

**НАУКУ —
ВСЕМ!**



**Э. Нагель
Дж. Р. Ньюмен**



ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ



URSS

**ШЕДЕВРЫ
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**
• Математика •

Ernest Nagel, James R. Newman
GÖDEL'S PROOF

**Э. Нагель
Дж. Р. Ньюмен**

ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ

Сокращенный перевод с английского
Ю. А. Гастева

Издание второе,
исправленное



URSS

МОСКВА

Нагель Эрнест, Ньюмен Джеймс Рой

Теорема Гёделя: Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. — М.: КРАСАНД, 2010. — 120 с. (НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы.)

Вниманию читателя предлагается книга известного американского логика Э. Нагеля и опытного популяризатора науки Дж. Р. Ньюмена, посвященная теореме Гёделя о неполноте. Эта теорема была изложена в небольшой статье К. Гёделя, которая впоследствии сыграла решающую роль в истории логики и математики. Авторы настоящей книги, не пытаясь дать общий очерк идей и методов математической логики, строят изложение вокруг центральных, с их точки зрения, проблем этой науки — проблем непротиворечивости и полноты. Доказательство того факта, что для достаточно богатых математических теорий требования эти несовместимы, и есть то поразительное открытие Гёделя, которому посвящена книга. Не требуя от читателя по существу никаких предварительных познаний, авторы с успехом объясняют ему сущность одной из самых замечательных и глубоких теорем математики и логики.

Для специалистов по математической логике, студентов и аспирантов, а также всех заинтересованных читателей.

Издательство «КРАСАНД». 121096, Москва, ул. 2-я Филевская, 7, корп. 6.
Формат 60×90/16. Печ. л. 7,5. Зак. № 3137.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-396-00092-6

© КРАСАНД, 2009



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Содержание

1

Введение

стр. 7

2

Проблема непротиворечивости

стр. 13

3

Абсолютные доказательства
непротиворечивости

стр. 31

4

Систематическое построение
формальной логики

стр. 41

5

**Один пример абсолютного
доказательства непротиворечивости**

стр. 49

6

**Идея кодирования
и ее использование в математике**

стр. 65

7

Теоремы Гёделя

стр. 77

8

Заключительные замечания

стр. 109

Послесловие переводчика

стр. 115

Посвящается Бертрону Расселу

1

Введение

В 1931 г. в одном из немецких научных журналов появилась сравнительно небольшая статья с довольно-таки устрашающим названием «Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme» («О формально неразрешимых предложениях *Principia Mathematica* и родственных систем»). Автором ее был двадцатипятилетний математик из Венского университета Курт Гёдель, впоследствии работавший в Принстонском институте высших исследований. Работа эта сыграла решающую роль в истории логики и математики. В решении Гарвардского университета о присуждении Гёделю почетной докторской степени (1952) она была охарактеризована как одно из величайших достижений современной логики.

Однако в момент опубликования ни название гёделевской работы, ни содержание ее ничего не говорили большинству математиков. Упомянутые в ее названии *Principia Mathematica* — это монументальный трехтомный трактат Алфреда Норта Уайтхеда и Бер-

трана Рассела, посвященный математической логике и основаниям математики; знакомство с трактатом отнюдь не являлось необходимым условием для успешной работы в большей части разделов математики. Интерес к разбираемым в работе Гёделя вопросам всегда был уделом весьма немногочисленной группы ученых. В то же время рассуждения, приведенные Гёделем в его доказательствах, были для своего времени столь необычными, что для полного их понимания требовалось исключительное владение предметом и знакомство с литературой, посвященной этим весьма специфическим проблемам.

При всем этом подлинно революционный характер выводов, к которым пришел Гёдель, и их важнейшее философское значение ныне общепризнанны. Цель настоящего очерка состоит в том, чтобы сделать доступным для неспециалистов существо результата Гёделя и основную идею его доказательства.

Знаменитая работа Гёделя посвящена центральной проблеме оснований математики. Чтобы понять источник возникновения и характер этой проблемы, нам понадобятся некоторые предварительные рассмотрения. Каждый, кому приходилось преподавать элементарную геометрию, помнит, что геометрия строится как *дедуктивная наука*. Этим она отличается от экспериментальных наук, выводы которых приемлемы постольку, поскольку они согласуются с данными наблюдения и опыта. Идея о том, что любое верное утверждение может быть получено в качестве заключительного шага строгого *логического доказательства*, сформировалась еще в Древней Греции;

именно греческим математикам принадлежит честь открытия так называемого «аксиоматического метода» и применения его для систематического изложения геометрии. Для аксиоматического метода характерно, что некоторые предложения — так называемые *аксиомы* или *постулаты* (примером может служить предложение, согласно которому через любые две точки можно провести одну и только одну прямую) — принимаются *без* доказательства; все же остальные предложения данной теории выводятся затем из этих аксиом. Можно сказать, что аксиомы образуют «базис» системы, в то время как теоремы, получаемые из аксиом при помощи одних только логических законов, — это «надстройка».

Аксиоматическое построение геометрии произвело глубокое впечатление на мыслителей всех времен — ведь совсем небольшого числа аксиом оказалось достаточным, чтобы из них можно было вывести поистине необозримое количество предложений. Более того, если каким-либо образом можно было удостовериться в истинности аксиом, а фактически на протяжении почти двух тысячелетий большинство ученых считало истинность аксиом само собой разумеющейся, то это уже автоматически обеспечивало истинность всех теорем и их совместимость. Поэтому аксиоматическое изложение геометрии в глазах многих поколений ученых представлялось своего рода идеальным образцом научного знания. И вполне естественно было задать вопрос, можно ли другие научные дисциплины, кроме геометрии, построить на такой же строгой аксиоматической основе. Тем не менее, хотя некоторые разделы физики формулировались аксиоматиче-

ски еще в античные времена (например, Архимедом), до недавнего времени геометрия в глазах большинства ученых представлялась, по сути дела, единственной областью математики, построенной на аксиоматической базе.

Однако в течение последних двух столетий аксиоматический метод стал применяться все более широко и интенсивно. И для новых областей математики, и для более традиционных ее разделов, таких, например, как общая арифметика целых чисел, были сформулированы системы аксиом, представляющие эти математические дисциплины в некотором смысле адекватным образом. В результате укоренилось довольно прочное убеждение, что для любой математической дисциплины можно указать перечень аксиом, достаточный для систематического построения всего множества истинных предложений данной науки.

Работа Гёделя показала полную несостоятельность такого убеждения. Она представила математикам поразительный и обескураживающий вывод, согласно которому возможности аксиоматического метода определенным образом ограничены, причем ограничения таковы, что даже обычная арифметика целых чисел не может быть, оказывается, полностью аксиоматизирована. Более того, Гёдель доказал, что для весьма широкого класса дедуктивных теорий (включающего, в частности, элементарную арифметику) нельзя доказать их непротиворечивость, если не воспользоваться в доказательстве столь сильными методами, что их собственная непротиворечивость оказывается в еще

большей степени подверженной сомнениям, нежели непротиворечивость самой рассматриваемой теории. В свете сказанного ни о какой окончательной систематизации многих важнейших разделов математики не может быть и речи, и нельзя дать решительно никаких надежных гарантий того, что многие важные области математики полностью свободны от внутренних противоречий.

Таким образом, открытия Гёделя подорвали глубоко укоренившиеся представления и разрушили старые надежды, ожившие было в ходе более новых исследований по основаниям математики. Но работа Гёделя имеет не только отрицательное значение. Она обогатила исследования по основаниям математики совершенно новыми методами рассуждения, сравнимыми по своей природе и по своей плодотворности с алгебраическим методом, привлеченным для решения геометрических задач Рене Декартом. Открытия Гёделя существенно расширили проблематику логических и математических исследований. Кроме всего прочего, работа Гёделя обусловила существенную переоценку перспектив философии математики и философии науки в целом.

Детали доказательств теорем Гёделя из его знаменитой работы слишком трудны для того, чтобы понять их, не имея основательной математической подготовки. Но общую идею этих доказательств и значение следующих из них выводов вполне могут уяснить и читатели, обладающие совсем скромными познаниями в области математики и логики. Для этого читателю понадобятся разве лишь самые элементарные

факты и понятия современной математики и формальной логики. Именно краткому знакомству с этим ограниченным запасом фактов и посвящены ближайшие четыре раздела нашего очерка.

2

Проблема непротиворечивости

Для XIX столетия характерна резкая интенсификация и расширение проблематики математических исследований. Были решены многие важные математические проблемы, не поддававшиеся усилиям лучших мыслителей прошлых времен. Возникли совершенно новые математические дисциплины. В различных областях математики были выдвинуты новые основополагающие принципы, а применение старых принципов стало гораздо более плодотворным благодаря их пересмотру с учетом новой, более совершенной техники математического мышления. Вот простой пример. Еще греческие математики выдвинули три задачи из области элементарной геометрии: разделить на три части произвольный угол при помощи только циркуля и линейки; построить куб, объем которого был бы вдвое больше объема данного куба; построить квадрат, площадь которого равнялась бы площади данного круга. Более двух тысяч лет эти задачи не поддавались решению, пока, наконец, в XIX сто-

летию не было строго доказано, что предписываемые в них построения вообще нельзя осуществить. Эти результаты, интересные и сами по себе, вызвали глубокий интерес к изучению природы понятия числа и строения числового континуума (поскольку выяснилось, что для решения упомянутых задач недостаточны числа, являющиеся корнями уравнений, хорошо изученных еще античными математиками). Плодом этих исследований явились строгие определения, на основе которых удалось построить теории отрицательных, комплексных и иррациональных чисел. Была построена на прочной логической основе и общая теория действительных чисел. Возникла совершенно новая ветвь математики — теория бесконечных множеств и так называемых трансфинитных («бесконечных») чисел.

Но, пожалуй, наиболее важным достижением XIX века явилось решение еще одной задачи, также восходящей еще к грекам, которая с тех пор оставалась без ответа. В числе аксиом, на базе которых строилась евклидова систематизация геометрии, имеется так называемая аксиома параллельности. В предложенной Евклидом формулировке эта аксиома равносильна утверждению (хотя и не совпадает с ним), что через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой. Еще античным математикам эта аксиома отнюдь не казалась самоочевидной. Поэтому они пытались доказать ее в качестве следствия из остальных аксиом Евклида, которые, напротив, представлялись им совершенно очевидными. Можно ли, однако, действительно получить искомое доказательство для ак-

сиомы параллельности? Поколения математиков безуспешно пытались ответить на этот вопрос. Но неоднократно неудачи попыток построения искомого доказательства не означали еще, что никто не преуспееет в этом деле больше, чем в важной для человечества проблеме изобретения безотказно и на все времена действующего средства от насморка. Такое положение вещей продолжалось до середины XIX столетия — до тех пор, пока в работах Гаусса, Бойаи, Лобачевского, Римана и других математиков не была доказана *невозможность* вывода аксиомы параллельности из остальных аксиом евклидовой геометрии. Этот результат имел громадное значение для понимания природы нашего мышления. В первую очередь он привлек внимание к тому поразительному факту, что можно *доказать* в качестве теоремы *невозможность доказательства* некоторых утверждений средствами данной системы.

Как мы увидим ниже, теорема Гёделя, которой посвящена наша книга, состоит в доказательстве невозможности доказательства некоторых арифметических утверждений средствами арифметики. Кроме того, разрешение старой проблемы об аксиоме параллельности неизбежно приводило к выводу, что аксиоматика Евклида отнюдь не является последним словом геометрии, — ведь можно, оказывается, построить новые геометрические системы, исходя из перечней аксиом, отличных от евклидовых и даже несовместимых с ними. Например, как хорошо известно, чрезвычайно интересные и плодотворные результаты были получены заменой евклидовой аксиомы параллельных допущением, согласно которому через

точку, лежащую вне данной прямой, можно провести более чем одну прямую, параллельную этой прямой, или же, напротив, допущением, согласно которому параллельных прямых вообще не бывает. Традиционное убеждение, что аксиомы геометрии (или вообще аксиомы любой науки) могут быть приняты на основании их «самоочевидности», было, таким образом, совершенно подорвано. Более того, постепенно стало все более и более ясным, что подлинным предметом чистой математики является *вывод теорем из постулированных допущений* и что вопрос о том, являются ли аксиомы, принятые математиком для той или иной цели, в самом деле *истинными*, есть совсем не его забота. Наконец, плодотворные модификации ортодоксальной геометрической аксиоматики привели к пересмотру и уточнению аксиоматической базы многих других математических дисциплин.

На аксиоматической основе были полностью перестроены и такие области науки, которые до тех пор строились лишь более или менее интуитивным образом. Например, так строилась обычная арифметика натуральных чисел, до тех пор пока в 1899 г. итальянский математик Дж. Пеано, исходящий из несколько более ранней аксиоматики немецкого математика Р. Дедекинда, не аксиоматизировал ее.

Из всех критических работ по основаниям математики в конечном счете вытекает, что привычная трактовка математики как некоей науки «о числах» только способна вводить в заблуждение и никоим образом не соответствует подлинной сути дела. Ведь стало совершенно очевидным, что математика есть попросту

наука, изучающая получение логических следствий из некоторых заданных аксиом, или постулатов. Фактически стало общепризнанным то обстоятельство, что математические выводы и заключения не имеют никакого другого смысла, помимо того в некотором роде специального смысла, который связан с терминами или выражениями, входящими в постулаты. Таким образом, математика оказалась даже еще значительно более абстрактной и формальной наукой, чем это было принято считать: более абстрактной — поскольку математические предложения в принципе могут быть истолкованы скорее как утверждения о чем угодно, а не как утверждения, относящиеся к некоторым фиксированным множествам предметов и неотъемлемым свойствам этих предметов; более формальной — поскольку правильность математических доказательств гарантируется чисто формальной структурой некоторых предложений, а отнюдь не содержанием этих предложений.

Постулаты любого раздела математики говорят вовсе не о специфических свойствах пространства, углов, точек, чисел, множеств и т. п., причем никакое специальное значение, которое можно связать с терминами (или «описательными предикатами»), фигурирующими в постулатах, решительно не играет роли в процессе доказательства теории. Повторяем: единственный вопрос, встающий перед чистым математиком (в отличие от естествоиспытателя, применяющего математику для решения конкретных задач), состоит вовсе не в том, истинны ли принятые им постулаты и полученные из постулатов следствия, а в том, действительно ли являются полученными им заключения

логически необходимыми следствиями из начальных допущений.

Как показал еще Давид Гильберт (1899), обычные значения, приписываемые первоначальным терминам, можно полностью игнорировать, и единственные «значения», которые следует с ними связывать, сводятся к тому, что о них сказано в аксиомах, описывающих свойства обозначаемых ими понятий.

- ❖ Можно сказать, что первоначальные термины «неявно» определены аксиомами и что все, что не покрывается *этим* неявными определениями, не играет никакой роли в доказательствах теорем.

Именно этот факт отражен в знаменитом афоризме Бертрانا Рассела: «Чистая математика — это такой предмет, где мы не знаем, о чем мы говорим, и не знаем, истинно ли то, что мы говорим».

В область чистой абстракции, очищенную от каких было ни было привычных ассоциаций, войти, конечно, не так-то легко. Но наградой нам служит свобода и непредвзятость мышления. Последовательная формализация математики освобождает наш разум от ограничений, которые привычная интерпретация математических выражений накладывает на вновь вводимые системы постулатов. Так возникли совершенно новые типы «алгебр» и «геометрий», весьма значительно отклоняющиеся от математических традиций. Поскольку значения некоторых терминов стали гораздо более общими, обозначаемые этими терминами понятия стали употребляться в более широком смысле, а выводы, делаемые с помощью этих

понятий, оказались подверженными меньшим ограничениям. Плодом формализации явились разнообразные системы, представляющие большой математический интерес и ценность.

Следует отметить, что некоторые из этих систем не допускают столь очевидных интуитивных (т. е. согласующихся с обыденным словоупотреблением) интерпретаций, как, например, евклидова геометрия или арифметика, но это обстоятельство отнюдь не должно внушать тревогу. Ведь интуиция — штука довольно-таки растяжимая. Нашим детям, возможно, нетрудно будет принять в качестве интуитивно очевидных истин некоторые парадоксальные утверждения теории относительности, не смущают же нас некоторые идеи, отнюдь не казавшиеся интуитивно очевидными нашим предкам. Интуиция — не слишком-то надежный руководитель; во всяком случае ее нельзя считать удовлетворительным критерием для оценки истинности и плодотворности научных открытий.

Однако усугубившаяся абстрактность математики породила и более серьезную проблему: для каждой данной системы постулатов встает вопрос, является ли она внутренне непротиворечивой, т. е. не может ли оказаться, что из этой системы выводятся теоремы, противоречащие друг другу. Проблема не представляется очень уж актуальной, если речь идет об аксиомах, описывающих некоторую определенную и хорошо известную область объектов; если данные аксиомы действительно верны для данной области объектов, вполне естественно считать систему непротиворечивой. Коль скоро, например, предполагалось, что

аксиомы Евклида являются истинными утверждениями о пространстве (или о пространственных объектах), то никакой математик до середины XIX столетия не стал бы просто и рассматривать всерьез вопрос о том, нельзя ли из этих аксиом получить пару противоречащих друг другу теорем. Такая уверенность в непротиворечивости евклидовой геометрии основывалась на том совершенно разумном принципе, согласно которому логически несовместимые утверждения не могут быть одновременно истинными; таким образом, никакое множество истинных утверждений (а именно это предполагалось относительно аксиом Евклида) не должно быть внутренне непротиворечивым.

Известны различные виды неевклидовых геометрий. Вначале системы аксиом для таких геометрий рассматривались как безусловно ложные по отношению к окружающему нас пространству, да и вопрос об их истинности относительно какой бы то ни было другой области казался весьма сомнительным. В связи с этим и проблема доказательства внутренней непротиворечивости неевклидовых систем казалась весьма трудной, если вообще осуществимой. Скажем, в геометрии Римана евклидов постулат параллельности заменяется соглашением, согласно которому через произвольную точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной. В таком случае возникает вопрос: а совместима ли система римановских постулатов? Кажется совершенно ясным, что пространству, данному нам в нашем повседневном опыте, система эта не соответствует. Каким же образом можно было бы тогда все-таки рас-

считывать установить непротиворечивость этой системы? Как доказать, что в такой системе не могут быть доказаны две противоречащие друг другу теоремы?

