SET THEORY AND THE CONTINUUM HYPOTHESIS

PAUL J. COHEN
Stanford University

W. A. BENJAMIN, INC.
NEW YORK 1966 AMSTERDAM

Пол Дж. Коэн

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗА

Перевод с английского
А. С. ЕСЕНИНА-ВОЛЬПИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1969

УДК 519.50

В книге излагается доказательство независимости гипотезы континуума от остальных аксиом теории множеств — один из самых интересных и ярких результатов, полученных в математике за последнее десятилетие. Именно за этот результат ее автор, профессор Стэнфордского университета П. Коэн, был удостоен медали Филдса на последнем Международном конгрессе математиков (Москва, 1966).

Книга, несомненно, заинтересует широкий круг математиков, в первую очередь специалистов по теории множеств, математической логике и основаниям математики. Она будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов университетов и пединститутов.

Редакция литературы по вопросам математических наук

Инд. 2-2-3

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

В предлагаемой книге автор излагает свое замечательное открытие — доказательство независимости континуум-гипотезы, а также аксиомы выбора, для аксиоматической теории множеств Цермело — Френкеля (***ZF***). Этому, а также некоторым смежным, также очень интересным результатам, посвящена последняя, четвертая глава этой книги.

Но книга Коэна замечательна не только этим. Первые три главы этой книги сами по себе представляют замечательную монографию по основаниям теории множеств (система ***ZF*** и равнонепротиворечивая с ней система ***GB*** Гёделя — Бернайса, обозначаемая в литературе также через Σ). В третьей главе впервые подробно излагается первоначальное гёделевское доказательство относительной непротиворечивости аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы (притом прямо для ***ZF*** хотя и с использованием теоремы о равнонепротиворечивости из § 6, гл. II). Это первоначальное гёделевское доказательство по своей идее гораздо прозрачнее того, которое было впоследствии с большой полнотой изложено Гёделем [14]. В конце третьей главы содержится также принадлежащий автору материал о минимальных моделях.

Первая глава содержит общее введение в классическую математическую логику и теорию рекурсивных функций. Заслуживает внимания коэновский подход к доказательству второй теоремы Гёделя о неполноте — подход, по-видимому, гораздо проще поддающийся пол-

ной формализации, чем это было сделано в книге Гильберта и Бернайса (или, на русском языке, в добавлении I к [15]). Впрочем, многое из того, о чем говорится в § 7 — и особенно в § 8—11 — первой главы в дальнейших главах не используется, так что читатель, стремящийся понять прежде всего основные открытия автора о независимости, может эти параграфы опустить, а при наличии общего знакомства с математической логикой начать чтение прямо со второй главы. Но это чтение следует вести уже без пропусков. (Можно, однако, опустить конец § 6 из гл. IV — начиная с определения понятия «плотного множества»; приведенная в конце этого параграфа теорема доказана автором слишком сжато и не требуется для понимания дальнейшего материала.)

Нет надобности излагать в этом предисловии введенный автором метод вынуждения (forcing). Следует, однако, обратить внимание читателя на теорему Шепердсона, изложенную в начале гл. IV. Из этой теоремы следует, в частности, невозможность доказательства независимости континуум-гипотезы, проведенного посредством построения обычных, так называемых стандартных (например, сохраняющих отношение принадлежности) моделей для системы ***ZF***. Речь при этом идет о моделях, построенных средствами самой системы ***ZF***. Коэн строит ряд моделей для ***ZF*** с дополнительными аксиомами типа отрицания континуум-гипотезы, или аксиомы выбора и т. д. — в частности, получается модель для ***ZF*** с аксиомой выбора и отрицанием континуум-гипотезы. При этом он пользуется дополнительной аксиомой СМ о существовании стандартной модели для ***ZF***. Обойтись без этой аксиомы при построении моделей только что указанного вида Коэн не мог бы в силу теоремы Шепердсона. (Эта аксиома слабее, например, чем

аксиома о существовании недостижимого кардинального числа.) Но построение такой модели для всей системы ***ZF*** — это больше, чем требуется для доказательств непротиворечивости или независимости посредством моделей. Дело в том, что ***ZF*** содержит схему аксиом подстановки и, тем самым, бесконечно много аксиом, а для доказательства непротиворечивости какой-либо системы аксиом достаточно доказать непротиворечивость любой ее конечной подсистемы. Для конечных же подсистем ***ZF*** (пускай с добавленными аксиомой выбора, отрицанием континуум-гипотезы и т. п.) построение таких моделей уже не опирается на СМ (и теорема Шепердсона на этот случай не распространяется). Поскольку цели автора состоят в доказательствах (относительной) непротиворечивости или независимости, а не в построении моделей, можно считать, что аксиомой СМ он пользуется при этом только для простоты изложения. В конце книги он отмечает это обстоятельство, так что его результаты, по существу, не зависят от СМ.

Трудности доказательства независимости континуум-гипотезы (или даже более сильной гёделевской аксиомы конструктивности) до Коэна считались связанными прежде всего с этой теоремой Шепердсона. В свете этой теоремы казалось, что поиски следует сосредоточить на нестаидартных моделях — и уже после появления работы Коэна чешский математик П. Вопенка сумел построить такую модель (для всей системы ***ZF***, не пользуясь никакими дополнительными аксиомами типа СМ). В известном смысле это была не менее важная задача, так как возможны различные точки зрения на вопрос — строятся ли модели для получения доказательств непротиворечивости или такие доказательства рассматриваются только для обоснования того, что существуют модели для соответствующих систем аксиом. Коэну не

удалось построить модель для *ZF* с отрицанием аксиомы конструктивности средствами самой системы *ZF* — это впервые сделал Вопенка. Но первое доказательство независимости аксиомы конструктивности в *ZF*, проводимое средствами *ZF*, принадлежит тем не менее Коэну. Оно было получено им в 1962—1963 гг.

Пожалуй, замысел коэновской идеи вынуждения можно описать следующим образом. Не требовалось больших усилий для того, чтобы попытаться, рассмотрев счетную модель для *ZF* (существование которой вытекает из СМ и известной теоремы Лёвенгейма — Скулема), присоединить к ней затем дополнительные множества исходного универсума, «мира», с целью нарушить континуум-гипотезу в возникающей при этом модели. Возможность такого обыгрывания парадокса Скулема (об относительности понятия счетности) была очевидна уже давно. (Следует отметить, впрочем, что Коэн с большим искусством применяет эту теорему Лёвенгейма — Скулема, появляющуюся в его книге в четырех различных вариантах; ранее распространенные доказательства недостаточно ясно указывали на возможность сохранения в модели первоначальных отношений и универсума.) Но при этом неизбежно возникали серьезные технические трудности: либо не удавалось обеспечить соблюдение в модели всех аксиом, либо не удавалось доказать, что в модели, наряду с континуумом, таким же образом не изменяется $\aleph_1$ так, что равенство $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ продолжает сохраняться. Коэновская идея состояла в том, чтобы при построении модели подвергнуть релятивизации и самое понятие истинности; аппарат вынуждения служит именно для введения этой релятивизованной истинности (и использует при этом те же средства, типа СМ, которые нужны для определения обычной истинности для *ZF*). Но, как убедится читатель при

чтении последней главы, дело обстоит значительно сложнее.

К сожалению, автор в своем изложении сознательно допускает некоторые пробелы. В большинстве случаев они легко поддаются восполнению, но в одном случае, а именно, в связи с понятием абсолютности, рассмотренным в § 3 гл. III и используемым также в четвертой главе при изложении его собственных результатов о независимости — речь должна идти не только о восполнении пробела, но и о довольно существенном уточнении формулировок автора. Можно предположить, что автор счел себя вправе так обойтись с понятием абсолютности по той причине, что видит возможность в принципе обойтись вовсе без употребления этого понятия, а именно — пользуясь тем, что можно, как указано в первой половине § 11, гл. IV, обойтись даже вовсе без рассмотрения моделей. Но автор не излагает никаких подробностей того доказательства, которое при этом имеется в виду, и убедиться в правильности того, о чем говорит автор в только что указанном месте, можно проще всего с помощью всего остального материала четвертой главы — а для этого надо (в связи с первой леммой из § 5) все-таки более тщательно рассмотреть этот вопрос об абсолютности. По этой причине было сочтено необходимым снабдить эту книгу довольно длинным добавлением о понятии абсолютности. Другое добавление гораздо короче и связано с неоднозначностью смысла континуум-гипотезы при отсутствии аксиомы выбора.

Что касается педантизма, то автор относится к нему явно враждебно, временами нарочно опуская несложные доказательства или применяя заведомо неточные выражения там, где их смысл должен, по его мнению, быть вполне ясен из контекста. Если бы он поступал иначе — книга получилась бы вдвое толще (по этой же причине

также пришлось несколько сократить первое дополнение). Там, где эти вольности изложения легко могут ввести в заблуждение, авторский текст снабжен подстрочными примечаниями, а в отдельных случаях (доказательства теорем и т. п.) поправки (с разрешения автора) внесены прямо в текст перевода. Имеются и примечания другого характера, также преследующие цель уточнения сказанного автором, а в отдельных случаях — критические или, наконец, естественно возникающие в связи с трудностями перевода. В тех случаях, когда формулы приходится переносить со строки на строку, употребляется знак переноса ↙.

Автор получает свои результаты в предположении о непротиворечивости ZF и неоднократно высказывает мысль о необходимости принять это допущение на веру. С этой точкой зрения автора можно не соглашаться, но подробное обсуждение этого вопроса увело бы слишком далеко.

Автор всюду отождествляет ZF с теорией множеств. Против этого можно возражать, так как Кантор оставил свою теорию не в виде ZF. Безусловно, представляет интерес проблема перенесения результатов автора (и, конечно, также более ранних результатов Гёделя) на другие системы аксиом для теории множеств, например на систему New Foundations Куайна. Но об этом не будет речи в этой книге.

Автор любезно прислал свои исправления для русского издания и в связи с этим переводчик выражает ему искреннюю благодарность. Я благодарю В. Н. Гришина за помощь, неоднократно оказанную им мне при составлении сносок, особенно в гл. IV.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нижеследующие записи основаны на курсе лекций, прочитанном в Гарвардском университете весной 1965 г. Главная цель состояла в изложении доказательства независимости континуум-гипотезы. Чтобы сделать курс по возможности независимым, мы включили в него основной материал по математической логике и аксиоматической теории множеств, а также изложение гёделевского доказательства непротиворечивости континуум-гипотезы. Наш обзор логики по необходимости оказался довольно беглым, хотя мы стремились исчерпать такие фундаментальные вопросы, как формальные системы, неразрешимые суждения и рекурсивные функции. За исключением теоремы Лёвенгейма — Скулема, фактически ни один из результатов первой главы не используется в дальнейших главах, так что читатель, изучавший какой-либо вводный курс в логику, может опустить первую главу. Ее основная цель состоит в том, чтобы приучить математиков, не являющихся специалистами в логике, к тому строгому и точному взгляду на вещи, который необходим при изучении вопросов оснований математики. Кроме того, мы пытались в ней преодолеть некоторые широко распространенные смешения понятий, например между понятиями неразрешимого (undecidable) суждения, относящегося к конкретной системе аксиом, и неразрешимой (unsolvable) проблемы, связанной с методами вычисления.

Ввиду того, что мы искренне надеялись сделать эти записи понятными широкому кругу неспециалистов, интересующихся этой проблемой, мы решили не следовать тому совершенно формалистическому стилю, который встречается в некоторых учебниках логики. Скорее мы старались выделить интуитивные мотивы, но в то же время изложить доказательства по возможности полно. Для чтения не требуется никакой специальной подго-

товки, хотя в некоторых случаях мы ссылаемся на примеры из других областей математики. Конечно, будет полезно, если читатель знаком с построением «наивной» теории множеств, в том виде, как оно обычно излагается в курсах по теории функций действительной переменной или по теоретико-множественной топологии.

Мы хотим самым сердечным образом поблагодарить Л. Корвина (L. Corwin), Д. Пинкуса (D. Pincus), Т. Сканлона (T. Scanlon), Р. Уолтона (R. Walton) и Дж. Ксенакиса (J. Xenakis) за то, что они вели записи различных параграфов, и Джона Баруайза (Jon Barwise) за помощь при подготовке окончательного варианта. Мы глубоко благодарим Азриэля Леви (Azriel Lévy) за исправление многих ошибок, за многие усовершенствования в изложении и за то, что он помог нам повысить весь стилистический уровень этих записей по сравнению с их довольно примитивным первоначальным состоянием. Мы должны также поблагодарить слушателей курса, указывавших на все ошибки и стимулировавших обсуждение, что сделало чтение курса приятным занятием. Конечно, эти записи совсем не так хорошо отшлифованы, как того требует предмет, но так как в литературе не имеется ни одного достаточно полного обзора этих вопросов, мы предпочли опубликовать их в настоящем неформальном изложении, нежели отложить это дело на неопределенный срок.

I

Глава

Основы математической логики

§ 1. Введение

Теперь стало известно, что истинность или ложность континуум-гипотезы и других связанных с ней допущений не может быть установлена средствами современной теории множеств. Такое положение вещей по отношению к классической и, по-видимому, хорошо поставленной проблеме, наверно, должно показаться обыкновенному математику совсем неудовлетворительным. Поэтому следует более внимательно и, пожалуй, более критически взглянуть на основания математики. Хотя наша современная «канторовская» математика достигла весьма больших успехов в ее рассмотрении абстракций, нельзя игнорировать тот факт, что с самого начала многие считали подозрительным использование бесконечных процессов. В XIX столетии Коши, Дедекинд, Кантор и другие сумели отразить возражения, относившиеся к употреблению сходящихся рядов и действительных чисел, но затем более глубокая критика последовала со стороны математиков более позднего поколения, а именно Брауэра, Пуанкаре и Вейля. Возникшие споры привели к образованию различных школ мысли в области оснований математики. Не будет ошибкой сказать, что ни одно из этих направлений не смогло вполне успешно ответить на фундаментальные вопросы, а возникшие трудности заключены, по-видимому, в самой природе математики. Несмотря на то что континуум-гипотеза является весьма драматическим примером того, что (с нашей теперешней точки зрения) можно назвать абсолютно неразрешимым суждением, величайшим препятствием для удовлетворительной философии математики остается гёделевская теорема о неполноте. В свете этих

фундаментальных трудностей, которыми математики часто пренебрегают, независимость континуум-гипотезы выглядит менее удивительной.

По-видимому, Гаусс был первым из математиков, выразивших сомнения в связи с чересчур свободным использованием бесконечности. В 1831 г. он писал: «Я протестую... против использования бесконечных величин как чего-то законченного, что всегда недопустимо». Впоследствии Кронекер выражал взгляды, являющиеся критикой тех определений, которые требуют бесконечного процесса для проверки того, что какой-либо объект им удовлетворяет. Работы Кантора по теории множеств много раз критиковали, указывая, что они имеют дело с фикциями. Но несмотря на это, в наши дни бесконечные множества принимаются почти без оговорок. Традиционная позиция принимает построение системы действительных чисел из рациональных, совершая этим последний и окончательный шаг в длинном ряду критики и пересмотров, отметившем историю математики. Какие же возражения можно выдвинуть против построения действительных чисел? Просто следующие: хотя действительные числа основаны на целых, для этого требуется ввести неясное понятие *произвольного множества* целых чисел (или эквивалентным образом произвольной последовательности целых чисел). Математики, склонные к финитистской точке зрения, считают допустимыми только такие множества, для которых имеется явное правило, определяющее, какие целые числа входят в это множество. Например, школа Брауэра (интуиционизм) считает законными лишь конечные множества и даже отдельное целое число не считает определенным, если не дано вполне определенного правила для его вычисления. (Например, множество, состоящее из 5, если великая теорема Ферма верна, и из 7, если она неверна, не является, согласно Брауэру, правильно определенным.) Критика Вейля и Пуанкаре была направлена против «непредикативных» определений. Хотя ее возражения и не были столь крайними, как брауэровские, принятие этой критики означало бы разрушение значительных областей математики.

Другим источником возражений явились парадоксы, или антиномии теории множеств. В канторовской теории множеств множество мыслилось как определенное каким-нибудь свойством. Но сам Кантор указал, что множество всех множеств приводит к противоречию. Хотя парадокс этого типа (так же как и парадоксы Рассела, Бурали-Форти и др.) кажется совсем далеким от обычных математических рассуждений, парадоксы выявили необходимость крайней осторожности при попытках описать, какие свойства определяют множества. В 1908 г. Цермело предложил формальную систему аксиом для теории множеств, которая охватывает все современные математические рассуждения и которая при этом считается свободной от парадоксов. Эта аксиоматизация теории множеств соответствовала духу школы формализма, возглавленной Давидом Гильбертом. Согласно формалистической точке зрения, математику следует рассматривать как чисто формальную игру, разыгрываемую посредством пометок на бумаге, и единственное требование, которому эта игра должна удовлетворять, состоит в том, что она не приводит ни к какому противоречию. Для полного описания игры требовалось установить правила математической логики с гораздо большей точностью, чем это делалось раньше. Это было сделано, и формалисты занялись доказательствами непротиворечивости различных систем. Хорошо известно, что эта надежда была разрушена гёделевским открытием теоремы о неполноте, из которой следует, что непротиворечивость математической системы может быть доказана только методами более сильными, чем сама эта система [1]).

[1]) Такая трактовка «второй теоремы Гёделя о неполноте» (см. ниже, стр. 71) обычна, но не вполне точна. Эта теорема устанавливает лишь, что для доказательства непротиворечивости рассматриваемых систем недостаточно тех средств, которые описываются этой системой. Но современные аксиоматические теории (к которым относится эта теорема) описывают не все те средства, которые используются в рассуждениях, а потому эта теорема не дает оснований считать, что для доказательства непротиворечивости математической аксиоматической теории нужны более сильные средства (скажем, дополнительные постулаты и т. п.), чем те, которые фактически используются при построении этой теории. Именно, аксиоматические теории используют интуитивную идею натурального числа, а

Несмотря на этот провал, формалистическая программа осуществила большой вклад в развитие логики, проведя систематическое изучение математических систем. В этой книге нашей первой задачей будет описание того, как математическая система может быть полностью сведена к чисто формальной игре, состоящей в манипуляциях над символами на бумаге. Под *формальной системой* мы будем понимать конечное собрание символов и совершенно точных правил манипулирования над этими символами для образования некоторых комбинаций, именуемых «теоремамн». Конечно, эти правила должны быть даны в неформальном математическом языке. Однако мы будем требовать того, чтобы они были вполне явными правилами, не требующими выполнения никаких бесконечных процессов, и того, чтобы в принципе их можно было закодировать для вычислительной машины. Таким образом вопросы, относящиеся к бесконечным множествам, заменяются вопросами, относящимися к комбинаторным возможностям некоторой формальной игры. Тогда мы сможем сказать, что некоторые известные суждения не разрешимы в данной формальной системе.

§ 2. Формальные языки

Если мы рассмотрим аксиомы Пеано для целых чисел, мы придем к выводу, что их нельзя записать в форме, приемлемой для вычислительной машины. Это вызвано тем, что центральная аксиома индукции говорит о «множествах» целых чисел, но аксиомы Пеано не

также правила, следования правилу, и различные правила принятия вещей во внимание, а также их отождествлений и различений и т. д. Так как эти средства по существу содержатся в любой аксиоматической теорни, нет оснований считать их «более сильными», чем эта теория — а между тем они не описываются аксиоматическими теориями. Вторая теорема Гёделя не разрушает поэтому надежды на получение таких доказательств непротиворечивости упоминаемых автором теорий, которые осиованы на более глубоком рассмотрении этих средств.

Но для этого требуется существенное расширение и углубление формалистической точки зрения, о котором здесь нет речи. — *Прим. перев.*

дают правил для образования множеств и не содержат основных свойств множеств. Это служит примером того, как трудно удовлетворить строгим требованиям охарактеризованных выше формальных систем. При построении формальной системы, соответствующей аксиомам Пеано, мы обнаруживаем, что результат не вполне соответствует всем нашим ожиданиям. Эта трудность связана с любой попыткой формализации.

В нашем формальном языке встретятся символы двух типов. Во-первых, встретятся символы, общие для всех математических систем. Во-вторых, появятся символы, употребляемые для обозначения тех или иных концепций в специальных областях математики, например символы для сложения, группового умножения, сопряженной матрицы и т. д. Общие символы, которыми мы будем пользоваться, таковы:

$\sim$	$\&$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
не	и	или	влечет	тогда и только тогда, когда

$\forall$	$\exists$	$=$	$(,)$
для всех	существует	равняется	скобки

$x, '$

символы переменных

Слова, поставленные под этими символами, в принципе вовсе не относятся к нашему формальному языку. Скорее мы рассматриваем символ «$\leftrightarrow$» как формально представляющий слова «тогда и только тогда, когда». Обычные значения этих слов будут подсказывать некоторые правила, относящиеся к символам, но формальная игра должна происходить по правилам без обращения к каким-либо значениям, которыми эти правила подсказаны.

Первые пять символов известны как пропозициональные связки. Символы, формально представляющие «для всех» и «существует», известны как кванторы всеобщности и существования соответственно. Скобки употребляются при образовании выражений для того, чтобы обеспечить единственность способа их прочтения. В различных рассуждениях может потребоваться произвольно много переменных, и мы будем употреблять $x, x', x'', \ldots,$

в качестве символов для переменных. На практике мы будем употреблять буквы $x_1, x_2, x, \ldots$ или $x, y, z, \ldots$, хотя в теории они должны быть заменены на $x, x', x'', \ldots$. Таким образом, мы нуждаемся только в конечном множестве символов. Наш перечень символов не является в каком-либо смысле самым экономным для наших целей, так как (и это будет следовать из правил нашей формальной системы) некоторые из этих символов могут быть устранены при помощи комбинаций других. Например, из приводимых ниже правил A и G будет следовать, что $\forall$ можно заменить на $\sim \exists \sim$. Иногда там, где это не сможет вызвать путаницы, мы будем опускать скобки или употреблять в формулах другие сокращения.

Для выражения интересующих нас суждений понадобятся специальные символы, которые будут употребляться для формального представления конкретных рассматриваемых отношений. Для этой цели мы допустим конечное множество символов отношений $R_1, R_2, \ldots$. С каждым R_i будет связано целое число $n_i \geqslant 1$, интуитивным образом указывающее, что отношение, представляемое посредством R_i, является отношением между n_i объектами. Например, если $n_1=2$, то R_1 будет бинарным отношением (как, например, $\leqslant$ между действительными числами), и в наших правилах образования формальных выражений мы будем требовать, чтобы за R_1 следовали две переменные или константы, как в $R_1(x, y)$ и $R_1(c, z)$. Мы будем говорить, что R_i является *n_i-м предикатным символом*, и для явного указания n_i мы будем иногда писать $R_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$. Мы будем также употреблять некоторые особые символы для представления констант, играющих в системе специальную роль. Например, в теории групп удобно иметь символ для единичного элемента. Мы будем употреблять букву «c» вместе с «$'$» для порождения символов c, c', c'' и т. д., представляющих константы. На практике мы будем писать просто c_1, c_2 и т. д.

Прежде чем давать точные правила для образования формальных выражений нашего формального языка, мы приведем несколько примеров. Вместо того чтобы представлять себе «сложение» как операцию над парами чи-

сел, мы будем его считать отиошением между тройками чисел, а именно отношением

$$r+s=t.$$

Таким образом, если мы рассматриваем формальный язык, в котором R_1 является символом тернарного отиошения, мы можем условиться, чтобы R_1 представляло только что указанное отношение. Тогда утверждение о единственности сложения имело бы вид

$$\forall x\forall y\forall z\forall u\,((R_1(x, y, z)\,\&\,h_1(x, y, u))\to z=u.$$

Если мы условимся, что умножение $(r\cdot s=t)$ представляется посредством $R_2(x, y, z)$, то ассоциативность умножения примет вид

$$\forall x\forall y\forall z\exists t_1\exists t_2\exists t_3\,(R_2(x, y, t_1)\,\&\,R_2(t_1, z, t_2)\,\&\,R_2(y, z, t_3)\,\&\,R_2(x, t_3, t_2))$$

Существование аддитивной единицы можно высказать в виде $\exists x\forall y(R_1(x, y, y))$ — но это было бы во многих случаях неудобно. В самом деле, если в каком-нибудь рассуждении используется эта аддитивная единица, нам потребовалось бы снова высказать ее существование. Проще употреблять постоянный символ «0» и ввести в качестве аксиомы $\forall x(x+0=x)$. Вообще использование сокращений необходимо для того, чтобы математика была понятна, и мы будем без колебания употреблять их, когда их значение будет ясно и когда ясно будет также, как следует их заменять в строго формальном языке.

Продолжим рассмотрение нашей формальной системы, использующей только специальные символы отношений R_1 и R_2, представляющие сложение и умножение. Нетрудно видеть, что в этой системе можно выразить все аксиомы теории полей. (Заметим, что мы обсуждаем еще не доказательства или «истинные» суждения, а только вопрос о том, что́ может быть выражено.) Более сложные утверждения, например тот факт, что квадратное уравнение имеет не более двух корней, могут быть выражены, например, следующим образом:

$$\forall a,b\exists u\exists v\ \forall x\,((x^2+ax+b=0)\to(x=u\vee x=v)).$$

Мы предлагаем в качестве упражнения показать, каким образом может быть записана в этой формальной системе формула $x^2+ax+b=0$. Но трудности возникнут при попытке выразить, что уравнение степени n имеет не более n корней. Причина состоит в том, что у нас нет (в этой формальной системе) ни обозначения для того, что целое число служит степенью произвольного полинома, ни индуктивной процедуры для определения понятия полинома произвольной степени. Итак, мы не можем оперировать с некоторыми свойствами, содержащими понятие произвольного целого числа. Тем не менее можно формулировать теоремы теории Галуа для квадратных, кубических и т. д. расширений, говоря для этого только о перестановках корней. Но теория Галуа в ее обычной формулировке говорит о множествах, например о подполях, подгруппах и т. д., и потому она не может быть прямо выражена в нашей системе.

Теперь мы дадим точные правила для образования грамматически корректных суждений. Последние будут называться *правильно образованными формулами* (поф). Напоминаем, что наш формальный язык состоит из общих символов, приведенных выше, включая символы для переменных и для постоянных, а также из конечного числа символов отношений, и с каждым из последних символов связано некоторое целое число.

Правила для правильно образованных формул.

1. $x=y$, $x=c$, $c=c'$, где x и y — символы переменных, а c и c', любые символы постоянных, являются пофами.

2. Если R — n-ичный символ отношения, а каждый из $t_1, \ldots, t_n$ является символом для переменной или для постоянной, то $R(t_1, \ldots, t_n)$ — поф.

3. Если A и B являются пофами, то и $\sim(A)$, $(A)\&(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\rightarrow(B)$ и $(A)\leftrightarrow(B)$ являются пофами.

4. Если A — поф, то и $\exists xA$ и $\forall xA$ являются пофами.

Заметим, что в наших пофах символы для постоянных и для переменных могут появляться свободно [1]).

[1]) С той лишь оговоркой, что символ для постоянной не может стоять непосредственно после $\forall$ или $\exists$. — *Прим. перев.*

Кроме того, правило 4 разрешает получать в качестве пофа выражения вида $\forall xy=z$. Интуитивно их следует интерпретировать посредством соглашения, что если $\forall x$ или $\exists x$ встречается перед пофом A, не содержащим x, то этот квантор не играет никакой роли и может быть опущен. Это приводит нас к строгому различению связанных и свободных переменных.

Определение. Каждое вхождение символа переменной в поф следующим образом определяется как *свободное* или *связанное*:

1. Каждая переменная, входящая в формулу вида, указанного в правилах 1 и 2, является *свободной* [1]).

2. *Свободные* и *связанные* вхождения переменных в пофы, построенные согласно правилу 3, в точности таковы же, как и вхождения для A и B взятых отдельно.

3. *Свободные* и *связанные* вхождения переменной в формулу $\exists xA$ или $\forall xA$ в точности таковы же, как и ее вхождения в A, за исключением того, что всякое свободное вхождение x теперь рассматривается как *связанное*.

Читатель может возразить, что в правиле 4 мы были чересчур небрежны, позволив снова связывать связанные переменные. Хотя фактически соглашение о том, что такая квантификация не играет никакой роли, не может привести ни к какой путанице, для большей точности мы примем следующее определение:

Определение. Поф называется «хорошей», если при ее построении в применениях правила 3 A и B могут иметь общими только свободные переменные, а в применениях правила 4 x встречается в A в качестве свободной переменной.

Соглашения, относящиеся к употреблению скобок, таковы, что никакой двусмысленности возникнуть не может. На самом деле это устанавливается посредством простого комбинаторного рассуждения, которое мы опускаем.

---

[1]) Точнее — каждое вхождение переменной в рассматриваемые формулы является свободным. — *Прим. перев.*

Определение. *Суждением* (statement) называется формула без свободных переменных.

§ 3. Универсально верные суждения

Задача математики состоит в том, чтобы открывать «истинные» (true) теоремы. Мы будем обозначать термином «верные» (valid) те суждения, которые образуются согласно некоторым правилам, а затем мы обсудим, как это понятие сопоставляется с интуитивной идеей «истинного». Выписывая суждение, содержащее некоторые символы постоянных и символы отношений, мы еще не имеем указания ни на какую конкретную интерпретацию этих символов. Если такое суждение интуитивно следует считать «истинным», оно должно быть истинным независимо от того, как интерпретируются эти символы. Например, если A — конъюнкция обычных аксиом теории полей, а B — суждение о том, что квадратное уравнение имеет не более двух корней, то $A \to B$ — истинное суждение, потому что в любой системе, в которой эти аксиомы имеют место по отношению к двум тернарным отношениям (которые мы можем назвать сложением и умножением), квадратное уравнение может иметь не более двух корней. Мы можем ввести понятие модели для формальной системы, и основной результат будет состоять в отождествлении верных суждений с теми, которые истинны в любой модели.

Правила для получения верных суждений известны под названием *исчисления предикатов*. Некоторая простая подсистема этих правил, состоящая из тех правил, важность которых была осознана раньше, чем важность остальных, известна под названием *исчисления высказываний*. Эти правила касаются манипуляций над символами $\sim$, $\&$, $\vee$, $\to, \leftrightarrow$. В настоящий момент пусть A_1, A_2, ... будут переменными буквами, которые не следует смешивать с переменными из формального языка. Эти переменные будут в конечном счете заменяться пофами.

Определение. *Пропозициональная функция* — это формальная цепочка символов, определенная следующим образом:

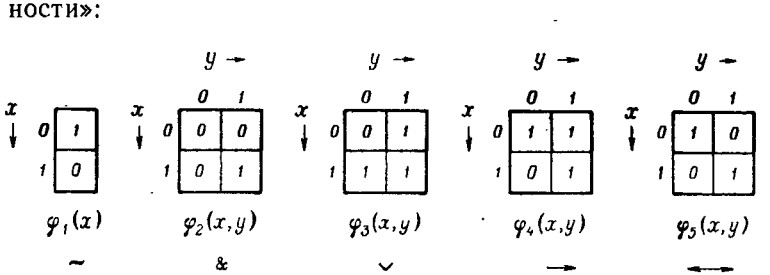
1. Если A — переменная буква, то A — пропозициональная функция.

2. Если P и Q — пропозициональные функции, таковыми же являются и $\sim(P)$, $(P)\&(Q)$, $(P)\vee(Q)$, $(P)\rightarrow(Q)$ и $(P)\leftrightarrow(Q)$.

Если P — пропозициональная функция от переменных $A_1, \ldots, A_n$ (это означает, что P содержит переменные только из списка $A_1, \ldots, A_n$ и не обязательно все эти переменные), мы хотим указать, каким образом истинность или ложность P зависит от таковой для A_i. Для этой цели мы сопоставим с P функцию, определенную на множестве всех n-ок из 0 и 1 (т. е. систем $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, где ε_i есть 0 или 1) и принимающую только значения 0 и 1. Это делается следующим образом:

1. Пропозициональная функция A_i соответствует функции-проекции $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \rightarrow \varepsilon_i$.

2. Если f — функция, сопоставленная с P, а g — функция, сопоставленная с Q, то функциями, сопоставленными с $\sim(P)$, $(P)\&(Q)$, $(P)\vee(Q)$, $(P)\rightarrow(Q)$, $(P)\leftrightarrow(Q)$, служат соответственно $\varphi_1(f)$, $\varphi_2(f, g)$, $\varphi_3(f, g)$, $\varphi_4(f, g)$, $\varphi_5(f, g)$, где φ_i заданы следующими «таблицами истинности»:



Читатель легко может проверить, что это соответствует обычному употреблению пропозициональных связок при соглашении, что 1 представляет истину, а 0 — ложь. Мы определяем пропозициональную функцию как *тождественно истинную*, если сопоставленная с ней функция принимает только значение 1. Интуитивно это означает, что такая функция «истинна» независимо от того, какие суждения подставлены вместо ее перемен-

ных. Теперь мы можем установить основное правило исчисления высказываний:

Правило A. (Правило исчисления высказываний)
Если P — пропозициональная функция от переменных букв $A_1, \ldots, A_n$, являющаяся тождественно истинной, то результат замены каждого A_i каким-либо суждением является верным суждением.

Вспомним, что нашим искомым значением термина «верное суждение» должно быть суждение, интуитивно истинное при любой интерпретации использованных в его построении символов отношений и постоянных. Имеется еще одно правило исчисления предикатов, связанное с A, которое позволит нам получать новые верные суждения из уже имеющихся. Оно часто иллюстрировалось суждениями, относящимися к смертности Сократа.

Правило B. (Правило заключения)
Если A и $(A)\rightarrow(B)$ — верные суждения, таково же и B.

Мы теперь дадим правила манипулирования со знаком равенства.

Правило C. (Правило равенства)
1. $c=c$, $(c=c')\rightarrow(c'=c)$ и $((c=c')\&(c'=c''))\rightarrow(c=c'')$, *где* c, c', c'' — *любые три символа постоянных являются верными суждениями.*

2. *Если A — суждение, c и c' — символы постоянных, и если A' представляет A с заменой c в каждом его вхождении на c', то* $(c=c')\rightarrow((A)\rightarrow(A'))$ — *верное суждение.*

Правило D. (Замена переменных)
Если A — любое суждение, а A' получается из A путем замены каждого вхождения символа x символом x', где x и x' — любые два символа переменных и x' не входит в A, то $(A)\leftrightarrow(A')$ *является верным суждением.*

Оба эти правила очевидны и не требуют обсуждения. В качестве простого упражнения можно показать, что

для каждого суждения существует «хорошее» суждение, полученное путем замены символов для переменных в A другими символами для переменных и такое, что $(A) \leftrightarrow (A')$ является верным суждением [1]). В следующем правиле пусть $A(x)$ представляет формулу с одной-единственной свободной переменной x, причем *каждое* вхождение x в эту формулу является свободным, и пусть $A(c)$ представляет результат замены каждого вхождения x символом c для постоянной.

Правило E. (Правило специализации) $(\forall x\ A(x)) \rightarrow (A(c))$, *где* c *— любой символ для постоянной, является верным суждением.*

Следующее правило может вызвать недоумение и требует некоторых пояснений. Часто в рассуждениях мы говорим «пусть c — произвольное, но фиксированное число». Затем мы начинаем рассуждать о c и приходим к некоторому заключению $A(c)$. Мы можем из этого вывести, что $\forall x A(x)$, так как мы не использовали никакого специального свойства c. В самом деле, мы обращались с c как с переменной, хотя и назвали этот символ постоянной. Это основано на том, что наши верные суждения должны быть истинными при любой интерпретации символов для отношений и для постоянных. Это можно выразить посредством правила: если $A(c)$ — верное суждение, таково же $\forall x\ A(x)$. Однако правило F будет иметь форму, более удобную для наших целей, и, как мы увидим, оно дает также только что указанное правило.

Правило F.

Пусть B *— суждение, не содержащее ни* c, *ни* x. *Тогда если* $A(c) \rightarrow B$ *— верное суждение, таково же* $\exists x A(x) \rightarrow B$.

---

[1]) Неточность: таким путем нельзя устранить нарушений правила 4 на стр. 20. Для этой цели придется пользоваться эквивалентностями $\forall x \leftrightarrow A$ и $\exists x A \leftrightarrow A$, где кванторы $\forall x$ и $\exists x$ — *фиктивны* (т. е. x не входит свободно в A). Эти эквивалентности легко доказываются с помощью $A \rightarrow A$ и правил E и F. — *Прим. перев.*

Следующее правило позволит нам привести всякую формулу, содержащую кванторы, к такой форме, в которой она начинается с квантора.

Правило G.

Пусть $A(x)$ имеет одну-единственную свободную переменную x и пусть в ней каждое вхождение x свободно. Пусть B — суждение, не содержащее x. Тогда верны следующие суждения:

$$(\sim(\forall x A(x))) \leftrightarrow (\exists x \sim(A(x))),$$
$$((\forall x A(x)) \& (B)) \leftrightarrow (\forall x((A(x)) \& (B))),$$
$$((\exists x A(x)) \& (B)) \leftrightarrow (\exists x (A(x)) \& (B))).$$

Определение. Пусть S — набор суждений. Мы будем говорить, что A *выводимо из* S, если для некоторых $B_1, \ldots, B_n$, входящих в S, верно суждение $((B_1) \& \ldots \ldots \& (B_n)) \rightarrow (A)$.

Факт. *Если S и S' — такие наборы суждений, что каждое суждение, входящее в S', выводимо из S, тогда каждое суждение, выводимое из S', выводимо из S.*

Доказательство. Упражняйтесь.

В ходе доказательств мы часто рассуждаем от противного или принимаем некоторые допущения временно. Все такие шаги обосновываются посредством исчисления высказываний, хотя мы не будем в применениях приводить всех подробностей. Допустим, например, что суждение $A(c)$ верно. Мы покажем, что и суждение $\forall x\, A(x)$ верно. (Это — не то же самое, что утверждение о верности $A(c) \rightarrow \forall x\, A(x)$, которая, вообще говоря, не имеет места.) Достаточно показать, что $\sim \forall x\, A(x)$ приводит к противоречию (т. е. к $B \& \sim B$ для какого-либо B). Согласно правилу G, это эквивалентно доказательству того, что $\exists x \sim A(x)$ приводит к противоречию. Но $\sim A(c)$ приводит к противоречию, ибо $A(c)$ верно; следовательно, по правилу F, к противоречию приводит и $\exists x \sim A(x)$.

§ 4. Теорема Гёделя о полноте

Изложив правила образования верных суждений, мы переходим теперь к проблеме отождествления этих су-

ждений с интуитивно «истинными» суждениями. Это рассмотрение будет проведено в традиционном математическом духе, т. е. не в рамках какого-либо формального языка. Мы воспользуемся некоторыми элементарными понятиями теории множеств. Конечно, после того, как будет формализована сама теория множеств, можно будет и это рассмотрение выразить в ее формальной системе. В наших предыдущих рассмотрениях мы имели лишь конечное число символов. Это было важно для целей обоснования, так как позволяло свести математику к формальной игре, в которую может играть вычислительная машина. Однако в некоторых других целях желательно допустить произвольное количество символов для отношений и констант. Для этого более общего случая мы и будем писать доказательства в § 4 и 5.

Допустим теперь, что мы имеем дело с совокупностью суждений S, содержащих константы c_α, $\alpha \in I$, и символы отношений R_β, $\beta \in J$, причем каждое R_β имеет фиксированное число переменных. Пусть M — непустое множество, и пусть $c_\alpha \to \bar{c}_\alpha$ — отображение этих констант на элементы M, не обязательно различные, а $R_\beta \to \bar{R}_\beta$ — отображение, сопоставляющее k-ичному символу отношения подмножество k-кратного прямого произведения $M \times M \times \ldots \times M$. Тогда мы будем говорить, что имеется *интерпретация* констант c_α и символов R_β *в множестве* M. Каждому суждению, содержащему только эти символы для постоянных и отношений [1]), мы сопоставим его «значение истинности» при этой интерпретации. Конечно, с интуитивной точки зрения мы под этим будем подразумевать просто указание на то — истинно или нет это суждение в M при данной интерпретации только что упомянутых символов. Однако легко дать точное определение, если воспользоваться индукцией по длине формул.

---

[1]) В подлиннике — «constant symbols» (символы (дли) постоянной) и «relation symbols» (символы (для) отношения). При переводе здесь и ниже я часто заменяю первый из этих терминов термином «константа»; аналогично в других случаях термин «variable symbol» (символ (для) переменной) будет иногда переводиться как «переменная». В этой книге это не может вызвать никакой путаницы. — *Прим. перев.*

Определение. Пусть A — формула, все свободные переменные которой содержатся среди $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 0$, и пусть $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ — элементы M. Мы определяем значение истинности формулы A (в M) при $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ [1]).

1. Если A имеет вид $x_i = x_j$, $x_i = c$ или $c_i = c_j$, то A *истинно при* $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, коль скоро $\bar{x}_i = \bar{x}_j$, $\bar{x}_i = \bar{c}$ или соответственно $\bar{c}_i = \bar{c}_j$.

2. Если A есть $R(t_1, \ldots, t_m)$, где R — m-ичный символ отношения, а каждый t_i — символ постоянной или одна из переменных $x_1, \ldots, x_n$, то A *истинно при* $\bar{x}_1 \ldots$ $\ldots, \bar{x}_n$, коль скоро m-ка $\langle \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m \rangle$ входит в $\bar{R}$ (т. е. в подмиожество M^m, сопоставленное символу R при данной интерпретации).

3. Если A — пропозициональная функция формул, мы оцениваем *истинность* A *при* $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ средствами исчисления высказываний.

4. Если A имеет вид $\forall (y) B(y, x_1, \ldots, x_n)$ [соответственно $\exists y B(y, x_1, \ldots, x_n)$], то A *истинно при* $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, коль скоро для всех $\bar{y}$ в M [соответственно для некоторых $\bar{y}$ в M] $B(y, x_1, \ldots, x_n)$ истинно при $\bar{y}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$.

Чтобы избежать всевозможных трудностей, связанных с подстановками переменных, достаточно допустить, что все формулы являются хорошими пофами в смысле, определенном в параграфе 3 [2]). Заметим, что если A — суждение, то можно взять $n = 0$, и наше определение даст как раз истинность в M при данной интерпретации.

---

[1]) В подлиннике — «the truth value of A (in M) at $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$». Я иногда буду переводить «at» посредством «для» или «в» (вместо использованного в тексте «прн»). — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, это означает предложение ограннчить рассмотрение хорошими пофами. Всякую другую формулу при этом следует считать истнинной, если истинна (любая) эквивалентная ей поф. По-видимому, автор имеет в виду именно это.

Автор не оговаривает, что формула A может быть истиниой только в случаях 1—4; подобную «ограничительную клаузулу» (ср. «indirect clause» [15, § 6]) он нспользует в связн с каждым индуктивным определением неявно, нигде этого не оговарнвая.

Конечно, если A (рассматриваемого здесь вида) не является истинной при $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, она считается ложной прн $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. — *Прим. перев.*

Определение. Если S — множество суждений, содержащих c_α и R_β, M — множество, а $c_\alpha \to \bar{c}_\alpha$ и $R_\beta \to \bar{R}_\beta$ — отображения выше описанного вида, мы будем говорить, что M является *моделью для* S (*при этой интерпретации*), коль скоро все суждения из S истинны в M.

Строго говоря, модель — это множество M вместе с интерпретацией некоторых символов отношений и констант (которые могут и отсутствовать). Но там, где ясность от этого не пострадает, мы будем опускать явные упоминания об интерпретации.

Определение. Множество S суждений называется *непротиворечивым*, если суждение $A \,\&\, \sim A$ не может быть выведено из S ни при каком A.

«Острием» этих определений служит следующий очевидный факт:

Теорема 1. *Если A — верное суждение, то оно истинно в любой модели. Если множество суждений S имеет модель, то оно непротиворечиво.*

Мы опускаем скучное доказательство, являющееся просто проверкой того, что правила исчисления предикатов соответствуют корректным методам дедукции. Гораздо интереснее вопрос о том, исчерпывают ли приведенные правила все возможные дедукции. С нашим понятием модели это можно выразить вполне точно.

Теорема 2. Теорема Гёделя о полноте. *Пусть S — любое непротиворечивое множество суждений. Тогда существует модель для S, мощность которой не превосходит мощности S, если S бесконечно, и счетна, если S конечно.*

Доказательство использует аксиому выбора (если множество S не является и без нее вполне упорядоченным). Для данного S мы сможем явно показать, как построить модель для S. Однако это доказательство будет неконструктивным в том смысле, что построение модели для S будет зависеть от разбора бесконечного числа возможностей. Тем не менее если S — конечно, то в качестве модели можно будет взять множество всех

целых чисел, а ее отношения будут определимы арифметически (т. е. посредством формул, использующих только сложение и умножение). Это можно будет усмотреть из способа доказательства, но мы не будем входить в эти подробности.

Первым шагом будет исследование того частного случая, когда S вовсе не содержит кванторов.

Теорема 3. (Полнота исчисления высказываний.) *Если S не содержит кванторов и непротиворечиво, то существует модель M для S, в которой каждый элемент M имеет вид $\bar{c}_\alpha$ для некоторого c_α, встречающегося в S.*

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если T — непротиворечивое множество суждений, а A — произвольное суждение, то $T \cup \{A\}$ или $T \cup \{\sim A\}$ непротиворечиво.*

Доказательство. Если $T \cup \{A\}$ противоречиво, то для некоторых B_i из T и для некоторого C будет верно суждение $A \& B_1 \& \ldots \& B_n \to C \& \sim C$. Если $T \cup \{\sim A\}$ противоречиво, то для некоторых B_i' из T будет верно суждение $(\sim A) \& B_1' \ldots \& B_m' \to C \& \sim C$. Теперь из исчисления высказываний вытекает, что суждение $B_1 \& \ldots \ldots \& B_n \& B_1' \& \ldots \& B_m' \to C \& \sim C$ верно, так что T должно быть противоречивым.

Докажем теперь теорему 3. Допустим, что S вполне упорядочено. Это индуцирует полное упорядочение всех символов отношений и констант, встречающихся в S. А это в свою очередь вызывает полное упорядочение всех возможных суждений вида $c_i = c_j$ и $R_\beta(c_1, \ldots, c_n)$, где c_i и R_β — символы для постоянных и для отношений, встречающиеся в S. Обозначим эти суждения через F_α. Теперь мы определяем суждения G_α индукцией по α. Если F_α совместимо с $S \cup \{G_\beta \mid \beta < \alpha\}$, положим $G_\alpha = F_\alpha$, а в противном случае положим $G_\alpha = \sim F_\alpha$. С помощью доказанной леммы [1]) и индукции по α

[1]) Для предельных α в этом доказательстве используется также первая часть следующей фразы. — *Прим. перев.*

доказывается, что $S\cup\{G_\beta \mid \beta\leqslant\alpha\}$ непротиворечиво для всех α. Так как всякое противоречие должно выводиться из конечного числа суждений, мы видим, что система $H=S\cup\{G_\alpha\}$ непротиворечива. Для каждого c_α, встречающегося в S, полагаем $\bar{c}_\alpha=c_\beta$, где β — наименьший индекс такой, что $c_\alpha=c_\beta$ принадлежит H. (Такой β должен существовать, так как $c_\alpha=c_\alpha$ принадлежит H.) Пусть M — множество всех $\bar{c}_\alpha$; определяем $\bar{R}_\beta$ как множество всех $\langle \bar{c}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{c}_{\alpha_n}\rangle$ таких, что $R_\beta(c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_n})$ входит в H. Таким образом, наша модель состоит из некоторого подмножества множества всех формальных символов c_α. Рассмотрение правила C показывает, что если в нашем определении отношений $\bar{R}_\beta$ на M возникает какая-либо двусмысленность[1]), то в H должно встретиться противоречие. Легко также показать, что каждое суждение в H или его отрицание должно быть следствием из суждений G_α, так как каждое атомарное отношение[2]), встречающееся в качестве суждения в S,

---

[1]) По-видимому, автор имеет в виду случаи, когда $\bar{c}_{\alpha_1}=\bar{c}_{\gamma_1}, \ldots, \bar{c}_{\alpha_n}=\bar{c}_{\gamma_n}$ и $R_\beta(c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_n})$ входят, а $R_\beta(c_{\gamma_1}, \ldots, c_{\gamma_n})$ не входит в H. В этих случаях при $i=1, \ldots, n$, пусть $\bar{c}_{\alpha_i}=\bar{c}_{\gamma_i}=c_{\beta_i}$; тогда $c_{\alpha_i}=c_{\beta_i}$ и $c_{\gamma_i}=c_{\beta_i}$ входят в H, а по правилу C из этих равенств следуют $c_{\alpha_i}=c_{\gamma_i}$ $(i=1, \ldots, n)$, а из них и $R_\beta(c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_n})$ следует $R_\beta(c_{\gamma_1}, \ldots, c_{\gamma_n})$. Пусть $R_\beta(c_{\gamma_1}, \ldots, \gamma_n)$ есть F_δ; тогда $S\cup\{G_\beta \mid \beta\leqslant\delta\}\subseteq H$, а потому G_δ входит в H и $G_\delta=\sim F_\delta=$ $=\sim R_\beta(c_{\gamma_1}, \ldots, c_{\gamma_n})$ (так как $R_\beta(c_{\gamma_1}, \ldots, c_{\gamma_n})$ не входит в H). Поэтому из H выводимо противоречие $R_\beta(c_{\gamma_1}, \ldots, c_{\gamma_n})\,\&\sim R_\beta(c_{\gamma_1}, \ldots, c_{\gamma_n})$. — *Прим. перев.*

[2]) То есть формулы вида $c_i=c_j$ или $R_\beta(c_1, \ldots, c_n)$; «атомарными» называют формулы, не содержащие логических операторов (пропозициональных связок и кванторов). В исчислении высказываний (индукцией по числу вхождений логических операторов в формулу F) доказывается, что если F составлена из атомарных формул $A_1, \ldots, A_n$ и для всех $i=1, \ldots, n$ из произвольного множества формул H выводима одна из формул A_i или $\sim A_i$, то из H вы-

или его отрицание встречается среди G_α. Отрицание суждения из S не может быть таким следствием, так как в этом случае H не была бы непротиворечивой. Ввиду того что M была определена так, что все G_α истинны, отсюда следует, что в M истинны все суждения из H, а следовательно, и из S. Теорема 3 доказана.

До сих пор мы пользовались только правилами A, B и C. Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся также и другие правила исчисления предикатов. Основная идея состоит в такой замене первоначальной системы S системой без кванторов, чтобы модель для новой системы, полученная по теореме 3, была также моделью для S. С этой целью мы будем систематически вводить новые константы так, как они требуются системой S. Точнее пусть T — система суждений, каждое из которых или вовсе не имеет квантора, или начинается с квантора. Пользуясь правилами D и G, мы можем усмотреть, что это не является существенным ограничением. Образуем новую систему следующим образом: если суждение $\forall x A(x)$ и символ c встречаются в T, присоединим суждение $A(c)$. Кроме того, для каждого суждения вида $\exists x A(x)$ выберем некоторый новый постоянный символ c, еще не использованный в T [1]), и присоединим суждение $A(c)$. Полученную систему обозначим через T^*. Заметим, что T является подсистемой T^*.

Лемма. *Если непротиворечива T, непротиворечива и T^*.*

Доказательство получается непосредственно из правил E и F. В самом деле, суждения первого типа, присоединенные к T при построении T^*, обязательно являются следствиями из T. А для суждений второго типа правило F показывает, что если противоречие может быть получено с помощью присоединенного суждения,

---

водима также одна из формул F и $\sim F$. (Сейчас речь идет о классическом исчислении высказываний, и потому в силу $\sim\sim F \leftrightarrow F$ и выразимости $\vee, \rightarrow$, и $\leftrightarrow$ через $\&$ и $\sim$ достаточно рассмотреть случаи образования формул посредством конъюнкции.) — *Прим. перев.*

[1]) Тем самым предполагается, что для разных формул $\exists x A(x)$ выбираются различные символы. — *Прим. перев.*

оно может быть получено и без него[1]). Именно по этой причине мы выбрали правило F в этой форме.

Как было указано выше, правила D и G позволяют нам заменить произвольную систему T эквивалентной ей, для которой мы можем определить T^*, так что мы можем рассматривать систему T^* как определенную всегда. Для данной непротиворечивой системы S мы теперь определим S_n для каждого натурального числа n, полагая $S_0 = S$ и $S_{n+1} = S_n^*$. Положим $\bar{S} = \bigcup_n S_n$; пусть M — модель, полученная по теореме 3 для подмножества $\bar{S}$, состоящего из тех суждений, которые не содержат кванторов. Пусть A — суждение из $\bar{S}$, содержащее r кванторов. Допустим, что всякое суждение из $\bar{S}$, имеющее меньше чем r кванторов, истинно в M. Ясно, что если r есть нуль, то наше допущение выполнено. Если r не нуль, допустим, что A имеет вид $\forall x\, B(x)$. Каждый элемент в M должен иметь вид $\bar{c}_\alpha$, где c_α — один из символов постоянных, встречающихся в $\bar{S}$. Ввиду того что S_n возрастают, как A, так и c_α входят в некоторое S_k. Значит, $B(c_\alpha)$ входит в S_k^*, а потому и в $\bar{S}$ и имеет меньше чем r кванторов. Итак, для всякого $\bar{c}_\alpha$ в M $B(c_\alpha)$ истинно в M, а следовательно, $\forall x\, B(x)$ истинно в M. Случай, когда A имеет вид $\exists x B(x)$, рассматривается аналогично. Ясно также, что мощность T^* для любой системы T такова же, как мощность T, если T бесконечна, а в противном случае — конечна. Ясно, что это дает заключение теоремы, относящееся к мощности M.

---

[1]) Здесь используется теорема о дедукции: для всякого множества суждений $K \cup \{M\}$, если суждение N выводимо из этого множества, то суждение $M \to N$ выводимо из K. Эта теорема доказывается индукцией по числу применений правил B и F в выводе суждения N. (Ср. [15, § 21 и 22]. Значение этой теоремы состоит в том, что если временное присоединение M в качестве нового допущения к прежним допущениям K приводит к выводу N, то $M \to N$ можно вывести из K, не пользуясь этим новым допущением; см. последний абзац § 3, где утверждалось, что такие переходы обосновываются посредством исчисления высказываний. Действительно, только что упомянутая индукция использует лишь верность формул вида $A \to A$, $A \to (B \to A)$ при рассмотрении формулы из $K \cup \{M\}$, верность формул $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$ при рассмотрении пра-

Теорема Гёделя о полноте гарантирует нам, что никакое существенное правило вывода не было опущено в исчислении предикатов. Мы утверждаем это в качестве следствия.

Следствие. *Если A не выводимо из S, то существует модель для S, в которой A ложно.*

Доказательство. $S\mathrm{U}\{\sim A\}$ — непротиворечивая система, а поэтому она имеет модель.

Следствие. *Если суждение истинно (т. е. истинно в любой модели), то оно доказуемо* [1]).

Доказательство. Возьмем пустое S в предыдущем следствии.

Полнота исчисления предикатов находится в резком контрасте с неполнотой аксиом для математики, которая будет рассмотрена в одном из следующих параграфов. Однако теорема о полноте также показывает некоторую решающую ограниченность понятия формальной системы, что указывается следующим следствием.

Следствие. *Если S допускает бесконечную модель или даже произвольно большие конечные модели, то S допускает модели произвольно больших мощностей.*

Доказательство. Пусть c_α — произвольное множество новых символов для постоянных; присоединяя к S неравенства $\sim c_\alpha = c_\beta$ для всех $\alpha \neq \beta$, получим новую систему T. Система T непротиворечива. В самом деле, любое противоречие должно быть следствием из конечно многих суждений вида $\sim c_\alpha = c_\beta$, взятых вместе с системой S. Но так как S имеет модели, в которых можно найти произвольно большие конечные множества раз-

вила B и верность формул $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (B \to (A \to C))$ при рассмотрении правила F.) Кроме того, здесь используется эквивалентность любых двух противоречий $M \& \sim M$ и $N \& \sim N$, позволяющая считать, что x и c не входят в рассматриваемое противоречие (что требуется для применения правила F). — *Прим. перев.*

[1]) То есть выводимо из пустого множества суждений. Ясно, что доказуемость в этом смысле совпадает с верностью суждения. — *Прим. перев.*

личных констант, и так как T не накладывает никаких дальнейших ограничений на эти c_α, мы видим, что эта подсистема T имеет модель и потому непротиворечива, а это означает, что непротиворечива и сама T. Итак, T имеет модель, а значит, S имеет модель, мощность которой по крайней мере такая же, как и мощность введенных c_α [1]), — и следствие доказано. Это следствие показывает, что никакая система аксиом не может иметь единственной (с точностью до изоморфизма) модели, за исключением случаев, когда эта единственная модель конечна. Отсюда видно, что обычные математические системы, например натуральных или вещественных чисел, имеющие, как принято думать, только одну модель, не могут быть полностью описаны *никакой* формальной системой аксиом. Как уже было упомянуто, при рассмотрении классических аксиом для этих систем обнаруживается, что они не образуют формальной системы в нашем смысле, так как они неформально говорят о множествах. Позднее теорема о неполноте покажет нам, что системы аксиом для математики не могут быть полными даже в гораздо более скромном смысле этого слова. Мы заключим этот параграф еще одним следствием.

Следствие. (Теорема компактности.) *Если каждое конечное подмножество системы S имеет модель, то и S имеет модель.*

§ 5. Теорема Лёвенгейма — Скулема

Очень интересной чертой теоремы о полноте является информация о мощности тех моделей, существование которых она утверждает. Из нее вытекает, например, что, как бы мы ни формализовали теорию множеств со всеми ее выводами, относящимися к существованию множеств большой мощности, предлагаемое нами множество аксиом будет иметь счетную модель. Ввиду того

[1]) Точнее эта мощность не превосходит мощности всех $\bar{c}_\alpha$ и константа из S. Но если последних нет, то в силу принадлежности T всех неравенств $\sim c_\alpha = c_\beta$, $\alpha \neq \beta$ для каждого c_α должно иметь место $\bar{c}_\alpha = c_\alpha$. И при наличии константа в S из $\sim c_\alpha = c_\beta$ следует $\sim \bar{c}_\alpha = \bar{c}_\beta$, чем доказывается утверждение автора. — *Прим. перев.*

что построение модели было довольно искусственным, мы не ожидаем, что объекты этой модели будут отождествимы с «настоящими» множествами, а также того, что единственное неопределяемое отношение, в этом случае отношение принадлежности, будет отождествимо с «настоящим» отношением принадлежности. Тут подразумевается, что в случае теории множеств, или теории чисел, или системы действительных чисел, мы держим в уме некоторую «естественную» модель, и мы интересуемся прежде всего этой моделью или, может быть, ее подмоделями. Теперь мы будем рассматривать отношения, которые могут иметь место между моделями одной и той же формальной системы.

Определение. Пусть M_1 и M_2 — две модели для данной формальной системы, т. е. для каждой из них нам даны отображение символов c_α для постоянных в эту модель и отображение, сопоставляющее символам R_β для отношений некоторые подмножества n-ок из M_1 и M_2. Мы будем говорить, что M_1 и M_2 *элементарно эквивалентны*, если одни и те же суждения формального языка этой системы истинны в M_1 и в M_2. Если $M_1 \subseteq M_2$, мы будем говорить, что M_1 является *элементарной подмоделью* M_2, если константы $\bar{c}_\alpha$ в M_2 те же, что и в M_1, отношения $\bar{R}_\beta$ модели M_1 являются ограничениями [1]) отношений $\bar{R}_\beta$ модели M_2, и для каждой формулы $A(x_1, \ldots, x_n)$, если $\bar{x}_i$ входят в M_1, то $A(x_1, \ldots, x_n)$ истинна в M_1 при $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ тогда и только тогда, когда она истинна в M_2 при $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$.

Понятие элементарной эквивалентности систем имеет некоторое отношение к понятию изоморфизма систем, но последнее, конечно, гораздо сильнее. Оно не нашло себе пока особо важных применений в математике, за исключением теории действительно замкнутых полей, а в последнее время — в теории полей p-адических чисел. Условие, определяющее элементарную подмодель,

[1]) *Ограничением* отношения (предиката, функции), заданного на некотором множестве M_2, *подмножеством* M_1 этого множества называют это отношение (предикат, функцию), рассматриваемое только на M_1. — *Прим. перев.*

сильнее условия для элементарной эквивалентности, потому что оно применимо и к суждениям, относящимся к особым индивидуумам в M_1, отличным от констант. Теперь мы готовы установить одну теорему, доказательство которой почти совпадает с доказательством теоремы о полноте и которая имеет аналогичное заключение. Она была открыта раньше, чем теорема о полноте, и была, вероятно, первой нетривиальной теоремой о формальных системах.

Теорема (Лёвенгейма — Скулема). *Пусть M — модель для системы с совокупностью T символов отношений и постоянных. Тогда существует элементарная подмодель M, мощность которой не превосходит мощности T, если T бесконечна, и не более чем счетна, если T конечна.*

Доказательство снова использует аксиому выбора. Заметим, что если M — модель для некоторого множества суждений, то подмодель будет также моделью для этих суждений. Пусть N — произвольное подмножество M, содержащее все константы $\bar{c}_\alpha$, и пусть $A(y, x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная формула с $n+1$ свободными переменными. Для любых $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ из N, если существует в M такое $\bar{y}$, что $A(y, x_1, \ldots, x_n)$ истинна в M при $\bar{y}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, выберем одно такое $\bar{y}$ и присоединим его к N. Если мы проделаем это для всех формул A и для всех возможных $\bar{x}_i$, мы получим некоторое множество N^*, содержащее N. Так как число n-ок элементов совпадает с мощностью N, если N бесконечно, и счетно, если N конечно, и справедливо аналогичное суждение, относящееся к числу формул в языке T [1]), легко видеть, что мощность N не превосходит мощности $\overline{\overline{N}} + \overline{\overline{T}} + \aleph_0$, где $\overline{\overline{S}}$ обозначает мощность произвольного множества S, а $\aleph_0$ — мощность всех натуральных чисел. Определим N_0 как множество всех констант $\bar{c}_\alpha$ и положим $N_{k+1} = N_k^*$. Теперь мы утверждаем, что если мы определим N' как объединение всех N_k, то N' обладает свойствами, утверждаемыми теоремой. Ясно, что N' удо-

[1]) Имеется в виду формальный язык, для которого T служит множеством символов для отношений и постоянных. — *Прим. перев.*

влетворяет суждению о мощности. Пусть $A(x_1, \ldots, x_n)$ — формула с r кванторами. В оставшейся части доказательства происходит индукция по r. Если r есть нуль, доказывать нечего. Допустим в качестве индуктивного предположения, что для любой формулы $A(x_1, \ldots, x_m)$, имеющей меньше чем r кванторов, и для любых $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ в N' A верно в N' при $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ в том и только в том случае, если A верно в M при $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$. Очевидно, можно допустить, что A начинается с квантора, и, заменяя в случае надобности A ее отрицанием, можно даже допустить, что A имеет вид $\exists y B(y, x_1, \ldots, x_m)$. Пусть $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ — произвольные элементы N'. Мы покажем теперь, что $A(x_1, \ldots, x_m)$ имеет место при $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ в M в том и только в том случае, если эта формула при $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ имеет место в N'. Мы знаем, что все $\bar{x}_i$ лежат в N_k для некоторого k. Если в M существует такой $\bar{y}$, что $B(y, x_1, \ldots, x_m)$ истинна в M при $\bar{y}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$, то такой $\bar{y}$ существует и в N_{k+1}, а следовательно, и в N'. Так как B содержит $r-1$ квантор, отсюда следует, согласно индуктивному предположению, что B истинно при $\bar{y}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ в N'. Отсюда в свою очередь следует, что $A(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ имеет место в N'. Если нет такого $\bar{y}$, что B истинна при $\bar{y}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ в M, то не может быть такого $\bar{y}$, что B имеет место в N', так как опять в силу индуктивного предположения это означало бы, что B имеет место в M. Это завершает доказательство.

Если теорему Лёвенгейма — Скулема применить к конкретным формальным системам, то мы получим в качестве частных случаев: каждая группа, поле, упорядоченное поле и т. д. имеют счетную подсистему того же типа. Более эффективный результат получается при применении этой теоремы к теории множеств (системе, которую мы со временем формализуем): существует такая счетная совокупность множеств, что если мы ограничим отношение принадлежности только этими множествами, последние образуют модель для теории множеств (точнее, все истинные суждения теории множеств верны в этой модели). В частности, в этой модели, которую мы обозначим сейчас через M, должно быть несчетное мно-

жество. Этот парадокс [1]), состоящий в том, что счетная модель может содержать несчетное множество, разъясняется замечанием, что утверждение о несчетности какого-либо множества означает лишь несуществование взаимно однозначного отображения этого множества на множество всех целых чисел. «Несчетное» множество в M содержит в действительности только счетное количество элементов из M, но *в* M не существует никакого взаимно однозначного отображения этого множества на множество всех целых чисел. (Это рассмотрение было по необходимости неполным, так как мы еще не рассмотрели ни того, как определяются натуральные числа в формализме теории множеств, ни того, должны ли эти числа принадлежать M.)

§ 6. Примеры формальных систем

Выскажем аксиомы Пеано в их обычной форме:

i) для каждого натурального числа имеется единственное, следующее за ним;

ii) существует натуральное число 0, не следующее ни за каким натуральным числом;

iii) за двумя различными натуральными числами не может следовать одно и то же натуральное число;

iv) если M — множество натуральных чисел такое, что 0 входит в M, и такое, что если натуральное число входит в M, то и следующее за ним входит в M, то каждое натуральное число входит в M.

При попытке перевода этих неформальных аксиом в формальную систему естественнее всего выбрать постоянный символ c_1, представляющий 0, и символ бинарного отношения $S(x, y)$, представляющий «y следует за x». Тогда аксиомы (i) — (iii) будут иметь очевидные переводы в формальную систему. Однако аксиома (iv) не допускает никакого точного перевода этого вида. При описании конкретной формальной системы, конечно, незаконно было бы употреблять слова, которые не могут быть переведены в эту формальную систему. В связи

[1]) Именуемый в литературе парадоксом Скулема (Skolem). — *Прим. перев.*

с аксиомой (iv) эта проблема возникает из-за вхождения слова «множество». Рассмотрение других неформальных систем аксиом показывает, что концепция множества встречается часто. Например, в определении миожества действительных чисел как полного упорядоченного поля о произвольном ограниченном множестве действительных чисел говорится, что оно имеет наименьшую верхнюю границу. При наличии таких важных примеров может показаться самым разумным приступить непосредственно к формализации концепции множества. Но теория множеств заключает в себе много проблем, таких, как континуум-гипотеза, которые могут не иметь никакого отношения к указанным предметам изучения. На практике множества, нужные в такой области, как теория чисел, — это лишь такие, которые могут быть описаны с помощью совсем специальных свойств. Поэтому другой подход может состоять в изгнании упоминаний о множествах и замене их соответствующими свойствами. Так как обычно имеется бесконечно много свойств, представляющих интерес, нам, как правило, будет требоваться бесконечно много аксиом. Точнее говоря, для формализации приведенной выше аксиомы (iv) понадобится ввести, для каждой формулы $A(x)$ с одной свободной переменной, аксиому вида

$$(A(0) \& \forall x (A(x) \& S(x, y) \rightarrow A(y))) \rightarrow \forall x A(x).$$

Как было замечено в предыдущем параграфе [1]), никакая такая схема не может исчерпать всей силы аксиомы (iv) в том смысле, что нельзя посредством такой схемы обеспечить, что единственной (с точностью до изоморфизма) моделью ее аксиом будет множество натуральных чисел. Однако для многих целей вполне достаточно употреблять эту форму аксиомы индукции. Мы теперь опишем две формальные системы, в существенных чертах следующие этому образцу.

Первую из этих систем аксиом мы обозначим через Z_1. Это система, очень близкая к тому, что можно назвать *элементарной арифметикой*. Элементы этой системы следует мыслить себе как неотрицательные целые

[1]) См. предпоследнее следствие в § 4 (стр. 34). — *Прим. перев.*

числа. Мы введем два тернарных отношения R_1 и R_2, соответствующих сложению и умножению. Для удобства чтения формул мы будем писать $x+y=z$ и $x \cdot y=z$ вместо $R_1(x, y, z)$ и $R_2(x, y, z)$ соответственно. Мы введем два постоянных символа, 0 и 1. Кроме того, мы введем обозначение $\exists! x A(x)$, являющееся сокращением для $\exists x \forall y (A(y) \leftrightarrow x=y)$ (для формализации понятия «существует единственное x такое, что $A(x)$»).

Аксиомы для Z_1.

1. $\forall x, y\ \exists!\ z(x+y=z)$.
2. $\forall x, y\ \exists!\ z(x \cdot y=z)$.
3. $\forall x\,(x+0=x) \& (x \cdot 1=x)$.
4. $\forall x, y\ (x+(y+1)=(x+y)+1)$.
5. $\forall x, y\ (x \cdot (y+1)=x \cdot y+x)$.
6. $\forall x, y\ (x+1=y+1 \rightarrow x=y)$.
7. $\forall x\,(\sim x+1=0)$.

Наша восьмая аксиома состоит в действительности из бесконечного числа аксиом и ее правильнее будет называть *схемой аксиом*. Чтобы высказать ее, мы занумеруем счетное множество всех формул нашей системы, содержащих хотя бы одну свободную переменную, обозначая их посредством $A_m(x, t_1, \ldots, t_k)$, где, конечно, k зависит от m. Та конкретная нумерация, которую мы выбрали, не будет иметь никакого значения.

$$8_m.\ \forall t_1, \ldots, t_k [(A_m(0, t_1, \ldots, t_k) \& \forall y (A_m(y, t_1, \ldots, t_k) \rightarrow A_m(y+1, t_1, \ldots, t_k))) \rightarrow \forall x A_m(x, t_1, \ldots, t_k)].$$

Так как мы сейчас стремимся к точности, следует заметить, что при формулировке аксиом мы использовали некоторые сокращения. В аксиоме 4 мы встречаем вхождения выражений $y+1$ и $x+y$ в отличные от них выражения, являющиеся частями равенств. Это на самом деле означает, что аксиому 4 мы должны переписать следующим образом:

$$\forall x, y \exists u, v (u=y+1 \& v=x+y \& x+u=v+1).$$

Аналогично аксиому 5 надо переписать, введя новые буквы u, v и w, подставляемые вместо $y+1$, $x \cdot y$ и $x \cdot y + x$. Но так как при столь подробной записи наши формулы оказывались бы слишком неудобными, мы часто будем пользоваться такими сокращениями.

Обращаем внимание читателя на то, что 1, 6 и 7 влекут неформальные аксиомы Пеано (i) — (iii). Аксиома 8 утверждает принцип математической индукции, но не для произвольных множеств, а только для тех, которые определяются «арифметическим» условием A_m для некоторых фиксированных $t_1, \ldots, t_k$. Так как имеется только счетное множество арифметических условий и несчетное множество множеств натуральных чисел, ясно, что аксиома 8_m слабее интуитивного принципа индукции. Как это ни удивительно, но несмотря на то, что наша система допускает только два отношения, $+$ и $\cdot$, она достаточно сильна для выражения всего того, что по традиции называется *элементарной теорией чисел.* Интерес к представлению $\boldsymbol{Z}_1$ в этой форме связан с тем обстоятельством, что утверждения этой системы по существу имеют вид диофантовых уравнений. Из этого будут вытекать следствия для теории этих уравнений и для возможности или невозможности найти эффективный метод распознавания того, может ли быть решено данное диофантово уравнение. Мы отложим дальнейшее рассмотрение $\boldsymbol{Z}_1$ до одного из следующих параграфов.

Вторая система, которую мы рассмотрим, представляет собой другую формализацию элементарной теории чисел; мы обозначим эту систему через $\boldsymbol{Z}_2$. Она имеет то преимущество, что очевидна возможность формулировать в ней всю традиционную элементарную теорию чисел. В этой системе элементы мыслятся как конечные множества. Аксиомы будут очень похожи на те, которые мы впоследствии приведем для теории множеств, но с тем важным исключением, что для $\boldsymbol{Z}_2$ мы не будем постулировать существования бесконечных множеств. Некоторые множества будут по определению считаться натуральными числами, и для них мы примем аксиому индукции. Как хорошо известно, все обыч-

ные математические понятия — такие, как функции, отношения и т. д., — могут быть определены через концепцию множества. Это будет означать, что любое доказательство, относящееся к натуральным числам, в котором говорится только о конечных объектах (хотя в нем может использоваться индукция для доказательства существования некоторых объектов), может быть формализовано в $\boldsymbol{Z}_2$. Аксиома индукции снова будет бесконечной схемой.

Единственным отношением, которое мы употребляем в $\boldsymbol{Z}_2$, будет бинарное отношение $\in$, обозначающее принадлежность, так что $x \in y$ следует читать «x принадлежит y». Мы вводим один постоянный символ $\emptyset$, обозначающий пустое множество.

Аксиомы для $\boldsymbol{Z}_2$.

1. $\forall x, y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$.
2. $\forall x (\sim x \in \emptyset)$.
3. $\forall x, y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$.
4. $\forall x, y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w \in x \vee w \in y)$.

