы из логических соображений.

Различие между реальными и чисто операциональными бесконечностями, несущественное в математическом плане, является принципиально важным для методологии обоснования. Мы должны уяснить тот факт, что принципы математики, не имеющие обоснования в логике, могут быть обснованы в онтологии и что это обоснование имеет абсолютное значение. Это значит, в частности, что математические аксиомы, утверждающие существование реальных (онтологически оправданных) бесконечностей, не могут войти в противоречие с логикой и с другими онтологически оправданными суждениями математики.

4. Праксеологическое оправдание аксиомы выбора

Аксиома выбора утверждает возможность построить новое множество, выбирая по одному и только одному элементу из произвольной совокупности множеств, принятых в теории. Эта аксиома распадается на три положения, каждое из которых требует особого обсуждения. Она предполагает дизъюнктивный характер множества, т. е. расчлененность его на элементы, отделяемые от множества в целом, выполнимость выбора для произвольной совокупности множеств и то допущение, что результат выбора будет множеством, допустимым в качестве объекта строгого математического рассуждения, в отличие от совокупностей типа множества всех множеств и т. п.

Обычная критика аксиомы выбора состоит в указании на неконструктивный характер процедуры выбора, который она допускает, и на приложимость этой процедуры к произвольной совокупности множеств.

Особенностью аксиомы выбора является ее очевидность, непосредственная данность сознанию в качестве бесспорной истины. К. Гедель допускал, что самоочевидность этой аксиомы может быть использована для непосредственного обоснования ее истинности. Его мысль шла в том направлении, что эта аксиома является аналитической при некотором более широком понимании аналитичности, чем тривиальная тавтологичность[22]. Праксеологический анализ, однако, показывает, что здесь мы имеем дело с синтетическим положением, которое может быть оправдано на основе понятия онтологической истинности.

Мы выяснили, что математика использует понятие истины в особом смысле, радикально отличном от того смысла, в котором это понятие используется в опытных науках и даже в логике. Математическое утверждение следует считать непосредственно истинным, если оно соответствует универсальной предметной онтологии. Нетрудно видеть, что аксиома выбора полностью соответствует понятию онтологически истинного суждения. Первая часть этой аксиомы, а именно постулат о возможности выбора элемента из любого множества, утверждает не что иное, как дискретный и аддитивный характер рассматриваемых множеств, что выражает собой наиболее существенный аспект предметной онтологии. Не все мыслимые множества обладают указанным качеством. Выделяя отдельную мысль из совокупности мыслей, содержащихся в нашем сознании, мы никогда не можем быть уверены, что выделили только одну мысль, а также и в том, что выделили целую мысль, не оставив ее части или эквивалента среди оставшихся мыслей. Известное канторовское определение множества как *всякой мыслимой совокупности* слишком широко, ибо оно включает и расплывчатые множества, не удовлетворяющие требованиям идеальной предметности[23]. Аксиома выбора, таким образом, является не каким-то неопределенным расширением математики, как это обычно представляется в ее интуиционистской критике, а совершенно напротив — радикальным сужением класса множеств, допустимых к рассмотрению: она ориентирует на «правильные» множества, которые в достаточной степени дискретны и в которых не возникает проблем с отождествлением и различением элементов. Аксиома выбора привязывает теорию множеств к наиболее простому, дискретному или арифметическому пониманию множества, и, таким образом, она никак не может рассматриваться в качестве дополнительного источника противоречий или некорректности доказательств.

Второй содержательный момент аксиомы выбора связан с идеей бесконечности: вправе ли мы, исходя из возможности выбора элемента из множества в каждом отдельном случае, заключать о возможности такого выбора для *произвольной* совокупности множеств? Затруднение состоит здесь, очевидно, в понимании сферы примене-

ния схемы полной индукции, возможности применения ее к бесконечной совокупности множеств. При правильном понимании специфики математических суждений критика аксиомы выбора в этом пункте также должна быть отклонена. Переход от реализуемости выбора в каждом отдельном случае к одновременной реализуемости в бесконечном случае является проблемой, если речь идет о некоторой фактической реализуемости. Онтология, определяющая математическое мышление, не связана с идеей времени и, таким образом, свободна от временных и пространственных ограничений. Если нам известно, что выбор реализуем для каждого множества по отдельности, то с математической точки зрения он реализуем одновременно для всех множеств: соображения времени, пространства и количества, существенные для физического рассмотрения, не имеют здесь никакого значения. Это обстоятельство ясно также и с точки зрения общей философии логики. Как уже было отмечено, логика рассматривает классы исключительно с точки зрения их связи по объему и полностью абстрагируется от их структуры, мощности или порядка. Из допущения «существует для каждого» она неизменно выводит «существует для всех», безотносительно к составу рассматриваемых совокупностей. Корректность аксиомы выбора в этом моменте также не может вызывать каких-либо сомнений[24].

Корректность аксиомы выбора в последнем из ее аспектов не нуждается в обосновании: она непосредственно вытекает из аксиомы подмножеств, которая признает существующими все подмножества данного множества.

Обычная критика аксиомы выбора с точки зрения конструктивности неприемлема прежде всего в силу неприемлемости самого требования конструктивности в качестве универсального критерия строгости. Эта критика некорректна и в том отношении, что она не усматривает ограничивающего характера аксиомы выбора. Мы должны обратить особое внимание на тот момент, что аксиома выбора сводит понятие множества к объектам идеальной предметности. Можно сказать, что именно аксиома выбора вносит в теорию множеств конструктивность, приближая общее понятие множества к хорошо определенным дискретным арифметическим множествам. Аксиома выбора связывает теорию множеств с первичными онтологическими идеализациями, которые являются предельно надежным фундаментом математического мышления.

Аксиома выбора в отличие от аксиомы бесконечности непроблематична для современной теории множеств, ибо доказана ее совместность с системой аксиом ZF, и, следовательно, — непротиворечивость системы ZFC при условии непротиворечивости ZF. Онтологическое обоснование, однако, важно для прояснения вопроса о реальном статусе

теории множеств. Если мы вправе рассматривать аксиому бесконечности и аксиому выбора в качестве онтологически истинных суждений, то система аксиом ZFC получает привилегированное положение среди аксиоматических систем теории множеств, подобное положению евклидовой геометрии среди существующих и возможных геометрических систем. Мы вправе в этом случае говорить о ZFC как о реальной теории множеств, соответствующей онтологическому основанию понятия множества. Желая, к примеру, доказать гипотезу континуума, неразрешимую в ZFC, мы можем перестроить аксиоматику, заменив аксиому выбора аксиомой детерминированности. Мы можем получить в этом случае в каких-то отношениях более эффективную систему, но это будет все-таки искусственная система, отступающая от онтологического основания математического знания.

В «Principia Mathematica» Уайтхед и Рассел высказывают мнение, что невыводимость аксиомы выбора из принципов логики делает очень сомнительной значительную часть теории трансфинитных ординалов. С праксеологической точки зрения этот вывод не может быть принят. Аксиома выбора представляет собой часть онтологически истинной математики и, таким образом, предельно надежную основу математической теории, построенной на онтологически истинных аксиомах. В методологическом плане это означает, что аксиома, несмотря на свою внелогическую природу, не может быть источником ненадежности для логицистской теории множеств.

5. Логицистское обоснование непротиворечивости теории множеств

Отказ от первоначальных целей логицистской программы не означает полного отказа от развитых в ней методов анализа математической теории. Онтологическое обоснование аксиомы бесконечности и аксиомы выбора открывает некоторый путь включения логицистского анализа в обоснование теории множеств.

Первоначальный (*сильный*) тезис логицизма состоял в том, что вся математика сводится к общезначимым суждениям логики. После выяснения несводимости аксиомы бесконечности и аксиомы выбора претензии логицизма были сведены к положению (можно назвать его *умеренным* тезисом логицизма), согласно которому логицистская редукция может быть осуществлена при условии истинности аксиомы бесконечности и аксиомы выбора. Уайтхед и Рассел настаивали на том положении, что все содержание канторовской теории множеств сводимо к чистой логике при условии истинности указанных аксиом[25]. Если мы можем признать аксиому бесконечности и аксиому выбора в качестве онтологически истинных и, следовательно, в качестве положений,

безусловно совместимых с логикой, тогда умеренный тезис, вообще говоря, является достаточным для полного обоснования основных математических теорий в смысле их непротиворечивости.

В общем плане эта ситуация может быть описана на основе понятия *логицистской системы аксиом*. Будем называть систему аксиом логицистской, если она имеет вид $L + \Delta M$, где L — это утверждения, редуцируемые к логике, а ΔM состоит из утверждений, допускающих обоснование в качестве онтологически истинных. Так как все аксиомы этой системы являются либо логическими, либо онтологическими истинами, то в соответствии с принципом онтологической совместности эта система должна быть принята в качестве абсолютно непротиворечивой, несмотря на ее несводимость к логике. Гносеологический анализ позволяет утверждать абсолютную надежность математических теорий, основанных на логицистских аксиоматиках.

Очевидно, что арифметика удовлетворяет требованиям логицистской системы. Анализ показывает, что для обоснования своей истинности аксиоматика арифметики кроме логики требует лишь допущения аксиомы бесконечности, которая представляет собой онтологически истинное суждение. Отсюда непосредственно вытекает вывод о непротиворечивости этой аксиоматики. Мы не сводим здесь арифметику к логике, как это предполагалось первоначальной программой логицизма, но используем логицистский анализ для доказательства ее онтологической истинности, а следовательно, и непротиворечивости.

Рассмотрим систему аксиом Т, выражающую теоретико-типовое задание теории множеств, которая состоит из трех следующих аксиом:

Т1. *Аксиома объемности*. Два класса являются тождественными, если они имеют одни и те же элементы.

Т2. *Аксиома выделения*. Для всякого предложения, определяющего объект типа i, существует соответствующий ему класс типа $i + 1$.

Т3. *Аксиома бесконечности*. Существует множество, которое нельзя перенумеровать посредством любого конечного отрезка натурального ряда.

Если мы можем допустить, что аксиомы 1-я и 2-я являются логическими или хотя бы аналитическими истинами, предопределенными сферой логической истинности, то система аксиом в целом должна быть признана в качестве абсолютно совместной на основе принципа совместности логических и онтологических истин.

Есть основания думать, что эта система действительно может быть отнесена к классу логицистских, а следовательно, и к классу абсолютно обоснованных систем. Здесь следует принять во внимание, что Рассел и Уайтхед исходят из логического определения понятия множества, а именно из его понимания как области значений пропозициональной функции. При таком определении множества истин-

ность аксиомы объемности непосредственно проистекает из логического определения тождества порождающих формул. Аксиома выделения утверждает, что для любого множества A и свойства B, такого, что для любого x, содержащегося в A, $B(x)$ либо истинно, либо ложно, существует множество $B(x)$, состоящее в точности из тех элементов, для которых B истинно. Из истинности закона исключенного третьего следует возможность строгого разделения множества A на элементы, удовлетворяющие признаку B и не удовлетворяющие ему при достаточной корректности выделяющего признака, т. е. свойства B[26]. Поскольку теоретико-типовое построение теории обеспечивает максимальную корректность выделяющих признаков посредством индуктивного введения всех новых понятий только на основе признанных, то аксиома выделения сводится здесь к тавтологии, утверждающей, что корректно ограниченная (в рамках признанных свойств) пропозициональная функция сохраняет свойства пропозициональной функции, которой соответствует определенное множество.

Несомненно правы критики логицизма, которые указывают, что исходная база теории множеств, связанная с понятием логической функции недостаточна для ассимиляции содержательной теории множеств в полном объеме. Но нужно признать, что в рамках теории типов достигается экспликация понятия множества, превращающая аксиому объемности и аксиому выделения в тождественно истинные логические утверждения. Отсюда следует, что система T, взятая в целом, удовлетворяет свойствам логицистской системы и должна быть признана, в соответствии с нашими критериями, в качестве абсолютно непротиворечивой.

Теоретико-типовая аксиоматика теории множеств являются более слабой в сравнении с такими аксиоматическими системами как Z, ZF и NBG. Тем не менее она включает в себя все основное содержание теории множеств и является вполне достаточной для обоснования анализа и всех основных теорий современной математики, за исключением указанных более сильных теорий[27]. Возможность прямого оправдания истинности и непротиворечивости аксиоматик типа T открывает, несомненно, более широкий подход к обоснованию математики, чем подходы, предложенные традиционными программами обоснования.

Строгое обоснование логицистского характера системы T или аналогичной системы требует уточнения смысла логической истинности, а также, по-видимому, более современного обоснования тезиса умеренного логицизма. Против логицистской программы выдвигались не только методологические, но и собственно математические возражения, относящиеся к качеству редукции. Пуанкаре, Гильберт и Вейль указывали на невозможность выявления логического основания математики без использования арифметических понятий. К. Гёдель от-

мечал незавершенность ряда доказательств в «Principia Mathematica», важных с точки зрения обоснования редукции. По мнению Куайна, Рассел и Уайтхед с самого начала поместили в класс логических истин положения, имеющие внелогический характер и требующие особого обоснования. Френкель и Бар-Хиллел высказывают мнение, что относительная успешность редукции, осуществленной в «Principia Mathematica», оказалась возможной лишь за счет незаконного смешения операций с классами и операций с множествами[28]. Эта критика ставит под сомнение истинность умеренного тезиса, а следовательно, в какой-то мере, и намеченный здесь замысел обоснования непротиворечивости теории множеств на основе выявления логицистской системы аксиом. Ясно, что реальное логицистское обоснование некоторой теории имеет смысл лишь при условии, что все ее аксиомы, кроме онтологически истинных, могут быть представлены в качестве логически общезначимых[29].

Наша задача состоит здесь не в обосновании системы T или какой-либо другой системы аксиом, а в обосновании того положения, что экзистенциальные аксиомы, которые традиционно рассматривались в качестве основного препятствия к обоснованию арифметики и теории множеств, в действительности, не являются таким препятствием, а напротив, открывают новые возможности обоснования этих теорий за счет выхода в сферу онтологической истинности. Эти аксиомы выводят математическую теорию за пределы логики, но они оставляют ее в пределах онтологической истинности, которая, будучи установленной для всего множества аксиом, достаточна для заключения об абсолютной непротиворечивости этих аксиом и теории в целом. Речь здесь, разумеется, уже не о логицистском обосновании теории, а об использовании логицистской редукции для обоснования непротиворечивости некоторого типа теорий.

Мы идем здесь к заключению о непротиворечивости системы аксиом из их содержательного анализа. Старая идея обоснования непротиворечивости на основе истинности, лежащая в основе логицистской программы, таким образом, сохраняет свое значение, несмотря на отказ от исходных целей этой программы.

Глава 3.

Реализация кантовского интуиционизма

Основные принципы интуиционистского обоснования математики, в том виде, как они были намечены Брауэром, могут быть сформулированы в следующих трех положениях:

1. Исходные математические объекты признаются в качестве существующих только на основе непосредственной интуиции.

2. Новые объекты могут быть введены на основе исходных только посредством интуитивно ясной конструкции.

3. Расширение математического знания посредством логики (дедукции) законно лишь в той мере, в которой оно соответствует возможностям прямого конструктивного обоснования.

Интуиционизм как программа обоснования математики в настоящее время показал себя несостоятельным вследствие своей очевидной узости. Обнаружилось, что важнейшие для математики понятия и методы не могут быть реконструированы в соответствии с требованиями интуиционистской программы. Это означает, что эта программа не согласуется с функцией математики и исходит из умозрительных представлений о природе математического мышления. С философской точки зрения, однако, представляется важным исследовать сущность интуиционистских ограничений и возможность их разумной либерализации. Мы должны рассмотреть возможности ослабления этих ограничений, допустимые с точки зрения концепции онтологической истинности исходных математических представлений.

По аналогии с логицизмом мы будем рассматривать интуиционистскую программу не в плане ее первоначальных задач, которые понимались по-разному в разное время, а лишь в плане использования выработанных здесь подходов для обоснования непротиворечивости. Такая переориентация интуиционизма становится вполне естественной, если мы открыли возможность непосредственного перехода от интуитивной ясности исходных принципов математической теории к их непротиворечивости.

1. Сущность интуиционистской программы

В понимании интуитивной данности исходных математических объектов Брауэр следует за Кантом. Однако он принимает лишь интуицию времени, полагая, что интуиция пространства поколеблена открытием неевклидовых геометрий. В основе математики, по Брауэру, лежит интуиция натурального ряда, которая выражается прежде всего в представлении о возможности его неограниченного продолжения. Проблемы обоснования потенциальной бесконечности для Брауэра не существует: она снимается на основе непосредственной очевидности непрерывного продолжения натурального ряда через последовательное осуществление интуитивно ясной операции прибавления единицы к каждому вновь полученному числу.

Требование конструктивности всех допустимых объектов существенно ограничивает логические средства, приемлемые в интуиционистской математике. Если математика должна расширяться только в пределах возможного конструктивного оправдания, то она должна исключить из логических правил закон исключенного третьего и правило снятия двойного отрицания, так как их принятие ведет к признанию утверждений о существовании, не имеющих конструктивного оправдания. Понятие отрицания получает при этом специфический смысл, отличный от его трактовки в традиционной логике: мы можем отрицать здесь общее суждение только посредством построения контрпримера, а утверждение о существовании некоторого объекта только через сведение к противоречию допущения о его существовании. Логические константы и кванторы вследствие этого должны получить существенно другое значение, также определенное идеей построения: мы полагаем некоторое суждение истинным для всех значений переменной, если мы имеем возможность конструктивного обоснования его истинности для любого из этих значений.

Логика у Брауэра не просто ограничивается, она фактически устраняется в качестве автономного фактора расширения множества математических суждений, ибо доказанное посредством логических схем должно обосновываться и на основе математической конструкции, не предполагающей каких-либо схем логического вывода. Логика в интуиционизме, таким образом, выполняет лишь функцию сокращения конструктивных рассуждений, но не функцию выведения их за границы, определенные собственно математическими предпосылками.

Интуиционистская философия математики в отличие от логицистской последовательно антиреалистична. Математические объекты понимаются здесь лишь как мысленные конструкции, не имеющие какого-либо существования, независимого от конструктивной деятель-

ности сознания. Брауэр считает, что законы математики не имеют статуса законов физики, ибо если бы человечество было вдруг уничтожено, то в мире не осталось бы никакой реальности, представляющей математические теоремы, в то время как физические законы как объективные связи продолжали бы существовать. Математическое творчество, с этой точки зрения только изобретение, но никоим образом не открытие и не отражение какой-либо реальности. Интуиционизм Брауэра в этом смысле прямой антипод платонизму логицистов, которые неизменно наставали на предсуществовании математических объектов и на их тождестве в этом отношении объектам географии и зоологии.

Хотя Брауэр принимает априорное представление о времени как интуитивную основу арифметики, было бы ошибочным рассматривать его общую философскую установку как вариант априоризма. Он допускает зависимость логики от содержания мышления, подчеркивает мысленный статус математических истин и их зависимость от интеллектуальной активности субъекта, обсуждает математическую интуицию исключительно как факт психологии. У Брауэра отсутствует идея априорной формы мышления, которая стоит выше психологии и всякой конструктивности. Он усматривает сущность математических объектов в актах свободного конструирования, но не в экспликации трансцендентальных форм мышления.

Наиболее радикальное отличие интуиционизма от логицизма и формализма состоит в понимании роли знаков и символического языка в математическом мышлении. Намерение Фреге, как мы видели, состояло в том, чтобы заменить расплывчатый язык математических рассуждений языком символов и строгих определений. Брауэр, напротив, видит в символическом языке нечто чуждое природе математического мышления. Идеально строгое мышление, по Брауэру, протекает на уровне мысленного конструирования, на уровне непосредственного сцепления интуитивно ясных представлений, которые лишь более или менее адекватно могут быть отражены в рамках символов и формальных определений. Брауэр считает, что формальный язык математики уводит нас в сторону от математической истины, как только он уходит из-под контроля непосредственного интуитивного восприятия объектов. Логицисты, по его мнению, выдают за суть математики лингвистическую структуру, пригодную лишь в качестве средства передачи математической мысли. Брауэр, таким образом, ищет строгость математики не в очевидности символических построений, а в очевидности самих математических объектов, в их непосредственной данности сознанию. Символический язык, согласно Брауэру, может использоваться в математике лишь в тех пределах, в которых он не становится самодовлеющим, заменяющим математику как процесс построения и эффективного исследования конкретных математических объектов.

При таком подходе аксиоматическое определение теории полностью теряет смысл, а за механизмом логической дедукции остается лишь роль схематизации конструктивных выводов.

Интуиционизм как определенное видение предмета математики, состоящее в том, что математические абстракции не должны терять связи с конкретными объектами и интуитивно ясными операциями, появился задолго до появления парадоксов в теории множеств. Эту идеологию мы видим в высказываниях Гаусса и Кронекера. Оба этих математика были убеждены в том, что актуальная (завершенная) бесконечность не может быть предметом математического рассуждения, и что математика для того, чтобы оставаться строгой дисциплиной, не должна уходить из сферы объектов, относительно которой мы имеем право выносить проверяемые суждения. Это были, однако, доводы, проистекающие скорее из абстрактной философии, чем из каких-либо реальных затруднений. Появление парадоксов в логике и в теории множеств превратило эту старую идею в практически значимую методологию. Уже в первых своих работах по основаниям математики Брауэр связывает интуиционизм с проблемой устранения парадоксов и высказывает убеждение, что окончательное избавление от них возможно лишь через принятие интуиционистского взгляда на математику и на границы применения классической логики[30]. Интуиционизм приобретает статус программы обоснования математики, становится системой требований к перестройке математического знания, устраняющей некорректность обычных (классических) доказательств.

2. Надежность интуиционистского обоснования

Мы должны прежде всего зафиксировать то обстоятельство, что интуиционистски построенная теория несомненно непротиворечива. Интуиционистская философия математики вследствие свойственной ей психологичности не обосновывает этого факта с достаточной строгостью. Брауэр ищет истоки праинтуиции в психологии субъекта, в психологической необходимости перехода от мысленного акта как целого к разделению его на два элемента и к возможности повторения этого процесса до бесконечности[31]. Обращение к такого рода чисто психологическим конструкциям ничего не доказывает. Натуральный ряд, выведенный на основе их, не обладает интерсубъективностью, необходимой для оправдания математики. Действительное обоснование интуиционистской программы возможно только в эпистемологической плоскости, на основе оправдания исходных интуиций арифметики в рамках универсальной онтологии мышления.

С праксеологической точки зрения фундаментальность представления о натуральном ряде обусловлена наличием идеально-предметных

представлений как необходимой части универсальной онтологии. Всякое действование в мире связано с представлением об идеальном предмете, обладающем конечностью, стабильностью, изолированностью и другими качествами, определяющими саму возможность деятельности. Идея пространства определяет представление об аддитивных совокупностях таких предметов, а идея времени задает их упорядоченность в процессе счета. Натуральный ряд чисел, таким образом, это интеллектуальная конструкция, обусловленная системой универсальных категориальных представлений и однозначно определенная на этом уровне. Фиксируя этот момент, мы освобождаемся от всякого психологизма и приходим к пониманию однозначности и непреложности первичных математических представлений для человеческого сознания. Натуральный ряд чисел не конструируется ни индивидуальным, ни коллективным разумом. Это идеальное видение вещей, необходимая форма видения вещей в процессе действия, навязанная человеческому разуму в силу его деятельностной природы.

В смысле строгости обоснования программа интуиционизма (в доступной ей зоне действия) находится вне критики, ибо самоочевидные конструкции разума на основе аподиктически самоочевидных предметов, какими являются конечные числа натурального ряда, являются его предельно надежными конструкциями и не могут включать в себя противоречивых допущений. Теория онтологической истинности полностью оправдывает интуиционистскую математику в смысле ее надежности и признает интуиционистское обоснование математических теорий, там где оно возможно, в качестве предельно надежного обоснования.

Недостаток интуиционистской программы, как уже сказано, состоит в ограниченности ее возможностей. Охватывая арифметику и алгебру, а также и геометрические теории в той мере, в которой они допускают арифметическую интерпретацию, интуиционистская программа оказывается неспособной реконструировать основные утверждения классического анализа и оказывается в принципе неспособной подойти к обоснованию теории множеств. Брауэр сам доказал положение о том, что важная для анализа теорема Больцано–Вейерштрасса не доказуема в интуиционистской математике[32]. Причина этой ограниченности состоит прежде всего в отказе от использования классической логики в полном объеме. Фактически Брауэр поставил задачу воспроизвести все содержание математики, опираясь только на собственно математические очевидности, отказавшись от логики как автономного средства расширения области истинных математических суждений. В настоящее время является хорошо обоснованным то обстоятельство, что ни логика, ни арифметика взятые порознь не достаточны для того, чтобы быть основанием математического знания в целом.

Несмотря на это обстоятельство, было бы неправильным полностью отказаться от круга идей, связанных с интуиционизмом. Основная мысль Брауэра основана на противопоставлении содержательной и формальной математики, интуитивного и формального подходов к обоснованию строгости математики. Брауэр был убежден, что и принятие отдельных доказательств, и принятие математических теорий как корректных происходит в сфере содержательных представлений и не нуждается в искусственных лингвистических приемах, к которым прибегали Фреге, Пеано, Рассел. Прояснение онтологической природы математического мышления позволяет утверждать, что по большому счету истина в этом споре находится на стороне Брауэра.

Реабилитация математического априоризма на праксеологической основе позволяет не только оправдать интуиционистскую программу в смысле ее надежности (в доступной ей области), но и наметить некоторые пути ее расширения, совместимые с надежностью обосновательного рассуждения. Так же, как и в случае с логицизмом, мы должны отвлечься здесь от основной цели интуиционистской программы, т. е. от задачи конструктивной редукции математики к исходным представлениям арифметики, считая, что ее несостоятельность в этом смысле полностью доказана, и сосредоточить свое внимание на прояснении вопроса, в какой степени интуиционистские идеи при их праксеологической интерпретации могут быть использованы в деле обоснования непротиворечивости основных теорий современной математики и в какой степени программа интуиционизма может быть усилена, исходя из более широкой трактовки непосредственной данности математических объектов, намеченной в теории праксеологического априоризма. Имеются основания утверждать, что праксеологическая трактовка самоочевидности первичных математических объектов и операций открывает некоторые новые возможности внутреннего обоснования математики, существенно родственные интуиционизму и достаточные для обоснования непротиворечивости центральных теорий современной математики.

3. Кантовский интуиционизм

Праксеологическая концепция математической очевидности указывает нам два пути трансформации интуиционистской программы, оправданные с точки зрения указанной цели обоснования и обеспечения его надежности. Первое возможное ее изменение относится к сфере логики и связано с отказом от ограничений установленных здесь Брауэром. Интуиционистская математика отвергает чистые доказательства существования и отказывается от признания объектов, о наличии которых мы заключаем на основе такого рода доказательств. Но

если мы имеем строгое обоснование корректности закона исключенного третьего и классического использования кванторов, то мы имеем право снять эти ограничения.

Математическое рассуждение в этом случае перестает быть интуиционистским вследствие потери конструктивности, но оно может остаться интуиционистским в плане интуиционистской приемлемости исходных объектов. Мы должны исходить из того, что целью обоснования математики является не редукция ее к какому-либо частному типу представлений (к арифметике, логике и т. п.) или к частному методу, а обоснование непротиворечивости, которое в общем случае может прибегать к любым истинным основаниям и методам. И если оказывается, что некоторая система математических истин может быть принята как предельно надежная на основе аподиктической очевидности и если эта система истин развертывается затем на основе реальной логики, то полученная в результате теория должна быть признана как предельно обоснованная в смысле отсутствия в ней внутренних противоречий.

Рассуждая таким образом, мы оправдываем некоторый вариант интуиционистского обоснования математической теории, не связанный с брауэровскими ограничениями на логику. Если изложенные выше представления о статусе принципов логики верны и если признано, что аподиктическая очевидность аксиоматики обеспечивает ее предельную непротиворечивость, то намеченная схема обоснования математической теории должна быть принята в качестве законной. Мы будем называть такое обоснование *обоснованием по схеме чистого интуиционизма*, так как являясь интуиционистским по характеру исходных посылок, оно не связано с требованием конструктивности всех утверждений и с брауэровскими ограничениями на использование классической логики. Наша стратегия, таким образом, может состоять в том, чтобы принять интуиционизм как подход к выбору исходных понятий и принципов математической теории, при условии устранения ограничений на принципы классической логики и, в частности, на чистые доказательства существования.

В развитии математической теории, как уже сказано, мы используем логику в двух качествах: в качестве правил определения понятий и в качестве правил дедукции. Так как два этих аспекта использования логики существенно независимы, то в принципе возможны три следующих варианта логической организации математики:

1. Классические объекты + классическая логика.
2. Конструктивные объекты + классическая логика.
3. Конструктивные объекты + конструктивная логика.

Первый вариант математики реализуется всей классической математикой и, в частности, канторовской теорией множеств. Третий вариант — это брауэровская интуиционистская математика. Между ними

находится некоторый умеренный вариант логического построения математики, который до сих пор еще не реализован в качестве систематической программы, но который с полной ясностью был очерчен в философии математики И. Канта: Кант последовательно защищал интуитивный и конструктивный подход к определению математических понятий, настаивая в то же время на независимости логических принципов от материала мышления и на универсальной значимости основных логических принципов. Такое понимание математики можно назвать кантовским проектом математики или кантовским интуиционизмом[33].

Критика классической математики, проведенная Брауэром, была чрезмерно радикальной. От первого варианта построения математики он перешел к третьему, оставив без внимания общий план математики, намеченный в кантовской системе. Представляется, что в настоящее время мы должны будем возвратиться именно к этому среднему плану как к плану практического построения и обоснования математики.

Близкое к этому построение оснований математики было намечено Г. Вейлем в его книге «Континуум» (1917). Надежное представление математики должно исходить, по Вейлю, из принятия бесспорного *экзистенциального региона*, относительно которого у нас нет сомнений в существовании относящихся к нему объектов и первичных свойств. Все другие объекты и свойства должны быть определены на основе первичных в рамках дефинициальных правил, которые исключают появление объектов типа множества всех свойств рациональных чисел и т. п., не подкрепленных их индуктивным введением на основе первичных свойств. Вейль считает, однако, что закон исключенного третьего является важнейшим положением, задающим определенность математического мышления. На каждый вопрос относительно того, обладает ли объект некоторым свойством, если это свойство определено в соответствии с правилами, мы должны, считает Вейль, отвечать с полной определенностью в положительном или отрицательном смысле[34]. Общая логика «Континуума» Вейля ближе к Брауэру, чем к Канту, в том отношении, что приемлемое основание математики здесь ограничивается исходными понятиями арифметики. Современный анализ программы Вейля показывает, что она полностью решает задачу арифметического обоснования анализа, хотя использует при этом несколько более сильные средства, чем те, которые предполагались в ее исходной формулировке[35].

Праксеологическая теория математической очевидности позволяет нам понять, что переход от брауэровской математики к кантовской не приводит к потере надежности математических рассуждений. Если мы ясно поняли, что закон исключенного третьего не несет ответственности за парадоксы и что источник логических трудностей в математике вообще лежит не в правилах дедукции, а в правилах введения поня-

тий, то кантовская математика представляется наиболее перспективной в качестве базы обоснования математики в целом. Здесь мы не допускаем объектов, заданных произвольными гипотезами, совместность которых с уже принятыми объектами не доказана, но с другой стороны, снимаем все ограничения, проистекающие из неадекватной философии логики.

4. Идея геометрического обоснования

Возможно также расширение интуиционистского подхода через включение в его основу аподиктически очевидных представлений геометрии. Сегодня мы должны признать ошибочным отождествление геометрической очевидности с эмпирической и общее отношение к этой очевидности как несовместимой со строгостью математического рассуждения. В действительности, геометрия как и арифметика базируется на очевидностях априорного характера и обоснование на базе геометрии ничуть не менее надежно, чем на базе арифметики или логики. Брауэр существенно ограничил свой подход к обоснованию математики отказом от геометрической очевидности и задача современного априоризма состоит в том, чтобы исправить эту ошибку.

Мы должны обратиться здесь к истории развития математики, чтобы понять причины этого столь продолжительного заблуждения. Борьба аналитиков XIX века с геометрической очевидностью имеет свои истоки в событиях более раннего времени. Математики XVIII века, пытаясь установить полную строгость в анализе, скоро выяснили, что одним из препятствий для этого является идущее от Ньютона соединение анализа и механики. Появилась методологическая установка — мы ясно видим ее у Лагранжа, Даламбера и Эйлера — обосновать анализ как первичную дисциплину, автономную от механики, т. е. без ссылок на очевидности, связанные с движением. Борьба с механическими аналогиями в доказательстве теорем математического анализа, вполне оправданная с точки зрения современного понимания математической строгости, превратилась затем в борьбу с геометрической очевидностью, в требование отказа от чертежей и от геометрической наглядности вообще. Это достаточно понятно, так как геометрия рассматривалась в то время как наука о пространстве и, следовательно, как наука, родственная механике. Важно отметить, что стремление к вытеснению геометрической очевидности из анализа в XVIII веке не проистекало из каких-либо фактов ненадежности этой очевидности, а исходило в основном из философских представлений о геометрии как части механики. Брауэр выдвигает здесь новый аргумент. Он считает, что непреложность геометрической интуиции отвергнута фактом неевклидовых геометрий. Этот аргумент, конечно, не выдерживает

критики. Логическая возможность различных геометрических систем никоим образом не отвергает особого статуса евклидовой геометрии и связанной с ней системы очевидностей. Формальную возможность различных геометрий признавал и Кант, утверждая, однако, единственность евклидовских представлений о пространстве, как конститутивных для нашего сознания. Рассуждая так, как это делает Брауэр, мы должны были бы отказаться и от арифметической очевидности, так как возможны другие системы арифметики, не согласующиеся с интуитивно ясной идеей величины, лежащей в основе натурального ряда. В действительности, нам важно не то, возможны ли формальные альтернативы для евклидовой геометрии, а то, является ли очевидность этой геометрии аподиктической очевидностью, гарантирующей непротиворечивость ее исходных принципов. Праксеологический анализ понятия априорного дает нам основание утверждать, что геометрия и арифметика совершенно равнозначны по истокам своей очевидности и, таким образом, являются в одинаковой степени базовыми для математического мышления как в генетическом, так и в логическом смысле. С этой точки зрения Кант был совершенно прав, поставив эти дисциплины рядом друг с другом, и выделив их как науки, основанные на очевидности особого качества, связанной с необходимыми формами мышления вообще.

И факты, и общая теория математической очевидности позволяют нам утверждать, что двухвековая борьба математиков против геометрической очевидности покоилась на заблуждениях. В действительности, геометрическая очевидность имеет ничуть не менее высокий статус, чем очевидность арифметическая, и она с полным основанием может быть использована как исходная база для обоснования математики. Но геометрическая очевидность богаче, чем арифметическая. В определенной степени это очевидность континуума. По этой причине расширение интуиционистской точки зрения за счет геометрии представляется наиболее важным и перспективным.

Практика обоснования математики на основе геометрической очевидности, несомненно, потребует более точного определения того, что мы можем считать здесь непосредственно данным и не нуждающимся в обосновании. Здесь также может возникнуть проблема производных определений и другие проблемы, которые не могут решаться в рамках общего философского рассмотрения. В нашем предварительном анализе мы будем исходить из тезиса о безусловной надежности и совместности элементарных геометрических построений и будем считать абсолютно обоснованным всякий фрагмент математики, который может быть редуцирован к такого рода простым геометрическим построениям, т. е. к самоочевидности простых геометрических операций в евклидовом пространстве.

Признавая геометрическую очевидность наряду с арифметической и логической, мы существенно раздвигаем сферу интуиционистского подхода к обоснованию математики. Прежде всего мы получаем возможность перевести некоторые относительные доказательства непротиворечивости в ранг абсолютных. Геометрическая интерпретация комплексных чисел, открытая Гауссом, всегда понималась и понимается в настоящее время как доказательство непротиворечивости теории комплексных чисел по отношению к евклидовой геометрии и к арифметике действительных чисел. Однако, если мы понимаем систему построений на плоскости, необходимую для оправдания комплексных чисел как определенную в рамках аподиктической очевидности, то мы можем считать, что теория комплексных чисел получает в результате этой интерпретации абсолютное обоснование своей непротиворечивости. Сам Гаусс рассматривал свою интерпретацию как «истинно метафизическое обоснование комплексных чисел»[36]. Мы сегодня должны подтвердить эту мысль Гаусса в том смысле, что мы можем утверждать, что комплексные числа находят в геометрии свое окончательное обоснование. Этот вывод становится ясным в свете обоснованного выше принципа, согласно которому система аподиктически очевидных аксиом обладает абсолютной непротиворечивостью.

Аналогичные соображения, несомненно, применимы и к известным геометрическим интерпретациям логики. Круги Эйлера и диаграммы Венна всегда рассматривались и рассматриваются по сей день лишь в качестве геометрической иллюстрации логических отношений, которая полезна с эвристической точки зрения. В действительности, поскольку эти схемы носят конструктивный и аподиктически очевидный характер, они имеют абсолютное обосновательное значение и могут рассматриваться как один из подходов к доказательству абсолютной непротиворечивости логических исчислений. Элементарные логические исчисления допускают полное обоснование своей непротиворечивости в рамках гильбертовской программы и, таким образом, не являются проблематичными в этом отношении. Однако важно понимать, что наряду с логическим обоснованием здесь также возможно и геометрическое, и что оно не менее надежно, чем обоснование посредством финитного метаязыка или посредством интерпретации на конечном множестве объектов. Мы вправе с этой точки зрения говорить не только о геометрической интерпретации логики, но и об абсолютном геометрическом обосновании логики. Насколько известно, такого рода геометрическое обоснование оказывается возможным не только для классических, но и для некоторых неклассических логических систем[37].