Для решения проблемы был предложен один общий метод. Основная идея его состоит в том, чтобы найти «модель» (или «интерпретацию») для абстрактных постулатов рассматриваемой системы, т. е. чтобы каждый постулат оказался истинным утверждением об объектах такой модели, что и свидетельствовало бы о непротиворечивости (совместимости) системы абстрактных постулатов. Рассмотрим, например, следующую систему постулатов, в формулировки которых входят два класса K и L , подлинная «природа» которых остается неопределенной, если не считать того, что сами постулаты «неявно» определяют эти классы.

1. Любые два (различных) члена класса K принадлежат в точности одному члену класса L .
2. Ни один член класса K не принадлежит более чем двум (различным) членам класса L .
3. Не все члены класса K принадлежат одному и тому же члену класса L .
4. Любым двум членам класса L принадлежит в точности один общий для них член класса K .
5. Ни одному члену класса L не принадлежит более чем два элемента класса K .

Из этого небольшого перечня постулатов мы можем, пользуясь обычными правилами логического вывода, вывести несколько теорем. Например, можно показать, что K содержит в точности три члена. Но сов-

местима ли данная система постулатов? Нельзя ли из них получить противоречие? Этот вопрос решается (отрицательно) с помощью следующей модели.

Пусть K есть класс точек, членами которого являются вершины некоторого треугольника, а L — класс отрезков прямых, членами которого являются стороны этого же треугольника. Условимся понимать предложение «член класса K принадлежит члену класса L » как утверждение о том, что данная точка-вершина принадлежит данному отрезку-стороне. При таком понимании каждый из перечисленных пяти постулатов оказывается истинным утверждением. Например, первый постулат утверждает тогда попросту, что любые две точки, являющиеся вершинами некоторого треугольника, принадлежат в точности одному отрезку, служащему стороной этого треугольника. Аналогичным образом мы убеждаемся в истинности остальных постулатов и в совместимости всей данной системы постулатов в целом.

Непротиворечивость геометрии Римана также, оказывается, можно установить при помощи модели, реализующей ее постулаты. Мы можем интерпретировать (истолковать) слово «плоскость», фигурирующее в формулировках римановских аксиом, как поверхность некоторой (евклидовой!) сферы, под «точкой» понимать точку, лежащую на этой сферической поверхности, под «прямой» — дугу большого круга этой поверхности и т. п. Тогда каждый постулат римановской системы оказывается теоремой евклидовой геометрии. Скажем, риманов постулат параллельности при такой интерпретации гласит: «Через точку, лежа-

щую на поверхности сферы, нельзя провести ни одной дуги большого круга этой сферы, которая не пересекала бы произвольной данной окружности большого круга, выбранной на этой поверхности».

Но приведенное рассуждение не является исчерпывающим доказательством непротиворечивости геометрии Римана: ведь оно существенно опирается на допущение о непротиворечивости геометрии Евклида. Так что теперь неизбежно встает вопрос: а действительно ли непротиворечива сама геометрия Евклида?

По давно установившейся традиции на такой вопрос отвечали обычно в том духе, что «аксиомы Евклида истинны, а стало быть, и непротиворечивы». Но такой ответ мы уже не можем более рассматривать как удовлетворительный (мы еще вернемся к этой теме и разъясним подробнее, в чем именно заключается его неудовлетворительность). Другой ответ состоит в том, что евклидовские аксиомы согласуются с фактическими — хотя и ограниченными — данными нашего опыта и наблюдения, относящимися к пространству, и что, принимая эти аксиомы, мы вправе обобщить, экстраполировать наши знания о некоторой ограниченной области. Однако самое большее, на что мы можем рассчитывать, исходя из таких «индуктивных» соображений, — то, что аксиомы «правдоподобны», истинны «с большой вероятностью».

Следующий важный шаг в решении обсуждаемой здесь проблемы непротиворечивости евклидовой геометрии предпринял Гильберт. Основная идея его метода подсказана аналитической геометрией, восходящей еще к Декарту. В предложенной Гильбертом «декар-

товской» интерпретации евклидовских аксиом они очевидным образом становятся истинными алгебраическими утверждениями. Например, фигурирующее в аксиомах плоской геометрии слово «точка» должно означать теперь пару действительных чисел, «прямая» — числовое соотношение, выражаемое уравнением первой степени с двумя неизвестными, «окружность» — числовое соотношение, выражаемое квадратным уравнением некоторого специального вида, и т. д. Геометрическое предложение, гласящее, что две различные точки однозначным образом определяют некоторую прямую, переходит теперь в истинное утверждение алгебры, согласно которому две различных пары действительных чисел однозначно определяют некоторое линейное уравнение; геометрическая теорема, согласно которой прямая и окружность пересекаются не более чем в двух точках, переходит в алгебраическую теорему о том, что система, состоящая из линейного и квадратного уравнений с двумя неизвестными, имеет самое большее две пары действительных корней, и т. д. Короче говоря, непротиворечивость евклидовских постулатов обосновывается тем обстоятельством, что они выполняются на некоторой алгебраической модели.

Такой метод доказательства непротиворечивости весьма плодотворен и эффективен. Но и при этом остаются высказанные выше возражения. В самом деле, ведь и здесь проблема, поставленная для одной области, лишь переводится в другую область. Гильбертовское доказательство непротиворечивости его системы геометрических постулатов показывает, что если «алгебра» (точнее, арифметика действительных чисел)

непротиворечива, то непротиворечива и эта геометрия. Ясно, что доказательство, существенно зависящее от предположения о непротиворечивости некоторой другой системы, не является «абсолютным» доказательством непротиворечивости.

Все попытки решения проблемы непротиворечивости наталкивались на одно и то же затруднение: аксиомы интерпретировались с помощью моделей, содержащих бесконечное множество элементов. Ввиду этого ни одну из таких моделей нельзя было обозреть в конечное число шагов, так что истинность аксиом все еще оставалась под сомнением. Индуктивное рассуждение, обосновывающее истинность евклидовой геометрии, использует лишь конечное число наблюдаемых фактов, согласующихся, по-видимому, с аксиомами. Но заключение, по которому эта согласованность аксиом с наблюдаемыми фактами сохраняет свою силу для всей области и может служить оправданием системы аксиом в целом, само основано на экстраполяции от конечного к бесконечному.

Каким образом можно было бы обосновать законность скачка через пропасть, отделяющую конечное от бесконечного? Следует отметить, что упомянутая трудность уменьшается, — если и не совсем устраняется, — когда удастся построить модель, состоящую лишь из конечного числа элементов. Примером такой конечной модели может служить описанная выше модель-треугольник, посредством которой мы установили совместимость постулатов, описывающих классы K и L . В таких случаях сравнительно легко фактически проверить, действительно ли все элемен-

ты модели удовлетворяют постулатам, и тем самым убедиться в истинности (а значит, и в совместимости) самих постулатов. Скажем, истинность первого из упомянутых только что постулатов удостоверяется тем фактом, что через каждые две вершины «модельного» треугольника действительно проходит в точности одна его сторона. Поскольку все элементы такой модели и интересующие нас отношения между ними доступны непосредственно и полному обозрению, а опасности двусмысленного истолкования результатов такого исследования практически нет, совместимость системы постулатов не может быть подвергнута хоть сколько-нибудь обоснованному сомнению.

Но, к сожалению, бóльшая часть систем постулатов, используемых в качестве основы существенно важных разделов математики, не может быть интерпретирована с помощью конечных моделей. Поэтому мы явно заходим в тупик. Конечные модели в принципе достаточны для установления совместимости некоторых систем постулатов; но эти системы имеют для математики второстепенное значение. Бесконечные же модели, необходимые для интерпретации большей части важных для математики систем постулатов, мы умеем описывать лишь в самых общих словах и не можем дать никакой твердой гарантии, что такие описания сами свободны от скрытых противоречий.

Конечно, хотелось бы быть уверенными в непротиворечивости формулировок, описывающих бесконечные модели, но таких, что все используемые ими основные понятия представляются совершенно «ясными» и «отчетливыми». Но история науки не может

похвастаться тем, что ей везло на доктрины, оперирующие исключительно ясными и отчетливыми идеями и покаящиеся на твердой интуитивной основе, а именно на них и приходится делать весь расчет. В некоторых областях математики, для которых существенную роль играют различные допущения о бесконечных совокупностях, были обнаружены весьма серьезные противоречия, и это несмотря на интуитивную ясность понятий, используемых при этом, и кажущуюся корректность применяемых в данных теориях умственных конструкций. Такие противоречия (именуемые обычно «антиномиями») были обнаружены, в частности, в построенной Георгом Кантором в конце XIX в. теории бесконечных множеств; противоречия эти показали, что кажущаяся ясность даже такого элементарного понятия, как понятие множества (класса, совокупности), не может обеспечить непротиворечивости ни одной конкретной системы, в которой используется такое понятие. Поскольку же математическая теория множеств, в которой рассматриваются свойства совокупностей элементов, часто провозглашается основой для остальных разделов математики (в частности, элементарной арифметики), естественно спросить, не проникают ли противоречия, подобные тем, что были обнаружены в формулировке теории бесконечных множеств, и в другие математические дисциплины.

И в подтверждение такого подозрения Бертран Рассел построил противоречие, оставаясь исключительно в рамках элементарной логики, — противоречие, в точности подобное тому, что было обнаружено первоначально в канторовской теории бесконечных клас-

сов (множеств). Антиномию Рассела можно описать следующим образом. Будем различать классы в зависимости от того, являются ли они своими собственными элементами или нет. Назовем класс «нормальным» в том и только в том случае, когда он не содержит самого себя в качестве элемента; в противном же случае будем называть класс «ненормальным». Примером нормального класса может служить класс всех математиков — ведь сам такой класс не является, очевидно, математиком и не является потому своим собственным элементом. Примером ненормального класса является класс всех мыслимых вещей; сам этот класс является, очевидно, «мыслимой вещью», а тем самым — и своим собственным элементом.

Определим теперь класс N — класс всех нормальных классов. Является ли N нормальным классом? Если N нормален, то он является своим собственным элементом (ведь, по определению, N содержит все нормальные классы). Но в таком случае N ненормален, так как в силу данного выше определения класс, содержащий самого себя в качестве элемента, является ненормальным. С другой стороны, если N — ненормальный класс, то он (в силу определения понятия ненормальности) является своим собственным элементом; но в таком случае N нормален, так как выше определено, что элементами N являются лишь нормальные классы. Короче говоря, N нормален тогда и только тогда, когда N ненормален. Отсюда следует, что утверждение « N — нормальный класс» является в одно и то же время истинным и ложным. Это противоречие неминуемо следует из некритического, безоговорочного употребления представляющегося столь

ясным понятия класса (множества). Впоследствии были обнаружены и другие парадоксы, причем каждый из них строился с помощью хорошо известных и вроде бы бесспорных приемов рассуждения. Математикам пришлось прийти к выводу, что при построении претендующих на непротиворечивость систем общезвестность и интуитивная ясность идей являются далеко не надежной основой.

Мы убедились в важности проблемы непротиворечивости (совместимости) и ознакомились с классическим, «стандартным», методом ее решения с помощью моделей. Мы видели, что проблема эта обычно требует использования бесконечных моделей, описание которых, однако, само чревато внутренними противоречиями. Нам придется согласиться поэтому, что метод моделей имеет ограниченную ценность в качестве орудия решения проблемы и недостаточен для получения окончательного ответа на нее.

3

Абсолютные доказательства непротиворечивости

Принципиальные ограничения, препятствующие использованию моделей для установления непротиворечивости и перерастающие в уверенность подозрения, что многие математические системы чреваты внутренними противоречиями, привели к тому, что были предприняты совершенно новые попытки решения проблемы непротиворечивости. Альтернативный — по отношению к упоминавшимся до сих пор доказательствам относительной непротиворечивости — подход был указан Гильбертом. Его целью было построение «абсолютных» доказательств непротиворечивости различных систем — доказательств, не исходящих из предположений о непротиворечивости какой-либо другой системы. Чтобы понять сущность открытия Гёделя, нам понадобится разобраться в общих чертах в гильбертовском подходе к проблеме.

Первым шагом построения абсолютного доказательства непротиворечивости, согласно такому подходу, должна явиться *полная формализация* исследуемой

дедуктивной системы, состоящей, грубо говоря, в том, что все входящие в данную, систему выражения рассматриваются как лишенные какого бы то ни было значения — просто как некоторые сочетания символов. Способы соединения символов и обращения с составленными из них выражениями четко предусмотрены специальными правилами. В результате мы получаем систему символов (называемую «исчислением»), содержащую все те и только те символы, на которые мы явным и недвусмысленным образом указали. Постулаты и теоремы полностью формализованной системы — просто «строчки» (т. е. конечные последовательности) ничего не означающих значков, построенные из элементарных символов согласно правилам данной системы. В такой полностью формализованной системе вывод теорем из постулатов — не что иное, как преобразование (согласно правилам системы) одной совокупности «строчек» в другую. Поступая таким образом, мы избегаем опасности, связанной с неявным использованием каких-либо сомнительных методов рассуждения.

Формализация — дело довольно-таки трудное и требующее немалой изобретательности; но она хорошо служит намеченной задаче. Формализация позволяет ясно видеть структуру системы и назначение отдельных ее элементов аналогично тому, как структура и работа отдельных узлов какой-нибудь машины легче уясняются на модели такой машины, чем при рассмотрении самой машины. Логические соотношения между отдельными предложениями становятся после формализации хорошо обозримыми; мы видим в ней структурные соотношения между различными

«строчками» и «бессмысленными» символами, выясняем, каким образом они связаны друг с другом, правила их комбинации и взаимного следования и т. п.

До сих пор мы говорили, что «бессмысленные» значки такой формализованной математики ничего не *утверждают* — это пока просто некая абстрактная картинка, иллюстрирующая строение интересующей нас системы. Но, конечно, строение такой картинки — а тем самым и иллюстрируемой ею системы — мы можем описывать на обычном человеческом языке, делая определенные высказывания, относящиеся к ее общей конфигурации и соотношениям отдельных ее элементов.

Мы можем, например, отметить простоту или симметричность какой-нибудь «строчки», сходство ее с некоторой другой «строчкой» можем заметить, что одна «строчка» может быть представлена в виде сочленения трех других «строчек» и т. п. Такие высказывания, безусловно, осмыслены и, более того, могут выражать весьма существенную информацию о нашей формальной системе. Следует, однако, сразу же отметить, что все эти осмысленные высказывания о бессмысленной (или, что то же самое, — формализованной) математике никоим образом не принадлежат сами по себе этой математике. Они относятся к области, которую Гильберт назвал «метаматематикой», к языку, *на котором* говорят о математике. Метаматематические высказывания — это высказывания о символах, входящих в формализованную математическую систему (т. е. в исчисление), о видах символов, об их упорядочении внутри формальной системы, о способах

составления из этих символов более длинных знакосочетаний («строчек»), которые естественно называть «формулами» системы, наконец, о соотношениях между формулами, в частности о том, какие формулы могут быть получены (по фиксированным нами правилам обращения с ними) в качестве «следствий» других формул.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих различие между математикой и метаматематикой. Скажем, выражение « $2 + 3 = 5$ » принадлежит математике (арифметике) и строится исходя лишь из элементарных арифметических символов, в то время как высказывание «„ $2 + 3 = 5$ “ есть арифметическая формула» утверждает нечто об этом выражении. Оно само по себе не выражает никакого арифметического факта и не принадлежит формальному языку арифметики, а относится к метаматематике, характеризуя некоторую строчку, составленную из арифметических символов, как формулу.

Формулы

$$x = x,$$

$$0 = 0,$$

$$0 \neq 0$$

принадлежат математике (арифметике); каждая из них составлена из одних только арифметических знаков. Высказывание же «„ x “ есть переменная» относится уже к метаматематике, поскольку оно характеризует некоторый арифметический символ, утверждая, что он принадлежит некоторому специальному классу символов (а именно, классу переменных). При-

надлежит метаматематике и высказывание «формула „ $0 = 0$ “ выводима из формулы „ $x = x$ “ посредством подстановки „ 0 “ вместо переменной „ x “, описывающее определенное отношение между некоторыми двумя формулами. Относится к метаматематике и утверждение «„ $0 \neq 0$ “ не есть теорема», гласящее, что некоторая арифметическая формула не может быть выведена из аксиом арифметики. Метаматематике, конечно, принадлежит и высказывание «арифметика непротиворечива» (иными словами, из аксиом арифметики нельзя вывести двух взаимно противоречивых формул, например формул « $0 = 0$ » и « $0 \neq 0$ »). Ясно, что это высказывание гласит нечто об арифметике, а именно, оно утверждает, что пары арифметических формул определенного вида не находятся в определенном отношении к формулам, составляющим систему аксиом арифметики.

Следует отметить, что все эти метаматематические высказывания не содержат никаких математических знаков и формул, а содержат лишь их имена. Различие между выражениями и именами выражений очень важно. Кстати, и в обычном разговорном языке никакое предложение не содержит объектов, о которых в нем говорится, — оно содержит лишь их имена. Скажем, когда мы говорим о каком-нибудь городе, то мы вставляем в предложение не сам город, а его имя (название). Точно так же, если мы хотим сказать что-нибудь о каком-либо слове (или вообще любом языковом выражении), то мы должны использовать в качестве члена предложения не само слово/выражение, а его имя. Обычно это делается при помощи кавычек. Наше изложение как раз и следует этому обычаю. Мы можем сказать, например, «Чикаго — большой город». Но фраза «Чикаго состоит из трех слогов» бессмысленна (безграмотна). Чтобы выразить последнее утверждение правильно, мы должны написать: «„Чикаго“ состоит из трех слогов».

Точно так же неверно было бы написать:

« $x = 5$ есть уравнение».

Правильная запись такова:

«„ $x = 5$ “ есть уравнение».