Прежде чем давать схему аксиом для математической индукции, мы сделаем несколько замечаний. Аксиома 1 известна как аксиома экстенсиональности, и она утверждает, что всякое множество определено своими элементами. Таким образом, в нашей системе нет никаких «атомарных» множеств, вовсе не содержащих элементов, за исключением единственного пустого множества. Аксиома 2 выражает свойство пустого множества. Аксиома 3 говорит, что для любых двух данных множеств x, y существует множество, в которое входят в качестве элементов x и y и только они. Это множество называется *неупорядоченной парой* x и y и обозначается через $\{x, y\}$. Аксиома 4 утверждает существование объединения x и y, которое обозначается через $x \cup y$. Мы пишем $\{x\}$ вместо $\{x, x\}$ и определяем *упорядоченную пару* $\langle x, y\rangle$ как $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. В качестве легкого упражнения теперь можно доказать, что $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ имеет место тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$. Естественной моделью для аксиом 1—4 является модель,

состоящая из всех конечных множеств, которые можно построить, отправляясь от $\emptyset$ в конечное число шагов. Точнее пусть S_n — последовательность множеств, определяемая соглашениями $S_0 = \emptyset$ и тем, что S_{n+1} равно объединению S_n и множества всех подмножеств S_n. Мы тогда имеем $S_n \subseteq S_{n+1}$, и если мы обозначим через M объединение множеств S_n, то тогда M будет удовлетворять нашим аксиомам. В самом деле, совсем легко показать по индукции, что каждая модель для этих аксиом содержит некоторым каноническим образом подмодель, изоморфную M. Конечно, модель может содержать бесконечные множества и даже другие элементы, которые интуитивно не будут мыслиться как множества. Нашей следующей проблемой будет решить, как определить натуральные числа и операцию следования. То определение, которым мы воспользуемся, было дано фон Нейманом для ординалов (порядковых чисел); мы еще будем пользоваться им при рассмотрении теории множеств. Так как в Z_2 мы рассматриваем только конечные множества, ординалы здесь будут обычными натуральными числами. В M множество α_n, которым мы хотим обозначить натуральное число n, определяется соглашениями $\alpha_0 = \emptyset$ и тем, что α_n равно множеству $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}$. Первые несколько натуральных чисел таковы: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ и т. д. Таким образом, натуральное число — это множество всех предшествующих натуральных чисел. Конечно, мы не можем формализовать это определение, так как мы еще не имеем рекурсии [1]). Заметим, однако, что $m < n \leftrightarrow \alpha_m \in \alpha_n$. Этим мотивируется следующее определение:

Определение. x — натуральное число, если

1) $\forall y, z (y \in x \,\&\, z \in x \rightarrow y = z \vee y \in z \vee z \in y)$,

2) $\forall y, z (y \in x \,\&\, z \in y \rightarrow z \in x)$.

Легко видеть, что в нашей интуитивной модели M множества α_n — это в точности те, которые удовлетворяют этому определению. Именно заметим сперва, что

[1]) В подлиннике «индукции», ср. сноску 3 на стр. 109.

в M каждое непустое множество x имеет некоторый элемент y, такой, что если $z \in x$, то $\sim z \in y$ [1]). Это значит, что y «минимален» по отношению к $\in$-отношению. Теперь, если x — натуральное число в M, то всякий «минимальный» элемент x должен совпадать с $\emptyset$ в силу 2). Если y — минимальный элемент множества $x - \{\emptyset\}$, то ясно, что в силу 1) и 2) y должен совпадать с $\{\emptyset\}$. Повторяя эту операцию, можно доказать, что x должен быть равен некоторому α_n. Итак, наше определение натурального числа разумно.

Определение. Если x — натуральное число, пусть $x+1$ обозначает $x \cup \{x\}$.

Мы покажем, что $x+1$ — натуральное число. Если y и z принадлежат $x+1$, то оба принадлежат $\{x\}$, или оба принадлежат x, или один из них принадлежит x, а другой $\{x\}$. Если множество принадлежит $\{x\}$, оно должно быть равно x, так что в первом случае $y=z$, во втором имеет место 1), так как y и z оба принадлежат x, а x — натуральное число, а в третьем случае мы тривиальным образом имеем $y \in z$ или $z \in y$. Итак, имеет место 1). Если $y \in x+1$ и $z \in y$, то если $y=x$, мы имеем $z \in x$, откуда $z \in x+1$. Если $y \in x$, мы опять имеем $z \in x$, так как x — натуральное число, откуда $z \in x+1$.

Теперь мы можем сформулировать аксиому индукции. Опять $A_m(x, t_1, \ldots, t_k)$ будет пробегать через все формулы, имеющие хотя бы одну свободную переменную. Мы пишем 0 вместо $\emptyset$ и употребляем запись $\mathrm{Int}\, x$ в качестве сокращения для определения того, что x — натуральное число (integer).

$$5m.\ \forall t_1, \ldots, t_k [(A_m(0, t_1, \ldots, t_k) \swarrow$$
$$\& \forall y (\mathrm{Int}\, y \& A_m(y, t_1, \ldots, t_k) \swarrow$$
$$\rightarrow A_m(y+1, t_1, \ldots, t_k))) \rightarrow \forall x (\mathrm{Int}\, x \rightarrow A_m(x, t_1, \ldots, t_k))].$$

Эта схема аксиом по существу тождественна той, которая была дана для Z_1. Опять мы интуитивно не

[1]) Это утверждение легко доказать индукцией по индексу n множества S_n. (Попутно доказывается, что новые по сравнению с S_n элементы S_{n+1} не являются элементами элементов S_m при $m \leqslant n$.) — *Прим. перев.*

охватили полной силы неформального принципа индукции, так как не каждое возможное множество натуральных чисел описывается каким-либо свойством A_m для надлежащих t_i. Но так как, согласно уже сказанному, никакое множество аксиом для натуральных чисел не может быть категоричным, это возражение против нашей системы отнюдь не является решающим. Мы теперь покажем, как строить общепринятую теорию чисел в нашей системе $\boldsymbol{Z}_2$. Прежде всего мы определяем *функцию* как такое множество упорядоченных пар, что всякое множество встречается не более одного раза в качестве левого члена пары. *Область* (domain) функции — это множество всех этих левых членов. Далее, когда в элементарной теории чисел определяется функция, обычно она определяется следующим образом: имеется условие $B(x)$, утверждающее, что x — это множество упорядоченных пар, определяющее функцию на множестве всех натуральных чисел $\leqslant n$ для некоторого n, $x=\{\langle 0, f(0)\rangle, \ldots, \langle n, f(n)\rangle\}$, и что для этих $f(k)$ имеет место некоторое соотношение рекурсии. Коль скоро условие B может быть выражено в $\boldsymbol{Z}_2$, можно затем определить отношение $\langle n, f(n)\rangle$ без помощи бесконечного множества, являющегося графиком функции f. Например, мы можем определить $x+y=z$ условиями, что существует функция f, областью которой служит множество всех натуральных чисел, не превосходящих x (являющееся фактически числом $x+1$), и такая, что $f(0)=y$, $f(k+1)=f(k)+1$ для $k<x$, и $f(x)=z$. Таким же способом можно поступать со всеми определениями, за исключением тех, в которых определяемый по индукции объект является бесконечным множеством. Пример определения, о котором a priori нельзя сказать, что оно может быть проведено в $\boldsymbol{Z}_2$, состоит в следующем: определим последовательность функций $f_n(x)$, полагая $f_0(x)=x+1$, $f_n(0)=n+1$, $f_{n+1}(x+1)=f_n(f_{n+1}(x))$. Так как мы определяем функцию, а следовательно, бесконечное множество, непосредственно путем индукции не удается применить наш метод. Однако ввиду того, что мы пользуемся только конечно многими значениями f_n для каждого n, определение для $f_n(x)$ может быть сформулировано в $\boldsymbol{Z}_2$. Было бы трудно явным образом при-

вести пример функции, действительно выходящий за пределы возможностей Z_2, хотя очевидный диагональный аргумент показывает, что такие функции должны существовать.

В качестве нашего последнего примера формальной системы мы обратимся к действительно замкнутым полям. Здесь цель состоит в том, чтобы аксиоматизировать, насколько это возможно, теорию действительных чисел. Один способ состоит в аксиоматизации теории множеств и построении теории действительных чисел методом дедекиндовых сечений, или последовательностей Коши. Как уже было объяснено, мы предпочли бы избавиться от связанных с этим погружений в общую теорию множеств. Метод, к которому мы прибегнем, будет аналогичен системе Z_1. Здесь аксиомы, к которым мы приходим, были изучены ради них самих и системы, удовлетворяющие им, известны под названием действительно-замкнутых полей. Мы пользуемся тремя отношениями, $x+y=z$, $x \cdot y=z$ и $x>y$, а также константами 0 и 1.

Аксиомы для действительно-замкнутых полей

1. Аксиомы поля. Это хорошо известные аксиомы для поля, которыми мы не станем здесь надоедать читателю.

2. Аксиомы порядка.

i) $\forall x, y(x=y \vee x<y \vee y<x)$.

ii) $\forall x, y(\sim(x<y \& y<x))$.

iii) $\forall x, y(x>0 \& y>0 \rightarrow x+y>0 \& x \cdot y>0)$.

3_m. Аксиомы полноты. Пусть $f(x)$ обозначает $a_0x^m+\ldots+a_m$. Тогда аксиома утверждает

$$\forall a_0, \ldots, a_m, x, y(f(x)>0 \& f(y)<0 \& x<y \rightarrow \exists z(x<z<y \& f(z)=0)).$$

Итак, полнота системы действительных чисел принята только для специального случая, относящегося к полиномам. Однако известно, что эти аксиомы определяют алгебраические свойства действительных чисел. В самом деле, Тарский доказал, что для любого дан-

ного суждения о действительных числах, которое может быть выражено в этой формальной системе, либо само это суждение, либо его отрицание выводимы из этих аксиом. К сожалению, большинство исследованных свойств действительных чисел содержат понятия непрерывности или понятия, относящиеся к целым числам [1]).

§ 7. Примитивно рекурсивные функции

Теперь мы займемся более пристальным изучением системы Z_2. Как было замечено, все «нормальные» комбинаторные аргументы могут быть выражены в Z_2, так как в большинстве доказательств принцип индукции используется только в применении к конечным множествам. Для более точных утверждений следует рассмотреть проблему установления того, какие *функции* могут быть выражены в Z_2. В этом параграфе мы определим класс функций, именуемых примитивно рекурсивными функциями, которые определены на натуральных числах (или на n-ках таких чисел) и которые принимают только натуральные значения. Следует подчеркнуть, что эти функции являются «настоящими» математическими объектами, а не объектами каких-либо формальных систем вида Z_1 или Z_2. Фактически нашей главной задачей будет доказательство того, что эти функции могут быть представлены в Z_1 и Z_2.

Определение. Функция $f(n_1, \ldots, n_k)$, отображающая натуральные числа в натуральные, называется *примитивно рекурсивной* (п. р.), если она построена посредством [2]) следующих правил:

---

[1]) В подлиннике — «integer» (которое в других случаях я перевожу обычно как «натуральное число»). Автор, вероятно, имеет здесь в виду трудности, связанные с отсутствием аксиомы Архимеда в этой системе. — *Прим. перев.*

[2]) Это слово употреблено здесь в смысле, включающем в себя ограничительную клаузулу (см. сноску 2 на стр. 28), т. е. означающем, что в построении $f(n_1, \ldots, n_k)$ не участвуют никакие другие приемы, кроме применений указанных правил. Поэтому в отличие от многих других авторов Коэн явно не высказывает ограничительной клаузулы в этом и других индуктивных определениях. — *Прим. перев.*

1. $f \equiv c$ для произвольной константы c есть п. р. функция [1]).

2. $f(n_1, \ldots, n_k) = n_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k$ есть п. р. функция.

3. $f(n) = n+1$ есть п. р. функция.

4. Если $f(n_1, \ldots, n_k)$ и $g_1, \ldots, g_k$ суть п. р. функции, такова же и $f(g_1, \ldots, g_k)$.

5. Если $f(0, n_2, \ldots, n_k)$ и $g(m, n_1, \ldots, n_k)$ суть п. р. функции и имеет место $f(n+1, n_2, \ldots, n_k) = g(f(n, n_2, \ldots, n_k), n, n_2, \ldots, n_k)$, то f есть п. р. функция.

Большинство элементарных функций натуральных чисел являются п. р. Например, сложение, умножение, степени, факториал, n-е простое число — все эти функции п. р. Важность п. р. функций состоит в том, что они, очевидно, эффективно вычислимы. Это значит, что если нам дано определение п. р. функции f, использующее 1—5, и числа $n_1, \ldots, n_k$, то мы можем (при наличии достаточного времени) вычислить $f(n_1, \ldots, n_k)$, пользуясь рекурсивной схемой определения f. Однако не следует думать, что п. р. функции исчерпывают класс всех эффективно вычислимых функций. В самом деле, легко видеть, что можно эффективно перечислить все схемы порождения п. р. функций от одной переменной, например в виде $f_m(n)$, и таким образом получить эффективно вычислимую функцию от двух переменных m и n. Если мы положим теперь $g(n) = f_n(n) + 1$, то g не может быть п. р. функцией, но, конечно, все еще будет эффективно вычислимой. (При перечислении п. р. функций от одной переменной фактически надо предварительно перечислить все п. р. функции, так как правило 2 разрешает нам получать функции от одной переменной из фуикций от многих переменных.)

П. р. функции следует считать простейшим классом вычислимых функций. Коль скоро будет показано, что

[1]) Обозначение $f(x, y) \equiv g(x, y)$ указывает на то, что равеиство $f(x, y) = g(x, y)$ имеет место при любых x и y (и аналогично для функций с любым числом аргументов, причем вместо $g(x, y)$ может стоять $g(x)$ или, как в тексте, c). В п. 2, 3 и 5 этого определения, по-видимому, лучше было бы писать «$\equiv$» вместо «$=$». — *Прим. перев.*

эти функции выразимы в одной из рассматриваемых систем, можно будет затем, с помощью различных доступных нам логических операций, выразить многие неконструктивные функции, например первый показатель, для которого ложна великая теорема Ферма, если таковой существует, и т. п. Довольно очевидно, что любая п. р. функция может быть выражена в Z_2. Мы теперь уточним это утверждение. Прежде всего для любого натурального числа n, например для $n=5$, хотя Z_2 не имеет символа 5, мы будем употреблять «5» в качестве сокращения для $1+1+1+1+1$. (Фактически, как уже было упомянуто, употребления этого выражения в свою очередь служат сокращениями.)

Теорема. *Если* $f(n_1, \ldots, n_k)$ *— п. р. функция, то существует формула* $A(x_1, \ldots, x_k, y)$ *в* Z_2 *такая, что имеют место следующие утверждения:*

1) $\forall x_1, \ldots, x_k \exists ! y A(x_1, \ldots, x_k, y)$ *истинно, как суждение о натуральных числах, и, кроме того, эта формула доказуема в* Z_2.

2) *Если* $f(n_1, \ldots, n_k)=m$, *то* $A(n_1, \ldots, n_k, m)$ *доказуема в* Z_2.

Комментарий. Напомним читателю о различии между «истинностью» формулы (рассматриваемой как суждение о натуральных числах) и ее «доказуемостью» в Z_2. Все суждения о натуральных числах, доказуемые в Z_2, разумеется, истинны в области этих чисел. Обратное *не* верно, как мы увидим в § 8. Кроме этой теоремы, нам фактически нужна более общая теорема, чтобы убедиться в том, что язык Z_2 пригоден для неформальной теории чисел. Именно, надо показать, что погружение п. р. функций устроено достаточно «естественным» образом, так что некоторые его очевидные свойства доказуемы в Z_2. Например, если $f_1=f_2(f_3)$, то можно доказать утверждение, которое говорит о соответствующих отношениях A_1, A_2, A_3, что f_1 является композицией f_2 и f_3. Явная формулировка нужных при этом свойств утомительна, и мы ее здесь опустим.

Доказательство этой теоремы по существу тривиально. Достаточно лишь доказать, что все способы опре-

деления п. р. функций могут быть выражены в Z_2. Единственный интересный случай — это 5; для простоты мы допустим, что $k=1$. Допустим тогда, что $g(n_1, n_2)$ — п. р. функция и что f определена посредством

$$f(0)=c,$$

$$f(n+1)=g(f(n), n).$$

Доказательство теоремы происходит индукцией по сложности определения f, а поэтому мы можем предположить, что существует формула $B(n_1, n_2, m)$ такая, что $g(n_1, n_2)=m$ имеет место тогда и только тогда, когда $B(n_1, n_2, m)$ доказуема в Z_2. Тогда $f(n)=m$ представляется формулой

$$\exists f\,[(f - \text{функция})\,\&\,(\text{область } f=\{x \mid x \leqslant n\})\,\&\,(f(0)=c)\,\&$$

$$\&\,(f(n)=m)\,\&\,\forall x\,(x<n \to g(f(x), x)=f(x+1))].$$

Ясно, что это может быть записано в виде формулы $A(n, m)$ в Z_2 и что эта формула удовлетворяет теореме.

Наша ближайшая цель состоит в доказательстве аналогичной теоремы для системы Z_1. Заметим, что предыдущее доказательство существенно использует тот факт, что в Z_2 можно говорить о конечных последовательностях произвольной длины. Но так как не ясно, как это делается в Z_1, доказательство становится нетривиальным. Впрочем, Z_1 представляет интерес не в качестве системы, предназначенной для формализации общепринятой теории чисел. Для этой цели, очевидно, удобнее была бы система Z_2, в которой можно прямо говорить о множествах. Интерес к Z_1 связан скорее с тем, что в этой системе суждения имеют сравнительно простой вид, так как в них используются только $+$ и $\cdot$, и замечательно, что для любого предложения в Z_2 существует эквивалентное в Z_1. Поэтому при рассмотрении погружения функций в Z_1 мы сперва посмотрим, какие суждения из Z_1 истинны в области натуральных чисел, а затем выделим из них те, которые могут быть *доказаны* в Z_1. Ввиду того что Z_1 содержит $+$ и $\cdot$,

суждения, относящиеся к делимости, простым числам и т. д., могут быть высказаны в $\boldsymbol{Z}_1$ и в очевидных случаях мы не будем делать этого явно.

Лемма. *Существует формула $B(d, i, x)$ в $\boldsymbol{Z}_1$, для которой имеет место следующее:*

i) $\forall d,\ i \exists!\, x B(d, i, x)$. *Таким образом, x является функцией от d и i, которую мы обозначим через $x(d, i)$.*

ii) $\forall n,\ M \exists d \forall i,\ j [i < j < n \to x(d, i) > M \,\&\, x(d, j) > M \,\&\, (x(d, i)$ и $x(d, j)$ *взаимно просты*)].

Доказательство. Словами ii) утверждает, что для всех n и M можно найти такое d, что $x(d, i)$ при $i<n$ взаимно просты и превосходят M. Заметим, что $x>y$ является сокращением для $\exists z (z \neq 0 \,\&\, x = y + z)$. Кроме того, «$x$ и y взаимно просты» можно записать в виде

$$\forall u,\ v,\ z\, [x = u \cdot z \,\&\, y = v \cdot z \to z = 1].$$

Мы теперь определяем $B(d, i, x)$ как $x = 1 + (i+1)d$. Если даны n и M, то можно взять $d = (\max(n, M))!$, так что, очевидно, $x(d, i) > M$. Кроме того, при $i<j<n$ если простое число p делит $x(d, i)$ и $x(d, j)$, то p делит $(j - i)d$. В силу единственности разложения на простые множители p делит d или p делит $j - i$. Если p делит d, то ясно, что p не делит $x(d, i)$. Если p делит $j - i$, то $p<n$, так что p делит d, что невозможно.

Пусть теперь $y(c, d, i)$ представляет остаток от деления c на $x(d, i)$. Формула $z = y(c, d, i)$ может быть написана в $\boldsymbol{Z}_1$.

Лемма. *Для любой последовательности $a_1, \ldots, a_n$ натуральных чисел существуют такие c и d, что при $i \leqslant n$ $a_i = y(c, d, i)$.*

Доказательство. Заметим, что эта лемма не может быть выражена в $\boldsymbol{Z}_1$ в том виде, в каком она сейчас высказана, так как в ней говорится о конечных последовательностях произвольной длины. Мы вернемся к этому позднее. Чтобы доказать эту лемму, возьмем такое d, что при $i \leqslant n$ $x(d, i)$ превосходит $\max a_i$. Те-

перь искомое c можно найти согласно китайской теореме об остатках [1]).

Теорема. *Если f — п. р. функция, то в $\boldsymbol{Z}_1$ существует такая формула A, что $f(n_1, \ldots, n_k) = x$ равносильно $A(n_1, \ldots, n_k, x)$.*

Доказательство. И в этом случае очевидно, что достаточно рассмотреть лишь случай 5 в нашем определении п. р. функций. Итак, допустим, что $f(0, n_2, \ldots, n_k)$ и g могут быть выражены в $\boldsymbol{Z}_1$. Пусть $A(n_1, \ldots, n_k, x)$ будет формулой

$$\exists c, d \{f(0, n_2, \ldots, n_k) = y(c, d, 0) \,\&\, x = y(c, d, n_1) \,\&\, \forall i [i < n_1 \to y(c, d, i+1) = g(y(c, d, i), i, n_2, \ldots, n_k)]\}.$$

Словами эта формула обозначает, что для некоторых c, d последовательность $a_i = y(c, d, i)$ такова, что $a_0 = f(0, n_2, \ldots, n_k)$, $a_{i+1} = g(a_i, i, n_2, \ldots, n_k)$ и $a_{n_1} = x$. Так как любая последовательность $a_0, \ldots, a_{n_1}$ имеет вид $y(c, d, i)$ для некоторых c и d, это в точности совпадает с определением f и теорема доказана.

Мы возвращаемся к вопросу о доказуемости в $\boldsymbol{Z}_1$. Этот вопрос представляет самостоятельный интерес, но в нем нет необходимости для нашей основной темы. В доказательстве нашей первой леммы были использованы следующие факты:

i) если два числа a и b имеют общий делитель, то они имеют и простой общий делитель;

ii) если простое число p делит ab, то p делит a или p делит b;

iii) для каждого N существует число, которое делится на все $n \leqslant N$ (в доказательстве в качестве такого числа было взято $N!$).

[1]) Эта теорема утверждает существование решения любой системы сравнений $x \equiv a_i \pmod{q_i}$, где q_i — попарно взаимно просты ($i = 1, \ldots, n$), т. е. существование такого x, что для $i = 1, \ldots, n$ $\exists r_i (x = a_i + q_i \cdot r_i)$ (при попарно взаимно простых $q_1, \ldots, q_n$). Ее доказательство основано на том, что последовательности $\{b_1, \ldots, b_n\}$, где $1 \leqslant b_i \leqslant a_i$, для $i = 1, \ldots, n$, образуют полную систему вычетов по модулям $q_1, \ldots, q_n$. Достаточно заметить, что при $b_i' \neq b_i''$ имеет место $|b_i - b_j| < a_i$ и что эта система должна состоять из $q_1, \ldots, q_n$ элементов. — *Прим. перев.*

Прежде всего заметим, что в Z_1 аксиома индукции позволяет нам утверждать, что для любого свойства $A(n)$, выразимого в Z_1, существует наименьшее n такое, что $A(n)$ [1]). Чтобы доказать i), заметим, что это замечание дает нам возможность доказать существование наименьшего нетривиального общего делителя, который, конечно, прост. Чтобы доказать ii), следует заметить, что обычное доказательство этого утверждения можно формализовать в Z_1. Именно, известно, что существует наименьшее положительное число d вида $mp+na$, где m и n могут быть как положительными, так и отрицательными числами. (Можно легко избежать разговора об отрицательных числах, которых нет в Z_1.) Как в обычном доказательстве, если p не делит a, то $d=1$. Теперь равенство $b=mpb+nab$ показывает, что p делит b. Мы докажем iii) по индукции. Именно если x делится на все $n \leqslant N$, то ясно, что $x(N+1)$ делится на все $n \leqslant N+1$.

Вторую лемму можно сформулировать следующим образом.

Лемма. *Для всех c, d, n, a если $x(d, i)$ попарно взаимно просты при $i \leqslant n+1$, то существует такое c', что $y(c, d, i)=y(c', d, i)$ для всех $i \leqslant n$ и $y(c, d, n+1)=a$.*

Это утверждение имеет то же интуитивное содержание, что и предыдущая формулировка, потому что оно позволяет нам расширять последовательности, присоединяя каждый раз ровно один произвольный элемент. Чтобы его доказать, следует доказать сначала, с помощью индукции по i, что для всех $i \leqslant n$ существует такое t, что $x(d, n+1)$ взаимно просто с t, а для $j \leqslant i$ $x(d, j)$ делит t. Таким образом, существует такое t, что $x(d, i)$ делнт t при всех $i \leqslant n$, а $x(d, n+1)$ взаимно просто с t. Отсюда легко следует, что для некоторого u, если положить $c'=c+tu$, то c' обладает требуемым свойством.

---

[1]) Конечно, имеются в виду такие свойства $A(n)$, для которых существует хотя бы одно n с этим свойством. — *Прим. перев.*

Теперь можно доказать в Z_1, что формула, данная для определения п. р. функции f, действительно определяет единственную функцию [1]). Доказательство является простым упражнением в индукции, которое мы предоставляем читателю. Также и нужные нам очевидные свойства п. р. функций — например, свойство, касающееся композиции и т. п., — могут быть доказаны в Z_1.

Весьма замечателен тот факт, что + и · достаточны для определения любой п. р. функции. Пользуясь им, можно доказать, что система Z_2 может быть «погружена» в Z_1 и, следовательно, что Z_1 столь же сильна, как и Z_2. Точнее можно доказать, что каждая теорема системы Z_2, говорящая о натуральных числах, может быть доказана в Z_1. Чтобы в этом убедиться, определим последовательность конечных множеств S_n и последовательность натуральных чисел n_k таким образом, что $n_0=0$, $S_0=\emptyset$ и что для каждого k $n_k<n_{k+1}$, а множества S_i для $n_k<i\leqslant n_{k+1}$ занумеровывают некоторым определенным образом все те множества, элементами которых служат какие-либо S_j, где $j\leqslant n_k$. Легко видеть, что это можно сделать таким образом, что функция $f(m, n)$, определенная как 1 или 0 в соответствии с тем, принадлежит S_m множеству S_n или нет, будет п. р. функцией. Теперь можно доказать в Z_1 аксиомы Z_2, если заменить в них отношение $x\in y$ на $f(x, y)=1$. Таким образом, Z_2 погружается в Z_1, и можно показать, что отсюда следует высказанный результат. А утверждение о том, что любое доказуемое в Z_1 суждение доказуемо и в Z_2, следует непосредственно из того факта, что + и · — п. р. функции и могут быть поэтому определены в Z_2.

---

[1]) Конечно, в Z_1 можно доказать не это утверждение о формуле, относящееся к метатеории, а справедливость этого отношения между f и упомянутой формулой для любых значений свободных переменных, т. е., что при любых значениях этих переменных для этой формулы имеют место соотношения, соответствующие тем равенствам, которые участвуют в определении f. Это утверждение выражается в Z_1 новой формулой, в которую упомянутые переменные входят свободно или связаны снаружи кванторами общности. Именно о доказуемости этой формулы здесь и идет речь. — *Прим. перев.*

§ 8. Общерекурсивные функции

В математике часто возникает вопрос, является ли «эффективно вычислимой» какая-нибудь конкретная функция. Если для вычисления функции можно дать процедуру, очевидным образом эффективную, то этот вопрос следует считать решенным. Однако если возникает ощущение, что никакой такой эффективной процедуры нет, то нет никакой надежды доказать это обстоятельство до тех пор, пока не будет дано точное определение эффективно вычислимых функций [1]). Как было замечено в предыдущем параграфе, любое такое определение будет *собственно* [2]) включать класс всех примитивно рекурсивных функций. Было дано несколько таких определений, и, к счастью, оказалось, что все они приводят к одному и тому же классу функций, а именно общерекурсивных функций.

Одной из побудительных причин к рассмотрению всего этого вопроса является так называемая «проблема разрешения». Рассмотрим формальную систему Z_1 (или, что равносильно этому, Z_2). Все суждения из Z_1 могут быть занумерованы в виде последовательности A_n. Эта последовательность суждений содержит все вопросы обычной теории чисел, а с помощью надлежащего переформулирования в нее можно включить и большинство вопросов алгебры и топологии. Ввиду того что решена проблема задания механической процедуры перечисления всех этих проблем (что, конечно, исторически было большим шагом), возникает вопрос о воз-

---

[1]) По-видимому, здесь имеет место широко распространенное недоразумение. Автор лишь повторяет то, что до него говорили многие другие авторы. Под «точным» определением при этом понимается такое, которое эквивалентно интуитивному понятию вычислимой функции. Но для доказательства указанного обстоятельства нужна не эквивалентность, а импликация в одну сторону. Достаточно указать точно определенное понятие, определяющее класс, содержащий в себе все функции, вычислимые в интуитивном смысле, — и коль скоро будет доказано, что функция не удовлетворяет этому понятию, тем самым будет доказано и то, что она не вычислима в интуитивном смысле. — *Прим. перев.*

[2]) То есть в качестве собственного подкласса (не совпадающего со всем этим классом). — *Прим. перев.*

можности их *механического* решения (deciding). Так, если мы определим $\varphi(n)$ как 1 или 0 в соответствии с тем, истинно или ложно A_n, то можно спросить, является ли функция $\varphi(n)$ общерекурсивной. Если да, то мы имеем эффективное средство для решения любого вопроса в Z_1. (Конечно, основная трудность состоит в доказательстве того, что посредством данного вычисления вычисляется именно $\varphi(n)$, но сейчас мы рассматриваем только вопрос о *существовании* такого вычисления.) В этом параграфе мы покажем, что функция $\varphi(n)$ не является общерекурсивной — результат, который можно выразить еще утверждением, что не существует никакого эффективного метода даже для «угадывания» [1]) истинности или ложности каждого суждения в Z_1. И подавно для любой непротиворечивой системы аксиом не существует никакого эффективного метода, который для произвольного данного суждения A в Z_1 давал бы доказательство для A или для $\sim A$. Это значит, что так называемая *проблема разрешения* не может быть решена. (Рассказывали, что один знаменитый математик некоторое время думал, что он нашел процедуру разрешения, но, к счастью для нас, всех остальных, он ошибся.)

Первое определение общерекурсивной функции было дано в 1934 г. Гёделем, который опирался на одно предположение Эрбрана. Прежде чем давать это определение, следует заметить, что для него на первый взгляд может возникнуть непреодолимое препятствие. Именно, если бы имелось «эффективное» определение рекурсивных функций, то ввиду того, что существует только счетное количество предписаний, которые можно дать для выполнения вычисления, можно было бы занумеровать эти функции (или хотя бы функции от одной переменной), $f_n(x)$, и затем положить $g(n)=f_n(n)+1$. Эту функцию g следовало бы рассматривать как рекур-

[1]) Речь идет об «угадывании», так как по значению $\varphi(n)$ можно было бы лишь правильно ответить на вопрос об истинности или ложности A_n, но не привести соответствующее доказательство. — *Прим. перев.*

сивно определенную, но она бы не принадлежала только что указанному классу функций. Решение этой дилеммы состоит в задании неэффективного определения для рекурсивных функций! Это означает, что мы можем установить критерий рекурсивности для функций, но не можем эффективно занумеровать их. Гёделевское определение исходит из замечания, что п. р. функция, например, полностью определяется конечным числом уравнений, содержащих функции. Конечно, для п. р. функций эти уравнения должны иметь совсем специальный вид. В общем случае произвольно заданное множество уравнений не будет определять функцию. Гёделевское определение состоит по существу в том, что функция общерекурсивна, если имеется некоторое конечное множество уравнений, содержащих эту функцию и вспомогательные функции и определяющих эту функцию однозначно.

Чтобы идти дальше, необходимо построить формальную теорию вычислений функций. Наш алфавит будет состоять из *функциональных символов* f, g, h, ..., каждый из которых связан с фиксированным числом переменных, из натуральных переменных (integer variables) x, y, z, ..., из символов 0, = и $'$, где x' представляет $x+1$, и, наконец, из скобок (,) и из запятой , . Мы принимаем следующие определения:

1. *Цифра* (numeral) — это выражение вида 0, 0′, 0″, ... и т. д.

2. *Термы* (term) определяются соглашениями.

(a) 0 есть терм.

(b) Переменные x, y, z, ... — термы

(c) Если r — терм, то и r' — терм.

(d) Если r_1, ..., r_n — термы, а f — функциональный символ с n переменными, то $f(r_1, \ldots, r_n)$ — терм.

3. *Уравнение* (equation) — это выражение вида $r=s$, где r и s — термы.

4. Если E — конечное множество уравнений, то уравнение называется *выводом* из E, если оно может быть получено посредством повторных применений следующих правил.

Правило 1.
Если дано уравнение, то разрешается заменить все вхождения данной переменной x на любую данную цифру [1]).

Правило 2.
Если было выведено $f(n_1, \ldots, n_k)=m$, где m и n_i — цифры, то в любом данном уравнении разрешается заменить любое вхождение $f(n_1, \ldots, n_k)$ на m.

Правило 3.
Если $r=s$ выведено, то выведено и $s=r$ [2]).

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_k)$ называется *общерекурсивной* (а иногда просто *рекурсивной*), если имеется такое конечное множество уравнений, что при любом выборе цифр $n_1, \ldots, n_k$ существует единственное m такое, что может быть выведено $f(n_1, \ldots, n_k)=m$ [3]).

Приведем некоторые примеры. Система

$$f(x, 0)=x; \quad f(x, y')=f(x, y)'$$

определяет $f \equiv x+y$. Это частный случай того, что каждая п. р. функция общерекурсивна; доказательство этого общего факта мы предоставляем читателю. Уравнения

$$f(0, m')=m',$$
$$f(n, 0)=n',$$
$$f(n', m')=f(n, f(n', m))$$

---

[1]) Конечно, вхождение переменной можно заменить только вхождением цифры, а не ее сущностью. — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, это надо понимать лишь как разрешение вывести $s=r$ из $r=s$. Аналогично выше, в 2 (c) и (d), если r — терм, то разрешается образовать терм r', и т. п. (и то же самое следовало бы заметить в связи с индуктивным определением понятия формулы и т. п.). — *Прим. перев.*

[3]) Здесь считается, что функциональные символы обозначают функции, и функция, обозначаемая символом f с k переменными, обозначена в этой формулировке также через $f(x_1, \ldots, x_k)$ (т. е. буква «f» употребляется и в качестве функционального символа в выводимых равенствах — где она может и не рассматриваться как обозначающая что бы то ни было — и в качестве обозначения для этой функции). — *Прим. перев.*

определяют функцию $f(x, y)$, для которой можно доказать, что если $g(y)$ — п. р. функция, то для некоторого x $\forall y f(x, y) > g(y)$. Вообще совсем не очевидно, какие уравнения определяют функции. Так, в нашем втором примере ясно, что f определяется посредством «двойной» рекурсии, более сложной, чем примитивные, и можно привести еще более сложные примеры.

Утверждение, что общерекурсивные функции, как мы их определили, исчерпывают класс всех «эффективно вычислимых» функций, известно как *тезис Чёрча*. Так как это утверждение по существу философское, то не возникает вопроса о его доказательстве или опровержении [1]). Однако имеются сильные доводы в пользу этого тезиса: это главным образом тот факт, что все известные вычислимые функции общерекурсивны, а также что совершенно различные попытки определить общерекурсивные функции привели к одному и тому же результату [2]). Одна из этих попыток принадлежит Тьюрингу.

Машина Тьюринга представляет собой аппарат, сквозь который проходит бесконечная лента, разделенная на клетки (boxes), образующие бесконечную последовательность. В каждый момент «рассматривается» некоторая клетка и машина находится в одном из конечно многих «состояний» S_1, S_2, ..., S_n. Каждая клет-

---

[1]) В отличие от сказанного в сноске 1 на стр. 56 здесь речь действительно должна идти о равнообъемности двух классов или об эквивалентности двух понятий, из которых только одно определено математически. Поэтому трудно ожидать математического доказательства тезиса Чёрча. Но если он окажется неверным, можно будет надеяться на его простое опровержение.

Следует заметить, что автор рассматривает только всюду определенные функции, поэтому о частично рекурсивных функциях (см. [15, гл. XII]) здесь нет речи. Это относится и к формулировке тезиса Чёрча. — *Прим. перев.*

[2]) Во втором доводе, по-видимому, следует заменить слова «общерекурсивные» на «эффективно определимые». Трудно понять, почему этому доводу в литературе придается такое большое значение — ведь совпадение результатов различных попыток может свидетельствовать и об одинаковой неудаче.

Для частично определенных функций в [15, § 70] изложен значительно более сильный довод в пользу тезиса Тьюринга, по существу равносильного тезису Чёрча. — *Прим. перев.*

ка пуста или на ней имеется символ 1. Рассмотрев клетку, машина делает следующее:

1. Печатает символ 1 на этой клетке, если она пуста, стирает этот символ, если он уже имеется на ней, или оставляет клетку без изменений.

2. Передвигает ленту на одну клетку влево или вправо.

3. Переходит в новое состояние.

Чтобы описать 1, достаточно задать функцию $\varphi_1(i, j)$, определенную для $0 \leqslant i \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и такую, что $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 1$, и если машина находится в состоянии S_j и никакого символа нет на клетке, то $\varphi_1(0, j)$ равно 0, если клетка не изменяется, равно 1, если она изменяется, и аналогично для $\varphi_1(1, j)$, если на клетке есть символ. Чтобы описать 2, достаточно задать функцию $\varphi_2(i, j)$ того же типа, определяющую, влево или вправо передвигает машина ленту. Чтобы описать 3, достаточно задать функцию $\varphi_3(i, j)$, где $1 \leqslant \varphi_3 \leqslant n$. Следовательно, машина полностью определена этими тремя функциями. Чтобы начать вычисления, следует подготовить ленту так, что m последовательных клеток будут заняты, заставить машину рассматривать самую левую из занятых клеток и привести ее в состояние S_1. Если машина приходит в некоторое состояние, например S_n, из которого она уже никогда не выходит, и при этом она не передвигает и не меняет ленты, то мы говорим, что вычисление окончено, коль скоро лента пуста всюду, за исключением последовательной цепочки из $f(m)$ заиятых клеток, самая левая из которых рассматривается машиной [1]). Если это имеет место для всех m, мы говорим,

---

[1]) Неточность, не имеющая принципиального значения: таким образом можно рассматривать вычислимые функции лишь в предположении, что натуральный ряд начинается с 1. Если же этот ряд начинается с 0, то аргумент m следует представлять последовательностью из $m+1$ занятой клетки (в которой рассматривается самая левая), а ее значение $f(m)$ — такой же последовательностью из $f(m)+1$ клетки. (Ср. [15], гл. XIII; функции k аргументов рассматриваются так же, причем системы чисел $m_1, \ldots, m_k$ представляются в виде последовательности, членами которой являются последовательности, представляющие эти числа в указанном порядке, причем при $k>1$ любые две соседние последовательности разделены ровно одной пустой клеткой.) — *Прим. перев.*

что машина вычисляет функцию $f(m)$. Можно показать, каким образом эта машина будет воспроизводить тот способ, которым обычно совершаются вычисления. Затем можно показать, что класс функций, вычисляемых посредством машин Тьюринга, совпадает с классом общерекурсивных функций ([15]). Мы здесь не будем этим заниматься, но заметим, что нет совсем ничего удивительного в возможности записать правила, управляющие действиями машины Тьюринга, в виде уравнений, связывающих происходящее на ленте с состоянием машины. Обратно, если нам дано множество уравнений, то программирование схемы машины, осуществляющей поиск всех выводов, сводится к скучным упражнениям. При нашем подходе мы будем иметь в виду рекурсивные функции, определяемые уравнениями. Хотя в отдельных рассуждениях речь может идти о машине Тьюринга, следует уяснить себе, как можно будет достичь того же результата с помощью надлежащих уравнений.

Если S — множество натуральных чисел, мы будем обозначать через χ_S *характеристическую функцию* S, т. е. $\chi_S(n)=0$ или 1 в соответствии с тем $\sim n\in S$ или $n\in S$.

Определение. Множество S называется *рекурсивным*, если его характеристическая функция общерекурсивна.

Множество S *рекурсивно перечислимо*, если S пусто или если S является областью значений (range) какой-нибудь общерекурсивной функции.

В математике часто возникает вопрос о вычислении χ_S, где S — область данной общерекурсивной функции. Например, при фиксированном k занумеруем все пары, состоящие из полинома $p(x_1, \ldots, x_k)$ с целыми коэффициентами и k-шки $(n_1, \ldots, n_k)$, где n_i — целые числа. Определим на этой последовательности функцию, значением которой служит полином $p(x_1, \ldots, x_k)$, если $p(n_1, \ldots, n_k)=0$, а в противном случае — нулевой полином. Областью значений этой функции является множество всех таких p, что $p(x_1, \ldots, x_k)=0$ имеет целочисленное решение. Десятая проблема Гильберта состоит именно в том, чтобы определить область значений

этой функции, или, другими словами, в том, чтобы для данного полинома эффективно определить, имеет ли он целочисленные решения. Неизвестно, существует ли соответствующая этой цели общерекурсивная функция. Были изучены другие примеры, например проблема тождества слов для групп и для подгрупп, и для этих случаев было доказано, что не существует общерекурсивной функции, обладающей требуемыми свойствами. Здесь мы ограничимся доказательством того, что существуют в этом смысле «неразрешимые проблемы». Точнее, имеет место следующая теорема, являющаяся основным результатом в этой области.

Теорема. *Существует рекурсивно перечислимое множество, не являющееся рекурсивным.*

Наше доказательство дает явный пример такого множества. Занумеруем сначала любым «эффективным» образом все конечные множества уравнений, в которых встречается функциональный символ f с одной переменной. Затем занумеруем все возможные выводы из этих уравнений. Такая нумерация возможна ввиду того, что эти выводы образуют счетную совокупность. Если n-я система уравнений определяет функцию, обозначим эту функцию через f_n. Даже если f_n не определена, мы будем писать $f_n(a)=b$ для обозначения того, что существует вывод вида $f(a)=b$ из n-го множества уравнений, причем a и b — натуральные числа. Теперь мы занумеруем все выводы уравнений вида $f_n(a)=b$. Легко доказать, что эти нумерации можно выбрать так, что будут существовать такие п. р. функции φ_1, φ_2, φ_3, что если уравнение $f_n(a)=b$ встречается на m-м месте в нашей последовательности, то $n=\varphi_1(m)$, $a=\varphi_2(m)$, $b=\varphi_3(m)$ [1].

[1]) Это доказательство можно извлечь из известной теоремы о том, что пропозициональные операторы и ограниченные кванторы (т. е. кванторы вида $\forall x\,(x<n\supset\ldots)$ и $\exists x\,(x<n\,\&\ldots)$) над примитивно рекурсивными предикатами дают снова примитивно рекурсивные предикаты, а выражение «наименьшее x такое, что $x<\sigma\&P(x, n_1, \ldots, n_k)$, если такое x существует, 0 в противном случае», где $P(x, n_1, \ldots, n_k)$ — примитивно рекурсивный предикат, определяет примитивно рекурсивную функцию. (Предикат называется

Пусть g, h_1, h_2 — такие п. р. функции, что отображение $(a, b) \to g(a, b)$ является взаимно однозначным соответствием между множеством всех пар натуральных чисел и множеством всех натуральных чисел и притом $a = h_1(g(a, b))$, $b = h_2(g(a, b))$.

Мы теперь определим функцию $F(n)$ следующим образом: Пусть $r = h_1(n)$ и $s = h_2(n)$. Если уравнение $f_r(r+1) = 0$ встречается в нашей последовательности уравнений ранее, чем на s-м месте, положим $F(n) = r+1$. В противном случае, положим $F(n) = 0$. Прежде всего мы утверждаем, что F — п. р. функция. Это можно проверить, если явно выписать все использованные уравнения. Следует отчетливо убедиться в том, что все использованные до сих пор функции можно определить посредством совсем простых процедур. Заметим, что для любого r число $r+1$ встречается в области значений $F(n)$ в том и только в том случае, если можно вывести равенство $f_r(r+1) = 0$. Пусть S — область значений F, а χ — ее характеристическая функция. Мы утверждаем, что ни для какого r невозможно совпадение f_r с χ. (Если f_r не определена, это утверждение тривиально). В самом деле, если f_r определена, то $f_r(r+1)$ должно быть в конце концов вычислено. Если $f_r(r+1) = 0$, то $r+1$ входит в область значений F, так что $\chi(r+1) = 1$. Если $f_r(r+1) \neq 0$, то $r+1$ не входит в эту область и $\chi(r+1) = 0$. В любом случае $\chi(r+1) \neq f_r(r+1)$, и теорема доказана.

примитивно рекурсивным, если примитивно рекурсивна характеристическая функция множества удовлетворяющих ему чисел или систем чисел.) Доказательство этой теоремы имеется в [15, § 45]; читателю, незнакомому с [15], можно рекомендовать провести это доказательство самостоятельно. Применение этой теоремы к данному случаю основывается именно на достаточности ограниченных кванторов и описаний (т. е. выражений вышеуказанного вида) для построения функций φ_1, φ_2 и φ_3 с указанными значениями. Эта достаточность вытекает из того, что при некоторой естественной нумерации номер m уравнения $f_n(a) = b$ должен превосходить числа n, a и b; кроме того, некоторые подробности доказательства утверждения автора используют тот факт, что указанная в этом примечании теорема остается в силе, если в «$x<n$» заменить n на $\psi(n_1, \ldots, n_p)$, где ψ — любая п. р. функция, а n_j — переменные или фиксированные натуральные числа. — *Прим. перев.*

Следствие. *Проблема разрешения для* Z_1 *(или для* Z_2*) неразрешима.*

Доказательство. Суждение $n \in S$ (или эквивалентное ему $\exists m(f(m)=n)$) является для каждого n суждением из Z_1, а мы показали, что никакая общерекурсивная функция не может говорить об истинности или ложности даже для этого ограниченного класса суждений.

Учтем теперь, что всякое суждение из Z_1 может быть представлено в виде $Q_1x_1, \ldots, Q_nx_nA(x_1, \ldots, x_n)$, где Q_i — кванторы, а A — пропозициональная функция от уравнений вида $p(x_1, \ldots, x_n)=0$, где p — полином с целыми (возможно, отрицательными) коэффициентами. Элементарными теоретико-числовыми средствами можно легко доказать даже, что A можно выбрать в виде $p(x_1, \ldots, x_n)=0$. (При этом используются следующие факты:

$$y_1=0 \,\&\, \ldots \,\&\, y_r=0 \leftrightarrow y_1^2+\ldots+y_r^2=0;$$

$$y \neq 0 \leftrightarrow \exists z_1, \ldots, z_4(z_1^2+\ldots+z_4^2+1=y^2)$$

и

$$y_1=0 \vee \ldots \vee y_r=0 \leftrightarrow y_1y_2\ldots y_r=0.$$

Таким образом, для диофантовых уравнений, если в них допускаются кванторы как всеобщности, так и существования, не существует процедуры разрешения. Были проведены дальнейшие исследования с целью доказать, что при допущении переменных показателей возникающий класс «диофантовых уравнений» с одними лишь кванторами существования также не допускает процедуры разрешения.

В предыдущем доказательстве рекурсивно перечислимое множество S фактически было областью п. р. функции. Но это имеет место всегда.

Теорема. *Всякое непустое рекурсивно перечислимое множество является областью значений п. р. функции.*

Доказательство. Пусть S — область значений общерекурсивной функции f. Конечно, можно считать,

что S непусто, и предположить, что $a \in S$. Функция f определена некоторой системой уравнений. Допустим, что все выводы из этой системы занумерованы. Тогда существует такая п. р. функция g, что если m-е уравнение имеет вид $f(x)=y$, то $g(m)=y$, в противном случае $g(m)=a$ [1]). S является областью значений этой функции.

Можно даже доказать, что все общерекурсивные функции могут быть получены из п. р. функций путем присоединения ровно одной дополнительной операции. Если $f(y, x_1, \ldots, x_n)$ — функция, то через $\mu_y f(y, x_1, \ldots, x_n)$ мы будем обозначать функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, определяемую следующими условиями:

i) $g(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$, если для некоторых $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ $\forall y f(y, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \neq 0$.

ii) Если i) неприменимо, то $g(x_1, \ldots, x_n) = a$, где a — *наименьшее* y, такое, что $f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$ [2]).

Теорема. *Общерекурсивные функции образуют наименьший класс функций, содержащий все п. р. функции и замкнутый относительно композиции и* μ*-оператора.*

Доказательство. Если $f(y, x_1, \ldots, x_n)$ рекурсивна и для всех $x_1, \ldots, x_n$ $\exists y f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$, то

[1]) Здесь автор молчаливо пользуется тем, что рассматриваемую нумерацию уравнений можно выбрать так, что число, стоящее в правой части уравнения (или a, если эта правая часть не является числом), будет п. р. функцией от его номера. Такую нумерацию можно получить, например, методом арифметизации, излагаемым в следующем параграфе. — *Прим. перев.*

[2]) Это определение применяется и в случае $n=0$. Следует обратить внимание на то, что рассматриваемый автором оператор $\mu_y f(y, x_1, \ldots, x_n)$ отличается от того, который часто обозначается таким образом (или с μy вместо μ_y) в литературе. Именно, при $n \neq 0$, если $\bar{x}_1', \ldots, \bar{x}_n'$ и $\bar{x}_1'', \ldots, \bar{x}_n''$ — две такие n-ки натуральных чисел, что $\forall y (y, \bar{x}_1', \ldots, \bar{x}_n') \neq 0$, но $f(0, \bar{x}_1'', \ldots, \bar{x}_n'') \neq 0 \,\&\, \exists y f(y, \bar{x}_1'', \ldots, \bar{x}_n'') = 0$, то при этом определении будет $\mu_y(\bar{x}_1'', \ldots, \bar{x}_n'') = 0$, тогда как обычно в таких случаях считают, что $\mu_y(\bar{x}_1'', \ldots, \bar{x}_n'')$ равно наименьшему y, для которого $f(y, \bar{x}_1'', \ldots, \bar{x}_n'') = 0$, а число и указанном случае отлично от 0. — *Прим. перев.*

можно определить машину Тьюринга, вычисляющую $\mu_y f(y, x_1, \ldots, x_n)$, для чего достаточно заставить машину Тьюринга для f производить вычисления для последовательных значений y до тех пор, пока не будет найдено значение, для которого $f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Ввиду того что этот процесс должен окончиться, $\mu_y f$ общерекурсивна. Итак, класс всех общерекурсивных функций замкнут относительно μ-оператора. С другой стороны, если $h(x)$ — общерекурсивная функция, то очевидно, что существует такая п. р. функция $f(x, y)$, что $f(x, y) = 0$ в том и только в том случае, если работа машины Тьюринга для h при аргументе x закончится не более чем в y шагов вычислением значения $h(x)$. Положим $g(x) = \mu_y f(x, y)$. Существует и такая п. р. функция $k(x, y)$, которая дает значение, появляющееся на ленте в результате совершения этой машиной y шагов при аргументе x (если такое значение существует). Ясно, что $h(x) = k(x, g(x))$, и теорема доказана [1]).

§ 9. Теорема Гёделя о неполноте

Теоремы предыдущего параграфа говорят не о том, какие суждения можно доказать в какой-либо конкретной системе аксиом; они представляют собой абсолютные утверждения о функциях. Исторически Чёрч был первым, кто доказал существование «неразрешимых» (unsolvable) проблем. Однако имеется более ранний результат, принадлежащий Гёделю, который утверждает существование предложений, неразрешимых (undecidable) в конкретных формальных системах. Эти два типа результатов тесно связаны друг с другом и доказываются в обоих случаях сходными диагональными методами. Мы выведем теорему Гёделя из ранее изложенных теорем, а затем опишем его первоначальный метод.

---

[1]) Более того, доказано, что всякая общерекурсивная функция $h(x)$ представима в виде $k(x, \mu_y f(x, y))$, где k и f — п. р. функции, причем k фиксирована (т. е. не зависит от h). При обычном определении μ_y (см. сноску 2 на стр. 66) доказывается даже, что $k(x, y)$ можно считать не зависящей от аргумента x. (См. [15, § 58].) — *Прим. перев.*

Теорема Гёделя о неполноте.
Существует такое суждение A в $\boldsymbol{Z}_1$, что ни A, ни $\sim A$ не могут быть доказаны посредством аксиом из $\boldsymbol{Z}_1$, если эта система непротиворечива.

Наше *доказательство* дает явный пример A, и из него будет следовать, что A ложно при интерпретации в естественной модели для натуральных чисел. Как будет показано, эта теорема точно так же имеет место и для $\boldsymbol{Z}_2$, и для систем более общего вида.

Первый шаг будет состоять в так называемой *арифметизации* системы $\boldsymbol{Z}_1$. Под этим мы будем понимать, что все формулы этой системы занумерованы некоторым естественным образом. (Например, с помощью надлежащего лексикографического упорядочения, основанного на длине формул.) Коль скоро это сделано, различные элементарные операции — например, образование отрицания или конъюнкции формул, связывание свободной переменной и т. п. — превращаются в совсем простые п. р. функции над натуральными числами, соответствующими формулам. Эти числа обычно называют *гёделевыми номерами* формул. (Конечно, не существует никакого канонического способа приписывания натуральных чисел формулам.) Далее правила исчисления предикатов были заданы вполне эффективно. Кроме того, хотя в $\boldsymbol{Z}_1$ имеется бесконечно много аксиом, все они порождаются посредством простого правила и легко можно занумеровать их гёделевы номера. Поэтому с помощью нумерации всех возможных доказательств можно убедиться в том, что все *доказуемые* суждения (или, точнее, их гёделевы номера) образуют область значений п. р. функции.

В § 8 была явно построена п. р. функция F, имеющая нерекурсивную область значений. Точнее было показано, что если f_r — рекурсивная функция, определяемая r-м множеством уравнений, то $(r+1$ входит в область значений $F) \leftrightarrow f_r(r+1) = 0$ [1]). Эта функция $F(x)$ может быть

[1]) Еще точнее: это было доказано и без предположения о том, что функция f_r определена (см. стр. 63), чем автор в этом доказательстве воспользуется. — *Прим. перев.*

представлена в Z_1 в том смысле, что в Z_1 существует формула, утверждающая $F(x)=y$. Пусть B_n обозначает суждение «n входит в область значений F». Ясно, что гёделевы номера суждений B_n и $\sim B_n$ являются п. р. функциями от n. Теперь мы рассмотрим следующую машину Тьюринга (или эквивалентное ей множество уравнений, определяющее общерекурсивную функцию): Для каждого n будем просматривать по порядку перечень всех доказательств до тех пор, пока в нем не встретится доказательство суждения B_n или $\sim B_n$. Коль скоро это произойдет, вычисление прекращается, и мы положим $g(n)=1$ в первом случае и $g(n)=0$ — во втором. Если же ни одно из суждений B_n и $\sim B_n$ не доказуемо, то $g(n)$ остается неопределенной. (Заметим, что мы a priori не исключаем возможности того, что доказуемы оба суждения B_n и $\sim B_n$[1]). В этом случае $g(n)$ будет зависеть от того, для которого из этих суждений доказательство в перечне встретится раньше.) Функция g была определена[2]) совершенно явно, а поэтому она должна совпадать с f_r для некоторого r, которое тоже можно указать явно. Пусть A обозначает суждение «$r+1$ входит в область значений F». В силу характеристического свойства F, состоящего в том, что $f_r(r+1)=\chi(r+1)$, где χ — характеристическая функция области значений F, имеет место следующее.

Утверждение. *Если доказательство суждения A появляется в перечне прежде, чем доказательство суждения $\sim A$, то $r+1$ не входит в область значений F.*

---

[1]) Это замечание означает, что непротиворечивость Z_1 до сих пор не была использована. (Она будет использована лишь после того, как будет высказано утверждение на стр. 69—70; автор воспользуется этим обстоятельством при доказательстве второй теоремы Гёделя о неполноте.) — *Прим. перев.*

[2]) Это место не следует понимать буквально, так как автор рассматривает только всюду определенные функции, а между тем $g(n)$ может, по предыдущему, оставаться неопределенным выражением. Если g не является функцией в рассматриваемом здесь смысле, это же следует сказать и об f_r, но тем не менее можно рассматривать записи $f_r(a)=b$ в смысле, указанном на стр. 63; это r можно указать явно, и этого достаточно для излагаемого доказательства. — *Прим. перев.*

Если доказательство суждения $\sim A$ появляется в перечне прежде, чем доказательство суждения A, то $r+1$ входит в область значений F [1]).

Разумеется, любое суждение, доказуемое в Z_1, *истинно* в естественной модели для натуральных чисел. Кроме того, ввиду непротиворечивости Z_1 не могут быть доказуемыми оба суждения A и $\sim A$. Поэтому если A доказуемо, то из высказанного утверждения следует, что $r+1$ не входит в область значений F. Но если A доказуемо, то A истинно и $r+1$ входит в эту область — противоречие. Если же $\sim A$ доказуемо, то в силу этого же утверждения $r+1$ входит в область значений F. Однако если $\sim A$ доказуемо, то $\sim A$ истинно и $r+1$ не входит в эту область — снова противоречие. Итак, ни A, ни $\sim A$ не доказуемо, и теорема доказана.

Следствие. *Суждение A ложно в области натуральных чисел.*

Доказательство. Если бы $r+1$ входило в область значений F, то для некоторого m имело бы место $F(m)=r+1$. Ввиду рекурсивности F можно было бы явно выписать все шаги вычисления для $F(m)$. Эти вычисления образовали бы *доказательство* в Z_1 для равенства $F(m)=r+1$, а следовательно, доказательство для A. Но A недоказуемо в Z_1, так что следствие доказано.

Мы теперь встретились с довольно любопытной ситуацией. С одной стороны, $\sim A$ не доказуемо в Z_1, и все же мы сейчас привели неформальное доказательство истинности $\sim A$. (Здесь нет никакого противоречия, ибо мы просто показали, что доказательствами в Z_1 не исчерпываются все приемлемые аргументы.) Это наводит на мысль, что более подробный анализ изложенного до-

---

[1]) Слова «доказательство суждения A появляется в перечне прежде, чем доказательство суждения $\sim A$» следует понимать (в этом утверждении и следующем за ним абзаце) в том смысле, что в перечне встретится доказательство суждения A, которому в этом перечне не предшествует никакое доказательство суждения $\sim A$. (Иными словами, этот оборот не предполагает появления $\sim A$ на какой бы то ни было стадии.) — *Прим. перев.*

казательства для следствия может привести к какому-нибудь *естественному* принципу, который был использован в этом доказательстве, но не может быть доказан в Z_1. (Конечно, само суждение $\sim A$ не является естественным утверждением, а попросту для него была доказана неразрешимость.)

Чтобы сформулировать следующую теорему, обратим внимание на то, что посредством нашего сопоставления гёделевых номеров формулам суждения о формальной системе Z_1 переводятся в суждения о натуральных числах. Так, в частности, суждение о непротиворечивости Z_1 или эквивалентное ему суждение о том, что $0=1$ не встречается в перечне доказуемых суждений, превращается теперь в высказывание о том, что некоторое определенное натуральное число не входит в область значений некоторой п. р. функции. Ввиду того что п. р. функции представимы в Z_1, это высказывание оказывается однозначно определенным суждением в Z_1, которое мы обозначим посредством Consis Z_1.

Вторая теорема Гёделя о неполноте. Consis Z_1 *не может быть доказано в* Z_1, *если* Z_1 *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим, что Consis Z_1 может быть доказано в Z_1. Теперь мы проведем рассуждение о формальной системе Z_1, которое будет изложено неформально, но которое можно полностью записать в Z_1 с помощью гёделевой нумерации. (Это место является, возможно, самым тонким во всей этой теории, и читателю надлежит сейчас остановиться и тщательно рассмотреть все, что было сделано до сих пор.)

Сначала мы повторим доказательство утверждения. Оно легко переводится в Z_1, так как в нем были использованы только простые финитные умозаключения. Конечно, мы говорили в этом доказательстве о рекурсивных функциях, но этого можно избежать посредством нумерации всех возможных определяющих уравнений и разговора о соответствующих номерах. Можно также занумеровать все возможные выводы и таким образом полностью перевести в Z_1 все разговоры о значениях этих

функций [1]). Мы не воспользовались никаким специальным свойством рассмотренной рекурсивной функции g. (В частности, мы не использовали того, что Z_1 непротиворечива.) Далее, ввиду того что мы теперь *допустили* доказуемость Consis Z_1, мы можем продолжать рассуждение следующим образом. Если $r+1$ входит в область значений F, например $F(m)=r+1$, то вычисление $F(m)$ должно дать доказательство суждения A. Ввиду того что Z_1 непротиворечива, имеет место первая альтернатива утверждения и $r+1$ не входит в область значений F, что дает противоречие. Итак, $r+1$ не входит в область значений F, или $\sim A$ истинно.

Мы таким образом можем дать доказательство суждения $\sim A$ в Z_1. Но это невозможно. Следовательно, Consis Z_1 недоказуемо в Z_1, ибо эта доказуемость повлекла бы доказуемость $\sim A$. Этим теорема доказана.

Теперь мы вкратце наметим первоначальное доказательство первой теоремы о неполноте. Это доказательство фактически короче, и, хотя оно использует по существу те же доводы, оно не использует понятия рекурсивной функции. (Единственная цель, с которой мы поступили указанным образом, состояла в приведении этого доказательства в более естественную связь с изучением рекурсивных функций [2].) Диагональный аргу-

---

[1]) В частности, таким путем можно избавиться от упоминаний о машине Тьюринга. — *Прим. перев.*

[2]) Наряду с этой целью автор достигает существенного упрощения тех формализаций, которые используются в доказательстве второй теоремы Гёделя о неполноте. До сих пор это доказательство лишь с трудом поддавалось полному изложению (см., например, монографию Hilbert und Bernays, Grundlagen der Mathematik, Berlin, Springer, Bd. II, 1939, S. 287—324, или на русском языке — мое добавление I к переводу книги [15]). Конечно, автор здесь тоже излагает лишь идею этого доказательства, но осуществление этой идеи не требует уже, как было раньше, разработки дополнительных идей, связывающих истинность формул с их доказуемостью. Именно, из этих идей теперь используется лишь одна: Если $F(m)=r+1$, то вычисление $F(m)$ дает доказательство этой формулы. Это утверждение с переменным m (но с фиксированным, явно указанным значением r) по-прежнему подлежит формальному доказательству (что, впрочем, и прежде составляло технически одну из главных трудностей для доказательства этой второй теоремы). В остальном же

мент применяется непосредственно к суждениям из Z_1. Прежде всего занумеруем каким-либо естественным образом все формулы с одной свободной переменной $A_n(x)$. Пусть $B(n)$ будет суждением о том, что $A_n(n)$ не доказуемо. Тогда $B(n)$ должно совпадать с $A_{n_0}(n)$ для некоторого натурального числа n_0, которое можно вычислить в явном виде. Теперь суждение $B(n_0)$ интуитивным образом утверждает, что оно само не доказуемо. Точнее если $B(n_0)$ доказуемо, то оно истинно, а поэтому $A_{n_0}(n_0)$ не доказуемо. Но $A_{n_0}(n_0) \equiv B(n_0)$, так что $B(n_0)$ не доказуемо — противоречие. Если $\sim B(n_0)$ доказуемо, то $B(n_0)$ ложно и, следовательно, $A_{n_0}(n_0) \equiv B(n_0)$ [1]) доказуемо — снова противоречие. Итак, ни $B(n_0)$, ни $\sim B(n_0)$ не доказуемо.

Замечания. Хотя это представляет лишь побочный интерес, вторая теорема о неполноте сама может быть записана в виде суждения в Z_1. Возникает вопрос, какие принципы, помимо аксиом Z_1, используются в ее доказательстве. Первоначальное доказательство Гёделя

для формализации теперь требуется лишь воспроизвести формально доказательство теоремы о нерекурсивности области значений F из § 8 (точнее, доказательство неравенства $f_r(r+1) \neq \chi(r+1)$ с переменным r), для чего надо, в частности, указать в нужных случаях построение соответствующего s, а также формализовать применения различных определений (в частности, определения непротиворечивости Z_1 в последней части доказательства второй теоремы о неполноте). Изложению теорию рекурсивных функций (основанную лишь на определяющих уравнениях) можно формализовать в Z_1 таким образом, что все формальные теоремы вида $T(m)$, где m — свободная переменная, или вида $\forall m T(m)$, получаются путем применения формализованных определений, в которых надлежащим образом участвует переменная m (это относится и к упомянутому случаю $F(m) = r+1$). Хотя и этот путь довольно тернист, он не требует формализации связей между доказуемостью и истинностью $B(n_0)$, в чем состояла сложность бернайсовского доказательства, а с другой стороны, эта формализация теории рекурсивных функций подлежит изучению в связи с различными целями математической логики. — *Прим. перев.*

[1]) Эта запись обозначает совпадение формул $A_{n_0}(n_0)$ и $B(n_0)$ (и речь идет здесь об их доказуемости). — *Прим. перев.*

использовало, как он сам указал, более сильное утверждение, чем непротиворечивость Z_1 [1]).

Определение. Множество S суждений в Z_1 называется *ω-непротиворечивым*, если невозможно вывести из S суждение $\exists x B(x)$ и, кроме того, для каждой цифры n вывести $\sim B(n)$ [2]).

Ясно, что если все суждения из S истинны в области натуральных чисел, то S ω-непротиворечиво. С другой стороны, рассмотрим множество S, состоящее из аксиом Z_1 и суждения $\sim$Consis Z_1. Тогда S непротиворечиво в силу второй теоремы о неполноте. (Конечно [3]), $\sim$Consis Z_1 ложно в области натуральных чисел.) Далее, $\sim$Consis Z_1 утверждает, что $\exists n$ такое, что n является гёделевым номером доказательства противоречия. Но для каждого n можно рассмотреть n-е доказательство и убедиться в том, что оно не дает противоречия. Следовательно [4]), S не ω-непротиворечиво. С интуитивной

---

[1]) Автор почему-то связывает это замечание со второй теоремой Гёделя, к которой оно не относится. Первоначальное доказательство первой теоремы состоит из двух частей, в которых устанавливается соответственно недоказуемость формул $B(n_0)$ и $\sim B(n_0)$. Только первая из этих частей (точнее ее формализация) участвует в доказательстве второй теоремы Гёделя (в его бернайсовской форме), тогда как условие ω-непротиворечивости, о котором сейчас пойдет речь, используется как раз во второй из указанных частей, на что и указывал Гёдель. Итак, автор, очевидно, не хочет сказать, что вторая теорема Гёделя, или какое-либо ее известное доказательство, требует условия ω-непротиворечивости. — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, эта формулировка означает невозможность того, чтобы как $\exists x B(x)$, так и $\sim B(n)$ для любой цифры n были формулами, выводимыми из S. Иными словами, надлежит отвлечься от тривиального толкования формулировки этого определения, согласно которой вывести $\sim B(n)$ для каждой цифры n невозможно просто ввиду бесконечности класса всех цифр. (В этом определении $B(x)$ обозначает произвольную формулу — к обозначениям из первоначального доказательства первой теоремы Гёделя это определение не имеет никакого отношения.) — *Прим. перев.*

[3]) Это «конечно» основано на молчаливом допущении о непротиворечивости Z_1. — *Прим. перев.*

[4]) Здесь используется, что если n-е доказательство не дает противоречия, т. е. его результат не является противоречием, то это обстоятельство может быть доказано в Z_1. — *Прим. перев.*

точки зрения можно утверждать, что понятие непротиворечивости является лишь грубым приближением к понятию истины, а ω-непротиворечивость является чуть-чуть лучшим приближением.

Гёдель указал на то, что его доказательство использует ω-непротиворечивость аксиом Z_1 [1]). Россер впоследствии доказал, что если слегка изменить рассуждение, то достаточно будет воспользоваться допущением о непротиворечивости Z_1. Так, например, если S состоит из аксиом Z_1 и $\sim$Consis Z_1, то можно повторить доказательство и показать, что Consis S не может быть доказано в S [2]). Очевидно, что система S неестественна, так как она содержит ложные суждения.

За второй теоремой о неполноте стоит важное обстоятельство: понятие истины не может быть формализовано в Z_1. Это результат Тарского, который подробнее формулируется следующим образом: в Z_1 не существует такой формулы $A(n)$, что для каждой цифры n формула $A(n)$ истинна в области натуральных чисел в том и только в том случае, если n-е суждение истинно в этой области. Доказательство сходно с таковым для теоремы о неполноте, с той лишь разницей, что вместо доказуемости речь идет в нем об истинности. Допустим, что такая формула $A(n)$ существует. Пусть $B_n(x)$ обозначает какой-нибудь естественный пересчет формул

---

[1]) Автор изложил первоначальное доказательство первой теоремы Гёделя в такой форме, которая использует не ω-непротиворечивость Z_1, а лишь истинность формул, доказуемых в Z_1. Но эта истинность для ω-противоречивых систем может нарушаться и является поэтому допущением, не менее сильным, чем ω-непротиворечивость.

Следует еще указать, что Гёдель [11] рассматривал не Z_1, а систему P для теории типов. Автор снова не замечает того, что говорит о второй теореме о неполноте, доказанной Гёделем без помощи допущения об ω-непротиворечивости. — *Прим. перев.*

[2]) Россеровское усовершенствование состояло в употреблении в качестве предиката $B(n)$ свойства: «существует такой гёделев номер m доказательства формулы с номером n, что для отрицания этой формулы не существует доказательства с гёделевым номером $<m$». В случае непротиворечивости Z_1 этот предикат равносилен рассмотрениому в тексте $B(n)$, а потому столь же пригоден для доказательства первой теоремы Гёделя. — *Прим. перев.*

с одной свободной переменной. Тогда суждение $B_n(n)$ будет $f(n)$-м суждением, где $f(n)$ — некоторая простая п. р. функция. Наше допущение теперь принимает вид $A(f(n)) \leftrightarrow B_n(n)$. Далее, для некоторого n_0 суждение $\sim A(f(n))$ имеет вид $B_{n_0}(n)$. Итак, мы имеем $B_{n_0}(n) \swarrow \leftrightarrow \sim B_n(n)$. Теперь положим $n=n_0$ и получим $B_{n_0}(n_0) \swarrow \leftrightarrow \sim B_{n_0}(n_0)$, что является очевидным противоречием, и теорема доказана. Опять мы получили явное доказательство, которое для каждого $A(n)$ дает конкретное суждение, $\sim B_{n_0}(n_0)$, на котором срывается эта «функция истинности».

Можно также показать, что если бы понятие истины было формализуемо посредством некоторого свойства $A(n)$ указанного вида и соблюдение обычных свойств истинности было бы доказуемо в Z_1, то можно было бы доказать Consis Z_1 в Z_1. В самом деле, тогда было бы легко доказать, что все доказуемые суждения истинны и что какое-либо суждение и его отрицание не могут быть истинными одновременно. Мы предоставляем читателю в качестве упражнения доказать следующий факт: для каждого r существует такая формула $A(n)$ в Z_1, что если некоторым естественным образом занумеровать все суждения T_n из Z_1, *имеющие меньше чем r кванторов*, то $T_n \leftrightarrow A(n)$ будет истинно для всех n.

Наконец, мы сделаем несколько философских замечаний. Теоремы Гёделя разрушили надежды гильбертовской программы, что для высших систем может быть получено доказательство непротиворечивости, проведенное финитными методами [1]) и приемлемое для каждого.

[1]) Под финитными методами понимаются методы, не использующие никаких бесконечных объектов. Несмотря на то что различные авторы неоднократно пытались уточнять значение термина «финитный» (одна из наиболее широко известных попыток принадлежит Эрбану), некоторая неопределенность в понимании этого термина ощущается в литературе до сих пор. Этот вопрос связан, в частности, с тем, что понятие конечного зависит от модальностей (конечный процесс — это такой, который может или должен окончиться). Здесь автор, кроме того, молчаливо предполагает, что речь идет о таких финитных методах, которые могут быть выражены средствами рассматриваемых систем; см. по этому поводу сноску на стр. 15—16. — *Прим. перев.*

В самом деле, эта программа проваливается уже для Z_1. Тем не менее предпринимались исследования с целью получить доказательства непротиворечивости, использующие как можно меньше «высших» принципов. Пожалуй, самый интересный из этих результатов принадлежит Генцену. Его точка зрения состоит по существу в том, что можно вводить «высшие» принципы с помощью трансфинитной индукции до высших ординалов. Если положить по определению $\omega_0 = \omega$, $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$ и, наконец, $\varepsilon_0 = \lim_{n\to\infty} \omega_n$, то ε_0 будет счетным ординалом. Генцен дал доказательство Consis Z_1, определив некоторое полное упорядочение множества всех доказательств в Z_1 по порядковому типу ε_0 и затем доказав, что для всякого доказательства противоречия существует другое, ему предшествующее. Таким образом, если принять в качестве аксиомы индукцию до ε_0, то можно доказать Consis Z_1. (Верно также, что полное упорядочение натуральных чисел, соответствующее ε_0, может быть выражено некоторой формулой в Z_1. Генценовская работа показывает невозможность *доказать*, что для каждого свойства $P(n)$ в Z_1 существует наименьший по отношению к этому упорядочению ε_0 элемент, удовлетворяющий $P(n)$.) Кроме того, он доказал, что для всякого ординала, меньшего чем ε_0, можно доказать в Z_1 существование равносильного ему полного упорядочения (в некотором смысле [1])). Таким образом, если измерять силу системы ординалами, выразимыми в ней, то ε_0 есть в точности сила системы Z_1.