Попытка сделать геометрическую очевидность исходным пунктом обоснования математики была предпринята Г. Фреге в последний период его жизни. Если в период логистических исследований Фре-

ге отодвигал геометрическую очевидность в сторону как содержащую психологический и эмпирический компонент, то постепенно он приходит к выводу, что эта интуиция не имеет отношения к опыту, что она является более широкой, чем арифметическая, ибо содержит в себе «наиболее полное и строгое определение бесконечности», и что именно она обеспечивает надежность математического мышления в целом. «...Арифметика и геометрия, — пишет Фреге, — выросли на одной и той же почве, а именно геометрической, так что вся математика есть, собственно говоря, геометрия»[38]. В заметках, относящихся к этому периоду, мы видим набросок нового подхода к обоснованию математики, который сводится к тому, чтобы подойти к обоснованию арифметики и других числовых систем, исходя из геометрической интерпретации комплексных чисел. Из непротиворечивости теории комплексных чисел, оправданной на основе геометрической очевидности, должна следовать безусловная непротиворечивость аксиоматики действительных и натуральных чисел[39]. С гносеологической точки зрения этот план, несомненно, оправдан и есть основания думать, что он реализуем и в плане построения необходимой последовательности определений.

Хотя Фреге не сделал существенного продвижения в конкретной разработке своего нового плана обоснования математики, намеченный им методологический сдвиг бесспорен. Нам важно, что Фреге приходит к ясному пониманию того, что геометрическая очевидность не имеет никакого отношения к эмпирической очевидности, и что она не менее надежна, чем очевидность арифметическая или логическая. Фреге преодолевает ложное мнение, состоящее в том, что геометрическая очевидность связана с опытом и вносит нестрогость в математическое рассуждение. Мы можем рассматривать последние работы Фреге как принципиально новый шаг в совершенствовании путей обоснования математики. Он может быть понят как введение особой геометрической программы обоснования математики, которая противостоит всем другим программам, или как расширение интуиционистской программы обоснования за счет введения геометрических представлений в качестве исходных.

Последняя трактовка имеет некоторое преимущество. В статье «Интуиционизм и формализм» Брауэр присоединяет к исходной интуиции числа и прибавления единицы также и общую идею континуума[40]. В дальнейшем развитии интуиционистской программы, однако, эта мысль Брауэра была утеряна и континуум превратился в производный объект, конструируемый на основе арифметических операций. В этом смысле идеи Фреге можно истолковать как возвращение к первоначальной и более богатой форме интуиционистской программы, которая выдвигалась в свое время самим Брауэром.

Как показывают существующие исследования, геометрический интуиционизм содержит в себе возможности обоснования, выходящие за пределы собственно арифметического интуиционизма. Здесь можно указать на работы Ю.А. Гастева, который еще в начале 60-х годов XX века показал, что основная часть математического анализа может быть обоснована, исходя из постулатов, относящихся к геометрии прямой[41]. Аксиомы геометрии прямой, используемые Гастевым, а именно аксиомы положения, непрерывности, инцидентности и полноты, являются оправданными в аподиктической очевидности, а следовательно, и максимально определенными в качестве оснований математической теории. Гастев показывает, что система такого рода предметных аксиом, интуитивно оправданных в геометрической интуиции континуума, соединенная с узким исчислением предикатов, дает систему достаточную для вывода всех основных утверждений математического анализа. Сам автор не задается проблемой абсолютного обоснования анализа, он просто сводит известную область математических утверждений (утверждений анализа) к другой области (геометрии прямой), которая обладает интуитивной ясностью аксиом и несравненно более проста в логическом отношении (мы переходим здесь от многоместного исчисления предикатов второго порядка к одноместному исчислению первого порядка). Но с точки зрения геометрического интуиционизма эта редукция получает обоснователный смысл и может рассматриваться как один из успешных подходов к обоснованию анализа на основе априорных и абсолютно надежных геометрических представлений.

Отличие геометрического обоснования анализа от арифметического обоснования Вейля состоит в понимании статуса геометрической очевидности. Вейль видел различие между Дедекиндом и Евдоксом в понимании континуума в том, что если Дедекинд строит континуум и строго доказывает наличие нижней грани и множества положительных действительных чисел, то Евдокс берет это как простой геометрический факт[42]. Метод Евдокса Вейль считает несовместимым с пониманием математической строгости. С праксеологической точки зрения арифметический ригоризм неоправдан. В конечном итоге и сам Вейль вынужден опираться на аксиому непрерывности, которая имеет корни в геометрических представлениях. Мы должны уйти от идеала арифметизации и понять безусловную значимость геометрической очевидности для оснований математики.

Принципиально важно, что в рамках геометрии с самого начала может быть введено понятие завершенного бесконечного множества, эквивалентного множеству точек на прямой, и, таким образом, задана база для обоснования основных принципов теории множеств. Геометрическая интерпретация анализа, предложенная Гастевым, неполна в том смысле, что она по вполне понятным причинам не захваты-

вает аксиому выбора и связанные с ней утверждения анализа. Намеченная здесь теория онтологической истины позволяет оправдать эту аксиому в геометрическом контексте, исходя из допущения полной совместности всех онтологически означенных принципов математики. При допущении непрерывности прямой как исходного интуитивно оправданного тезиса, геометрия может быть построена конструктивно, а это дает возможность в некотором существенном смысле восстановить конструктивный характер намеченного геометрического обоснования анализа.

Из сказанного ясно, что отсутствие среди программ обоснования математики особой программы, основанной на геометрии, является только следствием предрассудка относительно природы геометрической очевидности, господствовавшего в умах математиков в течение двух столетий. Устранение этого предрассудка существенно расширяет пределы интуиционистского обоснования математики и обосновательного мышления в математике в целом. Без специального анализа трудно говорить о реальных перспективах и границах геометрического обоснования математики, но уже общие соображения показывают, что геометрический подход существенно раздвигает сферу обоснования, основанного на арифметике.

Общий вывод, к которому мы приходим, достаточно ясен. Хотя первоначальный интуиционизм предельно ограничен в своих обосновательных возможностях, при более зрелых методологических установках он может быть трансформирован в достаточно эффективную программу обоснования непротиворечивости математических теорий. Это может быть достигнуто на основе реабилитации классической логики, а также и через утверждение обосновательного статуса геометрической очевидности. Имеются основания предполагать, что расширение интуиционистского подхода по этим двум направлениям дает достаточную основу для полного логического обоснования математического анализа ряда других теорий современной математики.

Вопрос о том, в какой мере таким образом реформированный интуиционизм можно будет называть интуиционизмом, не имеет большого отношения к делу. Нам важно уяснить то обстоятельство, что руководствуясь идеей содержательной математической интуиции, мы можем достигнуть абсолютного обоснования достаточно широкой сферы математического знания, не прибегая к идее формализации теорий или к идее их редукции к системе общезначимых принципов логики. Такой чисто содержательный путь обоснования несомненно существует, и это дает основание считать, что в усеченном и неразвитом виде интуиционизм содержит в себе истину принципиально важную для понимания путей обоснования математики. Задача современной философии

математики состоит в том, чтобы выявить эту истину в более точных понятиях и связать ее с реальной методологией математики.

5. О подходе П.С. Новикова

Основная методологическая установка П.С. Новикова состояла в том, что обоснование математической теории может быть достигнуто только в рамках ее конструктивного представления. Он считал, однако, что брауэровский интуиционизм неоправданно зажат финитной установкой, которая ограничивает сферу приемлемых объектов. Идея Новикова состояла в том, чтобы создать условия для введения бесконечных объектов через расширение логики математических умозаключений. Он считал возможным принять бесконечные конъюнкции и бесконечные дизъюнкции в качестве законных объектов логики, а также трансфинитную индукцию, как правило, необходимую для обоснования операций с такого рода объектами. Интуиционистский подход к обоснованию математики существенно расширяется здесь за счет перехода от финитной логики к логике трансфинитной со строгим сохранением, однако, принципа конструктивности, устраняющего закон исключенного третьего. На этой расширенной интуиционистской основе П.С. Новиков строго обосновывает непротиворечивость арифметики, а также непротиворечивость теории типов с аксиомой бесконечности, т. е. часть теории множеств, охватываемую теоретико-типовой аксиоматикой[43].

Подход Новикова выглядит искусственным, поскольку он нагружает бесконечностью логические исчисления, которые всегда мыслились в качестве наиболее простой и конечной части математического знания. Д. Гильберт считал бесконечные конъюнкции и бесконечные дизъюнкции чисто гипотетическими и неприемлемыми для математики[44]. Однако, если мы оправдываем аксиому бесконечности и аксиому выбора в качестве онтологически обоснованных принципов, безусловно совместимых с реальной логикой, этот подход может защищаться как имеющий обоснователь ное значение.

Рассмотрение интуиционистской программы показывает, что несмотря на очевидную ограниченность исходного (брауэровского) варианта, она содержит в себе достаточно широкие обоснователь ные возможности, которые, однако, зависят от нашего понимания статуса реальной логики и природы таких принципов, как закон исключенного третьего и аксиома выбора. Ясно, что дальнейшее развитие интуиционистской программы связано с прояснением статуса этих основополагающих принципов.

Глава 4.

Пути расширения метатеории

Мы обсудим теперь возможности формалистской программы обоснования математики, которая была предложена Д. Гильбертом. Целью обоснования математики является здесь не редукция к логике или к арифметике, а обоснование непротиворечивости каждой теории в отдельности. Поскольку мы приняли, что такое понимание обоснования математики является наиболее соответствующим сути проблемы, то речь должна идти здесь не о приспособлении этой программы к новым задачам, а лишь о путях увеличения ее эффективности.

Общий замысел Гильберта состоял в том, чтобы обосновать непротиворечивость математической теории на основе рассуждений в другой математической теории (метатеории), которая является непротиворечивой по составу своих принципов. Очевидно, что эффективность формалистской программы зависит от дедуктивных возможностей метатеории и может быть увеличена лишь посредством ее рационализации, совместимой со строгостью обосновательного рассуждения. Мы обсудим здесь некоторые идеи, идущие в этом направлении.

1. Общая характеристика программы

Мы можем понять сущность программы Гильберта из его отношения к исследованиям Рассела и Брауэра. Гильберт считал, что расселовское обоснование математики не является строгим, поскольку оно опирается на утверждения типа аксиомы сводимости и аксиомы бесконечности, которые могут быть приняты только как гипотезы. Он был категорически не согласен с подходом Брауэра, который, по его мнению, является разрушительным для математики. Вместе с тем, он соглашался с логицистами в том, что строгость математики может быть достигнута только через уточнение ее языка и через прояснение логической структуры теории. Гильберт, как это признано, взял у логицистов понятие строгой аксиоматизации и формализации математической теории. Он соглашался с Брауэром в том, что закон исключенного третьего не применим к математическим утверждениям, связанным с

бесконечностью. Как и Брауэр, он считал, что истинность математического суждения относительно бесконечного множества предметов не может быть проверена и, вследствие этого, строгая альтернатива, выражаемая законом исключенного третьего, не может быть применена к нему в качестве безусловной истины[45].

Это положение выразилось у Гильберта в его принципе финитизма, согласно которому «оперирование с бесконечным может быть сделано надежным только через конечное»[46]. Финитизм Гильберта, однако, не столь радикален как финитизм Брауэра: если Брауэр хотел устранить актуальную бесконечность из математики вообще как понятие, не имеющее смысла, то Гильберт считал возможным сохранить его в тех пределах, в которых оно допускает финитное обоснование.

Процедура обоснования математики, согласованная с этими общими установками, предполагает полную формализацию теории, заключающуюся в представлении ее аксиом в виде не имеющих содержания строчек символов. Математическая теория тем самым превращается в объект, подчиненный чисто внешним (формальным) манипуляциям, основанным исключительно на структуре ее формул. В плане данной выше классификации очевидностей можно сказать, что формализация представляет собой сведение всех типов очевидности к предметной и логической очевидности.

Формализованная теория предполагает содержательную метатеорию, которая включает в себя описание структуры формализма, а также общие принципы логики и специальные правил преобразования (принцип индукции и т. п.), допустимые для действий в рамках формализованной теории. Метатеория, по замыслу Гильберта, должна быть безусловно истинной и достаточной для строгого обоснования непротиворечивости формализма, которое должно состоять в доказательстве невозможности получения в его рамках выражения, имеющего вид «0 = 1»[47].

Целью формалистского анализа, как и всякого другого обоснованного рассуждения, являются, конечно, реальные математические теории, различающиеся по своему содержанию и методу. Специфика формалистского подхода состоит в том, что заключение о непротиворечивости реальной математической теории предполагается вывести здесь из непротиворечивости ее формализованного аналога. Формалистское обоснование покоится на допущении, что непротиворечивость формализма, будучи доказанной, гарантирует полную надежность содержательной теории.

Успех формалистского обоснования обеспечивается, очевидно, надежностью метатеоретического доказательства. Гильберт формулирует ряд требований к метатеории, которые известны как принципы

гильбертовского финитизма. Они могут быть сведены к следующим положениям:

1. Метатеория является *лингвистической* теорией в том смысле, что она имеет дело только со знаковой структурой теории и с преобразованиями, допустимыми в этой структуре. Строгое метатеоретическое обоснование непротиворечивости теории — это обоснование, апеллирующее только к синтаксису теории и не использующее никаких допущений о содержании ее собственных понятий и принципов.

2. Метатеория является *содержательной* теорией в том смысле, что она относится к конкретному формализму как к своему предмету и в своих предметных предпосылках не выходит за пределы описания его самоочевидных свойств.

3. Метатеория является *финитной* в том смысле, что она не опирается на высказывания об актуально бесконечных множествах.

4. Метатеория является *конструктивной* в том смысле, что всякое утверждение о существовании объекта в ее рамках должно быть подтверждено процедурой его построения.

Легко видеть, что все эти требования являются необходимыми для метатеории с точки зрения понятия строгости, сформировавшегося в начале XX века под влиянием логицистского и интуиционистского анализа проблемы. Часто указывается, и в определенном смысле это верно, что Гильберт не дал полного определения метатеории, устраняющего всякие колебания относительно возможного ее содержания. Его методологический замысел, однако, совершенно ясен. Он состоит в том, чтобы ограничить метатеоретическое рассуждение таким образом, чтобы оно гарантировало его абсолютную достоверность. Метатеория должна быть способной доказывать непротиворечивость формализованных теорий, а следовательно, и непротиворечивость соответствующих им содержательных теорий независимо от их содержания.

Гильберт считал, что метатеория должна иметь внутреннее, собственно математическое оправдание. Речь идет здесь о требовании, которое получило в дальнейшем название принципа отделения оснований от философии[48]. Это положение означает, что выделение принципов метатеории должно совершаться на основе строгих математических критериев. Принимая факт априорности элементарной математики, Гильберт отождествляет априорность с финитностью и формулирует требование финитности в качестве основного критерия для метатеории. Мотив этой замены ясен: требование финитности является математическим и, предположительно, более определенным, чем философское понятие априорности.

В методологии формализма важное место занимает так называемая теория идеальных элементов, которая требует более детального

разъяснения. Разделение идеальных и реальных элементов было введено Лейбницем для объяснения бесконечно малых величин. Лейбниц считал, что эти величины, не являясь реальными, т. е. не имея убедительной интуитивной основы, выполняют в математике роль полезных фикций, расширяющих возможности оперирования с реальными величинами. К таким фикциям он относил также мнимые и иррациональные числа. Эта идея была использована в методологических рассуждениях Л. Карно по обоснованию математического анализа. «В алгебре, — писал Карно, — вводят в вычисления чисто мнимые понятия, фиктивные сущности, которые не могут ни существовать, ни быть понятыми, но которые не теряют, однако, от этого своей полезности. Их употребляют вспомогательным образом как термины сравнения для облегчения сопоставления истинных количеств, связь между которыми желают получить, и затем их исключают посредством преобразований, представляющих, так сказать, чисто механическую работу»[49]. Н.И. Лобачевский использовал эту идею для оправдания законности «воображаемой» геометрии. Он исходил из того, что даже если изобретенная им новая геометрия нигде не выполняется в реальности, она является важной для математики как средство ее внутреннего развития[50].

Понимание идеальных элементов у Гильберта является новым в том отношении, что оно ставится здесь в зависимость от точки зрения на математический объект. Равенство

$$a + b = b + a$$

является, по Гильберту, реальным, если оно рассматривается в отношении бесконечного количества своих арифметических интерпретаций, и становится идеальным, когда оно рассматривается как лишенная смысла строчка символов в формализованной теории. Такая трактовка идеальных элементов необходима ему прежде всего для оправдания закона исключенного третьего. Этот закон неприменим к указанной формуле в ее содержательной интерпретации, которая предполагает существование бесконечного множества, но он применим к ней, когда она рассматривается как конечная знаковая конфигурация в системе объектов того же типа. Закон исключенного третьего, таким образом, включается в формализованную теорию, которая состоит из идеальных (конечных) объектов, и исключается из содержательной метатеории, в которой ведется обсуждение структуры теории.

Центральное место в системе идеальных элементов занимает ϵ-функция, на основе которой формулируется ϵ-аксиома, занимающая важное место в гильбертовском подходе к обоснованию математического анализа. Если мы имеем предикат A с областью определения $\{x\}$, то ϵ-функция от предиката A (обозначим как $e(A)$) обозначает объект из области $\{x\}$, для которого она наверняка выполняется, если

она вообще выполняется для объектов этой области. На основе этого, очевидно, неконструктивного понятия Гильберт формулирует трансфинитную аксиому, имеющую вид:

$$A(\epsilon(A)) \rightarrow A(a),$$

где a — предмет, принадлежащий множеству $\{x\}$. Эта аксиома является для Гильберта важной частью метатеории, нацеленной на обоснование анализа. Очевидно, что она связана с выходом за пределы финитности, поскольку предполагает возможность выбора элемента из бесконечного множества. Гильберт, однако, считает, что введение этой аксиомы не нарушает финитной установки, поскольку ϵ-функция может быть исключена из окончательного доказательства непротиворечивости. Иными словами, Гильберт рассматривает ϵ-функцию как идеальный метатеоретический объект, который является лишь средством достижения результата и который, в конечном итоге, исключается из результата и из его доказательства. Здесь мы имеем полную аналогию того процесса обоснования, о котором говорил Л. Карно применительно к использованию фикций в алгебре.

2. Защита финитизма

Метод абсолютного обоснования непротиворечивости формализованной теории реализуется для простых исчислений, таких, как исчисление высказываний, исчисление предикатов и абстрактная теория групп, но он оказывается неприменимым для основных теорий, с которыми имеет дело математика. Неразрешимой оказалась уже задача обоснования непротиворечивости формализма арифметики. Принято считать, что причины этой ограниченности полностью раскрываются теоремой К. Гёделя о неполноте (1931), которая утверждает, что если исчисление непротиворечиво и является достаточным для выражения аксиом арифметики, то его непротиворечивость не может быть доказана в метатеории, допускающей арифметизацию. Поскольку достаточно очевидно, что любая метатеория, имеющая дело только с синтаксисом теории, арифметизируема, то ни арифметика, ни анализ, ни теория множеств, взятые в виде формализмов, вопреки ожиданиям Гильберта не могут рассчитывать на обоснование непротиворечивости в финитной метатеории. Мы должны говорить в этом случае о полном провале программы Гильберта.

Гильберт, как известно, не согласился с такой трактовкой результата Гёделя. «...Я хотел бы подчеркнуть, — писал он, — что возникшее на определенное время мнение, будто из некоторых недавних результатов Гёделя следует неосуществимость моей теории доказательств,

является заблуждением. Этот результат на самом деле лишь показывает, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем это оказалось необходимым при рассмотрении элементарных формализмов»[51].

Под усилением финитного подхода Гильберт имеет здесь в виду использование метода идеальных элементов.

Исследования Гильберта и Бернайса показывали, что метатеория, необходимая для обоснования арифметики и анализа, должна содержать следующие аксиомы:

1. Аксиомы исчисления высказываний (1–6).
2. Аксиомы равенства

   7. $a = a$;

   8. $a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$.

3. Аксиомы числа

   9. $a + 1 \neq 0$;

   10. $\delta(a + 1) = a$.

4. Трансфинитная аксиома

   11. $A(\tau A) \rightarrow A(\mathrm{a})$[52].

Последняя аксиома включает себя нефинитность, но как уже сказано, ее предполагаемое использование в доказательствах обусловливается возможностью ее элиминации из доказательства. Первая реакция Гильберта на теорему Гёделя исходила из его уверенности в том, что элиминация ϵ-функции несомненно обеспечена, по крайней мере, в доказательствах непротиворечивости арифметики и математического анализа. Дальнейшие исследования, однако, выявили неустранимые трудности в реализации этого плана. В «Основаниях математики» Гильберт и Бернайс должны были признать, что пока не обладают средствами для строгого обоснования арифметики в соответствии с первоначальным замыслом[53].

Признавая важность теоремы Гёделя о непротиворечивости как накладывающей существенные ограничения на программу Гильберта, мы должны, однако, избежать ее излишне радикального истолкования, при котором она мыслится как закрывающая путь к финитному обоснованию математических теорий вообще. В действительности, финитные обосновательные рассуждения, конечно, имеют место. Таким безусловно финитным и абсолютным обоснованием для арифметики, как уже говорилось, является ее интуиционистское представление. Формалистская теория открывает здесь новые возможности, о

чем свидетельствуют исследования самого Гёделя. Если интуиционистское представление арифметики считать ее финитным обоснованием (у нас не может быть возражений против такой оценки), то возможность погружения формализма классической арифметики в формализм интуиционистской, обоснованная Гёделем, может рассматриваться как абсолютное обоснование непротиворечивости формализма классической арифметики, проведенное финитными средствами. Гильберт и Бернайс признали факт финитности гёделевского обоснования, отклонив его, однако, как приемлемое для формалистского подхода. Гёделевское рассуждение, по их мнению, отходит от теории доказательства, поскольку оно существенно опирается на содержательную интерпретацию логических операций, являющихся элементом формализованной теории[54].

Этот момент принципиально важен, ибо он показывает возможность содержательного финитного рассуждения, обеспечивающего абсолютное обоснование математической теории, но не обладающего свойством арифметизируемости. Радикальная интерпретация теоремы Гёделя, запрещающая возможность финитного обоснования математической теории вообще, неоправданно отождествляет требование финитности метатеории с ее арифметизируемостью, ограничивая тем самым возможности строгого обоснования возможностями обоснования в арифметизируемой метатеории.

Радикальная критика формалистской программы, исходящая из теорем Гёделя, является, как показывает анализ, ошибочной также в том смысле, что она приписывает этим теоремам значительно большую общность, чем та, которой они обладают по логике доказательства. Общее заключение теоремы Гёделя о непротиворечивости основано на формуле:

$$\text{Consis } T \rightarrow G,$$

где Consis T — утверждение о непротиворечивости арифметики, а G — формула, заведомо невыводимая в арифметике. Так как формула Consis $T \rightarrow G$ выводима в арифметике, то доказательство в метатеории непротиворечивости арифметики вело бы к признанию выводимости формулы G, невыводимость которой доказана. С. Феферман показал, что в принципе возможно построение более слабых формул, соответствующих содержательному смыслу Consis T, для которых недоказуема импликация Consis $T \rightarrow G$ и выведение которых в метатеории, таким образом, не входит в противоречие с теоремой Гёделя[55]. Радикальное истолкование теоремы Гёделя ошибочно, поскольку оно исходит из допущения, что теорема Гёделя истинна не только для формы Consis T, используемой в доказательстве Гёделя,

но для *всех формальных выражений*, которые могут быть истолкованы как утверждения о непротиворечивости теории.

Вопрос о том, могут ли идеи Ферма оказать влияние на реальную практику обоснования, может быть прояснен только в сфере логического анализа. Ясно, однако, что обоснование возможности альтернативных Consis T, даже чисто теоретическое, отклоняет радикальную оценку программы Гильберта, как ограниченную только сферой тривиальных теорий, более слабых, чем арифметика.

Мы видим, таким образом, две возможности расширения финитизма и финитного обоснования непротиворечивости математики без противоречия с теоремой Гёделя. Это, во-первых, расширение метатеории за счет содержательных допущений, относящихся к теории, а, во-вторых, ее расширение через выведение нестандартных (более слабых) Consis T в арифметизированной метатеории.

Уяснение этих возможностей важно для оценки современных подходов к обоснованию математики, претендующих на финитность. В этой связи следует отметить исследования А.С. Есенина-Вольпина по ультраинтуиционистскому обоснованию математики. Автор предложил концепцию арифметики, построенную на допущении практической бесконечности конечных чисел натурального ряда и попытался обосновать на этом предположении непротиворечивость системы аксиом теории множеств в форме ZF[56]. Эта теория отказывается не только от актуальной, но и от потенциальной бесконечности, заменяя ее понятием практически бесконечного, которое, по сути, является другим наименованием для неопределенного конечного.

А.С. Кузичев развивает подход к обоснованию непротиворечивости аксиоматики ZF, основанный на погружении всего множества ее выводов в особый тип секвенциального исчисления, относительно которого удается построить финитное доказательство непротиворечивости[57].

Ю.Л. Ершов и К.С. Самохвалов считают, что программа финитного обоснования, не будучи применимой к таким теориям, как теория множеств, может быть реализована для класса теорий, связанных с решением задач. По мнению авторов, ограничения Гёделя не имеют силы для этого класса теорий, и, таким образом, остается открытой возможность их финитного и абсолютного обоснования[58].

Идея неиспользованных возможностей финитного подхода лежит в основе исследований Я. Мациельского по обоснованию анализа. «Конечная математика» Мациельского основана на возможности формального исключения актуальной и потенциальной бесконечности их математических формул посредством записи их с использованием ограниченных кванторов. Предполагается, что мы можем переформулировать все утверждения формализованной математической теории как

утверждения, относящиеся к конечной, хотя и неопределенной области предметов. К примеру утверждение $\forall x \exists y\ (y = x + 1)$ может быть записано в виде $(\forall x < \Omega)(\exists y < \Omega)\ (y = x+1)$, где Ω — неопределенное конечное число. Обосновательный прогресс основывается на теореме, согласно которой теория, сформулированная в конечных кванторах, является равнозначной с исходной теорией в плане непротиворечивости, а с другой стороны, допускает обоснование непротиворечивости на основе конечных моделей. Теории конечной математики претендуют на финитное обоснование анализа, свободное от использования как актуальной, так и потенциальной бесконечности[59].

Общая теория финитности не позволяет считать эти подходы заведомо ошибочными, ибо, в принципе, они могут найти оправдание в рамках некоторой содержательной финитной метатеории. Теоремы Гёделя здесь не имеют силы, так как они не относятся к содержательному финитному рассуждению, которое заведомо не поддается представлению в арифметизированной метатеории. Здесь мы должны исходить из того положения, что границы содержательного финитного рассуждения не определены в логических понятиях и могут быть выявлены только на основе анализа конкретных подходов.

3. Онтологическое понимание метатеории

Защита финитизма в той мере, в которой она возможна, дело практики и логического анализа. Собственно философское обсуждение возможностей формалистского подхода должно быть сосредоточено на понимании гносеологического статуса метатеории и возможностей ее расширения на основе понятия математической истины. Гносеологический анализ метатеории важен в том отношении, что он открывает возможности ее расширения, выходящие за пределы финитизма.

Основная слабость формалистской программы состоит в незавершенности ее методологического обоснования. Устанавливая общие принципы своей программы, Гильберт пишет: «Надо повсюду установить такую же надежность логических средств, как и та, что имеется в обыкновенной элементарной арифметике, где никто не испытывает ни малейших сомнений и где противоречия и парадоксы возникают лишь в результате нашей невнимательности»[60]. Но чем объяснить, что в элементарной арифметике существует такой уровень надежности? Не имея ясного ответа на этот вопрос, мы имеем мало шансов указать границы надежной метатеории и надежного обоснования математики в целом.

Праксеологическая теория математических идеализаций дает нам определенную основу для ответа на этот вопрос. Мы выяснили, что

в основе математического мышления лежит система категориальных очевидностей, которая является абсолютной формой нашего мышления и что онтологически истинные принципы математики обладают безусловной надежностью и обосновательной значимостью. Содержательная метатеория с этой точки зрения не что иное, как система онтологически истинных принципов, приемлемых для обсуждения данной теории.

Эта естественная гносеологическая квалификация сути метатеории вносит радикальные изменения в понимание ее состава. С этой точки зрения надежная метатеория может включать в себя любые принципы онтологически истинной математики, независимо от их отношения к таким характеристикам как финитность и конструктивность. Мы расширяем допустимую метатеорию за счет введения в нее онтологически истинных нефинитных суждений. Предшествующий анализ логики и общих принципов математики дает нам достаточную основу для оправдания такого рода нефинитной метатеории как обладающей абсолютной обосновательной значимостью.

Если верно, что аксиома выбора входит в состав аподиктически очевидных истин математики, то принцип трансфинитной индукции, являющийся ее непосредственным следствием, должен быть принят в качестве законного элемента любого метатеоретического рассуждения. Если верно, что закон исключенного третьего не имеет тех дефектов, которые приписывает ему интуиционистская критика, то мы можем отказаться от требования конструктивности метатеоретических рассуждений, которое является существенным для метатеории Гильберта. Мы можем настаивать лишь на требованиях содержательности и конкретности метаязыка, которые представляются действительно существенными.

В настоящее время, когда предрассудок о некоторой неполноценности закона исключенного третьего все еще укоренен в сознании большинства математиков и философов, такое допущение выглядит не очень убедительным. Однако мы должны быть последовательными. Мы должны спросить себя, имеем ли мы основание верить, что закон исключенного третьего может быть причиной противоречий? Ни математическая практика, ни теория логики не оправдывают сегодня положительного ответа на этот вопрос. Но это значит, что наше метатеоретическое рассуждение может опираться на этот закон без каких-либо ограничений, удовлетворяя при этом всем требованиям строгости и надежности.

Из аподиктической очевидности семантических рассуждений следует, что они относятся к сфере онтологической истинной математики и также должны быть признаны в качестве законного элемента обосновательной метатеории, несмотря на то, что они не могут быть

включены в метатеорию в ее гильбертовском понимании. Как показывает практика, гильбертовские ограничения все еще существенно влияют на методологию обоснования. Э. Мендельсон пишет о непротиворечивости принятого им варианта формализованной арифметики (системы S): «Если мы признаем стандартную интерпретацию моделью теории S, тогда мы должны признать и факт непротиворечивости этой системы, однако семантические методы, включающие в себя, как правило, известную долю теоретико-множественных рассуждений, по мнению некоторых математиков являются слишком ненадежной основой для доказательства непротиворечивости»[61]. Теория онтологической истинности обосновывает полную надежность семантических средств, по крайней мере тех из них, которые не выходят за пределы аподиктической очевидности. Стандартная интерпретация арифметики безусловно оправдывает ее абсолютную непротиворечивость. Все доказательства непротиворечивости, опирающиеся на такого рода качественную семантику, должны быть признаны законными, обладающими абсолютной надежностью. Разделение доказательств на семантические и синтаксические, безразличное для обычной математической практики, должно быть признано безразличным и для сферы обосновательных рассуждений.

Онтологическое понимание метатеории делает акцент не на логической простоте (финитности, разрешимости и пр.) метатеории, а только на ее истинности. С этой точки зрения совершенно безразлично проста или сложна метатеория по сравнению с теорией по составу своих понятий. Мы можем представить себе обоснование некоторой неклассической логики как финитной теории на основе фрагмента теории множеств. Решающий вопрос состоит здесь в том, можем ли мы рассматривать этот фрагмент в качестве онтологически истинного.

Если мы понимаем истинное основание надежной метатеории как относящееся к сфере онтологически истинной математики, то мы должны отказаться почти от всех ее признаков, выдвинутых Гильбертом в качестве существенных. Гносеологически обоснованная метатеория, в действительности, не обязана быть ни финитной, ни конструктивной, ни нацеленной в обязательном порядке на синтаксис теории. С праксеологической точки зрения все эти требования должны быть заменены одним требованием, а именно, требованием онтологической истинности. В конкретных случаях, разумеется, мы можем прибегать к понятиям финитности, конструктивности, обозримости и к другим понятиям, характеризующим обосновательный слой, понимая при этом их вторичность и относительную значимость по отношению к понятию онтологической истинности.

Онтологическое понимание метатеории требует также отказа от принципа отделения оснований от философии, под которым Гильберт

понимал необходимость определения метатеории только на основе математических критериев. Этот момент важно прояснить, ибо отказываясь от некоторых моментов гильбертовского понимания метатеории, современные логики подчеркивают необходимость сохранения принципа ее внутренней определенности. Проясняя свой подход к проблеме обоснования Г. Крайзель пишет: «В противоположность «грубому формализму»... рассматриваемая точка зрения соглашается с тем, что за формальными системами стоят интуитивные принципы доказательства и убедительность, которую они добавляют. Но она считает, что такие психологические элементы не допускают точного анализа. Поэтому, чтобы получить что-то определенное, мы должны заменить их формальными правилами и изучать последние»[62]. Расширяя метатеорию за счет интуитивной основы, стоящей за формализмами, Крайзель, как мы видим, полагает, что математик может иметь с ней дело только в том случае, если она допускает достаточно определенную математическую экспликацию.

Критерий онтологической истинности устраняет необходимость этого требования. Является ошибочным, прежде всего, то допущение, что только математические критерии могут строго задать границы метатеории и устранить нежелательный произвол. Хотя мы не можем выделить сферу априорной математики посредством математических признаков, мы можем с полной определенностью утверждать априорный характер логики, аксиом арифметики, аксиомы выбора и т. п. Это значит, что не имея математического определения принципов метатеории, мы имеем способы их содержательного выделения, которые обеспечивают не менее строгое определение состава метатеории, чем ее определение на основе математических понятий. Нет необходимости говорить о том, что онтологические критерии не имеют никакого отношения к психологической очевидности.

Другое допущение, которое присутствует в требовании полной внутренней определенности метатеории, состоит в том, что переход от интуитивных критериев к критериям математическим всегда возможен и всегда полезен для программы в смысле усиления ее эффективности. Анализ критерия финитности показывает, что это не так. Понятие финитности в определенной мере определяет сферу априорного, но это определение является столь неадекватным, что его эффективность сводится к нулю. У нас нет оснований думать, что понятие онтологической истинности может быть заменено каким-либо математическим аналогом. В действительности, можно обосновать невозможность какой-либо адекватной экспликации этого понятия, а следовательно, и неизбежность непосредственного определения и оправдания принципов метатеории в гносеологических понятиях.

Ясно, что метатеория, расширенная таким образом, ни в каком смысле не является финитной, хотя она может полностью соответствовать формалистскому подходу в смысле чисто синтаксического анализа теории. Принятие закона исключенного третьего или принципа трансфинитной индукции относится только к расширению метатеории и не разрушает общей логики формалистского обоснования.

Общий вывод, вытекающий из сказанного, состоит в том, что мы должны снять неоправданные ограничения на метатеоретическое рассуждение, имеющие место в первоначальной программе Гильберта. Мы должны отказаться от требования его финитности, от ограничений на логику и наконец от самого характера определения метатеории. Адекватная метатеория должна быть непосредственно определена на основе понятия онтологической истинности, которое не может быть заменено какой-либо системой собственно математических критериев. Теория онтологической истинности дает нам достаточные аргументы для обоснования того положения, что снятие этих ограничений не является отказом от требования абсолютной надежности метатеоретического рассуждения.

4. Выход за пределы финитизма

Мы исходим здесь из тождества онтологической истинности и обоснователь ной значимости математических суждений и предполагаем, что всякая надежная метатеория содержится в системе онтологически истинной математики, и всякая онтологически истинная система принципов может выступать в качестве базы абсолютного и предельно надежного обоснования математической теории. Определение метатеории в рамках онтологической истинности выводит ее за пределы финитизма и открывает принципиально новые возможности для развития формалистской программы и для решения проблемы логического обоснования математики в целом.

С этой точки зрения получает полную реабилитацию генценовский подход к обоснованию непротиворечивости арифметики как проведенный в рамках онтологически истинных принципов. Мы оправдываем также доказательства непротиворечивости арифметики, основанные на использовании семантических средств. К этому типу доказательств относится доказательство непротиворечивости ограниченной арифметики П.С. Новикова, основанное на понятии регулярности[63]. К этому типу доказательств может быть отнесено также доказательство непротиворечивости арифметики Н.М. Нагорного, которое исходит из понятия реализуемости[64]. Оба этих доказательства несомненно выходят за пределы финитности в исходном гильбертовском и гёделевском

понимании, являясь вместе с тем абсолютно корректными с точки зрения своей надежности.

Положение об онтологической истинности метатеории представляется ограниченным в том отношении, что оно требует ее построения только на основе аподиктически очевидных утверждений. Гильбертовская метатеория не вполне удовлетворительна в этом отношении. Хотя первоначально Гильберт выдвигал требование содержательной истинности принципов метатеории, впоследствии он отступил от этого требования. Введение трансфинитной аксиомы, конечно, делает метатеорию неудовлетворительной в этом отношении.

Имеются основания предполагать, что в данном случае этот дефект может быть устранен. Введение трансфинитной аксиомы мотивировано у Гильберта не ее содержательной ясностью, а ее эффективностью: она позволяет восстановить закон исключенного третьего, обосновать принцип трансфинитной индукции и операции с действительными числами, которые Дедекинд обосновывает на основе аксиомы непрерывности. Если, однако, мы вправе утверждать онтологическую истинность всех этих следствий, то имеются основания предполагать, что трансфинитная аксиома может быть либо выведена из них, либо заменена ими на основе дедуктивной эквивалентности. Нет никакой необходимости оправдывать закон исключенного третьего на основе искусственной аксиомы, когда он может быть принят непосредственно как онтологически оправданная и абсолютно надежная норма всякого мышления! Иначе говоря, у нас есть основания думать (хотя, конечно, здесь необходимо логическое исследование), что вся гильбертовская теория доказательства, необходимая для обоснования анализа, может быть приведена в соответствие с критерием аподиктической очевидности. Нет никаких сомнений в том, что математический анализ может быть строго обоснован в соответствии с формалистским подходом при разумном расширении метатеории.