Конечно, различие между теорией и метатеорией может относиться не только к математике — ведь это просто хорошо известное всем нам различие между каким-либо изучаемым нами предметом и разговорами об этом предмете. Например, высказывание «у птиц из рода плавунчиков яйца высиживают самцы» относится к предмету, изучаемому зоологами, и принадлежит зоологии; но если мы скажем, что утверждение относительно плавунчиков показывает, что в зоологии есть много загадочного, то это уже будет утверждение не о плавунчиках, а о предыдущем высказывании, и дисциплину, в которую входит такое суждение, следовало бы назвать метазоологией.

Точно таково же соотношение между математикой и метаматематикой: предмет первой составляют сами формальные системы, которые придумывают математики, предмет второй — описание таких формальных систем, выяснение и обсуждение их свойств.

Важность столь настоятельно подчеркиваемого нами различия математики и метаматематики трудно переоценить. Игнорирование или недооценка этого различия приводят к недоразумениям, а то и к прямым противоречиям. Осознание его важности позволило глубже уяснить логическую структуру математических методов рассуждения и четко регламентировать

употребление различных формальных символов, превращая математику в чисто формальное исчисление, свободное от всяческих неявно подразумеваемых допущений и побочных смысловых ассоциаций. Только на базе таких новых представлений стало возможным дать точные определения математических операций и логических правил, которыми математики пользовались до тех пор без ясного понимания того, что же, собственно, они делают.

Гильберт уловил самую суть проблемы, положив в основу своих попыток построения «абсолютных» доказательств непротиворечивости различие между формальным исчислением и его описанием. Он поставил задачу развития специального метода, с помощью которого можно было бы проводить доказательства непротиворечивости той же степени убедительности, что и доказательства, использующие конечные модели, на которых реализуются определенные системы постулатов. Искомый метод должен был бы состоять в исчерпывающем анализе конечного числа структурных свойств выражений в полностью формализованных исчислениях. Анализ должен исходить из точной фиксации различных видов, входящих в рассматриваемое исчисление символов, указания на способы соединения этих символов в формулы, описания способа вывода одних формул из других и давать способ решения вопроса, выводимы ли формулы какого-либо определенного вида из некоторых определенных формул посредством явно сформулированных правил оперирования с формулами. Гильберт был убежден в том, что каждое математическое исчисление можно представить «на геометрический манер», т. е. в виде

такой совокупности формул, каждая из которых связана с любой другой формулой того же исчисления лишь структурными соотношениями из некоторого конечного перечня соотношений.

На этом убеждении и основывался его расчет, что он сумеет посредством систематического и исчерпывающего обозрения этих структурных свойств выражений данной системы показать, что из аксиом данного исчисления нельзя получить формально противоречащие друг другу формулы. Существеннейшим условием гильбертовской программы в первоначальной ее формулировке было разрешение употреблять в доказательствах непротиворечивости лишь такие приемы рассуждений, которые ни в какой форме не используют ни бесконечного множества структурных свойств формул, ни бесконечного множества операций над формулами.

Такие методы рассуждений он назвал «финитными», а доказательства непротиворечивости, проведенные финитными средствами, — «абсолютными». «Абсолютное» доказательство достигает своей цели с помощью некоторого минимального арсенала принципов вывода и не исходит из непротиворечивости никакой другой системы аксиом. Таким образом, если бы, например, удалось получить абсолютное доказательство непротиворечивости арифметики, оно должно было бы посредством некоторой финитной метаматематической процедуры установить невозможность одновременного вывода из аксиом (т. е. из исходных формул) арифметики с помощью фиксированных правил вывода никакой пары взаимно противो-

речивых формул, скажем « $0 = 0$ » и ее отрицания « $\sim (0 = 0)$ » (здесь знак « $\sim$ » означает «не»).

Вполне точных указаний на то, какие именно математические методы следует считать «финитными», Гильберт не дал. В первоначальной формулировке его программы требования, которым должны были удовлетворять абсолютные доказательства непротиворечивости, были значительно более сильными, чем в последующих разъяснениях гильбертовской программы, данных представителям школы Гильберта. ♦

Будет, пожалуй, бесполезно сравнить метаматематику, понимаемую как теорию доказательства, с теорией шахматной игры. В шахматы играют с помощью 32 фигур определенного вида, передвигающихся по квадратной доске, разделенной на 64 клетки, причем передвижения эти («ходы») совершаются по некоторым строго определенным правилам. Разумеется, для игры не требуется никакой «интерпретации» фигур и их различных положений на доске, хотя такую интерпретацию при желании можно было бы и придумать. Например, можно было бы считать, что пешки — это армейские полки, а клетки доски — определенные географические районы и т. п. Но такого рода соглашения (интерпретации) не употребительны — на самом деле ни фигуры, ни клетки доски, ни положения фигур не означают ровно ничего *вне* игры как таковой. Иначе говоря, можно было бы сказать, что фигуры и их положения на доске «бессмысленны». Таким образом, игра в шахматы является далеко идущим аналогом формализованного математического исчисления. Фигуры и клетки доски соответствуют элементарным символам исчисления; допустимые правилами игры позиции соответствуют формулам исчисления; начальная позиция

партии (или любой шахматной задачи) соответствует набору аксиом исчисления; последующие позиции — формулам, выводимым из аксиом (т. е. теоремам); наконец, правила игры соответствуют правилам вывода (правилам преобразования) исчисления. Аналогия простирается и дальше. Хотя сами по себе позиции (расположения фигур на доске), подобно формулам исчисления, «бессмысленны», высказывания об этих позициях, подобно метаматематическим высказываниям о формулах, вполне осмысленны.

«Меташахматное» утверждение может, например, гласить, что в данной позиции у белых возможны двадцать различных ходов, или, скажем, что в данной позиции белые, начиная, могут заматовать черных за три хода. Более того, можно говорить и об общих «меташахматных» теоремах, в доказательствах которых используется наличие лишь конечного числа возможных позиций. Можно, например, получить теорему относительно числа возможных ходов для белых в начальной (или любой другой) позиции; или, скажем, доказать теорему, согласно которой два белых коня с королем не могут форсировать мат одиночному черному королю. Эти и другие «меташахматные» теоремы удастся, таким образом, доказывать, пользуясь финитными методами рассуждений, т. е. исследуя лишь конечное число возможных позиций, удовлетворяющих четко сформулированным условиям. Совершенно аналогично цель гильбертовской теории доказательства состоит в доказательстве такого же рода финитными методами невозможности вывода противоречащих друг другу формул в данном математическом исчислении.

4

Систематическое построение формальной логики

Прежде чем перейти к самой теореме Гёделя, нам придется преодолеть еще два препятствия. Прежде всего нам надо разобраться, зачем, собственно, ему понадобилась *Principia Mathematica* Уайтхеда и Рассела и в чем суть этой системы; далее, нам понадобится рассмотреть в качестве примера формализации дедуктивной системы один небольшой фрагмент системы *Principia*, и показать, как можно получить абсолютное доказательство непротиворечивости этого фрагмента.

Обычно, даже если математические доказательства проводятся с соблюдением общепринятых норм профессиональной строгости, эта строгость существенно умалется в результате некоторого упрощения весьма принципиального характера. Дело в том, что принципы (правила) вывода, употребляемые в доказательствах, в явной форме не формулируются, так что математики применяют их не вполне осознанно. Возьмем, например, евклидовское доказательство того факта, что не существует наибольшего простого числа (це-

лое число, как известно, называется простым, если оно не делится без остатка ни на одно число, кроме единицы и самого себя). Доказательство, проводимое методом *reductio ad absurdum* (от противного), выглядит следующим образом.

Пусть, в противоречии с доказываемым утверждением, имеется наибольшее простое число. Обозначим его через « x ». Тогда:

1. x есть наибольшее простое число.
2. образуем произведение всех простых чисел, меньших или равных x , и прибавим к этому произведению число 1. В результате получим некоторое число y :

$$y = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times x) + 1.$$

3. Если y само есть простое число, то x не есть наибольшее простое число, так как y , очевидно, больше x .
4. Если y — составное число (т. е. не является простым), то и тогда x не есть наибольшее простое число; в самом деле, если y — составное, то оно должно иметь некоторый простой делитель z ; но z непременно должно быть отличным от всех простых чисел 2, 3, 5, 7, ..., x , меньших или равных x , так что z должно в этом случае быть простым числом, превосходящим x .
5. Но y есть либо простое, либо составное число.
6. Следовательно, x не есть наибольшее простое число.
7. Наибольшего простого числа не существует.

Мы выписали здесь только основные шаги доказательства. Можно, однако, показать, что для восполнения всей цепочки рассуждений так или иначе пришлось бы использовать некоторые неявно подразумеваемые правила вывода и законы (теоремы) логики. Некоторые из этих правил и законов принадлежат самой элементарной части формальной логики, другие — более высоким ее разделам, например правила и законы, составляющие так называемую «теорию квалификаций». В этой теории формулируются правила употребления «кванторных» оборотов речи, вроде «все», «некоторые» и их синонимов. Приведем здесь примеры элементарной логической теоремы и правила вывода, используемые, хотя и неявно, в приведенном выше доказательстве теоремы Евклида.

Обратите внимание на 5-й шаг этого доказательства. Откуда он, собственно, получен? — Из логической теоремы («необходимой истины»), согласно которой «либо p , либо не p », где через « p » обозначена переменная («пропозициональная переменная»). Но как же именно 5-й шаг доказательства получается из этой теоремы? Посредством правила вывода, называемого «правилом подстановки вместо пропозициональных переменных», согласно которому из любого высказывания можно вывести другое высказывание, подставляя вместо каждого вхождения в исходное высказывание некоторой пропозициональной переменной (в нашем примере переменной « p ») любого (одного и того же) высказывания (в рассматриваемом случае высказывания « y — простое число»). Применение такого рода правил и логических теорем, как мы уже

отмечали, происходит на каждом шагу, но часто совершенно неосознанным образом. Явная же формулировка правил (даже для столь простого случая, как теорема Евклида) есть достижение лишь последнего столетия в истории логики.

Подобно мольеровскому господину Журдену, всю жизнь говорившему прозой, но не подозревавшему об этом обстоятельстве, математики в течение по крайней мере двух тысячелетий обходились без точной формулировки принципов, лежащих в основе всех их рассуждений. Понимание подлинной природы таких принципов — достижение самого недавнего времени.

Почти две тысячи лет аристотелевская теория правильных форм логического вывода безоговорочно считалась исчерпывающей и не нуждающейся в дальнейшей разработке. Еще в 1787 г. Иммануил Кант говорил, что формальную логику Аристотеля «не продвнешь дальше ни на один шаг — это наиболее завершенная и полная из всех наук». На самом же деле традиционная логика существеннейшим образом не полна, и средств ее недостаточно для обоснования многих принципов вывода, используемых даже во вполне элементарных математических рассуждениях.

- ❖ Простым примером могут служить принципы, используемые при следующем выводе: $5 > 3$, следовательно, $5^2 > 3^2$.

Возрождение логических исследований в новое время началось с опубликования «Математического анализа логики» Джорджа Буля (1847). Буль и его последователи занимались прежде всего разработкой так называемой алгебры логики, посвященной выяснению

и уточнению более общих и более разнообразных типов логической дедукции, нежели подпадающие под традиционные логические принципы. С помощью булевой техники легко выражаются, конечно, и традиционные умозаключения.

Другое направление исследований, тесно связанное с разработкой математиками XIX столетия проблематики оснований анализа, также оказалось близким программе Буля. Целью нового направления было представить всю чистую математику как часть формальной логики. Классическое выражение эта линия развития логики и математики получила в *Principia Mathematica* Уайтхеда и Рассела (1910–1913). Математикам XIX-го столетия удалось «арифметизировать» алгебру и так называемое «исчисление бесконечно малых», показав, что различные понятия, используемые в математическом анализе, определены исключительно в арифметических терминах (т. е. в терминах целых чисел и арифметических операций над ними). Например, вместо того чтобы допускать мнимое число $\sqrt{-1}$ в качестве некоей мистической «сущности», его стали определять как упорядоченную пару целых чисел $(0, 1)$, причем над такими парами разрешено было производить определенного рода операции «сложения» и «умножения». Аналогично, иррациональное число $\sqrt{2}$ теперь стали определять как некоторый класс рациональных чисел, а именно, как класс рациональных чисел, квадраты которых меньше 2. Рассел же (а еще ранее немецкий математик Готтлоб Фреге) поставил своей целью показать, что все арифметические понятия можно определить в чисто логических терминах, а все аксиомы ариф-

метики вывести из небольшого числа предложений, которые можно было бы квалифицировать как чисто логические истины.

Приведем пример. В логике имеется понятие *класса*. Два класса, по определению, «подобны», если между их членами можно установить взаимно-однозначное соответствие (причем понятие взаимно-однозначного соответствия само может быть определено в терминах других логических понятий). Класс, имеющий единственный член, называется «единичным классом» (таков, например, класс естественных спутников Земли); кардинальное (количественное) число 1 определяется как класс всех классов, подобных какому-либо единичному классу. Аналогично можно определить и другие кардинальные числа; различные арифметические операции (сложение, умножение и т. д.) также можно определить через понятия формальной логики. Произвольное арифметическое утверждение (скажем, « $1 + 1 = 2$ ») можно теперь представить как сокращенную запись некоторого утверждения, составленного исключительно из выражений, принадлежащих обычной логике, и все такие чисто логические утверждения, как можно показать, выводимы из некоторой системы логических аксиом.

Таким образом, *Principia Mathematica* явилась существенным продвижением в решении проблемы непротиворечивости математических систем, в частности арифметики, в том смысле, что посредством этой системы *P. M.* было достигнуто некоторое сведение упомянутой проблемы к проблеме непротиворечивости самой формальной логики. В самом деле, если ак-

сиомы арифметики суть просто-напросто сокращенные записи некоторых теорем логики, то вопрос о том, совместимы ли арифметические аксиомы, эквивалентен вопросу о совместимости основных логических аксиом.

Далеко не все математики (по разным причинам) согласились с тезисом Фреге—Рассела, согласно которому математика есть не что иное, как часть логики. Кроме того, как мы уже отмечали, антиномии канторовской теории бесконечных множеств, если не принять специальных мер предосторожности, легко воспроизводятся и в рамках чистой логики. Но независимо от степени приемлемости самого по себе тезиса Фреге—Рассела два достоинства системы *P.M.* позволяют считать ее неоценимым достижением на пути к дальнейшему изучению проблемы непротиворечивости. В *Principia* разработана замечательная своей краткостью система обозначений, при помощи которой все предложения чистой математики (в частности, арифметики) могут быть записаны некоторым стандартным образом. Кроме того, в этой книге явным образом сформулировано большинство правил вывода, используемых в математических доказательствах (быть может, известных и ранее, но не в столь точном и полном виде). Резюмируя, можно сказать, что в *Principia* создан весьма совершенный инструмент для исследования всей системы арифметики как неинтерпретированного исчисления, т. е. как системы бессмысленных значков, из которых посредством точно сформулированных правил образуются и преобразуются «строчки» знаков — формулы.

5

Один пример абсолютного доказательства непротиворечивости

Нам придется теперь выполнить вторую задачу из упомянутых в начале предыдущего раздела и ознакомиться с одним важным, хотя и вполне доступным, примером абсолютного доказательства непротиворечивости. Усвоив это доказательство, читатель сможет лучше оценить значение работы Гёделя.

Мы покажем здесь коротко, как можно формализовать элементарную логику высказываний, являющуюся некоторым фрагментом системы, описанной в *Principia Mathematica*. В результате формализации упомянутый фрагмент *Principia* станет исчислением, состоящим из неинтерпретированных символов. После этого мы уже сможем провести нужное нам доказательство.

Формализация проходит в четыре этапа. Прежде всего нам понадобится полный перечень символов, которые используются в нашем исчислении, они со-

ставят так называемый алфавит системы. Далее нам надо будет сформулировать «правила образования», согласно которым из «букв» алфавита составляются «формулы» (причем только такие, «правильно составленные», сочетания символов мы будем считать предложениями нашей системы). Можно было бы считать совокупность правил «грамматикой» исчисления. Затем мы отбираем некоторые формулы нашей системы в качестве ее аксиом (или «исходных формул»), аксиомы служат «базисом» системы. И, наконец, мы сформулируем «правила преобразования», точно описывающие, каким образом из одних формул некоторого вида «выводятся» другие формулы определенного вида; иначе говоря, правила эти — не что иное, как правила вывода. *Теоремой* нашей системы мы будем называть теперь любую формулу, получаемую посредством последовательного применения правил преобразования к аксиомам. Формальным «доказательством» мы будем называть любую конечную последовательность формул рассматриваемого исчисления, каждая из которых либо является аксиомой, либо выводима из предшествующих формул данной последовательности с помощью правил преобразования ¹⁾.

Алфавит логики высказываний (называемой часто «пропозициональным исчислением») очень несложен. Он состоит из переменных и констант. Переменные,

¹⁾ Из этого определения немедленно вытекает, что аксиомы также причисляются к теоремам (доказательство каждой такой теоремы состоит из единственной формулы — из нее самой). — *Прим. перев.*

поскольку вместо них можно подставлять предложения (*sentences*) системы, называют сентенциональными (чаще — пропозициональными) переменными. В качестве переменных мы будем использовать буквы « p », « q », « r », ..., « p_1 », « p_2 » ..., « q_1 », « q_2 »

Постоянные символы (константы) — это «пропозициональные» связки и знаки препинания. Мы будем употреблять следующие пропозициональные связки: « $\sim$ » читается как «не»; $\vee$ — «или»; « $\supset$ » — «если..., то...»; « $\cdot$ » — «и»; знаки препинания: «(» — «левая скобка», «)» — «правая скобка».

Действительно, перечисленные связки возникли как сокращенные обозначения для указанных в скобках выражений; более того, при устном чтении формул исчисления высказываний этими выражениями часто называют соответствующие формальные символы (скажем, формула « $\sim p \vee q$ » читается как «не p или q » и т. п.). Следует, однако, твердо помнить, что эти «названия» связок не нужны для описания исчисления (неинтерпретированного!) как такового; они относятся к его метатеории, и, скажем, электронно-вычислительная машина, производящая операции с формулами исчисления высказываний как с таковыми, в такого рода «названиях» не нуждается. — Прим. перев. ❖

Правила образования указывают, какие именно комбинации элементарных символов алфавита мы будем считать формулами нашего исчисления. Прежде всего формулой, по определению, является каждая пропозициональная переменная. Далее, если « S » обозначает некоторую формулу²⁾, то ее «формальное отрицание» « $\sim (S)$ » также есть формула. Аналогич-

²⁾ Именно обозначает, но не является формулой (является именем формулы); S , не принадлежащая алфавиту описываемого исчисления, относится к его метаязыку. — Прим. перев.