§ 10. Обобщенная теорема о неполноте

Как уже установлено, теорема о неполноте нанесла смертельный удар программе Гильберта. Однако остается возможность доказывать непротиворечивость различных систем при надлежащих расширениях нашего понятия доказательства. Действительно, разрешая употреб-

[1]) См. G. Gentzen; по-русски — мое добавление VI к русскому переводу [15] (поправка: на стр. 484, строка 24 сн., читать $l \prec_n k$ вместо $k \prec_n l$; в строке 16 сн. ниже читать $\leq_n$ вместо $\leq$). Это добавление представляет собой сжатое изложение сказанного по этому поводу во втором томе у Гильберта и Бернайса, Grundlagen der Mathematik). — *Прим. перев.*

лять системы, более сложные чем Z_1, можно доказать непротиворечивость Z_1. Однако если кто-нибудь хочет задать фиксированную систему Σ, в которой можно доказать непротиворечивость любой математической системы, то этого сделать нельзя. Точнее

Обобщенная теорема о неполноте. *Пусть Σ — формальная система, аксиомы которой заданы некоторым рекурсивным правилом. Если Σ непротиворечива, а все п. р. функции могут быть погружены в Σ, то* Consis Σ *нельзя доказать в Σ.*

Строго говоря, мы все еще не высказали точной математической теоремы, потому что не указали точно, что́ следует понимать под погружениями п. р. функций [1]). На практике нет никаких трудностей усмотреть, что эта теорема приложима ко всем обычным системам, которые были до сих пор рассмотрены. Доказательство этой теоремы состоит просто в проверке того, что никакие конкретные свойства Z_1, отличные от тех, которые упомянуты в рассматриваемой сейчас теореме, не были использованы в доказательстве первоначальной теоремы о неполноте [2]). (Фактически мы использовали тот факт, что доказанные суждения верны в области натуральных чисел. Как было замечено, тщательный анализ показы-

[1]) Кроме того, само понятие формальной системы было до сих пор лишь пояснено автором посредством ряда примеров. Общее определение может быть дано далеко не однозначным образом. Обычно считается, что формальная система задается описанием ее языка, аксиом и правил вывода (т. е. правил, позволяющих переходить от одних доказанных формул к другим). Теорема о неполноте (если отвлечься сейчас от некоторых ее обобщений) предполагает «рекурсивность» не только для аксиом, но и для правил вывода (и это условие нетрудно уточнить, пользуясь гёделевыми нумерациями). Системы с нерекурсивными правилами вывода, для которых нарушаются теоремы о неполноте, известны, но если такую систему взять в качестве Σ, то она сама будет нуждаться в обосновании в большей мере, чем ZF и другие системы, рассматриваемые автором. По-видимому, автор умалчивает о таких системах именно по этой причине. — *Прим. перев.*

[2]) Конкретный перечень аксиом Z_1 действительно не имел никакого значения, хотя от него и зависит формула Consis Z_1. Что касается условий рекурсивности, то Россер доказал достаточность того, чтобы множество гёделевых номеров теорем системы Σ было рекурсивно перечислимым (и установил также некоторые дальнейшие обобщения). См. [15, § 42]. — *Прим. перев.*

вает, что в этом месте достаточно было использовать ω-непротиворечивость, и даже простую непротиворечивость. Мы избегаем здесь обсуждения этих тонкостей, предлагая читателю довольствоваться тем фактом, что для того случая, когда все аксиомы системы Σ истинны в интуитивной модели, здесь действительно было проведено полное доказательство.) Требование о том, что аксиомы заданы рекурсивно, существенно, так как в противном случае можно было бы взять в качестве Σ множество всех истинных суждений системы Z_1.

Есть один важный вопрос, связанный с теоремой о неполноте и имеющий серьезные философские последствия. Именно, рассмотрим суждение Consis Z_1 или Consis Σ для таких высших систем, как теория множеств; это совсем простые суждения в Z_1, которые истинны и в то же время не доказуемы без помощи нашей интуиции, относящейся к высшим системам. Это означает, что Consis *ZF*, где *ZF* — та система аксиом для теории множеств, которую мы будем изучать в следующих главах, не может быть доказана с помощью рассуждений, относящихся лишь к бесконечным множествам типа $\aleph_1$, $\aleph_\omega$ и т. д., так как все эти множества могут быть описаны в *ZF*, а требуют для своего доказательства привлечения значительно более высоких бесконечностей (см. § 7 гл. II). Поэтому если исключить эти высшие бесконечности как не имеющие никакого действительного (true significance) значения для математики, то придется отказаться от всякой надежды разрешить некоторые важные теоретико-числовые суждения самого простого вида [1]). По нашему мнению, в этом состоит серьезная слабость позции интуиционистов, так как для суждений, которые они допускают в качестве осмысленных, нет никакой надежды на разрешение (being decided) в соответствии с их требованиями.

[1]) Автор пытается таким образом обосновать тезис о том, что непротиворечивость *ZF* должна быть принята на веру. Это широко распространенная точка зрения. Ср., однако, сноску на стр. 15—16. Непонятно также, почему автор считает столь слабой позицию людей, не доверяющих теоретико-множественной интуиции и из-за этого согласных признать неразрешимыми многие осмысленные проблемы. — *Прим. перев.*

§ 11. Дальнейшие результаты о рекурсивных функциях

Теория рекурсивных функций была весьма широко развита также и ради ее собственных целей. Отчасти это было вызвано общим интересом к вычислительным машинам, усилившимся за последнее время. Здесь мы коснемся лишь нескольких пунктов этой теории.

Определение. Мы будем говорить, что функция f *определена рекурсивно относительно* g, если существует такое конечное множество уравнений E, содержащее функциональные символы f и g (и, возможно, также другие функциональные символы), что если присоединить к нему бесконечную таблицу значений $g: g(0)=n_0$, $g(1)=n_1$, $g(2)=n_2$, ..., то каждое значение f будет однозначно выводимым [1]).

С интуитивной точки зрения это означает, что f может быть вычислена посредством некоторого рекурсивного процесса, в котором в любой момент может возникнуть пауза, вызванная потребностью в получении значения g для данного числа n. Мы уже показали существование такой п. р. функции F, что если χ — характеристическая функция ее области, а f_r — рекурсивная функция, определяемая r-м множеством уравнений (поскольку такая функция существует [2]), то $\chi(r+1)=0$, за исключением тех случаев, когда $f_r(r+1)=0$, а в этих случаях всегда $\chi(r+1)=1$. Теперь мы покажем, что эта нерекурсивная функция χ является фактически «максимальной» нерекурсивной функцией.

Теорема. *Пусть g — рекурсивная функция, χ_g — характеристическая функция ее области значений. Тогда χ_g может быть определена рекурсивно относительно χ.*

Доказательство. Для любого данного n мы покажем, как найти $\chi_g(n)$. Рассмотрим множество уравнений, соответствующее *попытке* вычисления следующей

---

[1]) То есть для каждого натурального числа r будет существовать ровно одно m_r такое, что выводимо $f(r)=m_r$. — *Прим. перев.*

[2]) Если r-е множество уравнений не определяет никакой функции, то равенства $f_r(a)=b$ все же рассматриваются в соответствии с первой теоремой из § 8 (см. ее доказательство на стр. 63—64). — *Прим. перев.*

функции H. Занумеруем область g в поисках n. Если нам встретится n, положим $H(k)=0$ для каждого k, а в противном случае пусть H является неопределенной функцией. Тогда H либо является константой, либо неопределенной функцией [1]). Так как наше определение H является конечным и явным [2]), зависящим только от n, должна существовать такая п. р. функция $r(n)$, что H определена r-м множеством уравнений, где $r=r(n)$. (Конечно, это требует тривиальной, но скучной проверки.) Теперь $\chi_g(n)=1 \leftrightarrow 0 \in$ область значений $f_r \leftrightarrow f_r(r+1) \swarrow = 0 \leftrightarrow \chi(r+1)=1$. Следовательно, мы имеем $\chi_g(n) \swarrow = \chi(r(n)+1)$ и χ_g рекурсивна относительно χ.

В течение долгого времени оставался открытым вопрос о том, существуют ли неразрешимые проблемы, не

---

[1]) Под константой автор понимает всюду определенную функцию, являющуюся константой; ясно, что H может быть либо константой 0, либо нигде не определенной функцией. В следующем утверждении автор пользуется тем, что существует как множество уравнений, определяющее константу 0 (оно может состоять из одного-единственного уравнения $r(x)=0$), так и множество уравнений, определяющее нигде не определенную функцию (например, $r(x)=0$, $r(x)=1$); в каждом из этих случаев автор обозначает через r номер этого множества уравнений, рассматривая r также как функцию $r(n)$ от n. — *Прим. перев.*

[2]) Точнее это относится к определению задающей H системы уравнений. Способ определения функции $H(n)$ может состоять в последовательном просмотре значений $g(0)$, $g(1)$, ... — коль скоро среди этих значений встретится n, $H(k)\equiv 0$, и функция $H(k)$ определена только в этом случае. Область определения этой функции рекурсивно перечислима, а потому сама эта функция частично рекурсивна, т. е. задается некоторой системой уравнений; r обозначает номер этой системы. Как и сама функция $H(k)$ это r зависит от n. Утверждение автора состоит в том, что функция $r(n)\,(=r)$ — п. р., но фактически в этом доказательстве используется только общая рекурсивность этой функции, т. е. возможность вычислить r при любом n. Эта возможность вытекает из наличия конечного и явного (зависящего от n) задания функции n. (Например, это задание может состоять в последовательных вычислениях значений $g(0)$, $g(1)$, ..., сравниваемых по мере их возникновения с n, коль скоро это сравнение приводит к $g(m)\neq n$, совершается переход к $g(m+1)$, а коль скоро $g(m)=n$, $H(k)$ задается как $g(m)-g(m)$. Это задание можно перевести на язык уравнений, определяющих $H(k)$ и тогда оно окажется конечным и явным, а номер этой системы уравнений будет, при данной нумерации, вычислимой функцией от n.) — *Прим. перев.*

обладающие максимальной неразрешимостью. Эта проблема, известная под названием «проблемы Поста», была решена одновременно Фридбергом и Мучником в 1956 г. Эти доказательства содержат более сложную диагональную процедуру, чем та, которая была использована при определении F. Дальнейшие исследования привели к весьма совершенному анализу степеней неразрешимости. Тем не менее и до сих пор никакая «естественная» проблема (типа десятой проблемы Гильберта) не привела к немаксимальным степеням неразрешимости.

Были изучены многие естественные классы проблем, для которых была доказана их неразрешимость. Одна из них — это проблема тождества слов для групп. Здесь нам дано конечное число «слов», которые полагаются равными 1 посредством равенств $a^{n_1} \ldots a^{n_k} = 1$, где n_i — целые числа, а a_i рассматриваются как принадлежащие некоторой группе. Если дано какое-нибудь другое слово W, содержащее те же символы, проблема состоит в распознавании того, должно ли W равняться 1 вследствие данных уравнений[1]). В другой формулировке, если W_i — данные слова, их можно рассматривать как принадлежащие свободной группе G, порожденной символами a_i. Наша проблема состоит тогда в распознавании того, можно ли получить W из W_i посредством умножения, образования обратных слов и сокращения[2]). Неразрешимость этой проблемы была показана даже для случая, когда в словах употребляются только две данные буквы. Для десятой проблемы Гильберта, состоящей в распознавании того, имеет ли решение данное диофантово уравнение, неразрешимость до сих пор еще не доказана. Если же допустить в этих уравнениях переменные показатели, то неразрешимость этой проблемы доказана.

[1]) Здесь автор допускает неточность. Эта проблема состояла в распознавании указанного обстоятельства для любого слова W, составленного из указанных символов. (Таким образом, проблема не зависела от W; она была решена П. С. Новиковым в его работе «Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп». Труды Института им. В. А. Стеклова, 44 (1955), 1—44.) — *Прим. перев.*

Читателя может удивить, почему мы пользуемся столь узким истолкованием понятия «проблемы», что оно обозначает только отыскание характеристической функции области значений какой-либо п. р. функции. Суждение $A \equiv \forall k(\sim f(k) = n)$ для какой-либо п. р. f может быть проверено для каждого k, и потому A представляет простейший тип суждения, которое не может быть разрешено (decided) непосредственно. Но может существовать некоторая разумная надежда на то, что достаточно изобретательное устройство сможет механически решить (decide) A. И притом многие естественные проблемы имеют этот вид.

Хотя мы уже отметили это обстоятельство, но следует, пожалуй, еще раз подчеркнуть, что суждения типа «гипотеза Римана может оказаться формально неразрешимой (undecidable)» могут иметь смысл только по отношению к конкретным системам аксиом и не может иметь того абсолютного характера, который присущ нашим результатам об алгорифмически неразрешимых (unsolvable) проблемах. Позже в этом курсе мы докажем формальную неразрешимость континуум-гипотезы по отношению к теории множеств Цермело — Френкеля, и в этом случае будут иметься хорошие основания к мнению о том, что эта гипотеза остается формально неразрешимой и по отношению к любой «естественной» системе аксиом.

Закончим параграф теоремой, доказанной Тенненбаумом, которая также утверждает несуществование никакой общерекурсивной функции некоторого определенного типа.

Теорема. *Пусть* $f_1(x, y)$ *и* $f_2(x, y)$ *— такие две функции натуральных чисел, что все аксиомы системы* Z_1 *имеют место, если определить* $x+y$ *как* $f_1(x, y)$, *а* $x \cdot y$ *— как* $f_2(x, y)$. *Тогда или возникающая*[1]) *модель для* Z_1 *изоморфна натуральным числам с обычными*

[1]) Здесь, как и в доказательстве этой теоремы, автор говорит о модели, получаемой из естественной модели для Z_1 (см. стр. 36) только что указанным истолкованием функций $+$ и $\cdot$. (В подлиннике слово «model» употреблено всюду с артиклем «the».) Слово «функция» обозначает здесь только всюду определенные функции. — *Прим. перев.*

операциями $+$ *и* $\cdot$, *или одна из этих двух функций* f_1 *и* f_2 *не является общерекурсивной.*

Доказательство. Пусть M — модель, определяемая функциями f_1 и f_2. Допустим, что эти функции рекурсивны. Если M не изоморфна обычной модели, пусть $a_n = f_1(a_{n-1}, b)$, где b — число «1» в M. Таким образом, a_n — это «стандартные» числа [1]). Так как M не стандартна [2]), некоторое c должно быть больше всех a_n [3]), т. е. для каждого n существует такое x, что $c = f_1(x, a_n)$. Мы уже знаем, что можно явно определить нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество S в Z_1; возьмем любое такое S. Если его определение провести в M, то оно даст некоторое множество $S' \subseteq M$. Пусть p_n — n-е простое число в модели M. В силу китайской теоремы об остатках [4]), которая должна иметь место в M, существует в M такое y, что $y \equiv 0$ или $1 \pmod{p_n}$ для всех $n < c$, в соответствии с тем имеет место $n \in S'$ или $\sim n \in S'$. Для любого «стандартного» натурального числа n мы покажем теперь способ рекурсивного распознавания того, имеет ли место $n \in S'$ или $\sim n \in S'$. Именно, прежде всего мы сперва определим p_n в M. Далее, мы будем последовательно испытывать все числа в M и смотреть, имеет ли место $p_n \cdot z = y$ или $p_n \cdot z = y - 1$. В первом случае $n \in S'$, а во втором — $\sim n \in S'$. Так как f_1 и f_2 — рекурсивны, эта процедура тоже рекурсивна. Однако мы еще не получили противоречия, потому что если N обозначает «стандартные» числа, то мы не можем утверждать, что $N \cap S' = S$. Заметим, что если S определена как область значений некоторой конкретной п. р. функции f, то мы всегда имеем $N \cap S' \supseteq S$, потому

---

[1]) Следовало бы добавить, что a_0 есть «0» в M. — *Прим. перев.*

[2]) Автор нигде не дает определения того, что́ он понимает под «стаидартной моделью». Здесь этот термин, по-видимому, обозначает модель для Z_1, изоморфную естественной. — *Прим. перев.*

[3]) Это следует из того, что в Z_1 доказуема сравнимость любых иатуральных чисел, а всякое число, меньшее в модели, чем некоторое a_n, также имеет вид a_k. Далее автор пользуется тем, что в Z_1 доказуемо $y < z \leftrightarrow \exists u\,(z = u + y)$ (правую часть можно даже считать определением левой, см. [15]). — *Прим. перев.*

[4]) См. сноску на стр. 53. — *Прим. перев.*

что, если $n \in S$, $\exists\, m \in N$, такое, что $f(m) = n$ и это равенство должно иметь место также и в M. Мы покажем в следующей лемме, что можно определить также *два* рекурсивно перечислимых множества S и T, что в Z_1 доказуемо как $S \cap T = \emptyset$, так и то, что ни для какого рекурсивного множества U не имеет место одновременно $S \subseteq U$ и $U \cap T = \emptyset$. Ввиду того что $S \cap T = \emptyset$ доказуемо в Z_1, $S' \cap T' = \emptyset$. Но мы только что доказали, что $S' \cap N = U$ рекурсивно и ввиду $T' \supseteq T$ мы имеем $S \subseteq U$, $U \cap T = \emptyset$, что завершает доказательство.

Лемма. *Существуют такие два явно определенные рекурсивно перечислимые множества S и T, $S \cap T = \emptyset$, что если U — рекурсивно, то не имеют место одновременно оба соотношения $S \subseteq U$ и $U \cap T = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть φ_n перечисляет все машины Тьюринга. Мы следующим образом определяем п. р. функции f и g. Будем рассматривать последовательно все возможные вычисления значения $\varphi_n(n+2)$ для всех n. Если на n-м шаге [1]) это вычисление не закончено или $\varphi_n(n+2)$ не равно ни 0, ни 1, положим $f(n) = 0$, $g(n) = 1$. Если $\varphi_n(n+2) = 0$, положим $f(n) = n+2$, $g(n) = 1$. Если $\varphi_n(n+2) = 1$, положим $f(n) = 0$, $g(n) = n+2$ [2]). Пусть S обозначает область значений f, а T — область g, тогда очевидно, что $S \cap T = \emptyset$. Если φ_n вычисляет некоторую функцию [3]) и $U_n = \{x \mid \varphi_n(x) = 1\}$, то или $n+2 \in S$ и $\sim n+2 \in U_n$, или $n+2 \in U_n$ и $n+2 \in T$, так что U_n не может нарушить эту лемму. Ввиду того что U_n пробегает все рекурсивные множества, лемма доказана.

---

[1]) Имеется в виду какая-нибудь фиксированная нумерация всех шагов этих вычислений при всевозможных n (получаемая хотя бы с помощью диагонального пересчета для тех $\varphi_n(n+2)$, процедура вычисления которых оказывается бесконечной). — *Прим. перев.*

[2]) По-видимому, в двух последних случаях автор подразумевает, кроме высказываемого им явно условия, еще и то, что вычисление $\varphi_n(n+2)$ заканчивается не позднее чем на n-м шаге. — *Прим. перев.*

[3]) То есть если существует всюду определенная фуикция, вычисляемая машиной φ_n. — *Прим. перев.*

С другой стороны, из теоремы о полноте вытекает существование нестандартных моделей. Например, если к аксиомам присоединить суждения $c>1$, $c>2$, ..., то получится непротиворечивая система. Доказательство теоремы о полноте дает тогда такую модель, элементы которой являются натуральными числами, а $+$ и $\cdot$ задаются арифметически определимыми функциями, ибо это доказательство использует только арифметические идеи. Однако в силу предыдущей теоремы эти функции не могут быть рекурсивными одновременно.

Посредством аналогичного рассуждения с помощью теоремы Тарского о неопределимости понятия истины, но без помощи предыдущей леммы легко доказывается следующая

Теорема. *Не существует никакой нестандартной модели* M *для натуральных чисел, в которой* $+$ *и* $\cdot$ *задаются функциями, определимыми в* Z_1, *и притом имеют место все истинные суждения системы* Z_1.

II

Глава

Теория множеств Цермело—Френкеля

§ 1. Аксиомы

В гл. I мы рассматривали формальные системы для элементарной теории чисел. Конечно, теория чисел — это только небольшая часть известной ныне математики, и возникает вопрос — как аксиоматизировать всю общепринятую математику. Основная идея, используемая при переходе к высшим системам математики, состоит в том, чтобы *множества* уже ранее введенных в рассмотрение объектов рассматривать как единые предметы, входящие в область рассуждений. Иногда понятие множества встречается в форме последовательностей, или функций, — но это только несущественные видоизменения. Так, действительное число — это последовательность рациональных чисел, действительная (real-valued) функция — это множество упорядоченных пар действительных чисел [1]), L^p-пространство — это множество функций и т. д. Анализируя математические рассуждения, логики убедились в том, что понятие «множества» является самым фундаментальным в математике. Это не означало умаления фундаментального характера натуральных чисел. Действительно, весьма разумная позиция может состоять в принятии натуральных чисел в качестве первоначальных сущностей (primitive entities) с последующим употреблением множеств для образования высших сущностей. Однако можно показать, что даже понятие натурального числа можно вывести из абстрактного понятия множества [2]), и мы принимаем именно

---

[1]) Очевидно, речь идет об одноместных функциях. — *Прим. перев.*

[2]) Следует иметь в виду, что этот подход, будучи применен в теории множеств, не распространяется тем самым на ее метатеорию, в которой понятие натурального числа играет роль в образовании

этот подход. Таким образом, в нашей системе все предметы (objects) будут множествами. Мы не постулируем существования никаких более примитивных объектов. Чтобы интуитивно следить за нами, читателю следует представлять себе наш мир (universe) как состоящий из всех множеств, которые могут быть получены путем последовательных процессов собирания [1]), начиная с пустого множества. Таким образом, наша система приобретает сходство с системой Z_2 гл. I, с той оговоркой, что мы теперь допускаем образование бесконечных множеств. Натуральные числа будут определены почти так же, как в Z_2.

Первая система аксиом для общей теории множеств была предложена Е. Цермело в 1908 г. [2]) Впоследствии

формул, доказательств и т. п., не будучи при этом рассматриваемо в виде миожества. В случае формализации метатеории это же явление обнаружится на следующем метатеоретическом уровне и т. д. — *Прим. перев.*

[1]) Это не поддающееся обоснованию упрощение теоретико-множественной интуиции. Основная трудность при обосновании теорни множеств состоит как раз в том, что многие множества не могут быть образованы как совокупности ранее рассмотренных объектов без того, чтобы в самом процессе образования этой совокупности не приняла участие она же сама. Лишь при условии, что процессы собирания включают в себя такие «непредикатнвные» образовании совокупиостей, можно согласиться с такой трактовкой теоретико-множественной интуиции. — *Прим. перев.*

[2]) После появления упомянутой работы Цермело [28] проблема построения аксиоматической теории множеств еще оставалась открытой, так как аксиоматизация исчисления предикатов к тому времени еще не была достигнута. (Хотя важнейшие шаги в этом направлении были совершены в монографии Рассела и Уайтхеда «Principia Mathematica», 1913, а также школой Гильберта, эта работа была завершена только в первом томе книги Гильберта и Бернайса «Grundlagen der Mathematik», Berlin, Springer, 1934.) Цермело был еще вынужден говорнть о «дефинитных свойствах», как о чем-то несколько расплывчатом, имея в внду фактически просто свойства, выразимые в формальном языке теории множеств. Точнаи форма этого языка тогда еще не была известна — например, понятие упорядоченной пары было сведено к простой паре и тем самым к отношению $\in$ Куратовским только в 1921 г. Но когда формализация языка теории множеств была закончена, оказалось, что система Цермело почти полностью удовлетворяет потребностям математики. А Френкель в начале 20-х годов добавил к этой системе лишь аксиому подстановки. — *Прим. перев.*

она была расширена А. Френкелем, и теперь она обычно называется теорией множеств Цермело — Френкеля [1]) (***ZF***). Это, пожалуй, наиболее естественный вариант теории множеств, и мы будем иметь дело главным образом именно с ним. Как и в $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$, одна из наших аксиом будет схемой аксиом, состоящей из бесконечно многих аксиом. Другая система аксиом, состоящая только из конечного числа аксиом, но менее естественная, была построена фон Нейманом, Бернайсом и Гёделем, и обычно она называется теорией множеств Гёделя — Бернайса (***GB***). Эта система будет рассмотрена позднее. Теперь мы сформулируем, с некоторыми комментариями, аксиомы для теории множеств ***ZF***.

1. Аксиома экстенсиональности

$$\forall x, y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

Она утверждает, как и в $\mathbf{Z}_2$, что всякое множество определяется своими элементами.

Определение. $x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$. $x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \,\&\, \sim x = y$. Словами $x \subseteq y$ означает, что x *содержится в* y.

2. Аксиома нулевого множества.

$$\exists x \forall y\,(\sim y \in x).$$

Множество, определяемое этой аксиомой, — это *пустое* или *нулевое* множество, которое мы будем обозначать посредством $\emptyset$ [2]).

---

[1]) Или системой (аксиом) Цермело — Френкеля; аналогично «теория множеств Гёделя — Бернайса» (см. ниже) называется в литературе также системой Гёделя — Бернайса. — *Прим. перев.*

[2]) Эта аксиома следует из аксиомы выделения $6'_n$ (см. ниже, стр. 98), если выбрать в ней $\sim z = z$ (или любую формулу вида $C(z) \,\&\, \sim C(z)$) в качестве $A_n(z, t_1, \ldots, t_k)$. Автор, однако, включает эту аксиому в список аксиом, ибо она нужна как раз для вывода $6'_n$ из его аксиом. Другие авторы обычно предпочитают формулировать 6_n таким образом, что существование пустого множества оказывается следствием этой схемы. — *Прим. перев.*

3. Аксиома неупорядоченных пар

$$\forall x, y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y).$$

Мы обозначаем это множество z через $\{x, y\}$. Кроме того, $\{x\}$ будет обозначать $\{x, x\}$, и мы положим $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Множество $\langle x, y\rangle$ называется «упорядоченной парой» x и y, и легко доказывается, что $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ влечет $x=u$ и $y=v$ [1]). Специальный вид [2]) определения $\langle x, y\rangle$ не играет никакой роли. Оно является просто удобным способом сведения идеи упорядоченной пары к неупорядоченным парам [3]).

Определение. *Функция* — это такое множество f упорядоченных пар, что $\{\langle x, y\rangle$ и $\langle x, z\rangle$ входят в $f\} \rightarrow y=z$. Множество всех таких x, что $\langle x, y\rangle \in f$, называется *областью определения* f. Множество всех y называется *областью (значений)*. Мы будем говорить, что f отображает в множество u, если область значений содержится в u.

4. Аксиома суммы или объединения

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (z \in t \,\&\, t \in x)).$$

---

[1]) Именно, рассматриваются случаи $x=y$ и $\sim x=y$. При $x=y$ каждый элемент $\langle u, v\rangle$, т. е. $\{u\}$ и $\{u, v\}$, совпадает с $\{x\}$, откуда $x=u=v$. При $\sim x=y$ $\{x\}$ является элементом $\langle u, v\rangle$, т. е. одним из множеств $\{u\}$, $\{u, v\}$, но случай $\{x\}=\{u, v\}$ исключен, так как это равенство влечет $u=v=x$, откуда $\{u\}=\{u, v\}$ и $\{x, y\}=\{u\}=\{u, v\}$, $x=y=u$; следовательно, $\{x\}=\{u\}$ и $x=u$; кроме того, в этом случае $\{x, y\}$ совпадает с $\{u\}$ или с $\{u, v\}$, но $\{x, y\}=\{u\}$ влечет $x=y=u$, поэтому $\{x, y\}=\{u, v\}$, $y=u \vee y=v$, но в силу $\sim x=y$ и $x=y$ случай $y=u$ исключен и остается $y=v$. Полезно обратить внимание на то, что это доказательство использует только аксиомы исчисления предикатов (с равенством). — *Прим. перев.*

[2]) Точнее, все в этом определении, кроме только что доказанного свойства (см. предыдущую сноску). — *Прим. перев.*

[3]) Эта аксиома, как доказал Ян Мыцельский, зависит от остальных. Именно — упомянутый в сноске 2 на стр. 89 вывод аксиомы выделения от *нее не зависит*. Теперь аксиома степени (см. ниже), будучи применена к пустому множеству и затем повторно к полученному, дает существование множества, содержащего два элемента a и b, различных в силу того, что один из них пуст, а другой — нет. Аксиома выделения дает пару a, b. Теперь для любых x, y пара $\{x, y\}$ может быть получена с помощью аксиомы подстановки, в которой $k=0$, $x=\{a, b\}$, а $A_n(u, v)$ есть формула $(v = x \,\&\, u = a \vee v = y \,\&\, u = b) \,\&\, (u = a \vee u = b) \vee (v = x \,\&\sim (u = a \vee u = b))$. — *Прим. перев.*

Она утверждает, что y является объединением всех множеств из x [1]). В частности, пользуясь аксиомой 3, можно теперь вывести, что для любых данных x и y существует такое z, что $z=x\cup y$, т. е. $t\in z\leftrightarrow t\in x\vee t\in y$.

Для мотивировки следующей аксиомы заметим, что, как в $\boldsymbol{Z}_2$, если x — натуральное число, то следующее за ним число будет определено как $x\cup\{x\}$. Поэтому следующая аксиома гарантирует существование множества, которое содержит [2]) все натуральные числа и, следовательно, бесконечно.

5. Аксиома бесконечности

$$\exists x(\emptyset\in x\&\forall y(y\in x\rightarrow y\cup\{y\}\in x)).$$

В $\boldsymbol{ZF}$, после того как натуральные числа будут определены, принцип индукции будет выражаться одним-единственным высказыванием (sentence), а именно о том, что каждое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент. Однако это еще не означает, что удается избежать необходимости в употреблении бесконечной схемы аксиом, каковая имелась в $\boldsymbol{Z}_2$. Действительно, удается только перенести это бремя на ту аксиому, которая будет обеспечивать существование тех множеств, к которым применяется принцип индукции. Эта аксиома является, пожалуй, наиболее характерной в $\boldsymbol{ZF}$. В самой наивной своей форме она утверждала бы, что каждое свойство определяет некоторое множество. Но в такой общности она приводит нас к противоречию (например, давая множество всех таких x,

---

[1]) Конечно, эта аксиома утверждает больше этого, а именно существование y. Также и о (пустом) x аксиомы 2 можно сказать больше того, что x определяется этой аксиомой. Впрочем, автор и не говорит, что содержание этих аксиом сводится к его словесным пояснениям. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике — «contains». Таким образом, это слово может обозначать у автора и принадлежность, и включенне $x\subseteq y$. Во избежание путаницы там, где нужна особая точность, я буду в переводе обозначать $x\in y$ словами «x входит в y» (или «x является элементом y»), а $x\subseteq y$ — словами «x содержится в y» (но «y содержит x» может употребляться в обоих смыслах). — *Прим. перев.*

что $\sim x \in x$ [1])). В математике мы определяем множества свойствами, но интуиция подсказывает нам, что следует избегать некоторых свойств, которые могут привести к «абсурдным» множествам. Можно ограничивать тип допустимых свойств и получать системы аксиом различной силы. Мы выскажем эту аксиому в некоторой чрезвычайно сильной форме, выходящей за пределы всех ее применений в обыкновенной математике. Однако она сформулирована настолько тщательно, что (как принято предполагать!) не приводит ни к какому противоречию. Чтобы ее сформулировать, мы сперва занумеруем счетную совокупность всех формул нашей системы, содержащих по крайней мере две свободные переменные, представляя эту совокупность в виде последовательности $A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$, где k зависит от n.

6_n. Аксиома подстановки [2])

$$\forall t_1, \ldots, t_k (\forall x \exists! y A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k) \to \forall u \exists v B(u, v)),$$

где $B(u, v) \equiv \forall r (r \in v \leftrightarrow \exists s (s \in u \& A_n(s, r; t_1, \ldots, t_k)))$ и формула $B(u, v)$ не содержит свободных вхождений переменной y.

---

[1]) Именно, это множество R дает широко известный парадокс Рассела: из $\forall x (x \in R \leftrightarrow \sim x \in x)$, т. е. из определения R, сразу получается (подстановкой R вместо x) $R \in R \leftrightarrow \sim R \in R$; теперь $R \in R \to \sim R \in R$ дает $\sim R \in R$, а это дает $R \in R$. Пожалуй, и сейчас будет полезно подчеркнуть, что это противоречие получается без помощи закона исключенного третьего. — *Прим. перев.*

[2]) Многие авторы (в том числе Бернайс и Гёдель в рассматриваемых ими системах) вместо $\exists! y A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$ употребляют здесь более слабые выражения: $\forall u, v (A_n(x, u; t_1, \ldots, t_k) \& A_n(x, v, t_1, \ldots, t_k) \to u = v)$, т. е. вместо «существования и единственности» говорят только о единственности y. (В подлиннике Axiom of replacement — «аксиома замены», тогда как термин «аксиома подстановки» — Axiom of substitution — употребляется обычно для обозначения этой аксиомы со свойством лишь единственности y.) Это приводит к более сильной формулировке 6_n (при ослаблении A импликация $A \to B$ может только усилиться). Противоречивое $A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$, например, $x = x \& \sim y = y$ удовлетворяет этому условию единственности, и множество v в этом случае должно быть пустым, так что при этом усилении аксиомы 6_n от аксиомы 2 можно отказаться. Обратно, усиленная 6_n вытекает из аксиом 6_n и 2 (достаточно, в том случае, когда $\varphi(x)$ (см. ниже) на u принимает хоть одно значение z, но определена не всюду, доопределить ее этим z там, где она прежде не была определена). — *Прим. перев.*

Другими словами, эта аксиома утверждает, что если при фиксированных $t_1, \ldots, t_k$ $A_n(x, y; t_i)$ определяет y однозначно как функцию от x, например $y=\varphi(x)$, то для каждого u область (range) φ на u — множество. Интуитивный довод, в силу которого 6_n не приводит к противоречию, состоит, вероятно, в том, что v избавлено от опасности оказаться абсурдным множеством благодаря тому обстоятельству, что мощность v (в том виде, как она будет определена позднее) не превосходит мощности u [1]). Но свойство A_n, определяющее функцию φ, может иметь чрезвычайно неконструктивный характер, так что для проверки равенства $y=\varphi(x)$ может потребоваться ответ на вопрос, касающийся всех множеств. Таким образом, аксиома 6_n достаточна для весьма неконструктивных определений. Мы впоследствии рассмотрим менее сильный вариант для 6_n, все же достаточный для большинства целей. Следует еще заметить, что t_i попросту играют роль параметров в определении функции φ.

7. Аксиома степени

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Эта аксиома утверждает, что для каждого x существует множество y всех подмножеств этого x. Хотя таким образом y определено некоторым свойством, его существование не охватывается аксиомой подстановки, потому что y не дано в виде области какой-либо функции. На самом деле мощность y окажется большей, чем мощность x, так что эта аксиома дает нам возможность строить более высокие мощности. Позже мы приведем строгое доказательство того, что аксиома 7 не может быть выведена из остальных аксиом.

---

[1]) Сомнительно, чтобы дело обстояло так просто. Нет никакой видимой связи между мощностями и непротиворечивостью. Система, состоящая из одной аксиомы $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \sim x \in x)$, противоречива (см. сноску 1 к стр. 92), однако для нее неизвестно никакого доказательства существования множеств большой мощности (или хотя бы просто различных мощностей), не использующего парадокса Рассела. Интуиция, о которой говорит автор, не исключает возможности того, что *ZF* противоречива, и только незнание парадоксов дает нам возможность думать, что v не имеет хоть одной мощности, превосходящей мощность u. — *Прим. перев.*

8. Аксиома выбора

Если $\alpha \to A_\alpha \neq \emptyset$ — функция, определенная для всех $\alpha \in x$, то существует другая функция $f(\alpha)$, определенная для всех $\alpha \in x$ так, что $f(\alpha) \in A_\alpha$ [1]).

Это хорошо известная аксиома выбора, которая позволяет нам совершать бесконечное количество «выборов», хотя бы не имелось никакого свойства, определяющего функцию выбора и тем самым дающего нам возможность применить 6_n вместо этой аксиомы [2]). Хорошо известно, что эта аксиома оказалась чрезвычайно полезной в современной математике, хотя ее важность не сразу была осознана [3]).

---

[1]) Эту словесную формулировку нетрудно было бы выразить формулой (в которой не за чем отображать слово «другая»). Для этого достаточно воспользоваться уже данными автором определениями для функции и ее области определения. — *Прим. перев.*

[2]) Следовало бы подчеркнуть, что аксиома выбора «позволяет» не только совершать эти выборы, но и объединять все выбираемые элементы в одно множество. Что же касается функции выбора самой по себе, то для нее эта аксиома дает возможность представления в виде множества упорядоченных пар, так что область значений этой функции будет только что указанным множеством. — *Прим. перев.*

[3]) На первоначальной стадии развития теории множеств, в «канторовский» период, формализация этой теории еще не была доведена до такого состояния, при котором употребления этой аксиомы становятся легко заметными. Поэтому сам Кантор о ней не говорил. Но на нее обратил внимание в 1902 г. Беппо Леви, указав, что она используется в доказательстве того, что однозначный образ множества x всегда имеет мощность, меньшую или равную, чем x (или равнозначного предложения о том, что разбиение x на попарно непересекающиеся непустые подмножества имеет мощность, меньшую или равную, чем x). После того как Цермело использовал эту аксиому в доказательстве своей знаменитой теоремы о полном упорядочении, эту аксиому стали часто называть аксиомой Цермело (что не вполне справедливо, так как Цермело мог претендовать на открытие скорее всех остальных аксиом своей системы, чем аксиомы выбора). Длительные споры о законности именно этой аксиомы были вызваны тем, что все остальные аксиомы существования множеств являются аксиомами свертывания (см. сноску 1 на стр. 160); относящиеся к ней открытия Гёделя, Мостовского и Коэна привели к ясности в этом вопросе, по крайней мере для систем типа ***ZF*** или ***GB***. Впрочем, многие конструкции и эвристические или методологические соображения, высказанные в ходе этих споров, не утрачивают своего значения и до сих пор. — *Прим. перев.*

9. Аксиома регулярности[1].

$$\forall x \exists y (x = \emptyset \vee (y \in x \,\&\, \forall z (z \in x \to \sim z \in y))).$$

Эта аксиома является несколько искусственной, и мы включаем ее только по техническим причинам[2]. Она никогда не использовалась в обыкновенной математике. Она утверждает, что каждое непустое множество x содержит элемент, минимальный по отношению к $\in$ (*не* $\subseteq$). С интуитивной точки зрения мы желаем, чтобы все наши множества «строились» из $\emptyset$, и поэтому мы хотим избавиться от бесконечных цепей, убывающих по отношению к $\in$ [3]); пожалуй, все убывающие цепи должны оканчиваться на $\emptyset$ [4]). В обыкновенной матема-

---

[1]) Эта аксиома была введена фон Нейманом в 1925 г. Ее чаще называют *аксиомой фундирования*. Следует заметить, впрочем, что фон Нейман — как впоследствии Бернайс и Гёдель — пользовался внешне более широкой аксиомой, которая в системе **ZF** представляется лишь в виде схемы. Доказательство того, что эту схему (в которой множество x замеиено произвольным свойством φ) можно заменить, не ослабляя системы, аксиомой 9, было дано автором этих строк (см. сборник «Применение логики к науке и технике», М., 1960, стр. 94—95, или сноску 1 на стр. 145 в этой книге). — *Прим. перев.*

[2]) Этот технический характер не умаляет, однако, принципиального значения теоремы Шепердсона из § 1 гл. III, доказанной только для **ZF** с аксиомой 9, а также крупного открытия самого Коэна, состоящего в независимости аксиомы выбора для **ZF** с аксиомой 9 (тогда как для **ZF** без аксиомы 9 эта независимость была легко доказана Мендельсоном (The independence of a weak axiom of choice, *J. S. L.*, 21 (1956), 350—366 и несколько раньше автором этих строк в *ДАН*, **96**, № 1 (1954), 9—12, сиоска на стр. 9. — *Прим. перев.*

[3]) Следует заметить, что при нарушении аксиомы регулярности такие убывающие цепи (descending chains) строятся лишь с помощью аксиомы выбора. — *Прим. перев.*

[4]) Или если система имеет «индивидуумы» или атомы (см. начало § 2), т. е. предметы, не являющиеся множествами (что вполне допустимо в «обыкновенной» математике, где часто речь идет о множествах элементов произвольной природы), как раз на какой-нибудь атом, зависящий от цепи. При наличии атомов и в аксиоме 9 $x = \emptyset$ следует замеиить на «$x = \emptyset$ или x — атом», тогда как в других аксиомах изменения сведутся к тому, что, коль скоро переменная u не встречается (после устранения сокращений $\subseteq$ и т. п.) справа от $\in$, эта переменная обозначает множество или атом.

Вопросы наличия бесконечного множества атомов или нарушения аксиомы 9 тесно связаны, и для систем с бесконечным множеством атомов (хотя бы и с аксиомой 9) независимость аксиомы

тике мы имеем дело только с натуральными числами, действительными числами, функциями и т. д., а эти объекты явным образом строятся из $\emptyset$. Эта аксиома очевидным образом исключает, например, $x \in x$, так как в противном случае $\{x\}$ не имело бы минимального элемента [1]). Условие, налагаемое аксиомой 9 на $\in$, сходно с понятием полной упорядоченности (well-ordering), но, конечно, $\in$ не упорядочивает все множества, так как мы можем иметь $x \neq y$, $\sim x \in y$ и $\sim y \in x$. Иногда говорят, что $\in$ является отношением «полной фундированности» («well-founding»), или что все множества «вполне фундированы» («are well-founded») [2]).

Этим наши аксиомы исчерпаны. Полностью ограничиваться формальной системой *ZF* будет означать: употреблять только логические символы и $\in$ [3]). Конечно, это крайне непрактично и мы уже пользовались сокращениями. Важно подчеркнуть, что начиная с этого момента построение теории множеств будет предполагаться происходящим полностью в *ZF*, за исключением тех случаев, когда мы будем рассматривать саму систему *ZF*, а в этих случаях мы иногда будем употреблять еще более сильные принципы. Как правило, мы в таких случаях будем явно упоминать эти высшие принципы. Читателю, даже при первом чтении, надлежит разумным образом убедиться в том, что этими аксиомами легко охватывается вся традиционная математика [4]).

выбора была доказана А. Мостовским в 1939 г., а Френкелем, по существу, — еще не позднее 1922 г. — *Прим. перев.*

[1]) А также $x \in y \,\&\, y \in x$, $x \in y \,\&\, y \in z \,\&\, z \in x$ и т. п. (рассмотреть вместо $\{x\}$ множество $\{x, y\}$ или $\{x, y, z\}$ и т. п.). — *Прим. перев.*

[2]) Или что класс всех множеств вполне фундирован. Ср. сноску на стр. 151—152. — *Прим. перев.*

[3]) Переменные относятся автором к логическим символам (см. гл. I, § 2). — *Прим. перев.*

[4]) То есть то, что автор называл выше «обыкновенной» математикой. Чтобы достичь некоторой техники в формализации математических рассуждений посредством *ZF*, необходимо прежде всего освоиться с логической техникой употребления «описаний». Именно, если доказано утвержденне $\forall u_1, \ldots, u_k \exists ! t A(t, u_1, \ldots, u_k)$, то можно присоединить новый символ k-местной функции $f(u_1, \ldots, u_k)$

§ 2. Об аксиомах

Теперь мы будем обсуждать аксиомы неформально, хотя полученные при этом результаты будут точными и могут быть формализованы. Если опустить аксиому экстенсиональности, то возникающая система [1]) может содержать атомы, т. е. такие множества x, что $\forall y(\sim y \in x)$, хотя эти множества x различны. Действительно, одна из возможных точек зрения состоит в том, что натуральные числа *являются* атомами и что их нельзя рассматривать как множества. Даже в этом случае можно по-прежнему стремиться предотвратить существование неограниченного множества атомов. Так или иначе для «настоящих» множеств аксиома экстенсиональности имеет место, а все остальные множества — это просто безобидные игрушки. Френкель и Мостовский употребляли атомы, чтобы получить об аксиоме

с аксиомой $\forall u_1, \ldots, u_k A(f(u_1, \ldots, u_k), u_1, \ldots, u_k)$; это означает, что в результате такого расширения системы никакое суждение прежней системы не *превращается* в доказуемое (и тем самым не может *возникнуть* противоречие; доказательство см., например, в [15, § 74], а при $k=0$ оно легко получается методом, использованным в последнем абзаце § 3 гл. I. Теорема о полноте исчисления предикатов позволяет легко доказать эту «теорему об устранимости описаний» для любого k, если употребление этих описаний считается не нарушающим истинности суждений). Именно на этой теореме (и на аксиоме экстенсиональности, обеспечивающей нужную для ее применений единственность) основываются такие сокращения, как $\{x, y\}$, $x \cup y$ и т. п. Кроме того, для овладения этой техникой следует учесть сказанное в §§ 2—4 — особенно аксиому выделения и теорию порядковых чисел и мощностей, способ рассмотрения функций как множеств упорядоченных пар, построение множества $X \times Y$ и то обстоятельство, что обычные математические рассуждения, проводимые средствами теории множеств, помимо построения или отождествления множеств, используют только средства исчисления предикатов. Теорема о полноте этого исчисления обеспечивает поэтому достаточность аксиом *ZF* во всех случаях, когда построения множеств ведутся средствами описанных аксиом. Так как обычно в каждом разделе математики можно не выходить за пределы некоторого множества U (скажем, пространства l^p, или заданных на нем функций со значениями в нем же, или на ограниченном классе порядковых чисел и т. п.), то аксиомы выделения бывает достаточно для построения всех требуемых множеств, ибо нужные свойства удается выразить в языке *ZF*. — *Прим. перев.*

[1]) Точнее, модель для этой системы. — *Прим. перев.*

выбора результаты, которые мы рассмотрим в последней главе.

Первая действительно интересная аксиома — это аксиома бесконечности. Если ее опустить, то в качестве модели для ZF можно взять множество M всех конечных множеств, которые можно построить, отправляясь от $\emptyset$ [1]). Мы уже рассматривали это M в связи с Z_2 в § 7 гл. I. Ясно, что M будет моделью для всех остальных аксиом, так как ни одна из них не выводит за пределы класса конечных множеств [2]). Поэтому мы показали, что аксиома 5 не может быть выведена из остальных аксиом, ибо она, конечно, оказывается ложной в этой модели для конечных множеств.

Аксиома 6_n — это чрезвычайно сильная аксиома, так как она позволяет образовывать новые множества путем составления (by putting together) множеств, выбранных из всего мира множеств. Быть может, в философском отношении предпочтительнее следующая, более ограниченная «аксиома выделения» или Aussonderungsaxiom [3]). В ней $A_n(z; t_1, \ldots, t_k)$ пробегает по всем формулам, имеющим хотя бы одну свободную переменную и не содержащим свободно переменной y.

$6'_n$. Аксиома выделения

$$\forall t_1, \ldots, t_k \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \,\&\, A_n(z; t_1, \ldots, t_k)).$$

---

[1]) Подразумевается — употребляя только конечные множества. — *Прим. перев.*

[2]) То есть будучи применена к конечному множеству x, утверждает существование такого множества y, которое при этом тоже должно быть конечным. (Обозначения x и y я сейчас употребляю в том смысле, какой они имеют в аксиомах 4—7; для аксиомы 3 вместо x, y пришлось бы говорить об x, y и z, причем x и y играли бы роль x из предыдущего случая, а z — роль y.) Разумеется, вместо «конечных» множеств здесь следует говорить о «наследственно конечных» (см. сноску 3 на стр. 99) или как раз о таких конечных множествах, которые можно построить, отправляясь от $\emptyset$ (см. предыдущую сноску); аксиома 4 может вывести из класса произвольных конечных множеств. Хотя аксиомы 1 и 9 тоже соблюдаются в модели M, это вытекает из дополнительного ее рассмотрения, а не из комментируемого замечания автора. — *Прим. перев.*

[3]) Немецкий термин, введенный Э. Цермело. — *Прим. перев.*

То есть для каждого x существует некоторое множество y, состоящее из всех тех z в x, которые обладают свойством A. Проверка A для какого-либо конкретного z может включать в себя рассмотрение вопросов, касающихся всевозможных множеств, но все дело в том, что это новое множество y является подмножеством x. Схема аксиом $6'_n$ легко выводится из 6_n, а именно достаточно определить функцию $\varphi(t)=t$, если t обладает свойством A, и, например, $\varphi(t)=x$ в противном случае. Тогда область φ на x есть в точности множество $y'=y\cup\{x\}$. Следовательно, $y'\cap x$ дает y [1]). Интуитивно ясно, что 6_n сильнее, чем $6'_n$, потому что 6_n позволяет нам не только урезывать, но и строить множества [2]). Строгое доказательство состоит в следующем: для всех x пусть $P(x)$ обозначает степень множества x. Положим $u_0=3$, $u_{n+1}=P(u_n)$ и $M=\bigcup_n u_n$, т. е. объединению этих u_n, тогда M представляет собой уже рассмотренную модель из всех конечных множеств [3]). Положим теперь $C_0=M$, $C_{n+1}=P(C_n)$ и $N=\bigcup_n C_n$. Тогда ясно, что в N соблюдаются все аксиомы, с заменой 6_n на $6'_n$, ибо если $x\in N$, то и $P(x)\in N$. Однако функция $n\to C_n$ может быть определена в $\boldsymbol{ZF}$ (мы только что это сде-

---

[1]) Автор не замечает того, что существование $y'\cap x$ не было доказано, а напрашивающееся доказательство использует $6'_n$. Кроме того, в предыдущей фразе $y'=y=x$ (а не $y'=y\cup\{x\}$), если все элементы x обладают свойством A. Оставляя этот тривиальный случай в стороне, в остальных случаях, если существует $z\in x$ со свойством A, достаточно взять в качестве y образ y' посредством функции $\psi(u)$ такой, что $\psi(u)=u$ при $u\in y$ и $\psi(x)=z$ (или выбрать z вместо x при определении $\varphi(t)$); если же такого z не существует, то y должно быть пустым и его существование утверждается аксиомой 2 (см. также сноску 2 на стр. 92). — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, «урезывание» (как в $6'_n$) — это тоже один из способов построения, и речь идет о том, что построения, соответствующие схеме 6_n, не сводятся к урезываниям. — *Прим. перев.*

[3]) Точнее, наследственно конечных, т. е. таких множеств x, что все элементы $S_\omega x$ (см. стр. 132) конечны. — *Прим. перев.*

лали[1]), так что если бы аксиома 6_n имела место в N, то $\{C_0, C_1, \ldots\}$ являлось бы элементом N, а это явно абсурдно. Поэтому 6_n ложна в N и, следовательно, $6'_n$ и остальные аксиомы не влекут 6_n[2]).

В излагаемых ниже неформально рассуждениях аксиома 6_n часто будет применяться неявно. Коль скоро мы определяем какое-нибудь множество выражением «S — это множество всех таких x, что ...», мы, конечно, пользуемся аксиомой 6_n. Иногда мы будем употреблять неявно и аксному 4. Например, если в нашем распоряжении имеются множества A_n, то для того, чтобы определить объединение этих A_n, мы должны сначала применить 6_n и получить $\{A_1, A_2, \ldots\}$, а затем применить аксиому 4, чтобы получить $\bigcup_n A_n$. Кроме того, во всех случаях будет верно, что свойство, употребляемое для определения какого-нибудь множества, выразимо в ZF. Читателю достаточно будет проверять, что используемые в формулировке этого свойства термины уже были ранее определены в ZF.

Теперь мы рассмотрим аксиому степени. Для любого множества x обозначим через Sx множество-сумму из аксиомы 4. Кроме того, мы определяем $S_0x=x$, $S_{n+1}x=S(S_nx)$. Для построения модели, в которой нарушается аксиома степени, естественная идея будет состоять в рассмотрении класса всех счетных множеств,

---

[1]) На самом деле эта формализация рекурсивного определения C_n в ZF осиована на одной теореме, которая будет доказана ниже (см. стр. 120). — *Прим. перев.*

[2]) Система, получаемая из ZF замеиой схемы 6_n на $6'_n$, называется системой Цермело и обозначается обычно через Z. Как и ZF, оиа имеет различиые варианты — именно (как и для ZF), каждую из аксиом 8 и 9 (или обе вместе) можно включать или не включать в эту систему, что существенно отразится на ее силе. Аксиому 5 можно заменить в Z любой другой формой аксиомы бесконечности — все, что требуется, это существованне множества, для которого существует взаимно однозначное отображение на его правильную часть. Аксиома 2, как уже указано, следует из $6'_n$, но для аксиомы 3 в Z иет вывода, указанного в сноске 4 на стр. 90 (но ее относительная непротиворечивость может быть доказана с помощью модели типа только что рассмотренной). — *Прим. перев.*

потому что только путем образования степени удается доказать существование несчетных множеств. Однако может оказаться, что множество x — счетно, а Sx — несчетно. Пусть M — множество всех таких x, что $S_n x$ при каждом n конечно или счетно. (Позднее мы покажем [1]), что из аксиом **ZF** следует существование такого множества M.) Теперь легко видеть, что в M соблюдаются все аксиомы, за исключением аксиомы степени. Единственная трудность состоит в проверке аксиомы 6_n [2]). Но ясно, что если все $x_n \in M$, то $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ [3]) также принадлежит M. Поэтому если φ — функция, определенная в M, то область φ на каком-либо множестве из M является конечным или счетным множеством, все элементы которого входят в M и которое поэтому тоже входит в M. Следовательно, 6_n имеет место в M. Ясно, что аксиома степени нарушается в M, так как в M все множества конечны или счетны, т. е. для x из M, $\exists y$ в M, такое, что y является множеством упорядоченных пар, устанавливающим взаимно однозначное соответствие между элементами x и натуральными числами (которые будут ниже определены и очевидным образом будут принадлежать M). С другой стороны, из аксиомы степени следует существование несчетных множеств. Этот пример доказывает также необходимость аксиомы степени для доказательства существования несчетных множеств.

Эти элементарные результаты о независимости возможны только благодаря непротиворечивости **ZF**, ибо если **ZF** противоречива, то ее аксиомы влекут любое суждение [4]). Конечно, теорема о неполноте делает не-

---

[1]) См. стр. 140 и сноску 1 на ней. — *Прим. перев.*

[2]) Аксиома выбора участвует в этой проверке и для других аксиом. — *Прим. перев.*

[3]) Здесь $n=0, 1, 2, \ldots$ пробегает весь натуральный ряд или любой его конечный отрезок. — *Прим. перев.*

[4]) Снова неточность: в каждом отдельном случае для доказательства независимостн отдельной аксиомы **ZF** требуется лишь непротиворечивость всех остальных аксиом **ZF**, а это допущение слабее, чем допущение о непротиворечнвостн **ZF**, хотя бы в силу этого результата о независимостн. По крайней мере так обстонт дело с рассмотренными до сих пор результатами (впоследствии, при до-

возможным проведение в *ZF* доказательства Consis *ZF*. После всех анализов Consis *ZF* существенным образом представляет собой предмет веры [1]) и все излагаемые нами результаты о непротиворечивости и независимости являются лишь *относительными* результатами о непротиворечивости, зависящими от этого допущения.

§ 3. Порядковые числа

Порядковые числа важны в теории множеств не только как обобщения натуральных — они, кроме того, играют ключевую роль почти во всех исследованиях рассматриваемой системы аксиом. Это вызвано тем обстоятельством, что сложность данной модели может — в ее существенной [2]) части — измеряться ординалами [3]), до-

---

казательстве независимости аксиомы выбора, будет использована ее относительная непротиворечивость, но, кроме того, эта непротиворечивость будет предварительно доказана). Так, независимость аксиомы 5 была доказана средствами, гораздо более слабыми, чем допущение о непротиворечивости *ZF*. — *Прим. перев.*

[1]) В подлиннике «In the final analysis Consis *ZF* is essentially an article of faith»... В дополнение к сказанному в сноске на стр. 15—16 следует заметить, что для обоснования допущения о непротиворечивости *ZF*, даже если оно выражается формулой Consis *ZF*, вовсе не требуется, чтобы эта формула сама была доказуема в *ZF*; сказанное же в упомянутой сноске может заставить пересмотреть вопрос о связи между этой формулой и фактическим содержанием этого допущения. Что же касается веры (т. е. нарушений закона достаточного основания для суждений), то вся традиционная математика держится на вере в некоторую единственность натурального ряда, в то, что п. р. функции должны быть всюду определенными, в принцип математической индукции и взаимосвязанную с ним корректность аксиоматического метода как такового, не говоря о многих других допущениях (или пренебрежениях), лежащих в основе только что указанных. С этой верой связано и традиционное убеждение в том, что непротиворечивость *ZF* (выраженная посредством Consis *ZF*) есть или даже (у других авторов) должна оставаться делом веры. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике просто «in part» («частью»). — *Прим. перев.*

[3]) Порядковые числа по-английски — «Ordinal numbers». Слово «ordinal» превратилось в отдельное существительное, которое переводится как «ординал» и будет обозначать в этой книге (если не оговорено противное) то же самое, что и порядковое число, хотя во многих работах, в частности в [14], оно обозначает несколько более общее понятие (именно результат абстракции от того, что

ступными нам при построении множеств посредством трансфинитных процессов. С интуитивной точки зрения ординалы употребляются для замены классов эквивалентности вполне упорядоченных множеств. Как и во всех таких определениях, при этом возникает некоторое неудобство, потому что приходится ограничивать область объектов, на которых определяется отношение эквивалентности, и только после этого можно будет произвести нужное отождествление. Гораздо более удовлетворительное решение было предложено фон Нейманом; оно состоит в выборе некоторого канонического представителя из каждого класса эквивалентности.

Мы уже определили функцию, ее область и область определения. Теперь мы дадим некоторые дальнейшие определения, которые будут использованы в дальнейшем.

Определение. *Отношением* R на множестве X называется множество упорядоченных пар элементов X.

$X \times Y$ — это множество всех $\langle u, v\rangle$, таких, что $u \in X$ и $v \in Y$.

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n\rangle\rangle \quad (n \geqslant 2).$$

Если f — функция, x — область определения f и $y \subseteq x$, *то* $f|y$ (*f, ограниченная множеством* y) — это множество всех таких $\langle u, v\rangle$ в f, что $u \in y$.

Если $f(x) = f(y) \to x = y$, мы определяем

$$f^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in f\}\ ^{1)}.$$

порядковое число является множеством; в системе ***GB*** «ординалами» оказываются все порядковые числа и образованный ими класс On, и только эти объекты). — *Прим. перев.*

[1]) Здесь и часто в дальнейшем автор употребляет запись вида $\{t(x_1, \ldots, x_r) \mid A(x_1, \ldots, x_r)\}$, где $t(x_1, \ldots, x_r)$ — терм, а $A(x_1, \ldots, x_r)$ — формула или словесно выраженное условие; эта запись обозначает множество (или, общее, класс — см. § 6 этой главы) всех значений, принимаемых термом $t(x_1, \ldots, x_r)$, когда $x_1, \ldots, x_r$ пробегают r-ки значений, удовлетворяющие условию $A(x_1, \ldots, x_r)$. Кроме того, любые переменные из r-ки «x_1», ..., «x_r» могут отсутствовать как в $t(x_1, \ldots, x_r)$, так и в $A(x_1, \ldots, x_r)$, или можно считать, что, например, в $A(x_1, \ldots, x_r)$ входят параметры, отличные от «x_1», ..., «x_r». (В данном случае можно считать, что $r=2$, x_1 есть x, x_2 есть y, $t(x_1, x_2)$ есть $\langle x, y\rangle$, а $A(x_1, x_2)$ есть $\langle y, x\rangle \in f$), где f — параметр.) — *Прим. перев.*

Наши аксиомы дают возможность легко обосновать эти определения. Так, $X \times Y$ является подмножеством множества $P(P(X \cup Y))$. Теперь мы приступаем к полным упорядочениям.

Определение. Отношение R на множестве S *упорядочивает* S, если (употребляя запись $x<y$ для обозначения того, что $\langle xy\rangle$ входит в R)

i) $\forall x, y$ в S, имеет место одно и только одно из следующих условий:

$$x=y, \quad x<y, \quad y<x,$$

ii) $x<y$ и $y<z \rightarrow x<z$ [1]).

---

[1]) Автор, нисколько этого не оговаривая и не объясняя, употребляет смешение формального и естественного языков, что вполне соответствует общему динамизму его стиля.

Иногда это случалось и раньше, но впервые дело дошло до применения формальных кванторов в начале словесного текста, включающего формулы, выделенные в отдельную строку (см. i); из контекста i) ясно, что при формализации эти формулы следует соединить знаком разделительной дизъюнкции, имеющей вид $(A \vee B \vee C) \& (\sim (A \& B) \& \sim (A \& C) \& \sim (B \& C))$. Ясно и то, что в ii) знак «→» разрезает выражение сильнее, чем союз «и» естественного языка, хотя этим и нарушены правила, обычно применяемые в работах по математической логике. Принято в таких случаях заключать антецедент (левую часть) импликации в скобки и вообще считать, что, поскольку из обычных правил употребления скобок не вытекает обратное, слова естественного языка разрезают текст сильнее, чем любые специальные логико-математические символы. По-видимому, это правило вытекает из того, что выражения формальных языков рассматриваются как вкрапления в текст, а не наоборот, и проще будет рассматривать такие вкрапления каждый раз как одно целое, чем поступать наоборот. Но, поскольку это правило ни разу не было явно сформулировано, автор пользуется своим правом нарушать его, быть может, намеренно вызывая реакцию в виде разъяснений, подобных настоящему.

Условия i) и ii) следует при формализации соединить знаком конъюнкции и аналогично надо будет поступать и в других случаях, когда не оговорено противное.

Что же касается математического содержания этого определения, то (как нередко указывается) ii) дает возможность ослабить i), заменив разделительную дизъюнкцию на простую, к которой добавлена конъюнктивно антирефлексивность $\sim x<x$ или, вместо нее, антисимметричность $\sim (x<y \& y<x)$. — *Прим. перев.*

Мы будем говорить, что R *вполне упорядочивает* S, если R упорядочивает S и притом $(B \subseteq S,\ B$ непусто$) \rightarrow \exists x(x \in B \,\&\, \forall y(y \in B \rightarrow \sim y < x))$[1]).

Итак, R вполне упорядочивает S, если каждое непустое подмножество S имеет наименьший элемент по отношению к R. Для $B \subseteq S$ мы будем писать $\sup B = x$, если x есть наименьший элемент в S, для которого $y \in B \rightarrow y < x$[2]). Кроме того, мы будем писать $x > y$ вместо $x < y$ и $x \leqslant y$ для обозначения $x = y \vee x < y$.

Определение. Пусть S вполне упорядочено посредством R. Мы будем говорить, что B есть *начальный сегмент* S, если $(x \in B,\ y < x) \rightarrow y \in B$[3]).

---

[1]) В подлиннике (после первого S) — «and if $B \subseteq S$, and B is not empty $\rightarrow \exists x\,(x \in B \,\&\, \forall y\,(y \in B \rightarrow \sim y < x))$». В дальнейшем, не всегда это оговаривая, при смешениях естественного и формалвного языков я буду употреблять скобки таким образом, как мне это кажется лучше соответствующим правилу, указанному в предыдущей сноске, а иногда, кроме того, переводить некоторые — но не все — английские слова соответствующими формальными выражениями (если не видно оснований к предпочтению естественных оборотов; часть текста будет оставляться неформализованной специально, чтобы отметить неполноту формализации в этих случаях, но эта полнота вовсе не всегда имеет какое-либо принципиальное значение).

Отношение R называется также *полным упорядочением* (*на* S). Что касается математического существа этого определения, то x является в нем наименьшим (относительно R) элементом B — буквально не в том смысле, что $\forall y\,(y \in B \rightarrow x < y \vee x = y)$, однако это свойство x также вытекает из i).

Если в определении полного упорядочения вовсе опустить тот конъюнктивный член, благодаря которому дизъюнкция в определении порядка оказывается разделительной, то получится отношение, эквивалентное принятому здесь, ибо $\sim x < x$ (см. предыдущую сноску) вытекает для $x \in S$ из рассмотрения $\{x\}$ в качестве B. (Так определяет полное упорядоченне, например, Гёдель в [14].) — *Прим. перев.*

[2]) Таким образом, $\sup B$ зависит от S, поэтому точнее было бы писать $\sup_S B$. Однако у автора S всюду будет некоторым фиксированным множеством, название которого легко однозначно установить из текста, и он нигде больше не упоминает об S. — *Прим. перев.*

[3]) Запятая между формулами будет — если противное не ясно из текста — обозначать их конъюнкцию.

По-видимому, автор подразумевает, что к этой импликации должно быть конъюнктивно добавлено условие $B \subseteq S$.

Заметим, что если B есть начальный сегмент S, то либо B есть все S, либо $\exists x$ такое, что B есть множество всех y, для которых $y<x$. Действительно, если $S-B$ непусто, пусть x будет в нем наименьшим элементом. Тогда ясно, что если $y<x$, то y входит в B. С другой стороны, если $y \in B$ и $x<y$, то $x \in B$ (потому что B — начальный сегмент), но это противоречит $x \in S-B$. Следовательно, $y<x$.

Кроме того, для любого x $\{y \mid y \leqslant x\}$ есть начальный сегмент.

Мы будем говорить, что функция f, отображающая упорядоченное множество S на (или в) упорядоченное множество T, *сохраняет порядок*, если $x<y \rightarrow f(x)<f(y)$ [1]). Кроме того, заметим, что любое подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочено [2]).

Теорема. *Если S и T — вполне упорядоченные множества, то или*

i) $\exists$ *единственная сохраняющая порядок функция f, отображающая S на начальный сегмент T, или*

ii) $\exists$ *единственная сохраняющая порядок функция, отображающая T на начальный сегмент S.*

Доказательство. Условимся называть «хорошим» отображением всякое сохраняющее порядок отображение одного вполне упорядоченного множества на начальный сегмент другого [3]). Теперь если f — хорошее

Если A — начальный сегмент B, то для $C \subseteq A$ условия «C — начальный сегмент A» и «C — начальный сегмент B» равнозначны. То, что здесь называется начальным сегментом, в [14] называлось сечением, а слово «сегмент» имело несколько иной смысл. — *Прим. перев.*

[1]) Нет надобности, чтобы «$<$» обозначало в S и T одно и то же отношение порядка R. Совпадение отношения R для S и T не предполагается и в следующей теореме, хотя в ее доказательстве для обоих отношений порядка употребляется один и тот же символ «$<$». — *Прим. перев.*

[2]) Тем же отношением, рассматриваемым на этом подмножестве. — *Прим. перев.*

[3]) Автор молчаливо подразумевает, что вполне упорядоченные множества, о которых идет речь в этом определении, — это S, T или их начальные сегменты. — *Прим. перев.*

отображение, то для всех x мы должны иметь $f(x)=\sup\{f(y)\mid y<x\}$. В самом деле, из того, что f сохраняет порядок, следует, что $y<x$ влечет $f(y)<f(x)$; поэтому $f(x)\geqslant t=\sup\{f(y)\mid y<x\}$. Если $f(x)>t$, то t должно принадлежать области f, ибо эта область является начальным сегментом, и $t=f(y)$ для некоторого $y<x$, ибо f сохраняет порядок. Это противоречит определению t, поэтому $f(x)=\sup\{f(y)\mid y<x\}$. Теперь мы докажем, что для любых двух вполне упорядоченных множеств S и T может существовать самое большее одно хорошее отображение S в T. В самом деле, пусть f и g — два таких отображения, и пусть x — наименьший такой элемент в S, что $f(x)\neq g(x)$. Тогда $f(x)=\sup\{f(y)\mid y<x\}=\sup\{g(y)\mid y<x\}=g(x)$ — противоречие. Далее, ограничение хорошего отображения f любым начальным сегментом B снова является хорошим отображением. В самом деле, оно сохраняет порядок, и если $x\in B$, $z<f(x)$, то $z=f(y)$ для некоторого y; при этом $y<x$, ибо f — хорошее, и $y\in B$, потому что B является начальным сегментом; следовательно, область f на B является начальным сегментом. Определим теперь C как множество всех таких x в S, что существует хорошее отображение начального сегмента $\{y\mid y\leqslant x\}$ в T. Если $x\in C$ и $y<x$, а f — хорошее отображение $\{z\mid z\leqslant x\}$ в T, то f, ограниченное множеством $\{z\mid z\leqslant y\}$, также является хорошим отображением, следовательно, $y\in C$. Итак, C — начальный сегмент S. Для $x\in C$ обозначим через f_x единственное хорошее отображение множества $\{z\mid z\leqslant x\}$ в T. Тогда ясно, что $f_x(z)=f_y(z)$, коль скоро $z\leqslant x\leqslant y$. Теперь для всех x в C положим $f(x)=f_x(x)$. Если x, $y\in C$ и $x<y$, то $f(x)=f_x(x)=f_y(x)<f_y(y)=f(y)$, следовательно, f сохраняет порядок. Если $x\in C$, $t<f(x)$, то $t<f_x(x)$, а поэтому $\exists y$, $y<x$ и $t=f_x(y)=f_y(y)=f(y)$. Итак, f — хорошее отображение. Если C есть все S, то мы доказали теорему. Если $C\neq S$, пусть $t=\sup C$, а C' — область f на C. Если C' — все T, то обратное к f отображение является сохраняющим порядок отображением T на начальный сегмент S. Если C' — не все T, положим $u=\sup C'$. Если мы положим теперь $f(t)=u$, то легко видеть, что f продолжено до хорошего отображения мно-

жества $\{z \mid z \leqslant t\}$ на начальный сегмент T, что является противоречием [1]), и теорема доказана.

Теорема. *Если f — хорошее отображение S в T, а g — хорошее отображение T в S, то как f, так и g являются отображениями на; кроме того, они взаимно обратны.*

Доказательство. Пусть f отображает S на начальный сегмент B множества T. Тогда f^{-1} — хорошее отображение B на или [2]) в S. Ограничение g множеством B также является хорошим отображением B на или в S, а поэтому оно согласовано с f^{-1}. Но f^{-1} является отображеннем на все S, так что в силу взаимной однозначности g имеет место $B=T$ и $f^{-1}=g$.

Определение. Если S и T — вполне упорядоченные множества, мы будем писать $\bar{S} \leqslant \bar{T}$, если существует хорошее отображение множества S в T. Если это хорошее отображение не является отображением на все T, мы будем писать $\bar{S}<\bar{T}$. Если же оно является отображением на все T, мы будем писать $\bar{S}=\bar{T}$.

Теперь ясно, что только что введенное понятие равенства является отношением эквивалентности [3]) и что «$<$» является отношением порядка между индуцированными классами эквивалентности. (Но мы на самом деле не вводим здесь никаких классов эквивалентности, и тот факт, что «$<$» является отношением порядка, означает просто, что для любых S и T имеет место одно и только одно из условий $\bar{S}<\bar{T}$, $\bar{T}<\bar{S}$, $\bar{S}=\bar{T}$ и т. д. [4]).)

---

[1]) С определениями C и $\sup C$, ибо $t=\sup C$ должно (по определенню C и только что доказанному) и не может (в силу определения $\sup C$) входить в C. — *Прим. перев.*

[2]) Термин отображения «к A» («to A») обозначает, по-видимому, отображение в или на A (что равнозначно отображеиию в A). — *Прим. перев.*

[3]) То есть обладает свойствами рефлективности, симметрии и транзитивности. — *Прим. перев.*

[4]) Несовместимость этих условий проще всего усмотреть из антирефлективности (см. сноску к стр. 104). Так как тривиальное отображение S на S (при котором $f(x)=x$ для всех $x \in S$) является хорошим, то эта антирефлективность следует из доказанного выше в тексте (при доказательстве предпоследней теоремы) предложеиия о единственности хорошего отображения S в T. — *Прим. перев.*

Приведем теперь некоторые примеры вполне упорядоченных множеств:

1. Множество ω всех натуральных чисел при обычном упорядочении. (Но мы еще не определили в ZF натуральных чисел.)
2. Если S и T — дизъюнктные [1]) вполне упорядоченные множества, мы определяем $S+T$ как $S \cup T$ с упорядочением $x<y \leftrightarrow (x \in S \& y \in T$, или $x, y \in S \& x<y$, или $x, y \in T \& x<y)$.
3. Если S и T — вполне упорядоченные множества, мы определяем полное упорядочение на $S \times T$ соглашением, что $\langle x, y\rangle < \langle t, u\rangle$, коль скоро $y<u$, или $y=u \& x<t$.