Преимущество онтологически истинной метатеории перед содержательной и неясной в своих границах метатеорией Гильберта состоит в том, что ее принципы имеют исчерпывающее обоснование своей надежности. Мы не просто выводим непротиворечивость на основе некоторых абстрактных принципов, мы выводим ее на основе принципов, относящихся к предельно надежному основанию математического мышления, достигая тем самым предельного или абсолютного обоснования рассматриваемой теории.

Как показывают исследования, значительные фрагменты теории множеств обосновываются в своей непротиворечивости на основе математического анализа. Это является доказанным, к примеру, для аксиоматики ZF без аксиомы подмножеств[65]. Это значит, что формалистская программа при снятии неоправданных ограничений может

стать полноценной программой абсолютного обоснования всех основных теорий современной математики. Как и в других случаях, основная проблема состоит здесь в углублении анализа методологических предпосылок этой программы.

Следует отметить, что формалистская программа появилась значительно более обоснованной в философском отношении, чем программы логицизма и интуиционизма. Является важной прежде всего общая установка Гильберта на практическое понимание математического мышления. Математика для Гильберта — не шахматная игра, а орудие познания мира; вследствие чего ее адекватное обоснование должно быть обоснованием всех его практически признанных методов. Отсюда проистекает у Гильберта установка на сохранение всей работающей математики. Обосновательное сомнение у него, также как и у Декарта, имеет только методологический характер; оно призвано, в конечном итоге, восстановить все существующее на другом уровне строгости. Другая важная черта гильбертовской программы, имеющая философское значение, состоит в ее установке на окончательное обоснование. Гильберт исходил из абсолютной надежности элементарной математики как из факта, доказанного всей математической практикой. Признание априорности элементарной математики делает естественным предположение, что и все остальные теории на определенном уровне своего развития достигают той же ступени логического совершенства. Эта установка Гильберта, отвергающая всякий релятивизм, является несомненно правильной. В настоящее время становится все более ясным, что адекватная теория познания должна оправдать математику как сферу абсолютного знания.

Основной недостаток программы Гильберта состоял в неразработанности понятия метатеории. Ограничение сферы надежной метатеории финитностью и арифметизируемостью, конечно, не является адекватным и требует пересмотра. Из сказанного следует, что действительная сфера надежной математики может быть определена только через выявление онтологических оснований математического мышления и, таким образом, через привлечение гносеологических критериев.

Глава 5.
Границы евклидианского обоснования

Мы должны теперь попытаться сделать общий вывод о перспективах и границах логического обоснования математики. Достаточно ясно, что эта задача не может быть решена в рамках чисто логических подразделений. Если границы обосновательного слоя не могут быть определены в логических и математических понятиях, то сфера логического обоснования математики не может быть задана посредством строгих метаматематических утверждений типа теорем Гёделя, разделяющих математические теории на доступные и заведомо недоступные для логического обоснования. Мы можем, однако, попытаться обозначить эту область в методологическом плане, на основе понятия онтологической истинности.

1. Необходимость онтологического обоснования

Программы обоснования математики, предложенные в начале XX века, существенно базировались на индуктивистском и номиналистском представлении о структуре математического знания. Конечному придавался значительно более высокий статус реальности и надежности, чем бесконечному. Бесконечные множества мыслились как «нечто только кажущееся», как только способ выражения, позволяющий упростить систему высказываний о конечных объектах. Представлялось естественным думать, что в основе всех сложных математических понятий лежат в конечном итоге элементарные понятия, и что математика может быть построена через последовательное восхождение от низших этажей к высшим. На самом нижнем этаже в соответствии с этой картиной должны были располагаться элементарные представления, принадлежащие логике и арифметике натуральных чисел.

Хотя на протяжении XX века проблема обоснования математики не была решена полностью, нельзя не признать, что было достигнуто существенное продвижение в понимании условий ее решения. Анализ аксиоматик выявил тот факт, что новые теории требуют постулатов, не сводимых к предшествующим понятиям, и которые, таким образом,

должны приниматься в качестве первичных. Было понято, что логика недостаточна для обоснования принципов арифметики, а арифметика как таковая не может оправдать понятие бесконечного множества, необходимое для теории множеств. Эти и многие другие факты заставили признать, что индуктивистская идея построения математики «снизу вверх» и «от конечного к бесконечному» не соответствует действительной логике обоснования математического знания.

Выход из этого положения в общем плане был намечен К. Гёделем. Он заключается в том, чтобы признать существование абстрактных понятий, данных в интуиции, в качестве самостоятельных сущностей, соответствующих математической реальности.

В статье «Расселовская математическая логика» Гёдель писал: «... Нужно взять более консервативный курс, такой, который бы состоял в том, чтобы сделать значение термина «класс» и «концепт» более ясными и построить непротиворечивую теорию классов и концептов как объективно данных сущностей»[66]. Эта идея высказывается Гёделем также в статье «Что такое канторовская континуум гипотеза» (1947): «Для тех, кто рассматривает математические объекты как существующие независимо от операций нашего конструирования и нашего интуитивного осознания их как индивидуальных, кто требует только того, чтобы общие математические понятия были в достаточной степени ясны для нас, чтобы признать их осмысленность и истинность аксиом, связанных с ними, существует, я верю, достаточные основания для признания канторовской теории множеств в ее полном объеме и значении»[67]. Гёдель исходит из допущения, что человеческий интеллект наряду с конкретными свойствами математических объектов схватывает и относящиеся к ним абстрактные качества, не сводимые к этим конкретным свойствам. Абстрактные математические понятия отражают, по Гёделю, аспекты объективной реальности, но иные, чем те, которые даются посредством ощущений. Они обязаны своим существованием в нашем сознании другому роду отношений между нами и реальностью, чем тот который определяется опытом[68].

Эти идеи Гёделя не получили признания в качестве методологически значимых. Основная причина состоит в их недостаточной определенности. Они не содержат критериев реальности и не позволяют решить вопрос, какие из очевидных аксиом теории множеств следует принять в качестве непосредственно истинных, а какие являются сомнительными в этом отношении. В своей общей формулировке идеи Гёделя могут быть поняты как отказ от строгого анализа оснований и возвращение к обычной манере изложения математических теорий, сориентированной на убедительность непосредственного восприятия предпосылок и выводов. Их можно понять и как защиту математического

эмпиризма, поскольку они основаны на аналогии между математическим и физическим существованием, а также между математической интуицией и чувственным восприятием.

Разумеется, гёделевская идея не имеет никакого отношения к эмпиризму и релятивизму, а нацелена на выявление полного и предельно надежного основания математики. В настоящее время становится все более ясным, что несмотря на свою неопределенность эта концепция должна рассматриваться как указывающая необходимое направление мышления. Концепция Гёделя исходит из понимания реальности и истинности математических утверждений, ее ведущим мотивом является антииндуктивизм, убеждение в том, что математика не может быть построена на узкой основе понятий, которые выделены в качестве исходных в существующих программах обоснования математики.

Теория онтологической истинности дает нам основу для прояснения и уточнения этой идеи. Здесь необходимо выделить три положения, которые обеспечивают переход от абстрактной идеи математической истинности к критериям истинности для конкретных принципов:

1. Реальность математической абстракции должна пониматься как ее онтологическая означенность, как внедренность ее в предметную онтологию, порожденную деятельностной ориентацией мышления.

2. Онтологическая истинность математических понятий и принципов является гарантией их абсолютной непротиворечивости в отношении друг к другу.

3. Возможно рациональное обоснование принадлежности конкретных математических принципов к сфере онтологической истинности.

Обоснование этих принципов устраняет неопределенность гёделевской установки. Теория онтологической истины позволяет нам обосновать в качестве истинных принципы классической логики, включая закон исключенного третьего, исходные аксиомы арифметики и евклидовой геометрии и, наконец, трансфинитные утверждения, такие, как аксиома бесконечности и аксиома выбора. Анализ онтологического основания математики позволяет понять математическую бесконечность как особую сущность, как необходимое представление предметной онтологии и, таким образом, как представление столь же базовое для математического мышления, как и понятие натурального числа. Мы поняли тот факт, что трансфинитные принципы не обосновываются на основе финитных, а утверждаются в своей надежности на основе собственного онтологического основания. Понимание совместности онтологических истин позволяет указать пути рационального расширения традиционных программ обоснования и распространения их на сферу анализа и теории множеств.

Последовательное обоснование этой позиции приводит к пониманию того факта, что всякая логическая программа обоснования ма-

тематики является по своей сути онтологической, ибо она нуждается в оправдании некоторой системы исходных принципов в качестве непосредственно истинной. В логическом обосновании математики мы должны уйти как от тесного финитизма, так и от неконтролируемой интуитивности, ведущей к противоречиям. Единственным ориентиром, указывающим границы допустимого отступления от финитности, является здесь понятие онтологической истинности.

С этой точки зрения мы должны считать совершенно несостоятельными все призывы к очищению математики от онтологии как от некоторого рода метафизики. Антионтологизм в философии математики идет прежде всего от конвенционализма, который понимает математическую реальность как только гипостазирование смыслов, вырабатываемых в рамках формальных структур. Он органически присущ интуиционизму, который мыслит математические объекты как только мысленные конструкции, приемлемые в плане той или другой задачи. Деятельностная теория познания рассматривает математические предметы не как отражение предметов опыта и не как изобретения интеллекта, а как экспликацию предметных представлений, относящихся к универсальной форме мышления. Это значит, что онтология, предполагаемая математикой, — не произвольное построение, которое может быть изменено следующим поколением математиков, а система вневременных интуиций, лежащих в основе человеческого мышления. Достаточно ясно, что отказ от понятия онтологической истинности был бы разрушением всех разумных путей к обоснованию математики[69].

Принципиальным моментом гёделевской позиции является тезис о существовании единственной истинной арифметики и единственной истинной теории множеств. Выявление истинных математических теорий дает нам ключ к обоснованию математики в целом, ибо онтологически истинные теории должны быть признаны в качестве абсолютно непротиворечивых. Существование единственной онтологически истинной арифметики, конечно, не противоречит возможности иных арифметик, обладающих логической непротиворечивостью.

Неудача попыток логического обоснования математики привела к возрождению эмпирической философии, к идее математики как некоторого рода абстрактной физики, которая не гарантирована от корректировки и пересмотра своих основ.

Это, конечно, ложное направление мысли. Математика — не физика и не система соглашений, допускающая изменение под влиянием внешних обстоятельств. Выявление несостоятельности логических подходов должно, в действительности, привести нас не к эмпиризму, а к онтологии, к пониманию особой связи математических теорий с категориальной картиной мира.

2. Сущностный характер евклидианского обоснования

Лакатос выделил три типа обоснования теории: евклидианское, индуктивистское и эмпирицистское[70]. Суть евклидианского обоснования состоит в том, что истина входит здесь в исходные принципы теории и течет «вниз», к более конкретным утверждениям по дедуктивным каналам передачи истинности. Евклидианское обоснование, таким образом, это аксиоматическое обоснование теории в том случае, когда у нас имеются внелогические доводы за безусловную истинность аксиом. Все традиционные программы обоснования являются евклидианскими в том смысле, что они, в конечном итоге, ставят своей задачей свести все содержание теории (или вопрос о ее непротиворечивости) к некоторому множеству безусловно истинных (тривиальных) суждений, логическая совместность которых не подлежит сомнению.

Лакатос был убежден в том, что схема евклидианского обоснования не соответствует логике развития современной науки. Поиски чистого евклидианского обоснования любой науки, в том числе и математики, по его мнению, должны быть оставлены, как покоящиеся на заблуждениях априоризма. Полное обоснование на основе несомненно истинных принципов, с этой точки зрения, не более чем некий идеал, на который ориентируется мышление, но которого оно никогда не достигает в реальной практике обоснования. Лакатос исключает также и возможность индуктивного обоснования математической теории, опирающегося на бесспорные единичные факты (сингулярные суждения). Законы логики запрещают, по его мнению, движение истины «снизу вверх», от фактов к принципам.

Истинное обоснование научного знания, по Лакатосу, — это эмпирицистское или гипотетико-дедуктивное обоснование, которое не допускает вхождения абсолютной истины в теорию ни сверху, ни снизу, которое рассматривает ее относительной на всех уровнях и перемещает внимание с вопроса: «Каким образом мы знаем истину?» на вопрос: «Каким образом мы улучшаем догадки?». Лакатос убежден, что эта схема обоснования относится и к математике, с тем лишь изменением, что речь здесь идет о фактах существенно иной природы[71].

Система рассуждений Лакатоса направлена на то, чтобы доказать нереализуемость идеала безупречного логического обоснования математики и тщетность всех попыток выделить математику из системы остальных наук как строгую и абсолютно обоснованную науку. Для всякого знания, по Лакатосу, всегда остается истинным то положение, что основания не могут быть обоснованы и прогресс обоснования имеет смысл лишь как улучшение имеющихся оснований.

Теория онтологической истинности, очевидно, отвергает логику рассуждений и выводы Лакатоса. Праксеологический анализ показывает, что мы вправе говорить об абсолютно строгих доказательствах и безусловно истинных посылках, лежащих в основе математического мышления. С праксеологической точки зрения, редукция к аподиктической истине — необходимый момент развития математического знания и эта редукция, будучи достигнутой, должна считаться безусловным и окончательным обоснованием редуцированного знания. Мы должны, таким образом, утверждать прямо противоположное тому, что говорит Лакатос, а именно, мы должны настаивать на том, что евклидианское обоснование математических теорий проистекает из сущности математического знания и что оно обеспечивает абсолютное обоснование математической теории, не корректируемое дальнейшим развитием математики.

Эмпирицистская (гипотетико-дедуктивная) и евклидианская схемы обоснования не должны противопоставляться друг другу, ибо они выражают, в действительности, не исторические стадии в развитии идеи обоснования, как это склонен был думать Лакатос, а взаимодополнительные типы обоснования, соответствующие различным типам научного знания. Обоснование математического знания, в действительности, может быть только редукцией к аподиктической очевидности. По своей сути оно может быть только евклидианским, так как оно должно ориентироваться на абсолютный фундамент, выявляемый в аподиктической очевидности.

Истины логики и собственно математические истины, связанные с предметной онтологией, составляют два глубинных корня математического мышления, определяющие содержание первичных математических теорий и метод математического мышления в целом. Оба этих типа истины обусловлены деятельностной ориентацией мышления и представляют собой инвариантную и незыблемую основу человеческого мышления вообще. Прояснение этих положений открывает путь к оправданию евклидианского обоснования как сущностного для математической науки. С этой точки зрения, мы должны признать, что выдающиеся математики, наметившие программы обоснования, находились, в принципе, на правильном пути, ибо вопреки всякому скептицизму они стремились выявить незыблемую и некорректируемую основу математического мышления, которая была бы достаточной для оправдания всего значимого содержания математики. Существование сферы такого рода необходимых истин не вызывало у них никаких сомнений. Истоки этой веры, очевидно, проистекали из самой практики математического мышления, в которой каждое доказательство представляет собой редукцию сложных истин к более простым и, в конечном итоге, к истинам, не подвергаемым сомнению.

Теория онтологической истины оправдывает эту веру. Недостаток традиционных программ обоснования математики состоял не в их евклидианском характере и не в претензии их на абсолютность, а лишь в отсутствии теории оправдания абсолютности, присущей математическому мышлению по его природе.

3. Перспективы надежного обоснования

Последовательное проведение онтологической программы позволяет утверждать абсолютную непротиворечивость элементарной математики, т. е. арифметики и евклидовой геометрии. Непротиворечивость арифметики в соответствии с изложенным здесь подходом может быть обоснована различными путями. Она непосредственно следует из факта аподиктической очевидности ее аксиом, доказывается возможностью ее логицистского и интуиционистского представления, она может быть обоснована в формалистской программе посредством генценовского (или подобного ему) доказательства непротиворечивости. В соответствии с теорией онтологической истинности каждый из этих подходов дает абсолютное обоснование непротиворечивости арифметики.

Это значит, что вторая проблема Гильберта, сформулированная как вопрос о возможности строгого обоснования непротиворечивости арифметики, должна считаться в настоящее время несомненно разрешенной в положительном смысле. Специфика этой проблемы состоит в том, что ее полное решение не является чисто математическим, а неизбежно связано с выходом в теорию познания. Колебания, имеющие здесь место до сих пор, объясняются прежде всего указанной двойственностью ее статуса: в чисто логическом плане, без привлечения гносеологической аргументации, оправдывающей возможность использования трансфинитных аксиом, эта проблема не может быть решена.

Большинство современных логиков, ориентируясь на теорему Гёделя о непротиворечивости, все еще придерживаются мнения, что непротиворечивость арифметики представляет собой факт, обоснованный практикой, но не имеющий математического обоснования, соответствующего стандартам полной строгости. А.Н. Колмогоров и А.Г. Драгалин в своем учебнике по математической логике высказывают мнение, что непротиворечивость арифметики «можно считать твердо обоснованной»[72]. Слова «можно считать» выдают некоторое колебание, которое, несомненно, также связано с признанными запретами на финитное обоснование. Принятие критериев обосновательного рассуждения, основанных на понятии онтологической истинности, устраняет здесь всякую неопределенность.

Обоснование непротиворечивости арифметики указывает путь к обоснованию арифметики действительных чисел и математического анализа в тех пределах, в которых он может быть построен на арифметике действительных чисел. Обоснование операций с действительными числами, разработанное Р. Дедекиндом, основывается на аксиоме непрерывности, которая фиксирует в себе интуитивное представление о прямой линии как непрерывной протяженности[72a]. Преследуя цель полной арифметизации, Д. Гильберт заменил эту аксиому двумя аксиомами: аксиомой Архимеда и аксиомой полноты, которые могут быть истолкованы в качестве чисто арифметических, не связанных с геометрической наглядностью. Для онтологического обоснования анализа более приемлем подход Дедекинда, поскольку аксиома непрерывности может быть обоснована как онтологически истинное утверждение, относящееся к общему представлению о величине. Понимание категориальной основы этой аксиомы дает расширение обосновательного слоя, достаточное для полного обоснования анализа.

Важным продвижением в этом направлении является сведение основного содержания анализа к аксиоматике геометрии прямой. Традиционное обосновательное мышление отвергает апелляцию к геометрии как не обеспечивающей полной строгости рассуждения. Мы видели негативное отношение к такому способу обоснования у Больцано, Фреге, Вейля и Брауэра. С онтологической точки зрения — это методологический предрассудок, проистекающий из отождествления геометрической очевидности с очевидностью эмпирической. Адекватная теория онтологической истинности ставит геометрическую очевидность рядом с арифметической и логической и устраняет все сомнения в корректности математического анализа в той его части, в которой он может быть сведен к аподиктической очевидности геометрических образов.

Таким образом, мы можем заключить, что минимальная задача обосновательной программы, заключающаяся, по Бернайсу, в обосновании математического анализа, несомненно, реализуется онтологическим подходом. Математический анализ, хотя он радикально отличается от арифметики как имеющий дело с объектами, обладающими непрерывностью, в действительности, в своих посылках не выходит за сферу онтологической истинности, таким образом, относится к области математики, имеющей полное и абсолютное обоснование[73].

Понятие онтологической истинности позволяет нам также наметить ряд подходов к разрешению вопроса о непротиворечивости теории множеств. Анализ логицистских систем, как мы видели, уже указывает подход, в определенном смысле разрешающий проблему. Та же цель достигается и в интуиционистском анализе, расширенном за

счет принципа трансфинитной индукции. Если мы можем подойти к абсолютному обоснованию анализа, то современные логические исследования позволяют сделать вывод об абсолютной непротиворечивости всех наиболее существенных разделов теории множеств. Проблемными теориями остаются в этом случае только «богатые» теории множеств, которые являются мало существенными для математики с точки зрения ее функции. Если изложенная здесь теория онтологической истинности принципов математики является истинной, то современная математика должна быть признана в качестве абсолютно обоснованной. Неопределенность в этом вопросе, существующая до сих пор в умах математиков и философов, проистекает исключительно из неразвитости философии математики и должна быть устранена прогрессом в этой области знания.

Особое место теории множеств в плане логического обоснования, ее сложность в этом отношении, еще требует прояснения. Простота системы отношений, на которых она сформулирована, как кажется, противоречит этому факту. Одно из обстоятельств, определяющих этот факт, заключается, по-видимому, в особенностях ее интуитивной основы. Рассматривая систему аксиом ZF, мы видим, что она содержит в себе положения, которые нельзя отнести ни к сфере логических, ни к сфере онтологических истин. Такова, к примеру, аксиома фундированности, утверждающая, что все множества построены в конечном итоге из элементов, которые не являются множествами. Очевидно, что это не истина логики и не истина деятельностной онтологии. Для Демокрита мир состоял из неделимых атомов и в этом смысле все сложное в мире сводилось в конечном итоге к простым элементам. С точки зрения Лейбница всякая монада содержит в себе бесконечное количество монад, и с этой точки зрения в мире нет ничего простого. Кант, как известно, противопоставил эти точки зрения на строение мира в качестве одной из своих космологических антиномий. Принимая аксиому фундированности, мы фиксируем более простое, демокритовское видение мира, оставляя в стороне другое видение, ничуть не менее реальное в метафизическом плане и не более противоречивое с точки зрения логики. Но это значит, что за аксиоматикой теории множеств, в отличие от аксиоматики арифметики, элементарной геометрии и математического анализа, нет безусловной необходимости, нет той «немыслимости иного», о которой говорил Спенсер. Математики часто обращают внимание на очевидность аксиом ZF, желая тем самым сблизить принципы теории множеств с принципами элементарных математических теорий, но мы не должны упускать здесь различие между онтологической очевидностью, проистекающей из онтологии математики, и простой *наглядностью*, которая может иметь эмпирические или натуралистические истоки. Мы должны заключить,

таким образом, что аксиоматика теории множеств, взятая как целое, менее качественна в плане своей содержательной основы, чем аксиоматика арифметики или математического анализа. Можно сказать, что она имеет натуралистический характер, поскольку содержит в себе допущения, заведомо выходящие за сферу онтологической истинности. Но это значит, что попытки обоснования теории множеств на основе только онтологически истинных посылок обречены на неудачу.

Здесь будет полезна аналогия с логикой обоснования неевклидовой геометрии у Лобачевского. Как известно, Лобачевский исходил из телесной интерпретации аксиом евклидовой геометрии, основанной на представлении тела, сечения тела и соприкосновения тел. Проблема обоснования аксиомы параллельности была поставлена первоначально в рамках этой интерпретации. Поскольку аксиома параллельности оказалась единственной из аксиом, не выводимой на основе этой интерпретации, то она могла быть понята как *произвольная* и допускающая замену. С онтологической точки зрения в теории ZF такого рода произвольной посылкой, заведомо выступающей за рамки онтологической интерпретации, является аксиома фундированности, и с этой точки зрения проблема непротиворечивости теории ZF могла бы состоять в логическом обосновании совместности этой аксиомы с остальными аксиомами этой теории. Понятно, что такой подход опирается на предположение, что остальные аксиомы системы удовлетворяют требованию логической или онтологической истинности.

Другая линия обоснования намечается в рамках так называемой итеративной концепции, которая представляет собой содержательную интерпретацию аксиом теории множеств, опирающуюся на представление о построении иерархии множеств. Генетическое представление о множествах, которое связывает их в единую конструктивно развертывающуюся систему, продуктивно в том отношении, что оно позволяет уточнить содержательный смысл аксиом, а также понять осмысленность ограничений, накладываемых на понятие множества в процессе построения теории. Если мы принимаем в качестве принципа построения, что элементы множества существуют до множества, то, разумеется, невозможно множество всех множеств и невозможно появление множеств, имеющих себя в качестве своих элементов. Это значит, что теория множеств, аксиомы которой согласованы с итеративной моделью, заведомо не содержит парадоксов Кантора и Рассела. Аксиома фундированности с этой точки зрения предстает в качестве определения множества как объекта, состоящего в конечном итоге из элементов (праэлементов), не являющихся множествами. Как показывает анализ, мы можем подойти с этой точки зрения к обоснованию истинности всех аксиом, содержащихся в таких системах как Z, ZF и ZFC[74].

Слабость итеративной концепции состоит в том, что она не свободна от предпосылок эмпирической теории познания и, по этой причине, не может поставить собственно обосновательной задачи. Проясняя эвристические возможности итеративной концепции множеств, Хао Ван говорит вместе с тем, что интуитивная основа аксиом может изменяться исторически и что любая интерпретация не является точной[75]. Ясно, что такая методологическая установка лишает смысла идею абсолютного обоснования теории на основе ее модели. Положение, однако, меняется, если мы покажем, что в основе этой модели лежат представления об идеальных предметах и их совокупностях. В этом случае мысленные операции получают характер экспликации онтологически необходимых, а следовательно, и абсолютно непротиворечивых представлений. Итеративная схема в той мере, в которой она может быть признана как относящаяся к сфере аподиктической очевидности, должна пониматься в качестве первичной и абсолютно обосновательной базы теории множеств. Задача, таким образом, состоит в соединении итеративного прояснения аксиом теории множеств с понятием онтологической истинности.

Анализ методологии обоснования позволяет считать в высшей мере вероятным допущение, что все основные теории современной математики, включая и теорию множеств, могут быть обоснованы в своей непротиворечивости в рамках некоторой рациональной программы логико-онтологического обоснования математики. Арифметика и теория множеств могут быть поняты как теории, эксплицирующие в своих идеализациях основные представления предметной онтологии и, следовательно, как формальные конструкции, обладающие предельной степенью логической надежности. Признание этих двух теорий в качестве онтологически истинных решает вопрос об абсолютном обосновании всей современной математики.

4. Пределы логического обоснования

Понятие онтологической истинности позволяет по-новому взглянуть на границы строгого обоснования математики. Оптимистический момент, который мы в достаточной степени прояснили, состоит в том, что к сфере строгого обоснования мы можем отнести, в действительности, значительно большую часть математики, чем та система простых теорий, относительно которых можно провести доказательство непротиворечивости в финитной метатеории.

Однако нетрудно убедиться, что намеченная программа, даже в наиболее либеральной ее формулировке, все-таки не дает нам универсального подхода к решению проблемы. Мы должны учесть здесь

прежде всего тот факт, что сфера аподиктически очевидной математики коррелятивна сфере категориального видения мира, которая имеет вневременный и инвариантный характер. Мы имеем основания предполагать, к примеру, что представления Евклида о свойствах прямых и плоскостей ни в чем не отличались от наших и что они не могут измениться и для будущих математиков. Система аподиктических истин — это узкое и абсолютно инвариантное ядро математического знания, имеющее ограниченные дедуктивные возможности. С другой стороны, несомненным является факт постоянного усложнения математических структур. Хотя любая математическая теория опирается на аподиктически очевидный центр как на глубинное основание своего метода, в становлении своих определений и принципов она независима от его дедуктивных и конструктивных возможностей. История математики — это постоянное усложнение ее структуры, процесс зарождения теорий, находящихся за пределами воображения предшествующих поколений математиков и качественно новых по составу своих понятий. Простое сопоставление этих двух фактов говорит об ограниченности сферы онтологического обоснования: у нас нет оснований утверждать, что любая математическая теория может быть сведена к онтологически истинной основе и обоснована на основе онтологической истинности.

В своей истории математика дважды приводилась к единству своего содержания на основе небольшой группы самоочевидных принципов, не подвергаемых сомнению. Первая такая редукция (тривиализация) была осуществлена в «Началах» Евклида, вторая, по общему признанию, — в середине XIX века в работах К. Вейерштрасса и Р. Дедекинда по арифметизации анализа. Можно утверждать, что теория множеств, поскольку ее аксиомы самоочевидны и поскольку она определяет содержание существующей математики, как раз и является базой новой тривиализации. Однако мы должны учесть здесь полуонтологический характер теоретико-множественной аксиоматики, и то обстоятельство, что, являясь очевидной и предельно убедительной в своей истинности, она тем не менее не обладает статусом аксиом арифметики и геометрии. Хотя теория множеств в определенном смысле унифицирует современную математику, она не представляет собой ее онтологического обоснования и такое обоснование для современной математики, скорее всего, недостижимо.

Многие факты позволяют думать, что арифметика, геометрия и теория множеств исчерпывают в себе все формализуемые аспекты универсальной онтологии, вследствие чего математика будущего не может иметь какого-либо онтологического основания кроме того, которое уже зафиксировано в рамках этих онтологически означенных теорий. Если это так, то онтологическое обоснование математики распространяется только на часть математических теорий, не очень удаленных

от исторического центра математики. Это значит, что используя онтологические доводы, мы можем расширить возможности евклидианского подхода, но не можем прийти к программе, имеющей универсальное значение.

Это положение следует и из непосредственного рассмотрения программ обоснования. Гильбертовский замысел состоял как раз в создании программы, имеющей универсальное значение. Этот замысел, конечно, не мог быть реализован. Принципиальная ограниченность формалистской программы обоснования следует уже из того факта, что каждое такое обоснование является индивидуальным, особенным для каждой теории, связанным с ее конкретной структурой. Возможность формалистского обоснования непосредственно зависит от сложности теории. Если ограниченная арифметика поддается обоснованию в соответствии с гильбертовской схемой, то арифметика в целом не допускает такого обоснования, абсолютное обоснование аксиом геометрии без аксиомы непрерывности не распространяется на геометрическую аксиоматику в целом и т.д. Поскольку эта индивидуальность подхода, зависимость его конкретной структуры теории сохраняется и при возможных расширениях метатеории, о которых шла речь выше, то это расширение лишь отодвигает границу досягаемости, но никогда не устраняет ее полностью. Программа логического обоснования математики могла бы претендовать на универсальность лишь в том случае, если бы она исходила исключительно из общих свойств математической теории, т. е. из свойств формальной структуры вообще, не связывая себя с конкретными качествами рассматриваемой теории типа финитности, разрешимости, сложности и т. п.

Наша оценка онтологической программы, таким образом, должна быть двоякой. С одной стороны, мы должны настаивать на ее возможности существенно расширить сферу логического обоснования математики. С другой стороны, мы должны утверждать, что расширение сферы действия логических программ и использование методов содержательного обоснования непротиворечивости теорий на основе онтологической истинности их аксиом не устраняет проблему обоснования в ее общей постановке. Освобождение от логических ограничений, связанных с понятием финитности, не открывает еще нам пути к универсальности. Устраняя методологические барьеры типа финитности и конструктивности, мы неизбежно встречаемся с онтологическим барьером, проистекающим из самой сущности логико-онтологического обоснования математики и допустимых здесь средств. Всякая логическая программа обоснования, как бы широко она не была сформулирована, ограничена консервативной содержательной базой обоснования, привязанной к аподиктической очевидности, и индивидуальны-

ми характеристиками самой теории, которые неизбежно делают ее частной программой.

Здесь возможны два выхода: либо мы должны указать на некоторые принципиально новые подходы, достаточно качественные и соразмерные математике в целом, либо мы должны согласиться с фаллибилистской идеей о невозможности полного обоснования математики, оговаривая при этом, что этот тезис не относится к теориям, подчиненным теории множеств, которые в принципе могут получить абсолютное обоснование своей непротиворечивости. Наш успех в этом случае будет состоять в том, что мы обосновали абсолютную надежность некоторых теорий, логическое обоснование которых считалось невозможным, отвоевав у скептиков некоторую область за пределами простых систем в метатеоретическом их понимании.

Многие факты указывают на то, что мы должны двигаться в соответствии с первым вариантом. Практика показывает, что строгость математической теории не зависит от характера принципов, лежащих в ее основе. Нет никаких оснований считать, что математик, рассуждающий о топологических классификациях или вероятностных распределениях, рассуждает менее строго, чем математик, решающий элементарную арифметическую задачу. Любая математическая теория независимо от своего содержания ведет себя как совершенно определенная система, гарантирующая получение истинных следствий из истинных посылок. Но это значит, что причины, принуждающие нас рассматривать математическое рассуждение в качестве абсолютно строгого, никак не зависят от содержания его посылок и от возможности редукции его содержания к аподитически очевидным истинам или к несомненно обоснованным теориям. Но существование общезначимого, практического критерия строгости рассуждения, не связанного с содержанием теории, предполагает и наличие соответствующего теоретического критерия, т. е. системы принципов, обосновывающих наше восприятие математического мышления как абсолютно надежного.

Основной недостаток логического подхода к обоснованию математики состоит не в том, что он не дает абсолютного обоснования — аргументы скептиков здесь совершенно несостоятельны, а в том, что он не вытекает из общего определения математической теории и, следовательно, заведомо не может претендовать на универсальность. Теоретическая задача состоит, таким образом, в переходе к новым критериям, которые бы совмещали в себе абсолютность обоснования, общезначимость и универсальность — применимость к математике в целом.

Часть IV
СИСТЕМНОЕ ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

«Проблема состоит не в том, чтобы устранять противоречия, а в том, чтобы показать, что они не возникают»

Л.Витгенштейн. «Лекции по философии математики.»

«На первый взгляд кажется, что парадоксы приводят к крушению всего здания математики. внимательное рассмотрение показывает, однако, что они являются проблемой для логики и эпистемологии, но не для математики»

К.Гедель «Что такое канторовская континуум гипотеза?»



Глава 1.

Понятие завершенной аксиоматики

Мы рассмотрим теперь проблему обоснования математики, исходя из логики ее развития. Этот подход будет методологическим в том смысле, что мы будем опираться здесь, в основном, на качественные характеристики математического знания, выработанные в истории математики и в философии науки. Его можно назвать также *системным*, поскольку математика будет рассматриваться здесь как исторически развивающаяся и самоорганизующаяся система. От анализа структуры математической теории мы переходим к анализу исторических стадий ее развития, к исследованию логики ее становления. Идея онтологической истинности при таком подходе становится несущественной. В основе нашего рассуждения будет лежать представление о фактуальной истинности аксиом и о ретротрансляции истинности от фактов к принципам.

1. Объекты, факты и принципы

Для понимания нового подхода нам нужно произвести некоторые уточнения таких понятий философии математики, как математический объект и математический факт. Математическая теория покоится на замкнутой иерархии объектов, которая делает эту теорию отличной от других математических теорий. Математик имеет дело, во-первых, с объектами исходными, принятыми на основе очевидности, а во-вторых, с объектами производными, полученными на основе различных типов внутренних определений. Два этих класса объектов имеются в любой математической теории. Исходные объекты можно назвать также элементарными, поскольку они лежат в основе всех других определений данной теории. Отличительным признаком исходных объектов является безусловная очевидность их свойств. Производные объекты, как правило, не обладают этим качеством. Математическая теория, начиная с интуитивно ясных объектов и образов, неизбежно восходит к конструкциям, которые будучи строго определены, тем не менее лишены непосредственной ясности своих свойств.

Необходимо отметить два свойства математических объектов, которые важны для понимания строения и развития математической теории. Важнейшее из них — это *конечная определимость*, заданность математического объекта конечным числом свойств. Этот момент существенно отличает математические объекты от эмпирических, которые бесконечны в том смысле, что их теоретическое определение лишь намечает систему его качеств и не исключает открытия качеств, не согласующихся с принятым определением. Определение в эмпирической теории не задает объект, а лишь указывает на него, как на некоторую сущность, обладающую, в принципе, бесконечным числом независимых друг от друга свойств. В отличие от этого, все свойства математического объекта определены конечным числом требований, зафиксированных в аксиомах или в его исходных определениях. Эта особенность математического объекта проистекает из сущности математической теории как формальной системы, в которой объекту могут быть приписаны лишь свойства, согласованные с его исходным определением.

Другая особенность математических объектов состоит в их строгой соподчиненности. В процессе развития математической теории ее объекты выстраиваются в жесткую иерархию, которая не зависит от произвола отдельного математика и математического сообщества в целом. Понятие натурального числа объективно является более элементарным, чем понятие действительного числа, а понятие действительного числа — более элементарным, чем понятия функции или интеграла, и это объективное соподчинение не может быть устранено никакими перестройками теории. Математическая теория — это прежде всего иерархия зависимых друг от друга объектов, которая однозначно задана в том смысле, что соподчинение соответствующих понятий не может быть изменено произвольно и молекулярные понятия не могут выполнять функцию атомарных. Для каждой математической теории атомарные понятия выделены объективно, самим ее содержанием и не могут быть произвольно изменены.

Понимание логики развития математической теории существенно опирается на понятие математического факта. Под математическим фактом следует понимать прежде всего первичные (сингулярные) высказывания о математических объектах и их связях типа 2 + 2 = 4. Такого рода истины не доказываются и не выводятся из принципов, но подобно первоначальным фактологическим истинам эмпирических наук должны быть приняты как нечто совершенно первичное и безусловное. Выше мы установили, что истины указанного вида непосредственно и с абсолютной необходимостью навязаны нашему сознанию системой онтологических представлений. Они не могут быть изменены

в рамках рационального познания, имеющего данную категориальную структуру. В качестве математических фактов следует принять также и интуитивно ясные обобщения типа $a + b = b + a$. Здесь мы имеем дело уже с некоторыми абстракциями от непосредственных праксеологических очевидностей, но эти абстракции такого рода, что они не нарушают идеальной истинности абстрактных принципов: общее суждение: $a + b = b + a$ — не менее очевидно и не менее надежно, чем любое сингулярное утверждение типа $2 + 3 = 5$[1].

К системе математических фактов относятся также все суждения, фиксирующие результаты внутриматематических процедур проверки, основанных на аподиктической очевидности. Если некто говорит, что число 2 является корнем уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, то он утверждает безусловно истинный факт, поскольку истинность этого высказывания гарантируется проверкой в сфере аподиктически очевидных процедур.