но, если « S_1 » и « S_2 » суть обозначения некоторых формул, то выражения « $(S_1) \vee (S_2)$ », « $(S_1) \supset (S_2)$ » и « $(S_1) \cdot (S_2)$ » также суть формулы.

Примеры формул:

« p », « $\sim p$ », « $(p) \supset (q)$ », « $((q) \vee (r)) \supset (p)$ ».

Однако выражения « $(p)(\sim q)$ » или « $((p) \supset (q)) \vee$ » формулами не являются, так как они не удовлетворяют приведенному здесь определению формулы³⁾.

Правил преобразования имеется два. Первое из них — *правило подстановки* (вместо пропозициональных переменных) — гласит, что из произвольной формулы можно вывести другую формулу посредством одновременной подстановки некоторой формулы вместо некоторой входящей в исходную формулу пропозициональной переменной, причем такая подстановка (одна и та же) должна производиться вместо *каждого вхождения* выбранной переменной. Например, из формулы « $p \supset p$ » можно, подставив вместо переменной « p » переменную (а тем самым — формулу) « q », вывести формулу « $q \supset q$ »; подставив в ту же исходную формулу вместо « p » формулу « $p \vee q$ », мы выведем формулу « $(p \vee q) \supset (p \vee q)$ » и т. п. Или, если интерпретировать « p » и « q » как некоторые русские предложения, то из « $p \supset p$ » можно, например, получить предложения «Лягушки квакают $\supset$ лягушки квакают», «(Летучие мыши слепы $\vee$ летучие мыши едят мышей) $\supset$ (летучие мыши слепы $\vee$ летучие мыши едят мышей)» и т. п. Второе правило преобра-

³⁾ В тех случаях, когда нечего опасаться недоразумений, часть скобок в записях формулы опускают.

зования — это так называемое *правило отделения* (или *modus ponens*). Согласно этому правилу из любых двух формул, имеющих соответственно вид « S_1 » и « $S_1 \supset S_2$ », можно вывести и формулу « S_2 ». Например, из формул « $p \vee \sim p$ » и « $(p \vee \sim p) \supset (p \supset p)$ » мы можем вывести « $p \supset p$ ».

Наконец, аксиомами нашего исчисления (по существу теми же, что в *Principia Mathematica* ⁴⁾ являются следующие четыре формулы ⁵⁾:

1. $(p \vee p) \supset p$
[если p или p , то p];
2. $p \supset (p \vee q)$
[если p , то p или q];
3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
[если p или q , то q или p];
4. $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$
[если p влечет q , то $(r$ или $p)$ влечет $(r$ или $q)$].

Здесь вначале приведены аксиомы, а в квадратных скобках указаны их «переводы» на обычный язык ⁶⁾.

⁴⁾ В *Principia* была еще аксиома « $(p \vee (g \vee r)) \vee (g \vee (p \vee r))$ » выводимая, однако, как установил П. Бернайс (1926), из остальных четырех аксиом. — *Прим. перев.*

⁵⁾ Начиная отсюда, мы будем, как обычно, опускать кавычки при записях формул, напечатанных в отдельную строку. Нам, ведь, нужны не сами по себе кавычки, а уверенность в том, что не возникнет недоразумений (ср. с названием книги Рассела и Уайтхеда, всюду в настоящей книжке выделяемым не кавычками, а *курсивом*). — *Прим. перев.*

⁶⁾ «Переводы» эти, разумеется, к самому исчислению не относятся. — *Прим. перев.*

Каждая из приведенных аксиом представляется довольно-таки «очевидной» и тривиальной.

- ❖ Если, конечно, иметь в виду некоторые «естественные переводы» (т. е. интерпретации!) аксиом, самих по себе никакого «смысла» не имеющих. Аналогичное замечание следует иметь в виду при чтении следующей фразы текста и всюду в аналогичных случаях далее. — *Прим. перев.*

Тем не менее из них с помощью сформулированных выше двух правил преобразования можно вывести бесконечное множество теорем, многие из которых трудно назвать очевидными или тривиальными. К числу таких теорем относится, скажем, формула

$$((p \supset q) \supset ((r \supset s) \supset t)) \supset \\ \supset ((u \supset ((r \supset s) \supset t)) \supset ((p \supset u) \supset (s \supset t))).$$

В данный момент нас, однако, не интересует вывод теорем из аксиом. Цель наша состоит в том, чтобы показать непротиворечивость этой системы аксиом, т. е. дать «абсолютное» доказательство *невозможности* вывода из данных аксиом с помощью правил преобразования никакой формулы S одновременно с ее формальным отрицанием $\sim S$.

Оказывается, что к числу теорем нашего исчисления относится формула « $p \supset (\sim p \supset q)$ » (выражаемая словесно следующим образом: «если p , то не p влечет q »). (Мы примем этот результат к сведению, не проводя фактического его доказательства.) Допустим, что некоторая формула S , так же как и ее отрицание $\sim S$, выводима из аксиом. Подставляя тогда S

вместо переменной « p » в только что упомянутую теорему (пользуясь правилом подстановки) и применяя затем дважды *modus ponens*, мы получим, что теоремой является и формула « q ».

Подставляя S вместо (p) в « $p \supset (\sim p \supset q)$ », мы получим сначала « $S \supset (\sim S \supset q)$ ». Беря затем эту формулу и формулу S в качестве посылок *modus ponens*, получим « $\sim S \supset q$ ». Наконец, из последней формулы и $\sim S$ также по *modus ponens* получим формулу « q ».

Но если формула, состоящая из одной-единственной переменной « q », является теоремой, то поскольку вместо « q » можно подставить *любую формулу*, то *любая формула* нашего исчисления оказывается *выводимой из аксиом*. Отсюда видно, что если какая-либо формула S вместе со своим отрицанием $\sim S$ является теоремой рассматриваемого исчисления, то в нем теоремой является *любая формула*. Короче говоря, каждая формула противоречивого исчисления является теоремой — из противоречивой системы аксиом можно вывести *любую формулу*. Но этот же результат можно выразить и в «обратной» форме: если не каждая формула исчисления является теоремой (т. е. имеется хотя бы одна формула, не выводимая из данных аксиом), то это исчисление непротиворечиво. Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы показать, что *имеется по крайней мере одна формула, не выводимая из рассматриваемой системы аксиом*.

Задача может быть решена посредством некоторого метаматематического рассуждения о рассматриваемой системе. Идея такого рассуждения весьма прозрачна. Суть ее сводится к нахождению некоторого

структурного свойства формул данной системы, удовлетворяющего следующим трем условиям:

- (1) Свойство это должно выполняться для всех четырех аксиом.
- (2) Свойство это должно быть «наследственным» по отношению к правилам преобразования; иначе говоря, если оно присуще всем аксиомам, то оно должно принадлежать и любой формуле, выводимой из этих аксиом. А поскольку формула, выводимая из аксиом, есть, по определению, теорема, то данное условие сводится к тому, что искомым свойством должна обладать каждая теорема.
- (3) Искомому свойству должны удовлетворять не все формулы, которые можно построить с помощью правил образования данной системы. Мы должны уметь показать, что по крайней мере одна формула системы этим свойством не обладает.

Если нам удастся найти свойство формул системы, удовлетворяющее перечисленным трем условиям, то задача построения абсолютного доказательства непротиворечивости системы будет решена. В самом деле, это свойство, будучи наследственным и принадлежа аксиомам, принадлежит и теоремам; значит, если некоторое знаковосочетание, являясь формулой данной системы, не обладает указанным свойством, то это — не теорема. Иначе говоря, если член, подозреваемый в принадлежности некоему семейству (формула), лишен фамильных черт, присущих каждому настоящему члену семейства (идущих от общих предков — аксиом), то он на самом деле не может принадлежать это-

го клану (быть теоремой). Но если нам удалось найти формулу данной системы, не являющуюся теоремой, то мы тем самым доказали непротиворечивость этой системы — ведь, как мы совсем недавно отмечали, в системе, не являющейся непротиворечивой, каждая формула выводима из аксиом (т. е. каждая формула является теоремой). Короче говоря, все, что нам надо для решения нашей задачи, — это найти хоть одну формулу, не обладающую наследственным свойством, удовлетворяющим описанным выше условиям.

В качестве такого свойства годится, например, свойство «быть тавтологией». Вы знаете, что так обычно именуют утверждения, дважды повторяющие внешне различным образом одну и ту же мысль и не несущие поэтому фактически никакой информации. Например, «раз Джон есть отец Чарлза, то Чарлз — сын Джона». В обобщение этого свойства «неинформативности» в логике тавтологиями принято называть утверждения, которые не могут не быть истинными. Примером может служить высказывание: «дождь идет или дождь не идет». Говорят также, что тавтологии — «истины во всех возможных мирах», или, еще по-другому, что это *необходимо* (или *логически*) *истинные* высказывания.

Но для того чтобы наше доказательство непротиворечивости было не относительным, а абсолютным, нам придется дать такое определение понятия тавтологии, которое не зависело бы непосредственно от понятия истины (в свою очередь, подразумевающего некоторую *интерпретацию*), а было бы дано в чисто формальных, структурных терминах.

Напомним, что формула нашего исчисления — либо просто одна из букв, используемых в нем в качестве пропозициональных переменных (назовем такие формулы «элементарными»), либо же составлена из таких букв с помощью пропозициональных связок и скобок. Условимся отнести каждую элементарную формулу в один из двух непересекающихся классов, в сумме дающих все множество формул исчисления — K_1 или K_2 . Формулы, не являющиеся элементарными, относятся к тому или иному из этих классов в силу следующих соглашений:

- 1) формула, имеющая вид $S_1 \vee S_2$, принадлежит классу K_2 , если как S_1 , так и S_2 принадлежат K_2 ; в противном случае она принадлежит K_1 ;
- 2) формула, имеющая вид $S_1 \supset S_2$, принадлежит классу K_2 , если S_1 принадлежит K_1 , а S_2 принадлежит K_2 ; в противном случае она принадлежит K_1 ;
- 3) формула, имеющая вид $S_1 \cdot S_2$, принадлежит классу K_1 , если как S_1 , так и S_2 принадлежат K_1 ; в противном случае она принадлежит K_2 ;
- 4) формула, имеющая вид $\sim S$, принадлежит классу K_2 , если S принадлежит K_1 ; в противном случае она принадлежит K_1 .

Теперь мы определяем свойство «быть тавтологией»: формула есть тавтология тогда и только тогда, когда она принадлежит классу K_1 независимо от того, какому из классов K_1 и K_2 принадлежит любая из входящих в нее элементарных формул (т. е. переменных). Ясно, что это определение не использует никакой модели или интерпретации нашей системы. Мы можем

установить, является ли какая-либо данная формула тавтологией, просто исследуя ее строение с точки зрения выполнения приведенных выше четырех условий.

Такая проверка приводит к выводу, что каждая из четырех аксиом является тавтологией. Процедура такой проверки сводится к составлению таблицы, в которой учитываются все возможные варианты соотнесения элементарных компонент данной аксиомы к любому из двух классов, K_1 и K_2 . Просматривая последовательно строки такой таблицы, мы можем определить для каждого из возможных распределений «значений» (т. е. принадлежности классам K_1 и K_2) элементарных формул (т. е. попросту переменных), какому из классов принадлежит каждая неэлементарная «подформула» данной формулы и вся рассматриваемая формула в целом. Возьмем, например, первую аксиому. Таблица для нее состоит из трех столбцов: первый из них соответствует единственной ее элементарной компоненте « p », второй — неэлементарной подформуле « $(p \vee p)$ », а третий — всей формуле « $(p \vee p) \supset p$ ». В каждом из столбцов указаны классы, которым принадлежат соответствующие формулы при данных распределениях значений переменных по этим классам. Вот как выглядит таблица для первой аксиомы:

p	$p \vee p$	$(p \vee p) \supset p$
K_1	K_1	K_1
K_2	K_2	K_1

В первом столбце таблицы приведены возможные значения единственной элементарной компоненты рассматриваемой аксиомы, во втором — соответствующие значения неэлементарной компоненты аксиомы (согласно условию (1), в третьем — значения самой аксиомы (согласно условию (2))). Из последнего столбца сразу видно, что первая аксиома принадлежит классу K_1 всегда, независимо от того, к какому классу отнесена ее элементарная компонента. Значит, первая аксиома является тавтологией.

А вот такая же таблица для второй аксиомы:

p	q	$p \vee q$	$p \supset (p \vee q)$
K_1	K_1	K_1	K_1
K_1	K_2	K_1	K_1
K_2	K_1	K_1	K_1
K_2	K_2	K_2	K_1

В первых двух столбцах таблицы указаны все возможные распределения двух элементарных компонент аксиомы по двум классам, в третьем — соответствующие значения ее неэлементарной компоненты (согласно условию (1)), в четвертом — значения самой аксиомы. И здесь из рассмотрения последнего столбца таблицы сразу видно, что аксиома является тавтологией. Точно так же устанавливается тавтологичность остальных двух аксиом.

Докажем теперь, что свойство «быть тавтологией» наследственно относительно применений правила *modus*

ponens. (Доказательство его наследственности относительно правила подстановки предоставляется читателю.) Пусть формулы S_1 и $S_1 \supset S_2$ — тавтологии; нам надо доказать, что тогда и формула S_2 есть тавтология. Допустим, что S_2 не является тавтологией. В таком случае для хотя бы одного распределения элементарных компонент этой формулы по классам K_1 и K_2 она принадлежит классу K_2 . Но, по предположению, S_1 является тавтологией, т. е. принадлежит классу K_1 при любых распределениях своих элементарных компонент, в том числе и при том, при котором S_2 принадлежит K_2 ⁷⁾. Но тогда при этом распределении формула $S_1 \supset S_2$ должна (в силу второго условия) принадлежать классу K_2 , что, однако, противоречит предположению о тавтологичности $S_1 \supset S_2$. Противоречие показывает, что S_2 должна быть тавтологией. Таким образом, тавтологичность формулы есть свойство наследственное, т. е. передаваемое от посылок правила *modus ponens* к его заключению.

Теперь нам остается указать пример формулы нашего исчисления, не являющейся тавтологией. Такова, например, формула « $p \vee q$ », принадлежащая классу K_2 , если обе ее компоненты (« p » и « q ») принадлежат этому классу ⁸⁾. (В переводе на содержательный язык: высказывание «„ p “ или q “ ложно, если ложны оба входящие в его состав высказывания « p » и « q ».)

⁷⁾ Причем сказанное верно безотносительно к тому, входит ли в формулы S_1 и S_2 хоть одна общая переменная. — *Прим. перев.*

⁸⁾ Конечно, еще более простой пример — формула, состоящая из одной-единственной переменной p . — *Прим. перев.*

Наша цель достигнута. Мы нашли формулу, не являющуюся теоремой нашей системы. Но в случае противоречивости выбранной нами системы аксиом такой формулы в нашем исчислении не нашлось бы. Таким образом, из аксиом исчисления высказываний нельзя вывести никакой формулы одновременно с ее отрицанием. Этим и завершается абсолютное доказательство непротиворечивости исчисления высказываний.

Легко видеть, что классы K_1 и K_2 можно понимать соответственно как класс *истинных* и класс *ложных* высказываний. Мы, однако, намеренно воздерживались от этой терминологии в ходе самого доказательства (хотя не раз, *комментируя* отдельные ее шаги, подразумевали возможность ее использования), чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что наше доказательство в принципе не нуждается в ссылках на какую бы то ни было интерпретацию формул исчисления высказываний, хотя понять его как следует легче именно при таком «перевode» на содержательный язык.

В заключение следует сказать еще об одной важной проблеме, относящейся к исчислению высказываний. Мы установили, что каждая теорема этого исчисления является тавтологией, т. е. — если выражаться в терминах неоднократно упоминаемой выше содержательной интерпретации — логической истинной, «законом логики». Естественно задать в известной мере и обратный вопрос: каждое ли логически истинное высказывание, выразимое на языке нашего исчисления (т. е. каждая ли тавтология), является теоремой данного исчисления (выводимой из его ак-

сиом)? И на этот вопрос можно дать положительный ответ; но доказательство такого факта слишком длинно, чтобы приводить его здесь. Но нам хотелось бы обратить внимание на одно обстоятельство, не имеющее отношения к самому доказательству: дело в том, что результат этот свидетельствует о достаточности выбранных нами аксиом для получения *всех* тавтологических формул — иными словами, *всех* логически истинных высказываний, выразимых на языке исчисления высказываний. Системы аксиом, обладающие таким свойством, принято называть «полными».

Вопрос о полноте той или иной системы аксиом представляет, как правило, большой интерес. В самом деле, основным стимулом для аксиоматизации различных разделов математики бывает стремление найти подходящий перечень исходных допущений, из которых затем можно было бы вывести все истинные предложения данной области. Скажем, когда Евклид формулировал некоторую аксиоматизацию элементарной геометрии, он старался отобрать аксиомы таким образом, чтобы из них можно было вывести все истинные геометрические утверждения, не только уже известные в то время, но в принципе и любые другие, которые можно было бы научиться доказывать когда-либо в будущем.

Помимо прочего, Евклид обнаружил поразительную проницательность своей трактовкой знаменитой аксиомы параллельности как допущения, логически не зависящего от остальных аксиом предложенной им системы. Лишь спустя много времени удалось доказать, что эта аксиома действительно не может быть выведена из остальных аксиом Евклида, т. е. что без аксиомы параллельности эта система аксиом неполна. ♦

До недавнего времени считалось более или менее само собой разумеющимся, что для каждой конкретной области математики можно подобрать полную систему аксиом. В частности, математики были убеждены, что система аксиом, предложенная для аксиоматизации арифметики натуральных чисел, полна или во всяком случае может быть пополнена (сделана полной) добавлением к исходному перечню еще конечного списка аксиом. Одним из величайших открытий Гёделя и было как раз обнаружение невозможности такой полной аксиоматизации арифметики.