Теперь тривиальным образом проверяется, что эти определения сохраняют классы эквивалентности для полного упорядочения, определяемые этим отношением $=$ [2]). Заметим, что $S+T$ можно определить и для недизъюнктных S и T, для чего достаточно найти такие дизъюнктные S' и T', что $\tilde{S}=\tilde{S}'$ и $\tilde{T}=\tilde{T}'$.

Ординальная арифметика имеет некоторые особенности. Так, $2+\omega=\omega$, но $\omega+2 \neq \omega$. Так же и $2 \times \omega=\omega$, но $\omega \times 2=\omega+\omega$. (Здесь 2 — вполне упорядоченное множество из 2 элементов.) Можно определить и возведение в степень, но мы подождем с этим, пока не будет определена трансфинитная рекурсия [3]).

Определение. Множество x называется *транзитивным* [4]), если $y \in x$, $z \in y \rightarrow z \in x$.

Определение. *Ординал* — это множество α, которое вполне упорядочено посредством $\in$ [5]) и транзитивно. Мы будем писать Оп α для обозначения того, что α — ординал.

---

[1]) Дизъюнктные (disjoint) — непересекающиеся. — *Прим. перев.*

[2]) Речь идет, по-видимому, о том, что замена «равного равным» (в смысле $\tilde{S}=\tilde{T}$) обычным образом применима к только что определенным операциям $S+T$ и $S \times T$. — *Прим. перев.*

[3]) В подлиннике здесь и всюду автор называет эту рекурсию «траисфинитиой иидукцией». — *Прим. перев.*

[4]) Термии Бериайса Гёдель в [14] называет такие множества полными. — *Прим. перев.*

[5]) Точиее, посредством $\in$, ограниченного миожеством α. — *Прим. перев.*

Цель этого определения связана с нашей попыткой выбрать некоторый канонический представитель из каждого класса эквивалентности для полных упорядочений. При этом в качестве отношения порядка естественнее всего употреблять $\in$. Легко видеть, что ординалами являются все множества $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, и вообще множества n, если $n+1=n\cup\{n\}$. Второе условие необходимо, например, для того, чтобы для любого непустого множества a не оба множества $\{\emptyset\}$ и $\{a\}$ считались ординалами. Исходя из этого определения мы докажем, что если два ординала эквивалентны как вполне упорядоченные множества, то они совпадают. Заметим еще, что, согласно аксиоме регулярности, всякое множество, упорядоченное посредством $\in$, вполне упорядочено этим отношением. Однако мы сейчас предпочитаем обходиться без этой аксиомы.

Установим теперь некоторые простые факты.

i) Начальный сегмент ординала является ординалом. В самом деле, если I — начальный сегмент α, то I вполне упорядочен посредством $\in$, и если $x\in I$, $y\in x$, то y меньше, чем x в упорядочении ординала α (ибо $\in$ является отношением порядка), а потому $y\in I$ и, следовательно, I — транзитивен.

ii) Если $\mathrm{On}\,\alpha$ и $x\in\alpha$, то x есть множество всех y в α, предшествующих x. Это верно потому, что $\in$ — отношение порядка, а $x=\{y\mid y\in x\}=\{y\mid y\in x\&y\in\alpha\}$.

iii) Если $\mathrm{On}\,\alpha$ и $x\in\alpha$, то $\mathrm{On}\,x$. В самом деле, мы видим, что $x\subseteq\alpha$, а потому x вполне упорядочено посредством $\in$. Кроме того, если $y\in x$ и $z\in y$, то $y\in\alpha$, откуда и $z\in\alpha$, и в силу того что $\in$ транзитивно на α, $z\in x$.

iv) Наконец, если $\mathrm{On}\,\alpha$, то $\beta=\alpha\cup\{\alpha\}$ — ординал (*сын* α[1])). В самом деле, если x, y входят в β, то или

---

[1]) В подлиннике — «the successor of α». Отсутствие в русском языке общепринятого существительного, эквивалентного слову «successor», побуждает меня употреблять для этой цели короткое слово «сын». Сын α — это ординал, непосредственно следующий за α (в отличие от прочих «потомков» или «наследников» α).

В этом месте доказывается лишь, что β является ординалом, а то, что этот ординал является сыном α, будет доказано после следствия из следующей теоремы. — *Прим. перев.*

$x, y \in \alpha$, или $x=y=\alpha$, или $x=\alpha$, $y \in \alpha$, или $y=\alpha$, $x \in \alpha$. В любом случае мы видим, что $x=y$, или $x \in y$, или $y \in x$. Аналогично проверяются остальные условия того, что β — ординал [1]). Заметим, что $\beta - \alpha$ содержит только один элемент, α.

Теорема. *Если S — вполне упорядоченное множество, то существуют единственные f и α, такие, что* On α *и f является сохраняющим порядок отображением S на α.*

Таким образом, S изоморфно ординалу.

Доказательство. Заметим сперва, что $\{\emptyset\}$ — единственный ординал, содержащий ровно один элемент. В самом деле, если $x=\{a\}$ — ординал, то $\sim a \in a$, ибо $\in$ упорядочивает x, и если $b \in a$, то $b \in x$, но $b \neq a$. Поэтому $a=\emptyset$. Мы уже показали [2]), что для каждого α существует не более одного *изоморфизма* (т. е. сохраняющего порядок, следовательно, взаимно однозначного отображения) S на α. Очевидно, что достаточно рассматривать лишь случай, когда S непусто. Пусть A — множество всех таких x из S, что для всех $t \leqslant x$ существует изоморфизм f_t множества $I_t=\{y \mid y \leqslant t\}$ на однозначно определенный ординал $\alpha(t)$. A непусто, так как если x — наименьший элемент в S, то I_x изоморфно $\{\emptyset\}$, и $\{\emptyset\}$ является единственным таким ординалом. Ясно, что A — начальный сегмент S (ибо, если $x \in A$, $y<x$, то из $t \leqslant y$ следует $t \leqslant x$ и существование f_t и единственного $\alpha(t)$ и, следовательно, $y \in A$).

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную для $x \in A$ посредством $f(x)=f_x(x)$. Чтобы убедиться в формализуемости этого определения в $\boldsymbol{ZF}$ [3]), достаточно форма-

[1]) Проверка того, что всякое непустое подмножество β имеет наименьший элемент, использует $x \in \alpha \to \sim\alpha \in x$. В силу транзитивности α эта импликация следует из $\sim\alpha$ α. А это суждение в свою очередь следует из $x \in \alpha \to \sim x \in x$ (т. е. из антирефлексивности $\in$ на α). Транзитивность β проверяется путем тривиального разбора случаев ($y \in \beta \to y \in \alpha \vee y=\alpha$), и остается применить, например, определение ординала, не использующее разделительной дизъюнкции (см. последний абзац сноски на стр. 104). — *Прим. перев.*

[2]) См. теоремы на стр. 106 и 108. — *Прим. перев.*

[3]) В подлиннике это доказательство формализуемости отсутствует. — *Прим. перев.*

лизовать $f_t(y)$ как функцию двух аргументов $y \leqslant t$ и $t \leqslant x$, т. е. выразить условие $f_t(y) = u$ некоторой формулой $A(t, y, u, x)$ для всех таких y и t и $x \in A$. Пусть A — множество, определенное формулой (в которой f пишется вместо f_t и α вместо $\alpha(t)$):

$$x \in A \leftrightarrow x \in S \,\&\, \forall t\,(t \leqslant x \rightarrow \rightarrow \exists!\, \alpha(\mathrm{On}\,\alpha \,\&\, \exists f\,(f \text{ есть изоморфизм } I_t \text{ на } \alpha))),$$

где «f есть изоморфизм I_t на α» обозначает формулу

$$\forall z\,(z \in f \leftrightarrow \exists y,\, v\,(z = \langle y, v\rangle \,\&\, y \leqslant t \,\&\, v \in \alpha) \swarrow$$
$$\&\, \forall y\,(y \leqslant t \rightarrow \exists!\, v\,\langle y, v\rangle \in f) \,\&\, \forall v\,(v \in \alpha \swarrow$$
$$\rightarrow \exists y\,(\langle y, v\rangle \in f)) \,\&\, \forall y,\, s,\, v,\, w\,(\langle y, v\rangle \in f \swarrow$$
$$\&\, \langle s, w\rangle \in f \rightarrow (y < s \rightarrow v \in w))).$$

Тогда в качестве формулы $A(t, y, u, x)$ можно выбрать $x \in A \,\&\, t \leqslant x \,\&\, \exists!\, \alpha(\mathrm{On}\alpha \,\&\, \exists f\,(f$ есть изоморфизм I_t на $\alpha \,\&\, \langle y, u\rangle \in f))$. В самом деле, в силу единственности изоморфизма I_t на α, f должно совпадать с f_t и условие «f есть изоморфизм I_t на α» обеспечивает, что при $\langle y, u\rangle \in f$ должно быть $f_t(u) = u$ и обратно, из $f_t(y) = u$ следует, что $\langle y, u\rangle \in f$ (ибо f есть f_t).

Теперь в силу аксиомы подстановки (аксиомы $6'_n$ недостаточно) существует множество α, являющееся областью значений функции f. (Аксиома подстановки применяется с формулой $A(y, y, u, x)$.) Докажем, что α является ординалом, а f — изоморфизмом A на α.

Будучи подмножеством S, A вполне упорядочено посредством $<$. Если $y < x \in A$, то $y \in A$ (ибо A — начальный сегмент S). Кроме того, $f_x | I_y = f_y$ в силу единственности изоморфизма I_y на $\alpha(y)$. В самом деле, так как при $y < x$ I_y является начальным сегментом I_x, а изоморфизм f_x — хорошим отображением на $\alpha(x)$, то образом $f_x | I_y$ служит начальный сегмент $\alpha(x)$ (см. доказательство на стр. 107), следовательно (см. i)), ординал, а область определения $f_x | I_y$ есть I_y ввиду $I_y \subseteq I_x$ — и, ввиду единственности ординала, изоморфного I_y (см. определение A), только что упомянутый ординал совпа-

дает с $\alpha(y)$. Поэтому, при условии $y<x\in A$, $f(y)=f_y(y)=(f_x|I_y)(y)=f_x(y)<f_x(x)=f(x)$. Следовательно, f сохраняет порядок. Далее, если $B\subseteq\alpha$ и $B\neq\emptyset$, то полный прообраз B по отношению к f непуст и имеет наименьший элемент c (ибо A вполне упорядочено); из того, что f сохраняет порядок, следует, что $f(c)$ является наименьшим по отношению к $\in$ элементом B. Следовательно, α вполне упорядочено посредством $\in$.

Пусть теперь $u\in\alpha$ и $v\in u$, тогда $\exists x$, такое, что $x\in A$, $u=f(x)=f_x(x)$. Ввиду того что f_x есть отображение на $\alpha(x)$, имеет место $u\in\alpha(x)$, и, в силу транзитивности $\alpha(x)$, $v\in u$ дает $v\in\alpha(x)$, а потому $\exists y$ из области определения f_x, такое, что $f_x(y)=v$. Так как эта область определения есть I_x, то $y\leqslant x\in A$. Ввиду $v\neq u$, $y\neq x$ и $y<x\in A$, а потому и $f(y)=f_y(y)=f_x(y)=v$, откуда $v=f(y)$ и $v\in\alpha$. Следовательно, $u\in\alpha$, $v\in u\to v\in\alpha$, т. е. α транзитивно. Таким образом, $\mathrm{On}\,\alpha$ [1]).

Так как f сохраняет порядок, то f является изоморфизмом A на α. С другой стороны, если g — другой изоморфизм A на ординал β, то для всякого $x\in A$, g, ограниченный множеством I_x, является изоморфизмом этого I_x на начальный сегмент J ординала β. (В самом деле, I_x — начальный сегмент A (ибо A — начальный сегмент S, а потому $x\in A$ дает $I_x\subseteq A$), а на стр. 107 для хороших отображений (в частности, для изоморфизмов) было доказано, что они остаются хорошими при любом ограничении на область определения ее начальным сегментом.) При этом $\mathrm{On}\,J$ в силу i) а в силу свойства, определяющего A, совпадают ординалы, являющиеся образами I_x при изоморфизмах g и f, следовательно (в

[1]) Следует обратить внимание на то, что автор употребляет строчные греческие буквы для обозначения множеств, являющихся ординалами; аналогично поступает Гёдель [14] и многие другие авторы, придерживающиеся гёделевских обозначений. Но Коэн не формулирует этого соглашения — и зачастую (как в рассматриваемом случае) он обозначает буквой α (или β, γ, ...) такое множество, о котором лишь впоследствии будет доказано, что оно является ординалом (что в [14] было исключено принятыми там соглашениями). (Замечу, что в подлиннике доказательство того, что $\mathrm{On}\,\alpha$ и f — изоморфизм, отсутствует, см. предисловие переводчика; но сказанное об обозначении α относится в равной мере и к тексту подлинника.) — *Прим. перев.*

силу теорем на стр. 106 и 108), совпадают $g|I_x$ и $f|I_x$, а потому (ввиду $x\in I_x$) $g(x)=f(x)$.

Следовательно, f и α определены однозначно. Теперь, если A есть все S, то доказательство окончено. Если $A\neq S$, то положим $y=\sup_S A$ [1]) и определим g на $A\cup\{y\}$, полагая $g(x)=f(x)$ для $x\in A$ и $g(y)=\alpha$. Ясно теперь, что g изоморфно отображает I_y на ординал $\alpha\cup\{\alpha\}$. Остается доказать [2]), что другого такого ординала γ не существует — тогда это будет обозначать $y\in A$, что противоречит определению y.

Допустим, что h изоморфно отображает I_y на γ. Мы докажем, что $h=g$, откуда будет следовать совпадение областей значений h и g, т. е. $\gamma=\alpha\cup\{\alpha\}$. Допустим, что $h\neq g$, тогда непусто множество B таких $x\in I_y$, что $h(x)\neq g(x)$. Ввиду $B\subseteq I_y\subseteq S$ в B существует наименьший элемент v; $B\subseteq I_y$ дает $v\leqslant y$. Так как h и g — изоморфизмы вполне упорядоченного I_y на ординалы, то (в силу первого утверждения из доказательства теоремы на стр. 106—107) $h(v)=\sup_\gamma\{h(u)\,|\,u<v\}$ и $g(v)=\sup_{\alpha\cup\{\alpha\}}\{g(u)\,|\,u<v\}$. В силу определения v, для всех $u<v$ имеет место $h(u)=g(u)$, следовательно, $\{h(u)\,|\,u<v\}=\{g(u)\,|\,u<v\}$. Чтобы доказать $h(v)=g(v)$, достаточно теперь доказать, что $\sup_\gamma\{h(u)\,|\,u<v\}=\{h(u)\,|\,u<v\}$ и $\sup_{\alpha\cup\{\alpha\}}\{g(u)\,|\,u<v\}=\{g(u)\,|\,u<v\}$. Так как оба случая рассматриваются совершенно одинаково, рассмотрим только первый. Из того, что $\in$ есть отношение порядка на γ, следует $\{h(u)\,|\,u<v\}\subseteq\sup_\gamma\{h(u)\,|\,u<v\}$, а также (с помощью определения для $\sup_\gamma$) $\sup_\gamma\{h(u)\,|\,u<v\}\subseteq\{h(u)\,|\,u<v\}$. Теорема доказана.

Следствие. *Если* Оп α *и* Оп β, *тогда если* $\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}$, *то* $\alpha=\beta$, *а если* $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta}$, *то* $\alpha\in\beta$.

Доказательство. Первое утверждение содержится в доказанной теореме [3]). Если $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta}$, то суще-

[1]) Определение $\sup_S A$ см. в сноске 2 на стр. 105. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике это доказательство (и даже это утверждение о единственности ординала) опущено. — *Прим. перев.*

[3]) Здесь используется содержащееся в этой теореме утверждение о единственности ординала, а также то, что тождественное отображение α на α сохраняет порядок. — *Прим. перев.*

ствует изоморфизм ординала α на собственный начальный сегмент ординала β, например на $I=\{x \mid x \in \gamma\}$ для некоторого $\gamma \in \beta$. Так как I — ординал, то $I=\alpha$ [1]), но, кроме того, очевидно, что $I=\gamma$ [2]).

Таким образом, мы показали, что *всякий ординал является множеством всех ординалов, ему предшествующих* [3]).

Теорема. *Если* Оп α, *то* $\beta=\alpha \cup \{\alpha\}$ *является наименьшим ординалом, превосходящим* α [4]).

Доказательство. Упражняйтесь.

Мы будем писать $\beta=\alpha+1$ [5]).

---

[1]) В силу первого утверждения этого следствия. — *Прим. перев.*

[2]) В силу $I=\{x \mid x \in \gamma\}$. — *Прим. перев.*

[3]) Именно: раньше (стр. 110, iii) было доказано, что всякий ординал состоит только из ординалов, т. е. является множеством всех тех ординалов, из которых он состоит, или, что то же, множеством всех тех ординалов, которые находятся к нему в отношении $\in$. Теперь речь идет о предшествовании в смысле $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta}$, и автор подразумевает, что утверждение $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta} \leftrightarrow \alpha \in \beta$ доказано (что дает ему возможность высказать комментируемое утверждение), хотя явно указано было лишь доказательство для $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta} \rightarrow \alpha \in \beta$. Обратная импликация легко получается из только что доказанного следствия с помощью ранее доказанного (см. стр. 108) утверждения о том, что $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta}$ является отношением порядка и того, что Оп α и Оп β влечет $\sim \alpha \in \alpha$ и $\sim(\alpha \in \beta \& \beta \in \alpha)$ (см. сноску 1 на стр. 111; $\alpha \in \beta \& \beta \in \alpha$ дает $\alpha \in \alpha$ в силу Оп α, откуда $\sim(\alpha \in \beta \& \beta \in \alpha)$). Именно теперь возникает сравнимость ординалов: $\alpha=\beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$ (см. только что упомянутую теорему на стр. 108). — *Прим. перев.*

[4]) Превосходящим = большим (в смысле $\tilde{\beta}>\tilde{\alpha}$, т. е. $\alpha \in \beta$); «предшествующим» выше означало, конечно, отношение $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta}$ (что оказалось эквивалентным $\alpha \in \beta$). — *Прим. перев.*

[5]) Обозначение $\alpha+1$, как легко видеть, согласовано с ранее введенным обозначением для суммы $S+T$ вполне упорядоченных множеств, поскольку 1 считается обозначением для $\{\emptyset\}(=\emptyset+1)$. (Ввиду того что 1 есть $\{\emptyset\}$, достаточно рассмотреть случаи $\beta=\emptyset$ и $\beta \neq \emptyset$, ибо во втором случае $\emptyset \in \beta$ в силу уже доказанной сравнимости ординалов; так как $\sim \beta \in \beta$ (см. сноску 1 на стр. 111), то $\{\beta\}$ можно выбрать в качестве T.) Ввиду этой согласованности нет надобности в специальном обозначении $\alpha+1$, которым пользуется Гёдель [14]. — *Прим. перев.*

Теорема. *Если S — непустое множество ординалов, то существует наименьший α в S* [1]).

Доказательство. Пусть $\beta \in S$. Наименьший элемент в $\beta+1 \cap S$ является искомым α.

Теорема. *Если S — множество ординалов, то существует наименьший ординал α, такой, что $\beta \in S \rightarrow \rightarrow \beta < \alpha$.*

Мы будем писать $\alpha = \operatorname{Sup} S$ [2]).

Доказательство. Пусть γ — множество-объединение для S. Если x, y, $z \in \gamma$, то существуют такие α_1, α_2, α_3 в S, что $x \in \alpha_1$, $y \in \alpha_2$, $z \in \alpha_3$, причем α_i — ординалы. Если, например, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3$, то x, y, $z \in \alpha_3$ (ибо $\alpha_i \leqslant \alpha_j \rightarrow \alpha_i \subseteq \alpha_j$ в силу транзитивности α_j), откуда следует, что ε упорядочивает γ. Если T — непустое подмножество γ, то пусть, например, $\alpha \cap T \neq 0$ и $\alpha \in S$; α, о котором сейчас пойдет речь, существует, так как непустое подмножество суммы должно пересекаться хоть с одним из ее слагаемых. Наименьший из элементов $\alpha \cap T$ является наименьшим элементом T (ибо α транзитивно и $<$ сейчас совпадает с $\in$), следовательно, γ вполне упорядочено посредством $\in$ и γ транзитивно (ибо из определения транзитивности следует, что любое объединение транзитивных множеств транзитивно). Итак, γ — ординал. Далее, для любых ординалов α и β

v) $\alpha \subset \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$ [3]),

так как тождественное отображение α на себя дает $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ и было доказано, что это влечет $\alpha \in \beta$, а при $\alpha \in \beta$ должно быть $\alpha \subseteq \beta$ в силу транзитивности β и еще $\sim \alpha = \beta$.

---

[1]) Из этой теоремы сиова следует сравнимость любых двух ординалов α и β: при $\alpha \neq \beta$ достаточно применить ее к $S = \{\alpha, \beta\}$. Дальше автор иногда пишет $\alpha < \beta$ вместо $\alpha \in \beta$. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиниике sup S, что легко смешать с ранее введенным обозиачением sup B (См. сноску 3 иа стр. 105.) Важное отличие состоит в том, что Sup S не выбирается ни из какого миожества, подмиожеством которого являлось бы S, и более того — ии из какого множества вообще, так что о нижнем индексе здесь не возникает речи. Из этой теоремы следует несуществоваиие множества всех ординалов. — *Прим. перев.*

[3]) В подлиниике отсутствует v), а конец этого доказательства скомкан и содержит иеточности. — *Прим. перев.*

Теперь $\alpha \in S$ дает $\alpha \subseteq \gamma$ (слагаемое содержится в сумме), а это (с помощью разбора случаев $\alpha = \gamma \vee \sim \alpha = \gamma$!) дает $\alpha \subset \gamma \vee \alpha = \gamma$, что, в силу v) даст $\alpha \in \gamma \vee \alpha = \gamma$, т. е. $\alpha \in \gamma + 1$. Следовательно, $\forall \alpha (\alpha \in S \to \alpha \in \gamma + 1)$.

Если в S имеется наибольший элемент, то $\gamma + 1 = \mathrm{Sup}\, S$. Этот элемент (в силу своей транзитивности и того, что порядок есть $\in$) содержит в себе (как подмножества) все остальные элементы S, а потому совпадает с γ. Кроме того, из $x \in \gamma + 1 \leftrightarrow x \in \gamma \vee x = \gamma$ и $x \in \gamma \vee x = \gamma \to \sim \gamma \in x$ следует $x \in \gamma + 1 \to \sim \gamma \in x$ и ввиду $\gamma \in S$, $x \in \gamma + 1 \to \gamma \in S \,\&\, \sim \gamma \in x$, или $x + \gamma + 1 \to \sim (\gamma \in S \to \gamma \in x)$, откуда $x \in \gamma + 1 \to \exists \alpha \sim (\alpha \in S \to \alpha \in x)$ или $x \in \gamma + 1 \to \sim \forall \alpha (\alpha \in S \to \alpha \in x)$, что вместе с $\forall \alpha (\alpha \in S \to \alpha \in \gamma + 1)$ дает $\gamma + 1 = \mathrm{Sup}\, S$.

Если же в S нет наибольшего элемента, то $\gamma = \mathrm{Sup}\, S$. В самом деле, $\alpha \in S \to \exists \beta$, такой, что $\alpha \in \beta \in S$, откуда (в силу v)) $\alpha \subset \beta$ и $\beta \subseteq \gamma$ (слагаемое содержится в сумме), откуда $\alpha \subset \gamma$ и v) дает $\alpha \in \gamma$. Итак, $\forall \alpha (\alpha \in S \to \alpha \in \gamma)$ При $\delta \in \gamma$, $\exists \alpha$, такой, что $\delta \in \alpha$, $\alpha \in S$ — и тогда $\sim \alpha \in \delta$, откуда $\sim \forall \alpha (\alpha \in S \to \alpha \in \delta)$. Следовательно, в этом случае $\gamma = \mathrm{Sup}\, S$.

Теорема доказана. 0 будет означать ординал $\emptyset$

Определение. α — *сын*, если $\exists \beta (\alpha = \beta + 1)$, α — *предельный ординал*, если $\alpha \neq 0$, и α не сын [1]).

Определение. α называется *натуральным числом* (integer), если $\beta \leqslant \alpha \to \beta$ есть сын или 0.

Теорема. *Существует предельный ординал.*

Доказательство. Эта теорема по существу является содержанием аксиомы бесконечности и могла бы быть выбрана в качестве ее формулировки [2]). Пользуясь

---

[1]) Если α — предельный ординал, то $\alpha \neq 0$, и если $\beta \in \alpha$, то $\beta + 1 \in \alpha$, ибо $\alpha \in \beta + 1$ (вместе с $\beta \in \alpha$) противоречило бы теореме о том, что $\beta + 1$ есть сын β. (Таким образом вообще $\beta < \alpha \to \beta + 1 \leqslant \alpha$.) — *Прим. перев.*

[2]) Гёдель [14] пользовался другой формой аксиомы бесконечности:

$$\exists x (x \neq \emptyset \,\&\, \forall y (y \in x \to \exists z (z \in x \,\&\, y \subset z))).$$

нашей формой этой аксиомы, допустим, что x есть множество, удовлетворяющее аксиоме бесконечности. Пусть y — Sup всех ординалов в x. Тогда ввиду $\alpha \in x \to \alpha + 1 \in x$ y является предельным ординалом [1]).

Теперь, если x — предельный ординал, пусть ω — наименьший предельный ординал $\leqslant x$. Тогда если n — натуральное число, то $n \in \omega$. Обратно, если $y \in \omega$, то $z \leqslant y \to z$ есть сын или 0, так что y — натуральное число. Следовательно, ω — множество всех натуральных чисел [2]).

Конечно, в рассматриваемой системе ***ZF*** в качестве такого x можно взять ω, так что гёделевская форма не сильнее аксиомы 5. Обратно — в [14] существование ω было доказано на основе гёделевской формы аксиомы бесконечности; воспроизвести это доказательство в системе типа ***ZF*** (а ие ***GB***) я предлагаю читателю в качестве задачи средней сложности. Таким образом, это различие в формах аксиомы бесконечности ие влияет ни иа силу ***ZF***, ии иа силу основных результатов об относительной непротиворечивости для этой системы.

Все, что требуется от аксиомы бесконечности, — это чтобы она давала множество, которое можно взаимно одиозначно отобразить иа его правильную часть. Если именно существоваиие такого множества постулировать вместо аксиомы 5, сила ***ZF*** опять не изменится, что я тоже предоставляю доказать читателю. Мостовский [20] выбирал эту аксиому в форме $\exists x\,(\emptyset \in x \,\&\, \forall y\,(y \in x \to \{y\} \in x))$, что сиова дает систему той же силы. — *Прим. перев.*

[1]) В противном случае y было бы сыном ($y = 0$ невозможно ввиду $\emptyset \in x$, откуда $\emptyset \in y$). Если $y = \beta + 1$, то $\sim \beta \in x$ (ибо $\beta \in x \to \beta + 1 \in x$, откуда $y \in x$, что противоречит определению y). Далее, при $y = \beta + 1$ $\alpha \in x$ дает $\alpha + 1 \in x$ и $\alpha + 1 \in y$, т. е. $\alpha + 1 < \beta + 1$ и $\alpha + 1 < \beta \vee \alpha + 1 = \beta$ — и $\sim \beta \in x$ дает $\sim \alpha + 1 = \beta$ (ибо $\alpha + 1 \in x$), откуда $\alpha + 1 < \beta$; следовательно, ввиду $\alpha < \alpha + 1$ $\alpha \in x \to \alpha < \beta$, а это противоречит определению y ввиду $\beta < \beta + 1 = y$. — *Прим. перев.*

[2]) Автор был вынужден определить ω через произвольный предельиый ординал x, а ие просто как наименьший предельный ординал, ибо существование наименьшего ординала, обладающего произвольным свойством φ, которым обладает хоть один ординал, не было им доказано. Легко видеть, что это утверждение представляет собой одиу из форм трансфинитной индукции, которую автор будет иеодиократио применять, а потому отсутствие в тексте всякого упоминания об этой индукции воспринимается как пробел.

Высказаииое сейчас утверждение о существовании наименьшего ординала легко выводится из предыдущей теоремы о суще-

Теорема. (Математическая индукция.) *Если* $x \subseteq \omega$, $\emptyset \in x$ *и* $n \in x \to n+1 \in x$, *то* $x = \omega$.

Доказательство. Упражняйтесь.

Мы переходим теперь к трансфинитной индукции, являющейся обобщением обычного понятия индукции для натуральных чисел. Задача здесь состоит в том, чтобы определить функцию $f(\alpha)$ для ординалов α, исходя из правила, указывающего, как надо определять $f(\alpha)$, если $f(\beta)$ известны для всех $\beta < \alpha$ [1]). Мы имеем дело с вполне

ствовании наименьшего ординала в непустом множестве S. Именно, если $\varphi(\beta)$, то в качестве S следует взять (согласно $6'_n$) подмножество $\beta+1$, состоящее из всех элементов, обладающих свойством φ. Если α — наименьший элемент этого подмножества, то оно является искомым наименьшим ординалом, ибо из $\varphi(\gamma)$ и $\gamma \in \alpha$ следует $\gamma \in \beta + 1$ (в силу $\alpha \in \beta + 1$), что противоречит определению α.

Сказанное позволяет применять трансфинитную индукцию к любым свойствам ординалов, выразимым формулами в *ZF*. — *Прим. перев.*

[1]) Как я уже указывал в сноске 3 на стр. 109, автор называет «трансфинитной индукцией» то, что в этом переводе обычно называется «трансфинитной рекурсией». Вообще индукция — это способ *доказывания* (или *вывода*) суждений, а рекурсия — способ *определения* терминов или понятий, а также конструкций (в частности, формальных выводов). В переводе я исхожу, как правило, из такой (весьма распространенной) терминологии.

В тех случаях, когда надо доказать по индукции некоторое свойство $A(\alpha)$ для всех ординалов α, можно, рассматривая $A(\alpha)$ как предикат, заменить его характеристической функцией $X_A(\alpha)$, т. е. такой функцией, что $\forall \alpha (X_A(\alpha) = 1 \leftrightarrow A(\alpha)) \& (X_A(\alpha) = 0 \leftrightarrow \sim A(\alpha))$. Функцию $\chi_A(\alpha)$ можно определять посредством трансфинитной рекурсии, и если это удается, то доказательства суждений $\forall \alpha (A(\alpha) \leftrightarrow \chi_A(\alpha) = 1)$ и $\forall \alpha (\chi_A(\alpha) = 1)$ могут оказаться тривиальными, т. е. основанными лишь на определениях и на правилах исчисления предикатов. (Метатеоретическая индукция, на которой основано само исчисление предикатов, не является трансфинитной — правда, в свете анализа явлений, упомянутых в сноске на стр. 15—16, это не означает, что она проще поддается обоснованию.) Таким образом, можно пытаться свести трансфинитную индукцию к трансфинитной рекурсии, и если это будет сделано, то различие между этими понятиями будет касаться только той узкой области теории ординалов, которой будет принадлежать такая редукция. По-видимому, в своей следующей фразе автор имеет в виду именно эту или равносильную ей редукцию. С такой точки зрения трансфинитную рекурсию можно считать обобщением обычной математической индукции, как поступает автор. — *Прим. перев.*

упорядоченными множествами, а это означает, что такое определение всегда может быть выполнено однозначно. Для формализации этой индукции, именуемой ниже трансфинитной рекурсией, пусть $A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$ пробегает все формулы в $\boldsymbol{ZF}$, имеющие хотя бы две свободные переменные [1]).

Теорема. (Трансфинитная рекурсия.) *Пусть даны t_i; допустим $\forall x \exists! y A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$, так что A_n определяет функцию $y=\varphi(x)$. Для каждого ординала α и множества z существует единственная функция f, определенная на $\{\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ (это множество фактически совпадает с $\alpha+1$) так, что $f(0)=z$ и для всех $\beta \leqslant \alpha$ имеет место $f(\beta)=\varphi(h)$, где h есть функция f, ограниченная ординалом β.*

Доказательство. Пусть даны α и z. Пусть S — множество всех ординалов $\gamma \leqslant \alpha$, таких, что имеет место утверждение этой теоремы с заменой в нем α на γ, и пусть f_γ — соответствующие функции [2]). Ясно, что если $\gamma_1 \in S$, $\gamma_2 < \gamma_1$, то $\gamma_2 \in S$ и f_{γ_2} является функцией f_{γ_1}, ограниченной посредством γ_2+1. Таким образом, S само является ординалом [3]). Если $\alpha \in S$, доказательство окончено. В противном случае, пусть γ_0 обозначает $\operatorname{Sup} S$. Пусть g определена на S соглашением $g(\gamma)=f_\gamma(\gamma)$ для $\gamma<\gamma_0$ [4]). Если мы положим теперь $\delta=\varphi(\gamma)$ и определим

---

[1]) Две свободные переменные, о которых здесь говорится, — это x и y; слово «пробегает» относится к изменению значений записи $A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$, когда n пробегает (интуитивный) натуральный ряд. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике эти слова стоят в единственном числе с артиклем the, что не совсем понятно. Замена α на γ происходит, конечно, только в той части утверждения, к которой относятся слова «для каждого α и z» — именно она в этом определении S названа «утверждением этой теоремы» (в подлиннике просто «the theorem»). Молчаливо подразумевается, что такое преобразование терминов оправдывается предварительным соглашением «Пусть даны α и z». Формально это можно обосновать с помощью утверждения, доказанного об $A(c)$ в последнем абзаце § 3. гл. I. — *Прим. перев.*

[3]) См. 1) на стр. 110. — *Прим. перев.*

[4]) Так как S — ординал, то из $\gamma<\gamma_0=\operatorname{Sup} S$ следует $\gamma \in S$, так что $f_\gamma(\gamma)$ определено. — *Прим. перев.*

$f(\gamma)=g(\gamma)$ для $\gamma<\gamma_0$ и $f(\gamma_0)=\delta$, то ясно, что f — единственная функция, удовлетворяющая нашей гипотезе для γ_0, что означает $\gamma_0\in S$ — противоречие [1]).

В применениях мы не обязательно будем явно указывать φ, но всегда будет ясно, каким образом можно формализовать φ в *ZF*. Приведем несколько простых примеров.

1. Для фиксированного α определяем $\alpha+\beta$, полагая
$$\alpha+0=\alpha,\quad \alpha+\beta=\operatorname{Sup}\{\alpha+\gamma\,|\,\gamma<\beta\}\ ^{2}).$$
2. Для фиксированного α определяем $\alpha\cdot\beta$, полагая $\alpha\cdot 0=0$, $\alpha\cdot(\beta+1)=\alpha\cdot\beta+\alpha$, $\alpha\cdot\beta=\operatorname{Sup}\{\alpha\cdot\gamma\,|\,\gamma<\beta\}$ для предельного ординала β.
3. Для фиксированного α определяем α^β, полагая $\alpha^0=1$, $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha$, $\alpha^\beta=\operatorname{Sup}\{\alpha^\gamma\ \gamma<\beta\}$ для предельного ординала β.

Ординал называется *счетным*, если он может быть поставлен во взаимно однозначное соответствие с ω. Если α счетен, то в силу $\beta<\alpha\leftrightarrow\beta\in\alpha$ имеется пересчет [3]) β_n всех ординалов, меньших чем α. Легко доказывается, что счетность α и β влечет счетность $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$. Как это ни странно, счетность α и β влечет также счетность α^β. Ибо если β — наименьший счетный ординал такой, что α^β не счетен, то при $\beta=\gamma+1$ $\alpha^\beta=\alpha^\gamma\cdot\alpha$ счетно, а если β — предельный ординал и γ_n — все его предшественники, то $\alpha^\beta=\operatorname{Sup}\{\alpha^{\gamma_n}\}$ и является поэтому объединением счетного множества счетных множеств и, следовательно, само счетно [4]).

---

[1]) Именно, $\gamma_0\in S$ противоречит $\gamma_0=\operatorname{Sup} S$ и определению $\operatorname{Sup} S$. — *Прим. перев.*

[2]) При $\beta=\delta+1$ это дает $\alpha+(\delta+1)=(\alpha+\delta)+1$. Следует обратить внимание на то, что рекурсия ведется здесь по β, а α является параметром. В формулировке теоремы о рекурсии участвовали параметры $t_1,\ \ldots,\ t_k$ и в рассматриваемых примерах $k=1$, а t_1 есть α. — *Прим. перев.*

[3]) Русские термины «иумерация», «перечисление», «пересчет» соответствуют одному и тому же английскому «enumeration», постоянно употребляемому в подлиннике. — *Прим. перев.*

[4]) В этом пункте используется аксиома выбора, ибо эта аксиома иужна в доказательстве теоремы о счетности только указаиного объединения (подробнее об этом см. в конце § 9 гл. IV, а также в

Счетные ординалы могут быть чрезвычайно сложными. Ординал ω^ω представляет вполне упорядоченное множество полиномов с натуральными коэффициентами, упорядоченное лексикографически, — и это является довольно сложным порядком. Ординал $\varepsilon_0 = \mathrm{Lim}\,\omega_n$ [1]), где $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$, $\omega_0 = \omega$, уже очень трудно представить себе путем непосредственной интуиции. Если более общим образом определить ε_α, полагая $\varepsilon_{\alpha+1} = \mathrm{Lim}\,\delta_n$, где $\delta_1 = \varepsilon + 1$ и $\delta_{n+1} = \omega^{\delta_n}$, и $\varepsilon_\alpha = \mathrm{Sup}\{\varepsilon_\beta \mid \beta < \alpha\}$ для случая, когда α — предельный ординал, то ординалы типа $\varepsilon_{\varepsilon_0}$ уже почти невозможно воспринять путем непосредственной интуиции. Но эти примеры еще нельзя назвать чересчур сложными, так как все эти ординалы можно определять в довольно слабых системах теории множеств. Впоследствии мы покажем, как с любым естественным множеством аксиом для теории множеств можно связать ординал, описание которого оказывается невозможным средством этой системы и требует выхода за ее пределы.

Быть может, недостаточно широко известно то обстоятельство, что стимул, побудивший Кантора заняться теорией множеств, возник в связи со счетными ординалами. При изучении проблемы единственности разложения функции в тригонометрический ряд он рассматривал для произвольного множества E действительных чисел операцию образования нового множества E^* путем удаления дискретных точек E. При этом возник вопрос, сколько раз надо применять операцию * для того, чтобы в конце концов достичь пустого множества (если это случится). При рассмотрении множеств действительных чисел, вполне упорядоченных отношением $<$ [2]), можно показать, что операцию * можно применять повторно трансфинитное число раз, зависящее от рассматриваемого полного упорядочения, пока множество, наконец,

---

§ 10 гл. IV). Кроме того, это доказательство использует трансфинитную индукцию. — *Прим. перев.*

[1]) Lim обозначает то же, что и Sup, коль скоро этот Sup является предельным ординалом. — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, имеется в виду обычное «<» для действительных чисел. — *Прим. перев.*

не превратится в пустое[1]). Любопытно, что этот канторовский подход не привел к успеху в решении первоначальной проблемы — доказательства того, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, за исключением счетного множества, то этот ряд равен нулю тождественно.

§ 4. Кардинальные числа

Определение. *A и B имеют одну и ту же мощность*, или символически $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, если существует взаимно однозначная функция, отображающая A на B.

Это отношение $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ является отношением эквивалентности.

Определение. $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$, если существует взаимно однозначное отображение A в B.

Теорема. (Кантор—Бернштейн.) $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$ *и* $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}\rightarrow\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

Доказательство. Пусть f взаимно однозначно отображает A в B, а g взаимно однозначно отображает B в A. Очевидно[2]), что множества A и B можно предположить дизъюнктными. Теперь легко видеть, что $A\cup B$ является дизъюнктным объединением[3]) последователь-

[1]) Это следует из возможности погрузить в действительную прямую (и даже в множество ее рациональных точек) любой счетный ординал. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике — «clearly». По-видимому, речь идет о теореме: Для любых двух множеств A и B существует такое A', дизъюнктное с B, что $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{A'}}$. Назвать эту теорему очевидной трудно: она была бы неверна, если бы B могло быть универсальным множеством, т. е. удовлетворять $\forall x\,(x\in B)$. Доказательство ее можно провести с помощью аксиомы регулярности (см. ниже сноску 5 на стр. 133; достаточно при $A\in S(\alpha)$ заменить в A все элементы x на $x\cup\{S(\alpha)\}$ и обозначить полученное множество через A'). Читателю предоставляется убедиться в том, что это использование материала следующего параграфа не приводит к порочному кругу. — *Прим. перев.*

[3]) То есть объединением дизъюнктного множества (т. е. множества с непересекающимися элементами); иными словами, любые две различные последовательности S не имеют ни одного общего члена. Это утверждение доказывается так: пусть $z\in A\cup B$ и пусть, например, $z\in A$. Положим $z=x_0$, тогда y_0, x_1, y_1, ... определятся как в тексте автора [именно, $x_i\in A$, $y_j\in B$, и притом y_j — всегда в области f, x_{i+1} — в области g (слово «область» обозначает здесь и ниже

ностей $S=\{\ldots, x_n, y_n, \ldots\}$, причем эти последовательности могут обрываться при продвижении влево, но могут и не обрываться и $x_n \in A$, $y_n \in B$, $f(x_n)=y_n$, $g(y_n)=x_{n+1}$, и если x_n входит в область (range) g, то y_{n-1} входит в последовательность S, а если y_n входит в область f, то $x_n \in S$. Теперь мы определим взаимно однозначное отображение φ множества $S \cap A$ на $S \cap B$. Именно, если S содержит x_n для всех отрицательных n, положим $\varphi(x_n)=y_n$. Если имеется наименьшее n, причем x_n с этим n входит в S, снова полагаем $\varphi(x_n)=y_n$. Если же самый левый член S есть y_n, полагаем $\varphi(x_n)=y_{n-1}$ [1]). Тогда φ есть взаимно однозначное отображение A на B. Следует заметить, что аксиома выбора *не* была использована в этом доказательстве.

Если $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ и $\sim \overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, мы будем писать $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$. Таким образом, отношение $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ определяет частичное упорядочение. Если $\overline{\overline{A}}$ и $\overline{\overline{B}}$ оба являются вполне упорядоченными множествами, то мы уже доказали, что существует взаимно однозначное отображение A в B или B в A. Теперь, пользуясь аксиомой выбора, мы докажем, что каждое множество может быть вполне упорядочено и, следовательно, «$<$» определяет отношение порядка между классами эквивалентности, определяемыми отношением $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

Теорема о полном упорядочении. *Каждое множество может быть вполне упорядочено.*

Доказательство. Применяя аксиому выбора к тождественной функции на $P(S)$, получаем функцию f,

«область значений»)]. Если x_0 входит в область g, то однозначно определяется такое y_{-1}, что $g(y_{-1})=x_0$ и т. д. — последовательность может оборваться влево. Далее, следует рассматривать не последовательности, а (счетные) множества их элементов, и если два таких множества пересекаются, то они совпадают, ибо получены из последовательностей, которые могут различаться лишь тем, что одна является сдвигом другой (т. е. x_0 для одной является x_i для другой, где $i \neq 0$, или аналогично для y_0). Поэтому эти множества дизъюнктны. Именно об их объединении идет речь, и оно совпадает с $A \cup B$. — *Прим. перев.*

[1]) Явная небрежность. Следует понимать так: если S имеет самый левый член, который является некоторым x_n, то $\varphi(x_i)=y_i$ для всех $x_i \in S$, а если S имеет самый левый член, который является некоторым y_n, то $\varphi(x_i)=y_{i-1}$ для всех $x_i \in S$. — *Прим. перев.*

определенную для всех $x \subseteq S$, $x \neq \emptyset$ и такую, что $f(x) \in x$. Полное упорядочение множества $T \subseteq S$ мы будем называть *хорошим* полным упорядочением, если для всех $x \in T$ $x = f(S - \{y \mid y \in T \& y < x\})$. Это означает, что в этом полном упорядочении «ближайший следующий» элемент всегда получается применением функции выбора к остающимся элементам. Совершенно естественно, что путем последовательного выбора элементов можно в конце концов вполне упорядочить все S.

Факт. *Если два подмножества T_1 и T_2 имеют хорошие полные упорядочения $<_1$ и $<_2$, то одно из них содержится в другом и притом является его начальным сегментом, и первое упорядочение является ограничением второго. В частности, существует не более одного хорошего упорядочения на множестве T* [1]).

В самом деле, допустим, что φ является сохраняющим порядок отображением T_1 на начальный сегмент T_2. (В противном случае, мы поменяли бы ролями T_1 и T_2.) Пусть x — наименьший элемент в T_1, такой, что $\varphi(x) \neq x$. Так как φ отображает на начальный сегмент, $\varphi(x) = \sup\{\varphi(y) \mid y <_1 x\}$, где sup относится к $<_2$, и так как $<_2$ — хорошее, то $\varphi(x) = f(S - \{\varphi(y) \mid y <_1 x\}) = f(S - \{y \mid y <_1 x\}) = x$, ибо $<_1$ — хорошее. Следовательно, $\varphi(x) = x$ и мы доказали наше утверждение.

Пусть теперь T будет объединением всех T_α, имеющих хорошее полное упорядочение. Для x, y из T положим $x < y$, если для некоторого α $x, y \in T_\alpha$ и $x < y$ в единственном хорошем полном упорядочении на T_α. Если $x \in T_\alpha$, $y \in T_\beta$, то если T_α — начальный сегмент T_β, будет x, $y \in T_\beta$, так что упорядочение определено, и притом однозначно для любых x, y из T. Ввиду того что T_α — «расширяющиеся» множества начальных сегментов, тривиальным образом проверяется, что $<$ является полным упорядочением. Кроме того, $<$ — хорошее полное упорядочение. В самом деле, если $x \in T_\alpha$, то

[1]) «В частности», ввиду несовместимости $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ с $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ или $\sim\tilde{\alpha} < \tilde{\alpha}$ (см. сноску 4 на стр. 108). Здесь T — произвольное подмножество S (в подлиннике — «on a set T»), а ограничение подразумевается вполне определенное (в подлиннике — «the restriction»). — *Прим. перев.*

$\{y \mid y<x\}=\{y \mid y \in T_\alpha$ и $y<_\alpha x\}$, а потому $x=f(S-\{y \mid y<x\})$, ибо $<_\alpha$ — хорошее. Если T — не все S, то пусть $x_0=f(S-T)$; положим $T_0=T \cup \{x_0\}$ и определим на T_0 упорядочение, сохраняя порядок, уже определенный на T, и полагая $x<x_0$ для $x \in T$. Ясно, что это — хорошее полное упорядочение и что оно не может быть ни одним из прежних T_α — противоречие [1]). Поэтому $T=S$ и S имеет хорошее полное упорядочение.

Тривиально, что из принципа полного упорядочения следует аксиома выбора, ибо если вполне упорядочить $\bigcup_\alpha A_\alpha$, то, определяя $f(\alpha)$ как наименьший элемент в A_α, мы получаем функцию выбора.

Определение. *Кардинал* — это такой ординал α, что $\beta<\alpha \leftrightarrow \overline{\overline{\beta}}<\overline{\overline{\alpha}}$.

Таким образом, кардинал — это наименьший ординал данной мощности. Таким образом, ввиду того что каждое множество может быть вполне упорядочено и поэтому имеет ту же самую мощность, что и некоторый ординал, мы из каждого класса эквивалентности множеств одной и той же мощности выбрали единственного представителя [2]). Один из первых вопросов, рассмотренных Кантором, состоял в том, существуют ли произвольно большие кардиналы. Ответ содержался в следующей теореме.

[1]) С определением множества T как объединения всех T_α. Слово «противоречие» введено при переводе. — *Прим. перев.*

[2]) Важно заметить, что это сделано лишь с помощью аксиомы выбора, в то время как частичный поридок $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ был определен независимо от этой аксиомы. (Этот частичный порядок является «отношением» между множествами A и B, но слово «отношение» тут взято в кавычки, ибо этот термин употреблен сейчас в несколько более широком смысле, чем тот, какой был определен в предыдущем параграфе. Именно — это логическое отношение, выразимое в ZF посредством формулы (с параметрами A и B), но оно не представимо никаким множеством. Если ограничить это отношение произвольным множеством R, тогда (по аксиоме $6'_R$, примененной к множеству $R \times R$) полученное отношение можно будет представить множеством.) Но для тех множеств, которые можно вполне упорядочить, т. е. которые равномощны вполне упорядоченным множествам, это определение кардинала приводит к однозначному определению представителей соответствующих классов эквивалентности независимо от аксиомы выбора. — *Прим. перев.*

Теорема Кантора. *Для любого* A $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{P(A)}}$.

Доказательство[1]). Ясно, что $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{P(A)}}$. Допустим, что φ отображает A на $P(A)$. Пусть $z=\{x\in A\mid \sim x\in\varphi(x)\}$. Тогда $z\subseteq A$, и если $z=\varphi(y)$ для $y\in A$, то $y\in z\to\sim y\in\varphi(y)\to\sim y\in z$ и $\sim y\in z\to y\in\varphi(y)\to y\in z$, что, очевидно, невозможно.

Отсюда следует, что посредством трансфинитной рекурсии можно определить такую функцию $\alpha\to\aleph_\alpha$, отображающую ординалы на кардиналы, что $\aleph_\alpha$ будет наименьшим бесконечным кардиналом, превосходящим такие $\aleph_\beta$ для всех $\beta<\alpha$[2]). Это определение корректно, так как по теореме Кантора всегда можно найти кардинал, превосходящий любой данный[3]) ординал. По ин-

[1]) Читателю, желающему следить за всеми доказательствами до самого конца книги (включая § 12 гл. IV, который идет уже после того, как все результаты автора о независимости будут изложены), рекомендуется обратить внимание на то, что это доказательство для $\overline{\overline{P(A)}}\leqslant\overline{\overline{A}}$ не использует взаимной однозначности φ. Таким образом, автором получено доказательство следующей теоремы: для всякого A не существует однозначного отображения A на $P(A)$. Это доказательство не использует аксиомы выбора. — *Прим. перев.*

[2]) Автор, очевидно, ссылается на теорему о трансфинитной рекурсии из предыдущего параграфа. Эта теорема дает лишь, что для каждого α можно рассматривать функцию $\aleph_\beta$ для всех $\beta\leqslant\alpha$, и значения $\aleph_\beta$ зависят от α. Обозначу их поэтому через $\aleph_\beta^\alpha$. Если положить $\aleph_\alpha=\aleph_\alpha^\alpha$ для всех α, то упомянутой теоремы о рекурсии недостаточно, чтобы рассматривать $\aleph_\alpha$ как функцию, определенную для всех α (ибо эта теорема вообще не дает таких функций). Можно, однако, доказать, что при любом α и для любых β, $\gamma\geqslant\alpha$ $\aleph_\alpha^\beta=\aleph_\alpha^\gamma$. Это доказательство легко провести с помощью трансфинитной индукции по α из множества S, образованного всеми $\delta\leqslant\min(\beta,\gamma)$. Идея его состоит в том, что если α — предельный ординал, то $\aleph_\alpha^\beta$ есть $\operatorname{Sup}\{\aleph_\delta^\beta\mid\delta<\alpha\}$ и аналогично для $\aleph_\alpha^\gamma$, а если $\alpha=\delta+1$, то из $\aleph_\alpha^\beta=\aleph_\alpha^\gamma$ следует совпадение наименьших кардиналов, следующих за $\aleph_\alpha^\beta$ и $\aleph_\alpha^\gamma$ (а $\aleph_0^\beta$ есть ω при любом β). — *Прим. перев.*

[3]) При формализации слово «данный» следует игнорировать, а слова «можно найти» — выражать посредством $\exists$. Аналогично во всех остальных случаях этого рода. Я иногда буду опускать слово «данный» там, где оно несущественно для формализации, не отмечая этого в сносках. — *Прим. перев.*

дукции доказывается, что $\aleph_\alpha \geqslant \alpha$. Отсюда следует, что $\aleph_\alpha$ должно пробегать через сколь угодно большие кардиналы и, следовательно, по всем кардиналам [1]). Это доказательство существования $\aleph_\alpha$ использует аксиому выбора, так как оно опирается на тот факт, что каждое множество имеет ту же мощность, что и некоторый ординал. Однако и без помощи аксиомы выбора можно доказать, что для любого ординала существует другой ординал большей мощности, а поэтому можно определить $\aleph_\alpha$. Именно, если α — ординал, рассмотрим все полные упорядочения на подмножествах α. Они образуют множество, ибо каждое полное упорядочение принадлежит $P^3(\alpha)$ [2]). Рассмотрим множество всех классов эквивалентности этих упорядочений, относя к каждому классу все изоморфные некоторому его элементу. Это множество (являющееся подмножеством $P^4(\alpha)$) само естественным образом вполне упорядочено, и легко видеть, что ординал β, которому оно изоморфно, является первым кардиналом, превосходящим α [3]).

Пусть C обозначает множество $P(\omega)$. Мы уже знаем, что C — несчетное множество. Кантор рассматривал вопрос о расположении $\overline{\overline{C}}$ в трансфинитной последователь-

---

[1]) Пусть δ — наименьший кардинал, не являющийся значением функции $\aleph_\alpha$. Всегда $\alpha \leqslant \aleph_\alpha$. Поэтому все такие α, что $\aleph_\alpha < \delta$, меньше δ и существует Sup того множества, которые они образуют. Если этот Sup есть β, то $\aleph_\beta =$ (наименьшему кардиналу, превосходящему все $\aleph_\alpha < \delta$) $= \delta$. — *Прим. перев.*

[2]) $P^2(\alpha)$ обозначает $P(P(\alpha))$, $P^3(\alpha) = P(P^2(\alpha))$ и т. д. — *Прим. перев.*

[3]) Именно, всякий ординал, изоморфный элементам одного из классов эквивалентностей, входящих в это множество, которое я обозначу через R, очевидно, имеет мощность $\leqslant \alpha$. Кроме того, вместе с каждым элементом x в R входит каждый y такой, что элементы y изоморфны начальным сегментам элементов x. Поэтому при изоморфизме R на β каждый $x \in R$ отображается на такое порядковое число $< \beta$, которое изоморфно элементам x, и всякое $\gamma < \beta$, будучи изоморфно элементам некоторого $x \in R$, имеет мощность $\leqslant \alpha$. Если бы β имел мощность $\leqslant \alpha$, то он был бы изоморфен элементам некоторого $x \in R$, а тем самым и некоторому ординалу $\in \beta$, но для ординалов соотношения $\tilde{\gamma} < \tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma} = \tilde{\beta}$ несовместимы. — *Прим. перев.*

ности $\aleph_\alpha$ [1]). Ввиду $\overline{\overline{C}} > \aleph_0$ простейшим предположением является

Континуум-гипотеза Кантора. $\overline{\overline{C}} = \aleph_1$.

Более общим предположением является следующая

Обобщенная континуум-гипотеза.

$$\overline{\overline{P(\aleph_\alpha)}} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Часто пишут 2^A для обозначения мощности множества $P(A)$ по аналогии с конечными множествами [2]).

Для кардиналов существует особая арифметика. Именно если A и B — дизъюнктны, мы полагаем $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}}$ и $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$. Однако эта арифметика совсем тривиальна, потому что можно доказать, что если A и B бесконечны, то $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \max(\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}})$. Доказательство использует аксиому выбора; мы его опустим.

§ 5. Аксиома регулярности

В этом параграфе мы рассмотрим роль аксиомы регулярности. В частности, мы покажем, что присоединение ее к остальным аксиомам не приводит к противоречию, если последние образуют непротиворечивую систему. Это доказательство для нас особенно интересно потому, что оно послужит введением в изложение идей, лежащих в основе гёделевского доказательства непротиворечивости аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы.

Мы напомним, что аксиома регулярности упрощает наше определение порядкового числа, так как она дает возможность опустить условие о том, что $\in$ вполне упорядочивает α, и заменить его тем, что $\in$ просто упоря-

[1]) Такая постановка вопроса основана на аксиоме выбора. Кантор употреблял эту аксиому неявно. — *Прим. перев.*

[2]) Обозначение $P(x)$ было введено выше для случая, когда x — множество, а здесь, по-видимому, оно распространяется на случай, когда A обозначает мощность или произвольное множество мощности A. — *Прим. перев.*

дочивает α. Напомним также, что множество x называется транзитивным, если $(y \in x$ и $z \in y) \rightarrow z \in x$.

Определение. *Функцией ранга* (a rank function) на транзитивном множестве A называется всякая такая функция r на A, что ее значениями служат ординалы и для всех $x \in A$ $r(x) = \mathrm{Sup}\{r(y) \mid y \in x\}$.

Лемма. *Пусть A_1, A_2 — транзитивные множества, а r_1 и r_2 — функции ранга на A_1 и A_2 соответственно. Тогда $A_1 \cap A_2$ транзитивно и $r_1 = r_2$ на $A_1 \cap A_2$.*

Доказательство. Прежде всего $x \in A_1 \cap A_2$, $y \in x \rightarrow y \in A_1$, так как A_1 транзитивно, и $y \in A_2$, так как A_2 транзитивно. Итак, $y \in A_1 \cap A_2$ и $A_1 \cap A_2$ транзитивно. Пусть α — наименьший ординал такой, что $\exists x$ в $A_1 \cap A_2$, для которого $r_1(x) = \alpha$, $r_1(x) \neq r_2(x)$.

Если $y \in x$, то $r_1(y) < \alpha$, откуда $r_1(y) = r_2(y)$. Следовательно, $r_2(x) = \mathrm{Sup}\{r_2(y) \mid y \in x\} = \mathrm{Sup}\{r_1(y) \mid y \in x\} = r_1(x)$ — противоречие.

Ранг [1]) множества x указывает, сколько раз надо повторить процедуру собирания, отправляясь от $\emptyset$, чтобы получить x.

Определение. Множество x называется *фундированным* [2]), если x принадлежит некоторому транзитивному множеству A, на котором существует функция ранга.

---

[1]) В подлиннике — «The rank of x». Введенную функцию ранга на A автор в дальнейшем часто называет *рангом* элементов A. Сейчас он введет запись «rank x», опуская «of», которую я сохраняю в переводе. На этой стадии значение «rank x» еще зависит от A, но вслед за следующим определением эта зависимость исчезает. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике — «well-founded» («вполне фундированное»). Но никаких других «фундированных множеств» в этой книге не рассматривается, поэтому я опускаю это «вполне» (буквально «well» — «хорошо»).

Аналогичное понятие фундированного множества можно рассматривать для систем с атомами. В этих случаях те множества x, которые не зависят от атомов (в том смысле, что атомы не входят в $S_\omega x$, см. следующее определение), было бы естественно называть «вполне фундированными». — *Прим. перев.*

Согласно лемме, ранг x в любом транзитивном множестве A таком, что $x \in A$, определен однозначно[1]), и поэтому мы можем писать rank x, не опасаясь путаницы.

Определение. Положим $S_0 x = \{x\}$, $S_{n+1}x =$ объединению $S_n x$, $S_\omega x = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n x$.

Теорема. *$x \in S_\omega x$ и $S_\omega x$ транзитивно. Если $x \in A$ и A транзитивно, то $S_\omega x \subseteq A$.*

Доказательство. Если $y \in S_\omega x$, то $y \in S_n x$ для некоторого n. Поэтому если $z \in y$, то $z \in S_{n+1}x$, откуда $z \in S_\omega x$. Кроме того, если A транзитивно и $x \in A$, то $S_0 x \subseteq A$[2]). Если $S_n x \subseteq A$, то из транзитивности A следует $S_{n+1}x \subseteq A$, откуда $S_\omega x \subseteq A$.

Пользуясь аксиомой регулярности, мы теперь докажем теорему.

Теорема. *Каждое множество x фундировано.*

Доказательство. Допустим, что x не фундировано. Согласно аксиоме регулярности, в $S_\omega x$ существует такое множество y, которое не фундировано и является в $S_\omega x$ «минимальным» по отношению к $\in$ элементом, обладающим этим свойством[3]). Следовательно, $t \in y \not\rightarrow$ (t фундировано). Пусть $A = S_\omega y$. Тогда

$$A = \{y\} \cup \bigcup_{t \in y} S_\omega t.$$

---

[1]) В подлиннике — «is unique»: «является единственным». Здесь единственность, или однозначность, не предполагает существования. — *Прим. перев.*

[2]) В этом пункте транзитивность A не используется — она высказана потому, что используется во всем этом рассуждении. — *Прим. перев.*

[3]) Буквально по аксиоме регулярности существует нефундированное y, минимальное по отношению к $\in$ не в $S_\omega x$, а в множестве нефундированных элементов $S_\omega x$ (существующем согласно аксиоме $6'_n$). Но отсюда следует это утверждение автора. — *Прим. перев.*

Для каждого $t \in y$ существует функция ранга на $S_\omega t$. Согласно доказанной лемме [1]), если мы положим $r(z) = \operatorname{rank} z$, то мы получим функцию ранга на $\bigcup_{t \in y} S_\omega t$. Теперь, если мы положим $r(y) = \operatorname{Sup}\{r(z)\}$ [2]), то, очевидно, получим функцию ранга на A, следовательно, y фундировано.

Следствие. *Для каждого транзитивного множества A существует функция ранга.*

Доказательство. Функция $\operatorname{rank} x$ является такой функцией ранга.

Заметим для дальнейшего, что для каждого ординала α можно доказать существование множества множеств ранга α. Именно, посредством трансфинитной рекурсии мы определяем $S(\alpha) = P\left(\bigcup_{\beta < \alpha} S(\beta)\right)$ [3]).

Начиная с этого места мы в этом параграфе не предполагаем аксиомы регулярности, если не оговорено противное.

Лемма. *Если y фундировано для каждого $y \in x$, то x фундировано.*

---

[1]) Помимо этой леммы, здесь используется вытекающая из нее единственность функции ранга на всяком транзитивном множестве A (эта единственность используется здесь для определения $r(z)$, которая существует на $S_\omega t$) и транзитивность множеств $S_\omega t$ и их объединения $\bigcup_{t \in y} S_\omega t$. (Легко доказывается, что объединение всякого множества транзитивных множеств транзитивно.) — *Прим. перев.*

[2]) То есть $\operatorname{Sup}\left\{ r(z) \mid z \in \bigcup_{t \in y} S_\omega t \right\}$. Здесь используется равенство этого числа ординалу $\operatorname{Sup}\{r(z) \mid z \in y\}$, вытекающее из $z \in S_\omega$ и того, что $(u \in S_\omega z,\ u \neq z) \to r(u) < r(z)$ (последнее доказывается индукцией по n, для которого $u \in S_n z$). — *Прим. перев.*

[3]) $S(\alpha)$ является множеством всех множеств, имеющих ранг $\leqslant \alpha$. Множество всех множеств ранга α есть $S(\alpha) - \bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Рассмотрим $S_\omega x$. Как прежде, можно теперь определить функцию ранга на $\bigcup_{y \in x} S_\omega y$, полагая $r(t) = \operatorname{rank} t$, потому что $S_\omega y$ являются наименьшими транзитивными множествами, обладающими элементом y, а потому для них должна существовать функция ранга. Если мы положим теперь $r(x) = \operatorname{Sup}\{r(y) \mid y \in x\}$, то получим функцию ранга на самом множестве $S_\omega x$.

Лемма. *Все ординалы α фундированы и* $\operatorname{rank}\alpha = \alpha$.

Доказательство. Тривиально по предыдущей лемме и трансфинитной индукции.

Лемма. *Если x фундировано, то таково же $P(x)$.*

Доказательство. Упражняйтесь.

Наша ближайшая цель состоит в доказательстве того, что аксиома регулярности совместима с другими аксиомами, если последние сами совместимы [1]). Доказательство в принципе очень просто, но некоторые тонкости в нем заслуживают внимания. Через ***ZF*** мы будем теперь обозначать систему ***ZF*** без аксиомы регулярности и притом с аксиомой выбора или без таковой, потому что это не будет влиять на рассуждения. Начнем

---

[1]) То есть образуют непротиворечивую систему. Термины «совместимый» и «непротиворечивый» обозначают одно и то же и соответствуют одному и тому же английскому слову «consistent». Некоторые различия в их употреблении вызываются в русском языке различиями в сочетании их с другими словами. (Так, первый из этих терминов в отличие от второго сочетается с предлогом «с».)

Другое, более тонкое различие состоит в отрицательном характере термина «непротиворечивость». Естественно считать, что «непротиворечивость» обозначает невозможность противоречия, а «совместимость» — возможность модели, и в этом смысле эти понятия надо уметь различать; но в пределах действия гёделевской теоремы о полноте и более простой теоремы о том, что следствия из формул, истинных в некоторой модели, истинны (см. теорему 1 на стр. 29), это различие пренебрежимо (поскольку принимается, что A и $\sim A$ не могут быть оба истинными суждениями).

С учетом сказаиного я буду, если не оговорено противное, свободно выбирать один из этих терминов, руководствуясь лишь соображениями удобства. — *Прим. перев.*

с некоторых общих замечаний о доказательствах непротиворечивости. Работая в ZF, мы, конечно, не можем доказать непротиворечивость ZF и тем более — непротиворечивость системы ZF + аксиома регулярности. Поэтому мы будем доказывать суждение об относительной непротиворечивости, а именно Consis $ZF \nearrow$ → Consis (ZF + аксиома регулярности). Так как это суждение принадлежит теории чисел, можно надеяться доказать его в Z_1 (или в Z_2), и действительно то доказательство, которое мы дадим, можно полностью формализовать в Z_1, хотя сперва мы изложим его неформально.

Пусть M — модель для некоторой системы аксиом A в данном формальном языке. Допустим, что изучается подмножество N множества M, состоящее из всех x в M, обладающих некоторым свойством $P(x)$, выраженным в этом языке. При этом может оказаться доказанным — как это и произойдет в рассматриваемом нами случае, — что N обладает некоторыми свойствами, *не зависящими от конкретной модели* M, вытекающими лишь из того факта, что M является моделью для аксиом A. В таких случаях можно полностью избежать разговоров о модели и формулировать результат в самой формальной системе. Для простоты предположим, что наш формальный язык не содержит никаких символов-констант.

Определение. Если F — формула, то через F_P будет обозначаться формула, полученная из F путем ограничения каждой переменной x условием $P(x)$. Это означает, что при построении F_P каждая часть $\exists x B$ превращается в $\exists x [P(x) \& B]$, а каждая часть $\forall x B$ — в $\forall x [P(x) \nearrow \rightarrow B]$. Мы будем говорить, что F_P есть формула F, *релятивизованная* условием $P(x)$ [1]).

[1]) В подлиннике — F relativized to the condition $P(x)$. Из этой формулировки неясно, как следует поступать со свободными переменными x формулы F, но подразумевается (как это видно из других мест книги), что если $x_1, \ldots, x_k$ — все такие переменные, то F_P есть формула $P(x_1) \& \ldots \& P(x_k) \rightarrow F'$, где F' получена из F путем указаниых в тексте замен для связанных переменных. — *Прим. перев.*

Теперь нам понадобится следующая очевидная, но скучная лемма. Мы допустим, что имеет место $\exists x P(x)$ [1]).

Лемма. *Если F — верная формула формального языка, то верна и F_P.*

Для строгого доказательства понадобилось бы рассматривать каждое правило исчисления предикатов, и это привело бы к чисто комбинаторному доказательству этой леммы [2]). С интуитивной точки зрения эта лемма очевидна, потому что если F — верная формула, то она имеет место в любом множестве S, в котором определены отношения и константы, соответствующие символам рассматриваемого формального языка, а следовательно, и в подмножестве $\{x \mid x \in S \,\&\, P(x)\}$. Поэтому F_P истинна в любой модели и, следовательно, верна.

Теперь мы возвращаемся к регулярности. Пусть $P(x)$ выражает условие «x фундировано».

Теорема. *Если A — аксиома **ZF**, то в **ZF** можно доказать суждение A_P.*

Выражаясь проще, можно сказать, что *фундированные множества образуют модель для **ZF**.*

---

[1]) Конечно, это предположение следует считать условием леммы. Его необходимость вызывается тем, что исчисление предикатов предполагает непустоту мира, т. е. его верные формулы могут нарушаться в пустом мире. (Пример: $\exists x(A(x) \to A(x))$ неверно в пустом мире.) В связи с этим следует напомнить, что верными в исчислении предикатов в этой книге считаются только суждения, т. е. замкнутые формулы. Даже правило вывода, позволяющее получить B из A и $A \to B$, высказано лишь для этого случая. Его без труда можно обобщить на случай, когда A и B могут содержать свободные переменные, но для пустого мира при этом потребуется, чтобы всякая свободная переменная из A входила свободно в B, поскольку любая незамкнутая формула считается истинной в пустом мире. (Пример: в пустом мире истинны формулы $x=x$ и $x= =x \to 2 \cdot 2=5$, но не $2 \cdot 2=5$.) Из трех эквивалентностей правила G для исчисления предикатов (гл. I, § 3) для пустого мира справедлива только третья. — *Прим. перев.*

[2]) По существу, это доказательство сводится к доказательству соблюдения правила F и первой эквивалентности правила G (гл. I, § 3) для релятивизованных формул. Читателю рекомендуется проделать это упражнение. — *Прим. перев.*

Наше доказательство этой теоремы будет полностью комбинаторным в том смысле, что (по существу) будет показан простой алгорифм для воспроизведения доказательства A_P. Именно, аксиома нулевого множества имеет место потому, что $\emptyset$ фундировано. Аксиома экстенсиональности, очевидно, имеет место для фундированных множеств, потому что если $x \in y$ и y фундировано, то фундировано и x. Если x, y фундированы, такова же и $\{x, y\}$. Если x фундировано, то таковы же и объединение x и множество-степень x. Множество ω фундировано, а потому имеет место аксиома бесконечности. Если $f(\alpha)$ — функция выбора для множеств A_α и функция $\alpha \to A_\alpha$ фундирована, то фундирована и функция $\alpha \to f(\alpha)$. Аксиома подстановки доказывается следующим образом. Пусть $y = \varphi(x)$ — функция, определенная для фундированных множеств и принимающая в качестве значений только фундированные множества. Тогда область функции φ, рассматриваемой на любом множестве, состоит только из фундированных множеств и, следовательно, сама фундирована [1]). Этим теорема доказана.

Теорема. *Аксиома регулярности, ограниченная фундированными множествами, доказуема в* ***ZF***.

Доказательство. Упражняйтесь.

---

[1]) Для большей строгости следует указать, что из формулы $\forall x_f \exists! y_f A(x_f, y_f, t_{f_1}, \ldots, t_{f_k})$ (где переменные x_f, y_f, $t_{f_1}, \ldots, t_{f_k}$ обозначают фундированные миожества) следует $\forall x_f \exists! y [A(x_f, y, t_{f_1}, \ldots, t_{f_k}) \& y$ фундировано]; эта формула определяет функцию (в широком смысле этого слова, т. е. не обязательно представимую миожеством упорядоченных пар), которую можно доопределить до всюду определенной функции (в том же смысле), приписав ей значение $\emptyset$ для нефундированных аргументов. К этой функции затем следует применить аксиому подстановки. Нужны некоторые дальиейшие уточнения — так, о множествах $\emptyset$ и $\{x, y\}$ следует доказать, что они играют в полученной модели свою прежнюю роль, и аиалогично для объединения и степени. Все эти опущенные подробности могут быть восстановлены читателем в порядке несложных упражнеиий. — *Прим. перев.*

Теорема. *Если* **ZF** *непротиворечива, такова же и система* **ZF** + *аксиома регулярности.*

Доказательство. Пусть R обозначает аксиому регулярности. Если $ZF+R$ противоречива, то существует верное суждение вида $R\,\&\,A_1\,\&\,\ldots\,\&\,A_n \to B\,\&\,\sim B$, где A_i — некоторые аксиомы системы **ZF**. Но тогда верно и суждение $R_P\,\&\,A_{1,\,P}\,\&\,\ldots\,\&\,A_{n,\,P} \to B_P\,\&\,\sim B_P$. Но R_P и $A_{i,\,P}$ все доказуемы в **ZF**, откуда следует, что аксиомы $ZF \to B_P\,\&\,\sim B_P$, а это означает, что **ZF** противоречива.

Подмодели, охарактеризованные некоторым свойством, называются «внутренними моделями». Заметим, что для нашей внутренней модели, состоящей из фундированных множеств, мы не изменили $\in$-отношения [1]). Метод внутренних моделей используется в классических доказательствах непротиворечивости для неевклидовых геометрий, состоящих в погружении моделей для неевклидовой геометрии в евклидово пространство [2]). Этот метод был также использован Гёделем для доказательства непротиворечивости континуум-гипотезы, которое мы изложим в следующей главе.