Наконец, к фактологическому основанию математики следует отнести все признанные математические доказательства. Если некоторое доказательство принято как окончательное, то оно неустранимо как определенная связь между суждениями в математической теории, вне зависимости от того, являются ли посылки этого доказательства интуитивно ясными, онтологически или эмпирически значимыми. Мы переходим в математической теории от одних доказательств к другим на основе аксиом, точно так же как в эмпирической теории мы переходим от одних фактов к другим на основе принципов. Если говорить в общем плане, то к фактологической основе математической теории мы должны отнести все утверждения, которые обоснованы в сфере аподиктической очевидности. Это и естественно. Аподиктическая очевидность — это генетическая основа и логический фундамент математической теории. Вся система утверждений, будь это единичные высказывания, непосредственные их обобщения или сложные теоремы, которая строго сводится к этому фундаменту, выступает в дальнейшем развитии теории в качестве абсолютной фактуальной основы, с которой должны быть согласованы все абстрактные принципы теории.

Математическая теория, как и всякая другая, начинается с фактов, а именно, с очевидных высказываний относительно объектов и с установления простейших связей между ними и лишь постепенно продвигается к своим теоретическим основаниям, к выявлению системы принципов, которая обеспечивает систематическое развертывание теории в пределах известных ее результатов. Двигаясь по этому пути, мы, в конечном итоге, выявляем систему аксиом, адекватную содержанию теории.

Разделение принципов и фактов как различных уровней математической теории дает возможность говорить об истинности принципов в

отношении фактов, о соответствии аксиом фактуальной основе теории. Истинность системы аксиом в этом смысле, в отличие от онтологической и семантической истинности, о которых шла речь выше, можно назвать *фактуальной истинностью*, поскольку в ее основе лежит общенаучное представление об истинности как о соответствии суждений некоторому данному содержанию. Такое понимание математической истины объединяет математику с эмпирическими науками и ставит проблему обоснования математических принципов на основе фактов.

Онтологическая истинность математических суждений, при всей своей важности для математики, сама по себе недостаточна для понимания статуса аксиом, поскольку самоочевидность — не универсальное свойство аксиом, а лишь особенность ряда первичных аксиоматик, наиболее тесно связанных с универсальной онтологией и логикой. Система аксиом математической теории, как нацеленная на объяснение ее содержания и производная от этого содержания, формируется, в общем случае, не на основе очевидности, а как полное логическое основание исторически сложившегося ядра теории. Формирование системы аксиом в этом смысле тождественно логике выявления физических принципов, и мы должны признать правильность того положения, что формирование логического основания математической теории происходит не в соответствии с евклидианской, а в соответствии с квазиэмпирической схемой.

Здесь, в этом пункте состоит главная трудность на пути всех программ строгого обоснования математики. С одной стороны, на уровне методологической интуиции мы понимаем, что математика — не физика и ее теории обоснованы некоторым более надежным образом, что они несравненно более стабильны и в некотором смысле внеисторичны. Но, с другой стороны, мы не видим разумных путей обоснования непротиворечивости аксиоматической системы, которая формируется без помощи какой-либо очевидности, в соответствии с квазиэмпирической схемой, и не может быть принята в качестве онтологически истинной. Самый легкий путь состоит в том, чтобы объявить, что математическая теория по характеру своих обосновывающих принципов в общем случае не отличается от эмпирической теории и не может рассчитывать на обоснование, отличающееся от обоснования эмпирической теории. Такова позиция современного эмпирицистского фаллибилизма в философии математики.

2. Неизбежность стабилизации

Позиция фаллибилизма ошибочна не только потому, что границы возможностей логического обоснования еще далеко не определены,

но прежде всего потому, что она базируется на использовании эмпирических схем за пределами их истинности. Родственность математических теорий теориям эмпирическим в смысле генезиса их принципов не является достаточным основанием для заключения об одинаковом статусе этих принципов. Математика является более специфической наукой, чем это думают эмпирицисты. Мы имеем здесь другой тип соподчинения между принципами и фактами и, как следствие, другие возможности обоснования принципов.

Первая особенность математической теории, отличающая ее от теории эмпирической, состоит в абсолютном характере ее фактологической основы. Противоречие между принципами и фактами в эмпирической теории разрешается не обязательно в пользу фактов: здесь могут быть пересмотрены, уточнены, переинтерпретированы и даже устранены (признаны несуществующими) сами факты. Диалектика теории и фактов в эмпирических теориях неизбежно ведет к постепенному сдвигу обоих полюсов. Поппероvская концепция относительности базовых утверждений научной теории в своей основе является, конечно, верной. Но эта концепция не может быть перенесена на математику. В отличие от фактов опыта математические факты, поскольку они значимы в сфере аподиктически очевидного и полностью определены в ней, обладают абсолютной значимостью и не могут быть скорректированы на основе каких-либо теоретических соображений. Сфера математических фактов в этом отношении является абсолютной и, как следствие, внутренняя диалектика математической теории реализуется исключительно за счет перестройки системы теоретических допущений.

Другая особенность математической теории заключается в том, что ее исходные принципы (аксиомы) не только однозначно определяют состав возможных теорем, но и сами однозначно определяются системой признанных теорем. Из принципов физической теории мы выводим определенное множество заключений о фактах — внутренних связях теории, имеющих непосредственную эмпирическую интерпретацию, но сами эти факты никогда не рассматриваются здесь как определяющие множество принципов. В методологии физики мы говорим о том, что одна и та же система фактов в принципе может быть объяснена на основе самых различных теоретических гипотез. Система эмпирических фактов никогда не является достаточной для утверждения некоторых принципов как единственно возможных. В математической теории между теоремами и аксиомами существует одинаково жесткая зависимость в обе стороны: из аксиоматики следует определенное множество теорем и, напротив, принятие в качестве истинных определенного числа теорем требует однозначного признания определенной аксиоматики. Если теорема Пифагора признана, то и

аксиома параллельности Евклида признана и т.д. То есть в математической теории мы можем говорить как о строгом выводе теорем на основе аксиом, так и о строгом выводе аксиом на базе принятых теорем. Если modus ponens позволяет нам переходить от аксиом к теоремам, то modus tollens служит основой выявления аксиом, достаточных для доказательства признанного множества теорем. Это важная особенность логического строения математической теории, позволяющая говорить о *ретротрансляции истинности* от фактов к принципам в математической теории, которая очевидно не имеет места в теории эмпирической. Истина вводится в фактуальное основание и течет к принципам, которые получают здесь строгую определенность и однозначное обоснование на основе фактов.

Наиболее важная особенность математической теории состоит в том, что становление аксиоматики достигает здесь предельного состояния, закрывающего возможность дальнейших ее изменений в смысле заключенного в ней содержания. В отличие от эмпирической теории для математической теории является осмысленным понятие абсолютно *завершенной системы принципов*. В этом контексте мы можем говорить также об идеальной фактуальной истинности как о полной логической симметрии принципов и фактов, устанавливающейся в конечном итоге в развивающейся математической теории. Математическая теория достигает состояния полной завершенности аксиоматики точно так же, как она достигает полной завершенности своих доказательств. Это не внешняя аналогия, а сущностное тождество, проистекающее из природы математического мышления.

Математическая теория, как и теория эмпирическая, появляется первоначально как некоторая система интуитивно ясных утверждений и бесспорных логических связей, относящихся к определенной системе фактов. На этой начальной стадии мы, очевидно, не имеем еще ни полной системы принципов, необходимых для описания исходных объектов, ни целостности самой системы объектов, ни гарантии логической совместности утверждений, принятых в теории. Появление первой несовершенной аксиоматики устанавливает относительное единство утверждений, выявляет логическую последовательность их развертывания и позволяет сделать всю систему теорем более целостной и законченной. Анализ этой системы приводит, в конечном итоге, к формулировке более полной и систематичной аксиоматики и т.д. Мы имеем основание утверждать, что в математической теории, в отличие от физической, эта диалектика конечна, что она завершается в конечное время полной стабилизацией аксиоматики, формулировкой ее в такой форме, которая исключает дальнейшее ее совершенствование в плане заключенного в ней содержания. Диалектика фактов и

принципов в математической теории неизбежно завершается достижением предела, выявлением системы аксиом, идеально соответствующей содержанию теории.

Эмпирические теории в этом отношении существенно отличаются от теорий математических. Разумеется, стремление к полноте и законченности принципов имеется и здесь и в определенном смысле оно достигается. Принципы механики, сформулированные Ньютоном, представляют собой пример такого рода завершенной теоретической системы. Однако физическая теория, будучи нацелена на определенный внешний предмет, всегда остается открытой для логических контрпримеров и для соответствующей перестройки принципов. Стабилизация физической теории — это стабилизация по отношению к фрагменту опыта, т. е. к некоторой внетеоретической реальности, и может быть реализована всегда лишь с некоторым приближением, за счет частных гипотез и в пределах корректности фактов, которая не имеет здесь абсолютного значения. Идеальное единство фактов и принципов достигается лишь в математической теории, вследствие безусловной однозначности сферы фактов и конечности процесса абсолютного оправдания принципов.

Завершенность аксиоматики и завершенность доказательства тождественны в том смысле, что оба этих явления проистекают из принципиальной конечности математического мышления. Доказательство достигает полной стабилизации, общезначимости и абсолютной надежности вследствие того, что оно состоит из конечного числа переходов, приемлемость каждого из которых устанавливается в конечное время с абсолютной однозначностью. Выбор эффективного пути во множестве аподиктически определенных возможностей всегда разрешается научным сообществом с полной однозначностью. Процесс поиска системы аксиом для сформировавшейся системы доказательств также является проверкой конечного числа вариантов и с необходимостью завершается в конечное историческое время.

Логика становления математической теории обусловлена конечной определимостью математических понятий, которая проистекает в свою очередь из их включенности в формальную систему. Конечная определимость математических понятий делает неизбежным для любой математической теории достижение ею неколебимого (абсолютного) основания, которое в принципе недостижимо для теорий, имеющих дело с фактами опыта.

3. Свойства завершенной аксиоматики

Приближаясь к стадии завершенности, система аксиом приобретает ряд свойств, которые могут служить признаками этой стадии и ее более детальным определением. Среди этих свойств наиболее важными являются: полнота, минимальность, конечность, элементарность и однозначность.

Под полнотой аксиоматики мы будем понимать здесь достаточность ее для логического представления признанного содержания теории. Такое понимание полноты, конечно, не тождественно логическому или метатеоретическому определению этого понятия. В логическом определении полнота аксиоматики в большинстве случаев принципиально недостижима и мы можем говорить о полноте в этом смысле только относительно самых элементарных теорий типа исчисления высказываний или исчисления предикатов первого порядка. В методологическом смысле, напротив, полнота всегда достижима, ибо каждая математическая теория в процессе своего вызревания достигает такого состояния, когда аксиоматика признается достаточной для воспроизведения всего значимого содержания теории и адекватной ей в том смысле, что само это содержание мы начинаем определять через указание на аксиоматику. Полнота в этом смысле не имеет точного логического определения, но тем не менее она совершенно однозначно фиксируется математическим сообществом и является важнейшим признаком завершенной аксиоматики.

Важно понять, однако, что методологическая полнота — не продукт произвольного установления. Хотя аксиоматика арифметики логически неполна и допускает в принципе неограниченное пополнение, никто из математиков не стремится дополнить ее какими-либо новыми аксиомами или группами аксиом. Причина этого факта заключается в требованиях внутренней детерминации математических объектов, которая имеет объективный характер. Если мы вводим понятие угла и способы определения его величины, то естественно возникает вопрос о сумме углов треугольника, и мы нуждаемся во введении определенных аксиом, достаточных для определенного ответа на этот вопрос. Мы продолжаем вводить новые аксиомы до тех пор, пока очевидные свойства и связи объектов, данные с аподиктической очевидностью, не получат полного объяснения. Из конечности значимых свойств первичных объектов проистекает конечность содержания аксиом, которую мы воспроизводим во всех аксиоматиках теории.

Достижимость полной аксиоматики не может быть поставлена под сомнение некоторыми колебаниями относительно состава аксиом, которые иногда возникают на практике. Те математики, которые желают сделать ряд ординалов жестко определенным подобно натуральному

ряду чисел, будут склонны к принятию аксиомы детерминированности как элемента системы аксиом теории множеств, поскольку эта аксиома снимает ряд таких неопределенностей, делая, в частности, доказуемой континуум-гипотезу. Другие математики будут настаивать на специфичности ряда ординалов и на принципиальной неопределенности некоторых его свойств, навеянных арифметическими аналогиями. Идея методологической полноты состоит, однако, не в том, что аксиоматика всегда устанавливается с полной однозначностью, а в том, что в математической теории, на определенной стадии ее развития, не остается содержания, не сведенного к некоторым явно выраженным принципам.

Система аксиом в своем развитии приобретает также и другое важное качество, а именно, логическую необходимость или минимальность. Приобретая полноту, аксиоматика вместе с тем приобретает и свойство минимальности или необходимости. Обе эти тенденции связаны в том плане, что они обусловлены одними и теми же факторами совершенствования структуры математической теории: практическое использование аксиом в одинаковой степени стимулирует как раскрытие еще недостающих, так и устранение избыточных допущений, которые до определенного времени могут присутствовать в аксиоматике. Обе эти тенденции родственны и в том смысле, что они в конечном итоге достигают своей полной фактической реализации. Мы имеем основания думать, что аксиоматика, принятая научным сообществом как достаточная, является вместе с тем и свободной от внутренних излишеств, т. е. абсолютно необходимой или минимальной. Процесс минимизации аксиоматики также конечен и на определенном этапе развития теории мы строго доказываем необходимость каждой из аксиом для вывода теорем, составляющих признанное ядро теории. Система аксиом геометрии, первоначально предложенная Гильбертом, как известно, страдала рядом недостатков: она содержала лишнюю аксиому инцидентности, избыточные допущения относительно конгруентности и имела явно недостаточное определение непрерывности[2]. В настоящее время обнаружение такого рода дефектов в аксиоматике геометрии, конечно, исключено.

Свойство минимальности завершенной аксиоматики, конечно, также является эпистемологическим, ибо у нас в общем случае нет средств чисто логического обоснования того факта, что все аксиомы независимы и что ни одна из них не содержит аспекта, который можно было бы из нее исключить при более аккуратной формулировке всей системы. На практике, однако, минимальность признанных аксиоматик ни у кого не вызывает сомнений, ибо любой математик знает, что такого рода излишества в системе аксиом, если бы они действительно имели место, не могли бы не обнаружить себя в процессе простых доказательств.

Завершенная аксиоматика обладает некоторым свойством, которое можно назвать структурной конечностью. С логической точки зрения подавляющее число аксиоматик при точном понимании аксиомы и при разделении аксиом и схем аксиом являются бесконечными, ибо наряду с аксиомами они содержат в себе также и схемы аксиом. При содержательном понимании аксиоматики различение между аксиомой и схемой аксиом, однако, не является сколько-нибудь существенным, ибо под аксиоматикой мы понимаем здесь не систему формул в определенном логическом языке, а систему содержательных утверждений об элементарных объектах теории. Аксиома индукции с этой точки зрения является элементарным утверждением о некотором достаточно очевидном свойстве натурального ряда, которое имеет тот же статус, что и остальные его свойства. При содержательном понимании аксиом как осмысленных высказываний об элементарных объектах, определяющих их простые свойства и отношения, все системы аксиом безусловно конечны и в принципе не могут быть другими.

Завершенная система аксиом обладает также качеством, которое можно назвать элементарностью. Аксиома является элементарной, когда она формулируется исключительно в первичных понятиях и не требует для своей формулировки никаких производных определений. Аксиоматика арифметики является элементарной в этом смысле. При формулировке геометрических аксиом нам приходится прибегать к понятиям треугольника и прямого угла, которые не относятся к первичным понятиям аксиоматики. Общая логика построения математической теории требует сведения системы аксиом к максимальной элементарности, к максимальному исключению из системы утверждений (аксиом), сформулированных через производные понятия. Самоочевидность и элементарность это те фундаментальные характеристики аксиом, за которые математики не выходят, если они не побуждаются к этому существенной неполнотой теории. Можно выразить это так, что систему аксиом следует считать завершенной, если выявлены все независимые элементарные аксиомы и если она выходит за эти границы лишь в пределах того минимума, который необходим для достижения ее практической полноты в отношении содержания теории.

Мы будем называть аксиоматику *завершенной*, если она обладает свойствами практической полноты, минимальности и однозначности в разъясненном выше смысле этих эпистемологических характеристик. Теорию, достигшую уровня завершенной аксиоматики, будем называть *хорошо аксиоматизированной* теорией или *зрелой* теорией. Общезначимым критерием завершенности системы аксиом, как это уже очевидно из сказанного выше, является ее *историческая стабильность*, выражающаяся в фактическом прекращении процесса изменений в ее

составе, влияющих на ее дедуктивную силу, и в принятии ее математическим сообществом как адекватной содержанию теории. Аксиоматика арифметики, евклидовой геометрии, теории множеств, теории вероятностей является в соответствии с указанным критерием полностью завершенной, а сами эти теории являются несомненно зрелыми или хорошо аксиоматизированными теориями. Общие соображения о логике развития математической теории и история математики позволяют утверждать, что всякая система аксиом достигает в конечном итоге стадии абсолютной завершенности, т. е. полной определенности в составе своих требований к исходным объектам и к процедуре введения производных объектов. В завершенной аксиоматике математическая теория впервые достигает точного определения своего содержания, ибо под теорией в этом случае мы начинаем понимать именно то содержание, ту совокупность утверждений, которая достижима в рамках принятой аксиоматики.

4. Фактуальная истинность аксиом

Свойства полноты, минимальности и элементарности аксиоматики позволяют понять основное качество завершенной аксиоматики, которое состоит в ее идеальной истинности в отношении фактологической основы теории. Характеризуя аксиоматический метод, мы обычно подчеркиваем возможность использования различных аксиоматик для представления содержания одной и той же теории. В этом утверждении есть определенный смысл. Вариации в выборе отдельных аксиом и аксиоматики в целом возможны и реализуются на практике. Наряду с гильбертовской аксиоматикой евклидовой геометрии возможна аксиоматика, основанная на понятии симметрии, а также и некоторые другие варианты. Ту же ситуацию мы можем наблюдать и в других аксиоматизированных теориях. С содержательной стороны, однако, эта многовариантность не представляется существенной.

Каждая аксиома имеет аналоги, а именно утверждения, равносильные ей в дедуктивном отношении. Так, для аксиомы Евклида о параллельных мы можем указать несколько таких аналогов. Вот некоторые из них: «Сумма углов треугольника равна двум прямым», «Всегда можно построить окружность, проходящую через три точки, не лежащие на одной прямой», «Существуют подобные фигуры», «Эквидистанта прямой в данной плоскости также прямая», «Через данную точку внутри угла всегда можно провести прямую, пересекающую обе его стороны», «Площадь треугольника может быть сделана как угодно большой при увеличении его сторон», «Перпендикуляр и наклонная к одной прямой всегда пересекаются». Этот список может быть продолжен за счет

более сложных утверждений, доказательство которых связано с использованием аксиомы параллельности. Каждое из этих утверждений доказуемо в аксиоматике геометрии, включающей аксиому Евклида, и каждое, будучи взято в качестве аксиомы, позволяет доказать аксиому Евклида как истинное утверждение. Подобные же аналоги могут быть указаны и для других аксиом, откуда уже становится ясным, что в принципе возможны аксиоматики, различающиеся по набору исходных терминов, но равносильные друг другу в смысле логического обоснования содержания теории.

Однако это теоретически возможное разнообразие не должно вводить нас в заблуждение. Уже беглый взгляд на приведенные выше положения, являющиеся аналогами аксиомы Евклида, показывает их существенный недостаток, присущий почти всем из них. Все они связаны с конструктивно более сложными объектами, такими как треугольник, круг, подобие, площадь, и в этом смысле являются утверждениями неэлементарными. Для каждой математической теории существует объективная иерархия понятий, в которой соотношение простоты и сложности однозначно определено вне зависимости от ее оформления в понятиях. Если мы при формулировке аксиом будем руководствоваться принципом их максимальной элементарности, то теоретическое разнообразие аксиоматик полностью исчезает.

Завершенная аксиоматика задается однозначно в том смысле, что она выражает вполне определенную систему требований к элементарным объектам, которая так или иначе выражается любой аксиоматикой данной теории. Если теория достаточно развита и аксиоматически определена, то, вообще говоря, мы всегда знаем, какие требования к исходным объектам должна содержать ее аксиоматика. Современные учебники приводят различные аксиоматики евклидовой геометрии, но человек, сведущий в геометрии, сразу же находит, где и как здесь выражена идея параллельности, где и как заданы основные требования к инцидентности и т.д. Зрелая аксиоматика задана содержанием теории однозначно в том смысле, что она всегда фиксирует в себе один и тот же набор требований к элементарным объектам. Этот набор требований конечен и строго определен иерархией объектов. Различные аксиоматики зрелой математической теории — это лишь варианты понятийного представления этой единой системы требований к исходным объектам, которые могут сравниваться друг с другом лишь с точки зрения их удобства в том или другом отношении.

Мы можем, таким образом, утверждать, что аксиоматика как система абстрактных принципов теории в процессе своего развития достигает предельной адекватности в отношении содержания теории, т. е. предельной истинности в смысле совпадения с фактологическим основанием теории. В этом смысле аксиомы математики существенно

отличаются от принципов физики и других опытных наук. Принципы физики всегда содержат в себе гипотетический элемент и по своему содержанию всегда выходят за пределы объясняемых ими фактов. Они асимметричны фактам в том смысле, что не выводимы из них и не могут быть оправданы как единственно возможные для объяснения круга фактов. Аксиомы зрелой математической теории, напротив, абсолютно слиты с фактами, они представляют собой лишь общие принципы построения фактов. Поэтому принятие достаточно широкого круга фактов определяет систему аксиом как единственно возможную. В математической теории мы имеем, таким образом, дело с полной симметрией фактов и принципов и с явлением ретротрансляции истины, которое не имеет места в эмпирических теориях. Необходимо отметить, что факт ретротрансляции математической истины не может быть выведен из логических соображений: логика не может оправдать перехода от фактов к принципам. Ретротрансляция обеспечивается здесь генетически, логикой становления математических аксиом и может быть обоснована в своей необходимости только в рамках системного анализа.

Отрицание ретротрансляции истины мотивируется обычно ссылкой на общий принцип логического следования, запрещающий переход от истинности посылок к истинности следствия. В действительности, логика не запрещает таких переходов, она лишь не гарантирует их в общем случае. Кроме потоков истины, гарантируемых логикой, могут существовать потоки, обусловленные спецификой внутренних теоретических связей, т. е. потоки, обусловленные типом знания. Мы можем говорить здесь о теоретически обусловленных потоках истинности.

Анализ логики становления математической теории позволяет увидеть полную несостоятельность эмпирицистской философии математики, пытающейся установить методологическое единство математического и опытного знания. Философы-эмпирицисты упускают из виду, что схемы становления принципов эмпирической науки и принципов математической теории, имея совпадение в ряде моментов, тем не менее, не являются тождественными. Упускается из виду факт неизбежной и полной стабилизации внутренней структуры математической теории, при которой ее аксиоматика приобретает (с точностью до совокупности требований к элементарным объектам) окончательную форму и становится дедуктивно эквивалентной самой теории. В отличие от эмпирической теории каждая математическая теория достигает такой ступени логической организации, при которой ее абстрактные принципы являются идеально соответствующими системе ее внутренних связей.

5. Идея системного анализа непротиворечивости

В классических исследованиях по основаниям математики система аксиом характеризуется рядом свойств, наиболее важными из которых являются непротиворечивость, независимость и полнота. Это логические характеристики, определяемые в логических терминах и рассматриваемые в рамках строгой метаматематики. Понятие завершенной аксиоматики, которое мы вводим здесь, является методологическим, поскольку оно предполагает констатацию качеств, невыразимых в логических понятиях. Полнота арифметики в методологическом смысле, конечно, не может быть обоснована логически. Таковы все свойства завершенной аксиоматики, о которых идет здесь речь: они общезначимы и фиксируемы математическим сообществом, но вместе с тем они невыразимы в определениях, приемлемых для логических методов обоснования математики. Генетическое обоснование математики, таким образом, требует некоторого особого уровня анализа теории, который мы будем называть эпитеоретическим ее рассмотрением.

Мы можем определить эпитеорию как систему высказываний о теории, которые не относятся к метатеории в ее строгом понимании, но, с другой стороны, отличаются от общего философского анализа своей относительной строгостью и направленностью на анализ структуры и логики развития теории. Наряду с логическими фактами, вытекающими из строгого анализа аксиоматических систем, мы будем использовать здесь также и чисто метафизические допущения, какими являются, к примеру, предположение о стабильности системы математических фактов или утверждение о минимальности завершенной аксиоматики. Наши рассуждения будут включать в себя и телеологические предпосылки, поскольку мы рассматриваем здесь математическую теорию как эволюционирующую систему, нацеленную на решение внешних задач.

Цель обоснования математической теории состоит в обосновании ее непротиворечивости. Наша основная гипотеза будет состоять в том, что непротиворечивость является сущностным свойством завершенной аксиоматики. Если мы можем понимать завершенность аксиоматики как ее предельную фактуальную истинность, то становится неизбежным предположение о непротиворечивости как сущностном свойстве завершенной аксиоматики. Если это так, то проблему обоснования математической теории мы можем понять как эпистемологическую проблему, относящуюся к логике ее становления. Она становится проблемой эпитеории, включающей в себя как логические, так и методологические доводы.

Здесь возникает, конечно, вопрос о строгости. Разнообразие и внелогический характер используемых средств, как кажется, полностью исключает обосновательное значение эпитеории, ее претензии на полную доказательность. Положение здесь, однако, не является столь однозначным. Многие из приведенных выше доводов, в действительности, претендуют на доказательность и категоричность. Мы говорим здесь не о возможности стабильной аксиоматики, но о ее неизбежности, о ее абсолютной, а не вероятной истинности, и эта категоричность, в действительности, имеет объективные основания. Мы, таким образом, должны обосновать возможность строгих выводов на уровне эпитеоретического рассмотрения.

Понятие непротиворечивости системы аксиом отличается от рассмотренных методологических понятий тем, что оно выразимо в языке логики, и строго логический анализ представляется единственно соответствующим его статусу. Однако есть основания думать, что мы имеем здесь дело с некоторой односторонностью взгляда. В понятии непротиворечивости теории скрыта, говоря языком Канта, неустранимая амфиболия: с одной стороны, это сугубо логическое понятие, характеризующее структуру теории, а с другой стороны, это понятие телеологическое, характеризующее направление ее совершенствования, вытекающее из сущности теоретического знания вообще. В этом последнем плане непротиворечивость является регулятивным требованием и должна обсуждаться в рамках системного и эволюционного анализа теории. Замысел системного обоснования состоит в том, чтобы подойти к пониманию непротиворечивости в рамках системных понятий, связать непротиворечивость аксиоматики с ее завершенностью и идеальной фактологической истинностью. Принципиальная ограниченность логических подходов к обоснованию математики проистекает из того, они сориентированы только на структурное, узко логическое определение этого понятия.

Глава 2.

Непротиворечивость завершенной аксиоматики

Из факта завершенности аксиоматики несомненно следует факт ее непротиворечивости. Движение математической теории к стадии завершенности представляет одновременно и полное очищение ее от внутренних противоречий.

Историческое совершенствование математической теории может быть рассмотрено в двух различных планах: в плане эволюции ее утверждений (аксиом и теорем) и в плане становления системы ее внутренних определений. Речь идет здесь, разумеется, об одном и том же процессе, но при теоретическом анализе мы получаем здесь существенно различные картины, выявляющие различные моменты становления математической теории. Исследуя теорию, в первом плане мы рассматриваем ее как процесс исторического взаимодействия утверждений разного уровня, приводящий ее к более зрелому состоянию и, в конечном итоге, к полному оформлению ее внутренней структуры. Во втором плане развитие теории представляется как движение ее определений к состоянию их полной корректности. Мы должны здесь рассмотреть прежде всего логику взаимодействия принципов (аксиом) с системой ее фактологических утверждений (теорем и сингулярных высказываний).

1. Проблема скрытых противоречий

Факт ретротрансляции истинности, рассмотренный выше, приводит нас к важному понятию определяющего фрагмента математической теории. Назовем *определяющим фрагментом математической теории* совокупность ее утверждений (теорем), достаточную для вывода ее полной аксиоматики. Первым и естественным определяющим фрагментом математической теории является совокупность ее наиболее простых и известных теорем, с которыми мы связываем само ее существование. Набор этих теорем для конкретной теории, как показывает практика, не особенно велик: первые два десятка теорем, как известно, требуют использования всей системы аксиом планиметрии и, таким образом, в соответствии со схемой modus tollens, в

свою очередь, достаточны для вывода полной аксиоматики этой части геометрии. В качестве определяющего фрагмента могут быть взяты и другие совокупности утверждений теории, дедуктивно эквивалентные полной системе аксиом. Теорема Пифагора в евклидовой геометрии сама по себе может считаться определяющим фрагментом для планиметрии, ибо признание ее истинности равносильно признанию справедливости всей аксиоматики евклидовой планиметрии. Ясно, что любая математическая теория содержит бесконечное количество фрагментов, дедуктивно эквивалентных полной аксиоматике теории. С системной точки зрения наиболее важным является представление о *естественном определяющем фрагменте* теории как о совокупности ее центральных теорем, задающих логический остов теории и определяющих систему ее принципов. Логика системного анализа основана на рассмотрении этого фрагмента как генетически первичного и определяющего структуру теории в целом. Нам важно здесь рассмотреть взаимодействие этого фрагмента теории с системой аксиом, принятых в качестве его общего логического оправдания.

Будем считать фрагмент математической теории *скрыто противоречивым*, если в нем не содержится явного противоречия вида «A и не-A», но использование заключенных в нем утверждений позволяет доказать два несовместимых друг с другом утверждения, т. е. получить в рамках строгой дедукции утверждение вида «A и не-A». В системе аксиом с логической точки зрения может существовать несколько существенно различных типов скрытого противоречия. Будем называть скрытое противоречие *слабо скрытым*, если оно может быть переведено в явное посредством простого перехода от аксиомы к ее тривиальному аналогу. Так, если некто высказывает аксиому параллельности и одновременно утверждение о том, что существуют три точки, через которые нельзя провести окружность, то ясно, что он противоречит самому себе и это противоречие легко раскрывается доказательством того утверждения, что тезис: «Существуют три точки, через которые нельзя провести окружность» требует отказа от аксиомы параллельности. Мы назовем противоречие в аксиоматике *существенно скрытым*, если оно не раскрывается через выявление тривиальных аналогов аксиом, а требует рассмотрения некоторых производных объектов в рамках определяющего фрагмента теории. Мы будем называть противоречие в аксиоматике *глубоко скрытым*, если оно не может быть раскрыто в пределах ее элементарного определяющего фрагмента. Продолжая этот ряд, можно говорить также о недостижимых противоречиях, которые выявляемы в конечном развертывании теории, однако практически не могут быть выявлены вследствие несоизмеримости этой конечности с человеческими возможностями[3].

В историческом развитии математической теории мы, начиная с некоторой системы утверждений средней сложности, движемся в двух направлениях: в сторону обоснования новых, более сложных утверждений и в сторону редукции данных утверждений к более простым. Можно обозначить эти направления соответственно как направление усложнения и направление тривиализации. И в том, и в другом случае мы можем натолкнуться на противоречия. Логическая теория показывает, что в развивающейся теории не может существовать вечно скрытых противоречий, и что каждое противоречие, заложенное в некоторой системе исходных утверждений, приобретает форму явного противоречия на некотором конечном этапе усложнения понятий[4]. Однако вопрос о возможности проявления противоречия при движении в обратную сторону логическая теория оставляет открытым.

Очевидно, что и здесь противоречие не может исчезнуть. Если правильно построенный (в соответствии с требованиями аксиоматического метода) фрагмент математической теории оказывается тем не менее противоречивым, то это может быть только результатом логического дефекта в самой формулировке аксиом. Хотя принцип обратной передачи ложности действует и в эмпирических теориях, в математических теориях он действует безусловно в том смысле, что наличие противоречия в системе теорем не может обойтись без корректировки принципов. Противоречивость выводов в физической теории может быть устранена изменением некоторых частных предположений, использованных в процессе вывода, без корректировки общих принципов. В хорошо аксиоматизированной математической теории, где все объекты, существенные для доказательства, введены в соответствии с аксиомами, это исключено: любое противоречие в теоремах означает наличие противоречия в аксиомах, т. е. в системе элементарных утверждений об исходных объектах.

Противоречивость фрагмента аксиоматизированной математической теории предполагает, таким образом, как противоречивость (явную) в некоторых удаленных следствиях теории, так и противоречивость (может быть, скрытую) в системе аксиом. Вопрос, который для нас здесь принципиально важен, состоит в том, в какой форме система аксиом может быть противоречивой при наличии противоречия в теории. Более конкретно, нас интересует, может ли аксиоматика в этом случае содержать глубоко скрытые противоречия? Если противоречие в удаленных следствиях теории может редуцироваться к глубоко скрытому противоречию в аксиомах, то оно может оставаться неуловимым для нас как угодно долго, и мы должны будем согласиться с позицией скептиков, считающих, что у нас нет оснований настаивать на полной непротиворечивости ни одной из существующих математических теорий. Абстрактная логика недостаточна для разрешения

этой проблемы. С чисто логической точки зрения вполне допустимо положение, что противоречие в отношении производного объекта, содержащееся в теории, при редукции его к системе аксиом превращается в скрытое противоречие этой системы. В этом случае надо признать, что тривиализация теории сама по себе не выявляет содержащихся в ней противоречий и, в общем случае, не продвигает нас к ее логическому обоснованию.

2. Устранимость обозримых противоречий

Мы должны оставить здесь сферу чистой логики и использовать некоторого рода методологические доводы. Мы будем исходить из факта ретротрансляции математической истины, а также из соображений, связанных с обозримостью системы утверждений, принадлежащих элементарному фрагменту теории.

Как мы выяснили, противоречие в системе аксиом может содержаться в одной из следующих форм:

1. Явное противоречие, представимое в форме «A и не-A».

2. Слабо скрытое противоречие вида A и B, где из B и из аксиом (исключая A) выводится не-A.

3. Существенно скрытое противоречие, предполагающее для некоторой аксиомы A существование теоремы в пределах определяющего фрагмента, которая требует допущения не-A.

4. Глубоко скрытое противоречие, не выявляемое в пределах определяющего слоя теории.

5. Недостижимое противоречие, не выявляемое практически осуществимым развертыванием теории.

Очевидно, что явные противоречия находятся в сфере практической устранимости и что становление аксиоматики является вместе с тем и полным устранением противоречий этого вида.

Из соображений об элементарности аксиоматики следует, что второй случай противоречивости практически равнозначен первому, ибо все простые аналоги аксиомы A выявляются вместе с самой аксиомой уже на начальном этапе развития теории. Как аксиома или как часть аксиомы утверждение B не может быть связано со сложными производными понятиями. Но это значит, что выведение из B отрицания A не может представлять из себя проблемы с точки зрения математической практики. Слабо скрытая противоречивость устраняется из математической теории на самых ранних этапах ее систематизации. Нельзя себе представить становления какой-либо системы аксиом без одновременного выявления элементарных аналогов каждой из них.

Этот аргумент имеет, конечно, внелогический характер. Утверждая *обозримость* всех слабо скрытых противоречий, мы утверждаем фактически некоторые особые возможности чисто *практического* разрешения проблем. Если аксиоматика обладает слабо скрытыми противоречиями в данном выше их понимании, то она, конечно, полностью освобождается от этих противоречий в процессе своего прояснения, ибо невозможно себе представить такую ситуацию, чтобы математическое сообщество не увидело противоречий, находящихся на расстоянии нескольких логических шагов от аксиом. Однако теоретически гарантировать полное устранение такого рода противоречий нельзя. Здесь мы опять встречаемся с ситуацией, с которой имели дело при рассмотрении процедуры счета. Никто не сомневается, что 12345, сложенное с 54321, даст в итоге 66666, но ясно также, что на теоретическом уровне нельзя исключить некоторую вероятность того, что человечество все еще продолжает заблуждаться в этом конкретном результате. Девис прав в том отношении, что теоретических доказательств отсутствия ошибки здесь не существует.

Это различие между возможностями теоретического и практического разрешения вопроса представляется принципиально важным для проблемы обоснования математики. Наши рассуждения о проблемах обоснования могут быть существенно продвинуты вперед, если мы уйдем от рассмотрения этих проблем только в свете чисто логических возможностей их разрешения и учтем практические критерии математического сообщества, обладающие надежностью. В наших дальнейших рассуждениях мы будем считать математическое сообщество абсолютно критериальным и не будем подвергать сомнению его способность к полному устранению противоречий, лежащих в сфере его практической достижимости.

3. Редукция скрытых противоречий к обозримым

Приведем теперь аргументы, показывающие, что все противоречия в завершенной аксиоматике являются в некотором смысле обозримыми и, следовательно, практически устранимыми в процессе ее становления.

Допустим, что система аксиом противоречива в том смысле, что относительно некоторого производного объекта в теории можно доказать одновременно как $P(a)$, так и не-$P(a)$. Иначе говоря, мы рассмотрим тот случай, когда противоречивость системы аксиом обнаруживается через явное столкновение некоторых теорем. Если объект (a) используется без строгого определения, то противоречие можно интерпретировать как проистекающее из несуществования объекта или

из некорректности его определения. Такого рода противоречия не колеблют принципов теории. Если же окажется, что все производные объекты, использованные при выводе противоречия, введены в соответствии с принципами существования, заданными в аксиомах, то это будет означать, что противоречие существует в самих аксиомах.