6

Идея кодирования и ее использование в математике

Исчисление высказываний представляет собой пример математической системы, по отношению к которой задачи, выдвигаемые гильбертовской теорией доказательства, оказались, как мы видели, полностью реализованными. Конечно, это исчисление формализует лишь некоторый фрагмент формальной логики, язык и дедуктивный аппарат которого недостаточны даже для формального построения элементарной арифметики. Но возможности гильбертовской программы отнюдь не ограничиваются доказательством непротиворечивости исчисления высказываний. Можно привести примеры гораздо более богатых теорий, для которых оказалось возможным дать строго метаматематические доказательства непротиворечивости и полноты. Примером может служить арифметическая система с операцией сложения (но без операции умножения) натуральных чисел,

для которой также можно провести абсолютное доказательство непротиворечивости. Но достаточно ли сильны финитные методы Гильберта для установления непротиворечивости систем вроде *Principia* — систем, выразительные и логические средства которых позволяют построить всю арифметику, а не только отдельные ее фрагменты? Неоднократные попытки найти такое доказательство успехом не увенчались, а работа Гёделя 1931 г. показала, что они и не могли быть успешными, так как, строго придерживаясь границ, предначертанных в исходной формулировке гильбертовской программы, эту задачу вообще решить нельзя.

Что же, собственно, доказал Гёдель и как именно доказал? В работе Гёделя имеются два основных результата. Прежде всего (мы здесь не имеем в виду тот порядок, в каком эти результаты излагаются в самой работе Гёделя) он доказывает невозможность метаматематического доказательства непротиворечивости любой системы, достаточно обширной, чтобы включать в себя всю арифметику, которое (доказательство) не использовало бы каких-либо существенно иных правил вывода, кроме тех, что используются для вывода теорем в самой рассматриваемой системе. Конечно, и такое (пользующееся более сильными в некотором смысле правилами вывода) доказательство может быть очень важным и полезным. Но все же если доказательство строится на основе правил вывода, значительно более мощных, нежели логические средства арифметического исчисления, так что уверенность в непротиворечивости используемых в доказательстве допущений будет ничуть не больше, чем

расчеты на непротиворечивость арифметики, то ценность такого доказательства будет довольно-таки специфической: мы убьем одно чудовище ценой рождения другого. Во всяком случае, если это доказательство будет не финитистским, то основной пункт гильбертовской программы останется, конечно, невыполненным. Гёделевское рассуждение как раз и показывает всю беспочвенность расчетов на нахождение финитистского доказательства непротиворечивости арифметики.

Второй основной результат работы Гёделя, пожалуй, еще более неожидан и поразителен; он указывает на некоторую принципиальную ограниченность возможностей аксиоматического метода. Гёдель показывает, что система *Principia Mathematica*, как и всякая иная система, средствами которой можно построить арифметику, — *существенно неполна*. Это значит, что для любой данной непротиворечивой системы арифметических аксиом имеются истинные арифметические предложения, не выводимые из аксиом этой системы.

Это обстоятельство играет решающую роль для оценки всей работы Гёделя, и на нем стоит остановиться несколько подробнее. Математикам хорошо известны примеры общих утверждений, для которых до сих пор не найдено никакого опровергающего примера, но не найдено и доказательства. Классическим примером такого рода может служить знаменитая «теорема Гольдбаха», утверждающая, что каждое четное число можно представить в виде суммы двух простых чисел. Мы не можем указать ни одного четного числа, которое не являлось бы суммой двух простых, но у нас

нет и доказательства гипотезы Гольдбаха, пригодного для всех четных чисел. Таким образом, перед нами — арифметическое утверждение, которое вполне может быть истинным, но не выводимым из аксиом арифметики. Допустим, что это действительно так (утверждать подобное мы, разумеется, не можем). Представим себе, что мы изменили или дополнили исходную аксиоматику таким образом, чтобы все истинные, но не выводимые в исходной системе предложения (к их числу относится, по сделанному только что предположению, гипотеза Гольдбаха) станут в расширенной системе выводимыми¹⁾. Теорема Гёделя показывает, что никакое такое расширение арифметической системы не может сделать ее полной, т. е. что даже если дополнить ее бесконечным множеством аксиом, все равно в новой системе найдутся истинные, но не выводимые (хотя и выразимые!) ее средствами предложения.

- ◆ Истинность таких предложений, как мы ниже увидим, можно установить посредством некоторого метаматематического рассуждения об арифметической системе. Но такое рассуждение не удовлетворяет требованию, согласно которому исчисление должно быть, так сказать, «замкнутой системой», т. е. все доказуемые в нем истинные предложения должны быть получены как формальные следствия из аксиом *внутри* самого исчисления. Таким образом, аксиоматический метод как средство построения всей содержательной арифметики оказывается *принципиально* ограниченным.

¹⁾ Такое расширение можно произвести, просто присоединив эти недоказуемые предложения к арифметике в качестве новых аксиом. Поскольку мы считаем их истинными, то отрицания их не должны и не могут быть доказуемы в арифметике; значит, такое расширение непротиворечивой системы не может сделать ее противоречивой. — *Прим. перев.*

Чтобы читателю было легче понять идею доказательства Гёделя, мы (следуя Гёделю) приведем вначале схему рассуждения, посредством которого получается логическая антиномия (противоречие), известная под названием «парадокса Ришара» (по имени описавшего ее в 1905 г. французского математика).

Возьмем какой-нибудь язык (например, русский)²⁾, средствами которого можно описывать и определять все чисто арифметические свойства чисел. Рассмотрим определения, которые можно сформулировать на этом языке. Ясно, что некоторые термины, относящиеся к арифметическим свойствам, нам определить явным образом все равно не удастся (с чего-то надо начать и в определениях во избежание ситуаций, известных под названиями «порочного круга» и «бесконечного спуска»), хотя, конечно, мы можем в принципе понимать смысл этих слов и без определений. Для нашей цели несущественно, какие именно термины принять в качестве исходных, неопределяемых; мы можем, например, считать, что мы понимаем смысл предложений «целое число делится на другое целое число», «целое число является произведением двух целых чисел» и т. п. Свойство быть простым числом тогда можно определить следующим образом: «не делиться ни на одно целое число, кроме самого себя и числа 1»; свойство быть точным квадратом: «быть произведением некоторого целого числа на то же число» и т. п.

²⁾ Конечно, у авторов речь шла об английском, а у самого Ришара — о французском языке. — *Прим. перев.*

Легко видеть, что каждое такое определение состоит лишь из конечного числа слов, а потому и из конечного числа букв алфавита. Поэтому мы можем ввести для таких словесных определений отношение порядка, считая одно определение предшествующим другому, если число букв, из которых состоит первое определение, меньше числа букв, составляющих второе определение; в тех же случаях, когда два определения состоят из одного и того же числа букв ³⁾, одно из них считать предшествующим другому в обычном лексикографическом (алфавитном, словарном) порядке. Исходя из такого упорядочения можно теперь расположить все определения рассматриваемого вида в последовательность, сопоставив каждому из них единственное натуральное число — номер в этой же последовательности. Тогда самое короткое (и стоящее ранее других в алфавитном порядке) определение получит номер 1, следующее за ним в этом «словаре определений» — номер 2 и т. д.

Поскольку каждому определению теперь сопоставлено некоторое натуральное число, то может оказаться, что в некоторых случаях число, сопоставленное какому-нибудь определению, само будет обладать определяемым свойством.

- ❖ Ситуация здесь в точности такова же, как в том случае, когда все слова в обычном орфографическом словаре делятся на два класса: односложные и многосложные; при этом слово «многосложное» само оказывается многосложным.

³⁾ Пропуск между словами можно при этом считать особой «буквой» (например, последней в алфавите) или просто писать слова подряд, без пропусков. — *Прим. перев.*

Пусть, например, определяющее выражение «не делиться ни на одно натуральное число, кроме самого себя и числа 1» оказалось в нашей последовательности на 17-м месте; ясно, что сопоставленное ему число 17 само подпадает под это определение. Пусть, с другой стороны, определяющее выражение «быть произведением некоторого натурального числа на то же самое число» получило номер 15; само число 15, очевидно, не является точным квадратом и потому данным свойством не обладает. Назовем числа, не обладающие свойствами, определяемыми предложениями, которым они соответствуют в описанной нами нумерации, *ришаровыми*. Таким образом, « x — ришарово число» — это просто сокращение выражения « x не обладает свойством, определяемым предложением, имеющим номер x в данной словарной последовательности определяющих предложений». (Скажем, число 17 из нашего первого примера не является ришаровым, а число 15 из второго примера — ришарово.)

Теперь мы уже можем сформулировать парадокс Ришара. Определяющее выражение для свойства быть ришаровым числом описывает, очевидно, некоторое арифметическое свойство натуральных чисел. Значит, само определяющее выражение входит в описанную выше последовательность определяющих выражений. Но тогда оно имеет в этой последовательности некоторый номер, который мы обозначим через n . Зададим теперь вполне естественный вопрос (немедленно приводящий к антиномии Ришара): является ли число n ришаровым? Читатель, конечно,

сразу увидит, что противоречие теперь неизбежно. В самом деле, число n является ришаровым в том и только в том случае, если оно не обладает свойством, описываемым предложением, имеющим номер n , т. е. не обладает свойством быть ришаровым! Короче говоря, n ришарово тогда и только тогда, когда оно не ришарово, т. е. утверждение « n — ришарово число» является одновременно истинным и ложным.

Следует заметить, что это противоречие в известном смысле есть трюк, который нам удался благодаря не вполне точному соблюдению правил игры. Дело в том, что мы фактически использовали одно допущение, которое, однако, предпочли в явном виде не формулировать. Мы согласились рассматривать определения *чисто арифметических* свойств натуральных чисел, т. е. свойств, формулируемых в терминах таких понятий, как арифметическое сложение, умножение и т. п. Затем, однако, без дополнительных оговорок мы включили в ту же последовательность определений предложение, сформулированное посредством упоминания о некотором *способе записи* арифметических свойств. Строго говоря, определение свойства быть ришаровым числом просто не принадлежит к той последовательности определений, которая вначале описывалась, так как это определение использует такие метаматематические понятия, как номер буквы (или вообще знака) в некоторой последовательности. Таким образом, если мы будем четко различать утверждения *самой* арифметики (относящиеся к числам, а отнюдь не к записям, в которые такие числа входят, т. е. к равенствам, неравенствам и вообще формулам) и утверждения *относительно*

арифметики (т. е. как раз утверждения об арифметических формулах), то мы не получим никакого парадокса Ришара.

Значит, сам по себе парадокс Ришара совсем не страшен. Но сама схема приводящего к нему рассуждения чрезвычайно поучительна и плодотворна. Речь идет о возможности «отображения» (или «перевода») метаматематических высказываний, относящихся к некоторой достаточно богатой формальной системе, в саму систему. Сама по себе идея «перевода» хорошо известна и играет важнейшую роль во многих областях математики. Такая идея лежит, например, в основе всей аналитической геометрии, где геометрические понятия переводятся в алгебраические (арифметические), так что вместо геометрических соотношений мы, по существу, имеем дело с алгебраическими. (Вспомните хотя бы обсуждавшееся в разделе 2 отображение геометрии в алгебру, использованное Гильбертом для доказательства относительной непротиворечивости его системы геометрических аксиом). Такие отображения-«переводы» играют большую роль и в физике, например, когда свойства электрического тока излагаются на языке гидродинамических явлений. Эта же идея перевода лежит в основе технического моделирования — идет ли речь об исследовании свойств модели самолета (или же самолета в натуральную величину) в аэродинамической трубе, или же об изучении в лабораторных условиях распределения каких-либо материальных масс с помощью аналоговой модели, где роль этих масс играют электрические заряды.

Легко видеть, что каждое такое определение состоит лишь из конечного числа слов, а потому и из конечного числа букв алфавита. Поэтому мы можем ввести для таких словесных определений отношение порядка, считая одно определение предшествующим другому, если число букв, из которых состоит первое определение, меньше числа букв, составляющих второе определение; в тех же случаях, когда два определения состоят из одного и того же числа букв³⁾, одно из них считать предшествующим другому в обычном лексикографическом (алфавитном, словарном) порядке. Исходя из такого упорядочения можно теперь расположить все определения рассматриваемого вида в последовательность, сопоставив каждому из них единственное натуральное число — номер в этой же последовательности. Тогда самое короткое (и стоящее ранее других в алфавитном порядке) определение получит номер 1, следующее за ним в этом «словаре определений» — номер 2 и т. д.

Поскольку каждому определению теперь сопоставлено некоторое натуральное число, то может оказаться, что в некоторых случаях число, сопоставленное какому-нибудь определению, само будет обладать определяемым свойством.

- ❖ Ситуация здесь в точности такова же, как в том случае, когда все слова в обычном орфографическом словаре делятся на два класса: односложные и многосложные; при этом слово «многосложное» само оказывается многосложным.

³⁾ Пропуск между словами можно при этом считать особой «буквой» (например, последней в алфавите) или просто писать слова подряд, без пропусков. — *Прим. перев.*

Пусть, например, определяющее выражение «не делиться ни на одно натуральное число, кроме самого себя и числа 1» оказалось в нашей последовательности на 17-м месте; ясно, что сопоставленное ему число 17 само подпадает под это определение. Пусть, с другой стороны, определяющее выражение «быть произведением некоторого натурального числа на то же самое число» получило номер 15; само число 15, очевидно, не является точным квадратом и потому данным свойством не обладает. Назовем числа, не обладающие свойствами, определяемыми предложениями, которым они соответствуют в описанной нами нумерации, *ришаровыми*. Таким образом, « x — ришарово число» — это просто сокращение выражения « x не обладает свойством, определяемым предложением, имеющим номер x в данной словарной последовательности определяющих предложений». (Скажем, число 17 из нашего первого примера не является ришаровым, а число 15 из второго примера — ришарово.)

Теперь мы уже можем сформулировать парадокс Ришара. Определяющее выражение для свойства быть ришаровым числом описывает, очевидно, некоторое арифметическое свойство натуральных чисел. Значит, само определяющее выражение входит в описанную выше последовательность определяющих выражений. Но тогда оно имеет в этой последовательности некоторый номер, который мы обозначим через n . Зададим теперь вполне естественный вопрос (немедленно приводящий к антиномии Ришара): является ли число n ришаровым? Читатель, конечно,

На идее отображения⁴⁾ основан так называемый принцип двойственности в проективной геометрии, состоящий в возможности взаимной замены в аксиомах (а значит, и в теоремах) проективной геометрии терминов «точка» и «прямая», в результате чего аксиомы переходят в аксиомы (соответственно теоремы — в теоремы). При одном из таких «переводов» слово «точка» можно считать «образом», слово «прямая» — «прообразом»; при обратном переводе роли меняются.

Самым существенным в обсуждаемой здесь идее «моделирования» является то, что абстрактная структура отношений, выполняемых для «предметов» какой-либо области, может быть изучена с помощью рассмотрения отношений, имеющих место между «предметами» (как правило, другой природы, чем «предметы» исходной области), принадлежащими совсем другой области. Именно эта идея «кодирования» лежит в основе доказательства Гёделя. Если некоторые сложные метаматематические высказывания о формализованной системе арифметики можно, как рассчитывает Гёдель, перевести (или «отобразить») в некоторые арифметические высказывания, принадлежащие самой системе, то это уже само по себе явится большим достижением в деле развития теоретико-доказательственной техники, так же, как исследо-

⁴⁾ Можно было бы сказать «перевода», «моделирования», «кодирования», «представления»; в переводе мы далее будем сознательно варьировать употребление этих терминов, чтобы подчеркнуть принципиальное родство понятий, выражаемых этими терминами, между собой и с используемым далее понятием «нумерации». — *Прим. перев.*

вать алгебраические соотношения, представляющие (изображающие, кодирующие) некоторые геометрические соотношения между кривыми и поверхностями, гораздо удобнее, чем иметь дело с самими геометрическими соотношениями, — точно так же арифметические аналоги («образы») сложных логических соотношений оказываются в известном смысле более обозримыми и доступными для изучения, чем их логические «прообразы».

Использование идеи кодирования, как мы уже отмечали, лежит в основе знаменитой работы Гёделя. Следуя схеме рассуждения, очень близкой к той, что проводится в парадоксе Ришара (но усовершенствуя ее при этом таким образом, что она становится неуязвимой по отношению к сформулированным выше критическим заключениям), Гёдель показывает, что метаматематические высказывания об арифметическом формализованном исчислении можно представить посредством некоторых арифметических формул *внутри* исчисления. Как мы покажем подробнее в следующем разделе, ему удалось найти такой метод арифметического кодирования метаматематических высказываний, что для некоторой формулы, выражающей истинное метаматематическое утверждение о формулах арифметики, ни она сама, ни ее отрицание не доказуемы в формальной арифметике. Поскольку одна из этих формул, выражающая истинное арифметическое высказывание, не выводима из арифметических аксиом, то аксиомы образуют неполную систему. Предложенный Гёделем метод кодирования позволил ему также построить арифметическую формулу, соответствующую метаматема-

тическому высказыванию «арифметическое исчисление непротиворечиво», и показать, что эта формула недоказуема в (этом же!) арифметическом исчислении. Отсюда следует, что упомянутое метаматематическое высказывание не может быть установлено без привлечения некоторых дополнительных дедуктивных средств, не представимых (т. е. не кодируемых, не переводимых) в самом арифметическом исчислении, так что если это высказывание и можно доказать, то уж заведомо с привлечением средств, непротиворечивость которых не менее сомнительна, нежели сама по себе непротиворечивость арифметики. Все важнейшие выводы были получены Гёделем с использованием придуманной им чрезвычайно остроумной системы числового кодирования, или, как мы будем далее говорить, *нумерации*.

7

Теоремы Гёделя

7.1. Гёделевская нумерация

Гёдель прежде всего описал некоторое формализованное исчисление, средствами которого можно выразить все обычные арифметические понятия и установить известные арифметические соотношения.