Из аксиомы регулярности следует $\sim x \in x$, а также несуществование такой последовательности x_n, что $x_{n+1} \in x_n$, и т. д. Однако имеется причина, по которой в обыкновенной математике никогда не приходится ссылаться на эту аксиому, а именно обыкновенно приходится рассматривать только такие нормальные множества, как множества натуральных или действительных чисел и т. д., а о них легко доказать, что все они фундированы. Если нефундированные множества существуют,

---

[1]) Разумеется, оно изменилось, поскольку было ограничено множествами этой модели, но Коэн, как и другие авторы, позволяет себе эту вольность выражения. — *Прим. перев.*

[2]) Этот пример не вполне удачен в терминологическом отношении. В широко известных моделях для неевклидовых геометрий изменяются первоначальные понятия (и притом не так, как в предыдущей сноске), поэтому их нельзя в указанном смысле назвать «внутренними». Но существо примера от этого не зависит: после того как проверка соблюдения аксиом в модели окончена, доказательство относительной непротиворечивости выполняется совершенно так же, как в предыдущем абзаце. — *Прим. перев.*

то они должны быть объектами весьма искусственной природы. Покажем, как можно построить мир, содержащий такие множества. Это рассуждение покажет нам, что аксиома регулярности не может быть выведена из других аксиом, так что в соединении с нашим предыдущим результатом она оказывается независимой аксиомой [1]).

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — формальные символы; положим формально $x_{n+1} \in x_n$ и $\sim x_i \in x_j$ при $i \neq j+1$. Пусть $R(0) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Определим $R(\alpha)$ по рекурсии как множество-степень для $\bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$. Объекты в $R(\alpha)$ при $\alpha > 0$ — это множества, тогда как $R(0)$ состоит только из x_i. Теперь для элементов множеств $R(\alpha)$ мы определим некоторое $\in$-отношение следующим образом: Если u — множество, то $v \in u$, если v — элемент u; если $u = x_i$, то $v \in u$, если $v = x_{i+1}$. Аксиомы проверяются совсем просто. Аксиома экстенсиональности имеет место даже для x_i, так как если $i<j$, то $x_{j+1} \in x_j$, но $\sim x_{j+1} \in x_i$ [2]). Строгое доказательство требует определения «формальных символов» x_i в **ZF** [3]). Можно привести дальнейшие при-

---

[1]) Конечно, она независима и вне всякой связи с этим предыдущим результатом; аксиомой же она называется независимо от своей непротиворечивости. — *Прим. перев.*

[2]) Автор допускает недосмотр. Именно, аксиома экстенсиональности нарушается в этой модели, так как множество $\{x_{j+1}\}$ равнообъемно в ней x_j, хотя эти объекты в ней различаются. Чтобы получить нужную автору модель, достаточно исключить из всех $R(\alpha)$, $\alpha > 0$, все такие элементы y, что для некоторого x_i, $i > 1$, $\{x_i\} \in S_\omega y$. После этого проверка аксиом действительно не вызывает больших трудностей (ибо x_i играет роль $\{x_{i+1}\}$, что надо всюду учитывать при этой проверке). — *Прим. перев.*

[3]) Возможно, что более простой для этого способ — построение модели для **ZF** с атомами (см. стр. 97), что можно сделать, например, следующим образом: Пусть U — такое множество, что $(v,\ w \in U,\ v \neq w) \to \sim v \in S_\omega w \,\&\, \sim w \in S_\omega v$. (Примеры бесконечных множеств этого вида, и притом любой мощности, можно получить, устраняя $\emptyset$ из элементов произвольного бесконечного ординала α.) Теперь все такие z, что $\sim \exists v\,(v \in U \,\&\, z \in S_\omega v \,\&\, v \neq z)$, образуют модель для **ZF** без аксиомы нулевого множества, но и этой аксиоме легко удовлетворить, выбрав произвольный элемент U в качестве $\emptyset$ этой модели. Остальные элементы U будут атомами.

В рассматриваемом случае в качестве α в этом построении проще всего взять ω. Тогда эти атомы можно взять в качестве x_i. — *Прим. перев.*

меры этого же типа, в которых, например, аксиома выбора оказывается ложной.

Теперь с помощью аксиомы регулярности мы докажем теорему, которая неоднократно понадобится нам впоследствии.

Теорема. *Пусть A — экстенсиональное множество, т. е. такое, что $x, y \in A$, $x \neq y \to \exists z$ в A, такое, что $z \in x \,\&\, \sim z \in y$ или $z \in y \,\&\, \sim z \in x$. Тогда существует единственное* ***транзитивное*** *множество A' и единственное взаимно однозначное отображение φ множества A на A', такое, что φ является $\in$-изоморфизмом, т. е. $x \in y \leftrightarrow \varphi(x) \in \varphi(y)$.*

Доказательство. Определим $\varphi(x)$ на A с помощью индукции по $\operatorname{rank} x$. Если $\operatorname{rank} x$ — наименьший для $x \in A$, положим $\varphi(x) = \emptyset$. Если φ уже определено для всех таких $y \in A$, что $\operatorname{rank} y < \alpha$, то при $x \in A$ и $\operatorname{rank} x = \alpha$ положим $\varphi(x) = \{\varphi(y) \mid y \in x \,\&\, y \in A\}$ [1]). Пусть A' есть область значений φ. Для x, y из A ясно, что если $x \in y$, то $\varphi(x) \in \varphi(y)$. Мы сперва покажем, что φ взаимно однозначно, т. е. что $x \neq y$ влечет $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Это доказательство мы проведем индукцией по $\alpha = \max(\operatorname{rank} x, \operatorname{rank} y)$.

Если x и y имеют в A наименьший ранг, то не существует такого $z \in A$, что $z \in x \,\&\, \sim z \in y \vee z \in y \,\&\, \sim z \in x$ и, в силу экстенсиональности A, $x = y$, а потому $x \neq y$ влечет $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ [2]).

Пусть это утверждение о φ верно для всех $\beta < \alpha$, тогда если $x \neq y$, то $\exists z \in A$ такое, что, например, $z \in x$ и $\sim z \in y$. Тогда $\varphi(z) \in \varphi(x)$. Если $\varphi(z) \in \varphi(y)$, то для некоторого $w \in y$ имеет место $\varphi(z) = \varphi(w)$. Но $\max(\operatorname{rank} z,$

---

[1]) Законность такого определения функции φ (т. е. существование функции φ с указанными свойствами) легко доказывается индукцией по α. Точнее, для каждого β при этом доказывается существование такой φ, определенной для $x \in A$ и $\operatorname{rank} x = \alpha < \beta$; затем в качестве β достаточно выбрать $\operatorname{Sup}\{\operatorname{rank} x \mid x \in A\}$, чтобы получить требуемую функцию φ — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике была неточность: автор исходил из того, что если $x \in A$ имеет наименьший $\operatorname{rank} x$ в A, то $\operatorname{rank} x = 0$. И в нескольких других случаях это доказательство уточнено при переводе. — *Прим. перев.*

$\operatorname{rank} w) < \alpha$, откуда $z = w$, что вместе с $\sim z \in y$ и $w \in y$ приводит к противоречию. Следовательно, $\sim \varphi(z) \in \varphi(y)$. Так как случаи $z \in y$ и $\sim z \in x$ рассматриваются аналогично, получаем $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Теперь, если $\varphi(x) \in \varphi(y)$, то $\exists w$ в A такое, что $w \in y \,\&\, \varphi(x) = \varphi(w)$. Поэтому $x = w$ и $x \in y$. Следовательно, φ — $\in$-изоморфизм. Наконец, $x \in \varphi(y)$ — $\exists w$ в A такое, и что $w \in y$, $x = \varphi(w)$, а это доказывает транзитивность A'.

Если бы существовали две такие функции φ_1 и φ_2, то пусть α — наименьший ординал, такой, что $\exists x$, $\operatorname{rank} x = \alpha$ и $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Допустим, что $\exists y$, $y \in \varphi_1(x) \,\&\, \sim y \in \varphi_2(x)$. Так как область значений φ транзитивна, $\exists z \in x$ такое, что $y = \varphi_1(z)$. Тогда $z \in A$ и, в силу $\operatorname{rank} z < \operatorname{rank} x = \alpha$, имеет место $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$, $y = \varphi_2(z)$ и (в силу $z \in x$ и z, $x \in A$) $\varphi_2(z) \in \varphi_2(x)$ или $y \in \varphi_2(x)$ — противоречие.

На стр. 101 при рассмотрении независимости аксиомы степени мы допустили, что существует множество всех таких x, что $S_n x$ конечно или счетно при всех n. Читатель может легко проверить, что таким множеством является просто множество всех множеств счетного ранга, так что наше прежнее рассуждение теперь получило обоснование [1]).

§ 6. Система Гёделя — Бернайса

Из-за аксиомы подстановки система **ZF** имеет бесконечно много аксиом. Впоследствии мы покажем, что ни из какого конечного числа этих аксиом не может вытекать вся система [2]). Но хотя в аксиоме подстановки содержится бесконечное число суждений, все эти сужде-

---

[1]) Явный недосмотр: пусть x — множество-степень для ω, тогда $\operatorname{rank} x = \omega + 1$ и x входит в то множество, о котором говорит автор, но $S_1 x = x$ несчетно. Для исправления достаточно ввести понятие *наследственно-перечислимого* множества, понимая под этим такое миожество x, что всякий элемент $S_\omega x$ ие более чем счетен. Вместо множества, о котором говорит автор, речь должна идти о множестве всех наследственно-перечислимых множеств счетного ранга. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике нет слова «этих»; однако следует иметь в виду, что все аксиомы **ZF** вытекают из аксиом рассматриваемой в этом параграфе системы **GB**, которых всего 18 или 19 (см. следующую сноску). — *Прим. перев.*

ния порождаются простым правилом, которое можно описать конечным числом слов. Поэтому представляется вероятным, что эту конструкцию можно аксиоматизировать и таким образом суметь обойтись конечным множеством аксиом. Именно такого рода системой является система аксиом Гёделя — Бернайса.

Аксиома подстановки утверждает, что если $y=\varphi(x)$ — функция, определенная каким-либо «свойством», то область φ на произвольном множестве u существует. Для того чтобы описать, что мы понимаем под «свойством», понадобилось бесконечное число суждений. Поэтому теперь мы введем новый примитивный объект, именуемый «классом». Читателю следует освоиться с тем интуитивным представлением, что класс — это «коллекция» всех множеств x, обладающих некоторым свойством $A(x)$. Например, тривиальное свойство вида $\sim x\in x$ определяет универсальный класс. Конечно, множество всегда следует рассматривать как класс, потому что для любого данного множества x условие $y\in x$ представляет собой такое свойство y, которое определяет x. Теперь аксиому подстановки можно высказать в виде *единой* аксиомы о классах, определяющих функции. Правда, нам теперь нужны еще аксиомы, позволяющие показывать для любого свойства, что ему соответствует некоторый класс. Но так как каждое суждение строится посредством конечного числа применений некоторых элементарных процедур вроде образования конъюнкции, присоединения кванторов и т. д., для этой цели может оказаться достаточным конечное число аксиом.

Таким образом, в ***GB***[1]) используется два типа переменных. Большие буквы обозначают переменные для

[1]) До сих пор система, обозначаемая здесь через ***GB***, обозначалась в литературе через Σ^*. а система, полученная из нее устранением аксиомы выбора, через Σ. Эти обозначения были введены К. Гёделем ([14] — точнее, в первом мимеографическом издании этой работы, 1940 г.; русский перевод этого первого варианта опубликоваи в *Успехах математических наук*, № 1, (1948), 96—149). Правда, в формулировках ***GB*** и Σ^* имеются различия. (Например, в Σ аксиома подстановки формулируется без предположения о существовании единственного v, см. ниже аксиому 8, в связи с чем аксиома 3 отсутствует; см. сноску 2 на стр. 92. Аксиома бесконечности также была дана в другой форме, см. сноску 2 на стр. 119;

классов, а малые — для множеств. Эквивалентным образом, можно рассматривать нашу систему как имеющую только классовые переменные и одно унарное отношение $\mathfrak{M}(X)$, означающее «X есть множество» ($\mathfrak{M}$ — от немецкого «Menge»), а также $\in$-отношение[1]). Аксиомы образуют следующий перечень.

был введен предикатный символ Cls, с аксиомой Cls (x) — «всякое множество есть класс», которую можно выразить также формулой $\forall x \exists Y (x = Y)$ или разрешением употреблять аксиомы вида $\forall Y \varphi(Y) \supset \varphi(x)$ (при условии, что Y не встречается в $\varphi(Y)$ в части вида $\forall x B$ или $\exists x B$) об этом см. ниже в этой сноске; кроме того, имеются второстепенные расхождения и в формулировках других аксиом. Вся система Σ^* делилась на группы иначе, чем это делает Коэн для *GB*). Эти различия, однако, касаются лишь формулировки — именно системы *GB* (без аксиомы выбора) и Σ эквивалентны (в том смысле, что совпадают классы их теорем, если отвлечься от ненужного символа Cls), и то же самое можно сказать о системах *GB* и Σ^*. Гёделевская система Σ столь же несущественно отличалась от другой системы, предложенной Бернайсом в 1937—1941 гг. (A system of axiomatic set theory, I, II, *J. S. L.*, I-2 (1937), 65—77; II-4 (1941), 1—17.)

Учитывая роль Бернайса и Гёделя в создании этих систем, следует приветствовать переименование последних в *GB*. Правда, необходимо устранить пробел, допущенный Коэном в связи с прежней аксиомой Cls (x) — именно надо четко сформулировать правила исчисления предикатов с двумя типами переменных. Для этого надо, в частности, уточнить формулировку правила C из § 3 гл. I, указав, что константы c, c' и c'' могут принадлежать любому типу (предварительно надо указать, что для каждого типа переменных вводится соответствующий тип констант; в формулировках правил A—G малые буквы обозначают теперь переменные любого типа). В правиле D надо указать, что переменные x и x' должны принадлежать одному и тому же типу. В правилах E и F константа c должна принадлежать тому же типу, что и переменная x. (Слова «надо» и «должна» относятся лишь к предлагаемому сейчас способу уточнения — возможны и другие варианты.) После этого, взамен аксиомы Cls (x), можно либо ввести указанную выше аксиому $\forall x \exists Y\ (x = Y)$, либо расширить правило E, допустив в нем любые случаи, когда переменная x относится к типу X, Y, ..., а константа c — произвольна

(В тексте автора было выше указано, что «множество всегда следует рассматривать как класс» — пробел состоял лишь в том, что это указание оставалось неформализованным и, следовательно, не включенным в *GB*.) — *Прим. перев.*

[1]) Аксиому 1 ниже можно заменить на $Y \in X \to \exists u\ (u = Y)$, изгнав таким образом символ $\mathfrak{M}$. С другой стороны, в силу аксиом 1 и 4 можно формулировать *GB* с одним алфавитом переменных—

Аксиомы для множеств

1. $Y \in X \to Y$ — *множество* $(\mathfrak{M}(Y))$.
2. $X = Y \leftrightarrow \forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$.
3. $\exists x \forall y\,(\sim y \in x)$.
4. $\forall x \forall y \exists z \forall w\,(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$.
5. $\forall x \exists y \forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists w\,(z \in w \,\&\, w \in x))$.
6. $\exists x\,(\emptyset \in x \,\&\, \forall y\,(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$.
7. $\forall x \exists y \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.

Это — обычные аксиомы для множеств, за исключением аксиомы 2 (аксиомы экстенсиональности для классов) и аксиомы 1, утверждающей, что элементом класса может быть только множество; это совместимо с нашей идеей о том, что класс является «коллекцией» множеств.

8. Аксиома подстановки
$\forall X\,((\forall u \exists! v\,\langle u, v\rangle \in X) \to \forall u \exists v\,(v$ — область функции, определенной классом X на $u))$. Фраза, написанная словами, может быть выражена формулой $\forall t\,(t \in v \leftrightarrow \exists w\,(w \in u \,\&\, \langle w, t\rangle \in X))$ [1]).

скажем, X, Y, ..., вовсе не употребляя снмвола $\mathfrak{M}$, но заменяя все частн вида $\forall x B(x)$ на $\forall X \exists Y\,(X \in Y \to B(X))$, а части вида $\exists x\,B(x)$ — на $\exists X \exists Y\;\;(X \in Y \,\&\, B(X))$. (Конечно, прн этом надо нзбегать коллнзнй для переменных X, Y, ..., выбирая в качестве таковых, напрнмер, переменные, вовсе не встречающиеся в $B(x)$ и в тех формулах, в которые входят эти частн. О формулах со свободными переменными сейчас можно ие заботиться ввиду отсутствия таковых в перечне аксиом.) Конечио, это неудобно, но сказанное служит опровержением встречающихся нногда утверждеиий о том, что конечная аксиоматизацня теории множеств требует введения дополнительных переменных (или, что то же — предикатных символов). Такие утверждения справедлнвы лишь для специальных форм систем аксиом (например, для *ZF*), причем в общем виде этот вопрос остается неизученным. — *Прим. перев.*

[1]) Точнее: эта формула должна заменять указаниую фразу вместе с темн скобкамн, в которые она заключена. Такнм образом, в явной запнси аксиома подстановки содержит кусок $\forall u \exists v \forall t$ и оканчнвается тремя правымн скобкамн, следующими непосредственно за буквой X. — *Прим. перев.*

Аксиомы для образования классов[1])

9. $\exists X \forall a (a \in X \leftrightarrow \exists b \exists c (a = \langle b, c \rangle \& b \in c))$.

10. $\forall X \forall Y \exists Z \forall u (u \in Z \leftrightarrow u \in X \& u \in Y)$.

11. $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \sim u \in X)$.

12. $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists v (\langle v, u \rangle \in X))$.

13. $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists r \exists s (u = \langle r, s \rangle \& s \in X))$.

14. $\forall X \exists Y \forall a (a \in Y \leftrightarrow \exists b, c (\langle b, c \rangle = a \& \langle c, b \rangle \in X))$.

15. $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists a, b, c (\langle a, b, c \rangle \in X \& \langle b, c, a \rangle \in Y \& \langle b, c, a \rangle = u))$

16. $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists a, b, c (\langle a, b, c \rangle \in X \& \langle a, c, b \rangle \in Y \& \langle a, c, b \rangle = u))$.

Заметим, что если начать с классов, соответствующих свойствам, то классы, существование которых утверждается перечисленнымн аксиомами, также соответствуют свойствам. Скоро мы докажем, что для каждого свойства можно показать существование соответствующего класса[2]).

17. Аксиома выбора

$$\exists X \forall a (a \neq \emptyset \rightarrow \exists ! u (u \in a \& \langle a, u \rangle \in X)).$$

Это — весьма сильная форма, утверждающая, что существует класс, выбирающий один элемент из каждого непустого множества.

---

[1]) В подлиннике — Axioms for class formations. Несмотря на небольшие различия между формулировками для *GB* и Σ^*, имеет место ранее отмеченная зависимость каждой из аксиом 14 и 16 (см. А. А. Марков, О зависимости аксиомы В6 от других аксиом системы Вернайса — Гёделя, *Изв. АН СССР*, Сер. мат., **12** (1948), 569—570 и Bernays P., A system of axiomatic set theory, VII, *J. S. L.*, **17** (1954), 81—96). Но нельзя утверждать, что обе эти аксиомы вместе выводнмы из остальных. Бернайс (в только что указанной работе) установнл, что в остальном этн аксиомы 1—16 независимы. — *Прим. перев.*

[2]) Как будет видно из дальнейшего, речь идет здесь по-прежнему о свойствах, выразимых формулами из *ZF*. — *Прим. перев.*

18. Аксиома регулярности[1])

$$\forall X\,(X \neq \emptyset \to \exists u\,(u \in X \,\&\, \forall y\,(y \in X \to \sim y \in u))).$$

Как уже было сказано, все аксиомы ***GB***, за исключением 17, останутся верными в ***ZF*** при замене понятия «класс» понятием «свойства». Аксиома 17 не вытекает непосредственно из ***ZF***, потому что неясно, каким образом можно задать в языке ***ZF*** правило, осуществляющее выбор единственного элемента из каждого непустого множества[2]). Действительно, можно доказать, что такая сильная форма аксиомы выбора недоказуема в ***ZF***.

Пусть записи $A_n(t_1, \ldots, t_k; x_1, \ldots, x_l)$ пробегают все формулы системы ***ZF***, свободные переменные которых

---

[1] Следует заметить, что X в этой аксиоме — классовая переменная в отличие от игравшей ту же роль в прежней формулировке этой аксиомы (гл. II, § 1) множественной переменной x. На первый взгляд это может показаться существенным расширением системы по сравнению с ***ZF***, не предусмотренным дальнейшими рассуждениями этого параграфа. Но в действительности сила ***GB*** не изменилась бы при замене этой аксиомы прежней аксиомой регулярности. В самом деле, если X — непустой класс, пусть $v \in X$; рассмотрим множество $w = X \cap S_\omega v$ (существование такого множества вытекает из аксиомы выделения $\forall x \forall A \exists y \forall z\ (z \in y \leftrightarrow z \in x \,\&\, z \in A)$, доказываемой для ***GB*** совершенно так же, как $6'_n$ для ***ZF***). Тогда $v \in w$ (ибо $v \in S_\omega w$) и, применяя прежнюю аксиому регулярности, берем такое множество u, что $u \in w \,\&\, \forall y\ (y \in w \to \sim y \in u)$. Тогда $u \in X$ и, кроме того, $u \in S_\omega v$, а потому если $y \in X \,\&\, y \in u$, то $y \in S_\omega v$ (в силу транзитивности $S_\omega v$) и $y \in w$, что вместе с $y \in u$ и $\forall y\,(y \in w \to \sim y \in u)$ дает противоречие. Следовательно, $\forall y\,(y \in X \to \sim y \in u)$ и аксиома 18 следует из прежней аксиомы регулярности и остальных аксиом ***GB***. — *Прим. перев.*

[2]) Можно было бы расширить язык ***ZF***, введя формально новый символ $C(x, y)$ двуместного предиката и считая, что любые формулы, содержащие этот символ, могут по-прежнему встречаться в схеме 6_n, как и в логических правилах, но никаких других новых аксиом при этом не вводится. Такое расширение можно считать столь же несущественным, как употребление констант c, c', ..., неоднократно используемое автором. Но оно позволило бы написать формулу о том, что «универсальный класс» вполне упорядочен отношением $C(x, y)$, выразив таким образом в этом расширении ***ZF*** эквивалент рассматриваемой формы аксиомы выбора. — *Прим. перев.*

указанным образом разбиты на две группы[1]). Тогда в ***GB*** имеет место следующая

Теорема[2])

$$\forall t_1, \ldots, t_k \exists X \forall u (u \in X \leftrightarrow \exists x_1, \ldots$$
$$\ldots, x_l (u = \langle x_1, \ldots, x_l \rangle \& A_n(t_i; x_j))).$$

Она означает, что всякому отношению, зависящему от l переменных, соответствует класс всех l-ок, удовлетворяющих этому отношению.

В этой теореме не предполагается, что A действительно содержит формально все переменные x_i, потому что всегда можно предположить, что A зависит от x_i тривиально[3]). Допустим теперь, что теорема истинна для всех формул, имеющих длину меньшую, чем данная, и притом независимо от числа формально встречающихся в них переменных. Тогда мы должны рассмотреть случаи, в которых A имеет вид $B \& C$, $\sim B$ или $\exists u B(t_1, \ldots, t_k; v, x_1, \ldots, x_l)$. Первые два случая охватываются аксиомами 10 и 11. Чтобы рассмотреть третий случай, допустим, что Y есть класс всех $\langle v, x_1, \ldots, x_l \rangle$, удовлетворяющих B при конкретном выборе значений t_i. Тогда аксиома 12 дает существование требуемого класса X. Остается лишь рассмотреть случай примитивных формул. Так как символ $=$ можно изгнать, заменяя $x=y$ на $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$, остается лишь рассмотреть примитивные формулы $x_i \in x_j$, $x_i \in t_j$, $t_i \in x_j$ и $t_i \in t_j$. Теперь из аксиом 10 и 11 можно вывести существование универсального класса X, такого, что

---

[1]) Допускаются случаи $k=0$ и $l=0$. Кроме того, для всякого множества x следует положить $\langle x \rangle = x$ (см. [14]), что используется уже в формулировке этой теоремы при $l=1$, а также в ее доказательстве для других случаев — *Прим. перев.*

[2]) В ее формулировке $A_n(t_i; x_j)$ обозначает $A_n(t_1, \ldots, t_k; x_1, \ldots, x_l)$. — *Прим. перев.*

[3]) Введение предположения о том, что A формально содержит x_i (в качестве свободной переменной) лишь на первый взгляд сузило бы теорему, в силу, например, эквивалентности $A \leftrightarrow A \& x_i = x_i$, в которой правая часть зависит от x_i тривиально. Аналогично можно ввести тривиальную зависимость от любого числа других переменных, что и имеет в виду автор. — *Прим. перев.*

$\forall u(u \in X)$ [1]). Из аксиомы 13 можно далее вывести существование класса всех r-ок множеств для любого r. Случай $t_i \in t_j$ можно теперь оставить в стороне, потому что в этом случае класс X или состоит из всех l-ок, или является пустым множеством. Рассмотрим случай $x_i \in x_j$ и допустим сперва, что $i<j$. Согласно аксиоме 9, класс всех $\langle x_i, x_j\rangle$, таких, что $x_i \in x_j$, существует. Согласно аксиоме 13, можно взять прямое произведение этого класса и класса всех $(l-j)$-шек [2]) и вывести отсюда существование класса всех таких $\langle\langle x_{j+1}, \ldots, x_l\rangle, \langle x_i, x_j\rangle\rangle$, где $x_i \in x_j$, а затем — по аксиоме 14 — существование класса всех $\langle\langle x_i, x_j\rangle, \langle x_{j+1}, \ldots, x_l\rangle\rangle$, таких, что $x_i \in x_j$. Пользуясь аксиомой 15 и вспоминая наше индуктивное определение r-ки [3]), мы заключаем о существовании класса всех $\langle x_i, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_l\rangle$, таких, что $x_i \in x_j$. Продолжая рассуждения этого же типа, в которых используется также аксиома 16, можно, наконец, показать существование класса всех $\langle x_1, \ldots, x_l\rangle$, таких, что $x_i \in x_j$ [4]).

---

[1]) Так как исчисление предикатов предполагает непустоту мира (см. сноску 1 к стр. 135), существует какой-нибудь класс A. По аксиоме 11 существует дополнение к нему, а пересечение его с A существует по аксиоме 10; оно пусто, и дополнение к нему является универсальным классом.

Непустота мира устанавливается для каждого типа переменных одним и тем же способом. Так как можно было бы рассматривать систему ***GB*** с одним лишь типом переменных — для классов, — то существование A можно извлечь и из непустоты мира для системы ***GB*** с одним типом переменных. Кроме того, пустое множество существует, согласно аксиоме 3, и, согласно сказаниому на стр. 141 (см. также сноску 1 на стр. 141—142), оно является классом, а дополнение к нему — универсальным классом. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь автор неявно предполагает, что $l>j$. — *Прим. перев.*

[3]) См. стр. 103; это определение применимо и в случае $r=2$ в силу соглашения, введенного в сноске 1 на стр. 146. По-видимому, аксиому 15 здесь следует применить к $\langle\langle x_{j+1}, \ldots, x_l\rangle, \langle x_i\, x_j\rangle\rangle$, что дает класс всех $\langle x_i, \langle x_j, \langle x_{j+1}, \ldots, x_l\rangle\rangle\rangle$, таких, что $x_i \in x_j$, а индуктивное определение r-ки дает затем класс всех таких $\langle x_i, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_l\rangle$, что $x_i \in x_j$. — *Прим. перев.*

[4]) Сперва, при $i<j-1$, можно с помощью аксиомы 13 получить существование класса всех таких $\langle x_{j-1}, \langle x_i, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_l\rangle\rangle$, что $x_i \in x_j$. Опуская в рассуждении это последнее условие (которое будет подразумеваться всюду) и записывая эти пары в виде $\langle x_{j-1}, \langle x_i, \langle x_j, x_{j+1}, \ldots, x_l\rangle\rangle\rangle$, можно на основании аксиомы 15 заклю-

Случай $j<i$ рассматривается теперь легко, так же как и случай $i=j$ [1]). Класс всех $\langle x_1, \ldots, x_l\rangle$, таких, что $x_i \in t_j$, получается с помощью аксиомы 13 путем образования прямого произведения множества t_j с $l-1$ экземплярами универсального класса [2]). Остается рассмотреть лишь случай $t_i \in x_j$. Класс $\{\langle t_i, x\rangle \mid$ для всех $x\}$ [3]) существует, так как он является прямым произведением $\{t_i\}$ с универсальным классом. Пересечение этого класса с классом, полученным по аксиоме 9, дает класс $\{\langle t_i, x\rangle \mid t_i \in x\}$. Теперь аксиомы 12 и 14 дают класс $\{x \mid t_i \in x\}$ [4]). Теперь уже рассмотренная конструкция, связанная с прямыми произведениями, дает класс

чить о существовании класса всех таких $\langle x_i, \langle x_j, x_{j+1}, \ldots, x_l\rangle, x_{j-1}\rangle$, а затем на основании аксиомы 16 о существовании класса всех таких $\langle x_i, x_{j-1}, \langle x_j, \ldots, x_l\rangle\rangle$, т. е. класса всех таких $\langle x_i, x_{j-1}, \ldots, x_l\rangle$. Повторяя это же рассуждение, можно затем получить класс всех таких $\langle x_i, x_{i+1}, \ldots, x_l\rangle$ и, далее, применяя i—1 раз аксиому 13 — класс всех таких $\langle x_1, \ldots, x_l\rangle$. — *Прим. перев.*

[1]) В случае $j<i$ сперва по аксиоме 9 был бы получен класс всех таких $\langle x_i, x_j\rangle$, что $x_i \in x_j$, затем по аксиоме 14 — класс всех таких же $\langle x_j, x_i\rangle$, после чего дословно были бы применены (с переменой ролей букв i и j) предыдущие рассуждения. В случае $i=j$ класс всех таких $\langle x_i\rangle$ (т. е. x_i), что $x_i \in x_i$ пуст, в силу аксиомы регулярности, а переход от него к классу всех таких $\langle x_1, \ldots, x_l\rangle$ происходит как в уже рассмотренных случаях, но проще. (Сперва взять, при $i<l$, класс всех таких $\langle x_{i+1}, x_i\rangle$, затем на основании аксиомы 14 класс всех таких $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, и т. д.) Но можно обойтись и без помощи аксиомы регулярности, воспользовавшись теоремой $x=y \leftrightarrow \forall z\,(x \in z \leftrightarrow y \in z)$ (которую легко доказать, пользуясь аксиомой 4: $y \in \{x\} \rightarrow y=x$ и т. д.). Именно — класс всех $\langle x, y\rangle$, таких, что $\forall z\,(x \in z \leftrightarrow y \in z)$, можно получить, пользуясь уже рассмотренными случаями комментируемой теоремы — случай $i=j$ для этого не нужен; но только что упомянутой теореме, это есть класс всех $\langle x, y\rangle$, таких, что $x=y$; пересекая его с классом всех $\langle x, y\rangle$, таких, что $x \in y$ (см. аксиому 9), получаем класс всех таких пар $\langle x, x\rangle$, что $x \in x$; теперь, согласно аксиомам 12 и 4, существует класс всех таких x (или x_i), что $x \in x$. — *Прим. перев.*

[2]) Наряду с аксиомой 13 в случаях для $x_{i+1}, \ldots, x_l$ применяется аксиома 14, причем предварительно образуется при $l>i+1$ прямое произведение $l-i$ универсальных классов, состоящее из $(l-i)$-шек $\langle x_{i+1}, \ldots, x_l\rangle$. (При $i=l$ эти случаи отсутствуют.) — *Прим. перев.*

[3]) Здесь автор начинает применять обозначения типа $\{t(x_1, \ldots, x_r) \mid A(x_1, \ldots, x_r)\}$ (см. сноску на стр. 103) к классам. — *Прим. перев.*

[4]) Аксиому 14 здесь незачем использовать. — *Прим. перев.*

$\{\langle x_1, \ldots, x_l\rangle \mid t_i \in x_j\}$, чем заканчивается доказательство этой теоремы.

Следствие. $\forall t_i \exists X \forall u (u \in X \leftrightarrow A_n(t_i; u))$.

Это значит, что каждое свойство определяет[1]) некоторый класс.

Теорема. *Каждая теорема* ***ZF*** *является теоремой* ***GB***.

Доказательство. Нам достаточно показать, что аксиома подстановки имеет место в ***GB***. Если $A_n(x, y; t_1, \ldots, t_n)$ — формула системы ***ZF***, которая для любых конкретных t_i определяет y как функцию $\varphi(x)$ от x, то предыдущая теорема обеспечивает существование класса X, являющегося графиком φ. Теперь применение аксиомы 8 дает соответствующую аксиому подстановки.

Чтобы получить обратное утверждение, допустим, что аксиома выбора в ***GB*** заменена той формой этой аксиомы, которая была использована при формулировке ***ZF***. Следующая теорема на самом деле может быть доказана и без такого изменения, но доказательство потребует тогда применения метода «вынуждения», который будет введен в гл. IV.

Теорема. *Каждая теорема* ***GB****, в которой говорится только о множествах, является теоремой* ***ZF***.

Доказательство. Допустим, что T — теорема в ***GB***, но не в ***ZF***. Тогда по теореме о полноте существует счетная модель M для ***ZF***, в которой T ложна. Пусть $A_n(x, y_1, \ldots, y_k)$ — перечисление всех формул из ***ZF***. Обозначим через $S_n(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k)$ для $\bar{y}_i \in M$ множество $\{x \mid x \in M \,\&\, A_{n,M}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k)\}$. Пусть теперь M' обозначает объединение M и множества всех множеств S_n, с условием, что если для некоторого $x \in M$ имеет место $\forall y (y \in M \rightarrow (y \in S_n \leftrightarrow y \in x))$, то S_n и x отождествляются. Тогда ясно, что M' представляет собой модель для ***GB***, причем элементы M' рассматриваются

[1]) В подлиннике — determines (не defines!). — *Прим. перев.*

как классы, а те классы, которые являются множествами, в точности совпадают с первоначальными элементами M. Следовательно, T истинна в M', а значит, и в M, так как никаких новых «множеств» в M' нет — противоречие [1]).

---

[1]) Доказанная теорема (принадлежащая Мостовскому) означает, что ***GB*** представляет собой лишь несущественное расширение ***ZF***. Она дает возможность употреблять классы при изложении доказательств, относящихся к ***ZF***, лишь бы соответствующие рассуждения были формализуемы в ***GB***. В частности, теперь можно пользоваться обобщением понятия функции, называя «функцией» любой класс F упорядоченных пар такой, что $\forall uv,\ w((u,\ v)\swarrow \in F \& (u,\ w) \in F \to v = w)$; это понятие принадлежит ***GB***.

Теперь можно обобщить теорему о трансфинитной рекурсии из § 3 этой главы (см. стр. 121). Именно, в предположении $\forall x \exists ! y A_n (x,\ y;\ t_1,\ \ldots,\ t_k)$ существует единственная функция F, определенная на классе Оп всех ординалов, такаи, что $F(0) = z$ и для всех β $F(\beta) = \varphi(h)$; здесь по-прежнему φ обозначает функцию, определенную формулой A_n, z — произвольное множество, а h — функцию F, ограниченную ординалом β; согласио аксиоме подстановки (и аксиоме 2), h есть множество.

Для доказательства этой теоремы в ***GB*** достаточно рассмотреть класс H всех функций f, определенных на ординалах α (при данных z и φ) и удовлетворяющих теореме о трансфинитной рекурсии из § 3. Существование H вытекает из основной метатеоремы этого параграфа о существовании классов Легко доказывается, что объединеиие класса H (т. е. класс всех объектов, принадлежащих хотя бы одному элементу H) является функцией искомого вида (ср. сиоску 3 к стр. 193—194). Единственность этой функции вытекает из аксиомы 2, ибо для любых двух таких функций F_1 и F_2 трансфинитной иидукцией по α доказывается $F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$.

Эта теорема дает возможность преодолевать некоторые мелкие неудобства, вызываемые ограниченностью прежней формы теоремы о трансфинитной рекурсии, а именно ограниченностью функции f (см. теорему на стр. 121) числом $\alpha+1$. Автор просто пренебрегает в своем изложении этими неудобствами. Согласно комментируемой теореме, ее применения не выводят за пределы ***ZF***, коль скоро результаты этих применений формулируются в ***ZF***.

На функции системы ***GB*** распространяется прежняя термянология — область определения, область (значенний) и т. п. Точно так же в ***GB*** под «отношениями» можно понимать любые классы упорядоченных пар В определении полного упорядочения теперь присутствует квантор по непустым подклассам данного класса — в ***ZF*** ему соответствует употребление пронзвольной формулы. Поэтому формулировка аксиомы выбора для расширения системы ***ZF*** упомянутого в сноске 2 на стр. 146, должна быть схемой аксиом. (Впрочем, можно усилить эту формулировку, потребовав, чтобы на-

Следствие[1]). *Системы* ***ZF*** *и* ***GB*** *равно-непротиворечивы* (equiconsistent), *т. е.*

$$\text{Consis } \boldsymbol{ZF} \leftrightarrow \text{Consis } \boldsymbol{GB}.$$

Доказательство этой теоремы и следствия можно провести независимо от каких-либо рассуждений о моделях посредством анализа доказательств. Можно показать, что любое доказательство в ***GB*** теоремы, в которой говорится только о множествах, требует существования лишь конечно многих классов. Затем употребление этих конкретных классов можно устранить, ссылаясь конечное число раз на аксиому подстановки.

§ 7. Высшие аксиомы и модели для теории множеств

Рассматривая модели в гл. I, мы пользовались интуитивной теорией множеств. Теперь ясно, что все эти рассуждения можно легко формализовать в ***ZF***. Несмотря на то что ***ZF*** не содержит символов для произвольных формальных систем, приписывая натуральные числа (а быть может, даже ординалы) используемым символам, можно, как уже было объяснено, «арифметизировать» доказательства, оставаясь всецело внутри

чальный сегмент универсального класса V при упорядочении $C(x, y)$, образуемый C-предшественниками произвольного элемента V, являлся множеством. Это условие выразимо формулой $\forall x \exists u \forall z (z \not\in u \leftrightarrow S(z, x))$ и дает возможность освободиться в этой формулировке полного упорядочения V посредством C от рассмотрения классов, заменив только что упомянутую схему аксиом одной аксиомой.). — *Прим. перев*

[1]) Это следствие было получено Ильзой Новак (Novak I., A construction for models of consistent systems, *Fund. Math.*, **37** (1951), 87—110). Затем в 1954 г. оно было получено Шенфилдом (Shoenfield J., A relative consistency proof, *J. S. L.*, **19** (1954), 21—28) путем применения некоторой разновидности тех финитных методов, о которых в следующем абзаце говорит автор. Правда, Новак и Шенфилд недостаточно аккуратно рассматривали аксиому подстановки. Это следствие можно некоторым образом обобщить, причем теорема будет вытекать из этого обобщения. Корректная формулировка и доказательство этого обобщения содержатся в брошюре Мак-Нотона и Хао Вана «Аксиоматические системы теории множеств», ИЛ, М., 1962. — *Прим. перев.*

ZF[1]). Таким образом, в ZF можно выразить следующую аксиому:

Аксиома М.
Существует множество M и бинарное отношение $\in \subseteq M \times M$, делающее M моделью для ZF.

Мы подчеркиваем, что аксиома M является единым суждением в ZF, несмотря на тот факт, что в ZF имеется бесконечно много аксиом. Это выполняется потому, что правило образования всех аксиом выразимо в виде единого суждения. Теорема о полноте, далее, утверждает, что аксиома M эквивалентна Consis ZF[2]), так что эта аксиома не приводит ни к какой новой точке зрения. Но можно высказать и следующую аксиому.

Аксиома СМ.
Существует множество M, такое, что если R есть $\{\langle x, y\rangle \mid x \in y \& x \in M \& y \in M\}$, то M является моделью для ZF с первичным отношением[3]) *R.*

Эта модель M называется *стандартной* моделью, потому что используемое в ней $\in$-отношение является просто обычным (standard) $\in$-отношением[4]). Обе аксиомы

---

[1]) Автор имеет в виду выразимость в ZF понятия аксиомы ZF. — *Прим. перев.*

[2]) Точнее, теорема о полноте утверждает лишь, что аксиома М следует из Consis ZF. Обратное же утверждение вытекает из того известного обстоятельства, что для суждений, толкующих только об элементах M (т. е. таких, в которых все кванторы ограничены множеством M), понятие истины выразимо в ZF. (Это справедливо вообще для любого множества M, хотя бы никак не связанного с рассматриваемой аксиомой.) Как уже упоминалось в § 9 гл. I, пользуясь понятием истины для формул системы, можно доказать ее непротиворечивость (с помощью математической индукции, которая уже была доказана в ZF). — *Прим. перев.*

[3]) То есть с отношением R в роли $\in$. (В подлиннике просто: for ZF, under the relation R.) — *Прим. перев*

[4]) В литературе термин «стандартиая» модель (введенный впервые Хенкиным) часто употребляется шире — например, для обозначения того, что класс On (модели с ее $\in$-отношением) вполне упорядочен в исходной системе, или того, что гем же свойством обла-

M и CM недоказуемы в *ZF*, так как обе они влекут Consis *ZF*. С другой стороны, обе они «истинны» в самом правдоподобном смысле и поэтому могут считаться аксиомами. Безусловно, аксиома M верна, потому что если верить в множества, то, безусловно, надо верить и в то, что не существует никакого противоречия в *ZF*. Чтобы неформально убедиться в том, что CM «истинна», мы поступим следующим образом:

Теорема Лёвенгейма — Скулема позволяет нам переходить к счетным подмоделям данной модели. Но мир не образует множества и поэтому мы не можем в *ZF* доказать существование счетной подмодели. Однако неформально мы можем повторить доказательство этой теоремы. Напоминаем, что ее доказательство состояло просто в последовательных выборах множеств, удовлетворяющих некоторым свойствам, в тех случаях, когда такие множества существуют. В *ZF* можно выполнять этот процесс конечное число раз. Нет никаких оснований верить тому, что в действительном мире этот процесс не может быть выполнен счетное число раз, давая в конечном итоге счетную стандартную модель для *ZF*. Единственная причина (reason), по которой этого нельзя сделать в *ZF*, состоит просто в отсутствии в *ZF* какого-либо свойства $A(n, x)$, которое выражало бы в *ZF* для каждого n то свойство x, которое подлежало бы рассмотрению на n-м шаге.

Впоследствии мы покажем, что аксиома M не влечет аксиомы CM.

Эти аксиомы служат примерами того, как мы можем естественным образом расширять аксиомы *ZF*, присоединяя интуитивно истинные суждения. Теорема о неполноте показывает нам, что один из способов расширения системы аксиом состоит в присоединении теоретико-числового суждения, выражающего непротиворе-

---

дает натуральный ряд модели (и потому изоморфен исходному натуральному ряду) и т. п. Следует отметить, что автор всюду употребляет этот термин в более узком смысле (связанном с «абсолютностью» $\in$-отношения); равенство во всех рассматриваемых в этой книге моделях абсолютно, так как относится автором к логике и не считается поэтому специальным отношением теории множеств. — *Прим. перев.*

чивость этой системы. Если выполнять такие расширения последовательно в виде трансфинитного процесса, это дает нам неограниченный запас новых аксиом. Однако существуют и другие, более сильные, более теоретико-множественные по своей природе аксиомы, которые тоже можно присоединять. Это так называемые высшие аксиомы бесконечности. Нам известно, что существование любого конкретного натурального числа может быть доказано с помощью аксиомы пары [1]). Обычная аксиома бесконечности представляет собой большой прыжок, состоящий в допущении существования единого множества, содержащего все натуральные числа. Иными словами, она утверждает существование большого множества, которое нельзя получить путем повторения некоторого процесса. Следующая аксиома также имеет этот характер.

Аксиома о недостижимых кардиналах (inaccessible cardinals).

Существует несчетный кардинал A, такой, что

1) *если $B<A$, то A не является суммой B кардиналов, каждый из которых меньше, чем A;*

2) *если $B<A$, то $\overline{\overline{P(B)}}<A$* [2]).

Таким образом, A не может быть достигнуто посредством операции множество-степени, применяемой к меньшим кардиналам, а также посредством операции, да-

---

[1]) В гл. I для этой цели применялось также существование нулевого множества и аксиома о существовании $x \cup y$. Но можно было бы представлять натуральные числа в виде a, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$, . . ., где a — множество, выбранное на основании непустоты мира. При наличии аксиомы объединения оба способа оказываются равносильными. — *Прим. перев.*

[2]) Предполагается, что условия 1) и 2) соединены конъюнктивно. Как и в § 4, B в $\overline{\overline{P(B)}}$ и $B<A$ отождествляется с $\overline{\overline{B}}$, что законно в силу принятого определения кардинала как наименьшего ординала соответствующей мощности.

Недостижимыми кардиналами называют несчетные кардиналы A, удовлетворяющие условиям 1) и 2). Тарский (Über Unereichbare Kardinalzahlen *Fund. Math.* **30** (1938), 68—69) назвал такие кардиналы недостижимыми в узком смысле, понимая под недостижимыми кардиналами в широком смысле несчетные кардиналы с предельными индексами, удовлетворяющие условию 1). Из обобщенной

ваемой нам аксиомой подстановки, т. е. взятия области функции, применяемой к меньшим кардиналам [1]). Ясно, что если A — недостижимый кардинал, то множество всех множеств ранга меньшего, чем A, образует модель для ***ZF***, так как единственные две аксиомы, вызывающие затруднения — аксиомы степени и подстановки, — не выходят за пределы множества кардиналов, меньших, чем A [2]). Так как отсюда следует Consis ***ZF***, теорема о неполноте влечет недоказуемость этой аксиомы в ***ZF***. Общая тенденция состоит в принятии этой аксиомы в качестве истинной или по крайней мере со-

---

континуум-гипотезы вытекает совпадение этих понятий, а ввиду доказанной Гёделем относительной непротиворечивостн этой гипотезы (и того, что недостижимость в широком смысле сохраняется в гёделевской модели, см. сноску на стр. 282) из непротиворечивости аксномы о существовании кардиналов, недостнжнмых в широком смысле, вытекает такая же непротнворечивость и для узкого смысла (причем слово «непротнворечивость» обозначает оба раза непротиворечивость относительно ***ZF***). Аналогичное замечание можно высказать об упоминаемых ниже аксиомах о существовании многих недостижимых кардинналов. — *Прим. перев.*

[1]) Автор не договаривает: а также операцин, даваемой аксиомой объединения (см. 1)). С учетом зависимости аксиомы пары (см. сноску 3 на стр. 90), при надлежащем выборе формы аксиомы подстановки и нулевого множества (см. сноску 2 на стр. 92), а также с учетом того, что аксиома экстенсиональностн не выражает выполнимости никакой операции над множествами, можно утверждать, что аксиома о существовании недостижнмого (в узком смысле) кардинала выражает существование такого кардинала, который нельзя получнть посредством тех теоретико-множественных операций, выполнимость которых постулирована в ***ZF*** (без аксномы выбора и фундирования; но образование множества выбора, очевидно, также не повышает мощностн, как и применение аксномы подстановки, а потому можно здесь говорить и о ***ZF*** с аксиомой выбора; что же касается аксиомы фундирования, то легко показать посредством рассмотрения модели из § 5 для этой аксномы, что она не дает вообще никаких новых кардинналов). — *Прим. перев.*

[2]) Яснее было бы сказать: за пределы множества множеств, имеющих ранг меньшнй, чем A.

Если в качестве A выбран наименьший недостижнмый кардинал, то легко доказать отсутствие недостнжимых кардиналов в этой модели, откуда сразу вытекает независимость рассматриваемой аксиомы, но автор предпочнтает установить ее другим путем (см. следующую фразу текста). Используемое им утвержденне о непротиворечивости всякой системы, для которой в ***ZF*** существует модель (т. е. миожество из мира ***ZF***, н т. д.), должно быть для этой цели формально отображеио в ***ZF***, для чего можно воспользовать-

вместимой с *ZF*. Мы наблюдаем склонность к великодушию и заявлениям «Почему же не могут существовать такие большие множества?» Утверждать ложность этих заявлений, по-видимому, означало бы накладывать необоснованную границу на размеры кардиналов. Для тех, кто склонен к идеалистической позиции, состоящей в том, что бесконечные множества действительно «существуют», эта аксиома должна быть истинной или ложной. Для остальных имеется лишь вопрос о том, приводит она к противоречию или нет[1]). Далее, можно постулировать существование двух недостижимых кардиналов и продолжать этот процесс еще более сложным образом[2]). Систематическое изучение этих аксиом бесконечности было предпринято Мало, а в более позднее время — А. Леви. Конечно, никакая единая схема порождения таких аксиом никогда не будет пол-

---

ся, например, уже упомянутым (см. сноску 2 на стр. 153) предложением о выразимости в *ZF* «истинности» суждений, толкующих только об элементах множества (в данном случае — множества, образующего рассматриваемую модель). — *Прим. перев.*

[1]) В подлиннике — of whether or not it is consistent. В данном случае слово consistent обозначает непротиворечивость (см. сноску на стр. 134), так как речь идет о мыслителях, не склонных признавать реальное существование бесконечных множеств, а тем самым и теоретико-множественных моделей. — *Прим. перев.*

[2]) Можно постулировать существование α-го недостижимого кардинала In_α для всякого ординала α и тем самым существование новой теоретико-множественной операции In_α, которую можно обозначить также через In^0_α. В частности, для недостижимых α при этом будет существовать In_α, и т. д. Затем можно постулировать существование (недостижимого) кардинала In^1_0, превосходящего все In^0_α, и далее — последовательность In^1_α таких кардиналов, где α обозначает произвольный уже введенный в рассмотрение ординал (хотя бы в свою очередь имеющий вид In^1_β, и т. д.). Затем можно вводить таким же образом еще большие недостижимые кардиналы In^2_α, In^3_α, ..., вообще $\mathrm{In}^\gamma_\alpha$, где теперь индекс γ, как и α, может пробегать все рассматриваемые ординалы. Не останавливаясь на этом, можно ввести еще больший недостижимый кардинал $\mathrm{In}^{\gamma,0}_\alpha$, заменяя затем этот «0» ординальным индексом δ и увеличивая число этих индексов, делая это число трансфинитным, притом пробегающим все ранее рассмотренные недостижимые значения, а после это-

ной, так как всегда можно выйти за ее пределы на один шаг.

Вообще каждая новая из этих аксиом позволяет доказать непротиворечивость предыдущей более слабой системы. Таким образом, каждая из этих аксиом приводит к доказательству некоторого суждения из элементарной теории чисел, которое без нее было недоказуемо. Поэтому отказ от этих аксиом как от посторонних означал бы по существу ликвидацию всякой надежды на доказательство этих суждений. В то же время, однако, при рассмотрении какой-либо аксиомы бесконечности очень трудно решить, следует ли ее принять [1]), потому что чем больше те множества, существование которых постулируется, тем ближе парадоксы, возникающие из-за множества всех множеств и т. п. [2]) Впоследствии мы покажем, что континуум-гипотеза ставит нас даже перед более волнующей проблемой, потому что она остается

го ввести еще одии вид иидексои, скажем ${}^{\beta}\mathrm{I}\Pi^{\gamma}_{\alpha}$, ..., увеличивая и число этих видов по трансфинитам и затем переходя к новой ступени иерархии для самих видов и т. д. — без всякой мыслимой остановки. В этом состоит разиовидность упоминаемой ниже классификации Мало, отиосящейся еще к 1911 г. А. Леви рассматривает вместо этого иерархии усилеиных аксиом типа СМ. Все это — высшие аксиомы бесконечности. — *Прим. перев.*

[1]) В подлиинике — to decide whether to accept it. Слово «следует» введено при переводе. Решить (to decide) — значит ответить на вопрос, принять эту аксиому или нет, далеко ие совпадающий с вопросом: следует принять эту аксиому или иет (ибо если ее принять не следует, это ие означает, что ее следует не прииять). Таким образом, я эту фразу перевожу условно, но этот перевод, по-видимому, может быть согласоваи с мыслью автора. — *Прим. перев.*

[2]) Это высказываиие автора заслуживает глубокого размышления. Вообще говоря, высшие аксиомы бесконечиости не обязательно рассматривать как означающие введение очень больших множеств. С таким же успехом их можно гракговать как означающие, что в мире имеется очень мало фуикций, осуществляющих взаимио однозиачные отображения одних ординалов иа другие, меньшие, что приводит к увеличению числа кардиналов. Хотя на первый взгляд мы меиее свободны в постулировании аксиом иесуществования, чем существования, теорема Лёвенгейма — Скулема все равно приводит к счетиости самых больших кардиналов, лишь бы они рассматривались в непротиворечивой системе. Таким образом, сильные ак-

недоказуемой [1]) даже после присоединения любых высших аксиом бесконечности, в том смысле, в каком мы сейчас употребляем этот термин.

Существует еще одна особая аксиома, заслуживающая специального внимания потому, что она в некоторых отношениях представляется нам разновидностью аксиомы бесконечности, и, однако, она еще сильнее всех таких аксиом, рассмотренных нами до сих пор. Вскоре после того, как была открыта теория меры, возникла проблема нахождения такого множества S и такой счетно-аддитивной нетривиальной конечной действительной меры, определенной на *всех* подмножествах S, что каждая точка имеет меру нуль [2]). Хорошо известно, что обычная мера Лебега на действительной прямой не обладает этим свойством.

Множество S, имеющее такую меру, называется *измеримым кардиналом*. Уже давно было показано, что если такое множество S существует, то его мощность должна превосходить $\aleph_1$, $\aleph_2$, ..., вплоть до очень высоких кардиналов. Точнее, если допустить обобщенную

сиомы бесконечности можно в некотором смысле трактовать как аксиомы о несуществовании, но в каждом случае эта возможиость основаиа иа иепротиворечивости этих аксиом, что возвращает нас к мыслн автора. — *Прим перев.*

[1]) И в то же время, в силу результатов Гёделя, иеопровержимой. — *Прим. перев.*

[2]) Вообще *мерой* называется (одноаргументная) функцня μ, определенная на множествах, принимающая неотрицательные действительные значения, притом лишь конечные (чего можио было не добавлять, если бы не некоторые терминологические особеииости теории меры), счетио-аддитивная (т. е. такая, что $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu A_n$, коль скоро $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m$) и принимающая значение 0 на одноэлементных множествах (или, как обычно говорят, «в каждой точке»). Порядок членов в $\sum_{n=0}^{\infty} \mu A_n$ не имеет значения ввиду иеотрицательности меры (условие, не упомяиутое автором); с другой стороны, последнее условие о том, что мера равиа 0 в каждой точке, автор отиосит не к мерам вообще, а только к рассматриваемым в этой части параграфа. С обычной точки зрения существенны в этой постановке свойства всюду определеииости (на любом подмножестве S) и коиечности такой меры. — *Прим. перев.*

континуум-гипотезу, то можно показать, что мощность S должна превосходить первый недостижимый кардинал [1]). Недавно было показано, что такую меру нельзя получить, даже опираясь на первый, второй и т. д. недостижимые кардиналы [2]), и теперь представляется вероятным, грубо говоря, что любой кардинал, определенный как первый кардинал, удовлетворяющий произвольно заданной аксиоме бесконечности, не является измеримым. Важной чертой измеримых кардиналов является то, что их существование противоречит аксиоме конструктивности (определяемой ниже в гл. III), что не имеет места для обычных аксиом бесконечности. Эти результаты как будто наводят на мысль, что в некотором смысле постулирование существования измеримого кардинала утверждает только существование очень большого множества, но здесь нет вполне ясной интуиции. Вероятно, лишь немногие считают, что существование измеримых кардиналов будет опровергнуто.

Имеется другой метод расширения аксиом, состоящий в разрешении образовывать множества, соответствующие более сложным свойствам. Так, можно разрешить рассматривать множество $\{n \mid A_n$ истинно$\}$, где A_n обозначает n-е суждение в ***ZF***. Это требует новых обозначений, которые удобнее рассматривать в ***GB***. Именно, можно присоединить схему аксиом, утверждающую, что если $A(u, Y_1, \ldots, Y_n)$ — формула с одной множественной переменной и n классовыми переменными, которая может содержать *связанные классовые переменные*, то

$$\forall X_1, \ldots, X_n \exists Y \forall u\,(u \in Y \leftrightarrow A(u, X_1, \ldots, X_n)).$$

Эти аксиомы дают возможность рекурсивно определять классы и, например, определить «множество истинности», заданное выше. Можно пойти далее и в качестве нового первоначального понятия ввести «сверхклассы» («super-classes»), элементами которых будут слу-

[1]) Это суждение доказывается с помощью аксиомы выбора. — *Прим. перев.*

[2]) См. Ulam, Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, *Fund. Math.*, **16** (1930), 140—150. — *Прим. перев.*

жить классы. При этом можно ввести новые аксиомы свертывания [1]), разрешающие образовывать сверхклассы, соответствующие различным формулам. Безусловно, имеется тесная связь между этими высшими аксиомами свертывания и высшими аксиомами бесконечности. Хотя в общем случае система аксиом одного из этих типов не влечет аксиом другого типа, второй тип сильнее в том смысле, что обычно он влечет непротиворечивость соответствующей системы первого типа. Это достигается путем рассмотрения модели, образованной множеством всех множеств, ранг которых меньше некоторого очень высокого кардинала.

§ 8. Еще раз о теореме Лёвенгейма — Скулема

В предыдущем параграфе мы говорили о том, что свободное применение теоремы Лёвенгейма — Скулема доказывает существование счетной стандартной модели. Конечно, это рассуждение не может быть формализовано в *ZF*. Теперь мы докажем в *ZF*, что если рассматривать только конечное множество суждений, имеющих место в модели, то этот результат может быть доказан. Благодаря образованию конъюнкций, мы можем ограничиться рассмотрением случая одного-единственного суждения. Этот результат будет играть важную роль в следующей главе.

Теорема. *Пусть* $A(x_1, \ldots, x_n)$ *— формула в ZF. Тогда в ZF можно доказать, что для всякого множества* S *существует такое множество* $S' \supseteq S$, *что* $\overline{\overline{S'}} = \max(\aleph_0, \overline{\overline{S}})$ *и для всех* $\bar{x}_i \in S'$ $A(\bar{x}, \ldots, \bar{x}_n) \leftrightarrow A_{S'}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, *где формула* $A_{S'}$ *получена из A ограничением всех кванторов множеством* S'.

Доказательство. Мы будем следовать доказательству первоначальной теоремы Лёвенгейма — Скуле-

[1]) В подлиннике axioms of comprehension. Этим термином обозначаются аксномы о существовании миожеств (классов и т. п.), состоящих в точности из тех предметов, которые обладают некоторым свойством. — *Прим. перев.*

ма, но проведем наше доказательство полностью в ZF. Допустим, что A имеет вид $Q_1y_1, \ldots, Q_my_mB(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, где B не содержит кванторов [1]). Каково бы ни было множество T, мы утверждаем, что существуют функции $f_r(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1})$, определенные для $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$ в T и обладающие следующим свойством: Если $Q_r = \exists$ и существует такое множество $\bar{y}_r$, что

$$(1) \qquad Q_{r+1}y_{r+1}, \ldots, Q_my_m B(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r, y_{r+1}, \ldots, y_m),$$

то (1) имеет место при $\bar{y}_r = f_r(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1})$. Если не существует никакого $\bar{y}_r$, удовлетворяющего (1), то $f_r = \emptyset$ [2]). Если $Q_r = \forall$, то f_r обладает этим же свойством с заменой в нем (1) на отрицание этой формулы. Доказательство существования f_r использует аксиому выбора. Однако ввиду того, что аксиома выбора сформулирована только для множеств (а здесь нам она нужна для классов в смысле GB [3])), мы поступим следующим образом: коль скоро все $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1}$ принадлежат T, обозначим через $R(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ *множество*

---

[1]) Символы Q_i обозначают у автора кваиторы. Для уиификации этого доказательства, быть может, удобнее считать, что Q_i может обозиачать либо $\exists$, либо $\sim\exists$. Из общиой предварениой формы с помощью $\sim\sim C \leftrightarrow C$ легко усмотреть законность такого представления для произвольной формулы A. Так как автор доказывает для случая $Q_r = \exists$ эквивалеитиость

$$Q_r\bar{y}_r(1) \leftrightarrow Q_{r+1}y_{r+1}, \ldots, Q_my_m B(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1}, f_r(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1}), y_{r+1}, \ldots, y_m),$$

то этим доказана и эквивалентность отрицания ее левой и правой части, так что случай $Q_r = \forall$ не требует особого рассмотрения.

Коиечио, здесь допустимы случаи $n=0$ и $r=1$. При $r=1$ символы $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1}$ отсутствуют. При $r=m$ ие иадо рассматривать $r+1$. При $m=0$ A_S, совпадает с A и утверждение теоремы оказывается тривиальным. — *Прим. перев.*

[2]) Это зиачит, что сама функция f_r является в этом случае пустым миожеством (упорядоченных пар). Точиее, в этом случае $f_r(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1})$ не определеиа. — *Прим. перев.*

[3]) Т. е. элемент $\bar{y}_r$, являющийся зиачением $f_r(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1})$, здесь приходится выбирать яз класса, который a priori может не быть миожеством. — *Прим. перев.*

всех $\bar{y}_r$ наименьшего ранга, удовлетворяющих (1), если $Q_r = \exists$, или отрицанию (1), если $Q_r = \forall$. $R(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ — множество, ибо является подмножеством множества всех множеств некоторого ранга. По аксиоме выбора можно выбрать один элемент из $R(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ для получения f_r[1]). Пусть T^* обозначает объединение T и области всех этих f_r. Еще раз применяя аксиому выбора, заключаем, что можно построить последовательность множеств S_n, такую, что $S_0 = S$ и $S_{n+1} = S_n^*$ для некоторых функций f_r, обладающих указанным свойством. Положим $S' = \bigcup_n S_n$. Ясно, что $\overline{\overline{S'}} = \max(\aleph_0, \overline{\overline{S}})$.

Теперь обычное доказательство показывает, что $A(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \leftrightarrow A_{S'}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$. Действительно, пусть $C(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ обозначает суждение (1). Допустим, что при $r > r_0$ уже показано $C(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) \leftrightarrow C_{S'}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ для всех $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$ из S'. Ясно, что это имеет место при $r_0 = m$. Тогда при $r = r_0$ если $\bar{x}_i$, $\bar{y}_j$ входят в S', то все они должны принадлежать S_k при некотором k.

Пусть $Q_{r+1} = \exists$, тогда если $C(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$[2]) истинно, то $f_{r+1}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ входит в S_{k+1} и, следовательно, по допущению, $C(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r+1})$ истинно в S', так что $C(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ истинно в S'. Если при этом $C(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ ложно, то для любого $\bar{y}_{r+1}$ $C(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r+1})$ ложно, а следовательно, ложно в S', так что $C(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ ложно в S'. Аналогичное рассуждение имеет силу при $Q_{r+1} = \forall$ и теорема доказана.

---

[1]) Конечно, в предположении, что $R(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ непусто. В противном случае функция f_r не определена. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь $j = 1, \ldots, r$. Фактически происходит индукция от r_0 к $r_0 - 1$; случай $r_0 = m$ уже рассмотрен, а при $r_0 < m$ можно указать $r_0 + 1 \leqslant m$. Автор обозначает через r это r_0 или число, заключенное между r_0 и m. Число m задается рассматриваемой формулой A, так что коль скоро эта формула указана, все рассуждение может быть формализовано путем m-кратного повторения рассматриваемого автором шага. Доказываемая теорема является метатеоремой, и вопрос о ее формализуемости в *ZF* (с кванитором общности по формулам A или по числу m) автором не рассматривается. — *Прим. перев.*

Следствие. *Ни из какого конечного числа аксиом* ZF *не вытекают все аксиомы* ZF.

Доказательство. Пусть $(ZF)'$ — данный конечный набор аксиом ZF, для которого $(ZF)' \to ZF$. Тогда система $(ZF)'$ настолько сильна, что к ней применима вторая теорема о неполноте, а поэтому Consis $(ZF)'$ недоказуема в $(ZF)'$. Однако мы только что доказали, что Consis $(ZF)'$ доказуема в ZF[1]), следовательно, по нашему допущению, и в $(ZF)'$, а это — противоречие.

Теперь мы приведем тривиальную теорему, описывающую стандартные модели.

Теорема. *Пусть* M *— модель для* ZF, *и пусть* xRy *обозначает отношение между* x *и* y, *выражающее, что* x *является элементом* y *в модели* M. *Тогда необходимое и достаточное условие того, что* M *изоморфна стандартной модели, состоит в несуществовании такой (хотя бы и не принадлежащей* M*) последовательности* $\langle x_n \rangle$ *элементов* M, *что* $x_{n+1} R x_n$.

Доказательство. В этом доказательстве термины «ординал», «функция» и т. п. будут относиться к «настоящим» понятиям, а не к соответствующим понятиям в M. Посредством трансфинитной рекурсии по α определим множества S_α и функции f_α на S_α следующим образом: S_0 состоит только из $\emptyset_M$, пустого множества в M (которое определено однозначно, так как аксиома экстенсиональности имеет место в M), а $f_0(\emptyset_M) = \emptyset$. Если S_β и f_β даны для $\beta < \alpha$, то пусть S_α —

[1]) Строго говоря, доказано было лишь то, что в ZF доказуема эквивалентность $(ZF)' \leftrightarrow (ZF)'_{S'}$ для некоторого множества S'; существование этого S' (например, при $S = \emptyset$) также было доказано в ZF. Ввиду того что $(ZF)'$ состоит из аксиом ZF, в ZF доказуема также формула $(ZF)'_{S'}$, утверждающая существование модели S' для $(ZF)'$, т. е. формула, выражающая, что S' удовлетворяет всем аксиомам $(ZF)'$. Теперь, если D — противоречие в $(ZF)'$, то оно доказывает несуществование такого S', и это обстоятельство путем арифметизации формализуемо, в частности в ZF, а потому в ZF из существования S' следует несуществование D, т. е. Consis $(ZF)'$. — *Прим. перев.*

множество всех таких элементов x модели M, что $yRx \to y \in S_\beta$ для некоторого $\beta<\alpha$, и притом таких, что x не входит ни в какое S_β при $\beta<\alpha$. Пусть $f_\alpha(x) = \{f_\beta(y) \mid \beta<\alpha,\ y \in S_\beta,\ yRx\}$ для $x \in S_\alpha$. Мы утверждаем, что если α_0 — первый такой ординал, что $S_{\alpha_0+1} = \emptyset$, то $\bigcup\{S_\beta \mid \beta \leqslant \alpha_0\} = M$. Действительно, если мы положим $T = \bigcup\{S_\beta \mid \beta \leqslant \alpha_0\}$ и если $x \in M - T$, то ввиду $x \neq \emptyset_M$ существует такое y_1, что y_1Rx. Ввиду $x \notin T$ мы имеем $y_1 \notin T$ [1]). Аналогично, существует такое y_2, что y_2Ry_1, $y_2 \notin T$ и т. д., так что мы получаем последовательность y_n, $y_{n+1}Ry_n$ — противоречие. В качестве упражнения читателю предоставляется доказать, что $f = \bigcup\{f_\alpha \mid \alpha \leqslant \alpha_0\}$ представляет собой функцию, изоморфно отображающую M на область f.

---

[1]) Точнее, можно выбрать y_1 так, что $y_1 \notin T$, ибо если все $y_1 \in T$, то $x \in S_{\alpha_0+1}$ и S_{α_0+1} непусто. Таким образом, аксиома выбора используется в этом доказательстве. — *Прим. перев.*

III

Глава

Непротиворечивость континуум-гипотезы и аксиомы выбора

§ 1. Введение

На протяжении этой главы мы не будем включать аксиому выбора (АВ) в число аксиом *ZF*. Наша цель состоит в изложении гёделевского доказательства того, что если *ZF* непротиворечива, то она остается непротиворечивой и после присоединения обобщенной континуум-гипотезы (ОКГ) и АВ. Континуум-гипотеза (КГ) была впервые высказана Кантором в 1878 г. Гильберт в своем знаменитом обращении 1900 г. указал перечень нерешенных проблем, в котором континуум-гипотеза шла под номером один. Эта проблема оставалась нерешенной, несмотря на многие попытки. Но континуум-гипотезу [1]) иногда свободно [2]) употребляли в доказательствах, так как она часто упрощала рассматриваемые ситуации. В 1938 г. Гёдель [12] получил свой результат о непротиворечивости. Хотя КГ играла в развитии математики незначительную роль, АВ давно использовалась с большой широтой и поэтому теорема Гёделя

---

[1]) В подлиннике — «it», т. е. «континуум-проблема». Многие авторы усмотрели бы чуть ли не безграмотность в столь свободном обращении с терминами «проблема» и «гипотеза», и, конечно, такая вольность представляет собой сознательное допущение формальных ошибок. Тем поучительнее, что Коэн, которому мы обязаны решением этой проблемы для *ZF* и *QB*, игнорирует в своей книге мелочные наставления педантов. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике — просто «freely», «свободно» (без «иногда»). Следует отметить, что эта свобода состояла лишь в том, что доказательства, использовавшие континуум-гипотезу, рассматривались как полноценные результаты; но никто из известных математиков не считал своим правом употреблять эту гипотезу неявно, в качестве одной из подразумеваемых аксиом, и не подлежит никакому сомнению, что любая работа, в которой какой-либо автор поступил бы таким образом, подверглась бы соответствующей критике. — *Прим. перев.*

была весьма успокаивающей. Теперь мы изложим некоторую мотивировку использованного им метода.

Если КГ истинна, то действительные числа могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с $\aleph_1$, множеством всех конечных или счетных ординалов. Если мы рассматриваем каждый ординал как представляющий некоторый «процесс», то мы таким образом имеем метод приписывания каждому не более чем счетному «процессу» некоторого единственного действительного числа [1]). Поэтому не является неразумной попытка представить себе трансфинитный процесс построения действительных чисел или даже, более общим образом, произвольных множеств, и притом процесс, достаточно общий для того, чтобы он мог включать все множества. С другой стороны, были изложены различные философские точки зрения, допускающие рассмотрения лишь таких математических объектов, которые уже были эффективно построены [2]). Самая строгая из этих точек зрения допускает рассмотрение только конечных множеств и поэтому очевидным образом не имеет никакого отношения к теории множеств. Правильной в этой связи является точка зрения *предикативных определений.* Встанем на ту точку зрения, что множества не являются a priori данными объектами, а должны быть определяемы какими-либо свойствами. Ввиду того что $\boldsymbol{ZF}$ допускает весьма неконструктивные рассуждения, мы будем либеральны и позволим себе допускать любое разумное свойство $P(x)$, даже если невозможен ника-

---

[1]) По-видимому, автор имеет в виду метод приписывания единственного не более чем счетного «процесса» каждому действительному числу. (Приписать же единственное действительное число такому процессу можно было бы на основании следствия $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$ из АВ независимо от КГ.) — *Прим. перев.*

[2]) «Уже были» — «had been». Любая из подразумеваемых автором точек зрения рассматривала всякое указание способа эффективного построения объекта как прием, позволяющий считать этот объект построенным. (В противном случае возник бы игнорируемый автором спор о том, можно ли рассматривать такие натуральные числа, до которых еще никто не досчитал.) Именно на таком толковании термина «построение» можно основывать широко используемую автором свободу употребления грамматических времен («уже были» и т. п.) — *Прим. перев.*

кой способ его эмпирической проверки для данного x. Однако представляется разумным потребовать, чтобы, каково бы ни было свойство $P(x)$, речь в нем шла только об объектах, предварительно допущенных к рассмотрению. Например, предположим, что мы приняли как данные натуральные числа вместе с арифметическими операциями. Тогда мы можем рассматривать множество натуральных чисел, определенное некоторым свойством $P(n)$, в котором все связанные переменные изменяются только в области натуральных чисел. Такое множество натуральных чисел будет считаться определенным предикативно в терминах натуральных чисел. Однако рассмотрим следующее свойство. Натуральное число n удовлетворяет $P(n)$, если существует разбиение множества ω всех натуральных чисел на n дизъюнктных множеств, ни одно из которых не содержит арифметической прогрессии произвольной длины. Пусть S будет $\{n \mid P(n)\}$. Чтобы определить, имеет ли место, например, $5 \in S$, мы должны рассмотреть *все* разбиения ω на 5 множеств, включая, возможно, такие разбиения, в которых участвует само множество S. Таким образом, чтобы определить одно это множество S, требуется рассматривать как осмысленное множество всех множеств натуральных чисел. Это пример непредикативного определения. С точки зрения ***ZF*** это определение вполне приемлемо. Однако с более конструктивной точки зрения представляется, что ему чего-то недостает. Важная особенность состоит в этом случае не в том, что это определение нельзя осуществить эффективным путем, а в том, что сама область рассмотрения не была указана достаточно определенно. Безусловно, здесь налицо ситуация того же самого рода (правда, по-видимому, в безобидной форме), какие встречаются в парадоксах. Поэтому предпринимались попытки построить теорию множеств на предикативной основе. В Principia Mathematica Рассел и Уайтхед привели построение «теории типов», в которой избегаются некоторые виды непредикативности. Также и Г. Вейль в своей книге «Континуум» показал, как можно предикативным образом построить бóльшую часть классического анализа — правда, не весь этот анализ. Конечно, непреди-

кативный характер аксиомы подстановки является существенной чертой ZF и никакое вполне предикативное построение нельзя считать безупречно связанным с ZF. Однако мы сейчас ищем соответствия между ординалами и множествами, и гёделевская идея состояла в том, что если предикативные построения итерировать до произвольного ординала, то возникающие множества дадут нам точную (adequate) модель для ZF. В философском отношении мы ничего при этом не выигрываем, потому что мы не указали, каким образом получаются наши ординалы, и мы не провели различия между «предикативными» и «непредикативными» ординалами. Однако поскольку мы сейчас имеем дело с вопросом об относительной непротиворечивости, эта точка зрения чрезвычайно полезна. Гёдель назвал «конструктивными» такие множества, которые могут быть получены в качестве результата трансфинитной последовательности предикативных определений. Его открытие состоит в том, что конструктивные множества образуют модель для ZF и что в этой модели имеют место ОКГ и АВ. Конечно, понятие предикативного построения нуждается в уточнении, но по существу для этого имеется только один путь. Другой способ объяснения конструктивности состоит в замечании, что конструктивными множествами являются те, которые должны встречаться в любой модели, в которой допускаются все ординалы.