Можно предположить, что эта противоречивость будет выразимой в виде прямого противоречия аксиом или их конституэнт и, таким образом, будет устранимой практически. В некоторых теориях такое положение имеет место. Это относится ко всем разрешимым теориям, в которых любое противоречие сводится к явному противоречию в элементарных терминах. В общем случае, однако, это неверно. В сложных системах аксиом могут существовать утверждения о существовании, которые будучи интуитивно приемлемыми и непротиворечивыми в простых случаях, тем не менее, допускают объекты с противоречивыми свойствами. Примером такого утверждения является неограниченная аксиома свертывания в теории множеств, которая будучи тривиальной в своей общей формулировке, в ряде случаев может быть источником противоречивых выводов. Это значит, что тривиализация скорее скрывает противоречие, чем выявляет его и, таким образом, она не может выступать в качестве универсального приема проверки теории на непротиворечивость.

Чисто логическое рассуждение останавливается на этом положении, не очень благоприятном для тезиса о непротиворечивости аксиоматики и аксиоматизированной теории в целом. Методологический анализ, однако, указывает здесь некоторый выход из затруднения. Мы будем исходить здесь из факта ретротрансляции математической истины и из факта конечной определимости системы аксиом.

Допустим, что некоторая аксиоматика скрыто противоречива, т. е. неявно содержит некоторые тезисы a_1 и a_2, не совместимые друг с другом. Но это значит, что мы имеем теорию, в которой одновременно реализуются две аксиоматические системы, а именно $\Gamma+a_1$ и $\Gamma+a_2$, где Γ — совокупность совпадающих аксиом. Даже если несовместимость a_1 и a_2 и факт наличия несовместимых оснований в рассуждениях остаются неосознанными, естественно допустить, что каждая из этих дедуктивных систем стремится к максимальному развертыванию своих следствий. Можем ли мы рассчитывать на то, что нам удастся достаточно долго обойтись без прямого столкновения этих систем, т. е. без получения явно противоречивых следствий? Логика здесь ничего не может сказать, ибо ситуация не определена на уровне чисто логических понятий. В соответствии с теорией Я. Хинтикки существует некоторая глубина рассуждения d, на которой скрытое противоречие в теории неизбежно становится явным[5]. В рамках логической формализации мы не можем определить конкретное значение этой величины.

Методологический анализ, однако, позволяет утверждать, что необходимая глубина рассуждения никогда не может быть слишком большой, выходящей за сферу практической достижимости.

Прежде всего здесь нужно отметить то обстоятельство, что различные теории, определенные на одной системе объектов (рассматриваемый случай будет именно таким), являются изоморфными в своей структуре в том смысле, что они говорят об одной и той же совокупности объектов как исходных, так и производных, и ставят одни и те же вопросы относительно этих объектов. Теоремы в этих теориях параллельны в том смысле, что для каждой теоремы одной теории является осмысленным вопрос о ее корреляте в другой. Мы видим это, сопоставляя теоремы евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского. Развертывание теории, содержащей одновременно и a_1, и a_2, неизбежно приведет к построению двух явно различающихся рядов теорем. Столкновение этих рядов гарантировано и оно произойдет не в некотором неопределенном будущем, но в *естественном определяющем слое теории*, поскольку этот слой в данном случае должен содержать как теоремы, дедуктивно оправдывающие систему аксиом $\Gamma + a_1$, так и теоремы, оправдывающие $\Gamma + a_2$. Это должны быть явно различающиеся ряды теорем, ибо в противном случае мы должны будем признать одно из двух: либо одна из противоречащих аксиом не использовалась вообще, либо обе эти аксиомы дедуктивно эквивалентны. С практической точки зрения первая альтернатива должна быть отброшена: мы не можем допустить, что одну из этих аксиом математическое сообщество обходило как заколдованную во всех тех случаях, когда она могла привести к следствиям, явно противоречащим следствиям другой аксиомы.

Рассмотрим случай, когда a_1 и a_2 сформулированы явно и признаны в качестве противоречащих друг другу и мы параллельно строим две родственные теории, а именно, теории, основанные на аксиоматиках $\Gamma+a_1$ и $\Gamma+a_2$. Появление явно противоречащих утверждений уже на первых этапах этой работы не вызывает сомнений. Мы будем действовать по простому рецепту: для каждого доказательства, использующего аксиому a_1, мы будем строить доказательство, основанное на аксиоме a_2. Очевидно, что уже в числе первых утверждений, а именно, в границах элементарного определяющего фрагмента, мы получим несовпадающие ряды теорем, ибо один из них в соответствии с modus tollens должен оправдать аксиоматику $\Gamma + a_1$, а другой — аксиоматику $\Gamma + a_2$.

Случай скрыто противоречивой аксиоматики будет отличаться от осознанного параллельного развертывания двух противоречащих друг другу теорий только степенью рефлексии, ибо в первом случае мы будем в течение некоторого времени ошибочно предполагать, что имеем дело с единой и непротиворечивой аксиоматикой. Объективный

результат, однако, будет тем же самым: либо мы будем всюду использовать только одну из противоречащих аксиом, т. е. будем строить фактически непротиворечивую систему; тогда другая из аксиом будет неизбежно исключена процессом минимизации, либо мы будем использовать оба допущения в равной мере, тогда получение явно противоречивых теорем неизбежно. Ясно также, что эти противоречия появятся уже на первой стадии развития теории, т. е. в пределах ее элементарного определяющего слоя.

Из изложенного следует, что противоречия 4-го и 5-го типов возможны только теоретически. Практически они не могут возникнуть, ибо все возможные противоречия системы аксиом выявляются в пределах ее определяющего фрагмента и, таким образом, как практически обозримые они полностью устраняются на этапе ее становления до уровня завершенности. Это значит, что глубоко скрытые и недостижимые противоречия — не более чем методологические фикции, порожденные абстрактностью логического анализа. Переходя от чистой логики к методологии, т. е. к исследованию условий фактического сосуществования противоречащих утверждений в математической теории, мы убеждаемся, что это сосуществование может носить только эпизодический характер. Взаимодействие уровней теории, т. е. редукция теорем к аксиомам и аксиом к теоремам в конечное время выдавливает противоречия из ее центра, не делая исключения для какого-либо их типа.

4. Механизм ретротрансляции истинности

Математическая теория признается математическим сообществом в качестве существующей прежде всего как система наличных доказательств, т. е. как система переходов от одних утверждений к другим, удовлетворяющая требованию аподиктической очевидности. Математическая теория начинается с теорем как непреложных внутренних связей между объектами. Признание теорем ведет к выявлению принципов, которые имеют своей целью объединить эти теоремы на едином и минимальном логическом основании.

Историческое становление математической теории может быть представлено как взаимовлияние и взаимокорректировка этих двух уровней математической теории. Трудности в формулировке аксиом являются следствием неопределенности и противоречивости определений в теле теории и устранение этих противоречий является необходимым условием становления адекватной аксиоматики. Первые попытки установления принципов дифференциального исчисления выявили, что в основе принятых алгоритмов этого исчисления лежит до-

пущение $A + a = A$, где величина a является отличной от нуля. Поскольку этот принцип противоречил представлениям о математической строгости, принятым в элементарной математике, то постепенно было выработано новое основание математического анализа, базирующееся на понятии предела и позволяющееся избавиться от такого рода сомнительных допущений. Последовательное развертывание и приложение анализа, основывающееся на понятии предела, выявило, в свою очередь, недостатки в обосновании теорем, признанных ранее доказанными.

Движение аксиоматики к полноте и завершенности — это постоянная проверка теорем через аксиомы (уточнение истинного содержания теории и определенности производных понятий) и проверка аксиом через теоремы (установление завершенности и совместности системы аксиом). Система аксиом, которая в начале своего формирования могла содержать в себе некоторые некорректности, неизбежно освобождается от них в процессе своего приложения к системе производных объектов. Здесь необходимо принять во внимание также и тот факт, что любая математическая теория развивается во взаимодействии с другими теориями и, таким образом, в процессе постоянной переинтерпретации своих утверждений в понятиях других теорий. Вновь появившаяся теория может содержать некорректности в определении своих основных понятий, которые устраняются в ее соприкосновении с другими системами понятий. Эйлер, как известно, считал возможным определить операцию умножения мнимых чисел таким образом, что $(a\mathrm{i})(b\mathrm{i}) = +ab$. Большинство математиков не согласилось с этим, но спор был однозначно разрешен только после установления геометрической интерпретации комплексных чисел[6]. Огромное число примеров свидетельствует о том, что историческое взаимодействие математических теорий является мощным фактором логической гармонизации математического знания и установления окончательной системы исходных определений в каждой из них.

В общем плане это обычная диалектика уровней и структур, которая имеет место в любой теоретической системе. Ее особенность в математике состоит в том, что она обеспечивает здесь окончательное (абсолютное) обоснование исходной системы принципов. Здесь, очевидно, работает тот же механизм достижения абсолюта в конечном пространстве возможностей, о котором мы говорили при анализе надежности доказательства. Мы можем утверждать, что завершенная аксиоматика есть одновременно и абсолютно непротиворечивая аксиоматика вследствие объективной логики своего становления.

Скептик может отвергать законность этой идеи, указывая на то обстоятельство, что проверка математической теории на непротиворечи-

вость посредством ее приложений всегда имеет относительный характер. Он может сказать, что она относится чаще всего только к некоторому фрагменту теории и что она происходит через ссылку к теории, непротиворечивость которой является проблематичной. Это возражение, однако, является истинным лишь по видимости. В действительности, мы имеем здесь ситуацию, совершенно аналогичную ситуации, связанной с установлением надежности доказательств. Как и в случае с доказательством, мы вправе предполагать здесь, что конечное число частичных проверок обеспечивает абсолютный результат: сформулированная система аксиом либо отбрасывается как противоречивая, либо принимается как стабильная и абсолютно корректная. Эти ситуации подобны в том, что как в той, так и в другой мы имеем дело в сущности с поиском необходимого варианта в конечном пространстве возможностей. Мы знаем, что такие ситуации, будучи неразрешимыми теоретически (алгоритмически), с полной определенностью разрешаются практически. Коррекция оснований математической теории происходит в конечное время, и мы фиксируем ее завершение по факту стабилизации аксиоматики, по отсутствию существенно иных вариантов, характерных для этапа ее становления. Факт стабилизации системы аксиом имеет общезначимый характер и может рассматриваться в качестве достаточного признака ее непротиворечивости.

Особая черта математических аксиом состоит в том, что в процессе своего вызревания они сливаются с фактами, становятся логически равнозначными этим фактам и получают возможность быть полностью обоснованными на основе фактов. Принципы опытных теорий всегда содержат в себе гипотетический элемент, они всегда утверждают больше, чем содержится в объясняемых ими фактах и, в силу этого, никогда не могут утверждаться как необходимые для этих фактов и обоснованные на их основе. Связь фактов и принципов в математике такова, что признание фактов однозначно указывает нам на систему принципов, необходимых для их объяснения. Ретротрансляция математической истины непосредственно проистекает из этого обстоятельства: аксиомы математической теории — это не гипотезы в общенаучном понимании, а связи, лежащие в определении фактов. Внутренняя диалектика математической теории конечна: она является механизмом ретротрансляции истинности от фактов к принципам и, таким образом, механизмом абсолютного обоснования принципов. Мы можем говорить здесь об идеальной фактуальной истинности принципов, достигших состояния стабильности и признания с точки зрения объяснения фактов.

Прояснение этого момента существенно углубляет наше понимание связи между аксиомами арифметики и частными арифметически-

ми утверждениями. Утверждая, что непротиворечивость аксиом арифметики обусловлена их непосредственной связью с предметной онтологией, мы несколько огрубляем ситуацию, поскольку отношения предметной онтологии фиксируются непосредственно только в сингулярных высказываниях типа 2 + 2 = 4. Очевидно, что арифметическая аксиомы являются уже продуктом некоторого мысленного акта, который остается здесь в тени. Рассматривая эту связь, Гуссерль пришел к понятию эйдетических истин, которые, возникая на основе самоочевидных фактов, являются столь же достоверными, как и сами факты.

Несомненно, что утверждение $a + b = b + a$ не менее истинно, чем каждое из утверждений 2 + 3 = 3 + 2, 5 + 7 = 7 + 5 и т.д. Мы имеем здесь неприемлемую для эмпирических теорий симметрию истинности частных и родовых истин, при которой родовые истины не обладают какой-либо относительностью и гипотетичностью по отношению к частным. Мы можем понять эту ситуацию только в плане ретротрансляции истинности. Система аксиом арифметики должна быть понята как завершенная математическая теория, соответствующая системе самоочевидных представлений, выраженных в конкретных арифметических высказываниях.

Слабость теории Гуссерля состоит в том, что она не разъясняет механизма стабилизации принципов. Какие факторы принуждают сознание, прибегающее к фантазии и вариации, останавливаться на определенных теоретических смыслах как абсолютных для данной системы фактов? Концепция Гуссерля не содержит сколько-нибудь удовлетворительного ответа на этот вопрос, который является основным для понимания статуса математических аксиом. В действительности, мы имеем здесь дело лишь с механизмом ретротрансляции истины, обусловленным системностью математической теории. Аксиоматика арифметики — это минимизированная, а следовательно, абсолютная теория для сингулярных истин арифметики, определенных представлениями предметной онтологии. В своей теории эйдетических истин Гуссерль мистифицировал механизм ретротрансляции истины, имеющий место в процессе самообоснования математических теорий.

Методологический анализ дает нам основание утверждать, что любая теория, включенная в центр математики и используемая для развития других теорий, является непротиворечивой в своей основе, независимо от своего содержания и от того, в какой мере это может быть подтверждено строгим логическим анализом. Диалектические аргументы позволяют, таким образом, защищать фактическую непротиворечивость математики, существующую независимо от возможностей ее логического обоснования. Важно отметить, что мы выходим здесь за пределы логики не на основе истинности аксиом или принципов

метатеории, а на основе истинности фактов и механизма ретротрансляции истинности. Это более широкое основание для рассуждений о непротиворечивости математического знания, ибо оно в одинаковой мере применимо к любой математической теории.

5. Обоснование непротиворечивости на основе факта

Особенностью зрелой математической теории, как уже сказано, является прямая связь фактов и принципов, при которой факты однозначно определяют систему необходимых принципов. Поскольку истинность фактов в некоторых случаях может быть признана непосредственно, без обращения к аксиомам, то в этих случаях появляется возможность непосредственного вывода о непротиворечивости аксиом на основе их логической связи с фактами.

В качестве примера мы можем указать на связь аксиоматики евклидовой планиметрии с теоремой Пифагора. Особенность теоремы Пифагора состоит в том, что ее строгое доказательство требует использования всех планиметрических аксиом евклидовой геометрии. Все эти аксиомы как бы стягиваются в факте, выраженном в теореме Пифагора. Другая замечательная особенность теоремы Пифагора состоит в том, что она может быть обоснована в своей истинности вне аксиоматического развертывания теории, на основе аподиктически очевидных геометрических построений, которые не могут быть поставлены под сомнение. Но если это так, то теорема Пифагора должна быть признана в качестве факта, абсолютно оправдывающего систему аксиом планиметрии, ибо ни одна из этих аксиом не может быть устранена или скорректирована без отказа от этой теоремы. Систему аксиом планиметрии мы можем рассматривать в этом случае как аналитическое развертывание аподиктически очевидной истины, заключенной в теореме Пифагора. Из логической симметрии системы аксиом и аподиктически очевидного факта в данном случае с несомненностью вытекает как завершенность, так и абсолютная непротиворечивость системы аксиом планиметрии.

Другой пример того же рода мы видим в теории множеств. Мы имеем здесь лемму Жордана, которая в двумерном случае сводится к утверждению, что замкнутая линия L, не имеющая самопересечений, делит плоскость на две части, обладающие тем свойством, что никакие две точки, принадлежащие к разным частям не могут быть соединены линией, не пересекающей линию L. Очевидно, что эта лемма фиксирует аподиктически очевидную истину, которая не может быть устранена из состава геометрических истин, а с другой стороны,

мы устанавливаем, что ее доказательство в теоретико-множественных понятиях предполагает использование всех аксиом теории множеств, в том числе и аксиомы выбора. Мы снова фиксируем прямую связь системы аксиом с некоторым аподиктически очевидным фактом, которая доказывает как завершенность, так и абсолютную непротиворечивость системы аксиом.

Здесь следует заметить, что этот вывод не может быть поставлен под сомнение указанием на возможную неадекватность языка теории множеств или на содержащиеся в нем некорректности. Каким бы ни был язык, ассимилирующий и обосновывающий аподиктически очевидную математическую истину, если он показывает себя достаточным для этой цели, он тем самым утверждает себя абсолютно корректным во всем составе необходимых для этого истин. Это значит, что возможность обоснования леммы Жордана в рамках теории множеств говорит об абсолютной непротиворечивости аксиом теории множеств, вовлеченных в это обоснование. Этот вывод вытекает из факта логической симметрии теорем и аксиом, вследствие которой посылки теоремы могут рассматриваться как аналитическое развертывание ее содержания и, следовательно, как полностью обосновываемые в своей истинности и непротиворечивости вместе с обоснованием теоремы. Теорему Пифагора и лемму Жордана в указанной ее формулировке следует считать абсолютно обоснованными утверждениями на основе аподиктической очевидности.

Логика вывода аксиоматики из факта в некотором смысле применима и к аксиоматике арифметики. Трудность состоит здесь в том, что в арифметике мы имеем дело не с одной аподиктически очевидной истиной, а с бесконечным количеством истин, выраженных в конкретных арифметических высказываниях. Однако это кажущееся затруднение. Кант справедливо указывал на то обстоятельство, что нам важна не очевидность отдельных фактов, а очевидность схемы, порождающей эти факты. Нам не дана с очевидностью фигура тысячеугольника, но нам дана с очевидностью схема его получения, которая и служит основанием наших достоверных заключений о свойствах тысячеугольника[7]. Все многообразие частных арифметических суждений является, в действительности, продуктом схемы порождения натурального ряда, которая является самоочевидной для нашего сознания и которая однозначным образом определяет систему аксиом арифметики. В этом смысле система арифметических аксиом также может мыслится как основанная на одном факте и абсолютно детерминированная им.

Примеры обоснования аксиоматики на основе аподиктически отдельного самоочевидного факта являются сугубо частными в том смысле, что они не открывают никакого общего подхода к обоснованию

математических теорий. Они, однако, важны в том отношении, что проясняют природу математических аксиом, их радикальное отличие от принципов эмпирических теорий.

6. Общие замечания и выводы

В общей схеме развития научной теории, основанной на опыте, которую некоторые философы считают имеющей силу и для математики, всякая стабилизация принципов имеет временный характер и означает лишь некоторый перерыв в процессе углубления основ. Доводы, изложенные здесь, показывают, что эта схема не отражает логики становления математической теории. Стабильность математических принципов (аксиом) — не временная конвенция, обусловленная уровнем анализа строгости доказательства или какими-либо иными факторами, а окончательная стадия формирования этой системы, наступающая в результате полного согласования аксиом теории с фактами, лежащими в ее основании. Система аксиом, достигшая стабильности, не может быть устранена или скорректирована в содержании своих принципов и в своем логическом отношении к фактам.

О непротиворечивости системы аксиом мы заключаем здесь из факта ее социально признанной стабильности. Хотя этот критерий имеет качественный характер и представляется в некоторой степени субъективным, в действительности, он обладает предельной общезначимостью и объективностью. Представление о стабильной аксиоматике является определенным для математического сообщества ничуть не в меньшей степени, чем представление об аподиктически очевидной аксиоматике или о законченности конкретного математического доказательства. Мы не сомневаемся в стабильности аксиом арифметики, геометрии, топологии, теории вероятностей и других математических теорий, несомненно достигших состояния зрелости.

Эмпирицисты правы, указывая на то обстоятельство, что в общем случае математическая теория не редуцируется к самоочевидной системе аксиом и не обосновывается на основе аподиктической очевидности принципов. Мы выяснили, однако, что она всегда редуцируется к завершенной системе аксиом, удовлетворяющей требованию фактуальной истинности и непротиворечивости. Системное рассмотрение дает основание утверждать, что любая математическая теория, независимо от особенностей ее содержания или логического строения (простоты — сложности и т. п.), в конечное время выделяет адекватную систему аксиом, обладающую свойством непротиворечивости.

С этой точки зрения, абсолютная непротиворечивость аксиом — не некий исключительный факт, присущий только системам, достигшим

уровня формализации, а нормальное состояние любой содержательной аксиоматической системы, признанной в качестве адекватной в процессе ее использования. Мы можем фиксировать и постоянно фиксируем фактическую надежность математических теорий независимо от возможностей ее логического обоснования.

Системный анализ позволяет нам говорить непротиворечивости математических теорий, в принципе недоступных для логического обоснования. Мы должны опираться здесь на качественные признаки непротиворечивости, неприемлемые для логического анализа. Хотя здесь возникают вопросы, связанные с надежностью, достаточно очевидно, что проблема обоснования математики, поставленная как проблема надежности математического мышления, не может быть решена без обращения к такого рода внелогическим критериям.

Фаллибилистская идея неустранимой нестрогости оснований содержательной математической теории проистекает из некритического отождествления математической теории с теорией эмпирической и из абстрактности логического подхода к этой проблеме. Поскольку не существует возможности очертить в логических терминах область теории, в которой противоречие, заложенное в аксиомах, должно обнаружить себя в явном виде, эта область предполагается неопределенной и, в принципе, как угодно обширной. Системное рассмотрение устраняет эту неопределенность. Оно показывает, что идея глубоко скрытой противоречивости не применима к реальному развитию математической теории и что содержательные математические теории, достигшие аксиоматически стабильного состояния, должны быть признаны абсолютно свободными от противоречий. История математики отвергает эмпирицистский скептицизм, ибо мы не знаем случаев, когда бы безусловно признанная математическим сообществом система аксиом была затем отвергнута на основе противоречий, обнаружившихся в ее удаленных следствиях. Из системного рассмотрения следует, что такая возможность исключена в принципе.

Главная ценность критерия стабильности состоит в его универсальности. Если приведенные соображения верны, то мы можем говорить о непротиворечивости любой системы аксиом, признанной в качестве стабильной, независимо от степени ее самоочевидности или обоснованности посредством логических методов. С этой точки зрения мы можем говорить о непротиворечивости аксиом теории множеств ничуть не с меньшим правом, чем о непротиворечивости арифметики, ибо стабильность этой аксиоматики (это относится по крайней мере, к таким системам как ZF), в полной мере подтверждена математической практикой.

Глава 3.

Непротиворечивость содержательной теории

От непротиворечивости содержательной аксиоматики мы должны перейти теперь к непротиворечивости содержательной теории в целом. Так как содержательно аксиоматизированная теория оставляет открытым вопрос о приемлемой логике, то здесь возникают проблемы, относящиеся к приемлемости некоторых типов определений, имеющих чисто логическую природу. Таковы, к примеру, непредикативные (самоприменимые) определения. Системный подход позволяет разрешить эту трудность на основе представления о системной детерминации определений. Мы можем поставить также вопрос о непротиворечивости обычного содержательного математического рассуждения, которое условно можно назвать рассуждением математических учебников, которое исходит из известных принципов, но не занимается строгим прояснением состава этих принципов. Поскольку математическая теория в этом смысле включает в себя понятия различной степени корректности, то постановка вопроса о ее непротиворечивости может показаться незаконной. Однако это неверно. Системные понятия позволяют выработать здесь достаточно значимые определения и критерии.

1. Завершенность математических понятий

В развитии математики, как и всякой другой науки, идет постоянный процесс совершенствования и логического обоснования понятий. Понятия постепенно приобретают соответствующую им общность, определенность смысла и освобождаются от дефектов логического порядка, которые могут состоять в их самопротиворечивости или в несогласии с принципами теории.

Важнейшей особенностью математического понятия, которая отличает его от понятия эмпирического, является то, что в своей эволюции оно неизбежно достигает предела совершенства, который можно назвать стадией *полной логической корректности*. Анализ методологии и реальной истории математики позволяет утверждать, что развитие

математической теории, будучи направленным на решение конкретных задач, неизбежно приводит к необходимой корректировке любого значимого для нее понятия и, в конечном итоге, к полному освобождению его от содержащихся в нем логических дефектов. Мы будем говорить о *принципиальной завершенности* математического понятия, подразумевая под этим то обстоятельство, что математическая практика неизбежно и *в конечное время* доводит каждое математическое понятие до стадии полной логической корректности.

Под логической корректностью понятия надо понимать здесь две вещи, а именно, отсутствие самопротиворечивости, т. е. противоречащих требований в самом его определении, и отсутствие несогласованности заложенных в нем требований с аксиомами теории. Мы не предполагаем здесь завершенности понятия в каком-либо ином смысле, к примеру, в смысле общности. Общее понятие площади не может быть дано в понятиях элементарной геометрии и в этом смысле это понятие не достигает здесь завершенности, хотя применительно к площадям простых фигур, оно используется с полной определенностью. Мы не связываем также с корректностью понятия никаких требований типа конструктивности или предикативности, ибо и неконструктивные, и непредикативные определения, в принципе, могут обладать полной корректностью в указанном смысле.

Наш общий тезис сводится к тому, что естественный процесс совершенствования математической теории в конечное время приводит к устранению всех противоречий, связанных с ее значимыми понятиями. Этот тезис аналогичен тезису о завершенности доказательства и о завершенности системы аксиом и вскрывает, таким образом, один из аспектов внутренней стабилизации математического знания.

Общая методология науки всегда указывала на системный характер теоретических понятий. «Отдельное понятие, — писал Э. Кассирер, — никогда не может быть измерено и проверено само по себе; подтверждение оно получает всегда лишь как член целого теоретического комплекса»[8]. Применительно к математическому знанию мы можем существенно усилить это утверждение. Мы должны настаивать здесь на полном обосновании понятия через его принадлежность к системе.

Мы можем подойти к обоснованию этого положения на основе намеченной выше схемы формирования завершенной аксиоматики. Каждое определение, вновь введенное в математическую теорию, представляет собой утверждение о существовании и является, в действительности, добавлением новой аксиомы к уже существующему множеству аксиом. Вводя новое определение, если его законность не доказана с точки зрения аксиоматики, мы стоим перед лицом оправдания некоторой расширенной аксиоматики, т. е. оправдания новой

аксиомы как непротиворечивой. Мы выяснили, что такое оправдание совершается в течение исторически ограниченного отрезка времени: определение либо отбрасывается как несоответствующее теории, либо входит в теорию в качестве органического элемента ее структуры. Практическая (функциональная) ассимиляция понятия, включение его в значимые утверждения теории может пониматься и как полное обоснование его корректности в смысле невозможности связанных с ним противоречий. Как и в случае с доказательством, мы имеем все основания считать, что каждое понятие на протяжении некоторого неопределенного, но конечного времени приобретает полную корректность в рамках своей теории.

Завершенность математического понятия может быть обоснована также исходя из его конечной определимости. Математическое понятие, доказавшее свою эффективность, имеет неустранимое, логически оправданное содержание и не может иметь бесконечного количества дефектов. Но это значит, что необходимо конечное число познавательных контекстов, конечное число задач, решаемых с использованием этого понятия, для того, чтобы выявить эти дефекты и подойти к его адекватному определению в рамках данной теории.

Назовем общим (глобальным) обоснованием понятия его введение в теорию на основе признанных аксиом. Будем называть понятие локально обоснованным, если оно принято только на основе своей эффективности. Достаточно ясно, что в развитии математической теории локальное обоснование предшествует глобальному и само по себе может быть достаточным в смысле строгости. Понятия арифметики, евклидовой геометрии, теории вероятностей и т. п., разумеется, были строгими и до аксиоматизации этих теорий. Мы имеем основания утверждать, что возможно абсолютное логическое обоснование понятия исключительно на основе его использования. Такого рода локальное и абсолютное обоснование реализуется через взаимодействие данного понятия со смежными понятиями в процессе решения конкретных задач и не зависит от уровня логической систематизации теории в целом.

В качестве примера, иллюстрирующего движение понятия к полной корректности своих внутренних определений, можно рассмотреть развитие понятия дифференциала в XVIII веке. Первоначальное его понимание, как уже сказано выше (это относится как к трактовке Лейбница, так и к трактовке Ньютона), было мало приемлемым с точки зрения строгости. Не было, во-первых, однозначного решения вопроса о том, следует ли понимать эту величину большей нуля или равной нулю. Лейбниц склонялся к первому пониманию, в то время как Эйлер и некоторые другие математики развивали представление о дифференциале как о величине, равной нулю. Длительное время дифференциал

отождествлялся с приращением функции, что привносило неясность и заведомую нестрогость в операции с этой величиной. Не было адекватного определения предела и непрерывности, что закрывало путь к полному теоретическому обоснованию понятия дифференциала и алгоритмов дифференциального исчисления вообще. Однако решение новых теоретических проблем и прикладных задач вело постепенно, но неизбежно к устранению всех этих неясностей. Лангранж провел строгое различение приращения функции и дифференциала как главного приращения. Даламбер, следуя Ньютону и Эйлеру, сделал ясным для математиков то обстоятельство, что при вычислении дифференциала мы имеем дело просто с предельным переходом и с отношением функций, которое может стремиться к любому числу при исчезающе малых приращениях этих функций. Стало ясно, что для строгого понимания дифференциала и алгоритма его вычисления следует уточнить интуитивное понятие предела и обосновать корректные правила обращения с этим понятием. Даламбер уже написал основные концептуальные равенства типа $\lim(a + b) = \lim a + \lim b$, но само понятие предела оставалось неопределенным, понимаемым на уровне интуитивной ясности. Коши завершил это прояснение основных понятий анализа посредством формальной экспликации понятия предела, которое давало возможность доказывать его существование и в тех случаях, в которых это не подтверждалось непосредственной интуицией. Мы можем сказать, что через полтора века после своего появления понятие дифференциала приобрело, наконец, строгое определение, не поддающееся какой-либо дальнейшей корректировке, изменяющей его смысл.

Важно отметить, что эволюция понятия дифференциала и других понятий анализа, которая продолжалась в течение всего XVIII века, не была результатом философских размышлений о сущности математической строгости. Хотя такого рода размышления имели место и были несомненно полезными для прояснения возможных путей выхода из трудностей (здесь мы можем указать на доводы Лейбница, на критику Дж. Беркли, на «Рассуждения» Л. Карно и многие другие методологические подходы), можно с полной определенностью утверждать, что главным фактором, определившим совершенствование понятий анализа, была математическая практика, применение общих принципов к решению конкретных задач. Известно сколь важную роль для прояснения понятия непрерывности сыграла задача о колеблющейся струне[9].

Оформленная к середине XIX века теория, которую мы называем сегодня математическим анализом, является безусловно законченной в своей внутренней структуре. Эта теория является строгой в том смысле, что она не подвержена изменению или корректировке своих понятий через возможное введение в будущем каких-либо новых представлений о строгости или через включение ее в некоторый новый более

широкий контекст рассмотрения. Это не значит, что Коши и Вейерштрасс указали абсолютный фундамент анализа, не требующий углубления. Очевидно, что это не так, и последующее развитие событий показало это с полной ясностью. Но несомненно и то, что анализ как математическая теория приобрел законченные очертания и что любое его будущее обоснование должно считаться с его логической структурой как с чем-то безусловно данным и не допускающим перестройки.

2. Становление неразрушимого центра

Сказанное позволяет заключить, что математическая практика, направленная на решение конкретных задач, сама по себе является достаточной для полного обоснования корректности вовлеченных в нее понятий. Ошибка современной философии математики состоит в недооценке механизмов самообоснования математики, в недостаточном понимании того факта, что математическая теория, способная к развитию, обречена на приобретение полной корректности своих основных понятий и полной надежности связанных с ними принципов.

Представление о конечности процесса ассимиляции математических понятий позволяет понять историческое развитие математической теории как постепенное расширение ее твердого ядра через экспликацию и ассимиляцию новых понятий. Некоторое множество исходных понятий и интуитивно бесспорных связей образуют первоначальное ядро теории, на основе которого эксплицируются новые понятия и связи, приводя к расширению хорошо обоснованного центра.

Этот процесс расширения теории является вместе с тем и процессом ее абсолютного обоснования. Здесь уместно провести аналогию между становлением математической теории и ростом кристалла. Если имеются исходные элементы кристалла, определяющие его матрицу, то молекулы из окружающей среды заполняют строго определенные места в предопределенной структуре, соответствующей данному веществу. В структуре формирующегося слоя могут оказаться неправильности: пустые места, совмещенные молекулы, молекулы другого вещества и т. п. Замечательная особенность процесса роста кристаллов состоит в том, что следующий уровень не может сформироваться до тех пор, пока не будут устранены дефекты на предыдущем. Центральная часть кристалла, таким образом, неизбежно приобретает правильные очертания и полную устойчивость под давлением расширяющегося процесса на периферии. В становящемся кристалле существует зона, в которой уже достигнута полная упорядоченность молекул и которая уже не возмущается никакими процессами на поверхности. Существует, таким образом, идеальное состояние структуры, которое будучи достигнуто, остается окончательным и неизменным.

Математическая теория — это кристаллическое образование в мире понятийных систем. Развитие математической теории имеет своим неизбежным результатом образование центрального ядра теории, которое является *законченным* и *неразрушимым*. Зрелая математическая теория родственна кристаллу по внутренней жесткости своих связей. Парменид утверждал, что мир неподвижен по той причине, что все места в нем заняты. Зрелая математическая теория, как и сформировавшийся кристалл, не может изменять своих внутренних связей: в отношении своих основных понятий она абсолютно правильна и абсолютно закончена. Причем математическая теория в отличие от реального кристалла обладает безусловной (идеальной) законченностью. В кристалле как физическом объекте могут навсегда остаться некоторые погрешности структуры, не скорретированные в процессе становления. В математической теории это исключено, поскольку каждое поколение математиков строит этот кристалл заново, проверяя работу предшественников. Как и при проверке доказательств, математическое сообщество обладает здесь конечной во времени и абсолютной критериальностью.

Ясно, что формирование окончательной структуры математической теории определено наличием относящихся к ней завершенных доказательств. Центр математической теории приобретает неразрушимость вследствие того, что система составляющих его логических связей приобретает статус завершенных и не подлежащих корректировке. Его корректировка становится невозможной, вследствие того, что она потребовала бы отказа от теорем, обладающих завершенностью и полной надежностью. Достигая зрелости своих доказательств, теория одновременно приобретает и ту окончательную структуру, которая не подлежит изменению.

Сказанное означает, что математическая и эмпирическая теории существенно различаются в общей схеме своего исторического развития. В математической теории понятия неизбежно достигают уровня полной корректности, в эмпирической теории этого не происходит, в математической теории достигается полная стабилизация внутренних дедуктивных связей, эмпирическая теория в общем случае не имеет такого предела. Если рост эмпирической теории подобен росту города, при котором застройка периферии ведет к постоянной перестройке центра, то рост математической теории должен быть уподоблен росту кристалла, который характеризуется расширением центра, не подверженного более какими-либо радикальными изменениями. Это две различные схемы роста, соответствующие различным типам знания. Математические теории переживают стадию установления основ, но они не переживают революций, отвергающих эти основы.

Эмпирическая философия математики всегда пыталась подтянуть развитие математики к некоторой общенаучной схеме, позволяющей настаивать на относительности всех, даже наиболее обоснованных математических утверждений. Ясно, что этот замысел нереализуем. Развитие математической теории определено конечной и полной стабилизацией понятий, которая не имеет места в системе эмпирического знания.

3. Практическое оправдание определений

Идея неразрушимого центра теории имеет важное методологическое значение, поскольку она позволяет нам говорить об обосновании понятий и принципов на основе факта их принадлежности к этому центру.

С методологической точки зрения важно то, что принадлежность к центру теории оправдывает логическую корректность определений даже в тех случаях, где собственно логическое оправдание в принципе недостижимо. Такая проблема существует, к примеру, в отношении непредикативных определений. Математики начала XX века намерены были полностью исключить непредикативные определения как содержащие логический круг, однако вскоре обнаружилось, что эти определения вовлечены даже в арифметические рассуждения. Некоторые формы непредикативных определений поддаются реабилитации через сведение их к рекурсивным определениям и на основе понятия конечной устранимости[10]. Достаточно очевидно, что полностью эта проблема неразрешима: мы не можем провести здесь строгой разграничительной линии на основе чисто логических определений. Те же проблемы возникают при использовании объектов, введенных на основе аксиомы свертывания. Эти проблемы, однако, могут получить решение на основе принципа системной детерминации.

Рассматривая вопрос о порочном круге в математических рассуждениях, связанных с использованием непредикативных определений, Гёдель писал: «Можно показать, что формализм арифметики не удовлетворяет принципу порочного круга в первой его форме, так как аксиомы влекут существование действительных чисел, определимых в этом формализме, только с обращением ко всему множеству действительных чисел. ...Я хотел бы рассматривать это как доказательство того, что скорее ложен принцип порочного круга, нежели ложна классическая математика...»[11]. За этим коротким замечанием Гёделя стоит в сущности новая идея принятия объектов и определений, устраняющая многие проблемы, порождаемые чисто логическим подходом. Суть ее

состоит в том, что не логическая теория, а математическая практика определяет приемлемость той или другой системы определений.

Идея абсолютности локального обоснования дает нам практический принцип оправдания определений, основывающийся на их вхождении в состав зрелой теории. Если мы видим, что непредикативные определения существенны для обоснования признанных утверждений арифметики, то мы должны считать эти определения (в используемой форме) абсолютно корректными для данной теории. Если введение абстрактных объектов, основанных на аксиоме выбора, оказывается необходимым для обоснования центральных теорем математического анализа, то логическая корректность этой аксиомы и объектов, введенных на ее основе, не может быть поставлена под сомнение. В оправдании определений практика должна быть поставлена выше логики. Мы должны признать, что сама вызревающая теория демонстрирует нам типы допустимых объектов и что мы должны признать эти объекты в качестве корректных, независимо от возможностей их логического обоснования.