Гёдель использовал несколько упрощенный вариант системы, описанной в *Principia Mathematica*. Но для его цели точно так же подходит любое исчисление, в котором можно построить систему натуральных чисел с определенными на ней арифметическими операциями. ♦

Формулы этого исчисления строятся исходя из некоторого запаса элементарных символов, образующих алфавит системы. В этом исчислении, как обычно, выделено некоторое множество исходных формул (аксиом) и точно перечислены правила преобразования (правила вывода), посредством которых из аксиом выводятся теоремы.

Гёдель показал, что каждому элементарному символу, каждой формуле (т. е. цепочке элементар-

ных символов) и каждому доказательству (конечной последовательности формул) можно *однозначным* образом приписать некоторый номер (натуральное число). Такой номер, служащий своего рода значком, ярлыком, указывающим на отмечаемый им объект — символ, формулу или доказательство — формальной системы, мы будем называть «гёделевским номером» этого символа, формулы или доказательства¹⁾.

Элементарные символы, составляющие алфавит системы, бывают двух сортов: константы и переменные. Мы будем считать, что у нас есть ровно десять символов-констант, которым мы припишем в качестве гёделевских номеров числа от 1 до 10. Почти все эти символы читателю уже известны: « $\sim$ » (сокращение для «не»), « $\vee$ » («или»), « $\supset$ » («если..., то...»), « $=$ » («равно»), «0» (цифровой знак, изображающий число «нуль»), а также три «знака препинания»: левая скобка «(», правая скобка «)» и запятая «,». Кроме того, нам понадобятся еще два символа: перевернутая буква « $\exists$ » (читаемая как «существует» и называемая «квантором существования») и строчная латинская буква « s », обозначающая числовой оператор, сопоставляющий каждому натуральному числу непосредственно следующее за ним число. Пример: формулу « $\exists x (x = s0)$ » можно прочесть как «существует такое x , что x непосредственно следует за числом 0». Выпишем все используемые нами

¹⁾ Имеется много различных способов приписывания гёделевских номеров, и какой из них выбрать — совершенно несущественно.

символы-константы (под ними указаны соответствующие гёделевские номера):

$\sim$	$\vee$	$\supset$	$\exists$	$=$	0	s	$($	$)$	,
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Кроме элементарных символов-констант, в алфавит нашего исчисления входят еще переменные, причем переменные трех сортов: *числовые переменные* « x », « y », « z » и т. д. (вместо них можно подставлять «цифры» и составленные из них (и числовых переменных) «арифметические выражения», выражающие натуральные числа); *пропозициональные переменные* « p », « q », « r » и т. д. (вместо них можно подставлять «формулы», выражающие высказывания); и, наконец, *предикатные переменные* « P », « Q », « R » и т. д. (вместо них можно подставлять арифметические «предикаты», выражающие такие свойства и отношения, как «больше чем», «простое (число)» и т. п.). Переменным также сопоставляются гёделевские номера, причем делается это в соответствии со следующими соглашениями:

- 1) различным числовым переменным приписываются различные простые числа, бóльшие 10;
- 2) различным пропозициональным переменным приписываются квадраты различных простых чисел, бóльших 10;
- 3) различным предикатным переменным приписываются кубы различных простых чисел, бóльших 10.

Переменная	Гёделевский номер	Пример выражения, которое разрешается подставлять вместо данной переменной
x	11	0
y	13	sy
z	17	y
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	11^2	$0 = 0$
q	13^2	$\exists x (x = sy)$
z	17^2	$p \supset q$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P	11^3	«простое»*
Q	13^3	«составное»*
R	17^3	«больше чем»*

* Кавычки (добавленные при переводе) означают здесь, что подставить можно не само написанное в правом столбце слово, а его формальную запись на языке нашего исчисления. — *Прим. перев.*

Возьмем какую-нибудь формулу нашей системы, например

$$\exists x (x = sy)$$

(которую можно прочесть как «существует такое x , что x непосредственно следует за y » и которая выражает то обстоятельство, что для каждого числа есть непосредственно следующее за ним число). Выпишем под каждым из входящих в нее символов его (символа) гёделевский номер:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \exists & x & (& x & = & s & y &) \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 4 & 11 & 8 & 11 & 5 & 7 & 13 & 9
 \end{array}$$

Конечно, нам бы хотелось сопоставить каждой формуле не набор номеров (как пока получилось), а единственный определенный номер. Но это очень легко сделать. А именно: сопоставим этой формуле произведение первых восьми простых чисел в порядке их величины, причем каждое из них в степени, показатель которой равен гёделевскому номеру соответствующего элементарного символа:

$$2^4 \times 3^{11} \times 5^8 \times 7^{11} \times 11^5 \times 13^7 \times 17^{13} \times 9^9.$$

Обозначим это число, скажем, через m . Точно таким же образом мы можем приписать в качестве гёделевского номера единственное вполне определенное натуральное число каждой конечной последовательности элементарных символов, в частности каждой формуле, причем число простых сомножителей такого числа всегда будет равно числу вхождений элементарных символов в обозначаемой формуле.

В исчислении могут использоваться и символы, не входящие в его исходный («основной») алфавит; такие символы вводятся посредством

определений, записанных в терминах исходных (и вообще ранее определенных) символов. Например, в наше исчисление можно ввести новый символ (константу) « $\cdot$ », обозначающий союз «и», определив его таким образом, чтобы запись « $p \cdot q$ » воспринималась как сокращение записи « $\sim (\sim p \vee \sim q)$ ». Какой гёделевский номер сопоставить введённому таким образом символу? Ответ станет совершенно очевидным, когда мы заметим, что из выражений, содержащих дополнительные (введенные определениями) символы, эти новые символы можно исключить, заменив их обозначаемыми ими выражениями, составленными исключительно из исходных символов (для этого мы просто читаем соответствующие определения «справа налево»); для последних же гёделевские номера мы строить умеем. Поэтому нам достаточно условиться считать гёделевским номером формулы « $p \cdot q$ » гёделевский номер эквивалентной ей формулы « $\sim (\sim p \vee \sim q)$ », гёделевским номером «формулы» « $2 \neq 3$ » — номер заменяемой ею «настоящей» формулы « $\sim (ss0 = sss0)$ » и т. п., условившись, конечно (что совсем нетрудно), об однозначном порядке таких «расшифровок».

Рассмотрим, наконец, какую-нибудь последовательность формул (могущую быть в частном случае доказательством), например последовательность

$$\exists x (x = sy),$$

$$\exists x (x = s0).$$

Вторая формула последовательности, читаемая как «существует число, непосредственно следующее за нулем», — выводимая из первой формулы посредством подстановки цифры 0 вместо числовой переменной.

- ❖ Читатель, конечно, помнит, что формальное доказательство мы определяли выше как конечную последовательность формул, каждая из которых есть либо аксиома, либо выводима из предыдущих формул этой последовательности по правилам вывода данного исчисления. Согласно этому определению приведенная пара формул доказательством

не является (первая ее формула — не аксиома) — это лишь «кусоч» доказательства, на примере которого мы столь же понятно (но далеко не так громоздко) поясним идею нумерации, как и на целом доказательстве.

Выше мы уже определили гёделевский номер первой из этих формул — мы обозначили его тогда через m . Пусть гёделевским номером второй формулы является число n . Как и выше, мы хотим сопоставить нашей последовательности не пару чисел m и n , а некоторое единственным образом определенное натуральное число. Для этого нам достаточно взять в качестве такого гёделевского номера число, являющееся произведением степеней первых двух простых чисел (т. е. чисел 2 и 3), причем первый сомножитель будет входить в это произведение в степени, показатель которой равен гёделевскому номеру первой формулы, и аналогично для второго сомножителя (а также для третьего и других, если мы имеем дело с последовательностью, состоящей более чем из двух формул). Обозначим это число через k : $k = 2^m \times 3^n$. Такой простой и компактный метод применим, очевидно, для получения гёделевского номера произвольной последовательности формул. Таким образом, любое выражение нашей системы — будь то элементарный символ, последовательность символов или последовательность таких последовательностей — может быть однозначно занумеровано посредством некоторого гёделевского номера.

Теперь уже полная «арифметизация» нашего формального исчисления не представит никакого труда. Такая «арифметизация» попросту сводится к уста-

новлению некоторого взаимно-однозначного соответствия между выражениями, входящими в исчисление, и некоторым подмножеством натурального ряда.

- ❖ Не всякое натуральное число есть гёделевский номер константы, переменной или формулы; предоставляем читателю придумать и разобрать примеры на различные возможные случаи.

Если нам дано какое-нибудь выражение, мы без труда напишем его гёделевский номер. Это, однако, лишь полдела. Важно то, что когда нам дано какое-либо натуральное число, то мы можем установить, является ли это число гёделевским номером, а если да — то можем точно «восстановить» обозначаемое этим номером выражение. Если данное число не превосходит 10, то это, как мы знаем, просто номер некоторой константы. Если же данное число больше 10, то его можно разложить, причем единственным образом (в этом состоит так называемая основная теорема арифметики), на простые сомножители. Если оно оказалось простым, квадратом простого или кубом простого числа, то это — гёделевский номер переменной. Если данное число оказалось произведением степеней первых последовательных простых чисел, то оно может (хотя, конечно, и не обязано) быть гёделевским номером формулы или последовательности формулы. И в таком случае выражение, которому соответствует данный номер, может быть точно определено.

Следуя намеченной программе, мы можем для любого данного числа совершенно единообразным методом («как машина») проверить, является ли оно гёделевским номером, а если да — то какого выраже-

ния²⁾. Пусть, например, нам дано число 243 000 000. Разложим его (оно, очевидно, составное) на простые сомножители: $243\,000\,000 = 64 \times 243 \times 15\,625 = 2^6 \times 3^5 \times 5^6$. Вспомнив, что 6 есть гёделевский номер константы «0», а 5 — гёделевский номер знака «=», рисуем схему:

$$\begin{array}{ccc} 6 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Теперь видно, что число «243 миллиона» действительно есть гёделевский номер некоторой формулы, а именно, формулы « $0 = 0$ » (т. е. «нуль равен нулю»).

7.2. Арифметизация метаматематики

Следующим шагом, который проделал Гёдель, было чрезвычайно остроумное применение описанного выше «кодирования» («гёделевской нумерации»). Он показал, что все метаматематические высказывания о структурных свойствах выражений, входящих в рассматриваемое исчисление, можно *изобразить* (причем взаимно-однозначным образом) в самом этом исчислении. В основе этой процедуры лежит следующая идея. Поскольку каждому выражению нашего исчисления приписан некоторый (гёделевский) номер, то

²⁾ После чего уже совсем нетрудно проверить, является ли данное выражение формулой или доказательством нашего исчисления (ср. предыдущее примечание). — *Прим. перев.*

каждое метаматематическое высказывание о выражениях исчисления и отношениях, имеющих место между ними, можно рассматривать и как высказывание о соответствующих (гёделевских) номерах и отношениях между ними. Таким путем метаматематика оказывается полностью «арифметизированной».

Рассмотрим такой популярный пример. При входе в большие универсальные магазины покупателям иногда выдают билетки с номерами, определяющими порядок дальнейшего обслуживания покупателей. Достаточно бывает посмотреть на эти номера, чтобы ответить на вопросы, сколько покупателей уже обслужено, сколько ожидает своей очереди, кто за кем стоит, сколько всего покупателей было с утра в магазине и т. п. Если, скажем, миссис Смит имеет номер 37, а миссис Браун — номер 53, то вместо того чтобы объяснить миссис Браун, что она должна пропустить вперед миссис Смит, достаточно обратить ее внимание на то, что 37 меньше, чем 53.

В метаматематике дело обстоит в точности, как в этом магазине. Каждое метаматематическое высказывание кодируется теперь вполне однозначным образом посредством некоторой арифметической формулы; отношения же, имеющие место между метаматематическими высказываниями, и логические зависимости между ними также однозначно переводятся в некоторые числовые соотношения и зависимости между соответствующими арифметическими формулами. И здесь, как и раньше, числовое кодирование облегчает рассмотрение всех достаточно сложных соотношений. Изучение метаматематических вопросов сво-

дится к исследованию арифметических соотношений и свойств некоторых чисел.

Проиллюстрируем все эти общие замечания одним элементарным примером. Возьмем первую аксиому исчисления высказываний, являющуюся, кстати, аксиомой и рассматриваемого сейчас логико-арифметического исчисления: $\langle (p \vee p) \supset p \rangle$. Ее гёделевский номер, равный, как легко убедиться, числу $2^8 \times 3^{11} \times 5^2 \times 7^{11^2} \times 11^9 \times 13^3 \times 17^{11}$ мы обозначим буквой a . Рассмотрим теперь формулу $\langle (p \vee p) \rangle$, гёделевский номер которой, равный числу $2^8 \times 3^{11^2} \times 5^2 \times 7^{11^2} \times 11^9$, обозначим через b . Сформулируем теперь метаматематическое утверждение, гласящее, что формула $\langle (p \vee p) \rangle$ есть начальная «подформула» (т.е. часть формулы, сама также являющаяся формулой) выбранной аксиомы. Какой арифметической формуле рассматриваемой формальной системы соответствует это утверждение? Очевидно, что более короткая формула $\langle (p \vee p) \rangle$ является начальной подформулой более длинной формулы $\langle (p \vee p) \supset p \rangle$ в том и только в том случае, если (гёделевский) номер b , соответствующий первой из этих формул, есть делитель (гёделевского) номера a , соответствующего второй формуле. В предположении, что термин «делитель» определен некоторым подходящим образом в формализованной арифметической системе арифметической формулой, однозначным образом соответствующей упомянутому выше метаматематическому утверждению о том, что первая аксиома начинается с подформулы $\langle (p \vee p) \rangle$, является формула « b есть делитель a ». Более того, если эта последняя формула истинна, т.е. если b действительно является делителем a , то верно и то,

что « $(p \vee p)$ » есть начальная подформула формулы « $(p \vee p) \supset p$ ».

Рассмотрим теперь повнимательнее следующее метаматематическое высказывание: «Последовательность формул, имеющая гёделевский номер x , является доказательством формулы, имеющей гёделевский номер z ». Высказывание кодируется (изображается) посредством некоторой вполне определенной формулы арифметического исчисления, выражающей некоторое *чисто арифметическое отношение* между числами x и z . (Некоторое представление о том, насколько сложным является такое отношение, читатель получит, вспомнив приводившийся выше пример, в котором конец доказательства (а не все доказательство!) некоторой формулы, имеющей гёделевский номер, n , получал гёделевский номер $k = 2^m \times 3^n$. Самый беглый анализ приводит нас к выводу, что здесь вводится вполне определенное, хотя и далеко не простое, арифметическое отношение между k (будем для простоты считать его номером *всего* доказательства) и n — гёделевским номером заключения этого доказательства.) Мы будем записывать отношение между числами x и z посредством формулы « $\text{Dem}(x, z)$ »³⁾ напоминающей нам самим своим образом о том метаматематическом утверждении, которому она соответствует (а именно, об утверждении «Последовательность формул, имеющая гёделевский номер x , является доказательством формулы, имеющей гёделевский номер z »).

³⁾ От англ. demonstration (доказательство). — Прим. перев.

Читатель должен твердо уяснить себе, что хотя « $\text{Dem}(x, z)$ » кодирует некоторое метаматематическое утверждение, сама эта запись является формулой арифметического исчисления. Формула эта в более привычных обозначениях может быть записана в виде $f(x, z) = 0$, где буква f обозначает некоторый довольно-таки сложный комплекс арифметических операций над числами. Однако эта более привычная запись не «подсказывает» сразу своей метаматематической интерпретации, почему мы и предпочли запись, приведенную в тексте.

Читатель теперь легко убедится в том, что метаматематическое утверждение, гласящее, что некоторая последовательность формул есть доказательство данной формулы, является истинным в том и только в том случае, если гёделевский номер этой последовательности формул находится с гёделевским номером данной формулы как раз в том арифметическом отношении, которое мы обозначили здесь через « Dem ». Вообще, чтобы утверждать истинность или ложность какого-либо интересующего нас метаматематического утверждения, нам достаточно решить вопрос о том, находятся ли некоторые два числа в отношении, обозначаемом через « Dem ». Но и обратно: чтобы убедиться, что два числа находятся в названном отношении, достаточно установить истинность метаматематического утверждения, «кодируемого» этим арифметическим отношением. Аналогично, метаматематическое высказывание «Последовательность формул, имеющая гёделевский номер x , не является доказательством формулы, имеющей гёделевский номер z », кодируется некоторой вполне определенной формулой формализованной арифметической системы, являющейся формальным отрицанием формулы « $\text{Dem}(x, z)$ », т. е. формулой « $\sim \text{Dem}(x, z)$ ».

Еще несколько слов об обозначениях, используемых в доказательстве теоремы Гёделя. Начнем с примера. Формула « $\exists x (x = sy)$ » имеет гёделевский номер m (см. выше, с. 81), а переменная « y » — гёделевский номер 13. Подставив в эту формулу вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13 (т. е. вместо « y ») цифру⁴⁾, обозначающую число m , мы получим в результате формулу « $\exists x (x = sm)$ », выражающую утверждение, согласно которому существует такое число x , что это x непосредственно следует за числом m .

Последняя формула также имеет некоторый гёделевский номер, который совсем нетрудно вычислить. Но вместо того чтобы фактически производить это вычисление, мы можем совершенно однозначно охарактеризовать этот номер чисто метаматематическим образом, говоря, что это гёделевский номер формулы, получаемый из формулы, имеющей гёделевский номер m , подстановкой вместо входящей в эту формулу переменной с гёделевским номером 13 цифры « m ». Такая метаматематическая характеристика однозначно определяет некоторое число, являющееся некоторой определенной функцией от чисел m и 13, причем сама эта функция может быть выражена средствами нашей формализованной арифметической системы. Значит, и само число можно выразить *внутри* нашего исчисления. Обозначим его через « $\text{sub}(m, 13, m)$ », напоминая тем самым, что речь идет о гёделевском номере формулы, полученной из формулы, имею-

⁴⁾ Цифра — это числовой знак, или имя числа (ср. выше примечание авторов на с. 35–36). — *Прим. перев.*

щей гёделевский номер m , подстановкой⁵⁾ вместо входящей в нее переменной с гёделевским номером 13 цифры, обозначающей число m . Вообще, через « $\text{sub}(y, 13, y)$ » мы будем обозначать теперь арифметическую формулу, выражающую *внутри* арифметического исчисления метаматематическую характеристику: «гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер y , подстановкой вместо входящей в нее переменной, имеющей гёделевский номер 13, цифры, обозначающей число „ y “». Если в выражение « $\text{sub}(y, 13, y)$ » мы подставим теперь вместо « y » какую-нибудь определенную цифру, скажем, цифру, обозначающую число m , или выражение 243 000 000, то получающееся в результате выражение также будет обозначать некоторое определенное натуральное число, являющееся при этом гёделевским номером некоторой определенной формулы.