Мы теперь принимаем то определение, которое было использовано в [12].

Определение. Пусть X — произвольное множество. Тогда множество X' определяется как объединение множества X и множества всех таких множеств y, для которых в ZF существует такая формула $A(z, t_1, \ldots, t_k)$, что если A_X получается из A путем ограничения всех связанных переменных множеством X, то для некоторых $\bar{t}_i$ в X

$$y = \{z \in X \mid A_X(z, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_k)\}\ ^{1}).$$

[1]) Правая часть этого равенства является сокращением вместо $\{z \mid z \in X \,\&\, A_X(z, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_k)\}$. — *Прим. перев.*

Заметим, что $X' \subseteq P(X) \cup X$, и $\overline{\overline{X'}} = \overline{X}$, если X бесконечно (и притом принята AB). Читатель должен отчетливо усвоить, что приведенное определение X' можно полностью выполнить в **ZF**, так что $Y = X'$ будет единой формулой $A(X, Y)$ системы **ZF**. Вообще считается интуитивно ясным, что все нормальные определения могут быть выражены в **ZF**, за исключением[1]), возможно, тех, которые включают в себя соображения об истинности или ложности бесконечной последовательности суждений. Так как этот пункт очень важен, мы в одном из следующих параграфов дадим строгое доказательство того, что построение X' выразимо в **ZF**. Однако именно сейчас превосходное упражнение для читателя состоит в самостоятельном проведении этого определения.

Определение[2]). Если On α, мы определяем M_α посредством $M_0 = \emptyset$ и, при $\alpha \neq 0$, $M_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta\right)'$.

Определение[3]). Множество x *конструктивно*, если $\exists\alpha$, On α и $x \in M_\alpha$.

[1]) Сказано чересчур смело. Во втором томе своей монографии «Grundlagen der Mathematik» Гильберт и Бернайс показывают невыразимость понятия «выражение, определяющее число». Доказательство этой теоремы основано на использовании некоторой разновидности парадокса Ришара и распространяется на очень широкий класс формальных систем, включая **ZF**.

С другой стороны, если **ZF** непротиворечива, то понятие истинной формулы обыкновенной арифметики выразимо в **ZF**, хотя и относится к истинности или ложности суждений, образующих бесконечную последовательность. — *Прим. перев.*

[2]) Это определение основано на обобщенной теореме о трансфинитной рекурсии (см. сноску на стр. 151). Для того чтобы обосновать его посредством той ограниченной формы трансфинитной рекурсии, которая была рассмотрена автором в § 3 предыдущей главы, пришлось бы несколько усложнить его форму и добавить доказательство независимости M_β от того числа α, которое является при этом границей рекурсии. — *Прим. перев.*

[3]) Использование предыдущего определения в этом центральном определении указывает на фундаментальную роль упомянутой в предыдущей сноске обобщенной теоремы о рекурсии. Правда, можно было бы упомянутым образом от нее освободиться, но автор этого не показывает, и это в конечном счете не привело бы к упрощению.

Условие $x \in M_\alpha$ надлежит для дальнейшего выразить формулой системы **ZF**. Оформление предыдущего определения с помощью

Ввиду $X' \subseteq P(X) \cup X$ ясно, что все конструктивные множества фундированы и что если $x \in M_\alpha$, то $\operatorname{rank} x \leqslant \alpha$. Это построение очевидным образом связано с определением фундированных множеств и с доказательством непротиворечивости аксиомы регулярности. «Класс» всех конструктивных множеств мы будем обозначать через L, так что $x \in L$ будет означать просто, что x конструктивно (и не будет обозначать, что L является множеством). Для любой формулы A запись A_L будет обозначать ту же самую формулу, в которой все переменные ограничены этим классом [1]). Ввиду того что в [14] универсальный класс был обозначен буквой V, суждение о том, что каждое множество конструктивно, известное под названием *аксиомы конструктивности*, иногда обозначается посредством $V=L$.

Ввиду того что наше определение M_α происходит по довольно простой рекурсии, ясно, что оно может быть формализовано в **ZF**. Таким образом, суждение $V=L$ выражается [2]) единым суждением в **ZF**. Основные результаты мы выразим теперь так.

Теорема 1. *Если A — любая аксиома* **ZF**, *то A_L доказуема в* **ZF**.

обобщениой теоремы о рекурсии дает возможность выразить M_α как иекоторую функцию M от α, причем M можно будет рассматривать в **GB** как класс упорядоченных пар, существование которого доказуемо в **GB**. Так как $u=M_\alpha$ будет выразимо в **GB** формулой $\langle \alpha, u\rangle \in M$, то $x \in M_\alpha$ будет при этом выразимо формулой $\exists u\ (x \in u\ \&\ \langle \alpha, u\rangle \in M)$. Остается выразить $\langle \alpha, u\rangle \in M$ формулой системы **ZF**. Для этого достаточно ввести функцию m_α, представляющую собой ограничение M посредством $\alpha+1$, и сослаться на то, что существование m_α для произвольного ординала α доказуемо в **ZF** согласно теореме о трансфинитной рекурсии, доказанной автором в § 3 гл. II. — *Прим. перев.*

[1]) В подлиннике — «restricted to be constructible» («ограничены условием конструктивности»). В этом изложении имеется некоторый пробел в доказательстве того, что L можно считать классом (системы **GB**). Согласно основной теореме из § 6 предыдущей главы, для этого достаточно доказать, что условие $x \in L$ выразимо формулой **ZF**, для чего теперь достаточно сослаться на предыдущую сноску, на то, что $\operatorname{On} \alpha$ уже было выражено формулой **ZF** в § 3 гл. II, и на то, что $x \in L$ по определению обозначает $\exists \alpha\ (\operatorname{On} \alpha\ \&\ x \in M_\alpha)$. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике is (есть), что не вполне точно. — *Прим. перев.*

Интуитивно это означает, что конструктивные множества образуют модель для **ZF**. Но мы не можем выразить это в такой форме, потому что L не является множеством [1]).

Теорема 2. $(V=L)_L$ *доказуема в* **ZF**.

Это небольшой, но тонкий момент. Утверждается, что конструктивное множество остается конструктивным, когда все построение релятивизируется посредством L.

Теорема 3. $(V=L) \rightarrow$ АВ & ОКГ *доказуема в* **ZF**.

Это значит, что аксиома конструктивности влечет АВ и ОКГ, так что взятые вместе эти теоремы показывают, что АВ и ОКГ не могут быть опровергнуты в **ZF** [2]).

Прежде чем продвигаться дальше, мы хотим пояснить взаимоотношение между изложениями в [12] и [14]. Подход работы [12], который мы только что описали, вероятно, легче доступен пониманию, чем подход работы [14]. Конечно, оба подхода в принципе тождественны друг другу. Однако ввиду широко распространенного влияния работы [14] мы позднее приведем и этот подход и покажем эквивалентность обоих методов [3]).

---

[1]) Это последнее суждение пока не доказано. Оно, впрочем, вытекает из того, что класс On всех порядковых чисел не является множеством (см. конец сноски 2 на стр. 116) и $\mathrm{On} \subseteq L$ (см. теорему $\alpha \in M_{\alpha+1}$ в следующем параграфе). — *Прим. перев.*

[2]) Точнее: конъюнкция АВ&ОКГ не может быть опровергнута в **ZF**. — *Прим. перев.*

[3]) Математики, не являющиеся специалистами в основаниях теории множеств, особенно легко поддаются соблазну «канонизировать» какую-либо одну систему и связанные с нею методы доказательств относительной непротиворечивости. Ввиду того что гёделевская работа [14] появилась впервые в 1940 г., т. е. задолго до настоящей книги, а в [12] доказательства были только в общих чертах намечены, такой «канонизации» в широких кругах математиков, интересующихся этими вопросами, подверглась система **GB** (до последнего времени обозначаемая обычно через Σ — обозначение самого Гёделя). Позднее установленная несущественность расширения **GB** по отношению к **ZF**, да и сама система **ZF** еще продолжают оставаться известными только узкому кругу специалистов.

Это предпочтение **GB** системе **ZF** плохо обосновано. Конечная аксиоматизированность **GB** играет роль в сравнительно редких и притом специальных случаях, тогда как гораздо чаще ту же роль может играть конечность числа схем в **ZF** и бо́льшая простота в

§ 2. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе мы рассмотрим теорему 1, а именно мы покажем, что аксиомы имеют место в L. Некоторые аксиомы рассматриваются совершенно тривиальным образом.

1. Ввиду того что $\emptyset \in L$, аксиома нулевого множества имеет место в L[1]).

2. Из того что $X' \subseteq P(X) \cup X$ для всех X, следует, что если $x \in M_\alpha$ и $y \in x$, то $y \in \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$[2]), а потому $y \in L$. Поэтому каждое M_α транзитивно и $x \in L$, $y \in x \to y \in L$. Следовательно, аксиома экстенсиональности имеет место в L.

3. Допустим $x \in M_\alpha$, $y \in M_\beta$, $\alpha \leqslant \beta$. Тогда x и y оба входят в M_β. Далее, $\{x, y\} = \{z \mid z \in M_\beta \,\&\, (z = x \vee z = y)\}$, так что $\{x, y\} \in M_{\beta+1}$. Таким образом, аксиома неупорядоченных пар имеет место в L.

4. Если $x \in M_\alpha$, то множество $\{z \mid z \in M_\alpha \,\&\, \exists y (y \in M_\alpha \,\&\, y \in x \,\&\, z \in y)\}$ входит в $M_{\alpha+1}$. Но в силу транзитивности

обращении с одним алфавитом, а также отсутствие оговорок для принципа индукции. Следует напомнить, что Гёдель в [12], проводя свое изложение для ***GB***, указал на то, что его результаты распространяются на ряд других формальных систем, в том числе он явно указал на ***ZF***. Если впоследствии он провел в [14] свое новое изложение именно для ***GB***, а точнее для разновидности Σ этой системы (см. сноску 1 на стр. 142—143), то это объясняется скорее всего случайными обстоятельствами. Гёдель именно в этот момент был занят построением системы Σ. Важной заслугой автора настоящей книги является то, что она должна вернуть системе ***ZF*** ее законную роль в глазах широких кругов математиков. — *Прим. перев.*

[1]) $\emptyset \in L$ доказывается с помощью рассмотрения формулы $\sim z = z$ в качестве A из определения X'. Автор не утруждает себя проверкой того, что $\emptyset$ пусто и в L, и аналогично поступает при рассмотрении других простых аксиом о существовании множеств. Гёдель в [14] поступал педантичнее, но следует надеяться на то, что эти упражнения не затруднят читателя. С другой стороны, полной формализации всех доказательств не было и в [14]. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь используется трансфинитная индукция по α. — *Прим. перев.*

M_α оно в точности совпадает с множеством-суммой для x, так что аксиома суммы имеет место в L.

5. Для доказательства аксиомы бесконечности мы сперва установим две леммы, которые и в других случаях будут полезны для дальнейшего.

Лемма. *Пусть $A(x)$ обозначает формулу «x — ординал». Тогда $\forall x(x\in L\to(A(x)\leftrightarrow A_L(x)))$. Вообще если X — любое транзитивное множество или класс*[1], *то $A(x)\leftrightarrow A_X(x)$*[2].

Доказательство. Мы принимаем аксиому регулярности, следовательно, условие о том, что x — ординал, является условием, относящимся только к элементам x. Ввиду того что L транзитивен, это условие остается прежним в случае релятивизации посредством L.

Лемма. *Для всех ординалов α $\alpha\in M_{\alpha+1}$.*

Доказательство. Ясно, что $\emptyset\in M_1$. Пусть α — наименьшее такое α, для которого утверждение этой леммы оказывается ложным. Тогда $\beta<\alpha\to\beta\in M_{\beta+1}\not\to\beta\in X=\bigcup_{\gamma<\alpha}M_\gamma$. Пусть $A(x)$ обозначает формулу «x — ординал». Ввиду транзитивности X и предыдущей леммы мы имеем $x\in X\to(A_X(x)\leftrightarrow A(x))$. Множество $\gamma=\{x\not\in X\mid A_X(x)\}$ является поэтому множеством ординалов, и в силу транзитивности X оно само является ординалом, притом превосходящим все ординалы $\beta<\alpha$; следовательно, $\gamma\geqslant\alpha$. В силу транзитивности X' $\alpha\in X'\subseteq M_{\alpha+1}$. Ввиду того что ω таким образом входит в L, мы доказали аксиому бесконечности.

6. Аксиома регулярности тривиальна, и ее рассмотрение предоставляется читателю в качестве упражнения.

7. Первая нетривиальная аксиома, которую мы сейчас рассмотрим, это аксиома степени. Пусть $x\in L$. Пусть $P(x)$ — множество-степень для x и $P_L(x)=\{y\mid y\not\in$

---

[1]) О понятии транзитивного класса ср. сноску на стр. 150. — *Прим. перев.*

[2]) По-видимому, имеется в виду $\forall x(x\in X\to(A(x)\leftrightarrow A_X(x)))$. — *Прим. перев.*

$\in P(x)\ \&\ y\in L\}$. Для каждого $y\in P_L(x)$ пусть $\varphi(y)$ равно наименьшему такому α, что $y\in M_\alpha$. В силу аксиомы подстановки существует такой ординал β, который является Sup множества всех ординалов, входящих в область φ. Для него $y\in P_L(x)\to y\in M_\beta$. Рассмотрим множество $\{y\mid y\in M_\beta\ \&\ \forall t(t\in M_\beta\to(t\in y\to t\in x))\}$. Это множество входит в M'_β [1]) и ясно, что оно равно $P_L(x)$ [2]). Таким образом $P_L(x)$ конструктивно, откуда следует, что аксиома степени имеет место в L [3]).

Заметим, что при $x\in M_\alpha$ это доказательство не дает явным образом такого β, что $P_L(x)\in M_\beta$. Впоследствии мы дадим точное значение β в терминах α [4]). Конечно, мы использовали аксиому степени при доказательстве того, что имеет место соответствующая релятивизованная аксиома. Но, вероятно, более удивительным является то, что мы воспользовались также аксиомой подстановки. Это было несколько неэстетично и, кроме того, поставило аксиому подстановки в слишком центральное положение. Например, если бы мы пожелали работать

---

[1]) Ибо $x\in P_L(x)$ (в силу $x\in L$ и $x\subseteq x$), откуда $x\in M_\beta$. Следующее суждение использует транзитивность M_β. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь, как обычно, словом «область» я перевожу «range». — *Прим. перев.*

[3]) Последний шаг требует проверки, состоящей в том, что конструктивное множество $P_L(x)$ удовлетворяет в L условию, о котором говорится в аксиоме степени, т. е. условию $(\forall z(z\in P_L(x)\leftrightarrow\forall t(t\in z\to t\in x))_L$ или $\forall z(z\in L\to(z\in P_L(x)\leftrightarrow\forall t(t\in L\to(t\in z\to t\in x))))$. Допустим $z\in L$, тогда $z\in P_L(x)$ влечет $z\in M_\beta$. Если теперь $t\in L$ и $t\in z$, то $t\in M_\beta$ в силу транзитивности M_β и, по второму указанному в тексте определению $P_L(x)$, $t\in x$. Следовательно, допущение $z\in L$ дает $z\in P_L(x)\to\forall t(t\in L\to(t\in z\to t\in x))$. Оно дает и обратную импликацию в силу $z\in M_\beta$, $M_\beta\subseteq L$ и только что упомянутого определения $P_L(x)$. Этим заканчивается требуемая проверка (В опущенных случаях для предыдущих аксиом соответствующая проверка производится значительно проще; это относится и к опущенным шагам доказательств предыдущих лемм.) — *Прим. перев.*

[4]) См. лемму 2 на стр. 186—187. Конечно, это «точное значение» будет определено в терминах не только α, но и операции $P(u)$. (Оборот «в терминах α» обозначает: «определенный через α».) — *Прим. перев.*

только с аксиомой выделения, нам бы не удалось провести это доказательство. Имеется другое доказательство — мы приведем его позднее, при рассмотрении ОКГ в L, — которое позволит избежать употребления аксиомы подстановки и которое к тому же даст более эффективную границу для того ординала, который строит множество-степень. С помощью этого доказательства можно будет, грубо говоря, утверждать, что доказательство аксиомы степени в L существенным образом требует только аксиомы степени вместе с очень слабой формой аксиомы подстановки или свертывания.

8. Аксиома подстановки — самая трудная для проверки в ZF. Пусть $A(x, y; t_1, \ldots, t_n)$ — формула в ZF; обозначим через A_L соответствующую релятивизованную формулу. Если $t_i \in L$ и A_L определяет $y = \varphi(x)$ как однозначную функцию в L, то нам надо показать, что если $u \in L$, то область v функции φ на u входит в L.

Лемма. *Пусть $y = \varphi(x)$ — однозначная функция, определенная формулой $A(x, y; t_1, \ldots, t_n)$ для некоторых t_i и такая, что $x \in L$ влечет $\varphi(x) \in L$. Тогда если $u \in L$, то $\exists w \in L$, такое, что если v есть область φ на u*[1]*, то $v \subseteq w$.*

Доказательство. Для каждого x в u пусть $g(x)$ будет наименьшим таким α, что $\varphi(x) \in M_\alpha$. Пусть $\beta = \mathrm{Sup}\{g(x) \mid x \in u\}$. Ясно, что $v \subseteq M_\beta$ и что $M_\beta \in L$[2]).

Теперь нам будет нужна теорема Лёвенгейма — Скулема из гл. II, § 8, но в слегка видоизмененной форме, соответствующей нашим ближайшим целям. В гл. II мы сократили весь мир V до некоторого множества, тогда как теперь мы поступим таким же образом с классом L. Кроме того, теперь нам важно будет знать, что это множество входит в L.

Теорема. *Пусть $A(x_1, \ldots, x_n)$ — формула системы ZF, в которой все переменные, свободные и связанные,*

[1]) То есть область значений функции φ, ограниченной множеством u. — *Прим. перев.*

[2]) Это последнее утверждение вытекает из $X \in X'$ (что в свою очередь доказывается путем выбора формулы $z = z$ в качестве A в определении X'), откуда $M_\beta \in M_{\beta+1}$. — *Прим. перев.*

ограничены классом L (т. е. A уже релятивизована классом L[1])*. Пусть $S \in L$. Тогда существует такое $S' \in L$, что $S' \supseteq S$, и для всех $\bar{x}_i \in S'$ имеет место $A(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \leftrightarrow A_{S'}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.*

Доказательство. Конечно, мы имеем в виду, что для каждой формулы A[2]) высказанное утверждение является теоремой в ZF. Мы будем следовать доказательству из гл. II, § 8. Пусть A имеет вид $Q_1 y_1, \ldots, Q_m y_m B(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Пусть $T \in L$. Для $1 \leqslant r \leqslant m$ существуют функции $f_r(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1})$, определенные для $\bar{x}_i$, $\bar{y}_j$ в T, со следующим свойством: если $Q_r = \exists$ и существует такое множество $\bar{y}_r$, что

$$(1) \qquad Q_{r+1} y_{r+1}, \ldots, Q_m y_m B(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r, y_{r+1}, \ldots, y_m),$$

то $f_r = \alpha$, где α — наименьший такой ординал, что существует $\bar{y}_r \in M_\alpha$, удовлетворяющее (1). В силу ограничения, наложенного на A, если существует $\bar{y}_r$, удовлетворяющее (1), то оно должно входить в L, так что f_r в этом случае определена. Если такого $\bar{y}_r$ не существует, положим $f_r = 0$. Если $Q_r = \forall$, то f_r определяется таким же образом, но с заменой формулы (1) ее отрицанием. Пусть β обозначает Sup множества значений $f_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ для всех $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$ из T и для всех r, $1 \leqslant r \leqslant m$. Положим $T^* = T \cup M_\beta$. Теперь мы определяем последовательность S_n, такую, что $S_0 = M_\alpha$, если α — наименьший такой ординал, что $S \in M_\alpha$, и $S_{n+1} = S_n^*$. То же самое доказательство, что и прежде, показывает теперь, что $S' = \bigcup_n S_n$ обладает требуемым в теореме свойством. Кроме того, ясно, что S' равно $\cup\{M_\beta \mid \beta < \alpha\}$ для некоторого α и что

[1]) Согласно теореме $(A \to (A \to B)) \leftrightarrow (A \to B)$ исчисления высказываний, повторная релятивизация посредством прежнего класса по существу не меняет ничего. Для свободных переменных ограничение классом L означает попросту, что в связи с этой формулой рассматриваются лишь значения этих переменных из этого класса, т. е. такие же переменные, которые были бы допустимы в релятивизованной формуле (см. сноску на стр. 134). — *Прим. перев.*

[2]) Удовлетворяющей условию теоремы. — *Прим. перев.*

это множество входит в M_α [1]). Мы не делаем никакого утверждения о мощности S', потому что оно нам не нужно и сейчас мы не можем опираться на АВ.

Теперь мы можем доказать аксиому подстановки в L. Пусть $A(x, y; t_1, \ldots, t_n)$ — формула [2]), релятивизованная посредством L и такая, что для любых конкретных $t_1, \ldots, t_n$ она определяет $y=\varphi(x)$ как однозначную функцию в L. Пусть $u \in L$ и v — область φ на u. В силу последней леммы [3]) существует такое α, что $v \subseteq M_\alpha$, и ясно, что мы можем допустить, что $u, t_1, \ldots, t_n$ также входят в M_α. Выберем M_α в качестве множества S доказанной теоремы — тогда из нее следует, что для некоторого S' в L и для всех x, y в S' имеет место $A(x, y; t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow A_{S'}(x, y; t_1, \ldots, t_n)$. Мы знаем также, что $S' \in M_\beta$ для некоторого β, а поэтому ввиду $v=\{y \in S' \mid \exists x \in u \,\&\, A_{S'}(x, y; t_1, \ldots, t_n)\}$ v определено условием, в котором все переменные ограничены множеством M_β и, следовательно, $v \in (M_\beta)'=M_{\beta+1}$, откуда $v \in L$ и аксиома подстановки имеет место. Итак, теорема 1 полностью доказана.

§ 3. Абсолютность

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, мы покажем, что отношение $Y=X'$ может быть выражено в ZF и что, следовательно, суждение $V=L$ также может быть выражено. Для каждого $r \geqslant 0$ пусть X_r обозначает множество всех множеств S (состоящих из n-ок $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$), для которых существует формула $A(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_m)$, содержащая ровно r кванторов, и такие $\bar{t}_i \in X$, что $S=\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid A_X(x_1, \ldots, x_n; \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m)\}$ [4]). Мы покажем, что отношение $Y=X_r$ выразимо в ZF.

---

[1]) См. сноску 2 на стр. 175. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике — «суждение» («statement»), что при наличии свободных переменных x, y противоречит определению суждения на стр. 22. — *Прим. перев.*

[3]) Точнее, в силу ее доказательства (с M_β в качестве w). — *Прим. перев.*

[4]) В частности, это дает $\emptyset'=\{\emptyset\}$. Точнее об X_r сказано в добавлении I. — *Прим. перев.*

При этом будет существенно использована разложимость формул на их атомарные части, в точности таким же образом, как это было сделано в доказательстве того, что аксиомы классов системы ***GB*** достаточны для доказательства аксиомы подстановки системы ***ZF***. Отношение $Y=X_0$ выражается путем нумерации всех формул, не содержащих кванторов, и рекурсии по длине формул с помощью различных булевых операций, определяющих множества S, возникающие в связи с каждой такой формулой [1]). Путем рекурсии по r теперь $Y=X_r$ определяется условием, что множество n-ок S принадлежит X_r, если существует такое множество T $(n+1)$-ок в X_{r-1}, что $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in S \leftrightarrow (\exists x_0 \in X$ такое, что $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in T$, или если существует такое множество T $(n+1)$-ок в X_{r-1}, что $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in S \leftrightarrow \forall x_0 \in X, \langle x_0, \ldots, x_n\rangle \in T$ [2]). Наконец, X' определяется как объединение X и множества всех таких множеств 1-ок, которые входят в какое-либо X_r [3]). Так как множества M_α были определены простой трансфинитной рекурсией в терминах операции $X \to X'$, теперь ясно, что $V=L$ выражается указанным образом в виде единого суждения в ***ZF***.

Чтобы доказать теорему 2, нам теперь придется показать, что построение M_α приводит, при его выполнении в модели L, к тому же самому результату, что и при выполнении его в мире V. Самый факт существования в L множеств, удовлетворяющих релятивизованному определению M_α, вытекает из того, что L является моделью для ***ZF*** и, следовательно, теорема о трансфинитной рекурсии и существование операции $X \to X'$ имеют место в L. Тот факт, что эти релятивизованные M_α совпадают с первоначальными M_α и, следовательно, имеет место $(V=L)_L$, вытекает из одного весьма общего явления и не зависит от того, что L является моделью для ***ZF***. Именно если мы совершаем построения в пределах данного транзитивного множества или класса B, в котором для данного α из B построение M_α, релятивизованное по отношению к B, может быть выполнено

[1]) В добавлении I показано, как это отношение выразить формулой ***ZF***. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь предполагается $X \neq \emptyset$. — *Прим. перев.*

[3]) Точнее X' определено в добавлении I. — *Прим. перев.*

(так как B содержит все необходимые для этого множества), то возникающее в результате этого построения M_α должно совпадать с первоначальным M_α. Это обеспечивается предикативным характером рассматриваемого построения, вызывающим тот факт, что проверка суждения $x \in M_\alpha$ требует лишь просмотра всех M_β при $\beta < \alpha$ и вовсе не зависит от существования или отсутствия в мире как угодно других множеств [1]). Теперь мы рассмотрим это на формальном уровне.

Пусть $B(x)$ обозначает любую формулу, могущую содержать и другие свободные переменные, которые мы будем рассматривать как фиксированные. В нашем основном применении $B(x)$ будет обозначать «$x \in L$». Допустим, что $B(x)$ транзитивно, т. е. что $B(x) \,\&\, y \in x \to B(y)$. Для любой формулы A мы будем обозначать через A_B формулу, получаемую из A путем требования, что все переменные в A удовлетворяют $B(x)$. Из того, что для фиксированного t можно взять $B(x) \equiv x \in t$, мы усматриваем, что релятивизация посредством множества является частным случаем этого типа релятивизации.

Определение. О формуле $A(x_1, \ldots, x_n)$ мы будем говорить, что она определяет *абсолютное* отношение, если для любого транзитивного условия $B(x)$ мы имеем $B(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, B(x_n) \,\&\, A_B(x_1, \ldots, x_n) \to A(x_1, \ldots, x_n)$. Кроме того, если B' — другое транзитивное условие, для которого $\forall x\, B(x) \to B'(x)$, то $B(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, B(x_n) \,\&\, A_B(x_1, \ldots, x_n) \to A_{B'}(x_1, \ldots, x_n)$ [2]).

Интуитивно это означает, что для проверки $A(x_1, \ldots, x_n)$ достаточно проверить ее в любых транзитивных классах, достаточно широких для того, чтобы они содержали все объекты, о которых говорит A. Было бы нелепо требовать соблюдения $A \to A_B$, так как нет никакой гарантии того, что класс B достаточно велик. Можно

[1]) Это утверждение нуждается в уточнении (хотя бы из-за того, что при построении X' приходится рассматривать не только элементы X, но и составленные из них n-ки). См. добавление I. — *Прим. перев.*

[2]) Это определение требует некоторого пересмотра. См. добавление I. — *Прим. перев.*

было бы ввести более узкое понятие абсолютности, согласно которому A абсолютно, коль скоро если A релятивизована по отношению к классу B, для которого имеют место все аксиомы ZF, релятивизованные посредством B, то $A \leftrightarrow A_B$. Этот случай фактически имеет место для тех условий, которые нас будут интересовать. Термин «абсолютное» употребляется в литературе в различных смыслах, и читателю надлежит тщательно следить за нашим употреблением этого термина.

Прежде всего приведем некоторые примеры отношений, не являющихся абсолютными. Отношение $y = P(x)$ не абсолютно, так как y может быть множеством всех подмножеств x в классе B, не будучи при этом настоящим множеством-степенью. В этом мы усматриваем непредикативный характер аксиомы степени, требующей просмотра всего мира в поисках всех возможных подмножеств. Другим примером служит отношение $x < y$. Если не существует взаимно однозначного отображения x на y в классе B, отсюда не следует, что вообще не может существовать такого отображения.

Теперь мы приведем последовательность абсолютных отношений. Абсолютность каждого из них становится очевидной, если принять во внимание абсолютность предыдущих членов этой последовательности [1]). Транзитивность B в некоторых случаях играет роль, например для отношения «$z = \langle x, y \rangle$», потому что, если бы z имело элементы, не входящие в B, мы не могли бы, оставаясь в B, проверить, является ли z упорядоченной парой.

1. $x \in y$.
2. $x = y$.
3. $x \subseteq y$.
4. $x \subset y$.
5. $x = \emptyset$.
6. $z = x \cap y$.
7. $z = \{x, y\}$.
8. $z = \langle x, y \rangle$.
9. z — упорядоченная пара.
10. $z = x \times y$.
11. x — функция.

[1]) Точнее об этом сказано в добавлении I, где, кроме того, подробно рассматриваются отдельные пункты следующей таблицы. — *Прим. перев.*

12. x — ординал.
13. $x=\omega$ (т. е. x удовлетворяет определению ω).
14. $Y=X_r$, где X_r определено в этом параграфе.
15. $Y=X'$.
16. $x=M_\alpha$.
17. Существует такой ординал α, что $x=M_\alpha$.

Теорема. $(V=L)_L$.

Доказательство. Мы доказали для каждого α существование множества M_α, удовлетворяющего некоторому условию. В этом доказательстве были использованы только аксиомы ZF, а так как они имеют место в L, то в L существует множество M_α, удовлетворяющее релятивизованному условию. Далее, если $x\in L$, то существует такое α, что $x\in M_\alpha$, и мы видели также, что $\alpha\in L$. Но из полученных выше результатов об абсолютности следует, что множество M_α, определенное относительно L, совпадает с прежним M_α, а поэтому $x\in M_\alpha$ имеет место и при релятивизации относительно L.

§ 4. Доказательство АВ и ОКГ в L

Так как аксиома конструктивности, $V=L$, имеет место в L, для доказательства того, что АВ и ОКГ имеют место в L, достаточно доказать теорему 3, а именно что $V=L\rightarrow$ АВ & ОКГ.

Теорема. *Существует такая формула $A(u, v, X, Y)$ в ZF, что если Y — полное упорядочение множества X, то отношение $u<v\leftrightarrow A(u, v, X, Y)$ индуцирует полное упорядочение множества X'.*

Доказательство. Занумеруем счетное множество формул $B_n(x; t_1, \ldots, t_k)$. Мы уже по существу показали [1]), как выражается в ZF отношение $C(u, n, t_1, \ldots, t_k)$, состоящее в том, что $u=\{x\in X\mid B_{n,X}(x; t_1, \ldots, t_k)\}$. Теперь полное упорядочение Y индуцирует естественное полное упорядочение на множестве всех возможных $(k+1)$-ок $\langle n, t_1, \ldots, t_k\rangle$, где $t_i\in X$. Для каждого $u\in X'$

[1]) Точнее см. добавление I, стр. 321—324. — *Прим. перев.*

можно определить $\varphi(u)$ как первую (при каком бы то ни было k) в этом полном упорядочении $(k+1)$-ку, для которой имеет место $C(u, \varphi(u))$ [1]. После этого можно определить A, полагая $u<v$ означающим $\varphi(u)<\varphi(v)$.

Теперь, посредством трансфинитной рекурсии, можно следующим образом определить полное упорядочение на M_α. Если это полное упорядочение уже определено для всех M_β, где $\beta<\alpha$, то мы очевидным способом вполне упорядочиваем $\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$. Тогда наша теорема дает нам возможность определить полное упорядочение на M_α. Теперь, если имеет место $V=L$, пусть $\varphi(x)$ обозначает наименьшее такое α, что $x \in M_\alpha$. Определяем $x<y$, если $\varphi(x)<\varphi(y)$ или если $\varphi(x)=\varphi(y)=\alpha$, а x предшествует y в построенном для M_α полном упорядочении. Таким образом, мы получаем единую формулу $A(x, y)$, которая вполне упорядочивает *все* множества. На языке ***GB*** существует класс, который вполне упорядочивает мир. Итак, $V=L \rightarrow$ АВ [2].

Доказательство того, что $B=L \rightarrow$ ОКГ, является технически наиболее трудным местом в гёделевском доказательстве и оно было традиционным камнем преткновения для читателей [14]. Так как мы уже знаем, что $V=L \rightarrow AB$, то мы можем употреблять АВ без колебания. Из АВ легко вытекает, что если X бесконечно, то $\overline{\overline{X'}}=\overline{\overline{X}}$ [3]. Теперь посредством очевидной трансфинитной

---

[1]) Здесь $C(u, \varphi(u))$ обозначает $C(u, p_0, p_1, \ldots, p_k)$, где $p_0, p_1, \ldots, p_k$ — члены $(k+1)$-ки $\varphi(u)$. — *Прим. перев.*

[2]) При этом АВ получается в сильнейшей форме (см. сноску 2 на стр. 146). — *Прим. перев.*

[3]) Это легко усмотреть из определения X' в добавлении I — особенно см. стр. 318—321. (Подробнее: при бесконечном X, в силу определений 24) и 25) на стр. 318, $\overline{\overline{C}}^X_n=X$, т. е., в силу $(\forall)$ на стр. 319, $\overline{\overline{X}}^n_0=\overline{\overline{X}}$, а определение (*) на стр. 319 таково, что каждое $S \in X^n_r$ соответствует некоторому $T \in X^{n+1}_{r-1}$ лишь одним из двух возможных способов, откуда $\overline{\overline{X}}^n_r \leqslant \overline{\overline{X}}^{n+1}_{r-1} \cdot 2 = \overline{\overline{X}}^{n+1}_{r-1}$, и индукцией по r доказывается $\forall m(\overline{\overline{X}}^m_r=\overline{\overline{X}})$, а затем $\overline{\overline{X'}}=\overline{\overline{X \bigcup\bigcup_r X'_r}}=\overline{\overline{X}}$.)

На стр. 323 содержится определение функции $i_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$, которая, впрочем, встречается там лишь в контексте

индукции показывается, что для бесконечных α $\overline{\overline{M_\alpha}}=\alpha$[1]). Мы будем далее употреблять $V=L$ без явного упоминания об этом.

Теорема 1. *Если* $x\in M_\alpha$, α *бесконечно и* $y\subseteq x$, *то* $\exists\beta$, $\overline{\overline{\beta}}=\alpha$ *и* $y\in M_\beta$.

Эта теорема является центральной в настоящем исследовании. Из $\omega\in M_\omega$ [2]) следует, что каждое множество натуральных чисел можно построить в счетное число шагов [3]). Так как число всех счетных ординалов есть $\aleph_1$, а при счетном α всегда $\overline{\overline{M_\alpha}}=\aleph_0$, то легко видеть, что континуум $C=\aleph_1$. Попытаемся дать некоторое интуитивное объяснение причины, по которой все множества натуральных чисел можно строить посредством счетных ординалов [4]). Если $x\subseteq\omega$, $x\in M_\alpha$, то возникает вопрос — из каких существенных свойств α вытекает, что $x\in M_\alpha$. Далее, x определяется значениями истинности счетно многих суждений «$n\in x$». Для каждого n это можно рассматривать как наложение одного условия на α. Поэтому не является неразумным предположение, что счет-

---

$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | i_X(x_m; t_k)\}$. Это определение можно заменить следующим, более простым (причем эта рекурсия может быть определена в *ZF*, как указано на стр. 319—320):

при $i<2(n+k)^2$, $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | i_X(x_m; t_j)\}=m^i_{n,k}$, $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | (-i)_X(x_m; t_j)\}=X^n-\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | i_X(x_m; t_j)\}$, $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | (i\&j)_X(x_m; t_j)\}=\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | i_X(x_m; t_j)\}\cap\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | j_X(x_m; t_j)\}$, $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | (\forall zi)_X(x_m; t_j)\}=\bigcap_{z\in X}\{\langle z, x_1, \ldots, x_n\rangle i_X(z, x_m; t_j)\}$. (Ограничение кванторов множеством X дает возможность считать все правые части множествами и значениями функций, участвующих в этой рекурсии.) — *Прим. перев.*

[1]) См. ниже, стр. 187—188. — *Прим. перев.*

[2]) Выше было доказано лишь, что для каждого α $\alpha\in M_{\alpha+1}$ откуда $\omega\in M_{\omega+1}$, и этого достаточно для целей автора в этом месте. Но индукцией по α легко доказать, что $\alpha\geqslant\omega\to\alpha\in M_\alpha$. — *Прим. перев.*

[3]) Т. е. оно входит в некоторое M_β со счетным β. — *Прим. перев.*

[4]) В подлиннике конструктивное множество — «constructible set» («множество, которое может быть построено»). Поэтому автор легко переходит от выражения «x — конструктивное множество» (т. е. $\exists\alpha$, $x\in M_\alpha$) к «x может быть построено посредством α», понимая под последним $x\in M_\alpha$ (или даже к «x может быть построено в α шагов»). — *Прим. перев.*

ное множество таких условий, если они могут быть удовлетворены каким-либо α, может быть удовлетворено и счетным α. Теорема Лёвенгейма — Скулема, позволяющая строить меньшие множества, обладающие теми же свойствами, что и бóльшие, доставит нам механизм для уточнения этого соображения. Кроме того, важную роль будет при этом играть тривиальный результат из гл. II, § 5, относящийся к $\in$-изоморфизмам.

Доказательство этой теоремы дает нам также другой способ для доказательства аксиомы степени. Именно, если $x \in M_\alpha$, то очевидно, что $P(x) \in M_\beta$, где β — первый ординал мощности, превосходящей α [1]). Это то доказательство, о котором мы упоминали в § 2.

Пусть теперь α — бесконечно, $x \in M_\alpha$, $y \subseteq x$ и $y \in M_\beta$. Напоминаем, что множество T называется экстенсиональным, если из $x, y \in T$ и $x \neq y$ следует $\exists z \in T\,(z \in x \,\&\, \sim z \in y) \vee (z \in y \,\&\, \sim z \in x)$.

Лемма 1 [2]). *Существует такое экстенсиональное множество T, что $\overline{\overline{T}} = \alpha$, $M_\alpha \subseteq T$, множества M_β, β и y являются элементами T и, кроме того, верно релятивизованное посредством T суждение «β строит M_β».*

Доказательство. Заметим, что под суждением «β строит M_β» понимается здесь суждение из ***ZF***, утверждающее, что β — ординал и существует такая функция f, определениая для всех $\gamma \leqslant \beta$, что $f(0) = \emptyset$ и при всех $0 < \gamma \leqslant \beta$ имеет место $f(\gamma) = \left(\bigcup_{\delta<\gamma} f(\delta)\right)'$, а $f(\beta) = M_\beta$. Поэтому лемма 1 непосредственно следует из теоремы Лёвенгейма — Скулема, изложенной в гл. II, § 8, в которой теперь надлежит взять в качестве множества S объединение множеств M_α, $\{M_\beta\}$, $\{\beta\}$ и $\{y\}$ и рассмотреть суждения «β строит M_β» и аксиому экстенсиональности.

[1]) Здесь «$P(x) \in M_\beta$» понимается, конечно, как релятивизованное посредством L, т. е. как $P_L(x) \in M_\beta$ (см. 16 на стр. 181). Кроме того, α предполагается бесконечным. В таком виде это утверждение вытекает из выразимости в ***ZF*** формулы, определяющей $P(x)$ и $P_L(x) = P(x) \cap L$ (что следует из абсолютности $\subseteq$) с помощью обсуждаемой теоремы 1. — *Прим. перев.*

[2]) Эта и следующая лемма формулируются в предположениях предыдущего абзаца. — *Прим. перев.*

Согласно результату из § 5 гл. II, существует единственный $\in$-изоморфизм φ множества T на некоторое транзитивное множество R. Отображение φ является тождественным на M_α, ибо M_α уже транзитивно. Кроме того, $\varphi(y)=y$, так как $y \subseteq x$ и φ тождественно на элементах x. Однако φ *необязательно* должно быть тождественным на β. Пусть $\varphi(\beta)=\beta'$. Тогда β' является ординалом относительно R. В силу абсолютности свойства ординала β' является и настоящим ординалом, и так как в силу транзитивности R имеет место $\beta' \subseteq R$, то ясно, что $\bar{\beta}' \leqslant \bar{R}$ и $\bar{\beta}' \leqslant \bar{\alpha}$ [1]). Таким образом, имеет место утверждение $y \in M_{\beta'}$, релятивизованное посредством R, и в силу абсолютности имеет место $y \in M_{\beta'}$. Это в точности то, что утверждает наша теорема.

Попробуем сравнить изложенное доказательство с интуитивной мотивировкой. «Уменьшение» множества T при изоморфизме φ состояло в том, что мы извлекли из ординала β все меньшие ординалы, игравшие роль в образовании множества y в M_β, и затем пренебрегли всеми остальными меньшими ординалами. В результате получился гораздо меньший ординал β', который тоже строит y.

Мы обещали читателю в § 2 такое доказательство аксиомы степени в L, которое не будет использовать аксиомы подстановки, но, к сожалению, теорема Лёвенгейма — Скулема из § 8 гл. II использует эту аксиому. Однако благодаря весьма предикативному характеру суждения «β строит M_β» удается непосредственно доказать лемму 1 или по крайней мере свести ее к обычной теореме Лёвенгейма — Скулема, в которой все рассуждения проводятся в пределах фиксированного множества. Чтобы получить это другое доказательство леммы 1, мы докажем сперва, без помощи аксиомы подстановки, следующую лемму.

Лемма 2. *Существует такое транзитивное множество T, что $M_\alpha \subseteq T$, $\{y, \beta, M_\beta\} \subseteq T$ и имеет место релятивизованное посредством T определение M_β.*

---

[1]) См. об этом в добавлении I, стр. 336—337. — *Прим. перев.*

Коль скоро лемма 2 будет доказана, лемма 1 будет сразу следовать из обычной формы теоремы Лёвенгейма — Скулема, изложенной в гл. I и работающей целиком в T, следовательно, только с помощью аксиомы выделения. Теперь остается лишь найти такое T, что β, $M_\beta \in T$ и определение M_β имеет место в T, так как затем можно будет просто присоединить M_α и y к T и в силу абсолютности M_β не изменить этим ситуацию. Определение множества M_β не удается полностью выразить в M_β, но мы покажем, что это можно сделать в M_γ, где γ лишь слегка превосходит β. Мы приведем короткий набросок доказательства, который читатель, без сомнения, сможет доделать. Чтобы усмотреть это утверждение, мы исследуем сперва отношение $Y = X'$. Мы утверждаем, что если $X \in M_\alpha$ для некоторого α, то $X' \in M_{\alpha+\omega}$ и что отношение $Y = X'$ остается верным при релятивизации посредством $M_{\alpha+\omega}$. Действительно, множества X_n, которые были использованы при определении Y, должны входить в $M_{\alpha+\omega}$, так как они были определены рекурсивно предикативными условиями. Множества $\{\langle 0, X_0\rangle, \ldots, \langle n, X_n\rangle\}$, встречающиеся в определении X_n, также входят в $M_{\alpha+\omega}$. Следовательно, определение $n \to X_n$ можно провести в $M_{\alpha+\omega}$, а значит, и определение Y можно дать в $M_{\alpha+\omega}$.

Напомним теперь, что множество M_α было определено как $F_\alpha(\alpha)$, где F_α — единственная функция, определенная для всех $\beta \leqslant \alpha$ и такая, что $F_\alpha(0) = \emptyset$ и $F_\alpha(\beta) = \left(\bigcup_{\gamma<\beta} F_\alpha(\gamma)\right)'$. Пусть $\varphi(\alpha)$ — функция, определенная посредством $\varphi(0) = 2$ и $\varphi(\alpha) = \left\{\operatorname{Sup}_{\beta<\alpha} \varphi(\beta)\right\} + \omega$, так что φ строго возрастает. Мы покажем по индукции, что $F_\alpha \in M_{\varphi(\alpha)}$, $X_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta\right) \in M_{\varphi(\alpha)}$ и что имеет место отношение $X_\alpha' = M_\alpha$, релятивизованное посредством $M_{\varphi(\alpha)}$. Допустим это для всех $\beta<\alpha$ и положим $\gamma = \operatorname{Sup}_{\beta<\alpha} \varphi(\beta)$. Тогда для $\beta<\alpha$ $F_\beta \in M_\gamma$. Теперь мы рассмотрим следующее *релятивизованное посредством* M_γ определение, которое, следовательно, определяет некоторое множество $S \in M_{\gamma+1}$:

«S является объединением всех функций G_β, где $\beta<\alpha$, таких, что G_β определена для всех $\beta' \leqslant \alpha$ и $G_\beta(0)=\emptyset$, а при $\beta' \neq 0$ $G(\beta')=\left(\bigcup_{\beta''<\beta'} G_{\beta''}\right)'$».

В силу нашего индуктивного предположения $S=\{\langle \beta, F_\alpha(\beta)\rangle \mid \beta<\alpha\}$.

Так как тривиальным образом имеет место $M_\alpha \in M_\gamma$, мы легко получаем, что $F_\alpha = S \cup \{\langle \alpha, M_\alpha\rangle\}$ входит в $M_{\gamma+3}$. Также и множество X_α, являющееся объединением области S, должно входить в $M_{\gamma+3}$, так как оно может быть предикативно определено через S и по предыдущему $X'_\alpha = M_\alpha$ должно иметь место в $M_{\gamma+3+\omega}=M_{\varphi(\alpha)}$. Таким образом наше утверждение установлено и лемма 2 доказана [1]).

Из теоремы 1 теперь тривиально выводится ОКГ. Заметим сперва, что для всех бесконечных α, $\overline{\overline{M_\alpha}}=\overline{\overline{\alpha}}$. Это доказывается индукцией по α, причем случай $\alpha=\aleph_0$ очевиден. Для произвольного α путем индукции мы усматриваем, что если $X_\alpha = \bigcup\{M_\beta \mid \beta<\alpha\}$, то $\overline{\overline{X_\alpha}} \leqslant \overline{\overline{\alpha}} \cdot \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}}$. Число формул, используемых для определения элементов множества M_α, имеет, следовательно, мощность $\leqslant \overline{\overline{\alpha}}$ (что доказывается с помощью уже обоснованной АВ).

---

[1]) К сожалению, эта попытка исключить аксиому подстановки недостаточна из-за употребления этой аксиомы в доказательстве теоремы о трансфинитной рекурсии и — что еще хуже — из-за того, что уже построение множества ω использует эту аксиому. В системе Цермело, получаемой из ZF заменой схемы аксиом 6_n на $6'_n$ вся теория ординалов должна строиться иначе, например следуя книге Серпинского (Sierpiński, Leçons sur les nombres transfinis, Paris, 1928, или Cardinal and ordinal numbers, Warszawa, 1958), или, П. С. Александрова «Введение в общую теорию множеств и функций», Москва, 1947. При этом алефы $\aleph_\alpha$ удается получить, не вводя никаких новых аксиом, лишь для натуральных α. Отпадает изложенное выше доказательство абсолютности ординала, и вся конструкция нуждается из-за этого в значительных дополнениях и переделках, которые я тут не буду рассматривать.

Гёдель в [12] заметил, что его доказательства переносятся на системы Цермело и простой теории типов. Однако нигде не было изложено прозрачное доказательство этого утверждения. — *Прим. перев.*

Таким образом, мощность $M_\alpha \leqslant \overline{\overline{\alpha}}$, но из того, что $\beta \in M_{\beta+1}$, легко видеть, что $\overline{\overline{M_\alpha}} \geqslant \overline{\overline{\alpha}}$, так что $\overline{\overline{M_\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}}$. Теперь если α — кардинал, то $\alpha \in M_{\alpha+1}$, и мы видим, что если β — ближайший следующий кардинал после α, то $P(\alpha) \subseteq M_\beta$, откуда $\overline{\overline{P(\alpha)}} \leqslant \overline{\beta}$. Теорема же Кантора утверждает $\overline{\overline{P(\alpha)}} > \overline{\alpha}$, откуда $\overline{\overline{P(\alpha)}} = \overline{\beta}$, в чем как раз и состоит ОКГ. Обычно ее записывают в форме $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, что означает в точности то же самое.

Итак, мы полностью доказали теоремы 1, 2 и 3 из § 1. Хотя *ZF* имеет бесконечную схему аксиом, для любой аксиомы A_n выше было показано, как получить в *ZF* доказательство формулы $A_{n,L}$, — и более тщательное исследование показало бы, что при любой естественной нумерации доказательств P_m доказательство формулы $A_{n,L}$ дается посредством $P_{\varphi(n)}$, где $\varphi(n)$ — надлежащая примитивно рекурсивная функция. Таким образом, если мы рассматриваем *ZF* просто как формальную систему, то для формулы

$$(\text{Consis } \mathit{ZF}) \rightarrow (\text{Consis } \mathit{ZF} + \text{АВ} + \text{ОКГ})$$

можно получить доказательство, полностью формализуемое в Z_1 или даже в еще более простой версии теории чисел. Это значит, что мы получили вполне эффективный процесс для преобразования данного противоречия в *ZF* + АВ + ОКГ в противоречие в *ZF*.

§ 5. Взаимоотношения с *GB*

В монографии 1940 г. [14] Гёдель изложил свое доказательство для системы *GB*. Хотя, по нашему мнению, *GB* является менее интуитивной системой, она обладает преимуществом конечной аксиоматизируемости. Фактически можно считать, что она представляет собой систему *ZF*, видоизмененную лишь посредством аксиоматизации метаматематического понятия «свойство». Кроме того, Гёдель заменил вполне формальным и корректным определением неформальное определение X', допускающее много способов уточнения, один из которых был нами намечен. Выполнение этой замены тре-

бует как раз такого исследования устройства формул, какое приводит к некоторым аксиомам ***GB***. В этом состоит другая причина того, что употребление ***GB*** упрощает *формальное* изложение. Конечно, за это приходится расплачиваться, как в [14], доказательством того, что классы, определяемые системой ***GB***, дают возможность воспроизводить любую формулу [1]).

Он таким образом определяет трансфинитную последовательность множеств F_α, среди которых должны содержаться все наши M_α. Во всяком случае, имеет место $M_\alpha = F_{\varphi(\alpha)}$, где $\varphi(\alpha)$ — некоторая явная функция от α. Каждое F_α будет единым множеством, все элементы которого выбираются из $\{F_\beta \mid \beta < \alpha\}$. (Напоминаем, что каждое M_α было множеством, каждый элемент x которого был подмножеством $\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$.) Упорядочение множеств F_α является в некоторой мере произвольным, и непосредственно не ясно, что можно получить все множества M_α (хотя по существу это тривиально). По причине предикативного характера конструкции множеств F_α совершенно ясно, что они абсолютны, и так как операции, используемые для их определения, выполнимы в L, эти множества сами должны входить в L. Ввиду исторического интереса работы [14] мы теперь приведем определение F_α.

Определение. $\mathfrak{F}_1(x, y) = \{x, y\}$,

$$\mathfrak{F}_2(x, y) = \{\langle r, s\rangle \mid \langle r, s\rangle \in x \,\&\, r \in s\},$$

$$\mathfrak{F}_3(x, y) = x - y,$$

$$\mathfrak{F}_4(x, y) = \{\langle r, s\rangle \mid \langle r, s\rangle \in x \,\&\, s \in y\},$$

---

[1]) Подразумеваются формулы ***ZF*** и теорема о существовании классов из § 6 гл. II. Впрочем, в [14] эта теорема была доказана в ***GB*** не только для формул ***ZF***, но и для любых формул ***GB***, не содержащих связаных классовых перемеиных.

Для этой цели все части вида $A \in t$ (где t — любой терм) заменяются на основании аксиомы 1 из ***GB***, на $\exists u\,(u = A \,\&\, u \in t)$, а все части вида $A = B$ — на $\forall u\,(u \in A \leftrightarrow u \in B)$. Теперь классы могут входить только в части вида $u \in B$, причем B — свободная переменная. Таким образом, в доказательстве из § 6 гл. II возникают лишь новые атомарные части вида $u \in B$, для которых формула $\exists A \forall u\,(u \in A \leftrightarrow u \in B)$ доказывается тривиальным образом. — *Прим. перев.*

$$\mathfrak{F}_5(x, y) = \{s \mid s \in x \,\&\, \exists r(\langle r, s\rangle \in y)\},$$
$$\mathfrak{F}_6(x, y) = \{\langle r, s\rangle \mid \langle r, s\rangle \in x \,\&\, \langle s, r\rangle \in y\},$$
$$\mathfrak{F}_7(x, y) = \{\langle r, s, t\rangle \mid \langle r, s, t\rangle \swarrow \in x \,\&\, \langle r, t, s\rangle \in y\},$$
$$\mathfrak{F}_8(x, y) = \{\langle r, s, t\rangle \mid \langle r, s, t\rangle \swarrow \in x \,\&\, \langle t, r, s\rangle \in y\}.$$

Определение операций $\mathfrak{F}_i$ в точности копирует аксиомы для классов в ***GB***, с тем лишь отклонением, что в $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_4, \ldots, \mathfrak{F}_8$ требуется $\mathfrak{F}_i(x, y) \subseteq x$[1]). Это сделано для обеспечения предикативного характера и транзитивности F_α, т. е. затем, чтобы для каждого α имело место $F_\alpha \subseteq \left(\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta\right)$. Следующий шаг будет состоять в задании некоторой определенной (definite) процедуры последовательного выполнения этих операций, т. е. для любых α, β, i должно будет существовать такое γ, что F_γ определяется как $\mathfrak{F}_i(F_\alpha, F_\beta)$. Однако кроме этого надо будет совершить еще одну операцию. В качестве иллюстрации допустим, что мы хотим получить $F_{\alpha_1} \times F_{\alpha_2}$ в ряду множеств F_α. Ясно, что, повторяя операцию $\mathfrak{F}_1$ достаточно долго, мы в конце концов достигнем такого ординала β, что если $x \in F_{\alpha_1}$, $y \in F_{\alpha_2}$, то для некоторого $\gamma<\beta$ будет $F_\gamma = \langle x, y\rangle$. Однако для получения $F_{\alpha_1} \times F_\alpha$

---

[1]) Конечно, это требуется и для $\mathfrak{F}_3$. Ввиду $x \cap y = x - (x - y)$ нет надобности во введении специальной аксиомы для пересечения.

Операции $\mathfrak{F}_4$ и $\mathfrak{F}_5$ соответствуют аксиомам 13 и 12 (или B5 и B4 из [14]; аксиомам 9—16 из § 6 гл. II там соответствовали равносильные им аксиомы B1—B8 в том же порядке). Операции $\mathfrak{F}_7$ и $\mathfrak{F}_8$ соответствуют аксиомам 16 и 15. У Гёделя эти «фундаментальные операции» определялись и обозначались совершенно так же, но обозначения $\mathfrak{F}_7$ и $\mathfrak{F}_8$ здесь переставлены (тогда как для $\mathfrak{F}_4$ и $\mathfrak{F}_5$ инверсия с порядком аксиом имелась и в [14]).

Ввиду зависимости каждой из аксиом 14 и 15 от остальных можно было бы исключить операции $\mathfrak{F}_6$ и $\mathfrak{F}_7$ из этого списка. Вопрос о том, можно ли поступить таким же образом с операцией $\mathfrak{F}_1$ (см. сноску 3 на стр. 90), не изучен.

При рассмотрении вопросов, связанных с этими фундаментальными операциями, индекс i, если не оговорено противное, будет обозначать их номер (так что $i=1, \ldots, 8$). — *Прим. перев.*

нам надо будет еще собрать все эти пары $\langle x, y\rangle$. Благодаря операции $\mathfrak{F}_4$ нам не обязательно будет собирать в точности эти пары $\langle x, y\rangle$ (хотя можно было бы сделать и это). Но для некоторых α, встречающихся произвольно далеко в последовательности ординалов, мы будем определять F_α просто как $\{F_\beta \mid \beta<\alpha\}$. Теперь мы точно определим порядок выполнения этих операций.

Определение[1]). $\langle \alpha, \beta\rangle < \langle \alpha', \beta'\rangle$, если либо $\max(\alpha, \beta) < \max(\alpha', \beta')$, либо $\max(\alpha, \beta) = \max(\alpha', \beta')$ и либо $\beta<\beta'$, либо $\beta=\beta'$ и $\alpha<\alpha'$.

Для $0 \leqslant i, j \leqslant 8$ положим $\langle i, \alpha, \beta\rangle < \langle j, \alpha', \beta'\rangle$, если $\langle \alpha, \beta\rangle < \langle \alpha', \beta'\rangle$ или же $\langle \alpha, \beta\rangle = \langle \alpha', \beta'\rangle$ и $i<j$.

Очевидно, что для каждой тройки $\langle i, \alpha, \beta\rangle$ существует множество S всех троек, предшествующих ей относительно $<$, и что S вполне упорядочено посредством $<$. S является множеством, так как оно содержится в $\{\langle i, \alpha', \beta'\rangle \mid \alpha', \beta' \leqslant \max(\alpha, \beta),\ i \leqslant 8\}$. Поэтому можно однозначно, с сохранением порядка, отобразить S на некоторый ординал. Таким образом, мы получаем формулу $A(x, y)$ системы ***ZF***[2]), которая опре-

---

[1]) В этом определении α, β — порядковые числа. Слово «либо» можно толковать как дизъюнкцию; случаи, о которых идеть речь, явно несовместимы, но при формализации нет надобности говорить об этом в определении. — *Прим. перев*

[2]) Именно здесь автору необходима обобщенная теорема о трансфинитной рекурсии, тогда как выше, в §§ 2—4, при построении функции M_α, достаточно было бы рассматривать ее в каждом случае только для ординалов $\leqslant\alpha$, а совпадение M_β при рассмотрении этого множества в связи с разными «границами рекурсии» α легко можно было бы извлечь из того, что при ограннчении такой функции с границей $\alpha>\beta$ ординалом $\beta+1$ (т. е. его элементами $\leqslant\beta$) получается функция, определенная той же рекурсией с границей $\leqslant\beta$, и что эта функция определена однозначно, согласно теореме о трансфинитной рекурсии нз § 3 гл. II.

Причина, по которой здесь не удалось бы поступить таким образом, состоит в том, что только что упомянутая теорема не дает никакой формулы $A(x, y)$, тогда как обобщенная теорема о рекурсии дает класс, который можно представить формулой ***ZF***.

Именно то обстоятельство, что автор не рассматривает этой обобщенной теоремы и функций в смысле ***GB***, лишает его возможности рассматрнвать F_α как единую функцию от α и вынуждает говорить о «трансфинитной последовательности множеств» F_α. — *Прим. перев.*

деляет такую функцию $J(i, \alpha, \beta)$ с ординальными значениями, что J сохраняет порядок по отношению к только что введенному упорядочению и если J принимает значение γ, а $\gamma' < \gamma$, то J принимает и значение γ' [1]). С интуитивной точки зрения $J(i, \alpha, \beta)$ является длиной последовательности всех троек, предшествующих $\langle i, \alpha, \beta\rangle$. Очевидно, что $J(i, \alpha, \beta) \geqslant \alpha$, так что J должна принимать в качестве значений *все* ординалы. Это значит, что существуют такие функции N, K_1, K_2, также определенные формулами **ZF**, что если $J(i, \alpha, \beta) = \gamma$, то $N(\gamma) = i$, $K_1(\gamma) = \alpha$ и $K_2(\gamma) = \beta$. Так как $J(0, \alpha, \beta) \geqslant \alpha, \beta$, имеет место $J(i, \alpha, \beta) > \alpha, \beta$ при $i \neq 0$, или, эквивалентно, $N(\gamma) \neq 0 \rightarrow K_1(\gamma) < \gamma$ и $K_2(\gamma) < \gamma$.

Определение. Миожества F_α определяются посредством трансфинитной рекурсии [2]) следующим образом:

1) $F_0 = \emptyset$,

2) если $N(\alpha) = 0$, то $F_\alpha = \{F_\beta \mid \beta < \alpha\}$,

3) если $N(\alpha) = i > 0$, $K_1(\alpha) = \beta$, $K_2(\alpha) = \gamma$, то $F_\alpha = \mathfrak{F}_i(F_\beta, F_\gamma)$.

Мы заметим сперва, что отображение $\alpha \rightarrow F_\alpha$ определяется формулой **ZF**, осуществляющей простое применение трансфинитной рекурсии [3]). Кроме того, в ка-

---

[1]) Функцией «с ординальными значениями» я называю в этом переводе всякую функцию, значеннями которой являются только ординалы. — *Прим. перев.*

[2]) Ввиду $N(0) = 0$ можно было бы случай 1) этого определения подвести под 2), сведя его таким образом к двум случаям (как в [14]). Строго говоря, автор, не ссылаясь на $N(0) = 0$, допускает погрешность, так как при избранном им способе изложения этого определения совместимость пунктов 1) и 2) требует доказательства.— *Прим. перев.*

[3]) Снова формула, о которой идет речь, получается на основании обобщенной теоремы о рекурсин.

Во всех случаях этого рода эта теорема дает существование класса, являющегося функцией и определяемого как объединение класса функций, заданных для ординалов $\leqslant \alpha$ теоремой о рекурсии из § 3 гл. II. Этот последний класс зависит от α как от параметра и для каждого случая рекурсии определяющая его формула рекурсии $A(f, \alpha)$ была указана при доказательстве этой теоремы, имевшей вид $\forall \alpha\,(\mathrm{On}\,\alpha \rightarrow \exists!\, f A(f, \alpha)$ и f — функция, заданная на орди-

честве легкого упражнения можно доказать, что существует простая функция $\varphi(\alpha)$, такая, что множество $G_\alpha=\{\langle\beta, F_\beta\rangle \mid \beta \leqslant \alpha\}$ входит в $M_{\psi(\alpha)}$, а определение функций $J(i, \alpha', \beta')$, $K_1(\alpha')$, $K_2(\alpha')$, $N(\alpha')$ не меняется при релятивизации посредством $M_{\varphi(\alpha)}$. Таким образом можно установить, что множества F_α конструктивны. (При этом используется легко проверяемая абсолютность [1]) J, K_1, K_2 и N, и это рассуждение напоминает доказательство того, что $\alpha \to M_\alpha$ определимо в некотором M_β [2]). Если бы правило, определяющее порядок выполнения операций $\mathfrak{F}_i$, не имело описанного выше простого предикативного типа, а носило весьма «неконструктивный» характер, то утверждение о том, что все $F_\alpha \in L$, могло бы оказаться ложным.)

Мы теперь покажем, что и обратно, каждое M_α имеет вид F_β. Если принять результат [14] о том, что множества F_α образуют модель для ***ZF*** [3]), то ввиду абсолютности M_α и того, что множества M_α могут быть опреде-

налах $\leqslant\alpha$). Объединение этого класса определяется формулой $\exists a, f(\langle x, y\rangle \in f \,\&\, A(f, a))$, определяющей как раз тот класс упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$, который представляет собой нужную функцию, а эта формула представляет ее в ***ZF***. — *Прим. перев.*

[1]) Имеется в виду абсолютность формул, определяющих эти фуикции системы ***GB***. (В качестве $B(x)$ выбирается $x \in L$.)

[2]) Сказано неточно, так как, конечно, отображение $\alpha \to M_\alpha$, рассматриваемое для всех α, неопределимо ни в каком M_β. По-видимому, речь идет об отображеиии $\alpha \to M_\alpha$, рассматриваемом для $\alpha <$ некоторого ординала γ, и имеется в виду доказательство леммы 2 из предыдущего параграфа, где было показано, что в качестве β можно взять $\gamma+\omega$.

Рассматриваемый случай проще упомииаемого, так как определение для F_α значительно проще, чем для M_α. — *Прим. перев.*

[3]) В [14] такого результата не было и система ***ZF*** вовсе не упоминалась. В [14] было доказано, что если к множествам F_α присоединить те классы, пересечение которых с любым F_α дает иекоторое F_β, то получится модель для ***GB***. (Эти классы, вместе с миожествами F_α и отношением $\in$, ограниченным этими множествами и классами, образуют гёделевскую модель Δ, для которой в [14] доказано $V=L$; по существу, этот способ определения классов в модели Δ обеспечивает соблюдение аксиомы выделения в этой модели.) Однако, по существу (на стр. 150), в § 6 гл. II было доказано, что множества системы ***GB*** образуют модель для ***ZF***, откуда теперь сразу вытекает тот «результат», о котором говорит автор. — *Прим. перев.*

лены в модели, образованной множествами F_α, соответствующие множества при этом будут равны M_α, так что все M_α входят в $\{F_\alpha\}$ [1]). Однако мы предпочитаем дать в виде наброска простое прямое доказательство. Мы отметим тот часто используемый факт, что $x \in F_\alpha \swarrow \rightarrow \exists \beta\,(\beta < \alpha \,\&\, x = F_\beta)$ [2]).

Лемма. $\forall \alpha,\ \beta \exists \gamma\,(F_\gamma = F_\alpha \times F_\beta)$.

Доказательство. Положим $\delta = \mathrm{Sup}\,\{J(1, \alpha', \beta') \mid \alpha', \beta' < \max(\alpha, \beta)\}$. Тогда из $x \in F_\alpha$, $y \in F_\beta$ следует $\{x, y\} \swarrow \in \{F_{\delta'} \mid \delta' \leqslant \delta\}$. Если $\delta_1 = \mathrm{Sup}\,\{J(1, \alpha', \beta') \mid \alpha', \beta' \leqslant \delta\}$, то ясно, что $F_\alpha \times F_\beta \subseteq \{F_{\delta'} \mid \delta' \leqslant \delta_1\}$. Положим $\delta_2 = J(0, \delta_1, \delta_1)$, тогда $\delta_2 \geqslant \delta_1$ и $F_\alpha \times F_\beta \subseteq F_{\delta_2}$ [3]). Пусть $\delta_3 = J(4, \delta_2, \beta)$, тогда $F_\alpha \times F_\beta \subseteq F_{\delta_3}$ и $z \in F_{\delta_3} \rightarrow z = \langle x, y\rangle$, где $y \in F_\beta$. Меняя роли α и β, таким же образом получаем такое δ_4, что $F_\beta \times F_\alpha \subseteq F_{\delta_4}$ и $z \in F_{\delta_4} \rightarrow z = \langle x, y\rangle$, где $y \in F_\alpha$. Пусть $\delta_5 = J(6, \delta_2, \delta_4)$, тогда $F_\alpha \times F_\beta \subseteq F_{\delta_5}$ и $z \in F_{\delta_5} \rightarrow z = \langle x, y\rangle$, где $x \in F_\alpha$. С помощью $\mathfrak{F}_3$ [4]) мы получаем такое δ_6, что $F_{\delta_6} = F_{\delta_3} \cap F_{\delta_5} = F_\alpha \times F_\beta$.

Лемма. $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \exists \beta\,(F_{\alpha_1} \times \ldots \times F_{\alpha_n} = F_\beta)$.

Лемма. $\forall \alpha_1, \ldots, \forall \alpha_n \exists \beta (F_\beta = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid x_i \in F_{\alpha_i} \swarrow \,\&\, x_1 \in x_2\})$.

Доказательство [5]). С помощью $\mathfrak{F}_2$.

---

[1]) Здесь $\{F_\alpha\}$ обозначает класс всех множеств F_α. На совпадение индекса α у F_α и M_α в этом абзаце не надо обращать внимания. — *Прим. перев.*

[2]) Доказывается трансфинитной индукцией по α путем рассмотрения различных случаев определения F_α. — *Прим. перев.*

[3]) Небрежность: в случае $\delta_2 = \delta_1$ и $F_{\delta_1} \in F_\alpha \times F_\beta$ это включение не имеет места. Для исправления достаточно положить $\delta_2 = J(1, \delta_1, \delta_1)$, что обеспечивает $\delta_2 > \delta_1$. — *Прим. перев.*

[4]) См. вторую фразу сноски на стр. 190. — *Прим. перев.*

[5]) Не было определено, каким способом надо расставлять скобки в записи $F_{\alpha_1} \times \ldots \times F_{\alpha_n}$. Предыдущая лемма имеет очевидное доказательство, применимое к любому такому способу. Самым естественным может оказаться группировать сомножи-

Лемма. *Если* $F_\beta \subseteq F_{\alpha_1} \times \ldots \times F_{\alpha_n}$ *и* σ *— любая перестановка чисел* $1, \ldots, n$, *то* $\exists\gamma$ *такой, что* $z \in F_\gamma \leftrightarrow z = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ *и* $\langle x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\rangle \in F_\beta$.

Доказательство. С помощью $\mathfrak{F}_6$, $\mathfrak{F}_7$ и $\mathfrak{F}_8$.

Лемма. *Если* $F_\beta \subseteq F_{\alpha_1} \times \ldots \times F_{\alpha_n}$, *то* $\exists\gamma_1$ *и* γ_2 *такие, что*

1) $z \in F_{\gamma_1} \leftrightarrow z = \langle x_2, \ldots, x_n\rangle \,\&\, \exists x_1 \in F_{\alpha_1}$ *такое, что* $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in F_\beta$.

2) $z \in F_{\gamma_2} \leftrightarrow z = \langle x_2, \ldots, x_n\rangle \,\&\, \forall x_1 (x_1 \in F_{\alpha_1} \rightarrow \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in F_\beta)$.

Доказательство. С помощью $\mathfrak{F}_3$ и $\mathfrak{F}_5$.

Ясно, что из этих лемм вытекает следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $A(x, y_1, \ldots, y_n)$ *— формула*[1]), *в которой каждая связанная переменная* t_i *ограничена некоторым множеством* F_{β_i}. *Тогда для любых* α_i *существует такое* γ, *что*

$$F_\gamma = \{x \in F_{\alpha_0} \mid A(x, F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_n})\}.$$

Введем теперь обозначение «$x \in L'$» для $\exists\alpha(x = F_\alpha)$. Мы уже знаем, что $L' \subseteq L$, и покажем теперь, что $L \subseteq L'$. Из последней теоремы следует, что если $X \in L'$ и $y \in X'$, то $y \in L'$. Рассматривая Sup по всем элементам множества X'[2]), мы убеждаемся в том, что для некоторого α

тели влево (например, $F_{\alpha_1} \times F_{\alpha_2} \times F_{\alpha_3} = (F_{\alpha_1} \times F_{\alpha_2}) \times F_{\alpha_3}$), однако это не соответствует способу группировки в определении упорядоченной n-ки.

По-видимому, эту и следующую леммы следует поменять местами или заменить в этой лемме член $x_1 \in x_2$ на $x_{n-1} \in x_n$. (Кроме того, в ее формулировке надо указать, что $n \geqslant 2$.) — *Прим. перев.*

[1]) Имеется в виду формула системы ***ZF***. Для доказательства следует представить ее в предваренной форме. Кроме того, с помощью преобразований, примененных в сноске на стр. 189, следует оставить переменные y_j лишь в контексте $u \in y_j$. — *Прим. перев.*

[2]) Имеется в виду Sup для множества наименьших таких α, что $y = F_\alpha$ по всем $y \in X'$. (Такое α для произвольного y из L' называется в [14] порядком — «order» — множества y и обозначалось там через «Od'y».) — *Прим. перев.*

$X' \subseteq \{F_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ и если $\alpha_1 = J(0, \alpha, \alpha)$, то $X' \in F_{\alpha_1}$[1]). Простое рассуждение, подобное использованному выше при рассмотрении абсолютности, показывает, что для некоторого α_2 определение X' сохраняет силу при релятивизации посредством F_{α_2}[2]). Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ существует такое $\varphi(\beta)$, что определение M_β сохраняет силу при релятивизации посредством $F_{\varphi(\beta)}$. Положим $\gamma = \mathrm{Sup}\{\varphi(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ и $\gamma_1 = J(0, \gamma, \gamma)$. В F_{γ_1} мы можем определить $X = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$[3]), так что $X \in L'$ и, следовательно, $M_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta\right)'$ входит в L'. Согласно сказанному выше, определение M_α сохраняет силу при релятивизации посредством некоторого F_{γ_2}. Таким образом, $L \subseteq L'$ и оба понятия конструктивного множества совпадают. Доказательства основных теорем при использовании F_α, конечно, по существу совпадают с изложенными[4]).

Мы закончим это рассмотрение гёделевского доказательства следующим очевидным результатом, который, однако, может иногда оказаться очень полезным.