Эти соображения позволяют нам сделать более осмысленным введенное выше различение между логикой дедукции и логикой определений. Брауэр настаивал на том, что все принципы логики должны быть выведены из практики математического мышления. В общем плане эта идея, конечно, не может быть принята. Логика дедукции, несомненно универсальна, автономна от математики и должна быть обоснована из самих целей мышления и независимо от какой-либо практики. Однако эта идея представляется верной для логики определений. Типы определений, которые мы принимаем в конкретной математической теории, заведомо не определены чистой логикой, ибо они различны в различных теориях. Это значит, что первичным и абсолютным критерием здесь может выступать только сама практика, проясняющая необходимость тех или иных определений для построения центра теории.

Вхождение определения в центр теории говорит не только о корректности данного определения, но о корректности его схемы или правила, лежащего в его основе, т. е. о приемлемости всех объектов, заданных в соответствии с этой схемой. Мы, таким образом, можем считать абсолютно оправданными все типы определений, вовлеченных в построение неразрушимого центра теории. Мы должны говорить о безусловном примате практики в процессе принятия определений в том смысле, что практически оправдавшие себя определения не могут быть устранены из теории, а принадлежность определения центру теории должна быть признана универсальным и абсолютным критерием его корректности.

4. Непротиворечивость содержательно аксиоматизированной теории

Становление неразрушимого центра теории неизбежно приводит к выявлению стабильной аксиоматики, которая признается адекватной содержанию теории и становится, в конечном итоге, наиболее строгим ее определением. Аксиоматика приобретает завершенность и неподвижность вследствие завершенности определяющего ее фрагмента теории.

Здесь важным для нас является то обстоятельство, что любая аксиоматика определяется *конечным* числом теорем, образующих определяющий фрагмент теории. Расширение надежного центра теории, захватывая ее определяющий фрагмент, придает аксиоматике окончательный характер, независимый от дальнейшего развития теории. Хотя хорошо аксиоматизированная теория продолжает свое развитие, обогащая себя новыми идеями, она развивается уже в системе координат, установленных на основе конечного фрагмента теории, который не допускает изменений в системе своих внутренних связей, а следовательно, и в составе системы аксиом.

Факт непротиворечивости системы аксиом сам по себе недостаточен для заключения о непротиворечивости аксиоматизированной теории в целом, поскольку в содержательной теории остается открытым вопрос о корректности определений, фактически используемых при ее аксиоматическом представлении. Намеченное здесь понимание генезиса определений позволяет устранить сомнения в этом отношении. Становящийся центр теории фиксирует не только систему аксиом, но и систему допустимых определений. Небольшое рассуждение показывает, что факт принадлежности определения центру теории оправдывает не только это конкретное определение, но и его общую схему, обосновывая, таким образом, всю систему связанных с ней производных определений.

В развитии математической теории, таким образом, имеет место конечная детерминация аксиом и определений, необходимых для систематического аксиоматического построения теории в целом. Установившаяся система аксиом не может войти в противоречие с центральными положениями теории, поскольку она находится с ними в отношении идеальной фактуальной истинности, она не может войти в противоречие и с утверждениями, выходящими за пределы определяющего фрагмента, поскольку эти утверждения являются суждениями об объектах, введенных на основе правил, определяющих строение неразрушимого центра теории. Непротиворечивость аксиоматизированной теории устанавливается, таким образом, в конечном поле проверяемых вариаций, на основе согласования конечного множества

центральных теорем теории с дедуктивно определяющей их системой аксиом. Как мы выяснили выше, процесс этого согласования конечен во времени и всегда доводится до состояния полной завершенности.

Общая логика исторического самообоснования математической теории выглядит следующим образом: на основе некоторого первичного, достаточно развитого фрагмента теории мы устанавливаем ее логические координаты, состоящие из системы аксиом и правил введения новых объектов (определений), которые совместимы с исходным фрагментом теории как фактуально истинные. При достаточном развитии центрального ядра теории эти координаты устанавливаются однозначным и не подлежащим корректировке образом. Тем самым выделяется аксиоматизированный фрагмент теории, состоящий из бесконечного числа утверждений, который следует считать абсолютно обоснованным, ибо его развертывание в рамках принятых аксиом и правил введения объектов в принципе не может привести к противоречию, разрушающему принципы теории. Общезначимым критерием непротиворечивости является здесь стабильность системы аксиом.

Важно отметить, что утверждение непротиворечивости системы аксиом ни в какой мере не опирается здесь на понятие их онтологической истинности и какой-либо внешней истинности вообще. Если при онтологическом обосновании мы выводим непротиворечивость аксиоматики из онтологической истинности и аподиктической очевидности аксиом, то здесь мы мыслим в соответствии со схемой: конечная определимость математических объектов → расширение неразрушимого центра → фактуальная истинность системы аксиом → непротиворечивость аксиоматизированной теории. Основой этого рассуждения является представление о неизбежном становлении неразрушимого центра теории, который определяет ее законченную аксиоматику, а также и корректность ее внутренних определений.

Теоретики эмпирицизма справедливо указывали на тот факт, что сфера самоочевидности в математике ограничена и что аксиомы сложных математических теорий генетически столь же вторичны в отношении их содержания, как и принципы физики. Это обстоятельство, конечно, важно: оно показывает, что евклидианская схема не характеризует логики развития математической теории. Они, однако, заблуждаются, пытаясь вывести из этого факта возможность корректировки установленных аксиом и релятивность основания математических теорий вообще. Единство схемы становления математических и физических принципов не означает тождественности их статуса. Математические аксиомы устанавливаются на основе конечного фрагмента теории и они устанавливаются как окончательные, определяемые только неразрушимым фрагментом теории. Математические теории

переживают период становления основ, но они не переживают революций, изменяющих эти основы.

Анализ логики становления аксиом приводит нас к более ясному пониманию несостоятельности идеи глубоко скрытых противоречий в признанной математической теории. Анализ логики становления аксиом показывает, что противоречия в объектах за пределами определяющего фрагмента безразличны для аксиоматики и для аксиоматизированной теории в целом. Схема логического следования Хинтикки, согласно которой аксиоматика может содержать противоречия, выявляемые только в удаленных следствиях теории, является конструкцией, полезной для логики, но не имеющей отношения к реальным математическим теориям. С системной точки зрения стабильная аксиоматика определяется конечным фрагментом теории и при условии своей фактуальной истинности она не может быть поколеблена какими-либо связями за его пределами.

Сказанное означает, что развитие любой математической теории эквифинально в смысле неизбежности установления ее твердых и неколебимых основ. Понимание этого обстоятельства устраняет всякий релятивизм в понимании математического знания, привнесенный поверхностными эмпирическими аналогиями.

5. Практическая непротиворечивость математической теории

Исследование внутренней логики становления математической теории позволяет выделить некоторую ступень в ее развитии, которую можно назвать стадией практической или существенной непротиворечивости. Исследование этой ступени является важным для понимания уровня надежности обычных математических рассуждений, с которыми математик имеет дело в книгах, статьях и учебниках.

Будем называть математическую теорию зрелой или практически непротиворечивой, если она имеет неразрушимый фрагмент, достаточный для оправдания полной системы аксиом, а следовательно, и для обоснования всего множества ее утверждений. Зрелость теории в этом смысле не тождественна ее аксиоматическому представлению. Становление признанной аксиоматики представляет собой длительный процесс, зависящий от многих факторов, вследствие чего между начальным этапом становления теории, на котором она только оформляет свои принципы, и последним этапом, на котором она получает адекватное аксиоматическое представление, имеется длительный этап ее существования, когда она, уже имея достаточную систему истинных утверждений, еще не имеет полного логического оформления

на основе признанной системы аксиом. В течение всего этого периода мы имеем здесь дело с обычной математикой, которая исходит из истинных принципов, но которая не нацелена на прояснение этих принципов и их специальное исследование.

Это состояние теории можно назвать состоянием существенной непротиворечивости, поскольку такого рода зрелая теория, не будучи гарантирована от противоречий в своих производных определениях, тем не менее является гарантированной от переворотов, устраняющих достигнутые результаты, принадлежащие к центру теории.

В логическом отношении это состояние теории может быть определено через различение глубоких и поверхностных противоречий. Будем называть математическое противоречие *глубоким*, если оно способно привести к отказу от аксиом или некоторых других признанных утверждений математической теории, и назовем его *внешним* или *поверхностным*, если оно устраняется корректировкой некоторого производного понятия, не затрагивая, признанных утверждений теории. Зрелая содержательная математическая теория является *существенно непротиворечивой* в том смысле, что она может содержать в себе только внешние противоречия.

Нетрудно видеть, что развитие любой математической теории неизбежно приводит ее к состоянию существенной непротиворечивости, задолго до ее аксиоматизации и формализации. Сомнения по поводу того, была ли геометрия строгой до Гильберта, конечно, неуместны[12]. Математики, доказывающие геометрические теоремы во времена Евклида, мыслили совершенно строго, ибо вместо истинных аксиом они ссылались на безусловно истинные теоремы, без признания которых никакая аксиоматика невозможна. Теория вероятности достигла очень высокого уровня развития, прежде чем Колмогорову удалось указать для нее адекватную систему аксиом. Ясно, что и доаксиоматическое развитие было здесь внутренне строгим. Обсуждение основ теории вероятностей Борелем, Бернштейном и Мизесом касалось интерпретации понятия вероятности, но не ставило под сомнение каких-либо теорем, составляющих ее основу. Неразрушимость центра математической теории является основным законом развития математической теории и это обстоятельство дает исчерпывающее понимание того факта, что возникновение парадоксов в математике несущественно для ее развития и для ее применения, если оно ограничивается использованием признанных утверждений теории.

Системное понимание математической теории, таким образом, обосновывает как абсолютную непротиворечивость аксиоматизированной теории, так и практическую непротиворечивость обычной доаксиоматической теории. Это последнее обстоятельство не менее важно,

чем первое, ибо оно позволяет нам понять надежность математики в ее приложениях и истоки неколебимой веры в математику как строгую науку, несмотря на наличие парадоксов и отсутствие ясных методов их устранения. Подавляющее число противоречий, которые когда-либо появлялись в математике, были поверхностными в том смысле, что они не приводили к устранению каких-либо теорем или принципов теории. Системный анализ позволяет понять причины этого факта и принципиальное его значение для понимания непротиворечивости математического мышления в целом.

Философия математики начала XX века явно преувеличивала опасность парадоксов, видя в них угрозу самому существованию математики. Гильберт, как известно, рассматривал парадоксы как методологическую катастрофу, подрывающую доверие к науке. Где же искать истину, спрашивал он, если сама математика дает осечку?[13] Причина такой реакции заключалась, несомненно, в отсутствии системного видения теории, в недостаточном понимании того факта, что устойчивость математической теории создается не аксиомами, а формированием ее центра, которое делает все противоречия периферийными и несущественными. Хотя обычное содержательное рассуждение не гарантировано от появления противоречий, эти противоречия не несут никакой опасности для основ теории и должны пониматься лишь как момент становления ее новых понятий.

Математическая теория в процессе своего развития получает абсолютное обоснование в том смысле, что утверждения, принадлежащие к ее центру, не могут быть пересмотрены на основе ее дальнейшего развития. Это относится к любой достаточно зрелой математической теории, независимо от степени ее аксиоматизации. В отличие от эмпирической теории контрпримеры в содержательной математической теории не затрагивают ее оснований и содержания, относящегося к ее центру. В своей критике математической строгости Лакатос упускает это существенное различие между двумя типами знания, приписывая математическим парадоксам силу эмпирических контрпримеров, которой они в действительности не обладают.

6. Сфера абсолютной надежности

Устанавливая факт непротиворечивости аксиоматического представления содержательной математической теории, мы достигаем конечной цели всего нашего рассуждения, ибо мы получаем возможность говорить о существенной непротиворечивости всех центральных математических теорий и об абсолютной непротиворечивости всех стабильных аксиоматик, признанных математическим сообществом. Мы

приходим к пониманию того положения, что за коллективным восприятием математической теории как несомненно надежной лежит объективный факт, заключающийся в том, что теория находится на той стадии своего развития, когда возможные противоречия на ее периферии уже не затрагивают ее центра. Мы подходим здесь к обоснованию надежности математической теории не из анализа ее содержания или формальной структуры, а исключительно из логики ее становления.

Традиционная парадигма обоснования математики выдвигает на первый план структурное (формальное) представление математической теории как единственно соответствующее точной постановке проблемы обоснования и доказательного ее решения. Эта парадигма определена философией начала XX века, которая приписывала надежность только формальному обоснованию. В настоящее время мы постепенно осознаем то обстоятельство, что формальная теория вторична по отношению к содержательной, поскольку она может принимать только те факты, которые обоснованы с содержательной точки зрения. Формализация теории не вносит в теорию никакой дополнительной истинности и никакой дополнительной надежности и достаточно очевидно, что непротиворечивость формализованного представления во всех случаях, в которых она фактически имеет место, есть лишь следствие гармонизации теории на содержательном уровне.

Целью обосновательных рассуждений, в конце концов, является обоснование надежности содержательных математических теорий. Несомненно, что там, где достигается строгое логическое (метатеоретическое) обоснование непротиворечивости формализованного исчисления, оно может считаться полным обоснованием соответствующей содержательной теории, гарантирующим отсутствие противоречий в ее основных утверждениях. Логика обоснования заключается здесь в переходе от непротиворечивости формальной модели к непротиворечивости содержательного аксиоматического представления теории. Суть системного подхода состоит в том, что он нацелен непосредственно на обоснование непротиворечивости содержательных аксиоматических систем. Мы выводим здесь факт непротиворечивости теорий из анализа логики их развития и стремимся сформулировать признаки ее логической надежности без обращения к свойствам формализованной модели теории.

Если приведенные соображения верны, то нужно признать, что все основные теории современной математики вне зависимости от возможностей их логического анализа являются существенно непротиворечивыми и абсолютно непротиворечивыми в рамках их систематического аксиоматического представления. Это относится в данном случае не только к центральным теориям математики, таким, как ариф-

метика, геометрия и алгебра, но и к таким теориям, как теория вероятностей, топология и теория множеств, в ее признанных аксиоматических представлениях.

Выше были приведены аргументы за непротиворечивость теории множеств, опирающиеся на онтологическую значимость ее основных аксиом. Системный анализ дает нам более убедительный подход к решению этой проблемы, опирающийся на факт стабильности ее аксиом. Теория множеств (это относится по крайней мере к наиболее употребительным и практически используемым ее представлениям) является, с системной точки зрения, не менее надежной, чем всякая другая теория современной математики, имеющая признанную аксиоматику.

Вся история развития теории множеств связана с сомнениями в ее корректности. В начале XX века, после того как Цермело представил первый вариант аксиоматического представления теории множеств (1908), Пуанкаре писал: «Автор думал избежать наиболее существенных парадоксов, запретив себе всякие спекуляции за пределами полностью замкнутого Menge; он думал избежать парадокса Ришара, не ставя никаких вопросов, кроме дефинитных, что по тому смыслу, который он вкладывает в это выражение, исключает всякое рассмотрение объектов, которые могут быть определены конечным числом слов. Но если он хорошо запер свою овчарню, то я не убежден, что он не запер туда и волка»[14]. Та же мысль звучит и в высказывании Г. Вейля, которое было сделано через четыре десятилетия: «...У нас нет гарантий непротиворечивости Z, — пишет Вейль, — за исключением того эмпирического факта, что до сих пор из нее не выведено никаких противоречий»[15]. Утверждения того же типа мы находим и в современных книгах по математической логике. Общий смысл их состоит в том, что хотя в рамках признанных аксиоматик теории множеств не выведено никаких противоречий, у нас нет полной гарантии, что это не произойдет в будущем.

В рамках логической парадигмы, сориентированной на финитное обоснование непротиворечивости, все эти высказывания являются несомненно верными. У нас нет строгого логического обоснования теории множеств, а следовательно, нет и полной гарантии непоявления новых противоречий в ее рамках. Приведенные высказывания фиксируют один и тот же логический факт и в этом смысле являются одинаково истинными. С системной точки зрения, которая включает в рассмотрение фактор времени и механизмы самообоснования, мы должны по-новому посмотреть на эти утверждения и разделить их по степени оправданности. Высказывание Пуанкаре является несомненно обоснованным, поскольку оно было сделано в момент первоначального оформления теории множеств, когда вероятность появления новых

парадоксов была очень большой. Высказывание Вейля имело с этой точки зрения меньше оснований, поскольку к сороковым годам XX века система аксиоматика теории множеств уже в достаточной степени продемонстрировала свою полноту и корректность. Современные высказывания о возможном появлении новых противоречий в аксиоматической теории множеств, будучи допустимыми в контексте логического обоснования, представляются методологически неоправданными, ибо они не учитывают факта стабильности основных аксиоматик теории множеств, который исключает появление в ней каких-либо новых типов противоречий. Теория множеств удовлетворяет всем признакам непротиворечивости содержательной математической теории и с системной точки зрения может быть поставлена под сомнение в этом отношении не больше, чем арифметика или элементарная геометрия.

С этой точки зрения являются необоснованными попытки наложения ограничений на внутренние определения теории множеств с целью увеличения логической надежности ее выводов. Такого рода проекты намечались в начале XX века Лебегом, Борелем, Лузиным и другими математиками. Лузин полагал, что наряду с эффективными понятиями теория множеств содержит в себе понятия, не имеющие реального наполнения и не оправданные теорией, несмотря на их приемлемость в чисто логическом отношении. «Современное состояние теории множеств убедительно доказывает, — писал Лузин, — насколько важно установить точное разграничение между математическими сущностями, которые рассматриваются как существующие, и другими, реальность которых лишь кажущаяся»[16]. Исходя из этой установки, Лузин отрицал законность использования в теоретико-множественных доказательствах некоторых типов проективных множеств. Здесь мы видим стремление обосновать математическую теорию на основе представления о некоторой реальности. Идея состоит в том, что понятие счетного множества ближе к реальности и потому более надежно в логическом отношении, чем понятие множества более высокой мощности или проективные множества. Системное рассмотрение полностью отказывается от такого рода отражательного, квазиэмпирического истолкования надежности математической теории. В математической теории, центр которой уже сформирован, только сама система может указать пределы обобщения своих понятий и пределы их абстрактности. Идея реальности важна для понимания исходных представлений математики, но она не может быть ограничителем для внутренних определений математической теории.

С этой точки зрения должна быть отклонена интуиционистская критика теории множеств, которая исходит их факта неконструктивности и неопределенности понятия множества[17]. Наши аргументы против этой

критики основаны в данном случае не на реабилитации закона исключенного третьего, а на представлении о системности теории множеств, которая своим длительным существованием в качестве практически непротиворечивой системы оправдывает одновременно и общее понятие множества и заключенную в ней систему логических принципов.

Системное рассмотрение исключает возможность критики математической теории на зрелой стадии ее существования, направленной на опровержение или корректировку ее исходных принципов. Примером такого рода несомненно ошибочной критики является появившаяся недавно целая серия выступлений, нацеленная на опровержение канторовской теоремы о мощности множества всех подмножеств и связанной с ним канторовской диагональной процедуры. Авторы ставят своей задачей показать, что при доказательстве этой теоремы Кантор допустил логическую некорректность, использовав только одну (внутреннюю) интерпретацию логического отрицания и оставив в стороне другую (внешнюю) его интерпретацию, позволяющую прийти к иному выводу[18]. Не нужно вдаваться в разбор логических аргументов, чтобы понять несовместимость этого вывода с логикой системной детерминации математических понятий. Понятие несчетного множества нельзя устранить из теории множеств уже потому, что оно там существует и эффективно функционирует в течение длительного времени. Если понятие входит в центр теории и утверждается в этом центре в качестве действующего и необходимого для доказательства теорем, то этот факт является абсолютным обоснованием его логической корректности. Если бы доказательство указанной теоремы Кантора по каким-то причинам не было бы возможным вообще, а понятие несчетного множества было введено посредством аксиомы, то факт сосуществования всего комплекса понятий теории множеств в течение длительного времени уже доказывал бы безусловную корректность этого понятия и непротиворечивость теории множеств в целом. При оценке логической надежности математических теорий мы должны мыслить в соответствии с принципом Гегеля, согласно которому все действительное разумно. Теория, существующая длительное время и связанная со всеми теориями современной математики, не может содержать в себе существенных противоречий и не имеет шансов быть опровергнутой в своих исходных понятиях и принципах[19].

Можно сравнить проблему обоснования математики с проблемой построения максимально устойчивой кирпичной башни. Первая стратегия могла бы состоять здесь в том, чтобы установить идеально горизонтальное основание башни и возводить ее слой за слоем, внимательно следя за геометрической формой каждого кирпича и за идеальной равномерностью слоя цементного раствора, скрепляющего эти

слои. Это трудная стратегия, но, в принципе, она может обеспечить вертикальность башни до достаточно приличной ее высоты. Другая, более реальная стратегия состоит в том, чтобы заботясь насколько это возможно о горизонтальности фундамента и о форме кирпичей, одновременно корректировать процесс сооружения посредством наблюдения со стороны. Работа математиков начала XX века по обоснованию математических теорий очень сильно совпадает с первой стратегией: они были заняты преимущественно обсуждением аксиом и определений, они хотели найти идеальные формы, которые будучи положены в основание теории безусловно обеспечили бы ее логическое совершенство. Суть системного анализа состоит в том, чтобы обратить внимание на необходимость внешних критериев. Признавая важность логического анализа правил введения новых понятий, мы должны понимать, что наша основная борьба с парадоксами состоит не в усилении системы этих предохраняющих правил (эта система скорее всего бесконечна), а в выявлении сферы математического мышления, заведомо свободного от парадоксов на основе внешних (качественных) признаков, демонстрирующих системную зрелость теории.

Мы должны согласиться со скептиками в том, что противоречия неустранимы из содержательных математических теорий и что не существует никакого набора логических предосторожностей, гарантирующих непротиворечивость математических рассуждений. Анализ логики развития математической теории, однако, позволяет нам настаивать на существенной непротиворечивости всякой достаточно зрелой математической теории и на абсолютной непротиворечивости всей системы выводов, охватываемых стабильными аксиоматиками. Это последнее обстоятельство позволяет считать, что положение о строгости математики и о возможности ее абсолютного обоснования сохраняют смысл, несмотря на отсутствие логических критериев непротиворечивости для большинства математических теорий.

Основной недостаток философии математики XX века состоял в том, что при рассмотрении проблемы обоснования она не вышла за рамки логических представлений и заключения, достигнутые в этой узкой сфере, возвела в окончательное решение проблемы. Вместо того, чтобы понять естественную ограниченность логического анализа и посмотреть на те обстоятельства, которые остаются за его пределами, философы в своем большинстве занялись методологической интерпретацией логических теорем, превратив их в некоторую релятивистскую метафизику, отрицающую достоверность и надежность математического мышления. Между тем сам тот факт, что все противоречия, до сих пор появившиеся в математике, были чисто внешними и никогда не ниспровергали признанных теорий, говорит о наличии внутренних

механизмов гармонизации математического мышления, не описываемых в рамках логики. Ясно, что проблема обоснования математики не может быть решена без учета этих механизмов.

Системный взгляд на развитие математики приводит нас к философии математики, которая восстанавливает понимание математики как строгой науки. Методологическая иррациональность математики, состоящая в отсутствии алгоритмов устранения парадоксов и универсальных методов логического обоснования математических теорий, не противоречит с этой точки зрения идее абсолютной надежности признанных математических теорий. Ограниченность логических подходов к обоснованию математики рассматривается с этой точки зрения как только неадекватность этих подходов, но не как свидетельство ненадежности или неопределенности математического мышления.

Глава 4.
Обсуждение метода

Мы рассмотрели здесь проблему оснований математики с точки зрения законов становления математической теории. Мы выяснили, что само развитие математической теории неизбежно является и процессом ее обоснования и что этот процесс достигает естественного завершения в выявлении признанного аксиоматического представления теории. Представления о становлении математической теории как определенного рода жесткой понятийной системы могут рассматриваться в качестве особой программы обоснования математики, которая будет состоять в обосновании общезначимых системных признаков, позволяющих судить о логической зрелости математической теории.

Системный подход представляет собой эпистемологическое оправдание механизмов самообоснования, обоснование их существования и эффективности. Наша задача состояла в том, чтобы показать, что процессы самообоснования, протекающие в математической теории, обеспечивают в конечном итоге ее абсолютное обоснование в смысле непротиворечивости и что существуют вполне определенные и достаточные признаки логической зрелости математической теории.

Мы должны рассмотреть теперь ряд вопросов, связанных с корректностью такого рода чисто содержательного подхода к решению проблемы обоснования. Выдвигая на первый план содержательные признаки непротиворечивости и приписывая им критериальный характер, мы, очевидно, разрушаем один из основных принципов традиционного обосновательного мышления, состоящий в том, что подлинное обоснование математики может быть достигнуто только на основе методов самой математики. В состав системного обоснования должна входить, таким образом, некоторая методология, оправдывающая строгость содержательного рассуждения.

1. Абстрактность системного подхода

Системное обоснование математической теории несравненно более абстрактно, чем логическое. Все программы логического обоснования математики базируются на осуществлении той или иной редукции: либо это редукция содержания математики к содержанию арифметики, либо это редукция математики к логике, либо, наконец, редукция проблемы непротиворечивости теории к непротиворечивости содержательной метатеории. При системном рассуждении мы не предполагаем никакой редукции; мы рассматриваем здесь математическую теорию как совершенствующуюся систему и судим о ее непротиворечивости исходя исключительно из системных характеристик, с очевидностью принадлежащих ей как таковой. Системный подход, таким образом, не требует выделения какой-то части математики как более надежной или абсолютно надежной и, тем самым, он свободен от субъективизма, неизбежно связанного с таким выделением.

Рассматривая математическую теорию исключительно с точки зрения ее системной организации, мы полностью отвлекаемся от содержания ее понятий, а следовательно, и от содержательных классификаций, в которых фактически увязают все логические подходы. И для логицизма, и для интуиционизма, и для формализма является чрезвычайно важным различие между конечным и бесконечным: все эти программы фактически заняты тем, чтобы обосновать бесконечное на основе конечного, свести надежность теорий, трактующих о бесконечном, к теориям, определенным на конечном множестве объектов. В этом пункте заключается основное методологическое противоречие и неустранимый порок этих программ. Ставя задачей обосновать непротиворечивость математической теории, т. е. чисто структурное и безотносительное к содержанию свойство, они пытаются его обосновать, выдвигая на первый план различие между конечным и бесконечным, которое является сугубо содержательным и различным для различных теорий.

Гильберт хорошо понимал, что бесконечность в математике не более, чем символ, введенный через систему правил оперирования с ним, и что обоснование математической бесконечности не связано с раскрытием ее содержательного (метафизического) смысла, а предполагает лишь исследование совместности условий, посредством которых она вводится в теорию как определенного рода понятие. При таком подходе разница между конечным и бесконечным исчезает: то и другое лишь различные идеализации, введенные системой аксиом, а правомерность любого из этих понятий требует лишь обоснования совместности аксиом, безотносительно к содержанию заключенных в них понятий и к характеру интуиций, на основе которых они возникли.

Но начав с такой, несомненно, правильной методологической установки, Гильберт не нашел средства для обоснования формализованных систем, кроме содержательного метаязыкового рассуждения, где различие между конечным и бесконечным является определяющим.

Системный подход полностью абстрагируется от этого различия, рассматривая в качестве существенного момента математической теории только ее системную организацию и уровень этой организации. В данном контексте рассмотрения не имеет значения вопрос о содержательном смысле понятий и о типах определений, посредством которых они введены в теорию (конструктивно-неконструктивно, предикативно-непредикативно и т.д.). Важно лишь то, входит ли понятие в центр теории, санкционировано ли оно растущим кристаллом теории. Этим обеспечивается предельная универсальность подхода: мы говорим здесь не об арифметике, геометрии или теории множеств, а о всех теориях (дедуктивных структурах), достигших определенного уровня организации.

При системном подходе мы абстрагируемся также и от всех соображений о простоте и сложности конкретной теории. С генетической точки зрения и простые, и сложные теории могут находиться как в хорошо, так и в плохо организованном состоянии, и те, и другие неизбежно стремятся к предельному выявлению своей логической матрицы, т. е. к дедуктивному оформлению своей основной части, и те, и другие ориентированы на одни и те же типы корректных определений. Другими словами, свойства математической теории, из которых мы выводим ее непротиворечивость при методологическом подходе, совершенно не зависят от разделения теорий на простые и сложные в логическом отношении. Мы абстрагируемся от этого разделения как несущественного, не имеющего отношения к уровню системной организации теории, к завершенности ее аксиоматики и корректности системы ее внутренних определений. Классификация математических теорий по простоте и сложности не имеет прямого отношения к качеству их внутренней логической организации и, следовательно, несущественна для их обоснования как непротиворечивых конструкций.

При системном подходе мы полностью абстрагируемся от понятия истинности аксиом как соответствия какой-либо внешней реальности. Нам важна здесь лишь их внутренняя (фактуальная) истинность, выражающая их особое отношение к неразрушимому центру теории. Непротиворечивость системы аксиом выводится здесь не из ее внешней истинности, а исключительно из ее необходимости для исторически сложившегося центра теории. Неразрушимость и непротиворечивость центра математической теории берется здесь в качестве первичного факта, который, впрочем, может быть строго обоснован

на основе представлений о конечной определимости и завершенности математических понятий.

Системный подход, таким образом, несравненно более абстрактен, чем логический. Он оставляет в стороне ориентацию на метатеоретическое (логическое) доказательство непротиворечивости и ориентацию на рассмотрение свойств математической теории, которые для логического подхода представляются наиболее существенными. Это такие свойства как простота и сложность, конечность и бесконечность, редуцируемость к арифметике и т. п. Он абстрагируется также и от понятия онтологической истинности аксиом как заведомо недостаточного для прояснения факта непротиворечивости математического мышления в целом.

2. Конкретность системного подхода

В определенных отношениях, однако, системный подход более конкретен, чем логический, ибо он вводит в рассмотрение существенный момент бытия математической теории — внутреннюю логику ее становления. Логическое рассмотрение математической теории статично, оно рассматривает теорию как данную, вне ее истории и механизмов ее становления. При логическом рассмотрении система утверждений теории едина лишь в том, что она выразима на одном языке и поддается систематизации на едином основании. При всей строгости и кажущейся вооруженности логического подхода, он абстрактен в том отношении, что совершенно игнорирует сам генезис непротиворечивости теории в ее развитии. Как уже было сказано, самое успешное обоснование логической непротиворечивости лишь фиксирует качество, которое сложилось в становлении содержательной теории под влиянием некоторых реальных факторов. Обращая внимание на генезис непротиворечивости, мы переходим к анализу живой математики и начинаем рассматривать ее логические качества как результат необходимых тенденций в процессе формирования математических понятий. И именно такой подход позволяет схватить истоки согласованности математических суждений и исследовать условия, при которых математическую теорию можно считать свободной от противоречий.

Методологическая ситуация здесь может быть уподоблена введению в математику идеи предельного перехода. В настоящее время мы ясно осознаем тот факт, что многие соотношения между величинами могут быть строго доказаны только в том случае, если они будут представлены как результат некоторого процесса и как предел этого процесса. С содержательной точки зрения дифференцирование вводит в математику идею становления величин и открывает тем самым продуктивный подход к ранее неразрешимым проблемам. Системный

подход к проблеме обоснования математики в какой-то степени повторяет этот прием, ибо он представляет собой способ понимания логического статуса математической теории с точки зрения становления ее внутренних связей. Рассмотрение генезиса непротиворечивости при всей кажущейся его абстрактности является, в действительности, более адекватным путем обоснования непротиворечивости математических теорий, чем чисто логическое исследование законченных математических структур. На этом пути мы можем показать, что любая математическая теория, независимо от типа ее понятий, простоты и сложности аксиом, их истинности и т. п., в процессе естественной эволюции неизбежно достигает стадии, полностью свободной от противоречий. Мы выяснили, что эта эволюция неизбежно ведет к появлению системы аксиом, адекватной содержанию теории.

Системный подход переводит проблему обоснования математических теорий с абстрактно логического на методологический уровень. Мы открываем здесь внутритеоретические потоки истинности, которые определяют фактическую непротиворечивость теории, оставаясь неуловимыми для чисто логического анализа.

Различие логического и эпистемологического видения ситуации достаточно часто проявляется и в общей философии науки. С чисто логической точки зрения, к примеру, достаточно одного контрпримера для того, чтобы отвергнуть любую теорию как ложную. С эпистемологической точки зрения ясно, что один контрпример никогда не опровергает эффективной теории и что теория может благополучно существовать и функционировать при наличии множества очевидных контрпримеров. С чисто логической точки зрения ретротрансляция истинности невозможна, с методологической точки зрения при определенных условиях она может иметь место и т. п. Ясно, что здесь нет противоречия, а различие наших суждений объясняется различием подходов. Методологическая позиция ближе к действительности, поскольку она конкретнее и учитывает факторы, от которых абстрагируется чисто логическое рассмотрение. Системный подход к обоснованию математической теории, будучи, на первый взгляд, предельно абстрактным, в действительности устраняет существенную абстрактность логического рассмотрения тем, что он вводит в рассмотрение внутреннюю динамику математической теории, которая генетически определяет становление ее как непротиворечивой. Логический анализ обогащается и углубляется через анализ реальных ситуаций, определяющих становление теории. Это мы видим, в частности, при прояснении статуса противоречий в содержательной математической теории. С чисто логической точки зрения мы можем предполагать наличие скрытого противоречия в любом понятии, ибо сам по себе логический анализ не может обосновать противное. Системный анализ, однако, дает нам основание

утверждать, что в действительности все понятия, включенные в тело теории, являются корректными, т. е. абсолютно свободными от скрытых противоречий. Внесение системного анализа в проблему обоснования математики дает принципиально иное видение всей проблемы и, в конечном итоге, открывает путь к ее полному разрешению.

Логический, чисто структурный подход, реализованный в классических программах обоснования математики, не является ошибочным, но он заведомо ограничен вследствие своей абстрактности. При ориентации только на форму теории и на строго логическую редукцию математических теорий друг к другу, мы оставляем в стороне важнейшие моменты бытия теории, определяющие ее непротиворечивость. Логический подход не бесполезен и, как это ясно из предшествующего рассмотрения, имеет определенные перспективы. Однако все говорит о том, что он не может быть эффективным лишь для теорий, тесно связанных с аподиктически очевидной основой математического мышления, т. е. для сферы генетически первичных теорий.

В науке существуют решения, о которых можно сказать, что они не соответствуют статусу проблемы. Существует, к примеру, множество остроумных приемов нахождения максимумов и минимумов функций в рамках элементарной математики. Однако человек, сведующий в математике, понимает ограниченность этих методов и несоответствие их общему характеру проблемы. С системной точки зрения, логические программы обоснования математики — это только паллиативные подходы, связанные с конкретным математическим содержанием и не улавливающие в достаточной мере общего характера проблемы, который связан исключительно с дедуктивной структурой теорий и не зависит ни от каких собственно содержательных подразделений между ними. Логические подходы явно не достигают необходимого уровня абстрактности рассмотрения, который необходим для общей постановки и адекватного решения проблемы обоснования математики. С одной стороны, они перегружены информацией, не относящейся к делу, а с другой стороны, они не используют информации, связанной с самим существом проблемы. Правильный путь к решению проблемы обоснования математики будет открыт только тогда, когда будет осознана неадекватность чисто логического ее разрешения, т. е. тогда, когда в должной мере будет осознан гносеологический статус проблемы.

Понятно, что для начала XX века, когда математики и логики всецело находились под влиянием идеи формальной строгости, логические подходы были единственно приемлемыми. Попытка доказать непротиворечивость математической теории «философски», исходя из общей логики ее развития, показалась бы в то время абсурдной и совершенно неприемлемой вследствие своей нестрогости. Но в настоящее

время мы уже, по-видимому, близки к пониманию того, что обоснование математики как обоснование непротиворечивости основных математических теорий по большому счету является проблемой теории познания и, следовательно, должна решаться с осознанным привлечением средств, выходящих за рамки логического анализа.

3. Надежность содержательного рассуждения

Основная проблема, с которой мы здесь сталкиваемся, это проблема надежности содержательных рассуждений. Мы нуждаемся не просто в построении некоторого рассуждения, которое приводило бы нас к тезису о непротиворечивости, к примеру, аксиоматизированной теории множеств, но мы нуждаемся в таком рассуждении, в котором усматривалась бы гарантия того, что противоречия фактически не могут появиться в теориях, удовлетворяющим нашим критериям. Философское обсуждение проблемы непротиворечивости, претендующее на установление строгих критериев, представляется в этом отношении некоторым противоречием, проистекающим из статуса содержательного рассуждения как заведомо нестрогого. Многие согласятся с тем, что системные соображения полезны для того, чтобы убедиться в том, что глубокие противоречия в развитой математической теории — вещь маловероятная, но они будут возражать против того, чтобы считать их доказательством непротиворечивости в полном смысле этого слова и абсолютной гарантией теории от появления противоречий применительно к конкретной теории. Мы нуждаемся, таким образом, в прояснении степени достоверности содержательных доводов, основанных на рассмотрении эволюции математических теорий.

Мы выяснили, что законы логики находятся в одинаковом отношении ко всем сферам рассуждения и выводы юриста или философа в этом отношении не являются менее строгими, чем выводы математика. Умозаключение «Все люди смертны, Сократ — человек, следовательно, Сократ смертен» содержит в точности ту же логическую необходимость, что и умозаключение: «Все прямоугольники имеют две диагонали, квадрат — прямоугольник, следовательно, квадрат имеет две диагонали». Строгость математики проистекает не из строгости логики, а из точности определений, которая не имеет места за пределами математики. Определенность, с которой мы отделяем прямоугольник от фигур, не относящихся к классу прямоугольников, заведомо выше определенности, которая присутствует в отделении человека от существ, не являющихся человеком.