У читателя не раз мог возникнуть вопрос, почему, собственно, мы говорили сейчас не просто о «числе y », а — столь вычурно и длинно! — о «цифре, обозначающей y ». Впрочем, сама форма вопроса уже отчасти подсказывает ответ. Мы ведь уже упоминали о важном различии между понятиями «число» и «цифра». Цифра — это некоторый *знак*, т. е. выражение языка, которое можно записывать, стирать, зачеркивать, повторять и т. д. и т. п. Число же — это то, *именем* (или *названием*, *обозначением*) чего является обозначающая его цифра; само по себе число нельзя записать, стереть, зачеркнуть, повторить.

⁵⁾ «Подстановка» — по-английски «substitution». — *Прим. перев.*

Скажем, когда мы говорим, что 10 — число пальцев на обеих руках, то мы характеризуем этой фразой некоторое «свойство» множества наших пальцев — свойство, которое, разумеется, «цифрой» никак не назовешь. Но число 10 может записываться как арабскими цифрами: «10», так и римскими цифрами (т. е. прописными латинскими буквами) «X»; эти имена сами по себе, конечно, различны, хотя обозначают они одно и то же число. Так вот, когда мы производим подстановку вместо числовой переменной (которая сама есть просто знак, буква), то мы ставим вместо одного знака другой знак. Мы не можем подставить вместо знака число — ведь число, являющееся некоторым свойством (или, как иногда говорят, понятием), вообще не есть что-то такое, что можно непосредственно нанести на бумагу. Итак, вместо числовой — а лучше сказать, *цифровой!* — переменной мы подставляем именно цифру (или цифровое выражение, скажем «s0» или «7 + 5»), а не число. Именно поэтому мы выше говорили о подстановке *цифры* (обозначающей число) *y*, а не самого числа *y* в интересующее нас метаматематическое выражение.

Читатель может далее поинтересоваться, какое же число обозначается выражением «sub(*y*, 13, *y*)», если формула, имеющая гёделевский номер *y*, не содержит переменной, имеющей гёделевский номер 13, т. е. попросту, если формула не содержит переменной «*y*». Скажем, sub(243 000 000, 13, 243 000 000) есть гёделевский номер формулы, полученной из формулы, имеющей гёделевский номер 243 000 000, подста-

новой вместо переменной « y » цифры⁶⁾ 243 000 000. Выше (с. 85) мы уже выяснили, что 243 000 000 — гёделевский номер формулы « $0 = 0$ », не содержащей переменной « y ». Но какая же формула получится из формулы « $0 = 0$ » в результате подстановки вместо не входящей в нее переменной « y » цифры, обозначающей число 243 000 000? Ответ очень простой: раз формула не содержит этой переменной, то и подстановка чисто фиктивная, т. е. такая «подстановка» *не меняет* формулы. иначе говоря, число, обозначаемое записью « $\text{sub}(243\,000\,000, 13, 243\,000\,000)$ », есть само число 243 000 000.

Заметим, наконец, что выражение « $\text{sub}(y, 13, y)$ » не является *формулой* нашей арифметической системы в том смысле, в каком, например являются формулами выражения « $\exists x (x = sy)$ » или « $\text{Dem}(x, z)$ », и вот почему. Выражение « $0 = 0$ » мы называем формулой; такая запись *утверждает* наличие некоторого отношения между двумя числами, так что имеет смысл ставить вопрос, истинно или ложно это утверждение. Аналогично, когда вместо переменных, входящих в выражение « $\text{Dem}(x, z)$ », подставляются некоторые цифры, то получающееся выражение оказывается записью некоторого утверждения (о том, что два числа находятся в некотором отношении), о котором опять-таки имеет смысл ставить вопрос, истинно оно

⁶⁾ Напоминаем, что «цифрой» мы здесь всюду называем *всю запись числа*, а не отдельный знак такой записи, как обычно; скажем, «10» есть цифра, обозначающая число 10, хотя обычно и говорят, что это число записывается посредством *двух* цифр «1» и «0». — *Прим. перев.*

или ложно. То же самое можно сказать и о выражении « $\exists x (x = sy)$ ».

Что же касается выражения « $\text{sub}(y, 13, y)$ », даже если переставить в него вместо « y » какую-нибудь конкретную цифру, то оно все равно не будет ничего *утверждать* и по этой причине не будет ни истинным, ни ложным. Выражение это лишь *обозначает* (или *называет*) некоторое число, характеризующее его как некоторую *функцию* от других чисел. Итак, выражение « $\text{Dem}(x, z)$ » (подобно, например, записям « $y = f(x)$ » или « $3^2 + 4^2 = 5^2$ ») есть формула и является схемой (или формой) некоторого *утверждения*; в отличие от него запись « $\text{sub}(y, 13, y)$ » (подобно « $f(x)$ » или « $(7 \times 5) + 8$ ») является лишь схемой (формой) *имени* некоторого числа, но не формулой.

7.3. Изложение доказательств

Перейдем, наконец, к описанию идеи самого доказательства теоремы Гёделя. Вначале мы дадим совсем простой его набросок, разделив доказательство на пять основных шагов.

Прежде всего Гёдель показывает (1), как построить арифметическую формулу G , представляющую («кодирующую») метаматематическое высказывание «формула G недоказуема». Иначе говоря, формула G *гласит о себе самой*, что она недоказуема.

Идея построения такой формулы G по существу заимствована из рассуждения, приводящего к парадоксу

Ришара. В этом парадоксе, как мы помним, выражению «ришарово число» сопоставляется некоторое число n , после чего рассматривается предложение « n есть ришарово число». В гёделевском же доказательстве формуле G сопоставляется некоторое число h , причем это делается так, чтобы оно соответствовало предложению «Формула, которой сопоставлено число h , недоказуема». Но затем Гёделю удастся показать (2), что формула G доказуема тогда и только тогда, когда доказуемо ее формальное отрицание $\sim G$. И этот шаг доказательства аналогичен соответствующему этому рассуждению в парадоксе Ришара, где доказывается, что n есть ришарово число в том и только в том случае, если n не есть ришарово число. Но если некоторая формула и ее отрицание доказуемы, то арифметическое исчисление, в котором возможны оба доказательства, противоречиво.

Значит, если это исчисление непротиворечиво, то как G , так и $\sim G$ не выводимы из аксиом арифметики. Следовательно, если арифметика непротиворечива, то G является формально неразрешимой формулой. Далее Гёдель доказывает (3), что хотя формула G формально недоказуема, она является тем не менее *истинной* арифметической формулой. Она является истинной в том смысле, что утверждает про каждое натуральное число, что оно обладает некоторым арифметическим свойством, причем свойство это такого рода, что наличие его у каждого натурального числа можно действительно подтвердить посредством прямой проверки. (4) Поскольку формула G , будучи истинной, является формально недоказуемой, система аксиом арифметики *неполна*. Иными словами, из акси-

ом арифметики нельзя вывести все истинные стремления арифметики. Более того, Гёдель доказал *существенную* неполноту⁷⁾ арифметики: даже если присоединить к ее аксиоматике новые аксиомы, обеспечивающие выводимость истинной формулы G , все равно и для такой пополненной (расширенной) системы можно всегда указать истинную, но формально недоказуемую формулу. (5) В заключение Гёдель указал, как построить арифметическую формулу A , представляющую метаматематическое высказывание «Арифметика непротиворечива», и доказал, что формула $\langle A \supset G \rangle$ формально недоказуема. Из этого следует недоказуемость и самой формулы A . Окончательный вывод: непротиворечивость арифметики нельзя установить посредством рассуждения, представимого в формальном арифметическом исчислении.

Перейдем теперь к более подробному изложению доказательства теоремы Гёделя.

1. Мы уже определили выше формулу $\langle \sim \text{Dem}(x, z) \rangle$, представляющую в формальном арифметическом исчислении метаматематическое высказывание: «последовательность формул, имеющая гёделевский номер x , не является доказательством формулы, имеющей гёделевский номер z ». Теперь мы доставив перед формулой приставку $\langle \forall x \rangle$, являющуюся формальным аналогом языкового оборота «для всех x » (или «для любого x »), и получим в результате новую формулу $\langle \forall x \sim \text{Dem}(x, z) \rangle$, представляющую в формаль-

⁷⁾ Это свойство называют чаще *неполнотой*. — Прим. перев.

ной арифметике метаматематическое высказывание: «для любого x последовательность формул, имеющая гёделевский номер x , не является доказательством формулы, имеющей гёделевский номер z ». Таким образом, эта новая формула является как раз той формулой формального арифметического исчисления, которая представляет в нем метаматематическое высказывание «формула, имеющая гёделевский номер z , недоказуема», или, что то же: «для формулы с гёделевским номером z нельзя построить доказательство».

Гёдель далее показал, что некоторый частный случай этой формулы является формально недоказуемым. Чтобы получить формулу, мы будем исходить из следующей формулы:

$$\forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(y, 13, y)) \quad (1)$$

Эта формула, принадлежащая формальному арифметическому исчислению, представляет некоторое метаматематическое высказывание. Какое же именно? Читатель должен помнить, что выражение « $\text{sub}(y, 13, y)$ » обозначает некоторое число, которое есть гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер y , подстановкой вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13, (т. е. переменной y) цифры, обозначающей число y . Отсюда видно, что формула (1) представляет метаматематическое высказывание: «формула, имеющая в качестве гёделевского номера число $\text{sub}(y, 13, y)$, недоказуема».

Но так как формула (1) принадлежит арифметическому исчислению, она имеет некоторый гёделевский

номер, который можно фактически вычислить. Пусть этим номером является число n . Подставим в (1) вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13 (т. е. вместо переменной « y »), цифру, обозначающую это число n . В результате подстановки мы получим некоторую формулу, которую назовем (в честь Гёделя) « G »:

$$\forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n)). \quad (G)$$

Формула G и есть тот частный случай формулы (1), который мы хотели построить. Формула G принадлежит арифметическому исчислению и должна иметь некоторый гёделевский номер. Каков же этот номер? Нетрудно показать, что таким номером задается число $\text{sub}(n, 13, n)$. В самом деле, вспомним, что $\text{sub}(n, 13, n)$ есть гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер n , подстановкой вместо переменной « y » (имеющей гёделевский номер 13) цифры, обозначающей число n . Но ведь формула G как раз и получена из формулы, имеющей гёделевский номер n (т. е. из формулы (1)), подстановкой цифры для числа n вместо входящей в формулу переменной y . Таким образом, действительно $\text{sub}(n, 13, n)$ есть гёделевский номер формулы G .

Однако формула G — *арифметическая формула*, которая представляет в арифметическом исчислении *математическое высказывание*

«формула „ $\forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n))$ “ недоказуема».

Можно, следовательно, сказать, что формула G утверждает свою собственную недоказуемость,

2. Следующий шаг, как уже говорилось, состоит в доказательстве того факта, что формула G является формально недоказуемой. Доказательство очень похоже на рассуждение, приводящее к парадоксу Ришара, но не подвержено тем возражениям, которые вызывает последнее.

Как мы помним, в парадоксе Ришара фигурирует некоторое число n , связанное с определенным математическим высказыванием. В рассуждении же Гёделя число n связывается с определенной арифметической формулой (которая лишь представляет метаматематическое высказывание). Таким образом, в теореме Гёделя в отличие от парадокса Ришара идет речь о некотором арифметическом свойстве чисел (задается вопрос, обладает ли число $\text{sub}(n, 3, n)$ свойством, выражаемым формулой « $\forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n))$ »), а не о метаматематическом, благодаря чему и не возникает дискредитирующего парадокса Ришара смешения высказывания на языке арифметики с высказыванием об арифметике.

Ход рассуждения относительно несложен. Задача его сводится к тому, чтобы доказать, что если бы формула G была доказуема, то ее формальное отрицание (т. е. формула « $\sim \forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n))$ ») также было бы доказуемо, и обратно, если бы отрицание формулы G было доказуемо, то была бы доказуема и сама формула G . Отсюда мы получаем, что формула G доказуема в том и только в том случае, если доказуема формула $\sim G$.

Это утверждение доказано, строго говоря, не самим Гёделем, а Дж. Б. Россером (1936). Гёдель же получил несколько более слабый результат, позволяющий, впрочем, получить все интересующие нас важные выводы.

Воспроизведем вкратце первую часть рассуждения Гёделя, согласно которой, если G доказуема, то и $\sim G$

доказуема. Пусть G доказуема. Тогда должна существовать последовательность арифметических формул, являющаяся доказательством для G . Пусть гёделевский номер доказательства есть k . В таком случае между этим k и числом $\text{sub}(n, 13, n)$, являющимся гёделевским номером G , должно иметь место арифметическое отношение, обозначаемое через « $\text{Dem}(x, z)$ », т. е. « $\text{Dem}(k, \text{sub}(n, 13, n))$ » должна быть истинной арифметической формулой. Можно, однако, показать, что это арифметическое отношение обладает тем свойством, что если оно имеет место для каких-либо двух чисел, то формула, выражающая это обстоятельство, непременно доказуема. Таким образом, формула « $\text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n))$ » не только истинна, но и формально доказуема, т. е. является теоремой. Но правила вывода элементарной логики позволяют нам немедленно вывести из этой теоремы формулу « $\sim \forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n))$ ». Таким образом, мы вывели из доказуемости формулы G доказуемость ее формального отрицания. Значит, если наша формальная система непротиворечива, то G в ней недоказуема.

Чтобы показать, что доказуемость $\sim G$ влечет доказуемость G , требуется аналогичное, но несколько более громоздкое рассуждение, которое мы не будем пытаться здесь воспроизводить.

Как мы уже отмечали, если и некоторая формула, и ее отрицание выводимы из некоторой системы аксиом, то эта система противоречива (несовместна). Поэтому если аксиомы формализованной системы арифметики совместимы, то ни G , ни ее отрицание не могут

быть доказуемыми. Иначе говоря, если наши аксиомы непротиворечивы, то G формально *неразрешима* в том точном смысле, что ни G , ни $\sim G$ не выводимы из арифметических аксиом.

3. Важность предыдущего заключения не сразу бросается в глаза. Что особенного — можно было бы задать вопрос — в том, что некоторая формула, сформулированная на арифметическом языке, оказалась неразрешимой? Но приходится признать, что из этого результата действительно вытекают чрезвычайно важные выводы. Все дело в том, что, хотя формула G и является недоказуемой, можно, как выясняется, чисто *метаматематическим* рассуждением установить ее *истинность*. Иными словами, удастся показать, что формула G выражает некоторое (довольно-таки громоздко выражаемое, но тем не менее вполне определенное) свойство, с необходимостью принадлежащее всем натуральным числам (аналогично, скажем, свойству, выражаемому гораздо более простой формулой « $\forall x \sim (x + 3 = 2)$ », интерпретируемой обычно как утверждение, что никакое натуральное число, сложенное с числом 3, не дает в сумме 2).

Приведем здесь рассуждение, устанавливающее истинность формулы G . Во-первых, в предположении непротиворечивости арифметики можно доказать, что метаматематическое утверждение

«формула „ $\forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n))$ “ недоказуема»

истинно. Во-вторых, такое утверждение представляется (выражается) в арифметике той самой форму-

лой, которая в нем упоминается. В-третьих, мы вспоминаем, что истинным метаматическим утверждениям при осуществляемом посредством гёделевской нумерации отображении их в арифметику соответствуют истинные же арифметические формулы. (Именно это обстоятельство обуславливает всю плодотворность такого отображения; ситуация здесь совершенно та же, что в аналитической геометрии, где координатное «кодирование» обеспечивает перевод истинных геометрических высказываний в истинные алгебраические высказывания.) Отсюда и вытекает, что формула G , соответствующая истинному метаматическому высказыванию, сама должна быть *истинной*. Следует, однако, еще раз подчеркнуть, что истинность арифметического высказывания установлена нами отнюдь не формальным выводом выражающей его формулы из аксиом, а посредством некоторого метаматематического рассуждения.

4. Теперь нам придется напомнить читателю понятие «полноты», введенное нами в заключение раздела, посвященного исчислению высказываний. Мы назвали тогда систему аксиом полной, если любое истинное предложение, выражаемое на языке данной системы, можно из них вывести. В противном случае (т. е. если не каждое истинное предложение, выражимое в данной системе, выводится из ее аксиом) система аксиом «неполна». Но мы только что как раз и установили, что G есть истинная арифметическая формула, не выводимая из арифметических аксиом, иными словами, система аксиом арифметики неполна (разумеется, в предположении непротиворе-

чивости этой системы аксиом), более того, формальная арифметика *существенно* неполна: даже если добавить к ней формулу G в качестве новой аксиомы, расширенная система аксиом будет все равно недостаточна для формального вывода *всех* арифметических истин. Дело в том, что по отношению к пополненной таким образом системе аксиом мы можем провести в точности то же рассуждение, что и раньше, и та же конструкция даст нам новый пример предложения, истинного в расширенной арифметической системе, но не выводимого из ее аксиом, и такое предложение будет снова выражаться неразрешимой арифметической формулой. И этот поистине удивительный вывод остается в силе независимо от того, сколько раз мы ни производили бы такое расширение системы. Таким образом, мы вынуждены признать некоторую принципиальную ограниченность возможностей аксиоматического метода. Вопреки, казалось бы, самым естественным ожиданиям, запас арифметических истин оказывается столь обширным, что ни из никакой точно зафиксированной системы аксиом не удастся их *все* формально вывести.