---

[1]) Ибо наряду с выразимостью X' в **ZF** можно установить возможность получить X' из X конечным числом применений $\mathfrak{F}_1$ — $\mathfrak{F}_8$. — *Прим. перев.*

[2]) См. начало стр. 179. — *Прим. перев.*

[3]) Неясно. Это определение требует употребления α, которое не обязательно входит в F_{γ_1}. Однако, если взять $\gamma' = \max(\gamma, \alpha)$ и заменить γ на γ' в определении γ_1, новое γ_1 будет не меньше прежнего и в нем уже, наверное, можно будет определить $X = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$. — *Прим. перев.*

[4]) Вывод AB из $V = L'$ становится тривиальным (ибо из каждого непустого множества можно выбрать элемент, имеющий наименьший порядок — см. 3 на стр. 195).

При выводе ОКГ очень сложным оказывается доказательство соответствующей теоремы об изоморфизмах (лемма 12.6 из [14]; ее доказательство было, впрочем, несколько упрощено Р. Доссом On Gödel's proof that $V = L$ implies the generalised continuum hypothesis, *Notre Dame J. Formal Logic*, 4 (1963), 283—287). Оно основано на множестве мелких лемм, доказываемых легко, но труднее поддающихся запоминанию, чем план изложенного выше автором доказательства. — *Прим. перев.*

Теорема. *Если A — суждение, содержащее лишь множества конечного ранга и A может быть доказано в $ZF+(V=L)$, то A может быть доказано и с помощью одних лишь аксиом системы ZF.*

Доказательство. Легко видеть, что понятие натурального числа абсолютно, а потому абсолютно и понятие множества конечного ранга. Далее, A истинно в L, так как $V=L$ имеет место в L. Множества конечного ранга в L в точности совпадают с настоящими множествами конечного ранга, а поэтому A истинно. Разумеется, эта теорема не может быть полностью распространена на множества счетного ранга, так как понятие «счетное» не является абсолютным.

§ 6. Минимальная модель

Напоминаем, что аксиома СМ, введенная в § 7 гл. II, утверждает, что существует стандартная модель для ZF. Допуская СМ, мы теперь докажем существование наименьшей такой модели.

Теорема. *В $ZF+$СМ доказуемо существование единственной транзитивной модели M такой, что если N — произвольная стандартная модель, то существует $\in$-изоморфизм множества M в N*[1]*; M счетна.*

Доказательство. Пусть N — любая стандартная транзитивная модель. Пусть α_0 обозначает Sup всех ординалов в N. (Ввиду того что ординал — абсолютное понятие, нет надобности в различении ординалов относительно N и ординалов, меньших чем α_0.) Кроме того, если $\alpha<\alpha_0$, то M_α имеет тот же смысл при релятивизации посредством N. Будем писать X_α вместо $\bigcup\{M_\beta \mid \beta<\alpha\}$. Далее, так как N — модель для ZF, то мы знаем, что X_{α_0} является моделью для ZF. Пусть α_1 — *наименьший* такой ординал, что $X_{\alpha_1}=M$ является моделью для ZF. Мы утверждаем, что M и есть минимальная модель. Действительно, пусть N — произвольная стандартная транзитивная модель. (Допущение о транзитивности N не является ограничением, ибо N всегда $\in$-изо-

[1]) Слово «модель» обозначает всюду в этом параграфе модель для ZF. — *Прим. перев.*

морфно транзитивному множеству.) Пусть, как прежде, α_0 обозначает Sup всех ординалов в N; тогда X_{α_0} является моделью для $\boldsymbol{ZF}$, следовательно, $\alpha_1 \leqslant \alpha_0$. Теперь X_{α_0} — это множество всех конструктивных множеств по отношению к N, а поэтому $X_{\alpha_0} \subseteq N$ и $X_{\alpha_1} \subseteq X_{\alpha_0} \subseteq N$ и доказательство окончено. Счетность M следует из теоремы Лёвенгейма — Скулема, гарантирующей существование счетных подмоделей в M.

Следствие. *Модель M не содержит никакого множества, являющегося стандартной моделью, т. е.* СМ *ложна в M. Кроме того, в M имеет место $V=L$.*

Доказательство. Ввиду того что $M=\bigcup\{M_\beta \mid \beta < \alpha_1\}$, ясно, что в M имеет место равенство $V=L$. Если бы M имела стандартную модель, она должна была бы содержать и стандартную транзитивную модель N, ибо в M имеет место теорема из § 5 гл. II. В силу свойства минимальности для M, N также должна была бы содержать M, а это приводит к противоречию [1]).

Существует и другая точка зрения, приводящая к минимальной модели, которая впервые была изложена в [3]. Определим новую последовательность множеств $\tilde{M}_\alpha$. Пусть $\tilde{M}_0=\emptyset$ и $\tilde{M}_\alpha=\left(\bigcup_{\beta<\alpha}\tilde{M}_\beta\right)'$ при $\alpha\neq 0$, где теперь X' обозначает следующую операцию: для любого множества X, X' состоит из объединения X и всех множеств следующего вида [2]), где все суждения и определения считаются релятивизованными посредством X.

1. $\emptyset$.
2. $\{x, y\}$, где $x, y \in X$.
3. Объединение множества x, если $x \in X$.
4. $0, 1, 2, \ldots, \omega$.
5. Множество всех таких y из X, что $y \subseteq x$, где x — фиксированный элемент X.

[1]) Здесь слово «содержать» относится к отношению $\subseteq$, так что сказанное дает $M=N$, а противоречие состоит в том, что $N \in M$, откуда $N \in N$, что противоречит аксиоме регулярности. — *Прим. перев.*

[2]) По-видимому, это надо понимать так: X' является объединением X и множества всех множеств следующего вида. — *Прим. перев.*

6. Пусть φ — однозначная функция в X, определенная формулой, релятивизованной посредством X и использующей в качестве констант множества из X [1]). Если $u \in X$, то область φ на u входит в X'.

Легко заметить, что каждая из этих операций соответствует некоторой аксиоме ***ZF***. В отличие от гёделевского построения, мы, вообще говоря, не имеем $X \in X'$. Фактически разрешение $X \in X'$ соответствовало бы некоторой попытке получить в качестве аксиомы существование «универсального» множества. По этой причине гёделевская последовательность M_α никогда не оканчивается. Будем называть множества из нашей новой последовательности $\tilde{M}_\alpha$ [2]) «сильно конструктивными» множествами. Теперь можно показать, по существу теми же рассуждениями, что и для L, что аксиомы ***ZF*** имеют место для сильно конструктивных множеств. Далее, если $\tilde{M}_\alpha$ является моделью для ***ZF***, то очевидно, что $\tilde{M}_{\alpha+1} = \tilde{M}_\alpha$ и, более того, $\tilde{M}_\beta = \tilde{M}_\alpha$ для всех $\beta > \alpha$. Теперь совсем просто, пользуясь абсолютностью этого построения, показать, что минимальная модель M состоит в точности из сильно конструктивных множеств [3]).

---

[1]) Это следует понимать так, что константа может входить в эту формулу лишь в том случае, когда она обозначает элемент X. — *Прим. перев.*

[2]) По-видимому, подразумеваются также и элементы этих множеств. — *Прим. перев.*

[3]) Из счетности минимальной модели M вытекает поэтому, что на некотором α последовательность $\tilde{M}_\alpha$ должна оборваться (т. е. $\tilde{M}_\alpha$ будет моделью для ***ZF***). Конечно, само существование минимальной модели при этом можно лишь предполагать или выводить из более сильных аксиом (см. предыдущее следствие); это следует иметь в виду и при рассмотрении следующей теоремы.

Вопросы, рассматриваемые в этом параграфе (как и в § 7 предыдущей главы), выходят за пределы тех, для изучения которых предназначена система ***ZF***. Естественно поэтому привлечь для их формализации сильные аксиомы бесконечности. Но если они сформулированы с достаточной однозначностью, то при замене ***ZF*** на ***ZF*** с этими аксиомами (и соответствующем изменении значения терминов «модель» и «минимальная модель», а также при соответствующей замене в аксиоме *SM*) все, о чем говорится в этом параграфе, сохраняет силу. Я говорю это, впрочем, только об обычных «сильных аксиомах», касающихся недостижимых кардиналов. — *Прим. перев.*

Теорема. *Для каждого элемента x в M существует такая формула $A(y)$ в* ***ZF****, что x является единственным элементом в M, удовлетворяющим $A_M(x)$. Таким образом, в M каждый элемент может быть «назван» (can be «named»).*

Доказательство. Занумеруем все формулы $A_n(x)$ с одной свободной переменной. Пусть $B_n(x)$ будет формулой «$A_n(x)$ и $\exists\alpha$ такой, что $x=F_\alpha$ и для всех $\beta<\alpha$ $\sim A_n(F_\beta)$». Таким образом, $B_n(x)$ выбирает не более чем одно множество x. В M все множества конструктивны, поэтому если релятивизовать все суждения B_n посредством M, как мы впредь будем делать, то из существования какого-либо множества x, такого, что $A_n(x)$, будет вытекать и существование такого x, что $B_n(x)$. Теперь доказательство теоремы Лёвенгейма — Скулема показывает, что $M'=\{x \mid \exists n B_n(x)\}$ является моделью для ***ZF***, элементарно эквивалентной M. Пусть φ будет $\in$-изоморфизмом M' на транзитивное множество M'' [1]). В силу минимальности M и того, что $M''\subseteq M$, имеет место $M=M''$. Мы утверждаем, что $\varphi(t)=t$ для всех t в M'. В противном случае, пусть t удовлетворяет $B_n(t)$. Тогда t удовлетворяет формуле B_n, релятивизованной посредством M', так как M' элементарно эквивалентна M, а, следовательно, $\varphi(t)$ удовлетворяет B_n, релятивизованной посредством $M''=M$. Но существует только одно t, удовлетворяющее B_n в M, так что $\varphi(t)=t$ и $M'=M$. Теорема доказана.

Минимальная модель впервые была исследована Шепердсоном, который пользовался ею для исследования границ применимости метода внутренних моделей [2]). Его цель относилась скорее к теории доказательств, чем к теории моделей. Мы приведем к следующей главе один из его результатов, относящихся к возможности доказать независимость КГ.

---

[1]) О возможности выбрать такое M'' см. теорему на стр. 139. — *Прим. перев.*

[2]) То есть моделей, построенных теми средствами, которые формализуются системой ***ZF*** (у Шепердсона речь шла о гёделевской Σ, т. е. о ***GB***). — *Прим. перев.*

IV

Глава

Независимость континуум-гипотезы и аксиомы выбора

§ 1. Введение

Нашей главной целью в этой главе будет доказательство того, что КГ не может быть доказана в *ZF* (с включенной в нее аксиомой АВ) и что АВ не может быть доказана в *ZF*[1]). Вместе с результатами гл. III это дает полное доказательство независимости КГ и АВ[2]). Могут быть поставлены дальнейшие вопросы, касающиеся относительной силы различных форм АВ, также как и различные вопросы из кардинальной арифметики, и некоторые из этих вопросов также будут здесь рассмотрены. Тот общий метод, который мы вводим, применим к широкому классу вопросов о независимости, и так как в этой области наука развивается быстро, мы сможем дать только неполное резюме известных результатов. Под *ZF* мы будем подразумевать обычную систему аксиом без АВ. Мы уже показали, что $V=L \nearrow \rightarrow$ ОКГ и $V=L \rightarrow$ АВ. Мы докажем также, что ОКГ $\rightarrow$ АВ, так что имеет место $V=L \rightarrow$ ОКГ $\rightarrow$ АВ. В этой главе мы докажем, что эти стрелки не могут быть обращены, т. е. АВ не выводима из *ZF*, + АВ не влечет ОКГ и *ZF* $\nearrow$ + ОКГ не влечет $V=L$.

Наиболее естественный путь получения доказательства независимости состоит в предъявлении модели с требуемыми свойствами. Это — не единственный способ, потому что можно пытаться действовать непосредственно, анализируя структуру доказательств. Однако такой подход к теоретико-множественным вопросам не-

---

[1]) На этот раз, конечно, АВ не включается в *ZF*. — *Прим. перев.*

[2]) Точнее, доказательство независимости как КГ и АВ, так и их отрицаний. Фактически для каждого из четырех случаев — КГ + АВ, $\sim$КГ + АВ, КГ + $\sim$АВ, $\sim$КГ + $\sim$АВ — будет получено доказательство непротиворечивости (по отношению к *ZF*), однако случай КГ + $\sim$АВ не интересует автора. — *Прим. перев.*

естествен, потому что вся наша интуиция исходит из нашей веры в естественную, почти физическую модель математического мира (universe). В самом деле, по отношению к ***ZF*** трудно представить себе непосредственно любую другую модель[1]). Гёделевское доказательство дает новую модель — класс конструктивных множеств. В течение долгого времени эта модель и некоторые ее довольно простые разновидности служили главными примерами стандартных моделей для ***ZF***. (Конечно, имелись также *натуральные*[2]) модели, полученные путем рассмотрения множеств, ранг которых меньше некоторого большого кардинала.) Приступая к проблеме независимости КГ, мы первым делом должны решить вопрос о том, будем ли мы искать стандартные или нестандартные модели. Так как отрицание КГ или АВ может казаться несколько неестественным, то позволительно считать поиски стандартных моделей безнадежными. Однако мы сейчас принимаем твердое решение рассматривать только стандартные модели. Хотя это может выглядеть как наложение очень строгого ограничения на наш метод, окажется, что именно это строгое ограничение будет руководить нами при выборе различных возможностей (in suggesting possibilities). Мы начнем с отрицательного результата, принадлежащего Ше-

[1]) Своей ссылкой на веру в предыдущей фразе автор фактически ограничивает свободу своего исследования, и это вынуждает его отказаться от поисков каких-либо моделей для ***ZF***, кроме той, которую он имеет в виду. Так как доказать обреченность таких поисков на неудачу автор тоже не может, он предпочитает говорить здесь осторожно лишь о «трудности» и торопится перейти непосредственно к исследуемым им темам. — *Прим. перев.*

[2]) Курсив введен при переводе. Термин «натуральная модель» используется в этом смысле различными авторами — например, Монтегю и Воот [М. — В.] (Montague R., Vaught R. L., Natural models of set theory, *Fund. Math.*, **47** (1959), 219—242) или А. Леви (Levy A., Principles of reflection in axiomatic set theory, *Fund. Math.*, **49** (1960—61), 1—10). Если кардинал, о котором в этой фразе идет речь, недостижим, то соответствующая натуральная модель будет моделью для ***ZF***. Можно было бы вместо кардиналов говорить здесь об ординалах. Согласно [М. — В.], коль скоро недостижимые кардиналы существуют, существуют и натуральные модели, соответствующие счетным ординалам (что вытекает и из рассуждений автора). Поэтому нет оснований считать кардиналы, о которых идет речь, очень большими. — *Прим. перев.*

пердсону [23]. Напомним, что в гл. III мы нашли формулу $A(x) \equiv (x$ конструктивно), так что «внутренняя модель», образованная всеми x, удовлетворяющими $A(x)$, была требуемой моделью. Мы покажем, что этот метод неприменим в настоящей ситуации.

Теорема. *Пусть $A(x)$ — формула в* **ZF**. *Нельзя доказать в* **ZF**, *что имеют место аксиомы* **ZF** *и* $\sim V=L$, *релятивизованные посредством класса всех x, удовлетворяющих $A(x)$. И подавно, это относится к* **ZF** $+ \sim$АВ *и к* **ZF** $+$АВ$+ \sim$ОКГ [1]).

Доказательство. Допустим, что существует такая формула $A(x)$. Пусть M — минимальная модель и $M' = \{x \mid x \in M$ и $A_M(x)\}$. Тогда ввиду того, что аксиомы **ZF** имеют место в M, множество M' должно быть моделью для **ZF**, в которой имеет место $\sim V=L$. Так как $M' \subseteq M$, модель M' изоморфна M, а так как $V=L$ имеет место в M, она имеет место и в M', что является противоречием. Можно избежать ссылки на существование минимальной модели в виде «множества» путем рассмотрения формулы $B(x) \equiv \forall M$ (если M — стандартная модель, то $x \in M$). Действительно, минимальная модель рассматривается здесь в качестве класса, и, таким образом, здесь можно обойтись без аксиомы СМ.

Показав, что метод внутренних моделей непригоден в связи с **ZF**, естественно посмотреть, нельзя ли доказать существование внутренней модели для **ZF** $+ \not\sim V=L$ в каком-либо расширенном варианте системы **ZF**. (Изложенное доказательство показывает, что для любого «естественного» расширения $(\mathbf{ZF})'$ системы **ZF** в $(\mathbf{ZF})'$ нельзя доказать существование внутренней модели для $(\mathbf{ZF})' + \sim V=L$ [2]).) Простейшей воз-

[1]) То есть соблюдению релятивизованных $\sim$АВ и АВ$+\sim$ОКГ (вместо $\sim V=L$). — *Прим. перев.*

[2]) Речь идет только о стандартных моделях. Автор понимает под этим модели с абсолютным отношением $\in$, но благодаря наличию в **ZF** аксиомы регулярности этот отрицательный результат переносится (методом, использованным в доказательстве последней теоремы из § 5 гл. II) на модели, у которых класс Оп с его отношением порядка вполне упорядочен относительно исходной системы, в чем состоит одно из определений «стандартности» модели, часто употребляемое в основаниях теорий множеств. — *Прим. перев.*

можностью служит $ZF+$СМ, потому что СМ утверждает существование стандартной модели для ZF. Здесь также мы встречаем интересное ограничение, которое оставалось незамеченным до тех пор, пока эта проблема независимости не была решена.

Теорема. *Средствами* $ZF+$СМ, *или даже средствами любой системы аксиом, содержащей* ZF *и совместимой с* $V=L$, *нельзя доказать существование* ***несчетной*** *стандартной модели, в которой* АВ *истинна, а* КГ *ложна, или даже такой, в которой имеет место* АВ *и которая содержит неконструктивные действительные числа.*

Доказательство. Хотя существование счетных моделей для ZF прежде рассматривалось только как диковинка, эта теорема показывает, что именно такие модели подлежат рассмотрению при следовании нашей программе. Кроме того, в качестве следствия из теоремы о полноте известно, что непротиворечивая система всегда имеет модели произвольно большой мощности. В нашей теореме речь идет, конечно, только о стандартных моделях. Разумеется, мы неявно используем Consis ZF, ибо в противном случае все суждения доказуемы. Так как мы знаем, что Consis $ZF \rightarrow$ Consis $(ZF+V=L)$, ясно, что достаточно доказать, что $ZF+V=L$ влечет несуществование несчетных моделей со свойствамн, о которых говорится в теореме. Пусть M — несчетная стандартная транзитивная модель, $\alpha_0=\mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in M\}$ и допустим, что АВ имеет место в M. Если α_0 несчетно, то M содержит все счетные ординалы. Если α_0 счетно, то пусть R_β обозначает множество элементов M ранга β. Тогда для некоторого $\beta<\alpha_0$ R_β несчетно и, в силу абсолютности ранга, R_β определимо в M. Таким образом, M содержит множество, фактически являющееся несчетным, и в силу АВ это множество можно вполне упорядочить в M, так что M содержит несчетный ординал, что противоречит нашему допущению. Итак, в любом случае M содержит все счетные ординалы. Из $V=L$ следует, что каждое действительное число строится некоторым счетным ординалом, и таким образом мы доказали, что в M каждое действительное

число конструктивно [1]). Этим доказывается второе утверждение нашей теоремы, а следующая лемма дает и первое утверждение.

Лемма. *ZF+(Каждое действительное число конструктивно)* $\rightarrow$ КГ.

Доказательство. Наше предположение влечет, что множество C всех действительных чисел входит в L. В L множество C имеет мощность $\aleph_1$. Это означает, что существует отображение счетных *относительно* L ординалов на C, а так как счетный в L ординал должен быть счетным, то существует отображение $\aleph_1$ на C.

§ 2. Интуитивная мотивировка

Чтобы выполнить нашу программу и доказать существование стандартной модели, в которой АВ ложно, или в которой имеют место АВ и $\sim$КГ, мы безусловно должны принять аксиому СМ. Поэтому *впредь, до особого замечания, мы принимаем* СМ. Кроме того, *слово модель будет отныне относиться только к стандартным транзитивным моделям* [2]). Наша последняя теорема показывает, что мы должны рассматривать счетные модели. Поэтому пусть в оставшейся части этой главы M обозначает фиксированную счетную модель для *ZF*, в качестве каковой мы для определенности возьмем минимальную модель. Тогда $V=L$ имеет место в M. Наша первая цель состоит теперь в том, чтобы увидеть, для каких других стандартных моделей имеется хоть какая-нибудь надежда на доказательство их существования. Пусть $\alpha_0=\mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in M\}$. Как и в гл. III, мы пользуемся

[1]) Здесь используется абсолютность отношения «x стронтся ординалом α», нлн «α стронт x», т. е. $x \in M_\alpha$ (см. стр. 181), н определенне конструктивиого множества как такого, которое строится некоторым ординалом α. (В подлниинке «конструктивиое» — constructible, а «строится посредством α» — constructible from α.) — *Прим. перев.*

[2]) Поскольку речь будет идти только о моделях для *ZF*. и соблюдення аксном бесконечности и пары и абсолютности ω и операцнн пары вытекает, что для таких моделей н условия конечной замкиутостн, указанные в добавленин I на стр. 287, будут выполняться. — *Прим. перев.*

обозначением M_α для совокупности конструктивных множеств, получаемых на α-й стадии их построения. Тогда мы имеем $M = \bigcup\{M_\beta \mid \beta < \alpha_0\}$. В следующих двух теоремах предполагается непротиворечивость системы $\boldsymbol{ZF}+\mathrm{CM}$, так как в них используется минимальная модель.

Теорема. *Непротиворечиво допущение о том, что ни для какого $\alpha > \alpha_0$ множество $\bigcup\{M_\beta \mid \beta < \alpha\}$ не является моделью для $\boldsymbol{ZF}$.*

Доказательство. Если для всех $\alpha > \alpha_0$ множество $\bigcup\{M_\beta \mid \beta < \alpha\}$ *не* является моделью для $\boldsymbol{ZF}$, то доказывать уже нечего. В противном случае пусть α_1 обозначает наименьший ординал, для которого это множество является моделью, и положим $N = \bigcup\{M_\beta \mid \beta < \alpha_1\}$. Тогда очевидно, что в N истинно $\alpha > \alpha_0 \rightarrow (M_\alpha$ не является моделью для $\boldsymbol{ZF})$, и теорема доказана.

Следствие. *Непротиворечиво предположить, что для любой модели N $\alpha_0 = \mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in \mathrm{N}\}$.*

Доказательство. Если N' обозначает множество конструктивных множеств из N, то $\mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in N'\} = \mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in N\}$, и в силу доказанной теоремы непротиворечиво предположение $\mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in N'\} = \alpha_0$. [1])

Итак, какую бы новую модель N мы ни построили, нам придется иметь дело в точности с ординалами из M, и наша единственная надежда состоит в построении N путем «расширения» («broadening») модели M за счет введения новых множеств ранга α, где $\alpha < \alpha_0$. Так как множества конечного ранга абсолютны, то первая возможность состоит в нахождении такой модели N, что для некоторого $a \subseteq \omega$ будет иметь место $a \in N$ и

[1]) Легко видеть, что $\mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in N'\}$ совпадает с тем α, для которого $N' = \bigcup\{M_\beta \mid \beta < \alpha\}$. В самом деле, это α должно быть предельным в силу абсолютности (для любой транзитивной модели) свойства «быть ординалом» и его отрицания, ибо индукцией по β доказывается наличие наибольшего ординала в каждом M_β, $\beta \neq 0$ (ср. сноску 2 на стр. 183), а теорема о том, что сын ординала — ординал имеет место в $\boldsymbol{ZF}$. Кроме того, при $\gamma < \alpha$ имеет место $\gamma \in M_{\gamma+1}$, и ввиду $\gamma + 1 < \alpha$ имеет место $\gamma \in N'$ и (по той же теореме о сыне) $\gamma + 1 \in N'$, откуда $\gamma < \mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in N'\}$. С другой стороны, если $\gamma < \mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in N'\}$, то $\gamma \in N'$ и в силу тех же

$\sim a \in M$. Если N содержит a, оно должно содержать также все множества, которые можно построить из a[1]). Именно, положим $M_0(a) = \omega \cup \{a\}$, так что $M_0(a)$ транзитивно, и еще положим $M_\alpha(a) = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta(a)\right)'$ при $\alpha>0$. Тогда ясно, что $\alpha \in M$ влечет $M_\alpha(a) \in N$. Так как этим исчерпываются те множества, относительно которых мы можем установить, что они должны принадлежать N, то не является неразумным поиск N в виде $\cup\{M_\beta(a) \mid \beta<\alpha_0\}$ для некоторого $a \subseteq \omega$. Если $\sim a \in M$, то, конечно, a не будет конструктивным в N. Это приведет к модели, в которой нарушается $V=L$. Ввиду того что получение $\sim$АВ или АВ$+\sim$КГ потребует технически более сложной конструкции, мы сперва сосредоточим наше внимание на нахождении такого a. Заметим, что если мы возьмем произвольное $a \subseteq \omega$ не из M, то, вообще говоря, $N = \cup\{M_\beta(a) \mid \beta<\alpha_0\}$ не будет моделью для $\boldsymbol{ZF}$. В самом деле, счетный ординал α_0, не входящий в M, соответствует некоторому полному упорядочению ω и, таким образом, некоторому подмножеству $\omega\times\omega$, а следовательно, и некоторому подмножеству самого ω. Если в качестве a взять это подмножество, то любая модель для $\boldsymbol{ZF}$, содержащая a, должна содержать α_0, так как

теорем $\gamma+1<$этого Sup и $\gamma+1 \in M_{\gamma+2}$ имеет место в N' и в исходной системе, а с помощью индукции легко доказывается $\sim\gamma+1 \in M_\gamma$, так что $\gamma+1$ или $\gamma+2$ является наименьшим β, таким, что $\gamma+1 \in M_\beta$, откуда $\gamma+1$, или $\gamma+2<\alpha$, и $\gamma<\alpha$ — следовательно, $\alpha = \mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in N'\}$. Это рассуждение использует (в связи с абсолютностью M_α) условие конечной замкнутости, см. стр. 287.

Теперь (поскольку α обозначает $\mathrm{Sup}\{\alpha \mid \alpha \in N'\}$) предыдущая теорема дает (в силу $N' = \cup\{M_\beta \mid \beta<\alpha\}$) $\alpha \leqslant \alpha_0$. С другой стороны, условие «быть наименьшим α, таким, что $\cup\{M_\beta \mid \beta<\alpha\}$ является моделью для $\boldsymbol{ZF}$» выразимо формулой $\boldsymbol{ZF}$ (ибо параметр φ из схемы 6_n легко можно заменить при этом квантором по подмножествам этого объединения, принадлежащим некоторому множеству, найденному методом доказательства основной теоремы из § 6 гл. II). Поэтому без противоречия можно считать, что α_0 уже является таким наименьшим ординалом, откуда $\alpha_0 \leqslant \alpha$ и, следовательно, $\alpha=\alpha_0$. — *Прим. перев.*

[1]) «Содержит», «содержать» — в качестве элемента. «Построить x из a» — значит, получить такое γ, что $x \in M_\gamma(a)$ в смысле следующей фразы. — *Прим. перев.*

существование для каждого полного упорядочения соответствующего ординала является теоремой ZF[1]). Однако ясно, что $x \in N \to \operatorname{rank} x < \alpha_0$, а поэтому $\alpha_0 \in N$ невозможно. Поэтому если N должно быть моделью, то a должно обладать некоторыми специальными свойствами. Вместо того чтобы прямо описывать a, здесь нам лучше исследовать различные свойства a и определить, какие из них желательны, а какие нет. Главный пункт состоит в нежелательности того, чтобы a содержало «специальную» информацию об M, которая может быть извлечена только извне, например о счетности α_0, и из которой следовало бы, что любая модель, содержащая a, должна содержать больше ординалов, чем их имеется в M. То a, которое мы построим, мы будем рассматривать как «генерическое» (общее[2])) множество относительно M. Идея состоит в том, что все свойства a должны быть «вынуждены» именно тем фактом, что a ведет себя как «генерическое» множество в M. Эта концепция разрешения (of deciding) того, в каких случаях некоторое суждение об a

[1]) Конечно, здесь используется также абсолютность этого соответствия и единственность такого ординала (соответствующего a) в исходной системе; кроме того, здесь использовано некоторое фиксированное (и абсолютное) соответствие между подмножествами ω и $\omega \times \omega$, которое можно получить с помощью взаимно однозначного отображения ω на $\omega \times \omega$. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике — «generic» set; английское слово *generic* означает *общее* или *обычное* — т. е. в данном случае не связанное никакими специальными соглашениями или условиями. Именно в этом смысле «общими» являются те множества, о которых неизвестно ровно ничего, кроме того, что они — множества (причем здесь речь идет лишь о множествах, являющихся подмножествами ω; поскольку ничего другого о них неизвестно, они рассматриваются как «общие»). В рассуждениях такие множества участвуют просто в качестве параметров для произвольного множества (или для подмножества ω и т. п.). Именно эта «общность» будет иметь принципиальное значение для дальнейшего. Представляется удобным ввести в этом переводе специальный термин «генерическое» (в подлиннике соответствующее слово «generic» нигде не употребляется ни в какой другой связи, чего не удалось бы добиться для русского слова «общее»).

Здесь речь идет о «генеричности» (т. е. «общности») относительно M в том смысле, что об этом $a \subseteq \omega$ не будет известно ничего, кроме того, что оно не принадлежит M. Точнее же характер этой «генеричности» описывается дальнейшим текстом автора. — *Прим. перев.*

является «вынужденным» [1]), представляет собой ключевой пункт всего построения. Ясно, что существуют некоторые свойства a, для которых никакая разумная процедура не может привести к решению вопроса об истинности или ложности суждений о том, что ими обладает произвольное «генерическое» множество a. Таковы суждения вида $n \in a$, где n — конкретное натуральное число. Всякое конечное непротиворечивое [2]) множество P суждений вида $n_k \in a$ или $\sim n_k \in a$ мы будем называть *вынуждающим условием* (forcing condition). Если дано P, то мы поставим вопрос, разумно ли — в связи с некоторой процедурой, которую нам предстоит задать, — ожидать, что P «вынуждает» справедливость произвольного суждения A об a, или справедливость $\sim A$, или же условия из P не «вынуждают» A ни тем, ни другим образом. Хотя «вынуждение» будет связано с понятием «импликации», оно будет отличаться от него тем, что, коль скоро P вынуждает A, будет верно не то, что любое a, удовлетворяющее P, удовлетворяет и A, а только то, что любое «генерическое» a, удовлетворяющее P, будет удовлетворять и A.

После того как нами будет дано точное определение вынуждения и будут доказаны некоторые элементарные свойства этого понятия, мы покажем возможность найти

[1]) Термин «вынужденное» относился в предыдущей фразе к свойству, а здесь соответствующим образом к суждению. В подлиннике — when a statement about a is «forced» to hold, т. е. речь идет о «вынуждении» не суждения, а того, что оно имеет место (и аналогично в предыдущей фразе для свойства), и читателю рекомендуется именно таким образом рассматривать это определение слова «вынуждение». Автор вводит forcing (вынуждение) как важнейшее специальное понятие своей конструкции. Чешские ученые в своих выступлениях на русском языке часто используют слово «форсинг» для обозначения коэновского аппарата «вынуждения», и будет вполне естественно, если это слово войдет в русский язык и в советских работах, относящихся к этой области. В этом переводе я, однако, пользуюсь термином «вынуждение», уже использованным Драгалиным при переводе [4] (и еще раньше в несколько ином смысле — Вопенкой (Comment. math. univ. Caroline, suppl., 1, 1964, 48)). — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике — self-consisted. Этот термин в применении к множеству P означает, конечно, что ни для какого натурального числа m не имеют места оба условия $m \in a$ и $\sim m \in a$ одновременно. — *Прим. перев.*

такую бесконечную последовательность вынуждающих условий P_n, что $P_n \subseteq P_{n+1}$, т. е. последовательность P_n образует непротиворечивое семейство условий, и притом такую, что для каждого суждения A некоторое P_n вынуждает A или же вынуждает $\sim A$. Такая последовательность будет называться полной последовательностью и, так как она о каждом свойстве разрешает (decides), обладает ли a этим свойством, она определяет и само множество a. Пользуясь именно этим a, мы сможем доказать, что множество N служит моделью. Кроме того, можно будет доказать $\sim a \in M$. Далее, в N любое суждение A будет истинным в точности тогда, когда оно вынуждается каким-нибудь P_n из полной последовательности. Любое множество a, возникающее благодаря этому процессу, будет называться «генерическим».

Хотя мы еще не привели определения вынуждения, ясно, что для нас желательно, чтобы это понятие обладало некоторыми свойствами. Во-первых, оно должно быть непротиворечивым, т. е. должны быть невозможными случаи, когда P вынуждает A и в то же время P вынуждает $\sim A$. Во-вторых, если P вынуждает A и $Q \supseteq P$, то Q вынуждает A. В-третьих, для любых P и A существует такое Q, что $Q \supseteq P$ и притом Q вынуждает A или Q вынуждает $\sim A$. Ясно, что эти свойства соответствуют обычным свойствам импликации [1]). Имея эти требования в виду, легче будет понять определение понятия вынуждения.

Продолжая эти наводящие соображения, вспомним идею построения моделей, воплощенную в теореме о полноте. Когда мы собираемся строить модель для какой-либо совокупности суждений, то каждый раз, когда мы встречаем суждение вида $\exists x B(x)$, мы должны ввести новый символ $\bar{x}$ и присоединить суждение $B(\bar{x})$. В рассматриваемом же случае мы отправляемся от одного-единственного символа для множества a и желаем, в некотором смысле, снабдить его по возможности наименьшей информацией. Это приводит к интуитивной идее,

[1]) Поскольку P и Q рассматриваются как (непротиворечивые) наборы условий, подразумевается, что в левых частях импликаций эти наборы заменяются конъюнкциями их членов. — *Прим. перев.*

что, коль скоро рассматривается $\exists x B(x)$, мы должны предпочесть считать это суждение ложным, за исключением тех случаев, когда мы уже ввели такой символ $\bar{x}$, для которого у нас имеются веские основания настаивать на истинности $B(\bar{x})$. Разумеется, если $B(x)$ имеет вид $\forall y C(x, y)$, то даже если мы примем ложность $\exists x \forall y C(x, y)$, то для конкретных x, например для $x=1$, мы должны будем ввести такое $\bar{y}$, что $\sim C(1, \bar{y})$. Конечно, эти идеи не поддаются полному уточнению, так как в применении к произвольным системам аксиом они являются чересчур общими. Мы должны к ним добавить существенную особенность системы ***ZF***, а именно естественную иерархию множеств, соответствующую их рангам. Пользуясь этой иерархией мы сумеем с помощью надлежащей трансфинитной рекурсии определить рассмотренное выше понятие «вынуждения». Ключевая идея будет состоять в предпочтительном рассмотрении квантора всеобщности по сравнению с квантором существования.

§ 3. Понятие вынуждения

Наша цель состоит в нахождении такого $a \subseteq \omega$, что $\sim a \in M$ и если $N = \bigcup \{M_\beta(a) \mid \beta \in M\}$, то N является моделью для ***ZF***. Изложение, которое мы приведем здесь, будет обладать второстепенными отличиями от использованного в [4]. Во-первых, в [4] мы пользовались конструкцией F_α, а не M_α, потому что только первая из этих конструкций была изложена в литературе [14] во всех подробностях. Но, по-видимому, в большинстве отношений следует отдать предпочтение изложению с M_α. Во-вторых, мы используем в этом новом изложении некоторые упрощения, которые были указаны различными лицами.

Как уже было упомянуто, мы будем исследовать все возможные суждения об N и решать, какие из них мы желаем считать истинными, а какие — ложными. Для этого потребуется дать элементам N имена прежде, чем мы фактически выберем a, и, таким образом, прежде, чем мы явным образом получим N. В [4] мы использовали F_α в качестве формальных символов, которые после вы-

бора a надлежало рассматривать в качестве $F_\alpha(a)$, и рассматривали суждения, содержащие эти формальные символы. Таким путем элементам N были сопоставлены ординальные «этикетки» («labels»), но, конечно, случалось, что для некоторых α, β соответствующие F_α, F_β подлежали затем отождествлению. Тот способ, которым приписываются эти «этикеткн», не имеет никакого значения, лишь бы при этом не было упущено никакое множество из N. Эта ситуация аналогична построению расширения поля k, образованного присоединением корня α неприводимого уравнения $f(x)=0$. Все элементы расширенного поля имеют вид $p(\alpha)$, где p — полином, а α рассматривается как формальный символ, но $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$ отождествляются, если $p(x)-q(x)$ делится на $f(x)$. Далее, все те множества из $M_\alpha(a)$, которые не входят в $M_\beta(a)$ при $\beta<\alpha$, определяются формулами $\{x\in X_\alpha \mid A(x)\}$, где $X_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta(a)$ и A — формула, в которой все связанные переменные ограничены множеством X_α, а в качестве констант могут содержаться конкретные элементы X_α. При этом, конечно [1]), нужен некоторый пересчет всех таких возможных формул. Этикетки F_α из [4] были просто одним из конкретных способов выполнения такого пересчета.

Определение. «(Этикетная) параметризация» (a «labeling») [2]) — это отображение, определенное в ZF, сопоставляющее каждому ординалу $0<\alpha<\alpha_0$ некоторое множество S_α, именуемое «параметрическим пространством» (the «label space»), и определенные в S_α функции φ_α, таким образом, что множества S_α дизъюнктны и если $c\in S_\alpha$, то $\varphi_\alpha(c)$ есть некоторая формула $A(x)$, в ко-

[1]) В подлиннике — therefore (следовательно). Для какой цели нужен этот пересчет, автор не указывает; по-видимому, для получения AB в N. — *Прим. перев.*

[2]) Слово «параметр» обычно обозначает неразложимое неопределенное имя. Английское «label» переводится как «этикетка», «ярлык» или «бирка», т. е. как некоторая пометка, не обязательно неопределенная или неразложимая. Таким образом, слово «параметризация» здесь употребляется несколько условно ввиду отсутствия соответствующих словообразований от только что указанных слов. — *Прим. перев.*

торой все связанные переменные ограничены множеством X_α [1]), а в качестве констант допустимо появление элементов множеств S_β, где $\beta<\alpha$. Функции φ_α должны при этом устанавливать взаимно однозначное соответствие между S_α и множеством всех таких формул. Множество S_0 определяется как множество $\omega \cup \{a\}$, где a — формальный символ. Мы вводим обозначение $S = \bigcup\limits_\alpha S_\alpha$.

Ясно, что каждое $c \in S$ входит в единственное S_α. Когда, наконец, мы выберем конкретное множество $a \subseteq \omega$, мы сможем следующим образом определить, для каждого $c \in S$, некоторое множество $\bar{c}$. Для c из S_0 множество $\bar{c}$ определяется очевидным образом [2]). Если c входит в S_α, где $\alpha>0$, то пусть $\varphi_\alpha(c) = A(x, c_1, \ldots, c_m)$, $c_i \in S_{\beta_i}$, $\beta_i<\alpha$, где $A(x, t_1, \ldots, t_m)$ — формула в $\boldsymbol{ZF}$, все связанные переменные которой ограничены посредством X_α. Для указания того, что какая-нибудь связанная переменная x ограничена посредством X_α, мы будем отныне писать $\forall_\alpha x$ или $\exists_\alpha x$. Если мы определяем X_α индуктивно как $\{\bar{c} \mid c \in S_\beta \,\&\, \beta<\alpha\}$, то $\bar{c} = \{x \in X_\alpha \mid A(x, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m)\}$ [3]). Но очень придирчивый читатель вправе возразить, что в $\boldsymbol{ZF}$ нет символов для «формул», так что нельзя определить φ_α. Разумеется, мы подразумеваем, что принята какая-нибудь естественная нумерация всех формул $A(x, t_1, \ldots, t_m)$, содержащих хотя бы одну свободную переменную и таких, что все связанные переменные ограничены в них посредством X_α, а функция φ_α состоит на самом деле из двух функций: φ_α^1, которая дает номер формулы $A(x, t_1, \ldots, t_m)$, и φ_α^2, которая оп-

---

[1]) Точнее, $\varphi_\alpha(c)$ есть формула $A(x)$ с указанной переменной x, или пара $\langle \varphi_\alpha(c), x\rangle$, или же формула $A(x)$, содержащая не более одной свободной переменной (x; все остальные замещены константами). — *Прим. перев.*

[2]) То есть $\bar{c}=c$ (а c в этом случае — натуральное число или уже выбранное a). — *Прим. перев.*

[3]) Используемое при этом индуктивное определение X_α согласуется с прежним, т. е. $X_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta(a)$, что следует из определения множеств $M_\alpha(a)$. — *Прим. перев.*

ределена для всех натуральных чисел i условиями $\varphi_\alpha^2(i) = c_{i+1}$ при $i < m$, $\varphi_\alpha^2(i) = 0$ при $i \geqslant m$ так, что φ_α^2 принимает свои значения в $\{0\} \cup \left\{ \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \right\}$ [1]).

Ясно, что «параметрические» пространства S_α можно определять посредством трансфинитной рекурсии многими способами. Пожалуй, простейший способ состоит в определении S_α как множества всех этих формул $A(x)$. При этом S_α определяется по рекурсии как множество всех таких формул $(A(x, c_1, \ldots, c_m))$, где $c_i \in \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta$, в которых все кванторы имеют вид $\forall_\alpha$ или $\exists_\alpha$. Это значит, что всякий элемент S_α является формулой, некоторые из термов которой в свою очередь являются формулами [2]), и т. д., так что имеется конечная последовательность [3]) погруженных (nested) в нее формул, и притом каждый квантор в ней имеет ординальный индекс. Именно этот подход был выбран в [6] и [7]. Небольшое затруднение состоит в том, что в ZF нет «формальных символов», потому что любой объект является множеством. Однако нам нужно лишь конечное число символов, а именно &, $\sim$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $=$, $\in$, $\forall$, $\exists$, x, (,), так что мы можем приписать им различные натуральные числа и представлять их таким образом. Тогда элементы параметрического пространства S будут состоять

---

[1]) Функции φ_α^1 и φ_α^2 дают возможность для любых данных $c_1, c_2, \ldots, c_m \in X_\alpha$ определнть формулу $A(x, c_1, \ldots, c_m)$ требуемого вида. Сейчас имеется в виду, что такие формулы отождествляются с этикетками c из S_α, так что имеется взаимно однозначное соответствие между этими этикетками и только что упомянутыми формулами. Теперь можно отказаться от этих отождествлений, сохранив лишь это соответствие между S_α и множеством формул $A(x, c_1, \ldots, c_m)$, которое и будет (при $\alpha>0$) представлять в ZF рассматриваемые функции φ_α. (Конечно, без каких-либо затруднений можно ввести в ZF объекты, играющие роль c из S_α, например, просто последовательности φ_α^1, $\varphi_\alpha^2(0)$, $\varphi_\alpha^2(1)$, $\ldots$). — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, при $m=0$ такие термы отсутствуют. — *Прим. перев.*

[3]) Лучше было бы употребить здесь, напрнмер, слово «набор», так как никакого линейного порядка для этой «последовательности» не устанавливается. — *Прим. перев.*

из конечных последовательностей этих натуральных чисел или ординалов, причем будет действовать соглашение, что за знаками $\forall$ и $\exists$ всегда следует ординал, так что вместо $\forall_\alpha$ будет стоять $\forall$, α, а за x всегда следует какое-нибудь натуральное число n, так что вместо x_n будет стоять x, n [1]). Конечно, только некоторые из этих последовательностей соответствуют правильно образованным формулам и элементам S, но правила для разрешения (deciding) этого обстоятельства просты и легко выразимы в ***ZF***.

Теперь мы уже можем приступить к рассмотрению суждений об N.

Определение. *Ограниченное суждение* (a limited statement) — это суждение в ***ZF***, в котором каждый квантор имеет вид $\forall_\alpha$ или $\exists_\alpha$ с некоторым ординалом $\alpha<\alpha_0$ и в которое допускаются вхождения элементов S в качестве констант.

Определение. *Неограниченное суждение* (an unlimited statement) — это суждение в ***ZF***, в которое допускаются вхождения элементов S в качестве констант [2]).

Когда, наконец, N будет построено, то ограниченные и неограниченные суждения станут настоящими суждениями об N, коль скоро каждое c из S будет заменено на $\bar{c}$, а кванторы $\forall_\alpha x$ и $\exists_\alpha x$ будут истолкованы как $\forall x$ и $\exists x$, в которых x ограничено принадлежностью X_α. Очевидно, что ограниченные суждения принадлежат более простому типу, так как в них идет речь только об элементах X_α для некоторого α. Они допускают следующую естественную иерархию:

---

[1]) Это n может встретиться среди чисел, представляющих вышеуказанные знаки &, ..., что, однако, не приводит к путанице, так как n стоит в данном случае сразу после x, или, точнее, числа, представляющего x, и считается, что x встречается в формулах только в виде x_n, замененном на x, n. — *Прим. перев.*

[2]) Слова «в которое допускаются вхождения элементов S в качестве констант» (which may involve elements of S as constants) указывают в этих определениях на соответствующее расширение понятия суждения из ***ZF***, так что неограниченное суждение — это просто замкнутая формула с любыми константами из S. — *Прим. перев.*

Определение. Если A — ограниченное суждение, положим ранг $A = \operatorname{rank} A = (\alpha, i, r)$, где

1. α — наименьший такой ординал, что если $\forall_\beta$ или $\exists_\beta$ входит в A, то $\beta \leqslant \alpha$, и если $c \in S_\beta$ входит в A, то $\beta < \alpha$.
2. r — число символов в A.
3. $i = 0$, если α — сын, например $\alpha = \beta + 1$, и $\exists_\alpha$ и $\forall_\alpha$ не входят в A, и никакая часть вида $c \in (\cdot)$, $c = (\cdot)$ или $(\cdot) = c$, где $c \in S_\beta$, не входит в A. В противном случае $i = 1$.

Если $\operatorname{rank} A = (\alpha, i, r)$, то в A говорнтся только об элементах множества X_α. Ясно, что индекс r является мерой сложности A. Индекс i необходим, потому что при рассмотрении выражений вида $c_1 \in c_2$, где $c_1 \in S_\beta$, $c_2 \in S_\gamma$ и $\gamma < \beta$ встретятся некоторые технические трудности при замене $c_1 \in c_2$ «эквивалентным» суждением более простого типа. Это обнаружится в нашем определении вынуждения.

Определенне. $(\alpha_1, i_1, r_1) < (\alpha_2, i_2, r_2)$, если $\alpha_1 < \alpha_2$, или $\alpha_1 = \alpha_2$ и $i_1 < i_2$, или $\alpha_1 = \alpha_2$, $i_1 = i_2$, $r_1 < r_2$.

Определение. *Вынуждающее условие* P — это конечное множество ограниченных суждений вида $n \in a$ или $\sim n \in a$, где $n \in \omega$ и n и a рассматриваются как принадлежащие S_0, причем в P не могут входить оба суждения $n \in a$ и $\sim n \in a$.

Теперь мы хотнм определить «P вынуждает A», и сперва мы рассмотрим случай, когда A — ограниченное суждение. Определение будет происходить рекурсией по рангу A. Основной шаг будет состоять в редукции A к суждениям более низкого ранга. Если A имеет вид $\exists_\alpha x B(x)$, то мы будем говорить, что P вынуждает A просто в том случае, когда для некоторого $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, P вынуждает $B(c)$. Это значит, что — в соответствин с идеей о «генеричности» a — множество существует только в том случае, когда имеется такое фиксированное c, что для всех «генерических» a, удовлетворяющих P, суждение $B(\bar{c})$ оказывается истинным. Это — от-

несенное к a суждение о равномерности [1]), в том смысле, что для множества, удовлетворяющего $B(x)$, можно задать фиксированное определение через a. Далее, если A имеет вид $\forall_\alpha x B(x)$, то наши общие идеи могли бы привести нас к соблазну считать, что P вынуждает A во всех случаях, кроме того, когда для некоторого $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, P вынуждает $\sim B(c)$. Однако это для нас нежелательно по другим соображениям. Именно, допустим, что для некоторого Q, содержащего P, условие Q вынуждает $\sim B(c)$, где $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$. Тогда утверждение о том, что P вынуждает A, означало бы, что мы никогда не сможем заставить a удовлетворять условням Q [2]), а это, по-видимому, нарушало бы «генерический» характер a, так как a должно было бы удовлетворять некоторым скрытым условиям, не упомянутым в P [3]). Может даже случиться, что имеется много $Q \supseteq P$ таких, что для некоторого $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, Q вынуждает $\sim B(c)$ [4]), и притом их столь много, что было бы нелепо считать, что P вынуждает A. Поэтому мы будем считать, что P вынуждает $\forall_\alpha x B(x)$, если для всех $Q \supseteq P$, $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, Q *не* вынуждает $\sim B(c)$.

Рассмотрим на нескольких примерах, как это работает. Именно, рассмотрим суждение «a бесконечно». Оно утверждает $\forall_1 x \exists_1 y (y > x \,\&\, y \in a)$. (С технической

---

[1]) В подлиннике — a informity statement on a. По-видимому, автор говорит о «равномерности», проявляющейся в «генеричности» a, т. е. в том, что a — произвольное (неопределенное или общее) миожество; именно, все известное о том x, существование которого тут рассматривается, не зависит от выбора конкретного значения для этого «генерического» a. — *Прим. перев.*

[2]) Ибо при этом Q должно было бы вынуждать A и тем самым ввиду $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, Q не вынуждало бы $\sim B(c)$. — *Прим. перев.*

[3]) Т. е. отрицанию коиъюнкции тех условий, которые образуют разиость $Q - P$ (или дизъюикции отрицаний этих условий). По-видимому, автору здесь проще было бы обосновать свою мысль ссылкой иа второе из тех свойств, которые были перечислены на стр. 210, ио он хочет, кроме того, указать и на эту несовместимость «генеричностн» a с этими скрытыми условиями (точнее, с только что указаиной дизъюнкцией). — *Прим. перев.*

[4]) В силу «второго свойства», упомянутого в предыдущей сноске, если есть хоть одио такое Q, то и всякое $Q_1 \supseteq Q$ удовлетворяет этому же условню (для того же c). — *Прим. перев.*

стороны $>$ не является знаком, допустимым в наших формулах, но отвлечемся от этого.) Для любого конкретного n_0 никакое P не будет вынуждать, что n_0 является верхней границей для натуральных чисел из a. Следовательно, *каждое* P вынуждает «a бесконечно». Аналогичное рассуждение показывает, что каждое P вынуждает a иметь бесконечно много простых чисел. В то же время вполне правдоподобно, что каждое P вынуждает a быть неконструктивным, так как для любого данного конструктивного элемента x можно вынудить $\sim x=a$ одним-единственным условием вида $n\in a$ или $\sim n\in a$. Это со временем будет строго доказано.

В первоначальном варианте вынуждения [2] все ограниченные суждения рассматривались как приведенные к предваренной форме. В этой форме удаление кванторов является единственным существенным шагом, так как остальные правила рассматриваются более или менее очевидным образом. Однако если считать, что $\forall$ есть $\sim\exists\sim$, то специальное рассмотрение $\forall$ требует такого же рассмотрения и для $\sim$. Вообще мы будем говорить, что P вынуждает $\sim A$, если для всех $Q\supseteq P$ Q не вынуждает A. Это усовершенствование, принадлежащее Д. Скотту, позволяет нам рассматривать суждения, не приводя их к предваренной форме, а также приводит и к другим упрощениям. Но, разумеется, получаемые в конечном счете модели N будут одними и теми же при любом из этих вариантов.

Определение. Для ограниченных суждений A мы следующим образом, рекурсией [1]) по рангу A, определяем, что P *вынуждает* A:

1. P *вынуждает* $\exists_\alpha xB(x)$, если для некоторого $c\in S_\beta$, $\beta<\alpha$, P вынуждает $B(c)$.
2. P *вынуждает* $\forall_\alpha xB(x)$, если для всех $Q\supseteq P$ и $c\in S_\beta$, $\beta<\alpha$, Q не вынуждает $\sim B(c)$.

[1]) Ранг A в подлиннике часто обозначается «rank A» (а не «rank of A»), и это обозначение в большинстве случаев сохраняется в переводе. «P вынуждает A» обозначается в подлиннике через «P forces A»; некоторые авторы употребляют для этого символическую запись $P\Vdash A$. Конечно, здесь (и в следующем определении) P, Q и т. п. — вынуждающие условия (см. стр. 216). — *Прим. перев.*

3. P *вынуждает* $\sim B$, если для всех $Q \supseteq P$ Q не вынуждает B.
4. P *вынуждает* $B \,\&\, C$, если P вынуждает B и P вынуждает C.
5. P *вынуждает* $B \vee C$, если P вынуждает B или P вынуждает C.
6. P *вынуждает* $A \to B$, если P вынуждает B или P вынуждает $\sim A$.
7. P *вынуждает* $A \leftrightarrow B$, если P вынуждает $A \to B$ и P вынуждает $B \to A$.
8. P *вынуждает* $c_1 = c_2$, где $c_1 \in S_\alpha$, $c_2 \in S_\beta$, $\gamma = \max(\alpha, \beta)$, если a) $\gamma = 0$ и $c_1 = c_2$ как элементы S_0 или b) $\gamma > 0$ и P вынуждает $\forall_\gamma x (x \in c_1 \leftrightarrow x \in c_2)$.
9. P *вынуждает* $c_1 \in c_2$, где $c_1 \in S_\alpha$, $c_2 \in S_\beta$, $\alpha < \beta$, если P вынуждает $A(c_1)$, где $A(x) = \varphi_\beta(c_2)$ (т. е. $A(x)$ — формула, определяющая c_2).
10. P *вынуждает* $c_1 \in c_2$, где $c_1 \in S_\alpha$, $c_2 \in S_\beta$, $\alpha \geqslant \beta$ и не имеет места $\alpha = \beta = 0$, если для некоторого $c_3 \in S_\gamma$, где $\gamma < \beta$ при $\beta > 0$ и $\gamma = 0$ при $\beta = 0$, P вынуждает $\forall_\alpha x (x \in c_1 \leftrightarrow x \in c_3) \,\&\, (c_3 \in c_2)$.
11. P *вынуждает* $c_1 \in c_2$, где c_1, $c_2 \in S_0$, если c_1, $c_2 \in \omega$ и $c_1 \in c_2$ (как элементы S_0), или $c_2 = a$ и суждение $c_1 \in a$ входит в P.

В случае 10 заметим, что если $c_1 \in S_\alpha$, $c_2 \in S_\beta$, $\alpha \geqslant \beta$, то при $A \equiv c_1 \in c_2$ имеет место $\operatorname{rank} A = (\alpha + 1, 1, 3)$. Ранг $\forall_\alpha x (x \in c_1 \leftrightarrow x \in c_3) \,\&\, (c_3 \in c_2)$ есть $(\alpha + 1, 0, 17)$, так что достигается редукция ранга. Аналогично, в случае 8 мы видим, что индекс i понижается с 1 до 0. В остальных случаях, если ранг рассматриваемого суждения есть (α, i, r), то ясно, что индекс i никогда не возрастает и в этом определении всегда осуществляется редукция α или r [1]).

[1]) Здесь автор допускает легко исправимые неточности. Индекс i может возрасти в результате убывания α, но конечно, ранг при этом понижается, что и требуется. В случае 7 для редукции требуется, чтобы, например, знак $\leftrightarrow$ в определении r засчитывался за два знака. (Конечно, можно вовсе исключить этот случай из рассмотрения, рассматривая $A \leftrightarrow B$ всюду как сокращение для $(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$, в том числе и в записях, входящих в случаи

Определение. Для неограниченных суждений A мы следующим образом, рекурсией по числу символов, входящих в A, определяем, что P *вынуждает* A:

1. P *вынуждает* $\exists x B(x)$, если для некоторого $c \in S$ P вынуждает $B(c)$.
2. P *вынуждает* $\forall x B(x)$, если для всех $c \in S$, $Q \supseteq P$ Q не вынуждает $\sim B(c)$.
3. P *вынуждает* $\sim B$, если для всех $Q \supseteq P$ Q не вынуждает B.
4. P *вынуждает* $B \,\&\, C$, если P вынуждает B и P вынуждает C.
5. P *вынуждает* $B \vee C$, если P вынуждает B или P вынуждает C.
6. P *вынуждает* $B \rightarrow C$, если P вынуждает C или P вынуждает $\sim B$.
7. P *вынуждает* $B \leftrightarrow C$, если P вынуждает $B \rightarrow C$ и P вынуждает $C \rightarrow B$.
8. P *вынуждает* $c_1 \in c_2$ или $c_1 = c_2$, если P вынуждает их как ограниченные суждения.

Мы повторяем, что из наших определений не следует, что для P и A обязательно должно иметь место «P вынуждает A или P вынуждает $\sim A$». Кроме того, вынуждение не подчиняется некоторым простым правилам исчисления высказываний. Так, P может вынуждать $\sim\sim A$, и все же не вынуждать A.

§ 4. Основные леммы

В дальнейшем A обозначает любое суждение — ограниченное или неограниченное.

Лемма 1. *Для любых P и A несовместимы утверждения «P вынуждает A» и «P вынуждает $\sim A$».*

---

8 и 10; тогда число 17 в предыдущем подсчете ранга придется увеличить, что несущественно.) Это относится и к случаю 7 следующего определения. В случаях 1 и 2 (для $\exists_\beta$ и $\forall_\beta$) невозрастание i вытекает из того, что при $i=0$ число α должно превосходить β, а потому при $c \in S_\gamma$, $\gamma < \beta$ не имеет места $\alpha = \gamma + 1$ и вхождение c через $c \in (\cdot)$, $c = (\cdot)$ или $(\cdot) = c$ не может повысить i для формулы $B(c)$ или $\sim B(c)$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Это непосредственно вытекает из определения, потому что если P вынуждает $\sim A$, то, в силу $P \supseteq P$, P не может вынуждать A.

Лемма 2. *Если P вынуждает A и $Q \supseteq P$, то Q вынуждает A.*

Доказательство. Мы докажем это сперва для ограниченных A индукцией по $\operatorname{rank} A = (\alpha, i, r)$. Случаи 4—11 определения вынуждения не требуют особого рассмотрения, так как «P вынуждает A» сводится к «P вынуждает B» для некоторых B, для которых $\operatorname{rank} B$ меньше, чем $\operatorname{rank} A$ [1]). Если P вынуждает $\exists_\alpha x B(x)$, то P вынуждает $B(c)$, где $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, так что по индуктивному предположению Q вынуждает $B(c)$, следовательно Q вынуждает $\exists_\alpha x B(x)$. Если P вынуждает $\forall_\alpha x B(x)$ и $Q \supseteq P$, то при $R \supseteq Q$ будет и $R \supseteq P$, так что R не вынуждает $\sim B(c)$ для любых $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, следовательно Q вынуждает $\forall_\alpha x B(x)$. Если P вынуждает $\sim B$, $Q \supseteq P$, то при $R \supseteq Q$ будет и $R \supseteq P$, так что R не вынуждает B, следовательно, Q вынуждает $\sim B$. Теперь, если A неограниченно, те же самые рассуждения [2]) применяются в случаях 1—7. Случай 8 рассматривается путем ссылки на доказательство для ограниченных суждений.

Лемма 3. *Для любых P и A существует такое $Q \supseteq P$, что Q вынуждает A или Q вынуждает $\sim A$* [3]).

---

[1]) В случаях 8 и 11 с $c_1 = c_2$ или $c_1 \in c_2$ (как элементы S_0) дело обстоит еще проще: «P вынуждает A», при этом имеет место для всех P. — *Прим. перев.*

[2]) С той лишь разницей, что индукция происходит не по рангу, а по числу r символов в A (с учетом сказанного в сноске на стр. 219). — *Прим. перев.*

[3]) В подлиннике эта дизъюнкция выражена оборотом either...or, который можно толковать и в смысле разделительного «или» («либо»), исключающего истинность обоих членов дизъюнкции. В данном случае это не имеет значения, так как несовместимость этих членов следует из леммы 1. Такое же замечание можно сделать по поводу «или» в определении «полной последовательности» (см. ниже) — в подлиннике там снова either...or. Но в случаях 5 и 6 определения вынуждения (как для ограниченных, так и для неограниченных A) автор также пользуется оборотом either...or, откуда я делаю вывод, что он употребляет этот оборот в смысле неразделительного «или». — *Прим. перев.*

Доказательство. Это — самый удивительный факт, касающийся вынуждения. Именно, всякое суждение в N, которое, следовательно, является суждением об a, разрешимо в некотором смысле посредством конечного множества суждений вида $n \in a$ или $\sim n \in a$. И все же доказательство тривиально. Если P не вынуждает $\sim A$, то по определению это должно быть потому, что для некоторого $Q \supseteq P$ Q вынуждает A.

Определение. Последовательность $\{P_n\}$ вынуждающих условий называется *полной последовательностью*, если $P_n \subseteq P_{n+1}$ для всех n и для каждого A ограниченного или неограниченного, $\exists n$ такое, что P_n вынуждает A или P_n вынуждает $\sim A$ [1]). Последовательность $\{P_n\}$ (т. е. $\{\langle n, P_n\rangle\}$) *не* предполагается принадлежащей M.

Лемма 4. *Существует полная последовательность.*

Доказательство. В этом месте мы в первый и последний раз воспользуемся счетностью M. Так как M счетно, мы можем занумеровать все суждения A_n. Определяем P_n путем рекурсии как любое вынуждающее условие $Q \supseteq P_{n-1}$ такое, что Q вынуждает A_n или Q вынуждает $\sim A_n$ [2]). (Ввиду того что множество всех P счетно, здесь не используется АВ.)

Если $\{P_n\}$ полна, то, в частности, для каждого k некоторое P_n вынуждает $k \in a$ или $\sim k \in a$. Положим $\bar{a} = \{k \mid \exists n$ (P_n вынуждает $k \in a$)$\}$. Тогда $\bar{a} \subseteq \omega$ и, как мы уже заметили, можно определить отображение $c \to \bar{c}$, определенное для всех c в S, которое переводит a в $\bar{a}$, и затем мы можем определить N как $\bigcup \{M_\beta(\bar{a}) \mid \beta < \alpha_0\}$ [3]).

---

[1]) Из этого определения и лемм 1 и 2 легко вытекает, что для двух элементов P_n и P_m одной и той же полной последовательности утверждения «P_n вынуждает A» и «P_m вынуждает $\sim A$» несовместимы (ибо из $n \leqslant m$ следует $P_n \subseteq P_m$). Это часто неявно используется в дальнейшем. — *Прим. перев.*

[2]) В качестве P_0 можно выбрать любое P, например пустое множество. — *Прим. перев.*

[3]) Хотя автор довольствуется этим оборотом «мы можем определить N», из дальнейшего текста ясно, что он действительно принимает это определение N. — *Прим. перев.*

Теперь мы можем связать понятие вынуждения с понятием истинности в N.

Лемма 5. *A истинно в N тогда и только тогда, когда для некоторого n P_n вынуждает A.*

Доказательство. Допустим сперва, что A ограниченно. Мы воспользуемся индукцией по рангу, соответствующей рекурсии в определении вынуждения. Если A имеет вид $\exists_\alpha x B(x)$ и P_n вынуждает A, то P_n вынуждает $B(c)$, где $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, а следовательно, по индуктивному предположению, $B(\bar{c})$ истинно в N и, следовательно, A тоже истинно в N. Обратно, если A истинно в N, то для некоторого $c \in S_\beta$, где $\beta < \alpha$, $B(\bar{c})$ истинно в N, так что, по индуктивному предположению, некоторое P_n вынуждает $B(c)$ и потому P_n вынуждает A. Если $A \equiv \forall_\alpha x B(x)$ и P_n вынуждает A, $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, то для некоторого $m > n$ P_m должно вынуждать $B(c)$, потому что никакое P_m не может вынуждать $\sim B(c)$. По индуктивному предположению это означает, что $B(\bar{c})$ истинно в N, так что A истинно в N. Обратно, допустим, что A истинно в N. Если некоторое P_n вынуждает $\exists_\alpha x \sim \sim B(x)$, то для некоторого $c \in S_\beta$, где $\beta < \alpha$ [1]), P_n вынуждает $\sim B(c)$, так что $\sim B(\bar{c})$ истинно в N и A ложно в N. Поэтому некоторое P_n должно вынуждать $\sim \exists_\alpha x \not\sim \sim B(x)$, а это означает, что, при $Q \supseteq P_n$, Q не вынуждает $\exists_\alpha x \sim B(x)$ и, следовательно, для любого $c \in S_\beta$, где $\beta < \alpha$, Q не вынуждает $\sim B(c)$. Это же в точности означает, что P_n вынуждает $\forall_\alpha x B(x)$. Если P_n вынуждает $\sim A$ и A истинно в N, то по индуктивному предположению некоторое P_m, где $m > n$, должно вынуждать A. Но P_m вынуждает $\sim A$, что противоречит

[1]) Таким образом, автор доказывает по индукции более общее утверждение: $A(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m)$ истинно в N тогда и только тогда, когда для некоторого n P_n вынуждает $A(c_1, \ldots, c_m)$ $(m \geqslant 0)$. Здесь следовало бы рассматривать A вида $\exists_\alpha x B(x, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m)$, тогда если P_n вынуждает $\exists_\alpha x B(x, c_1, \ldots, c_m)$, то P_n вынуждает $B(c, c_1, \ldots, c_m)$, где $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, и по индуктивному предположению в N истинно $B(\bar{c}, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m)$, а следовательно, и $\exists_\alpha x B(x, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m)$, т. е. A. Аналогично в остальных случаях этого доказательства. — *Прим. перев.*

лемме 1. Остальные случаи тривиальны. Если A неограниченно, то эти же рассуждения проходят без каких-либо изменений, за исключением того, что индукция происходит по числу символов.

§ 5. Определимость вынуждения

Как было указано в § 3, элементам конечного множества символов нашего языка можно приписать различные натуральные числа, и тогда каждому ограничеиному суждению будет соответствовать конечная последовательность натуральных чисел и ординалов, причем подразумевается, что за каждым вхождением $\forall$ или $\exists$ следует ординал, а за каждым вхождением x следует натуральное число. Эти последовательности должны подчиняться законам образования правильно образованных формул. В настоящий момент мы считаем допустимыми появления *каких угодно* ординалов α и не требуем $\alpha<\alpha_0$. Таким образом, ограниченные суждения становятся объектами внутри ZF и нет никакой двусмысленности в их обозначениях. Приведенное определение понятия вынуждения было полностью выразимо в языке ZF и происходило посредством простой трансфинитной рекурсии. Точнее говоря, для каждого ранга (α, i, r) существует *множество* $T_{\alpha, i, r}$, состоящее из ограниченных суждений рангов меньших, чем (α, i, r), и определение происходило посредством рекурсии. Мы ни разу не воспользовались при этом ограничением $\alpha<\alpha_0$. Таким образом мы получаем выразимое в ZF отношение $F(P, A)$, означающее «P вынуждает A». (Здесь предполагается, что каждое P закодировано в ZF произвольным образом, например, как упорядоченная пара дизъюнктных конечных множеств натуральных чисел.)

Лемма. *$F(P, A)$ является абсолютным отношением.*

Мы опускаем доказательство этой леммы, так как оно и скучно и очевидно. Определение происходило по рекурсии, для которой требовался только просмотр «более ранних» объектов, а это, очевидно, абсолютно. Это

доказательство по существу совпадает с доказательством того, что конструктивность абсолютна [1]).

При переходе к неограниченным суждениям, если мы рассмотрим определение понятия вынуждения без предположения о том, что все ординалы меньше, чем α_0, то ситуация коренным образом изменится. Тогда становится невозможным определить в **ZF** вынуждение посредством рекурсии, потому что неформальная рекурсия происходила по числу символов, но, так как мы допускаем константы $\in S_\alpha$ для произвольных α, не существует *множества*, состоящего из всех суждений с r символами. Конечно, если мы предположим, что все $\alpha<\alpha_0$, то это понятие можно будет определить **ZF**, но при этом α_0 непременно появится в определяющем отношении. Однако в полной аналогии с результатами из гл. II, § 6 можно будет рассматривать случай одной-единственной формулы.

Лемма. *Пусть $A(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает (неограниченную) формулу из **ZF**, не содержащую констант и содержащую n свободных переменных. Тогда существует отношение $F(P, c_1, \ldots, c_n)$, выразимое в **ZF**, абсолютное и притом такое, что при релятивизации посредством любой модели для **ZF** оно утверждает, что P вынуждает $A(c_1, \ldots, c_n)$.*

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по числу символов в A. Если A не содержит кванторов, то она уже доказана, ибо A в этом случае является ограниченным суждением [2]). Если A — пропо-

[1]) См. добавление I, стр. 337—341. — *Прим. перев.*

[2]) Небрежность — ибо при $n>0$ A вовсе не является суждением. Речь должна идти лишь о том, что при любом замещении переменных $x_1, \ldots, x_n$ константами $c_1, \ldots, c_n$ из модели формула $A(c_1, \ldots, c_n)$ является ограниченным суждением. Именно, в качестве $F(P, c_1, \ldots, c_n)$ в этом случае следует взять $F(P, A(c_1, \ldots, c_n))$, где $F(P, A)$ определена согласно предыдущей лемме (т. е. A фиксируется в $F(P, A)$ посредством $A(c_1, \ldots, c_n)$). Тогда ввиду абсолютности $F(P, A)$, если в модели имеет место $F(P, A(c_1, \ldots, c_n))$, это же отношение должно иметь место и в исходной системе **ZF**. (Условие, что «$A(c_1, \ldots, c_n)$» есть формула любого рассматриваемого вида с переменными $c_1, \ldots, c_n$, абсолютно.) Аналогично для $\sim F(P, A)$ и $\sim F(P, A(c_1, \ldots, c_n))$.

зициональная функция более простых суждений, то индукция проводится очевидным образом. Если A имеет вид $\forall y B(y, x_1, \ldots, x_n)$, то по индуктивному предположению существует суждение $G(P, c_0, c_1, \ldots, c_n)$, означающее, что P вынуждает $B(c_0, \ldots, c_n)$. Утверждение, что P вынуждает $A(c_1, \ldots, c_n)$, записывается тогда просто как $\forall Q, c(Q \supseteq P \rightarrow \sim G(Q, c_0, \ldots, c_n))$. Если A есть $\exists y B(y, x_1, \ldots, x_n)$, мы просто пишем $F \equiv \exists c_0(G(P, c_0, \ldots \ldots, c_n))$ [1]).

Этот результат легко можно обобщить на случай, когда рассматриваются все неограниченные суждения, содержащие меньше чем r кванторов, где r фиксировано. Но нам это обобщение не понадобится.

§ 6. Модель N

Предположим, что была выбрана некоторая полная последовательность $\{P_n\}$, и пусть N обозначает возникающее при этом множество $\bigcup\{M_\beta(\bar{a}) \mid \beta < \alpha_0\}$. Мы теперь докажем, что N является моделью для $\boldsymbol{ZF}$. Трудно изложить интуитивные доводы, объясняющие причину этого обстоятельства. Грубо говоря, решающие аксиомы $\boldsymbol{ZF}$ (подстановки и степени) утверждают существование некоторых «больших» множеств. Так как мы исходим из всех ординалов, меньших чем α_0, в N будет иметься достаточно много ординалов, если только по какой-нибудь причине в N не возникнут новые отношения между этими ординалами, не существующие в M.

Однако это рассуждение предполагает абсолютность $F(P, A)$ и применимо только к таким моделям, для которых это отношение абсолютно. Лишь для них доказывается и эта лемма. В то же время это доказательство леммы распространяется не только на модели для $\boldsymbol{ZF}$, но и на другие (транзитивные) классы B, для которых $F(P, A)$ и $\sim F(P, A)$ абсолютны, например на N. — *Прим. перев.*

[1]) Очевидно, что это доказательство использует и абсолютность $\sim G(P, c_0, \ldots, c_n)$, так что для $F(P, c_1, \ldots, c_n)$ и $\sim F(P, c_1, \ldots, c_n)$ абсолютиость доказывается одновременно. Кроме того, в связи с квантором $\forall Q$ используется абсолютиость понятия «вынуждающее условие», для чего, впрочем, достаточно установить абсолютность понятия «конечное миожество натуральных чисел». Для модели N эта абсолютность доказывается без труда (см. 13а на стр. 292—293). — *Прим. перев.*

Определение вынуждения было задумано так, чтобы это предотвратить. Именно, из множества $\bar{a}$ нельзя извлечь никакой информации, кроме той, которая уже содержалась в M.

Доказательство развивается почти параллельно доказательству того, что аксиомы ZF имеют место в L. Можно было бы привести единое рассмотрение обоих случаев. Проверка всех аксиом, кроме подстановки и степени, тривиальна и предоставляется читателю [1]). Мы переходим теперь к аксиоме степени. Первоначальное доказательство в [4] шло параллельно второму доказательству, приведенному в гл. III, потому что это доказательство дает больше информации и одна из наших основных целей состояла в рассмотрении КГ. Однако Р. Соловей указал, что на нашу ситуацию совсем просто переносится первое доказательство Гёделя, и мы изложим это доказательство.