Это значит, что обосновательное рассуждение есть обоснование с точностью до истинности и определенности, заключенной в посылках. Надо признать, что традиционные программы были неуязвимыми в этом отношении. Логицисты исходили из надежности принципов логики, интуиционистское обоснование покоится на бесспорной истинности отношений натурального ряда, формалисты апеллировали к безупречности выводов элементарной математики. Все эти основания действительно обладают полной надежностью и этот факт может быть обоснован эпистемологически. Основная проблема системного анализа состоит в том, что содержательные допущения, относящиеся к развитию математической теории, как кажется, не могут быть поставлены рядом с твердыми посылками классических программ.

Эти сомнения, однако, неправомерны, они основаны на неявном предположении, что всякое содержательное рассуждение включает в себя индуктивный и эмпирический компонент и, по этой причине, не может обладать полной надежностью. В действительности это не так. Нетрудно видеть, что в рассуждениях о непротиворечивости, проведенных выше, задействованы только два типа суждений: логические и праксеологические. Когда мы утверждаем достаточность системы аксиом для известного круга теорем или указываем на тот факт, что аксиомы в математической теории выводимы из теорем на основе правила modus tollens, то мы указываем на факты логического порядка, с которыми согласится и математик, рассуждающий на уровне гильбертовского метаязыка. Однако когда мы утверждаем, что содержательное доказательство на определенном этапе совершенствования достигает полной надежности, что структура логических связей в теории стремится к однозначной определенности и фактически достигает ее или что стабильная аксиоматика неизбежно является и минимальной, то мы высказываем нечто такое, что не может быть отнесено к логике или к признанной метаматематике, фиксирующей непосредственно проверяемые свойства языка. Факт надежности доказательства (даже формализованного) логически доказать нельзя. Здесь мы имеем дело с констатацией праксеологической достоверности, которая в последнем счете опирается на предположение об абсолютной критериальности социума в ситуациях конечного комбинаторного поиска. Мы не можем логически доказать, что стабильная аксиоматика минимальна, но мы знаем, что это так, поскольку не допускаем, что избыточность посылок в элементарных допущениях не была бы замечена и устранена кем-то из математиков. Иными словами, мы допускаем безусловную практическую разрешимость некоторых простых проблем при отсутствии их достаточных логических аргументов на этот счет. Здесь мы, таким образом, имеем дело с достоверностями внелогического порядка. Наша задача состояла в том, чтобы показать, что это не эмпирические,

не психологические и не социокультурные достоверности и что они не менее надежны, чем сами математические теоремы.

Наряду с метаязыком, который описывает структуру формализованной теории, мы должны говорить об эпиязыке, который описывает необходимые принципы, относящиеся к содержательной математической теории. К числу таких принципов мы можем отнести обоснованные выше утверждения о том, что математическое суждение не опровергается в опыте, что математическое понятие обладает конечной определимостью, что математические доказательства неизбежно достигают полной строгости, что математическая теория в процессе своего развития приобретает окончательную структуру и т. п. Так как эти утверждения связаны с сущностью математической теории, они обладают полной надежностью и, вследствие этого, они могут выступать в качестве основы для эпистемологических выводов, обладающих абсолютной значимостью. Наряду с понятием строгого метаязыкового рассуждения мы вправе говорить о строгом эпиязыковом рассуждении, которое наряду с фактологическими и собственно логическими суждениями использует также и суждения праксеологические, обладающие предельной достоверностью. Рассуждения, опирающиеся на логические и праксеологические посылки, в действительности, являются не менее надежными, чем математические и метаматематические рассуждения, основанные на аподиктической очевидности. Эффективность эпиязыка обусловлена тем, что он содержит в себе систему неиндуктивных утверждений, достаточную для обоснования критериев непротиворечивости для содержательной математической теории.

Одним из предрассудков современной философии математики является убеждение, состоящее в том, что содержательные доводы не могут претендовать на доказательство утверждений, имеющих строгую логическую формулировку, каким является утверждение о непротиворечивости математической теории. Непротиворечивость понимается как сугубо логический факт, который может быть доказан только в рамках собственно логических рассуждений или не может быть доказана вообще.

Это, однако, заблуждение и оно опровергается уже тем фактом, что в действительности в практике методологического мышления мы постоянно прибегаем к обоснованию логических истин на основе эпистемологических соображений. Как уже говорилось, мы не можем обосновать утверждение: «Высказывание 2 + 2 = 4 — неопровержимо на основе фактов» в рамках строгой логики. Поскольку речь идет здесь об опровержении математического утверждения, то можно было бы предположить, что обоснование этого утверждения, поскольку оно сформулировано в логических понятиях, может осуществляться

только в рамках собственно логической аргументации. В действительности, однако, это утверждение, как и бесчисленное количество аналогичных утверждений, получают свое полное обоснование на уровне эпистемологических соображений, а именно, на основе положений, относящихся к статусу математических объектов и к условиям познавательной операции, которую мы называем опровержением математического утверждения. Если понять утверждение «2 + 2 = 4» как констатацию идеализированных представлений о предметности, то его неопровержимость вытекает из того простого факта, что идеализированные схемы, лежащие в основании всякой систематизации опыта, не могут корректироваться на основе опыта. Такого рода эпистемологические доводы являются внелогическими и, однако, доказательными и безусловно гарантирующими невозможность опровержения.

С той же ситуацией мы встречаемся и в том случае, когда хотим обосновать надежность некоторого признанного доказательства. Поскольку понятие надежности определяется в логических терминах (как невозможность контрпримеров), то естественно было бы думать, что факт надежности-ненадежности доказательства в конкретном случае может обосновываться исключительно на основе некоторого собственно логического анализа доказательства. Однако, как было показано выше, логика, устанавливая правильность доказательства относительно некоторых посылок, ничего не может сказать нам о его надежности. Эта последняя характеристика доказательства, несмотря на то, что она допускает точное определение в логических терминах, допускает лишь эпистемологическое обоснование, основанное на допущениях о природе очевидностей, лежащих в основе доказательного рассуждения. Эпистемологическое обоснование является, несомненно надежным, ибо оно показывает беспочвенность допущений о возможном опровержении признанных доказательств на основе логического анализа или контрпримеров.

Обоснование математической теории в эпиязыке законно в той же мере, как и указанные эпистемологические рассуждения, и по своей достоверности оно совершенно равнозначно с достоверностью наших умозаключений о неопровержимости в опыте простых арифметических равенств или о неревизуемости признанных элементарных доказательств. Все эти заключения восходят к констатации непреложных логических и эпистемологических достоверностей, которые не могут быть поставлены под сомнение. Содержательный эпиязык, как и содержательный метаязык, может быть источником предельно надежных суждений о структуре математической теории. К сказанному можно добавить то простое соображение, что любое строгое обоснование по необходимости опирается на некоторые подразделения и ограничения, истинные с точки зрения содержательного анализа. В теории

строгости обосновательного рассуждения мы должны исходить не из разделения формального и содержательного, а из разделения истинного и проблематичного. Содержательное рассуждение, несомненно, может быть предельно надежным.

Формалистская философия математики, выросшая как отрицание некритической интуитивной манеры математического рассуждения, возвела в культ знаковую форму и правила оперирования со знаками. В определенном отношении это был прогресс. Достижения чисто логического анализа математики велики и никогда не будут перечеркнуты. Но эта философия утвердила вместе с тем и целую систему ложных верований. Всякое содержательное мышление стало рассматриваться как не обладающее полной достоверностью. Формализация стала пониматься как единственный способ окончательной санкции какого-либо математического результата.

Мы должны устранить это заблуждение. Мы можем утверждать, что существуют эпистемологические соображения, являющиеся предельно достоверными и существует эпиязык, который может быть основой абсолютного обоснования логических характеристик математической теории. Иными словами, мы должны признать существование неформальных, не относящихся к метаязыку в его строгом понимании, и вместе с тем совершенно достоверных рассуждений, ведущих к полному обоснованию математического знания.

4. Об определенности критерия стабильности

Другая трудность, которая здесь неизбежно возникает, состоит в понимании стабильности аксиом как критерия непротиворечивости содержательно аксиоматизированной математической теории. В отличие от конструктивного или логического критериев этот критерий представляется неоднозначным и мало приемлемым для строгого решения вопроса в конкретных случаях.

Мы рассмотрели выше два критерия, определяющие корректность математического рассуждения. Это аподиктическая очевидность шагов доказательства как критерий его завершенности и аподиктическая очевидность аксиом как критерий их логической совместности. Законность первого критерия не вызывает особых возражений. В практике доказательств мы опираемся на схемы умозаключений как непосредственно данные и в большинстве случаев не подвергаем сомнению выводы, полученные при точном следовании этим схемам. Восприятие необходимости всех шагов доказательства служит критерием его полной корректности или завершенности. Этот критерий является простым в том смысле, что самоочевидность доказательства

во всех его шагах дана нам как непосредственный и общезначимый факт, который сам по себе не может быть поставлен под сомнение. Теоретическое обоснование этого критерия — это обоснование аподиктической очевидности как необходимого качества первичных математических идеализаций.

Критерий логической совместности аксиом является более трудным для восприятия. В принципе можно представить себе систему самоочевидных истин, которые при более детальном анализе могут оказаться несовместимыми. Такие случаи имели место и в математике: мы можем вспомнить в этой связи открытие Расселом противоречия в арифметике Фреге, которая не содержала никаких предпосылок, не обладающих непосредственной очевидностью. Примеры такого рода, однако, не отвергают законности нашего критерия. Анализ парадокса Рассела показывает, что это не противоречие между принципами арифметики или между логикой и арифметикой, а противоречие между аподиктически очевидными принципами, с одной стороны, и предложенной системой их дедуктивного представления, с другой. Мы имеем основания предполагать, что столкновение аподиктически очевидных принципов самих по себе невозможно и что математическая теория, все аксиомы которой обладают свойством аподиктической очевидности, является абсолютно непротиворечивой. Теоретическое обоснование этого критерия может состоять в том, что мы имеем здесь дело с принципами, образующими фундамент мышления, его нормативную основу, которая по самому своему месту в познании обладает наивысшей степенью истинности, а следовательно и максимальной гарантией непротиворечивости. Мы выводим, таким образом, абсолютную непротиворечивость арифметики и евклидовой геометрии из факта онтологической истинности их аксиом.

Понимание стабильности аксиоматики в качестве критерия ее непротиворечивости может вызвать затруднение вследствие того, что стабильность в отличие от аподиктической очевидности не дана нам в виде единовременного непреложного факта сознания. Понятие стабильности существенно эмпирично, оно связано с временем, причем с неопределенным временем. Прекращение потока контрпримеров в основных утверждениях теории может быть истолковано и как свидетельство полной корректности ее оснований и как временный перерыв, обусловленный конкретным этапом ее развития. Эта ситуация представляется неразрешимой и сам критерий — принципиально неопределенным.

Такое понимание, однако, было бы поверхностным. Исследуя историческое становление математической теории, мы выяснили, что оно идет за счет расширения внутреннего ядра теории — неразрушимого

центра, который представляет собой завершенный «кроссворд» доказательств, неуязвимый для критики при дальнейшем расширении и совершенствовании теории. Мы выяснили также, что лишь конечное число теорем, относящихся к этому центру, необходимо для однозначного определения аксиоматики и аксиоматического представления теории в целом. Но это значит, что на определенном уровне развития любая формальная теория неизбежно выделяет аксиоматику, обладающую стабильностью и абсолютной непротиворечивостью. Теоретическая обоснованность критерия стабильности следует из того, что появление непротиворечивой аксиоматики неизбежно для любой теории и первым ее признаком по самому существу дела будет ее стабильность в смысле отсутствия парадоксов и контрпримеров, указывающих на необходимость расширения или корректировки ее принципов. Это значит, что с теоретической точки зрения критерий стабильности несомненно верен и нетрудно видеть также, что это единственный критерий, однозначно продиктованный понятием непротиворечивости. Вся его некачественность имеет практический характер и состоит в неопределенности его применения к конкретным случаям: некий скептик всегда будет иметь возможность утверждать, что отсутствие противоречий в некоторой системе аксиом в течение столетия не есть еще доказательство ее непротиворечивости.

Скептик здесь заблуждается. При рассмотрении математического доказательства мы выяснили, что проверка законченности доказательства осуществляется не только проверкой самоочевидности всех его шагов, но и его включение в центр теории, в «кроссворд» доказательств. Этот дополнительный факт, если он имеет место, показывает, что наше мнение о надежности доказательства уже не содержит в себе ничего субъективного. Аналогичные косвенные свидетельства имеются и для системы аксиом. Становящаяся теория неизбежно входит в связи с другими теориями, погружается в центр математики. Это обстоятельство, если оно имеет место, не оставляет сомнений в том, что наступившая стабилизация системы аксиом — не временный перерыв в ее движении, не следствие недостатка средств анализа, а следствие сформировавшегося неразрушимого центра теории.

Существуют и многие другие признаки зрелой теории, указывающие на окончательный характер стабилизации. Здесь мы опять приходим к признанию того положения, что проблема, неразрешимая в рамках однозначных теоретических критериев, разрешается практически. Практика показывает, что нормально развивающаяся и функционирующая аксиоматизированная теория может потребовать для своего полного утверждения десять, максимум 20 лет, но никоим образом не период величиной в столетие. Это значит, что критерий стабильности, несмотря на некоторую неопределенность вынесения суждения, вполне

достаточен для конкретного случая, к примеру, для решения вопроса о непротиворечивости таких хорошо аксиоматизированных теорий, как теория множеств, топология и теория вероятностей и т. п. Но это значит, что он достаточен для понимания основной части современной математики как абсолютно непротиворечивой. Скептические сомнения здесь всегда могут иметь место, но они не могут иметь реального подтверждения в практике математического мышления. В случае зрелой теории эти сомнения имеют чисто формальный характер, они имеют не больше оснований, чем допущение о том, что все человечество до сих пор ошибалось, считая сумму чисел 12345 и 54321 равной числу 66666. Задача философии математики и философии науки состоит в том, чтобы выработать противоядие против такого рода пустого скептицизма, препятствующему выявлению последних оснований мышления.

Рассмотрение механизмов стабилизации позволяет заключить, что системный анализ дает нам не только абстрактное теоретическое понимание непротиворечивости математического мышления, но и общезначимые критерии этой непротиворечивости, обладающие полной надежностью.

Заключение

Проблема обоснования математики в современной форме была поставлена в начале XX века в связи с появлением парадоксов в логике и теории множеств и содержала в себе две основные задачи: в узком смысле она состояла в том, чтобы найти способ избавиться от имеющихся парадоксов, а в более широком — найти общие принципы построения математических теорий, гарантирующие их непротиворечивость.

В первом плане проблему можно считать решенной, поскольку в рамках логического анализа доказано, что известные типы парадоксов не могут появиться в стандартных аксиоматических представлениях арифметики и теории множеств. В широком смысле проблема не получила пока разрешения и в настоящее время становится все более понятным, что ее решение лежит за пределами чисто логического подхода. Проведенные здесь рассуждения являются попыткой прояснения возможностей внелогического анализа проблемы обоснования.

Программы обоснования математики, выдвинутые в начале XX века, не имели сколько-нибудь обстоятельного гносеологического оправдания своих установок. Хотя Фреге и Рассел много говорили о логике как о необходимой основе мышления, о ее связи с универсалиями и т. п., они не дали гносеологического анализа логики, позволяющего поддержать их основной тезис о сводимости математики к логике. Этот тезис, идущий от Лейбница, они разрабатывали исключительно в математическом плане, пытаясь продемонстрировать убедительные технические способы его реализации. Это в полной мере относится и к другим программам. Интуиционисты не вникали особо в анализ особенностей математической интуиции, точно так же, как формалисты не исследовали должным образом понятие априорной части математики.

Это обстоятельство объясняется многими факторами. Это прежде всего трудность собственно философского анализа и естественное нежелание математиков входить в абстрактную сферу рассуждений, имеющую свои подходы и критерии. В какой-то мере это объяснялось и неприязнью к метафизике, распространенной в то время и среди самих философов. Главная же причина, по-видимому, состояла в том, что авторы программ, еще не видели всей сложности вопроса и надеялись решить ее при минимальных отступлениях от строгих методов

математики. Необходимые методологические допущения типа того, что конструктивное доказательство несомненно достоверно, а геометрическая очевидность ненадежна, были взяты как истины, подтвержденные практикой и не вызывающие сомнения. Авторы программ полагали, что такого рода простые допущения в принципе достаточны для решения внелогических проблем, связанных с оправданием стратегии обоснования.

Прямым следствием такого, сугубо математического подхода к проблеме обоснования было то, что все подходы к ее решению были сведены к реализации трех программ — логицизма, интуиционизма и формализма, которые представляли собой, в сущности, три различных способа редукции содержания математики к его аподиктически очевидной основе. Признание несостоятельности всех этих программ привело к выводу о невозможности обоснования математики и к появлению устойчивого скептицизма в отношении строгости математического мышления вообще. Основной предпосылкой скептицизма в современной философии математики является тезис: «Если математику нельзя обосновать в самой математике, то ее нельзя обосновать вообще». Этот тезис трудно оспорить, поскольку идея обоснования математической строгости, методами, не обладающими полной строгостью, представляется абсурдной.

Современное состояние философии математики существенно определено этой скептической идеей, порожденной провалом попыток обоснования математики методами самой математики. Задача строгого обоснования объявляется теперь иллюзией и пережитком априоризма. Выдвигается положение о методологическом родстве математики и опытных наук, которое не оставляет места для традиционного представления о математике как о строгой и абсолютно доказательной науке.

Проведенное здесь рассмотрение вопроса было направлено на то, чтобы показать необоснованность такого рода общих выводов. Слабость первоначальных логических подходов, в действительности, не закрывает возможности построения новых логических программ и не исключает эффективных подходов, основанных на принципиально иных доводах. Провал прямолинейных логических редукций не является поводом для скептицизма, а требует перехода к более глубокому фундаментализму, основанному на идее онтологической истинности.

Мы выяснили, что генетическим фундаментом математики является не опыт, не конвенция и не логика, а аподиктическая очевидность, порожденная деятельностной ориентацией сознания. Исходные математические структуры однозначно определены категориальным видением мира и не подлежат корректировке на основе опыта. Праксеологический анализ оправдывает установки традиционного априоризма,

связывающего исходные математические представления с формами мышления. Он, однако, рассматривает эти формы не как имманентные структуры сознания, а как представления, порожденные деятельностью, и, таким образом, как специфическую картину реальности, задаваемую процессом деятельности. Исходные математические теории получают при таком подходе реальный статус как формальные структуры, коррелятивные универсальной онтологии.

Праксеологический анализ указывает нам на три реальных подхода к обоснованию математического знания: онтологический, логико-онтологический и системный. Онтологический подход состоит в непосредственном заключении о непротиворечивости математической теории из онтологической истинности ее принципов. Мы не можем обосновать математическую теорию каким-либо более надежным способом, чем через прояснение онтологической природы ее принципов. Арифметика и евклидова геометрия, с этой точки зрения, не нуждаются в каком-либо опосредованном обосновании своей непротиворечивости, поскольку мы вправе считать их исходные принципы коррелятивными предметной онтологии. Никакая программа обоснования математики не может быть построена без опоры на непосредственную очевидность, без принятия некоторых теорий как обоснованных вследствие несомненной истинности их принципов. В философском плане это наиболее ответственный момент, ибо он требует прояснения понятия математической истинности и реабилитации математического априоризма. Наша задача состояла здесь в обосновании теории априорного знания и понятия онтологической истинности, которое позволяет дать рациональное определение сферы априорной математики.

Логико-онтологический подход состоит в усилении традиционных программ обоснования через рационализацию их гносеологических допущений. Программы обоснования математики, выдвинутых в начале XX века не имели достаточного обоснования своих установок. Эти установки проистекали скорее из пристрастий отдельных школ математиков, чем из анализа природы математического мышления. Все эти программы были построены как гипотезы ad hoc и все они потерпели поражение вследствие неоправданных запретов на исходные принципы и логику редукции. В настоящее время можно с полной определенностью утверждать, что неудача этих программ была обусловлена не столько сложностью проблемы, сколько плохой философией, точнее, отсутствием разумной философии, способной умерить критицизм в определении обосновательного слоя и логики. Наша задача состояла здесь в устранении необоснованных ограничений на основе анализа природы исходных логических и математических принципов.

Праксеологический анализ позволяет отказаться от подозрений в отношении классической логики, реабилитировать геометрическую очевидность и признать в качестве надежных содержательные рассуждения, протекающие в рамках аподиктической очевидности. Мы обосновываем истинность существенно трансфинитных положений, таких, как аксиома выбора и аксиома бесконечности, и снимаем проблему логического обоснования арифметики вследствие онтологической истинности ее исходных принципов. Мы оправдываем, наконец, евклидианское обоснование как необходимое для математики, обусловленное природой математического метода. В настоящее время мы не можем строго очертить истинных границ логико-онтологического обоснования математики, но совершенно очевидно, что эти границы находятся не там, где они поставлены существующими метатеоретическими критериями. Имеются основания предполагать, что все основные теории современной математики, включая и теорию множеств, в действительности, могут быть обоснованы в рамках этого подхода.

Системный подход проистекает из понимания эволюции математических структур и из эквифинального характера этой эволюции. Мы исследуем здесь математические теории не как готовые структуры, но как развивающиеся системы, совершенствующие свою внутреннюю организацию. Мы строим здесь методологическое рассуждение, показывающее неизбежность зрелого состояния теории, связанного с полной надежностью ее основ и пытаемся выявить общезначимые признаки этого состояния. Это путь к обоснованию математического фундаментализма на основе идеи развития.

Представляется удивительным, что затратив массу усилий на прояснение оснований математики, философы упустили из виду естественный процесс внутреннего вызревания математических теорий, который демонстрируется всей историей математики и каждой теорией в отдельности. Причина этого явления заключается, несомненно, в ложном понимании содержательного математического рассуждения как неизбежно связанного с опытом и аналогиями. И эмпиризм, и формализм всегда отождествляли математическую содержательность с эмпирической и отказывали содержательному математическому рассуждению в полной доказательности. Логическая парадигма не могла рассматривать эволюционные аргументы как имеющие обосновательный характер.

Анализ логики становления математической теории позволяет обосновать неизбежность ее стабилизации и оседания в абсолютно непротиворечивой форме. Мы обосновываем здесь математическую теорию не на основе истинности ее принципов, а на основе ее внутренней системности, исходя из идеи существования неразрушимого ядра теории и стабильности системы аксиом как части этого ядра.

Если мы признаем, что каждое математическое доказательство достигает абсолютной надежности, каждая математическая теория неизбежно достигает выявления абсолютно надежной аксиоматики, и что возможны общезначимые критерии, позволяющие утверждать эту надежность в конкретных случаях, то проблему обоснования математики можно считать решенной в смысле полной реабилитации математической строгости и устранения всякого скептицизма в отношении фактической надежности его оснований. Проблема обоснования математики разрешима в том смысле, что мы можем указать общезначимые характеристики зрелости математической теории и, следовательно, заключить о невозможности появления в ней противоречий, разрушающих ее основы и признанные выводы. Это, конечно, не то однозначно-алгоритмическое решение, которое предполагалось получить в рамках логических программ, но оно, тем не менее, является достаточным как с точки зрения общего понимания надежности математического метода, так и с точки зрения практики.

Было бы ошибкой понимать системный анализ как некоторого рода паллиативный подход, приемлемый исключительно вследствие невозможности логического анализа. В действительности, это наиболее адекватный подход, основанный на универсальных качествах математической теории, позволяющий понять истоки непротиворечивости математических теорий и разрешимость проблемы в целом. Он открывает принципиально новую перспективу, ибо содержит в себе понимание того обстоятельства, что наши усилия должны быть направлены не на поиски принципов построения теорий, предохраняющих нас от противоречий, а на установление общезначимых критериев, свидетельствующих об их логической зрелости. В действительности, только это второе направление исследования открывает нам путь к реальному и окончательному обоснованию математических теорий.

Системный подход в определенном смысле устраняет необходимость логического обоснования. Радикальные эмпирики отказывались от логического обоснования вследствие нестрогости всякого доказательства, прагматики выдвигали эту идею, исходя из предположения, что наличие противоречий не лишает математику образа презентабельной науки[1]. В системном контексте, однако, это положение имеет другой смысл. Математика в принципе не нуждается в логическом обосновании не потому, что оно невозможно, и не потому, что в нем нет необходимости, а потому, что мы можем рассматривать само развитие математической теории как постоянный процесс ее обоснования, имеющий гарантированный результат. Системный анализ позволяет утверждать, что любая математическая теория достигает стадии абсолютной непротиворечивости.

Этот тезис, конечно, не обесценивает собственно логического анализа математики. Логические исследования по обоснованию математических теорий развиваются вместе с развитием и усложнением математики, и несомненно, что это будет продолжаться и впредь. Мы должны постоянно углублять понимание математического метода, языка, структуры доказательств и определений и решать многие другие проблемы, которые не могут быть поставлены на уровне общих содержательных характеристик математического знания. Достижения математической логики, как уже говорилось, вносят радикальные изменения и в саму философию математики. Методологический подход заменяет логический при рассмотрении теорий, имеющих аподиктически очевидные основания или зрелых теорий, историческое развитие которых доказало адекватность и устойчивость лежащих в их основе принципов.

Методологическое рассмотрение является более универсальным, ибо оно применимо и в тех случаях, где собственно логический анализ теряет силу. В конечном итоге, мы должны признать ограниченность логических средств обоснования математики и признать методологические подходы в качестве единственно универсальных и соразмерных с математическим мышлением в целом. Прояснение этого обстоятельства позволяет понять проблему обоснования математики как преимущественно философскую и методологическую проблему.

Любая теоретическая система обосновывает сама себя в процессе своего развития и применения. Особенность математической теории состоит в том, что она обосновывает себя абсолютно, она достигает внутренней организации, не подлежащей изменению и обладающей полной логической совместностью. Это значит, что математика всегда была и остается абсолютно строгой наукой. Это обстоятельство является глубинной основой обычного доверия ученых к математическим методам, а также известного равнодушия математиков к обосновательным проблемам. Они исходят из того, что парадоксы не затрагивают глубинных слоев математической теории и не могут стать опасными для ее основных утверждений. Системное рассмотрение оправдывает эту стихийную веру как проистекающую из сущностных качеств математического мышления.

В этом плане становится предельно ясной несостоятельность понимания парадоксов как кризиса, угрожающего самому существованию математики, которое имело место в начале XX века. Фреге, Рассел, Пуанкаре, Гильберт говорили о парадоксах как подрывающих само основание математической науки. В настоящее время мало кто понимает ситуацию столь драматически: сообщество математиков стихийно перешло к более спокойному ее восприятию. Системный анализ

дает теоретическое обоснование несостоятельности первоначального страха перед парадоксами. Мы выяснили, что все противоречия зрелой математической теории относятся к ее периферии, к точкам ее роста и в принципе не могут сказаться на ее признанных утверждениях. С этой точки зрения в значительной мере теряет смысл и само понятие кризиса в основаниях математики. Это понятие в настоящее время имеет преимущественно исторический смысл как отражающее особое восприятие парадоксов в начале XX века.

Изложенное понимание оснований математического мышления устраняет все типы математического релятивизма. Мы безусловно отвергаем эмпирический скептицизм, проистекающий из отождествления математических и эмпирических понятий. Регресс в бесконечность — ложная идея, некритически перенесенная в философию математики из теории эмпирического знания. В действительности, каждая математическая теория имеет неразрушимый центр, обладающий абсолютной корректностью содержащихся в нем понятий. Развитие математической теории представляет собой лишь расширение этого центра, но не бесконечное уточнение всего множества своих понятий. Являются несостоятельными, конечно, и все формы логического и психологического релятивизма. Психологическая относительность, реально имеющая место в наших понятиях и оценках, не противоречит интерсубъективности и абсолютности познавательных норм, определяющих мышление, и абсолютности структур, определенных на основе онтологии. Понимание глубинной связи первичных математических идеализаций с универсальными категориями мышления устраняет всякую возможность их психологической релятивизации.

Решение проблемы обоснования математики в XX веке было существенно затруднено слабостью философии, отсутствием должного гносеологического анализа природы математических идеализаций. Надо признать тот факт, что ни одно из философских учений не выработало основы для понимания сущности математического мышления и рациональных методологических установок для понимания ситуации в основаниях математики. Это относится прежде всего к эмпирической философии математики, которая никогда не имела ясного представления о действительной основе первичных математических идеализаций. Эмпирическая трактовка математических понятий ставит их рядом с физическими, допускает расплывчатость их границ, неправомерно усложняет математическое знание, превращая его из конечного в бесконечное, из абсолютно надежного в неопределенное и относительно надежное. Проблема обоснования математики при этом теряет свой специфический смысл, превращаясь в систематизацию относительных истин, приемлемую для любого типа знания.

Эмпирическая философия не объясняет простых фактов, противоречащих ее методологическим допущениям. Если математические доказательства действительно никогда не освобождаются от скрытых лемм, то почему мы не видим постоянного распухания условий теорем в процессе совершенствования теории? Если основания никогда не окончательны, то почему никакие парадоксы не приводят к опровержению признанных аксиоматик и достигнутых результатов в этих теориях? Почему, наконец, мы не имеем теорем, которые доказывались и считались истинными в древности и которые мы не можем принять в качестве таковых сегодня? Задача философии в отношении отдельной науки должна состоять прежде всего в понимании такого рода несомненных методологических фактов. Основная слабость эмпирической философии состоит в том, что она не проясняет специфики математики и не приближается к решению этой задачи.

Формалистская концепция математики делает шаг вперед, отказываясь рассматривать опыт как источник математических истин. Однако, пытаясь объяснить математику только из ее внутреннего строения, отказываясь от апелляции к какой-либо реальности, она неизбежно попадает в методологический тупик, ибо не может объяснить ни надежности логики, ни устойчивости истин элементарной математики без обращения к идее конвенции. Эмпирицистский релятивизм заменяется релятивизмом прагматическим, столь же мало совместимым с задачей абсолютного обоснования. Гильберт спасает положение, принимая тезис об априорности метатеории, но вследствие этого вся программа приобретает новую неопределенность, проистекающую из неопределенности границ априорного знания.

Априористская философия ближе к пониманию природы математики, ибо она с самого начала подчеркивает принципиальное различие математических и опытных наук. Современный априоризм, однако, также крайне неудовлетворителен как с точки зрения своего внутреннего обоснования, так и с точки зрения своей эффективности для методологии науки. Основной его недостаток состоит в отсутствии идеи деятельности. Он не понимает практической детерминации универсальных структур сознания, не осознает в должной мере того обстоятельства, что система высших идеализаций сознания определена телеологией мышления, что мир предметов и предметных разграничений создается не опытом и не внутренней активностью сознания, а процессом практического изменения реальности и что именно эта практическая инстанция обеспечивает восприятие мира как трансцендентного бытия и задает структуры мышления, имеющие безусловное значение для всякого опыта. Эта абстрактная метафизика является

для нас существенной, ибо мы не можем понять истоков математических идеализаций, их объективности и реальности без уяснения их связи с системой категорий и с нормативной основой мышления.

Рационалистическая философия не выработала пока формы априоризма, приемлемой для понимания математики. Кант, связав математические истины с категориями пространства и времени, указал, в принципе, верное направление мышления. Но философия Канта не выявляет природы категорий, а следовательно, и истинной сферы априорного знания. Гуссерль существенно ослабил позицию Канта, поставив априорные формы мышления в зависимость от первичных ассоциаций опыта и внутренних операций мышления, не поддающихся ясному определению. Мы должны исходить из того, что универсальные формы мышления не могут быть обоснованы без выхода за пределы самого мышления, без анализа его универсальных целевых установок. Кантовская теория априорного знания несовершенна, но возвращение к интроспективному идеализму Декарта является отступлением от истины и, в конечном итоге, дискредитацией самой идеи априорного знания.

Можно согласиться с критиками априористской философии в том, что она не показала себя действенной основой для разрешения обосновательных трудностей в математике и даже с тем положением, что априористская теория познания в течение последних двух столетий демонстрирует скорее постоянный регрессивный сдвиг, чем изменения, продуктивные для методологии науки[2]. И тем не менее, было бы совершенно неразумным делать отсюда вывод об опровержении априоризма. Проведенный анализ показывает, что дело не в ложности априористской философии, а лишь в ее неспособности прояснить свои основы. Мы не можем уйти от признания априоризма по той простой причине, что мы должны объяснить факт существования логических и математических истин как инвариантных структур сознания. Было бы абсурдным искать это объяснение на основе опыта или конвенции.

Первые программы обоснования математики были обречены на неудачу вследствие слабости методологических и философских предпосылок, из которых они исходили. Математики начала XX века с полным доверием относились к тому, что геометрическая очевидность ненадежна, что классическая логика ограничена, что содержательное рассуждение, использующее слова обыденного языка, не может быть надежным. Они соглашались с тем, что математические истины аналитичны, что конечная математика более достоверна, чем математика, связанная с понятием бесконечности, и что надежное обоснование математики возможно только как конструктивное или финитное. Если в настоящее время мы несколько продвинулись вперед и в достаточной

степени осознали несостоятельность всех этих установок, то это означает, что проблема обоснования математики может быть поставлена сегодня на некоторой более глубокой основе. Изложенные доводы были нацелены на то, чтобы наметить контуры нового понимания проблемы, не связанного с первоначальными предрассудками.

С достаточной определенностью можно предполагать, что существенный сдвиг в решении проблемы обоснования зависит сегодня не от достижений в логике и в анализе аксиоматических систем, а прежде всего от углубления философии математики, от прояснения наших представлений о природе математического мышления и о допустимых походах к обоснованию математических теорий. Необходима новая философия математики, проясняющая особый статус математического мышления и истоки его надежности. Здесь возможны существенно различные подходы. Представляется, однако, несомненным, что исходным пунктом этой новой философии должно быть понимание категориальной основы математических идеализаций и логики.

Литература и примечания

Введение

1. See: Husserl E. The Origin of Geometry // In: Husserl E. The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology. Northwestern University Press, Evanston, 1970 P. 377.

2. Grassmann H. Die Ausdehnunglehre. Gesammelte Mathematische und Physicalische Werke, Band 1, Theil 1, Leipzig, 1894. S. 22.

3. См.: Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. М., 1998. С. 461–462.

4. Кант И. Критика чистого разума. Т. 3. М., 1964. С. 84.

Часть первая

1. Декарт Р. Правила для руководства ума // Декарт Р. Сочинения в 2-х томах. Т. 1, М., 1989. С. 79.

2. См.: Постников М.М. Теорема Ферма. М.: Наука, 1982. С. 11–12.

3. Сфера концептуальной наглядности существенно зависит от образов, принятых в культуре и технике эпохи. В настоящее время возможности внутренней наглядности в математике существенно раздвигаются на основе компьютерной графики. См.: А.А. Зенкин. Когнитивная компьютерная графика и теория чисел. М., 1991.

4. См.: Больцано Б. Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения // В кн.: Э. Кольман. Б. Больцано. М., 1975. С. 171–172.

5. См.: Brouwer L.E.J. Intuitionism and formalism // In: Brouwer L.E.J. Collected works. Vol. 1. Amsterdam, 1975. P. 125.

6. См., к примеру: Хан Г. Кризис интуиции в математике // В кн.: Математики о математике. М., 1972. С. 38–52.

7. Вывод формул, относящихся к примеру, см.: Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3, М., 1969. С. 248–251.

8. См.: Frege G. Posthumous Writings. The University Chicago Press. 1979. PP. 273–279.

9. Кант И. Критика чистого разума. Т. 3. С. 184.

10. См.: Рассел Б. О новейших исследованиях в основаниях математики // Сб. Новые идеи в математике. Сб. 1. Спб., 1913.

11. Ф.Ф Линде в предисловии к переводу книги Л. Кутюра справедливо указывал на то обстоятельство, что всякий вывод в логицистской системе

нуждается в аксиоме «P. есть частное значение функции F», где P — исходная математическая формула, F — применимое к ней логическое правило. (См.: Кутюра Л. Философские принципы математики. СПб., 1913. С. VI.) Очевидно, что интуиция подведения под правило имеет место в любом выводе в соответствии с правилом.

12. Н.М. Нагорный полагает, что компьютерные доказательства, не допускающие записи в виде текста и традиционной проверки, могут быть эвристически полезными, но ни при каких обстоятельствах не могут претендовать на окончательное решение проблемы. Относительно доказательства теоремы о четырех красках, которое было предложено Аппелем и Хакеном, Нагорный пишет: «Для меня лично из работы Апеля и Хакена вытекает только то, что... я теперь буду считать малоперспективным поиск контрпримеров к теореме четырех красок. Но решения проблемы, так как я его понимаю, у авторов нет. И на этом пути, как мне кажется, его и не может быть. Следует, может быть, добавить, что повторный счет может только повысить нашу уверенность, но в принципиальном отношении он не дает ничего нового». (Цитируется по: Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. М.: Наука, 1985. С. 103–104.) Как мы видим, Нагорный убежден, что повторение проверок не может перевести доказательство из класса вероятных в класс абсолютно надежных. Есть основания думать, что это рассуждение, будучи верным для независимых событий, не проходит для процесса подтверждения математических истин, которое имеет системой характер. В математическом рассуждении мы постоянно переводим относительное в абсолютное посредством конечного (хотя и неопределенного) числа проверок.

13. Кант И. Критика чистого разума. Соч. в шести томах. Т. 3, М., 1964. С. 106.

14. Лейбниц Г.В. Сочинения в четырех томах. Т. 2. М., 1989. С. 54.