5. Мы подошли теперь к месту, которое можно назвать кодой это поразительной интеллектуальной симфонии — творения Гёделя. Описанные выше шаги позволили обосновать метаматематическое утверждение «если арифметика непротиворечива, то она неполна». Но Гёделю удалось доказать и нечто большее, а именно, что само условное метаматематическое утверждение (именно *все* утверждение в *целом*)

изображается в формализованной арифметике некоторой *доказуемой* формулой.

Построить такую замечательную формулу нам будет теперь совсем нетрудно. Мы уже говорили выше (в разделе 5), что метаматематическое высказывание «арифметика непротиворечива» эквивалентно высказыванию «существует хода бы одна недоказуемая арифметическая формула». Последнее же высказывание, очевидно, представляется в формальном (арифметическом) исчислении следующей формулой:

$$\exists y \forall x \sim \text{Dem}(x, y). \quad (A)$$

Формула эта, если выразить ее словесно,, гласит: «существует по крайней мере одно натуральное число y , такое что для любого натурального x числа x и y не находятся между собой в отношении Dem ». Если же интерпретировать формулу как метаматематическое высказывание, то мы получим: «существует по крайней мере одна арифметическая формула, для которой никакая последовательность формул не является ее доказательством». Таким образом, формула A как раз и представляет посылку метаматематического утверждения «Если арифметика непротиворечива, то она неполна». В то же время заключение утверждения «Она (т. е. арифметика) неполна» непосредственно вытекает из высказывания «имеется истинное арифметическое утверждение, не являющееся формально доказуемым в арифметике»; последнее же высказывание представляется в арифметическом исчислении посредством нашей старой знакомой — формулы G . Итак, условное метаматематиче-

ское высказывание «Если арифметика непротиворечива, то она неполна» представимо формулой

$$\exists y \forall x \sim \text{Dem}(x, y) \supset \forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n)),$$

которую можно было бы теперь сокращенно обозначить через « $A \supset G$ ». Именно для этой формулы можно установить ее формальную доказуемость, но мы не будем здесь пытаться это делать.

Покажем лишь, что формула A недоказуема. Допустим противное. Тогда, поскольку формула $A \supset G$ доказуема, *modus ponens* позволяет нам заключить, что доказуемой должна бы быть и формула G . Но если наше исчисление непротиворечиво, G формально неразрешима, а потому, конечно, недоказуема. Таким образом, если арифметика непротиворечива, то формула A недоказуема.

Что это означает? Формула A представляет метаматематическое высказывание «Арифметика непротиворечива». Значит, если бы высказывание можно было обосновать каким нибудь рассуждением, отобразимым в последовательность формул, являющуюся доказательством в арифметическом исчислении, сама формула A была бы доказуема. Но это, как мы только что видели, невозможно, если во всяком случае считать, что арифметика непротиворечива. Мы дошли, наконец, до заключительного аккорда: нам приходится согласиться, что если арифметика непротиворечива, то непротиворечивость ее не может быть установлена никаким метаматематическим рассуждением, допускающим представление в арифметическом формализме.

Надо сказать, что этот замечательный результат проведенного Гёделем анализа проблемы не исключает, однако, возможности метаматематического доказательства непротиворечивости арифметики. Из него следует лишь, что невозможно такое доказательство непротиворечивости, которое могло бы быть отображено (переведено) в формальное доказательство, проводимое внутри самой формальной арифметики.

- ❖ Положение здесь очень напоминает то, которое сложилось в геометрии в связи с доказательством невозможности деления произвольного угла на три части с помощью циркуля и линейки. Доказательство это отнюдь не исключает возможности произвести искомое деление при помощи каких-либо более сильных средств. И действительно, его можно осуществить, добавив к циркулю и линейке еще постоянный эталон длины.

На самом деле метаматематические доказательства непротиворечивости арифметики были получены; первым такое доказательство осуществил представитель школы Гильберта Герхард Генцен в 1936 г., а впоследствии было получено еще несколько доказательств того же результата. Доказательства эти имеют большую логическую ценность, заключающуюся хотя бы уже в том, что они продемонстрировали существенно новые формы метаматематических рассуждений и конструкций, а также в том, что благодаря им выяснилось, какие новые виды правил вывода надо допустить, если мы хотим установить непротиворечивость арифметики. Но все подобные доказательства уже не могут быть воспроизведены в рамках арифметического исчисления, и, поскольку все новые правила вывода уже не являются финитистскими, дока-

зательства непротиворечивости, полученные с их помощью, никоим образом нельзя считать достижением цели, поставленной в гильбертовской программе в ее первоначальной формулировке.

8

Заключительные замечания

Выводы, к которым пришел Гёдель, имеют ряд важных следствий, безусловно, не оцененных еще в достаточной мере. Выводы эти показывают прежде всего, что решение задачи отыскания для каждой дедуктивной системы (и в частности, для системы, в которой можно было бы выразить всю совокупность арифметических теорем) абсолютного доказательства непротиворечивости, удовлетворяющего предложенным Гильбертом «финитистским» критериям, если и не является логически невозможным (хотя бы в силу некоторой неопределенности самого понятия «финитности»), то во всяком случае в высшей степени маловероятно. Выводы эти показывают также, что имеется бесконечно много истинных арифметических предложений, которые нельзя формально вывести из произвольной данной системы аксиом посредством некоторого точного перечня правил вывода. Отсюда следует, что аксиоматический подход к арифметике натуральных чисел, кроме всего прочего, не в состоя-

нии охватить всю область истинных арифметических суждений. Отсюда также вытекает, что то, что мы понимаем под процессом математического доказательства, не сводится к использованию аксиоматического метода. Формализованные аксиоматические процедуры доказательств основаны на некотором множестве выделенных и фиксированных с самого начала аксиом и правил вывода. Как видно уже из самих рассуждений, использованных в гёделевских доказательствах, изобретательность математиков в деле отыскания новых правил доказательства не поддается никаким априорным ограничениям. Таким образом, совершенно безнадежно рассчитывать на то, что понятие убедительного математического доказательства можно придать раз навсегда четко очерченные логические формы. В связи со всем этим возникает целый ряд новых проблем, далеко еще не решенных и слишком трудных для подробного рассмотрения их здесь — независимо от того, можно ли рассчитывать на то, что понятия математической и логической истинности можно исчерпывающим образом определить или же (мнение, к которому стал склоняться сам Гёдель) такое определение находится в компетенции безоговорочного философского «реализма» платонистского толка.

- ❖ Платонизм (реализм) — доктрина, согласно которой математика не творит и не придумывает рассматриваемые в ней «объекты», а *открывает* их, подобно тому как, например, Колумб открыл Америку. Таким образом, согласно этой точке зрения, объекты должны в некотором смысле «существовать» до их «открытия». Платонистская доктрина не предполагает, что объекты математического исследования находятся между собой в пространственно-временных отношениях. Объекты эти суть

отделенные от материальных оболочек вечные Формы, прототипы, населяющие особые абстрактные Сферы, доступные лишь Интеллекту. Согласно такой концепции треугольные или круглые формы физических предметов, данные нам в ощущениях, сами по себе вовсе не являются объектами математического исследования. Эти пространственные формы суть лишь несовершенные воплощения единого «совершенного» Треугольника или «совершенного» Круга, вечных, неизменных, лишь частично проявляющихся в облике материальных предметов и являющихся подлинными объектами рассмотрения математической мысли. Сам Гёдель обнаружил близость к такого рода воззрениям, заявляя, «что допущение... классов и общих понятий столь же законно, как и допущение физических тел... и имеются столь же высокие основания верить в их существование» (из работы Гёделя «Russell's, Mathematical Logic» в книге *The Philosophy of Bertrand Russell*. Evanston; Chicago, 1944. С. 137). (Данная здесь авторами характеристика «платонизма» довольно-таки поверхностна, а традиционная квалификация Гёделя как платониста далеко не бесспорна. Впрочем, тема эта далеко выходит за рамки настоящей книги. См., например: *Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств* / Пер. с англ. М.: Мир, 1966. Гл. X. § 8; 3-е изд. М.: URSS, 2010. — *Прим. перев.*)

Заклучения, к которым пришел Гёдель, порождают, естественно, и вопрос, можно ли построить вычислительную машину, сравнимую по своим «творческим» математическим возможностям с человеческим мозгом. Современные вычислительные машины обладают некоторым точно фиксированным запасом команд, которые умеют выполнять их элементы и блоки; команды соответствуют фиксированным правилам вывода некоторой формализованной аксиоматической процедуры. Таким образом, машина решает задачу, шаг за шагом выполняя одну из «встроенных» в нее заранее команд. Однако, как видно из гёделевской теоремы о неполноте, уже в элемен-

тарной арифметике натуральных чисел возникает бесчисленное множество проблем, выходящих за пределы возможностей любой конкретной аксиоматической системы, а значит, и недоступных для таких машин, сколь бы остроумными и сложными ни были их конструкции и с какой бы громадной скоростью ни проделывали они свои операции. Для каждой конкретной задачи в принципе можно построить машину, которой эта задача была бы под силу, но нельзя создать машину, пригодную для решения любой задачи. Правда, и возможности человеческого мозга могут оказаться ограниченными, так что и человек тогда сможет решить не любую задачу. Но даже если это так, структурные и функциональные возможности человеческого мозга пока еще намного больше по сравнению с возможностями самых изощренных из мыслимых пока машин, так что непосредственной опасности вытеснения людей роботами не видно ¹⁾.

При всем сказанном теорему Гёделя отнюдь не следует расценивать как некое основание для интеллектуального пессимизма или оправдания мистических представлений о разуме. Обнаружение того факта, что для любой формальной системы существуют арифметические истины, которые нельзя в ней формально доказать, вовсе не означает наличия каких-то совершенно непознаваемых истин или же что роль строгого до-

¹⁾ При всем правдоподобии последней фразы она никак не следует из предыдущего. Вообще, далеко не ясно, как распространенный тезис об ограниченности возможностей моделирования человеческого мышления можно согласовать с материалистической гипотезой о его природе. Ср., впрочем, заключительные два абзаца авторского текста. — *Прим. перев.*

казательства отныне должна занять некая «мистическая» интуиция, заслуживающая большего доверия, чем применяемые нами формы интеллектуального исследования. Не означает оно и утверждаемой некоторыми мыслителями «принципиальной ограниченности человеческого мышления». Означает оно лишь то, что возможности нашего мышления не сводятся к полностью формализуемым процедурам и что нам еще предстоит открывать и изобретать новые принципы доказательств. Мы ведь видели уже, что истинности некоторых математических утверждений, не выводимых из данного множества аксиом, можно тем не менее установить при помощи метаматематических рассуждений. И утверждать, что для обоснования таких формально недоказуемых (но устанавливаемых посредством метаматематических рассуждений) истин можно в лучшем случае рассчитывать лишь на интуицию, было бы совершенно безответственно.

Констатированные выше ограничения возможностей вычислительных машин не свидетельствуют и о беспочвенности надежд на объяснение явлений жизни и человеческого мышления в физико-химических терминах. Сама по себе теорема Гёделя не отвергает и не подтверждает возможности такого рода объяснений. Единственный непреложный вывод, который мы можем сделать из гёделевской теоремы о неполноте, состоит в том, что природа и возможности человеческого разума неизмеримо тоньше и богаче любой из известных пока машин. И работа самого Гёделя является замечательным примером этой тонкости и богатства, дающим повод отнюдь не для уныния, а, наоборот, для самых смелых надежд на силу творческой мысли.

Послесловие переводчика

Курт Гёдель — крупнейший специалист по математической логике — родился 28 апреля 1906 г. в Брюнне (ныне г. Брно, Чехия). Окончил Венский университет, где защитил докторскую диссертацию, был доцентом в 1933–1938 гг. После аншлюса эмигрировал в США. С 1940 по 1963 г. Гёдель работает в Принстонском институте высших исследований (с 1953 г. — профессор этого института). Гёдель — почетный доктор Йельского и Гарвардского университетов, член Национальной академии наук США и Американского философского общества.

В 1951 г. К. Гёдель удостоен высшей научной награды США — Эйнштейновской премии. В статье, посвященной этому событию, другой крупнейший математик нашего времени Джон фон Нейман писал¹⁾: «Вклад Курта Гёделя в современную логику поистине монументален. Это — больше, чем просто монумент, это века, разделяющая две эпохи... Без всякого преуве-

¹⁾ Цитируем по сборнику статей «*Основания математики*» выпущенному в Нью-Йорке в честь 60-летия К. Гёделя (оттуда же взяты приведенные выше краткие биографические сведения).

личения можно сказать, что работы Гёделя коренным образом изменили сам предмет логики как науки».

Действительно, даже сухой перечень достижений Гёделя в математической логике показывает, что их автор по существу заложил основы целых разделов этой науки: теории моделей (1930 г.; так называемая теорема о полноте узкого исчисления предикатов, показывающая, грубо говоря, достаточность средств «формальной логики» для доказательства всех выражаемых на ее языке истинных предложений), конструктивной логики (1932–1933 гг.; результаты о возможности сведения некоторых классов предложений классической логики к их интуиционистским аналогам, положившие начало систематическому употреблению «погружающих операций», позволяющих осуществлять такое сведение различных логических систем друг к другу), формальной арифметики (1932–1933 гг.; результаты о возможности погружения классической арифметики в интуиционистскую, показывающие в некотором смысле непротиворечивость первой относительно второй), теории алгоритмов и рекурсивных функций (1934 г.; определение понятия общерекурсивной функции, сыгравшего решающую роль в установлении алгоритмической неразрешимости ряда важнейших проблем математики, с одной стороны, и в реализации логико-математических задач на электронно-вычислительных машинах — с другой), аксиоматической теории множеств (1938 г.; доказательство относительной непротиворечивости аксиомы выбора и континуум-гипотезы Кантора от аксиом теории множеств, положившее начало серии важнейших результатов об относительной непроти-

воречивости и независимости теоретико-множественных принципов).

Но даже если бы на «счету» Гёделя не было ни одного из таких замечательных достижений, достаточно было бы одной его работы, чтобы имя ее автора составило целую эпоху в истории науки. Именно этой двадцатипятистраничной статье двадцатипятилетнего автора и посвящена книжка известного американского логика Э. Нагеля и опытного популяризатора науки Дж. Р. Ньюмена, переведенная на большинство европейских языков.

Среди довольно многочисленной к настоящему времени популярной литературы по математической логике книга Нагеля и Ньюмена выделяется своей «целенаправленностью». Не пытаясь дать общий очерк идей и методов математической логики, авторы строят изложение вокруг центральных, с их точки зрения, проблем этой науки — проблем непротиворечивости и полноты. Доказательство того факта, что для достаточно богатых математических теорий требования эти несовместимы, и есть то поразительное открытие Гёделя, которому посвящена книга. Не требуя от читателя по существу никаких предварительных познаний, авторы с успехом объясняют ему сущность одной из самых замечательных и глубоких теорем математики и логики.

Стремясь к популярности изложения, авторы допускают ряд неточностей технического характера. Немногочисленные их замечания философского характера также представляются несколько поверхностными. Необходимость восполнения таких дефектов на-

ряду с требованием уложиться в жестко ограниченный объем заставила переводчика несколько сократить текст за счет некоторых длиннот, повторений и отступлений. Местами сокращения удалось добиться ценой некоторой перекомпоновки материала. Все эти отступления от оригинала специально нами не оговаривались. Опущены также предметный указатель и библиография: читатель может найти дополнительные ссылки по заинтересовавшим его вопросам по монографии С. К. Клини «Введение в метаматематику» (пер. с английского, М.: Изд-во иностр. лит., 1957; 2-е изд. М.: URSS, 2009).

Ю. А. Гастев

Другие книги нашего издательства:



URSS

Серия «НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы»

Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия.
 Гнеденко Б. В. Беседы о математической статистике.
 Гнеденко Б. В. Беседы о теории массового обслуживания.
 Мизес Р. Вероятность и статистика.
 Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии.
 Колягин Ю. М., Саркисян А. А. Познакомьтесь с топологией: На подступах к топологии.
 Вольберг О. А. Основные идеи проективной геометрии.
 Меннхен Ф. Некоторые тайны артистов-вычислителей.
 Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр.
 Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского.
 Юдин Д. Б., Юдин А. Д. Математики измеряют сложность.
 Ланге В. Н. Физические опыты и наблюдения в домашней обстановке.
 Ланге В. Н. Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи: Механика. Молекулярная физика. Термодинамика.
 Ланге В. Н. Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи: Электричество и магнетизм. Колебания и волны. Оптика. Атомная и ядерная физика.
 Точидловский И. Я. Что можно в школе сделать и показать по физике.
 Гарднер М. Теория относительности для миллионов.
 Гарднер М. Этот правый, левый мир.
 Сазанов А. А. Четырехмерная модель мира по Минковскому.
 Хвольсон О. Д. Теория относительности А. Эйнштейна и новое миропонимание.
 Владимиров Ю. С. Пространство-время: явные и скрытые размерности.
 Перельман Я. И. Занимательная астрономия.
 Кононович Э. В. Солнце — дневная звезда.
 Липунов В. М. В мире двойных звезд.
 Каганов М. И. Электроны, фононы, магноны.
 Каганов М. И., Цукерник В. М. Природа магнетизма.
 Тарасов Л. В., Тарасова А. Н. Беседы о преломлении света.
 Харкевич А. А. Автоколебания.
 Ашкинази Л. А. Электронные лампы: Из прошлого в будущее.
 Шейд К. Опыты по химии для начинающих.
 Кац Е. А. Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры.
 Гампсон В., Шеффер К. Парадоксы природы.

Тел./факс:

(499) 135-42-46,
(499) 135-42-16,

E-mail:

URSS@URSS.ru

<http://URSS.ru>

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (495) 625-2457)
 «Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)
 «Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, 780-3370)
 «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)
 «Дом книги на Ладужской» (м. Бауманская, ул. Ладужская, 8, стр. 1. Тел. 267-0302)
 «Геоизис» (м. Университет, 1 гум. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (495) 939-4713)
 «У Ментавра» (РГГУ) (м. Новослободская, ул. Чаянова, 15. Тел. (499) 973-4301)
 «СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 448-2355)