15. Фреге Г. Основоположения арифметики. М., 2000, С. 44–45. Понимание идеальных образов как самостоятельно существующих и первичных перед их предметной реализацией было естественным для древних и средневековых философов. Платон полагал, что геометрические фигуры, данные в восприятии, лишь указывают нам на их идеальные прообразы, которые и являются истинным предметом геометрии. У Боэция читаем: «Дело в том,что существует два рода числа: одно посредством которого мы считаем, другое — заключенное в исчисляемых вещах. Так «одно» (unum) — это вещь; «единица» (unitas) же — то, благодаря чему мы говорим «одно». Точно так же и «два» относятся к вещи, например, два человека или два камня; «двоица» же — это не [вещи], но только то, благодаря чему людей или камней становится двое. Подобным же образом обстоит дело и с прочими [числами]» (Боэций. Утешение философией и другие трактаты. М., 1990. С. 149). Мысль Боэция состоит, очевидно, в том, что человек произносящий слово «два» по отношению к совокупности вещей уже имеет мысленный эталон — двоицу, на основе которого эта совокупность выделяется из других совокупностей. Разумеется, Боэций не допускает изменения этого эталона в

процессе его использования. Это, безусловно, правильное видение сути дела было впоследствии затемнено эмпирической теорией познания.

16. Гуссерль, однако, отождествляет универсальную онтологию с указанными математическими теориями. Математика есть для него и универсальная онтология, относящаяся к предметности вообще. (См.: Гуссерль Э. Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. Раздел 1, параграфы 8–10.) Такое понимание смешивает принципиально различные мысленные структуры. С праксеологической точки зрения необходимо разделить онтологию на систему идеализаций, связанных с познавательной деятельностью вообще, и формальные структуры, базирующиеся на онтологических представлениях. Арифметика — не онтология и не часть онтологии, а формальная система, основанная на идеализациях, относящихся к онтологии.

17. См.: Кутюра Л. Кантовская философия математики // В кн. Философские принципы математики. СПб., 1913. С. 216–223.

18. См.: Russell B. Essays on the Foundation of Geometry. Cambridge, 1897. Abz. 70. Рассел подходит здесь к геометрии с позиций, близких к априоризму Канта. С принятием логицистской установки он отказался от априоризма как концепции, апеллирующей к чувственной интуиции.

19. Натуралистическое понимание математики как системы абстрактных структур, отражающих реальность, несомненно, фиксирует в себе определенную истину, которая подтверждается самим фактом приложимости математических теорий к описанию реальности. Этот момент подчеркивался в философии диалектического материализма (см.: Энгельс Ф. Диалектика природы, гл. 5; Рузавин Г.И. О природе математического мышления. М., 1968 и др.). В настоящее время эта идея находит выражение в понимании математических теорий как идеальных форм («образцов») реальности. (См.: Michel Resnik. Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Oxford University Press, 1997.) С праксеологической точки зрения такая трактовка математики является односторонней: она упускает из виду внеэмпирический характер ее первичных представлений.

20. См.: Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х томах. Т. 3. М., 1984. С. 496.

21. Относительно закона действия и противодействия Кант говорит: «Ньютон не решался доказать его a priori, а потому ссылался на опыт». См.: Кант И. Соч. Т. 6. М., 1966. С. 157. Попытки защитить априорный характер принципов механики предпринимаются и в настоящее время. (См.: Грязнов А.Ю. Методология физики и априоризм Канта // Вопросы философии. 2000. № 8). С деятельностной точки зрения эти попытки являются необоснованными, ибо целевая установка мышления и зависимая от нее система априорных категорий сами по себе не предопределяют свойств механического движения или каких-либо иных свойств реальности.

22. См.: Кутюра Л. Кантова философия математики // В кн.: Кутюра Л. Философские принципы математики. С. 111.

23. См.: Гуссерль Э. Логические исследования. Т. 1. Пролегомены к чистой логике. СПб., 1909. С. 101.

24. Гуссерль убежден, что возникновению геометрии как учения о чистых формах предшествовала «грубая» геометрия (протогеометрия), основанная на искусстве измерения. (См.: Husserl E. The Creisis of European sciences and Transcendental Philosophie. Evanston, 1970. P. 28.). Позиция Гуссерля отличается здесь от установки радикального эмпиризма лишь в том отношении, что становление протогеометрии, по его мнению, опосредуется некоторой первичной интуицией пространства, которая сама по себе, без опыта измерения тел недостаточна для оправдания геометрических истин. См.: Гуссерль Э. Начало геометрии. Введение Ж. Деррида // В кн.: Гуссерль Э., Деррида Ж. Начало геометрии. М., 1996. С. 215–245.

25. См.. Yehuda Rav. Philosophical Problems of Mathematics in the Light of Evolutionary Epistemology // Philosophica. 1989. Vol. 43, № 1.

26. П. Бернайс в своей статье «О платонизме в математике» (1935) делает важное различение между методологическим (математическим) реализмом как установкой работающих математиков на приемлемость абстрактных математических объектов, связанных с актуальной бесконечностью, и метафизическим реализмом как доктриной об обусловленности математических определений некоторой реальностью. (Bernays P. On Platonism in Mathematics // In: Philosophy of Mathematics. Selected readings. P. Benacerraf and H. Putnam (ed.). Cambridge University Press, 1964. P. 101.) По его мнению, метафизический реализм не имеет прямого отношения к работе математика и к проблемам обоснования математики. Действительное положение, однако, существенно иное. Оно состоит в том, что только прояснение вопросов, связанных с метафизическим реализмом, позволяет нам оправдать математический реализм в качестве приемлемой методологии математики и логики ее обоснования.

27. Gödel K. Russells mathematical logic // In: Pears D.F. (ed). Bertrand Russell Collection of critical essays. New York, 1972.

28. Gödel K. What is Cantor's continuum problem? // In: Philosophy of mathematics. Selected readings. New York, 1964.

29. Штейнгауз Г. О математической строгости // В кн.: Задачи и размышления. М., 1974.

30. Лакатос И. Доказательства и опровержения. М., 1967. С. 65.

31. Там же, с. 80.

32. Поппер К.Р. Логика научного исследования // В кн.: Поппер К.Р. Логика и рост научного знания, М., 1983. С. 111.

33. Kitcher Ph. The Nature of Mathematical Knowledge. New York, Oxford, 1984. P. 50–53.

34. Ibid., p. 64.

35. Ibid., p. 55–56.

36. Мы, очевидно, рассуждаем здесь в духе эйдологии Гуссерля, которая предполагает, что вместе с конкретным образом предмета, мы имеем и его универсалию, которая является истинным предметом рассмотрения. Для исходных математических теорий, связанных с онтологической очевидностью, это действительно так: говоря о треугольнике, мы имеем ввиду не

конкретный треугольник, нарисованный на доске, а треугольник вообще, полученный на основе сущностной вариации. Наши теоремы истинны для всех треугольников по той причине, что наша мысль движется только в предположениях, выдерживающих вариации, совместимые с сущностью треугольника. Однако, стремление Гуссерля найти здесь путь к постижению родовых истин вообще, не является оправданным. Нетрудно видеть, что "схватывание сущности" на основе конкретного восприятия становится возможным в математике вследствие того, что простые математические объекты задаются конечным числом параметров и границы изменения этих параметров заданы с аподиктической очевидностью. Ни одно из этих условий не имеет места за пределами математики.

37. Kitcher Ph. The Nature of Mathematical Knowledge. P. 51-52.

38. Devis P.J. Fidelity in mathematical discourse. Is one and one really two? // American Mathematical Montly. 1972. Vol. 79, № 3. P. 258.

39. Ibid., p. 259.

40. Успенский В.А. Семь размышлений на темы философии математики // В кн.: Закономерности развития современной математики. М.: Наука, 1987. С. 137–151.

41. Там же, с. 151.

42. См.: Розов М.А. Способ бытия математических объектов // В кн.: Методологические проблемы развития и применения математики. М , 1985. С. 24–25.

Часть вторая

1. Аристотель. Сочинения в четырех томах. Т. 1. М., 1976. С. 125.

2. Там же.

3. Там же, с. 133.

4. Беседы Эпиктета. М.: Ладомир, 1997. С. 138.

5. Там же, с. 135.

6. Кант И. Логика. Пг., 1915. С. 1–7.

7. Кант И. Сочинения в шести томах. Т. 3. М., 1964. С. 174.

8. Спенсер Г. Основания психологии. Т. 2. М., 1898. С. 157.

9. Там же, с. 254.

10. Там же, с. 262.

11. Милль Дж.Ст. Система логики силлогистической и индуктивной. М., 1914. С. 250.

12. Там же.

13. Гуссерль Э. Логические исследования. Т. 1. Пролегомены к чистой логике. СПб., 1909. С. 83.

14. Там же, с. 101.

15. Гуссерль Э. Логические исследования. С. 120.

16. Там же, с. 122.

17. Там же, с. 173.

18. Там же. с. 53.

19. Гуссерль Э. Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. М., 1999. Разд. 1.

20. Husserl E. Urteil und Erfarung. Zur Genealogie der Logik. Stutgart, 1939. S. 93–98.

21. Пиаже Ж. Структуры операциональные и структуры математические // В кн.: Преподавание математики. М., 1960. С. 30.

22. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. М., 1969. С. 579.

23. Там же, с. 86.

24. Там же, с. 205.

25. Там же, с. 89.

26. Quine W.V. Philosophy of Logic. N.Y., 1970. P. xi.

27. Ibid., p. 60.

28. Ibid., p. 86.

29. Аристотель. Метафизика. С. 212.

30. Эти общие соображения позволяют в определенной степени оправдать общую идею информативности логических норм, которая намечается в ряде работ. (См.: Войшвилло Е.К. Логическое следование, возможные миры и вопрос об информативности законов логики // В кн.: Современная логика и методология науки. М., 1987. С. 19–32.) Во всяком случае ясно, что аналитичность логики не тождественна ее чистой тавтологичности и бессодержательности.

31. Frege G. Grundgesetze der Arithmetik. Jena, 1893. Bd. 1. S. XVI.

32. Reichenbach H. Philosophical foundations of guantum mechanics. Berkley and Los Angeles, 1946.

33. Куайн исключает из логики исчисления, использующие предикаты от предикатов на том основании, что предикат, выступающий в качестве аргумента, предполагает понятие множества, а следовательно, и теорию множеств (см.: Quine W.V. Philosophy of Logic. N.Y., 1970. P. 66). Наша аргументация, очевидно, другого рода: она исходит из того положения, что логическая истинность не может существовать вне онтологической истинности и самоочевидности.

34. Quine W.V. Philosophy of Logic. P. 91. При таком подходе реальная логика отождествляется с эементарными логическими исчислениями.

35. Кутюра Л. Алгебра логики. Одесса, 1909, С. 102.

36. Schlick M. General Theory of Knowledge. Wien, New York, 1976. P. 107.

37. Войшвилло Е.К. Философско-методологические проблемы релевантной логики. М., 1988.

38. Гильберт Д. Логические основания математики // В кн.: Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. С. 418.

39. Quine W.V. Philosophy of Logic. Ch. 5.

40. См.: Теория категорий. М., 1994. С. 111.

41. Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. М., 1998. С. 400.

42. Brouwer L. On the Foundations of Mathematics // In: Brouwer L.E.J. Collected Works. Vol. 1. Philosophy and Foundations of Mathematics, Amsterdam–Oxford, 1975. P. 92.

43. Brouwer L. Points and Spaces // Collected Works. Vol. 1. P. 523.

44. Названия аргументов, используемые здесь, также достаточно условны, хотя, конечно, они связаны с их содержанием.

45. Brouwer L. The Unreliability of the logical Principles // Collected Works. Vol. 1. P. 109.

46. См.: Brouwer L. Intuitionistische Zerlegung mathematische Grundbegriffen // Collected Works. Vol. 1. P. 276.

47. Brouwer L. The Unreliability of the logical Principles. P. 108.

48. Brouwer L. The Unreliability of the logical Principles. P. 109. Брауэр указывает здесь на Гильберта, который неоднократно выдвигал в качестве аксиомы математического мышления положение, что каждая математическая задача разрешима в положительном или отрицательном смысле.

49. Brouwer L. Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, inbesondere in der Funkzionentheorie. S. 270.

50. Brouwer L. The unreliability of the logical Principles. P. 110.

51. Brouwer L. The Effect of Intuitionism on classical Algebra of Logic // Collected Works. Vol. 1. P. 552.

52. Вейль Г. Полвека математики. М., 1969. С. 44.

53. Brouwer L. On the Foundations of Mathematics. P. 74.

54. Brouwer L. Historical Background Principles and Methods of Intuitionism // Collected Works. Vol. 1. P. 510–511.

55. Bernays P. On Platonism in Mathematics. P. 265.

56. А. Гейтинг пишет: «Если слово «существовать» не означает «быть построенным», то оно должно иметь какой-то метафизический смысл» (Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. С. 10). В соответствии с этой установкой. математика — не опытная наука и не метафизика, а наука о возможностях строгого мысленного конструирования.

57. Поппер К. Логика и рост научного знания. С. 175.

58. Бунге М. Интуиция и наука. М., 1967. С. 50–51.

59. Putnam H. Mathematics without foundations // In: Philosophy of mathematics. Selected readings. New York, 1984. P. 302.

60. Марков А.А. О логике конструктивной математики // Вестник Московского ун-та. Серия 1. 1970. № 2. С. 13.

61. См.: Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики. С. 108–110.

62. Зиновьев А.А. Логическая физика. М., 1972. С. 8.

Часть третья

1. См: Лобачевский Н.И. Полн. собр. соч. Т. 1. М.-Л., 1946. С. 261. Здесь необходимо самым решительным образом возразить против устоявшегося мнения, согласно которому Лобачевский, разработав свою геометрию в достаточно большом объеме, не доказал ее логической правомерности. (См., к примеру: Александров А.Д. Основания геометрии. М., 1987. С. 262.)

Погружение неэвклидовой планиметрии в геометрию сферы, осуществленное Лобачевским, конечно, доказывает ее непротиворечивость ничуть не в меньшей степени, чем прямая интерпретация ее отношений на псевдосфере, осуществленная позднее Е. Бельтрами.

2. См : Гильберт Д. Основания геометрии. М. 1948. Гл. 2, § 9.

3. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. 2. Теория доказательств. М., 1982. С. 13.

4. Александров А.Д. Математика и диалектика // В кн.: Проблемы науки и позиция ученого. М., 1988. С. 58.

5. Б. Рассел считал, что идея величины бесполезна для чистой математики и даже чужда ей, поскольку ее нельзя определить без какого-либо обращения к интуиции. См.: Russell B. The principles of Mathematics. V. 1. Cambridge University Press, 1903. Ch. 21.

6. Аристотель. Сочинения. Т. 1. М., 1976. С. 54. Этот аристотелевский тезис оказался самым устойчивым предрассудком в философии математики, влияющим на ее методологию и в настоящее время.

7. Brouwer L. Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, inbesondere in der Funkzionentheorie. S. 270.

8. См.: Gödel K. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. Heft 4. 1932. S. 12–13.

9. Frege G. On the Foundation of Geometry // The Philosophical Review. 1960. Vol. XIX. P. 15–17.

10. Это определение, очевидно, содержит в себе круг, поскольку мы определяем n-е число через класс эквивалентных классов n-го порядка. Но мы разрываем этот круг, определяя в логических понятиях арифметический нуль и понятие последующего числа. См.: Фреге Г. Основоположения арифметики С. 21–25.

11. См.: Фреге Г. Запись в понятиях, § 24, а также «Основоположения арифметики», § 81.

12. Теория типов не сводится к этому общему правилу. Простой анализ показывает, что полное его проведение невозможно, поскольку, оно устраняет из математики слишком много, в частности, все непредикативные определения. Полная теория типов предусматривает разумные отступления назад и теоретическое оправдание этих отступлений. Можно сказать, что Рассел только заложил основу теории формальных определений, которая остается мало разработанной и в настоящее время.

13. Whitehead A, Russell B. Principia Mathematica. V. 3. Cambridge, 1929. P. 234. См. также: Рассел Б. Введение в математическую философию. М.: Гнозис, 1998. Гл. 13.

14. Аксиома сводимости, устанавливающая связь между различными порядками множеств в расширенной теории типов была впоследствии признана излишней с точки зрения устранимости парадоксов. Обсуждение этого момента, см.: Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1967. Гл. 3.

15. Фреге и Рассел считали, что натуральный ряд должен начинаться с нуля. (См.: Рассел Б. Введение в математическую философию. С. 13.) Для логицистской трактовки арифметики это важно, ибо пустое множество является наиболее подходящим объектом в качестве исходного элемента для построения логического коррелята натурального ряда. Онтологически осмысленный натуральный ряд, однако, должен начинаться с единицы, ибо нуль в этом случае — фикция, имеющая чисто операциональное значение. Это последнее понимание мы видим у Брауэра и Вейля. Нетрудно видеть, что за этим, на первый взгляд, мелочным спором (см. также: Успенский В.А. Цит. соч. С. 110) стоит вопрос о статусе понятия числа, а именно, о возможности его адекватного определения в теоретико-множественных понятиях. Арифметика, конечно, может быть обоснована независимо от теории множеств как теория, имеющая особое интуитивное основание, базирующееся на идее следования, а не на идее чистого количества, являющейся основой теории множеств. В этом случае мы должны принять интуицию, содержащуюся в понятии «следовать за» как исходную и считать истинным началом натурального ряда единицу как представление, определяющее процесс бесконечной итерации.

16. Кант И. Критика чистого разума // Кант И. Соч. в шести томах. Т. 3. М., 1964. С. 472.

17. Это обстоятельство в определенной мере осознавалось и раньше. Л. Эйлер писал: «Даже если отрицать, что во Вселенной действительно существует бесконечное число, то все же в математических исследованиях часто встречаются вопросы, на которые нельзя ответить, если не допустить бесконечного числа» (Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. Т. 1. М.-Л., 1949. С. 90). Эта точка зрения, высказанная в XVIII веке, является более близкой к истине, чем натуралистическая позиция Рассела, поскольку она допускает возможность признания математической бесконечности вне зависимости от ее реализации в опыте. Ясно, что натурализм Рассела, проведенный последовательно, упраздняет проблему обоснования математики.

18. Это простое положение не является вполне осознанным в методологии математики. П.К. Рашевский высказывал мнение, что методологические трудности современной математики во многом связаны с абсолютизацией представления о единственности и абсолютности натурального ряда чисел. (См : Рашевский П.К. О догмате натурального ряда // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, вып. 4 (172). С. 243–246). С онтологической точки зрения эта идея, конечно, неприемлема. Общезначимость, предельная ясность и историческая стабильность принципов, определяющих понятие числа, обусловлена его принадлежностью к категориальной форме мышления и не может быть изменена по нашему желанию. Современные методологические трудности в основаниях математики проистекают не из догматизма, а напротив, — из безбрежного релятивизма, который пытается опровергнуть то, что в принципе не подлежит опровержению.

19. Пуанкаре писал в «Науке и методе»: «Нет актуальной бесконечности. Канторианцы забыли это и впали в противоречие» (Пуанкаре А. Наука о науке. М., 1983. С. 400).

20. Кантор Г. К учению о трансфинитном // В кн.: Кантор Г. Труды по теории множеств. М., 1985. С. 297.

21. Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. С. 459.

22. Гёдель К. Расселовская математическая логика // В кн.: Рассел Б. Введение в математическую философию. С. 230.

23. На это обстоятельство указывал Д. Гильберт: «Цермело, — писал он, — введя подходящую аксиому, ограничил произвол в определениях множеств, ...сузил круг допустимых утверждений об элементах множеств... и построил теорию таким образом, что, несмотря на эти ограничения, она не потеряла своей ценности» (Избранные труды. Т. 1. С. 414).

24. Речь идет здесь, очевидно, об оправдании правила бесконечной индукции, согласно которому из выводимости формул $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ и т. д. мы заключаем о выводимости общего утверждения вида $\forall x\, f(x)$ при любом объеме области определения. Из предполагаемой выполнимости операции выбора для каждого множества в отдельности, конечно, следует ее выполнимость для всей совокупности множеств, какой бы не была эта совокупность. Собственно философский довод может состоять здесь в том, что в сфере идеальной предметности мы вправе устранить все ограничения, проистекающие из эмпирической основы мышления. Иначе говоря, тип бесконечности не имеет значения для полной проверки множества, если таковая допускается для любого его элемента.

25. Whitehead A, Russell B. Principia Mathematica. V. 3. Cambridge, 1929. P. V.

26. Hao Wang. The concept of set // In: Philosophy of mathematics. Selected readings. New York, 1964. P. 536.

27. Сравнение возможностей различных аксиоматик теории множеств см.: Ван Хао, Мак Нотон. Аксиоматические системы теории множеств. М., 1965.

28. См.: Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1969. Гл. 3.

29. Принцип совместности, сформулированный выше как утверждение об абсолютной непротиворечивости системы аксиом, состоящей только из логически и онтологически истинных утверждений, можно, по-видимому, расширить через включение аналитически истинных аксиом. Мы исходим здесь из того факта, что фундаментальное математическое понятие имеет «эйдос», смысловое ядро, не меняющееся в любых контекстах его использования. Аксиомы, выражающие эти «неотъемлемые» свойства математического объекта, могут считаться аналитически истинными, раскрывающими смысл понятия, несомненно совместимыми друг с другом, а следовательно, — и с реальной логикой. Г. Булос считает, что аксиома объемности — чисто аналитическое утверждение, проистекающим из смысла, содержащихся в ней терминов (см.: Boolos G. The iterative conception of set // In: Philosophy of Mathematics. Selected readings. N.Y., 1984. P. 101). Это обстоятельство важно для использования принципа совместности за пределами логицистской системы.

30. Brouwer L. The unreliability of the logical Principles. P. 110.

31. Brouwer L. Intuitionism and Formalism. P. 90–92.

32. См.: Гейтинг А. Интуиционизм. Гл. 8.

33. В своей концепции математики Брауэр исходил из философии Канта, называя ее традиционным интуиционизмом. Так как под традиционным интуиционизмом мы понимаем сейчас философию Брауэра, то философию математики Канта лучше всего называть кантовским интуиционизмом.

34. См.: Вейль Г. Математическое мышление. М., 1989. С. 80–81.

35. См.: Минц Е.Г. [Комментарии] // В кн.: Вейль Г. Математическое мышление. С. 120.

36. Gauss C.F. Werke. Bd. 8. Leipzig, 1900. S. 120.

37. См.: Кузичев А.С. Диаграммы Венна. М., 1976.

38. Frege G. Posthumous writings. Chicago University Press, 1974. P. 221–224.

39. Frege G. Ibid., p. 220.

40. Brouwer L. Intuitionism and Formalism. P. 98.

41. Гастев Ю.А. Обоснование анализа на аксиомах прямой линии. В кн.: Исследование логических систем. М., 1970.

42. Вейль Г. Математическое мышление. С. 83.

43. См. Новиков П.С. О непротиворечивости некоторых логических исчислений. В кн.: Новиков П.С. Избранные труды. М., 1979. С. 130–157.

44. Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. М., 1998. С. 101.

45. Там же, с. 442.

46. Там же, с. 448.

47. Там же, с. 447.

48. См.: Крайзель Г. Исследования по теории доказательств. М., 1981. С. 9.

49. Карно Л. Размышления о метафизике бесконечно малых. М.-Л., 1933. С. 219.

50. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Т. 1. М., 1946. С. 261.

51. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. 1. М., 1982. С. 19.

52. Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. С. 419–420.

53. Там же, с. 101.

54. Там же, с. 437–438.

55. См.: Feferman S. Arithmetisation of mathematics in general setting // Foundations of Mathematics. 1960. Vol. 49. См. также: Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., 1972. Гл. 3.

56. Есенин-Вольпин А.С. Анализ потенциальной осуществимости // В кн.: Логические исследования. Сборник статей. М., 1959. С. 218–262.

57. См.: Кузичев А.С. Теорема о непротиворечивости системы ZF Цермело-Френкеля // ДАН. 1983, Т. 173, № 5. С. 1053–1057, а также: Кузичев А.С., Кузичева З.А. Системы с бесконечной логикой и неограниченным принципом свертывания. К 150-летию со дня рождения Г. Кантора // В кн.: Бесконечность в математике. Философские и методологические аспекты. М., 1997.

58. Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. О новом подходе к методологии математики // В кн.: Закономерности развития современной математики. М., 1987. С. 85–105.

59. См.: Shaughan Lavine. Understanding the Infinite Harvard Univ. press. 1994. Ch. IX.

60. Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. С. 439.

61. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., 1972. С. 108.

62. Крайзель Г. Исследования по теории доказательств. М., 1981. С. 65.

63. См.: Новиков П.С. Элементы математической логики. М., 1969. Гл. 5.

64. См.: Нагорный Н.М. К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики. М.: Вычислительный центр РАН, 1995.

65. См.: Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1967. Гл. 5.

66. Gödel K. Russells mathematical logic // In: Pears D.F. (ed). Bertrand Russell Collection of critical essays. New York, 1972. Гёдель К. Расселовская математическая логика // В кн.: Рассел Б. Введение в математическую философию. М , 1996.

67. Gödel K. What is Cantor's continuum problem? // In: Philosophy of mathematics. Selected readings. New York, 1964.

68. Ibid., P. 128.

69. Основной аргумент философов, возражающих против реалистической интерпретации математических понятий, состоит в том, что эта интерпретация в лучшем случае бесполезна, поскольку она не дает нам никакого доступа к предполагаемым сущностям вне их определения в математическом языке. (См., к примеру: Parsons Ch. Ontology and Mathematics // Philosophical Review. 1971. Vol. LXXX. P. 101.) Конечно, это не так. Мы не могли бы оправдать закон исключенного третьего или аксиому бесконечности без прояснения онтологической основы этих принципов. В действительности, нам нужен не доступ к математической реальности, а лишь умение обосновать причастность к этой реальности тех или иных типов математических суждений. Эта последняя задача в ряде случаев разрешима.

70 Лакатос И. Бесконечный регресс и обоснования математики // В кн.: Современная философия науки. М., 1996. С. 111.

71. See: Lakatos I. A renaissanse of empiricism in the recent philosophy of mathematics // Brit. yourn. for the philos. of sci. 1976. Vol. 27, № 3. P. 202.

72. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Н. Введение в математическую логику. Дополнительные главы. М., 1982. С. 117–118.

72а. Аксиома непрерывности дана у Дедекинда в следующей формулировке. «Если система вещественных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число одного класса меньше каждого числа другого класса, то существует одно и только одно вещественное число, посредством которого это разделение производится» (Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1911. С. 20). Идея этой аксиомы проистекает из того допущения, что каждой точке прямой линии соответствует одно и только одно число.

73. В настоящее время достигнуты значительные успехи в чисто логическом обосновании анализа, в частности, получено обоснование элементарного анализа на основе консервативного расширения арифметики (см.:

Крайзель Г. Исследования по теории доказательств. С. 88–101). Признание этих результатов в качестве абсолютного обоснования математического анализа наталкивается, однако, на те же трудности, что и признание надежности имеющихся доказательств непротиворечивости арифметики: некоторые, не вполне элементарные средства должны быть приняты на веру или оправданы на основе содержательных соображений. Эти трудности могут быть преодолены только на основе прояснения онтологической основы математического мышления.

74. Hao Wang. The concept of set // In: Philosophy of mathematics. Selected readings. New York, 1964. P. 536.

75. Ibid., p. 540.

Часть четвертая

1. Это положение, конечно, неприемлемо в рамках индуктивной методологии и требует особого рассмотрения. Мы можем пока принять его как констатацию того факта, что в истинности суждения $a + b = b + a$ мы сомневаемся столь же мало, как и в истинности суждения $2 + 1 = 1 + 2$.

2. См : Гильберт Д. Основания геометрии. Петроград, 1923. Примечания к гл. 1 и 2.

3. Идея недостижимых противоречий была выдвинута А.С. Есениным-Вольпиным в конце 50-х годов с целью обоснования непротиворечивости арифметики и теории множеств. См.: Есенин-Вольпин А.С. Анализ потенциальной осуществимости // В сб.: Логические исследования. М., 1959.

4. См.: Хинтикка Я Информация, дедукция и a priori // В кн.: Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М., 1980. С. 163.

5. Там же, с. 163.

6. См.: Эйлер Л. Введение в анализ. М.- Л., 1934. С. 215.

7. Кант И. Критика чистого разума. С. 222.

8. Кассирер Э. Познание и действительность. Понятие о субстанции и понятие о функции М., 1912 С. 194.

9. См.: Юшкевич А.П. К истории спора о колеблющейся струне // В кн.. Юшкевич А.П. Математика и ее история. М., 1996. С. 166–175.

10. См.: Carnap R. The Logicist Foundations of Mathematics // In: Philosophy of Bertrand Russell Ed. by E.D. Klemke. N.Y., 1972. P. 341–354.

11. Гёдель К. Расселовская математическая логика. С. 215.

12. Kitcher Ph. Mathematical naturalism // In: History and Pilosophy of modern mathevatics. Minneapolis University Press, 1987. P. 101.

13. См.: Гильберт Д. Основания геометрии. М., 1948. С. 349.

14. Пуанкаре А. О науке. М., 1983. С. 464.

15. Вейль Г. Математическое мышление. М., 1989. С. 89.

16. Лузин Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их применениях Собр. соч. Т. 2. С. 30

17. Н.М. Нагорный считает, что теория множеств не определяет должным образом понятие множества и содержит большое число других «дыр»,

которые ставят под сомнение ее статус как приемлемой математической теории. См.: Нагорный Н.М. К работам по основаниям математики // В кн.: Гильберт Д. Избранные труды. С. 564-569.

18. Бычков С.Н., Шашкин Л.О. К критике канторовской диагональной процедуры доказательства несчетности континуума // В кн.: Традиционная логика и канторовская диагональная процедура. М., 1997. С. 22–29; Петросян В.К. Общий кризис теоретико-множественной математики и пути его преодоления. М., 1997; Зенкин А.А. Ошибка Кантора // Вопросы философии. 2000. № 2.

19. Это соображение, конечно, не решает вопроса о корректности канторовского доказательства, а говорит лишь о неразрушимости сложившейся системы понятий, которую мы называем теорией множеств. Вопрос о корректности рассматриваемого требует специального логического анализа.

Заключение

1. Карри Х.Б. Основания математической логики. М., 1969. С. 25.

2. См.: Барабашев А.Г. Регресс кантовского априоризма (Рукопись. Предполагается публикация в книге «Математика и опыт». М., 2002). Факт такого регресса несомненен и он особенно ярко проявился в философии XX века, которая заменила кантовский априоризм, основанный на строгом разделении формы и содержания мышления, некими схемами взаимодействия уровней содержания, различающихся степенью своей стабильности. Биологический априоризм К. Лоренца, лингвистический априоризм Н. Хомского, логический априоризм Я. Хинтикки и другие современные априоризмы устраняют из кантовской теории самое главное — идею трансцендентальности форм мышления, их строгой генетической и логической независимости от содержания мышления.

Предметный указатель

Аксиома
- бесконечности 168–170, 175, 180
- выбора 123, 168, 169, 176–178, 197, 206, 215
- выделения 123, 180
- непрерывности 156
- объективности 180
- равенства 203
- сводимости 168
- трансфинитная 203
- фундированности 221, 223
- числа 203

Абсолютная истина 98, 101

Аналитичность
- логики 102, 103, 107
- математики 52

Априорность 42–61
- категорий 42–61
- логики 102
- математики 46–52

Априоризм 42
- традиционный 52
- праксеологический 58, 78

Бесконечность 157
- актуальная 157, 173, 174, 186
- математическая 173, 215
- потенциальная 174
- практическая 205

Грамматика
- основа логики 92
- основа теории значений 92, 93

Деятельность
- цель мышления 42, 43
- основа универсальных норм 43

Доказательство 219
- завершенное 28
- достоверное 28
- конструктивное 183, 184
- содержательное 283
- формальное 18

Достоверность 40

Индукция
- полная 177
- трансфинитная 207

Интуиционизм 186

Истина
- гносеологическая 98
- онтологическая 179
- семантическая 150
- формальная (логическая) 150
- фактуальная 150
- эмпирическая 150

Конвенционализм 216

Конструктивизм 157

Логика
- математическая 78
- предметная 113
- реальная 78, 115, 117–121, 124, 145

Метатеория 199, 200, 203, 206–210

Надежность
- доказательства 14, 28
- логики 82, 106

Наглядность 22

Непротиворечивость
- содержательной теории 258
- аксиоматизированной теории 266
- формальной теории 200

Нормативность 42, 95

Обозримость 246
Обоснование
– евклидианское 213
– онтологическое 147, 213
– системное 227
– эмпирическое 61–65
Онтология 303
Онтологическая совместность 161
Онтологический барьер 225
Опыт
– допредикативный 88
– логико-математический 128
Очевидность
– аподиктическая 14, 24
– ассерторическая 15
– геометрическая 17, 191–197
– концептуальная 17
– логическая 17
– предметная 17
Психологизм 72, 85
Реализм 56
Релятивизм 3, 6,144, 297
Ретротрансляция истины 240
Стабильность
– доказательства 28–41
– системы аксиом 256
Строгость доказательства 28, 37–40
Финитизм 157, 202
Формализм 121
Эмпиризм 78
Эпитеория 283–287

Оглавление

Предисловие 3

Введение 5

Часть первая. Надежность математического доказательства 13

Глава 1. Ассерторическая и аподиктическая очевидность 14

Понятие аподиктической очевидности (14). Типы математической очевидности (16). О надежности геометрической очевидности (20). Аподиктическая очевидность как основа доказательства (24)

Глава 2. Надежность и строгость доказательства 28

Основные характеристики математического доказательства (28). Абсолютная критериальность математического сообщества (30). Конечность математических доказательств (32). Системность математической теории (35). Вторичность строгости (37). О достоверности математических доказательств (40)

Глава 3. Априорность и реальность математических представлений 42

Априорность категорий и логики (42). Априорность исходных представлений математики (46). Онтологическая основа первичной математики (49). Слабость традиционного априоризма (52). Реальность математических объектов (56)

Глава 4. Критика релятивизма 61

Локатосовский эмпирицизм (61). Критика концепции Лакатоса (65). О китчеровской критике априоризма (69). Психологический и социокультурный релятивизм (72)

Часть вторая. Надежность логических норм 77

Глава 1. Эмпиризм и ракционализм в истолковании логики 78

Теория логики у Аристотеля и Эпиктета (79). Кантовская теория логики (81). Эмпиризм Милля и Спенсера (82). Априоризм Гуссерля (85). Операционализм Пиаже (89) Философия логики Куайна (92)

Глава 2. Праксеологическая теория логики 94

Логика и онтология (94). Логика как теория истины (97). Праксеологическая дедукция логических норм (98). Аналитичность и реальность логики (101). Надежность логических норм (105). Слабость современной философии логики (107). Пути обоснования логики (110)

Глава 3. Логика и математика 113

Исключение предметных логик (113). Исключение формальных исчислений (115). Реальная логика и естественные исчисления (117). Проблема разделения (120). Логика как механизм дедукции (125). Дефинитоpная и экспликативная функция логики (127). Автономия логики (128)

Глава 4. Интуиционистская критика закона исключенного третьего 131

Аргументы Брауэра (131). Критика логических аргументов (136). Критика философских аргументов (139). Несостоятельность логического релятивизма (145)

Часть третья. Онтологическое обоснование математики 147

Глава 1. Истинность и непротиворечивость 148

Общее понимание обоснования (148). Понятие онтологически истинной математики (150). Природа обосновательного слоя (153). Праксеологическое обоснование исходных принципов (155). Ограниченность финитизма (157). Принципы онтологического обоснования математики (159). Понятие онтологической совместимости (161)

Глава 2. Непротиворечивость логистических систем 165

Программа логицизма (165). Изменение задачи (169). Онтологическая истинность аксиомы бесконечности (170). Праксеологическое оправдание аксиомы выбора (176). Логицистское обоснование непротиворечивости теории множеств (179)

Глава 3. Реабилитация кантовского интуиционизма 183

Сущность интуиционистской программы (184). Надежность интуиционистского обоснования (186). Кантовский интуиционизм (188). Идея геометрического обоснования (191). О подходе П.С. Новикова (197)

Глава 4. Пути расширения метатеории 198

Общая характеристика программы (198). Защита финитизма (202). Онтологическое понимание метатеории (206). Выход за пределы финитизма (210)

Глава 5. Границы евклидианского обоснования 213

Необходимость онтологического обоснования (213). Сущностный характер евклидианского обоснования (217). Перспективы надежного обоснования (219). Пределы логического обоснования (223)

Часть четвертая. Системное обоснование математики 227

Глава 1. Понятие завершенной аксиоматики 228

Объекты, факты и принципы (228). Неизбежность стабилизации (231). Свойства завершенной аксиоматики (235). Фактуальная истинность аксиом (238). Идея системного анализа непротиворечивости (241)

Глава 2. Непротиворечивость завершенной аксиоматики 243

Проблема скрытых противоречий (243). Устранимость обозримых противоречий (246). Редукция скрытых противоречий к обозримым (247). Механизм ретротрансляции истинности (250). Обоснование непротиворечивости на основе факта (254). Общие замечания и выводы (256)

Глава 3. Непротиворечивость содержательной теории 258

Завершенность математических понятий (258). Становление неразрушимого центра (262). Практическое оправдание определений (264). Непротиворечивость содержательной аксиоматизированной теории (266). Практическая непротиворечивость математической теории (268). Сфера абсолютной надежности (270)

Глава 4. Обсуждение метода 277

Абстрактность системного подхода (278). Конкретность системного подхода (280). Надежность содержательного рассуждения (283). Об определенности критерия стабильности (287)

Заключение 291

Литература и примечания 301

Предметный указатель 315

Перминов Василий Яковлевич
Философия и основания математики

Директор издательства *Б.В. Орешин*
Зам. директора *Е.Д. Горжевская*
Зав. производством *Н.П. Романова*

Редактор *Войцехович В.И*
Корректор *Ваганова Л.В.*
Компьютерная верстка *Чернышов Ю.Н.*

ЛР № 065292 от 17.07.97

Подписано в печать 29.07.01. Формат 60x88/16
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Pragmatica. Усл. печ. л. 20.0
Тираж 1000. Заказ № 333

Издательство «Прогресс-Традиция»
110048, Москва, ул.Усачева, д.29, корп. 9
121099, Москва, а/я 911

ОАО "Астра семь"
121019, Москва, Филипповский пер., 13.