Пусть фиксированы $c_0 \in S_\alpha$, $\alpha < \alpha_0$. Мы покажем, что существует элемент N, являющийся множеством-степенью для $\bar{c}_0$ относительно N. В соответствующем доказательстве для L мы сначала рассмотрели настоящее множество-степень, а затем урезали его до конструктивного множества-степени. Ввиду того что $\bar{c}_0$ не обязательно входит в M, мы теперь не можем поступить таким же образом, ибо мы хотим, чтобы наше рассуждение полностью проходило в M так, чтобы можно было пользоваться тем фактом, что M является моделью для ZF. Хотя $\bar{a}$ не входит в M, решающая информация об a содержится в вынуждающих условиях P [2]), а множество всех P является множеством из M. Таким образом, мы можем рассуждать о P в M вместо того, чтобы рассматривать множества $\bar{c}_0$ или $\bar{a}$. Мы сейчас возвращаемся к тому ограничению, что рассматриваются толь-

---

[1]) Имеино, проверка происходит совершенно так же, как и для L, что и надлежит проверить читателю. — *Прим. перев.*

[2]) Имеется в виду та информация, которая будет использована в обсуждаемом сейчас доказательстве. Конечно, полная информация об $\bar{a}$ дается полной последовательностью $\{P_n\}$, которая не должна входить в M. — *Прим. перев.*

ко $\alpha<\alpha_0$ и S_α с $\alpha<\alpha_0$. Напоминаем, что $c_0\in S_\alpha$ фиксировано.

Определение. Для каждого c из S положим $R(c)=\{P\mid P$ вынуждает $c\subseteq c_0\}$, $T(c)=\{\langle P, c'\rangle\mid P$ вынуждает $c'\in c$ и $c'\in S_\beta$, где $\beta<\alpha\}$, $U(c)=\langle R(c), T(c)\rangle$.

Заметим, что $R(c)$, $T(c)$, $U(c)$ всегда являются множествами в M и в силу результатов предыдущего параграфа все эти функции определимы формулами из ***ZF***, *релятивизованными к* M [1]). Важный пункт состоит в том, что в этих определениях не используется выбранная ранее конкретная полная последовательность $\{P_n\}$. $T(c)$ является множеством в силу важного ограничения $\beta<\alpha$.

Лемма. *Если* $U(c_1)=U(c_2)$ *и* $\bar{c}_1\subseteq\bar{c}_0$, *то* $\bar{c}_1=\bar{c}_2$.

Доказательство. Ввиду $\bar{c}_1\subseteq\bar{c}_0$ некоторое P_n в нашей полной последовательности должно вынуждать $c_1\subseteq c_0$ [2]). Но так как $R(c_1)=R(c_2)$ [3]), P_n вынуждает

---

[1]) Именно, существует множество $\hat{P}$ всех вынуждающих условий P; оно принадлежит M. $R(c)$ определяется на основании аксиомы выделения как некоторое подмножество $\hat{P}$. Определяющая формула — это просто формула $F(P, c, c_0)$, определенная, согласно последней лемме предыдущего параграфа, для формулы $x_1\subseteq x_2$, взятой в качестве $A(x_1, \ldots, x_n)$ при $n=2$ и отнесенная к M (из-за чего эта формула не изменяет своего значения истинности в силу абсолютности формул вида $F(P, A)$ и $F(P, c_1 \ldots, c_n)$ из лемм предыдущего параграфа). Аналогичным образом рассматривается множество $T(c, c')=\{\langle P, c'\rangle\mid P$ вынуждает $c'\in c\}$ для любых $c, c'\in S$; затем $T(c)=\bigcup\{T(c, c')\mid\exists\beta\,(\beta<\alpha\,\&\,c'\in S_\beta)\}$, условие $\beta<\alpha<\alpha_0$ влечет, что $T(c)$ не меняется при релятивизации к M формулы $\exists\beta\,(\beta<\alpha\,\&\,c'\in S_\beta)$, а значит, и формулы, определяющей $T(c)$. Теперь $T(c)\in M$ и определяется формулой, которую можно считать релятивизованной к M, так как в M соблюдается аксиома пары. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь (и во многих случаях ниже) используется обобщение леммы 5 из § 4 этой главы, указанное в сноске на стр. 223. — *Прим. перев.*

[3]) Здесь из $U(c_1)=U(c_2)$ выводится $R(c_1)=R(c_2)$, согласно простой теореме: $\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle$ влечет $x=u$ и $y=v$, упомянутой на стр. 90 (гл. II, § 1). Несколькими строками ниже таким же образом получается $T(c_1)=T(c_2)$. — *Прим. перев.*

также $c_2 \subseteq c_0$, откуда $\bar{c}_2 \subseteq \bar{c}_0$ [1]). Если $\bar{c}_1 \neq \bar{c}_2$, то для некоторого $c_3 \in S_\beta$, $\beta < \alpha$ имеет место $\bar{c}_3 \in \bar{c}_1 \,\&\, \sim \bar{c}_3 \in \bar{c}_2$ или $\sim \bar{c}_3 \in \bar{c}_1 \,\&\, \bar{c}_3 \in \bar{c}_2$ [2]). Без потери общности [3]) мы рассмотрим только первый случай. В нем некоторое P_m вынуждает $c_3 \in c_1$. Так как $T(c_1) = T(c_2)$, то P_m вынуждает также $c_3 \in c_2$, откуда $\bar{c}_3 \in \bar{c}_2$ — противоречие. Следовательно, $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$.

Далее, S не является в M множеством. (Разумеется, оно является классом.) Однако область $R(c)$ для всех $c \in S$ входит в релятивизованное к M множество-степень для множества всех P, ибо R определима в M. Аналогичным образом область T входит в релятивизованное к M прямое произведение множества всех P на $\bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta$. Таким образом, область $U(c)$ является в M *множеством*, которое мы обозначим через $\bar{U}$. Для каждого $u \in \bar{U}$ пусть $f(u)$ обозначает наименьшее такое β, что для некоторого c из S_β $U(c) = u$, и $f(u) = 0$, если такого β не существует. Пусть $\beta_0 = \operatorname{Sup}\{f(u) \mid u \in \bar{U}\}$; тогда $\beta_0 \in M$, так как это построение полностью проходит в модели M [4]).

---

[1]) Ср. сноску на стр. 223. В дальнейшем я обычно не буду делать сносок по поводу применений этого обобщения леммы 5 из § 4. — *Прим. перев.*

[2]) При $\bar{c}_3 \in \bar{c}_1$ из $\bar{c}_1 \subseteq \bar{c}_0$ следует $\bar{c}_3 \in \bar{c}_0$, и далее из $c_0 \in S_\alpha$ и определения $\bar{c}$ на стр. 213 (а именно — из того, что при $c \in S_\alpha$ $\bar{c}$ является некоторым множеством элементов из $X_\alpha = \{\bar{c'} \mid c' \in S_\beta \,\&\, \beta < \alpha\}$), следует, что $\bar{c}_3 = \bar{c}'_3$ для некоторого $c'_3 \in S_\beta$, $\beta < \alpha$; это c'_3 можно рассматривать затем в качестве прежнего c_3.

[3]) Ввиду только что установленной симметрии между c_1 и c_2. — *Прим. перев.*

[4]) То, что функция f принадлежит M, следует из того, что определение вышеуказанного β выразимо формулой, релятивизованной к M (ибо определение $U(c)$ выразимо такой формулой, а в рассматриваемой формуле можно считать $\beta < \alpha_0$, ибо $U(c)$ определяется лишь для $c \in S$). Поэтому существование β_0 в M следует из соблюдения аксиомы подстановки в M.

Фактически β, о котором шла речь выше, существует для любого $u \in \bar{U}$, ибо из определения $\bar{U}$ следует существование такого $c \in S = \bigcup_{\beta < \alpha_0} S_\beta$, для которого $u = U(c)$. — *Прим. перев.*

Лемма. *Если* $\bar{c} \subseteq \bar{c}_0$, *то* $\bar{c}_1 = \bar{c}$ *для некоторого* $c_1 \in S_\beta$, *где* $\beta < \beta_0$.

Доказательство. По определению β_0 существует такое $c_1 \in S_\beta$, $\beta < \beta_0$, что $U(c) = U(c_1)$. Теперь из предыдущей леммы следует $\bar{c}_1 = \bar{c}$.

Теорема. *Аксиома степени имеет место в* N.

Доказательство. Так как в N все подмножества $\bar{c}$ являются элементами $X_{\beta_0} = \bigcup\{M_\beta(\bar{a}) \mid \beta < \beta_0\}$ [1]), то множество-степень $\bar{c}$ в N есть $\{x \in X_{\beta_0} \mid x \subseteq \bar{c}\}$, а следовательно, будучи определяемо формулой, релятивизованной к X_{β_0}, оно является элементом $M_{\beta_0}(\bar{a})$ [2]).

Теперь мы обращаемся к аксиоме подстановки. Опять наше рассуждение будет идти параллельно соответствующему рассуждению для L. Пусть $A(x, y)$ обозначает формулу, определяющую $y = \varphi(x)$ как однозначную функцию в N. Пусть c_0 фиксировано и $c_0 \in S_\alpha$. Согласно предыдущему параграфу, в M можно определить функцию $g(P, c)$, равную наименьшему такому β, что для некоторого $c' \in S_\beta$ P вынуждает $\varphi(c) = c'$ и $g = 0$, если такого β не существует [3]). Положим $\beta_0 = \mathrm{Sup}\{g(P, c) \mid$ для всех P и для всех $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha\}$. Таким образом, мы видим, что область функции φ на $\bar{c}_0$ содержится в $M_{\beta_0}(\bar{c})$. Чтобы получить саму эту область, нам нужна следующая теорема.

---

[1]) Здесь используется, что при $c \in S_\beta$ $\bar{c} \in M_\beta(\bar{a})$ (ср. сноски 2 на стр. 229—230); прежде a обозначало произвольное подмножество ω, в качестве которого теперь рассматривается $\bar{a}$). — *Прим. перев.*

[2]) По определению $M_{\beta_0}(\bar{a}) = X'_{\beta_0}$. — *Прим. перев.*

[3]) $\varphi(c) = c'$ выражается в ZF формулой $A(c, c')$. Для этой формулы $A(x, y)$, согласно второй лемме предыдущего параграфа, в ZF существует такая формула $F(P, c_1, c_2)$, что $F(P, c, c')$ выражает «P вынуждает $A(c, c')$». Поэтому функция $g(P, c) = \mu\beta\exists c'(c' \in S_\beta \,\&\, F(P, c, c')$ (где $\mu\beta(\cdot)$ обозначает наименьшее такое β, что $(\cdot)$, а если такого β нет, то 0) выразима в ZF, следовательно, принадлежит M.

То обстоятельство, что $A(x, y)$ определяет функцию φ в N, означает просто, что $\forall x\,(x \in N \to \exists!\, y\,(y \in N \,\&\, A(x, y))$, причем $A(x, \varphi(x))$ для всех x в N. — *Прим. перев.*

Теорема. *Пусть* $A(x_1, \ldots, x_n)$ — *формула из* **ZF**. *Тогда для каждого* $\beta<\alpha_0$ *существует* $c\in S$, *такое, что независимо от полной последовательности* $\{P_n\}$, $\bar{c}\supseteq M_\beta(\bar{a})$ *и для любых* $\bar{x}_i\in\bar{c}$ $A_N(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)\leftrightarrow A_{\bar{c}}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Доказательство. Напомним, что $A_{\bar{c}}$ обозначает формулу A, релятивизованную к $\bar{c}$. Предположим, что A имеет вид $Q_1y_1\ldots Q_my_mB(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, где B не содержит кванторов. Для любых γ и $1\leqslant r\leqslant m$ существуют функции $f_r(P; c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_{r-1})$, определенные для c_l, c'_j из объединения всех S_δ, $\delta<\alpha$, обладающие следующим свойством: если $Q_r=\exists$, то f_r есть наименьшее такое γ, что P вынуждает

(1) $Q_{r+1}y_{r+1}\ldots Q_my_mB(c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_{r-1}, c, y_{r+1}, \ldots, y_m)$

для некоторого $c\in S_\gamma$, $f_r=0$, если такого γ не существует [1]). Пусть $g_r(c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_{r-1})=\mathrm{Sup}\{f_r$ для всех $P\}$. Снова, в силу результатов предыдущего параграфа, g_r определены в M [2]). Если $Q_r=\forall$, то f_r и g_r определяются таким же самым образом, но (1) заменяется ее отрицанием [3]). Пусть γ_1 обозначает верхнюю грань (Sup) области значений g_r для всех r, $1\leqslant r\leqslant m$, когда c_l и c'_j пробегают объединение всех S_δ, $\delta<\gamma$. Мы будем писать $\gamma_1=h(\gamma)$. Ясно, что h определима в M. Далее мы определяем $\beta_1=\beta$ и $\beta_{n+1}=h(\beta_n)$, и затем $\beta'=\mathrm{Sup}\,\beta_n$. Тогда ясно, что наша лемма имеет место, если в качестве c выбирается множество, определяемое фор-

---

[1]) При $r=1$ запись „$c'_1, \ldots, c'_{r-1}$" следует считать пустой. Кроме того, конечно, «f_r» есть сокращение для «$f_r(P, c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_{r-1})$». — *Прим. перев.*

[2]) Именно, согласно второй лемме из предыдущего параграфа, f_r выразима в **ZF**, а потому принадлежит M; далее, ввиду того что все P образуют множество, принадлежащее M, g_r принадлежит M в силу соблюдения в M аксиомы подстановки. — *Прим. перев.*

[3]) Это соглашение станивится прозрачным, если условиться считать, что всякое Q_r обозначает $\exists$ или $\sim\exists\sim$ (причем двойные отрицания в $Q_1y_1, \ldots, Q_my_m$ опускаются). Ср. сноску 1 на стр. 161. — *Прим. перев.*

мулой «c является объединением $M_\gamma(a)$ для всех $\gamma<\beta'$» [1]). Это c соответствует тому множеству, которое мы обозначили через $X_{\beta'}$, и наше построение позволяет легко образовать это множество.

Мы уже видели, что область z значений φ на $\bar{c}_0$ содержится в некотором $\bar{c}_1$ и, следовательно, она может быть описана как $\{\bar{c}\in\bar{c}_1 \mid \exists x(x\in\bar{c}_0 \,\&\, A_N(x,\ \bar{c},\ \bar{c}_2,\ \ldots,\ \bar{c}_n))\}$, где $\bar{c}_2,\ \ldots,\ \bar{c}_n$ — константы, встречающиеся в определении φ [2]). Согласно только что доказанной теореме, мы можем предположить, что все связанные переменные в A ограничены фиксированными множествами в N [3]). Согласно построению N, такое выражение определяет z формулой такого типа, что должно иметь место $z\in N$ [4]), и аксиома подстановки доказана. Следовательно, N является моделью для ***ZF***.

Лемма. *Для каждого* $\alpha<\alpha_0$, $\exists c_\alpha$, *такое, что* $\operatorname{rank}\bar{c}_\alpha=\alpha$ *независимо от того, какая* $\{P_n\}$ *была выбрана в качестве полной последовательности.*

---

[1]) При этом $\bar{c}=\bigcup_{\gamma<\beta'} M_\gamma(\bar{a})$. Доказательство этого утверждения совершенно аналогично соответствующему пункту в доказательстве теоремы Лёвенгейма — Скулема (см. гл. II, § 8, стр. 162), но сопровождается применением леммы 5 из § 4 настоящей главы. $M_\beta(\bar{a})\subseteq\bar{c}$ вытекает теперь из $\beta=\beta_1<\beta'$ (ибо при отображении этикеток на N образом $M_\gamma(a)$ служит $M_\gamma(\bar{a})$). От выбора полной последовательности β', а следовательно, и $\bar{c}$ при этом не зависит. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь A_N поставлена вместо A, так как по условию A определяет φ в N (так что все кванторы в A уже ограничены множеством N и релятивизация к N не меняет силы A). Сейчас автор допускает даже, что в A могут содержаться константы $\bar{c}_2,\ \ldots,\ \bar{c}_n$, хотя это и не требуется для рассматриваемого доказательства. В таком случае он использует обобщение второй леммы из § 5, указанное в последнем абзаце § 5, без надобности, а потому и не нарушая сказанного в последней фразе § 5. Абсолютность, утверждаемая леммами из § 5, используется в этом доказательстве лишь так, как указано во втором абзаце § 7 добавления I. — *Прим. перев.*

[3]) Точнее, попросту множеством $\bar{c}$. — *Прим. перев.*

[4]) Именно, $z\in M'_{\beta'}(\bar{a})$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Эта лемма очевидна при $\alpha \leqslant \omega$. Далее, $\operatorname{rank} M_0(a) = \omega + 1$ и посредством индукции доказывается, что $\operatorname{rank} M_\alpha(a) = \omega + 1 + \alpha$.

Пользуясь множеством $\bar{c}_\alpha$, для которого $\operatorname{rank} \bar{c}_\alpha = \alpha$, легко найти такое c_β, что $\bar{c}_\beta = \alpha$ независимо от выбранной полной последовательности. Это вытекает из следующего общего принципа. Пусть $x = R(y_1, \ldots, y_n)$ — абсолютное отношение, определяющее x как функцию от y_i. Допустим, что для каждого α существует такое β, не зависящее от выбора $\{P_n\}$, что если $c_i \in \bigcup \{S_\gamma \mid \gamma \leqslant \alpha\}$, то в X_β существует такой элемент x, что при релятивизации к X_β имеет место $x = R(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n)$. Тогда для некоторого $c \in S_\beta$ имеет место $\bar{c} = x$ независимо от выбора $\{P_n\}$ [1]).

---

[1]) Доказательство этого принципа аналогично доказательству лемм, использованных при установлении в N аксиомы множества-степени. Именно, введем функции $S(c_1, \ldots, c_n) = \{P \mid P$ вынуждает $R(c_1, \ldots, c_n) \in \bigcup_{\gamma < \beta} S_\gamma\}$, $T(c_1, \ldots, c_n) = \{\langle P, c' \rangle \mid (P$ вынуждает $c' \in R(c_1, \ldots, c_n))$ и $c' \in \bigcup_{\gamma < \beta} S_\gamma\}$, $U(c_1, \ldots, c_n) = \langle S(c_1, \ldots, c_n)$ $T(c_1, \ldots, c_n)\rangle$, определенные для любых $c_1, \ldots, c_n \in S$. (Эти S, T и U играют роль прежних $R(c)$, $T(c)$ и $U(c)$ соответственно.) Они по-прежнему определены в M. Совершенно аналогично первой из упомянутых лемм доказывается

L1. $U(c_1, \ldots, c_n) = U(c'_1, \ldots, c'_n) \,\&\, R(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) \in X_\beta \swarrow$
$\rightarrow R(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) = R(\bar{c}'_1, \ldots, \bar{c}'_n)$.

(Вместо $c_1 \subseteq c_0$ теперь рассматривается $R(c_1, \ldots, c_n) \in \overline{\bigcup_{\gamma < \beta} S_\gamma}$; при этом используется $X_\beta = \overline{\bigcup_{\gamma < \beta} S_\gamma}$.) Далее, ввиду абсолютности отношений $x = R(y_1, \ldots, y_n)$ и $\sim x = R(y_1, \ldots, y_n)$ в L1 можно заменять R на R_{X_β}.

Далее вводится (как прежде) множество $\bar{U} = \{U(c_1, \ldots, c_n) \mid \swarrow c_1, \ldots, c_n \in S\}$, и для $u \in \bar{U}$ функция $f(u)$ определяется как наименьшее β, такое, что в $\bigcup_{\gamma < \beta} S_\gamma$ существуют $c'_1, \ldots, c'_n$, для которых $U(c'_1, \ldots, c'_n) = u$ ($f(u) = 0$, если такого β не существует, но фактически эта оговорка не нужна). Затем определяется $\beta_0 = \operatorname{Sup}\{f(u) \mid u \in \bar{u}\}$. По-прежнему $\beta_0 \in M$.

В рассмотренном случае получить β как функцию от α можно просто путем скучного повторения тех же самых идей, что и в доказательстве абсолютности функции ранга.[1]) Мы в дальнейшем будем употреблять этот

Далее совершенно аналогично второй упомянутой лемме доказывается

L2. Если $R_{X_\beta}(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) \in X_\beta$, то $\exists c'_1, \ldots, c'_n$,

$$c'_1 \in \bigcup_{\gamma < \beta_0} S_\gamma \,\&\, \ldots \,\&\, c'_n \in \bigcup_{\gamma < \beta_0} S_\gamma \,\&\, R(\bar{c}'_1, \ldots, \bar{c}'_n) = R(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n).$$

Теперь, ввиду того что $x = R(y_1, \ldots, y_n)$ — абсолютное отношение, определяющее x как функцию от y_i, $R_{X_{\beta_0}}(c'_1, \ldots, c'_n)$ можно рассматривать как некоторое c. Точнее, эта функция задается некоторой формулой $A(x, y_1, \ldots, y_n)$, для которой в ZF $\forall y, \ldots, y_n \exists! x A(x, y_1, \ldots, x_n)$; так как аксиомы ZF соблюдаются в N, это суждение истинно в N, а следовательно, для любых $\bar{c}'_1, \ldots, \bar{c}'_n$ в N, $\exists! x A(x, \bar{y}'_1, \ldots, \bar{c}'_n)$ и некоторых P_n из выбранной полной последовательности вынуждает $\exists! x A(x, c'_1, \ldots, c'_n)$, т. е. формулу $\exists x \forall y (A(x_1 c'_1, \ldots, c'_n) \leftrightarrow x = y)$. Следонательно, P_n вынуждает некоторую формулу $\forall y (A(y, c'_1, \ldots, c'_n) \leftrightarrow c = y$. Для этого c в N истинно $\forall y (A(y, c'_1, \ldots, c'_n) \leftrightarrow c = y)$, и это c есть $R(c'_1, \ldots, c'_n)$ или ввиду абсолютностн R $R_{X_{\beta_0}}(c', \ldots, c'_n))$. Ввиду $R_{X_{\beta_0}}(c'_1, \ldots, c'_n) = R_{X_{\beta_0}}(\bar{c}'_1, \ldots, \bar{c}'_n)$ L2 дает $\bar{c} = R(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n)$, т. е $\bar{c} = x$ независимо от выбора $\{P_n\}$.

Ввиду $S_\beta = X'_{\beta_0}$ имеет место $c \in S_{\beta_0}$. Так как β_0 было определено через β, то β_0 не зависит от выбора $\{P_n\}$.

Помимо абсолютности $x = R(y_1, \ldots, y_n)$, здесь использована абсолютность $\sim x = R(y_1, \ldots, y_n)$ и, кроме того, $c \in S_\beta$ заменено на $c \in S_{\beta_0}$, где β_0 зависит от β, но не от выбора $\{P_n\}$. Эти оговорки не сказываются на применениях рассматриваемого принципа. (Первая из них соответствует обычному способу рассмотрения абсолютности для функции, а вторая сказывается лишь на выборе β как функции от α, что не имеет значения для применений этого принципа Важно лишь, что $\beta_0 < \alpha_0$, а это следует из $\beta_0 \in M$.) — *Прим. перев.*

[1]) Именно, ввиду $M_\alpha(a) \in S_{\alpha+1}$ и возможности рассматривать rank $M_\alpha(a)$ как функцию от α, а α — как функцию $\varkappa(c)$ от $c \in S_\alpha$,

принцип без явного его упоминания там, где будет очевидно, что мы имеем дело с абсолютными отношениями только что указанного типа.

Теорема. *В N $\bar{a}$ не конструктивно.*

Доказательство. Пусть c_α — такой элемент S, что $\bar{c}_\alpha = \alpha$ независимо от выбора $\{P_n\}$. Допустим, что x есть элемент L, построенный на α-й стадии при каком-либо естественном полном упорядочении построения класса L. Так как это построение абсолютно, α строит x также и в N. Для любого P в силу конечности P $\exists Q$ и n, такие, что $Q \supseteq P$ и $(n \in a) \in Q$ и $\sim n \in a$ или же $(\sim n \in a) \in Q$ и $n \in x$. Если P вынуждает «c_α строит a», то α должно строить a в модели N', определяемой полной последовательностью $\{Q_n\}$, в которой мы берем $Q_0 = Q$. Это противоречие. Следовательно, ввиду того что ординалы в N те же самые, что и в M, и никакое P не вынуждает, что a строится некоторым c_α, $\bar{a}$ не строится никаким $\bar{c}_\alpha$ и $\bar{a}$ не конструктивно в N. Здесь мы впервые воспользовались тем фактом, что каждое P является конечным множеством.

Теорема. ОКГ *и* АВ *имеют место в N.*

Доказательство. Отношение $x \in M_\alpha(\bar{a})$ может быть выражено в ***ZF*** как абсолютное отношение $F(x, \alpha, \bar{a})$. Это доказывается путем такого же рассуждения, каким было доказано, что $x \in M_\alpha$ выражается в ***ZF*** в виде абсолютного отношения. Ввиду того что $M_0(\bar{a})$ вполне упорядочено, теперь то же самое рассуждение, что и для L, снова доказывает существование индуцированного полного упорядочения на всем N, выразимого формулой, содержащей одну-единственную константу $\bar{a}$.

положим $R(c) = \operatorname{rank} M_{\varkappa(c)}(a)$. Согласно предыдущей лемме, для $c \in \bigcup_{\gamma < \alpha} S_\gamma$ имеет место $R(\bar{c}) < \omega + 1 + \alpha$ и $\omega + 1 + \alpha + 1$ можно взять в качестве β. (Для $\alpha \leqslant \omega$ в качестве β можно взять $\alpha + 1$.) — *Прим. перев.*

Для ОКГ доказательство проводится совершенно так же, как прежде, но снова с тем изменением, что отношение «$x \in M_\alpha$» заменяется в рассуждениях на «$x \in M_\alpha(\bar{a})$». Мы наметим доказательство для ключевой леммы.

Лемма. *Если* $x \in M_\alpha(\bar{a})$, α *бесконечно и* $y \subseteq x$, *а* y *входит в* N, *то* $\exists \beta$, *такое, что* $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\alpha}}$ *и* $y \in M_\beta(\bar{a})$.

Доказательство. Здесь уместна следующая предосторожность. Отношение $\overline{\overline{\beta}} \leqslant \overline{\overline{\alpha}}$ можно интерпретировать как в M, так и в N. Ввиду $M \subseteq N$ возможно, что в M имеет место $\beta < \alpha$, но в N — $\beta = \alpha$. Фактически, когда мы будем рассматривать КГ, мы проведем рассуждение, которое в применении к данному случаю показывает, что этого не может случиться. В рассматриваемом случае это отношение следует интерпретировать в N.

Допустим $y \in M_\gamma(\bar{a})$. Пусть A обозначает множество $\bigcup \{M_\beta(\bar{a}) \mid \beta \leqslant \alpha\} \cup \{y, \gamma\}$. Так как АВ имеет место в N, мы можем пользоваться теоремой Лёвенгейма — Скулема из гл. II. Следовательно, существует такое множество B, что $B \supseteq A$, $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{\alpha}}$ [1]) и в B имеет место аксиома экстенсиональности, а также релятивизованное к B условие $x \in M_\alpha(\bar{a})$. Пусть φ отображает B взаимно однозначно и изоморфно на транзитивное множество B'. Тогда φ тождественно на $\bigcup \{M_\beta(\bar{a}) \mid \beta \leqslant \alpha\}$, ибо это множество уже транзитивно. При этом $\varphi(y) = y$ и $\varphi(\gamma) = \beta$, где β — ординал и $\overline{\overline{\beta}} \leqslant \overline{\overline{\alpha}}$. Посредством обычного рассуждения об абсолютности мы получаем, что $y \in M_\beta(\bar{a})$ [2]).

Можно также доказать ОКГ в N посредством рассуждения, использующего подсчет условий P, вынуждающих различные суждения, и совершенно аналогичного доказательству аксиомы степени. Провести это доказательство подробно мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Теперь мы подытожим наши результаты об этой модели N.

---

[1]) Для бесконечных α $\overline{\overline{M_\alpha(\bar{a})}} = \overline{\overline{\alpha}}$ доказывается совершенно так же, как $\overline{\overline{M_\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}}$ в § 4 гл. III. Поэтому AB дает $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\alpha}}$. — *Прим. перев.*

[2]) Ср. добавление I, стр. 336—337. — *Прим. перев.*

Теорема. *Из* $\boldsymbol{ZF}+CM$ *следует, что существует стандартная модель для* $\boldsymbol{ZF}$, *в которой имеют место* AB *и* $OKГ$ *и которая содержит такое* $a \subseteq \omega$, *что* $\bar{a}$ *не конструктивно. Следовательно,* $V=L$ *не следует из* $OKГ$ *и* AB.

Мы закончим этот параграф теоремой, которая устанавливает определяющее свойство полных последовательностей без помощи понятия вынуждения. Но даже если бы мы определили полные последовательности таким путем, для доказательства того, что N является моделью, нам все же потребовались бы те же самые шаги.

Определение. Пусть A — множество всех пар $\langle P, Q\rangle$, где P и Q — дизъюнктные конечные подмножества ω. Мы будем писать $\langle P_1, Q_1\rangle < \langle P_2, Q_2\rangle$, если $P_1 \subseteq P_2$, $Q_1 \subseteq Q_2$. Подмножество B множества A называется *плотным*, если i) для всех $x \in A$, $\exists y \in B$, такое, что $x<y$, ii) из $x \in B$, $x<y$ следует $y \in B$.

Если $\{P_n\}$ — возрастающая последовательность вынуждающих условий, мы будем писать $\bar{a}=\lim P_n$, если $\bar{a}=\{n \mid \exists k (n \in a) \in P_k\}$.

Теорема. *Если* $\bar{a} \subseteq \omega$, *то полная последовательность* $\{P_n\}$ *с* $\bar{a}=\lim P_n$ $\exists$ *в том и только в том случае, если для каждого плотного подмножества* B *множества* A, *лежащего в* M, $\exists n$, *такое, что если* $P=\bar{a} \cap \{0, \ldots, n\}$, *а* $Q=\{0, \ldots, n\}-P$, *то* $\langle P, Q\rangle \in B$.

Доказательство. Так как только от $\lim P_n$ зависит, является ли $\{P_n\}$ полной последовательностью, эта теорема дает характеристику полных последовательностей. Из определения плотного множества ясно, что если дано B, то для любого P $\exists Q \supseteq P$, такое, что Q вынуждает $\bar{a}$ обладать свойством, указанным в этой теореме. Отсюда следует, что если $\{P_n\}$ полна, то $\bar{a}$ обладает этим свойством. Обратно, если $\bar{a}$ обладает нашим свойством, то пусть P_n будет произвольной последовательностью с $\bar{a}=\lim P_n$. Тогда для любого суждения пусть B будет (принадлежащим M) множеством тех вынуждающих

условий, которые вынуждают это суждение или его отрицание. Это множество плотно и, следовательно, в силу нашего условия некоторое P_n вынуждает это суждение или его отрицание [1]).

§ 7. Общее понятие вынуждения

Метод вынуждения оказывается применимым ко многим проблемам теории множеств. Прежде чем непосредственно приступать к таким специальным проблемам, как независимость КГ, мы установим один весьма общий результат, который охватит построение всех рассматриваемых здесь моделей. Мы всегда будем отправляться от модели M, к которой будем присоединять некоторые генерические множества, а затем будем брать в качестве N класс всех множеств, порождаемых из них с помощью ординалов из M. Вообще говоря, не существует никакого очевидного способа установить, как должны порождаться множества из данного собрания множеств, так как процесс «собирания» можно осуществлять на различных этапах. Точнее, рассмотрим следующую проблему. Пусть A — данное транзитивное множество. Мы хотим найти такую транзитивную модель N, что $A \subseteq N$, и если N' есть другая такая модель, то $N \subseteq N'$. Если мы потребуем, чтобы $A \in N$, то проблема станет тривиальной, коль скоро мы игнорируем АВ, ибо можно взять $M_0 = A$ и $M_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta\right)'$. Мы предположим, что для надлежащих A никакого такого N не существует. Возможные способы порождения N из генерических множеств оказываются весьма разнообразными. К тому же иногда бывает желательно ввести класс (относительно M) генерических множеств, а не просто множество их. То изложение, которое мы приведем здесь, будет достаточно для тех примеров, которые мы имеем в виду, но читателю должно быть ясно, как его можно распространять на другие случаи.

---

[1]) Это доказательство (начиная с первой фразы), по-моему, изложено совершенно непонятно. Впрочем, эта теорема (как и понятие плотного множества) нигде ниже в этой книге не используется. — *Прим. перев.*

Мы допустим, что дано «параметрическое» пространство $S = \bigcup\{S_\alpha \mid \alpha < \alpha_0\}$. Элементы некоторого подмножества G этого S называются *генерическими множествами*. Если $c \in S_\alpha - G$, то c соответствует некоторой формуле $A(x)$, которая может содержать в качестве констант какие-нибудь элементы множества $X_\alpha = \bigcup\{S_\beta \mid \beta < \alpha\}$ и в которой все связаиные переменные ограничены множеством X_α. Для некоторого фиксированного α_1 мы допустим, что при $\alpha > \alpha_1$ этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между этими формулами и элементами S_α. (Тот факт, что для некоторых α существуют формулы, не соответствующие никаким c, не отразится на наших рассуждениях.) Конечно, все эти отображения и множества предполагаются принадлежащими M. Общая идея будет состоять в том, что те множества, которые мы в конечном счете построим для различных $c \in S_\alpha$, будут состоять из множеств вида $\bar{c}'$, где $c' \in S_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Мы будем допускать на практике одно послабление — именно, если определение некоторого c совершенно ясно, мы будем разрешать ему и всем его элементам входить в одно и то же S_α. Определения ограниченных суждений и ранга (rank) остаются совершенно такими же, как прежде.

Определение. *Множество вынуждающих условий* — это множество U и отношение $\prec$ на U, которые оба принадлежат M и притом таковы, что если P, Q и R входят в U, то $P \prec P$ и $P \prec Q \,\&\, Q \prec R \rightarrow P \prec R$ [1]). Кроме того, дано отображение ψ, принадлежащее M и такое, что если $P \in U$, то $\psi(P)$ является множеством суждений вида $\{c_1 \in c_2\}$, где $c_2 \in G$ и если $c_2 \in S_\alpha$, то $c_1 \in S_\beta$, где $\beta < \alpha$. Если $P \prec Q$, то $\psi(P) \subseteq \psi(Q)$.

Определение. Мы следующим образом рекурсией по рангу определяем, что P *вынуждает* ограниченное суждение.

1—8. В точности так же, как в § 3.

---

[1]) В подлиннике автор пишет «<» вместо «$\prec$», что менее удобно. (По-видимому, это могло быть вызвано техническими причинами — подлинник размножен мимеографически с рукописи, отпечатанной на пишущей машинке.) — *Прим. перев.*

9. P *вынуждает* $c_1 \in c_2$, где $c_1 \in S_\alpha$, $c_2 \in S_\beta$, $\alpha < \beta$, если
i) $\sim c_2 \in G$ и P вынуждает $A(c_1)$, где $A(x)$ — формула, сопоставленная c_2 [1])
или [2])
ii) $c_2 \in G$ и для некоторого $c_3 \in S_\gamma$, $\gamma < \beta$, $(c_3 \in c_2) \swarrow \in \psi(P)$ и P вынуждает $c_1 = c_3$.
10. P вынуждает $c_1 \in c_2$, где $c_1 \in S_\alpha$ и $c_2 \in S_\beta$, $\alpha \geqslant \beta$, если для некоторого $c_3 \in S_\gamma$, $\gamma < \beta$ P вынуждает $\forall_\alpha (x \swarrow \in c_1 \leftrightarrow x \in c_3) \,\&\, c_3 \in c_2$.

Определение вынуждения для неограниченных суждений остается в точности таким же, как прежде. Мы теперь настаиваем на том, что только $\emptyset$ принадлежит S_0 [3]) и что для всех α любой элемент S_α имеет своими элементами только элементы $\cup\{S_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Никакие отрицательные условия $\sim c_1 \in c_2$ теперь не включаются в число непосредственных следствий каких-либо P, потому что из нашего определения для вынуждения автоматически следует, что $\sim c_1 \in c_2$ будет вынуждаться, коль скоро $c_1 \in c_2$ не будет. В нашем построении (construction [4])) мы ограничиваемся образованием лишь тех множеств, которые соответствуют квантификации по $X_\alpha = \cup\{S_\beta \mid \beta \swarrow$

---

[1]) То есть та, которой соответствует c_2 при отображении, описанном на стр. 239 (перед предыдущим определением). Как всегда в таких случаях, здесь следует подразумевать, что $A(c_1)$ получено из $A(x)$ путем подстановки c_1 вместо свободных вхождений x (т. е. что $A(x)$ — «называющая форма» для $A(c_1)$ в смысле [15, § 31]). — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике это «или» отсутствует; хотя оно явно подразумевается (ввиду несовместимости условий i) и ii)), а в других случаях при перечислениях различных пунктов подразумевается их конъюнктивная связь (см., например, формулировку теоремы на стр. 50 или аксиомы на стр. 154). — *Прим. перев.*

[3]) Это вытекает из «общей идеи», высказанной в этом параграфе перед только что изложенными определениями, и взаимоотношения между c и $\bar{c}$, уже знакомого из § 3—6 для ранее рассмотренной модели, которое теперь вскоре будет строго определено и для общего случая. В этом месте автор подразумевает, что основные черты этого взаимоотношения сохраняются. — *Прим. перев.*

[4]) Читателю рекомендуется и здесь обратить внимание на связь английского слова construction (конструкция, построение) с гёделевским термином «конструктивное множество». — *Прим. перев.*

$<\alpha\}$ [1]). Это довольно либеральное определение, так как нет никакой необходимости «собирать» столь часто, как это делают X_α [2]). При исследовании нашего доказательства того, что N является моделью, обнаруживается, что мы воспользовались в нем только двумя обстоятельствами. Первое состоит в том, что для каждого α существует такое c в S, что всегда [3]) имеет место $\bar{c} \supseteq \bar{S}_\alpha$ [4]). Этим мы пользовались в доказательствах аксиом степени и подстановки. Второе обстоятельство состоит в том, что для любой функции f с ординальными значениями, принадлежащей M, если дано γ_0 [5]), то существует такая последовательность γ_n, что $\gamma_{n+1} > f(\gamma_n)$, и существует такое $c \in S$, что $\bar{c} = \bigcup \overline{\{S_{\gamma_n} | n\}}$. Это было использовано в доказательстве теоремы [6]) Лёвенгейма — Скулема при проверке аксиомы подстановки.

В этой новой ситуации мы можем доказать в точности так же, как прежде, соблюдение основных лемм [7]). Определение полной последовательности $\{P_n\}$ остается прежним. Чтобы определить модель N, мы восполь-

---

[1]) Неточность: квантификация будет происходить по $\bar{X}_\alpha$. — *Прим. перев.*

[2]) И здесь точнее было бы сказать: $\bar{X}_\alpha$. — *Прим. перев.*

[3]) То есть независимо от выбора $\{P_n\}$. — *Прим. перев.*

[4]) В подлиннике здесь недосмотр: $\bar{c} \supseteq S_\alpha$. Следовало бы сказать $\bar{c} \supseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \bar{S}_\beta$. В своих общих рассуждениях автор явно не стремится к последовательному употреблению обозначений для этикеток c и их образов $\bar{c}$, для X_α и $\bar{X}_\alpha$ и т. п. Иногда это проникает и в доказательства (например, для леммы на стр. 232—233, за чем читателю я предлагаю следить. — *Прим. перев.*

[5]) В подлиннике — α_0 (и далее, α_n, α_{n+1}, а не γ_n, γ_{n+1}), что нехорошо, ибо символом α_0 обозначали до сих пор фиксированный выше ординал (множество ординалов из M); конечно, при этом γ_0 должно быть $<\alpha_0$ (откуда по индукции следует $\gamma_n < \alpha_0$), чего автор не оговаривает. — *Прим. перев.*

[6]) В подлиннике: рассуждении (argument), но, конечно, не следует приписывать Лёвенгейму и Скулему рассуждения самого Коэна. — *Прим. перев.*

[7]) Речь идет о пяти леммах из § 5. Конечно, рассмотрение последней из них следует отложить до определения модели N, которое будет дано в этом же абзаце, после чего и автор вернется к этой лемме. — *Прим. перев.*

зуемся рекурсией по α. Для $c \in S_0$, $\bar{c} = \emptyset$. Если $\bar{c}$ уже определено для всех $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, то при $c \in S_\alpha - G$ мы определяем $\bar{c}$ через соответствующее c условие $A(x)$ — совершенно так же, как прежде. Если $c \in S_\alpha \cap G$, то $\bar{c} = \{\bar{c}_1 \mid \exists n (c_1 \in c) \in \psi(P_n)\}$. Снова истинными в N оказываются в точности те суждения, которые вынуждаются каким-нибудь P_n [1]). Доказательство того, что N является моделью, происходит теперь в точности так же, как прежде [2]). Это обнаруживается путем рассмотрения доказательства, приведенного в нашем прежнем случае, и усмотрения того обстоятельства, что при этом не были использованы никакие специальные свойства вынуждения, а только те общие свойства этого понятия, которые сохраняют силу и в этом новом контексте.

В большинстве рассматриваемых нами применений всегда будет иметь место $P < Q \leftrightarrow \psi(P) \subseteq \psi(Q)$. Однако возможны более тонкие ситуации. Так, могло бы случиться, что $\psi(P) \neq \psi(Q)$ и $P = Q$. Это означает, что, хотя непосредственные выводы из P и Q совпадают, они могут оказывать различные воздействия (effects) из-за того, что для некоторого R имеет место $P \prec R$, и в то же время $\sim Q \prec R$ [3]).

§ 8. Континуум-гипотеза

Пусть $\aleph_\tau$, $\tau \geqslant 2$, — фиксированный кардинал в M. Пусть S определено следующим образом. Для всех $\alpha < \aleph_\tau$ S_α состоит из одного-единственного элемента c_α, для которого в конечном счете окажется $\bar{c}_\alpha = \alpha$. Все эти $c_\alpha \in G$. Для $\alpha = \aleph_\tau$ S_α состоит из $\aleph_\tau$ элементов, принадлежащих G, которые мы будем обозначать посредством a_δ, где $\delta < \aleph_\tau$. Для них окажется $\bar{a}_\delta \subseteq \omega$ и их присутствие обеспечит, что континуум будет равен по меньшей мере $\aleph_\tau$. Будем продолжать пользоваться обозначением

[1]) Причем сохраняет силу и обобщение этой леммы, указанное в сноске на стр. 223. — *Прим. перев.*

[2]) При этом снова отношение $F(P, A)$ оказывается абсолютным — см. добавление I, стр. 337—341. — *Прим. перев.*

[3]) Конечно, в этом абзаце допущены неясности: условия $\psi(P) \neq \psi(Q)$ и $P = Q$ несовместимы с принятыми (в частности, в этой книге) постулатами равенства. Восстановить эту мысль автора я не берусь, но весь этот абзац не будет нигде использован в оставшейся части этой книги. — *Прим. перев.*

$\alpha=\aleph_\tau$. Тогда $S_{\alpha+1}$ состоит только из следующих элементов G: $\aleph_\tau$ элементов, которые в конечном счете окажутся множествами $\{\beta\}$ для всех $\beta<\aleph_\tau$, а поэтому мы будем обозначать их посредством $\{\beta\}$ [1]), а также $\aleph_\tau$ элементов, которые в конечном счете окажутся множествами $\{\delta, a_\delta\}$ при $\delta<\aleph_\tau$, и мы будем обозначать их $\{\delta, a_\delta\}$. $S_{\alpha+2}$ состоит из $\aleph_\tau$ элементов G, которые в конечном счете окажутся парами $\langle\delta, a_\delta\rangle$ при $\delta<\aleph_\tau$, и мы будем обозначать их посредством $\langle\delta, a_\delta\rangle$. Наконец, $S_{\alpha+3}$ состоит из одного-единственного элемента, который мы будем обозначать W; W принадлежит G и для него $\overline{W}$ в конечном счете окажется множеством $\{\langle\delta, a_\delta\rangle \mid \delta<\aleph_\tau\}$. Для всех $\beta>\alpha+3$ [2]) S_β не будет содержать элементов G и элементы S_β будут находиться во взаимно однозначном соответствии с формулами, в которых все константы и области переменных ограничены [3]) множеством $\bigcup\{S_\gamma \mid \gamma<\beta\}$ [4]). В этом построении [5]) нас прежде всего интересуют a_δ, а также множество W, но ввиду $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ нам приходится определять W посредством ряда последовательных шагов. Вынуждающие условия P состоят из всех конечных множеств P, состоящих из суждений вида $n\in a_\delta$ или $\sim n\in a_\delta$, где $n<\omega$, $\delta<\aleph_\tau$ и ни при каких n, δ в P не могут входить оба суждения $n\in a_\delta$

[1]) Точнее, для этих элементов c окажется, что $\bar{c}=\{\beta\}$, где $\beta<\aleph_\tau$ (так, что $\bar{c}$ будет взаимно однозначно соотнетствовать таким β). Ввиду $c_\alpha=\alpha$ при $\alpha<\aleph_\tau$ автор позволяет себе отождествлять во многих формулнровках c и $\bar{c}$ там, где их различие практически нн на чем не может отразиться (c_α — просто символ, который при формализации этого доказательства можно отождествнть с α прн $\alpha<\aleph_\tau$). Это замечание относится и к другнм рассматриваемым в этом абзаце элементам $S_{\alpha+1}$ и $S_{\alpha+2}$ (но не $S_{\alpha+3}$, для которого оно было учтено и автором). — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, подразумевается $\beta<\alpha_0$. — *Прим. перев.*

[3]) В подлиннике formulas ranging over $\bigcup\{S_\gamma \mid \gamma<\beta\}$, хотя термины range over («пробегать», прнннмать значения), осмысленный для переменных, для формул определен не был. Так как соответствующне построенни уже рассматривались выше для другнх моделей, автор позволяет здесь себе эту беглость. Из предыдущего материала внднo, что константы в этих формулах должны обозначать элементы того же множества. — *Прим. перев.*

[4]) Точнее, $\bigcup\{\overline{S}_\gamma \mid \gamma<\beta\}$. — *Прим. перев.*

[5]) Ср. сноску 4 к стр. 240. — *Прим. перев.*

и $\sim n \in a_\delta$. Мы будем писать $P < Q$, если $P \subseteq Q$, а $\psi(P)$ состоит из всех суждений $c_n \in a_\delta$, где $(n \in a_\delta)$ — элемент P, а также из всех фиксированных [1]) суждений следующих видов:

i) $c_\alpha \in c_\beta$, где $\alpha < \beta < \aleph_\tau$,

ii) $c_\alpha \in \{\alpha\}$, $\delta \in \{\delta, a_\delta\}$, $a_\delta \in \{\delta, a_\delta\}$, где $\alpha, \delta < \aleph_\tau$,

iii) $\{\delta\} \in \langle \delta, a_\delta \rangle$ и $\{\delta, a_\delta\} \in \langle \delta, a_\delta \rangle$, где $\delta < \aleph_\tau$,

iv) $\langle \delta, a_\delta \rangle \in W$, где $\delta < \aleph_\tau$.

Пусть $\{P_n\}$ будет полной последовательностью, а N обозначает соответствующую модель для ZF [2]). Тогда $\bar{a}_\delta \subseteq \omega$ [3]) и ясно, что a_δ попарно различны, так как при

---

[1]) Фиксированные в том смысле, что каждое из этих суждений принадлежит $\psi(P)$ при любых фиксированных α, β и δ. — *Прим. перев.*

[2]) Приведенное в тексте определение параметрического пространства для этой модели зависело от $\aleph_\tau$. Доказательство того, что N является моделью, использует лемму об абсолютности $F(P, A)$ из § 5. Автор в своем изложении не позаботился о том, чтобы множества S_α были абсолютны. Поскольку они определяются через $\aleph_\tau$, они даже не могут считаться абсолютными (ибо $\aleph_\tau$ не абсолютно, например, относительно M), а потому при изложенных определениях не проходит доказательство упомянутой леммы (изложенное в добавлении I на стр. 337—341).

Однако эта неточность легко устранима. Именно — $\aleph_\tau$ является $\aleph_\tau$ только относительно M; в исходном мире этот $\aleph_\tau$ представляет собой некоторый (счетный предельный) ординал $\varkappa$. Автор нигде не пользуется в этом пункте доказательства (и вообще до леммы 3 ниже) тем, что $\varkappa$ есть $\aleph_\tau$ в M. Поэтому применима та же идея, что и в § 5 этой главы, где было дозволено при определении $F(P, A)$ игнорировать α_0 — а здесь будет игнорироваться равенство $\varkappa = (\aleph_\tau)_M$.

Именно, в изложенном определении параметрического пространства рекомендуется всюду заменить «$\aleph_\tau$», т. е. $(\aleph_\tau)_M$ на $\varkappa$. О $\varkappa$ при этом утверждается лишь, что $\varkappa$ — ординал, а это свойство абсолютно. Теперь это определение не зависит от $\aleph_\tau$, а $\varkappa$ является в нем параметром. Доказательство абсолютности $F(P, A)$ теперь проходит, и после того как оно будет закончено, следует фиксировать параметр $\varkappa$ посредством $(\aleph_\tau)_M$. — *Прим. перев.*

[3]) Это следует из $a_\delta \in G$ и п. 9 ii) определения вынуждения из § 7, так как среди только что рассмотренных видов суждений i)—iv) нет суждений вида $c \in a_\delta$, а понятие «быть натуральным числом» N-абсолютно (ввиду абсолютности понятий «ординал», «сын» и $\subseteq$. — *Прим. перев.*

$\delta \neq \delta'$ никакое P не может вынуждать $a_\delta = a_{\delta'}$ просто потому, что все множества P конечны и для любого P $\exists Q \supseteq P$ такое, что для некоторого n, $(n \in a_\delta)$ и $(\sim n \in a_{\delta'})$, или $(\sim n \in a_\delta)$ и $(n \in a_{\delta'})$, входят в Q.

Лемма 1. *В N каждое множество конструктивно относительно $\overline{W}$. Это означает, что если M_0 — транзитивное замыкание $\overline{W}$, а $M_\alpha = (\bigcup\{M_\beta \mid \beta < \alpha\})'$, то $N = \bigcup\{M_\alpha \mid \alpha \in M\}$.*

Доказательство. Здесь транзитивное замыкание X обозначает $\bigcup\limits_n X_n$, где $X_0 = X$, а X_{n+1} есть $\bigcup X_n$ (множество-сумма для X_n). Эта лемма очевидна, так как $\bigcup\{\overline{S}_\alpha \mid \alpha \leqslant \aleph_{\tau+3}\}$ является в точности этим замыканием [1]).

Теорема 1. *AB имеет место в N.*

Доказательство. Ввиду абсолютности построения $X \to X'$, отношение $x = M_\alpha$ из леммы 1 можно выразить в N. Так как M_0 благодаря $\overline{W}$ вполне упорядочено [2]), это индуцирует, как показывают обычные рассуждения [3]), полные упорядочения для всех S_α, а следовательно, и для N. Это полное упорядочение выразимо формулой, в которую входит одна-единственная константа $\overline{W}$.

Определение. Коль скоро не существует такого R, что $P < R$ и $Q < R$, мы будем говорить, что P и Q *несовместимы.*

Лемма 2. *Пусть B — множество в M попарно несовместимых P, тогда B не более чем счетно в M.*

---

[1]) Абсолютность ω здесь не используется (хотя, впрочем, имеет место). — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, $\overline{W}$ вполне упорядочивает в N лишь множество всех a_δ, но из того, что это миожество вполне упорядочено в N, следует, что и M_0 вполне упорядочено в N. — *Прим. перев.*

[3]) См. § 4 гл. III. — *Прим. перев.*

Доказательство[1]). Все это рассуждение имеет место в M. Допустим, что B несчетно. Пусть B_n — подмножество B, состоящее из тех P, которые содержат менее чем n суждений. Некоторое B_n должно быть несчетным (ибо АВ имеет место в M, так что счетное объединение не более чем счетных множеств счетно. Фактически множество всех P вполне упорядочено, так что здесь нам не нужна АВ.) Следовательно, мы можем предположить, что каждое P из B содержит менее чем n суждений. Пусть k — наибольшее такое натуральное число, что для некоторого P_0[2]), состоящего из k суждений, в B имеется несчетно много таких P, что $P_0 \prec P$ и $P_0 \neq P$[3]). Например, может оказаться $k=0$ и $P_0=\emptyset$.

---

[1]) По существу это доказательство является повторением известного доказательства топологической теоремы о том, что в пространствах типа D_τ (топологическое произведение дискретных пространств, состоящих ровно из двух точек каждое) любое множество попарно непересекающихся окрестностей не более чем счетно.

Уже после появления работ автора [2] и [4] появился цикл статей чешского математика П. Вопенки (Vopenka P., The limits of sheaves and applications on constructions of models, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math.*, 13 (1965), 189—192; On V-model of set theory, *Ibid.*, 267—272; Properties of V-model, *Ibid.*, 441—444; V-models in wich the generalized continuum hypothesis does not hold, *Ibid.*, 14 (1966), 95—99), в которых иезависимость КГ (относительно *GB* + *AB*) доказывается путем построения некоторой весьма сложной нестандартной модели (без какого-либо использования СМ). При всем различии методов автора и Вопенки между ними имеется то сходство, что Вопенка также использует (для доказательства иезависимости КГ) только что упомянутую топологическую теорему. Вопеика получает ряд дальнейших результатов, например о независимости $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ от $\forall\beta\,(\beta < \alpha \to 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1})$, где α — регулярный ординал (т. е. ω, или сыи, или недостижимый кардииал); при этом также используется аналог этой топологической теоремы, в котором понятие конечиого, т. е. $< \aleph_0$, заменяется (в определении окрестиости для произведения пространств типа D_τ) на $< \aleph_\alpha$. Аналогичиые результаты имеются у Истона [6]. Как указывает В. Н. Гришии, оии могут быть получены и путем замены $< \aleph_0$ на $< \aleph_\alpha$ в определении вынуждающих условий P и в рассматриваемой лемме. — *Прим. перев.*

[2]) P_0 — вынуждающее условие не обязательио из B. — *Прим. перев.*

[3]) Слова «и $P_0 \neq P$» в оригииале отсутствуют, хотя ниже в этом доказательстве используется непустота $P_1 - P_0$ для произвольного P_1 из миожества этих P. — *Прим. перев.*

В любом случае урежем теперь B так, чтобы оно состояло только из таких P. Пусть, далее, P_1 — произвольный элемент B, и пусть $A_1, \ldots, A_m$ — все суждения из $P_1 - P_0$. Так как P_1 несовместимо со всеми остальными P в B, а все P в B содержат P_0, отсюда следует, что для некоторого A_i, например для A_1, несчетно много P в B содержат $\sim A_1$ [1]). Теперь $\sim A_1$ не входит в P_0, так как в противном случае $\sim A_1$ входило бы в P_1, и существует несчетно много таких P в B, которые содержат $P_0 \cup \{\sim A_1\}$ [2]), а это противоречит определению k.

Лемма 3. *Пусть f — однозначная функция, определимая в N. Тогда существует функция g, определимая в M, сопоставляющая каждому c в S счетное подмножество $g(c)$ множества S и такая, что для всякого c имеет место $f(\bar{c}) = \bar{c}'$ для некоторого $c' \in g(c)$* [3]).

[1]) Существование такого A_i вытекает из $m \neq 0$. Кроме того, автор тут пользуется тем, что если P и Q несовместимы, то имеется $A \in P$ такое, что $\sim A \in Q$, и тем, что $P_1 = P_0 \cup \{A_1, \ldots, A_m\}$ и $P_0 \prec P$ для всякого $P \in B$. Следует еще заметить, что эти записи $\sim A_1$ и $\sim A$ понимаются условно: именно если A_1 есть $\sim n \in a_\delta$, то $\sim A_1$ обозначает сейчас $n \in a_\delta$, и аналогично для A. — *Прим. перев.*

[2]) Так как в определение k выше пришлось включить условие $P_0 \neq P$, здесь следует еще сослаться на то, что только что указанное несчетное множество остается несчетным и в случае удаления из него одного-единственного элемента $P_0 \cup \{\sim A_1\}$. — *Прим. перев.*

[3]) Эта лемма будет использована только в доказательстве следующей за ней теоремы 2. В доказательстве этой леммы у автора имеются неясности. Поэтому читателю предлагается проследить это доказательство для случая, когда рассматриваются лишь $c \in \bigcup_{\gamma < \varkappa} S_\gamma$, где $\varkappa = (\aleph_\tau)_M$ (ср. сноску 2 на стр. 244), причем достаточно считать, что g определена только для этих c, а f — для соответствующих $\bar{c}$ и значения функций f и g тоже имеют соответственно вид c или $\bar{c}$ для таких c. Только этот случай встретится в доказательстве теоремы 2. Следуя В. Н. Гришину, для этого случая лемму 3 можно доказать так.

а) Прежде всего, если c', c'' — этикетки только что указанного для c вида, то $\bar{c}' = \bar{c}'' \leftrightarrow c' = c''$ (и притом независимо от выбора $\{P_n\}$).

Пусть f_0 — такая этикетка, что $f = \bar{f}_0$. Далее пусть P_0 из полной последовательности вынуждает однозначность f_0.

Пусть $g(x) = \{y \mid \exists P \succ P_0,\ P$ вынуждает $\langle x, y\rangle \in f_0 \,\&\, y$ входит в S_β, где β — минимальный ординал с этим свойством для P, x

Доказательство. Роль этой леммы состоит в том, что, хотя мы не можем описать f в M, мы можем утверждать, что область функции f настолько ограничена, что, как это видно из доказательства следующей теоремы, мощности не отождествляются при переходе к N. Мы будем считать, что f определена некоторым высказыванием, в которое может входить $\bar{c}$, где c входит в S. Поэтому в нашем формальном языке можно образовывать суждения, относящиеся к f. Теперь впредь до дальнейших замечаний по этому вопросу все наши понятия относятся к M. Для любых c, c' из S пусть $A(c, c')$ обозначает множество всех таких P, что P вынуждает однозначность f, а c' — первый (в некотором естественном полном упорядочении) элемент S, для которого, коль скоро $Q \succ P$, Q вынуждает $f(c) = c'$. Ясно, что при $c' \neq c''$ элементы $A(c, c')$ несовместимы с элементами $A(c, c'')$. Следовательно, в силу соблюдения АВ в M и леммы 2, существует лишь не более чем счетное

и f_0} (условие минимальности β обеспечивает существование такого множества $g(x)$ в M). Здесь x, y — этикетки из $\bigcup_{\gamma < \varkappa} S_\gamma$.

Пусть в N имеет место $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \bar{f}_0$, т. е. $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in f$. Тогда $\exists P$, $P \in \{P_n\}$, $P \succ P_0$, P вынуждает $\langle x, y \rangle \in f_0$. Так как это условие для P выразимо в **ZF**, то существует наименьший такой y, обозначим его y_1. Для него по определению $g(x)$ $y_1 \in g(x)$ и, кроме того, $\exists P$, $P \in \{P_n\}$, P вынуждает $\langle x, y_1 \rangle \in f_0$, откуда $\langle \bar{x}, \bar{y}_1 \rangle \in \bar{f}_0 = f$, и, в силу однозначности f в N, $\bar{y} = \bar{y}_1$ в N. В силу а), отсюда следует $y = y_1$, откуда теперь $y \in g(x)$. Если $c = x$, то это y можно взять в качестве c' леммы 3. Остается доказать счетность $g(x)$.

Допустим, что $P_i \succ P_0$, P_i вынуждает $\langle x, y_i \rangle \in f_0$, где $i = 1, 2$, $y_1 \neq y_2$. x, y_i — этикетки из $\bigcup_{\gamma < \varkappa} S_\gamma$. Тогда P_1 и P_2 несовместимы, ибо если $P = P_1 \cup P_2$ — вынуждающее условие, то $P \succ P_0$ и P вынуждает однозначность f_0, а также $\langle x, y_1 \rangle \in f_0$ и $\langle x, y_2 \rangle \in f_0$. Рассмотрим любую полную последовательность, начинающуюся с P_0, и соответствующую ей модель N'. В N' $\bar{f}_0$ однозначно, $\langle \bar{x}, \bar{y}_1 \rangle \in \bar{f}_0$, $\langle \bar{x}, \bar{y}_2 \rangle \in \bar{f}_0$ (где черта берется для этой модели), откуда $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ и, в силу а), $y_1 = y_2$ — противоречие. Для каждого y существует такое P и его можно выбрать (даже не пользуясь АВ) в M. Теперь ввиду леммы 2 миожество $g(x)$ счетно, и лемма 3 доказана. — *Прим. перев.*

множество таких c', что $A(c, c') \neq \emptyset$. Пусть $g(c)$ обозначает множество этих c'. Возвращаясь теперь к N, обозначим через c' первый элемент в S, такой, что $f(\bar{c}) = \bar{c}'$. Ввиду того что построение S_α может быть выражено в N и полное упорядочение S может быть выражено в N, можно рассмотреть, как законное неограниченное суждение, $T \equiv$ «c' — первый элемент в S, для которого $f(c) = c'$». Тогда некоторое P_n должно вынуждать T, а также однозначность f, так как эти суждения истинны в N. Следовательно, $A(c, c')$ непусто, $c' \in g(c)$ и лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* α, β — *ординалы и* $\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\beta}}$ *в* M. *Тогда* $\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\beta}}$ *в* N.

Доказательство. Ясно, что можно считать α и β кардиналами. Пусть f — однозначная функция в N, отображающая α на β и такая, что $f(x) = 0$ при $\sim x \in \alpha$. Положим $X_\gamma = \bigcup \{S_\delta \mid \delta < \gamma\}$. Ясно, что $\gamma \in X_{\gamma+3}$ для всех γ и $x \in X_\gamma \to \operatorname{rank} x \leqslant \gamma$. Согласно доказательству леммы 3, отсюда следует, что область f на $X_{\alpha+3}$ содержится в $\overline{T}$, где T — подмножество X_β, а мощность T в M будет $\leqslant \aleph_0 \cdot \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}}$. $\overline{T}$ содержит область f. Если $c \in T$, то $c \in S_\gamma$ для некоторого $\gamma < \beta$. Так как мощность T в $M \leqslant \alpha$, а $\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\beta}}$ в M, отсюда следует, что существует $\gamma < \beta$, для которого $T \subseteq \bigcup \{S_\delta \mid \delta < \gamma\}$ [1]). Но тогда $\operatorname{rank} \overline{T} \leqslant \gamma$, так что $\overline{T}$ не может содержать β, а следовательно, область f не может включать в себя всё β.

Теперь мы установили, что кардиналы в M в точности совпадают с кардиналами в N. Так как все a_δ попарно различны, мы таким образом получаем [2]) теорему

Теорема 3. *В* N $C \geq \aleph_\tau$. *Таким образом* КГ *ложна в* N.

---

[1]) Здесь предполагается, что кардинал β не конфинален никакому множеству меньшей мощности, для чего достаточно, чтобы он был регулярным. Очевидно, что достаточно доказать теорему для этого случая, чтобы затем снять эту оговорку. — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, здесь используется, что $\overline{S_\varkappa} \in N$; $\overline{S_\varkappa}$ состоит в точности из всех a_δ, $\delta < (\aleph_\tau)_M$ $(= (\aleph_\tau)_N)$. — *Прим. перев.*

Теперь, когда показано $C \geqslant \aleph_\tau$, остается проблема точного определения мощности C в N. Мы приведем сперва два классических результата.

Лемма 4. (Кёниг.) *Пусть A_α и B_α — два семейства множеств, такие, что $\overline{\overline{A}}_\alpha < \overline{\overline{B}}_\alpha$ для всех α. Тогда $\overline{\overline{\cup A_\alpha}} < \overline{\overline{\Pi B_\alpha}}$. Здесь Π обозначает прямое произведение.*

Доказательство. Допустим, что f — функция, отображающая $\cup A_\alpha$ на ΠB_α. Пусть f_β — проекция f на B_β [1]). Тогда при каждом α f_α не может отображать A_α на B_α. Выберем $x_\alpha \in B_\alpha$, не входящее в область f_α на A_α [2]). Тогда $\Pi_\alpha x_\alpha$ [3]) не входит в область f.

Лемма 5. *Континуум C не является суммой счетного множества меньших кардиналов.*

Доказательство. Это — единственное известное ограничение на C [4]). Если $\overline{\overline{A}}_n < C$, то $\Sigma \overline{\overline{A}}_n < \prod_{n=1}^{\infty} C = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = C$. Мы теперь покажем, что в некотором смысле это ограничение на C является единственным возможным.

Лемма 6. *В M (т. е. в предположении* ОКГ [5])) *число счетных подмножеств $\aleph_\tau$ есть $\aleph_\tau$, если $\aleph_\tau$ не является суммой счетного множества меньших кардиналов, и $\aleph_{\tau+1}$, если $\aleph_\tau$ является такой суммой.*

Доказательство. Сначала заметим, что для каждого δ число счетных подмножеств $\aleph_\delta$ будет $\leqslant \aleph_\delta^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_\delta \cdot \aleph_0} = \aleph_{\delta+1}$ в силу ОКГ. Допустим теперь, что $\aleph_\tau$

---

[1]) То есть для каждого $y_\alpha \in A_\alpha$ $f_\beta(y_\alpha)$ есть проекция $f(y_\alpha)$ на B_β. — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, при этом используется АВ. Поэтому леммы 4, 5 и 6 зависят от АВ. — *Прим. перев.*

[3]) То есть элемент $(\ldots x_\alpha \ldots)$ прямого произведения ΠB_α. — *Прим. перев.*

[4]) Не считая, разумеется, теоремы Кантора $\overline{\overline{C}} > \aleph_0$. — *Прим. перев.*

[5]) Следовало бы сказать: именно в этом предположении, т. е. именно для него формулировать лемму 6, а то, что она верна для M, рассматривать затем как следствие. — *Прим. перев.*

не является суммой счетного множества меньших кардиналов. Это значит, что не существует никакой последовательности τ_n, для которой $\tau_n<\tau$, но $\operatorname{Sup}\tau_n=\tau$. Мы будем поэтому говорить, что τ не конфинально с ω. Итак, любое счетное подмножество $\aleph_\tau$ содержится в некотором $\aleph_{\tau'}$, где $\tau'<\tau$. Число таких подмножеств $\leqslant \aleph_{\tau'+1} \leqslant \aleph_\tau$. Следовательно, число счетных подмножеств $\aleph_\tau \leqslant \overline{\overline{\tau}} \cdot \aleph_\tau = \aleph_\tau$. С другой стороны, допустим теперь, что $\aleph_\tau=\Sigma A_n$, где A_n — кардиналы и $A_n<\aleph_\tau$. Допустим, что $A_n<A_{n+1}$, и положим $B_n=A_n-A_{n-1}$. Тогда число счетных подмножеств $\aleph_\tau$ есть по меньшей мере $\Pi\overline{B}_n=\Pi A_n$. Но $\aleph_\tau=\Sigma A_n<\Pi A_{n+1}$ и, следовательно, это число есть по меньшей мере $\aleph_{\tau+1}$, но оно также и не больше, чем $\aleph_{\tau+1}$, а следовательно, равно $\aleph_{\tau+1}$.

Определение. Для любого суждения A мы будем говорить, что P *минимально для* A, если P вынуждает $\sim\sim A$ (т. е. никакое $Q \succ P$ не вынуждает $\sim A$) и никакое отличное от P $P' \prec P$ не обладает этим свойством.

Утверждение о том, что P вынуждает $\sim\sim A$, в точности равнозначно условию, что если $P \prec P_n$, где P_n — один из членов полной последовательности, определяющей N, то A имеет место в N [1]).

Лемма 7. *Для любого суждения A множество минимальных P для A не более чем счетно в M.*

Доказательство. Это доказательство почти совпадает с доказательством леммы 2. Допустим, что B — несчетное множество минимальных P для A. Как и в лемме 2, мы можем предположить, что все P в B содержат n суждений. Пусть k — наибольшее натуральное число, такое, что существуют P' с k условиями и несчетно много таких P в B, что $P' \prec P$. Теперь мы можем предположить, что $P' \prec P$ и $P \neq P'$ для всех P в B. Теперь ввиду минимальности P в B P' не может вынуждать $\sim\sim A$. Поэтому для некоторого $P'' \succ P'$ P'' вы-

[1]) Это туманное утверждение нигде не используется в дальнейшем. — *Прим. перев.*

нуждает $\sim A$, в силу чего P'' несовместимо со всеми P в B. Как и в лемме 2, отсюда следует, что для некоторого $c \notin P'$ $P' \cup \{c\}$ содержится в несчетно многих P в B, а это противоречит определению k.

Теперь мы можем определить мощность C.

Теорема 4. *B N, $C = \aleph_\tau$, если τ не конфинально с ω в M, и $C = \aleph_{\tau+1}$, если τ конфинально с ω в M* [1]).

Доказательство. Для любых $c \in S$ и $n \in \omega$ пусть $V(n, c)$ обозначает множество всех минимальных P для $n \in c$. Если $V(n, c) = V(n, c')$ для всех n, а $\bar{c} \subseteq \omega$, $\bar{c}' \subseteq \omega$, то $\bar{c} = \bar{c}'$. Это верно, так как если P_k принадлежит нашей полной последовательности и P_k вынуждает $n \in c$, то должно существовать минимальное P', $P' \prec P_k$ [2]). Следовательно, P', а значит, и P_k, вынуждает $\sim\sim n \in c'$ [3]),

---

[1]) Это второе «в M» в оригинале отсутствует, но, конечно, подразумевается. Согласно этой теореме, в частности, если в M имеется недостижимый кардинал, то его можно выбрать в качестве $\aleph_\tau$ из M и получить $C = \aleph_\tau$ в N. При этом из теоремы 2 и леммы 3 следует, что $\aleph_\tau$ остается недостижимым кардиналом и в N. Именно, если в N имеется конфинальная $\aleph_\tau$ последовательность F ординалов, имеющая в N мощность $\aleph_\mu < \aleph_\tau$, то, согласно лемме 3, для каждого ее члена ($f(\alpha) \in F$) в параметрическом пространстве можно указать такое счетное множество $g(\alpha)$, что $f(\alpha) \in g(\alpha)$. Так как параметрическое пространство содержится в M, а M абсолютно, оно содержится и в N и, в силу абсолютности счетности, $g(\alpha) \subseteq N$ и $g(\alpha)$ счетно в N. Теперь $\aleph_\tau \cap \bigcup \{\overline{g(\alpha)} \mid f(\alpha) \in F\}$ образует в N множество, мощность которого $\leqslant \aleph_\mu \cdot \aleph_0 = \aleph_\mu$, и в то же время $F \subseteq \aleph_\tau \cap \bigcup \{\overline{g(\alpha)} \mid f(\alpha) \in F\}$, откуда следует, что эта мощность в N равна $\aleph_\mu$; по теореме 2 она равна $\aleph_\mu$ и в M. Кроме того, это множество $\aleph_\tau \cap \bigcup \{\overline{g(\alpha)} \mid f(\alpha) \in F\}$ конфинально $\aleph_\tau$ в N, а значит, и в M (в силу абсолютности $\in$), что противоречит недостижимости $\aleph_\tau$ в M. Аналогично для высших недостижимых кардиналов. — *Прим. перев.*

[2]) Это следует из того, что коль скоро P вынуждает A, то (в силу леммы 2 из § 4) P вынуждает и $\sim\sim A$ (в данном случае $A \equiv n \in c$). — *Прим. перев.*

[3]) Из того что P' минимально для $n \in c$, следует $P' \in V(n, c)$ и, в силу $V(n, c) = V(n, c')$, $P' \in V(n, c')$, а потому P' вынуждает $\sim\sim n \in c'$, а потому и $P_k \succ P'$ вынуждает $\sim\sim n \in c'$. — *Прим. перев.*

откуда $n \in \bar{c}'$. Итак, $\bar{c}=\bar{c}'$ [1]). При фиксированном n число возможных множеств $V(n, c)$ есть самое большее $\bar{\bar{D}}=$ =числу счетных подмножеств $\aleph_\tau$, вычисленному в M. Теперь мы утверждаем, что если E — множество всех счетных последовательностей в D, то $\bar{\bar{E}}=\bar{\bar{D}}$. (Здесь снова все понятия относятся к M.) В самом деле, каждый элемент E определяет счетное подмножество D, причем каждое такое подмножество происходит не более чем из $2^{\aleph_0}$ последовательностей, так что по лемме 6 мы получаем $\bar{\bar{E}} \leqslant \bar{\bar{D}} \cdot \aleph_1 = \bar{\bar{D}}$ и, в силу $\bar{\bar{D}} \leqslant \bar{\bar{E}}$, $\bar{\bar{D}}=\bar{\bar{E}}$. Таким образом мы показали, что в N имеет место $\bar{\bar{C}} \leqslant \bar{\bar{D}}$. Если τ конфинально с ω, то мы видим, что в N $\aleph_\tau \leqslant C \leqslant \aleph_{\tau+1}$. Лемма 5 утверждает, что C не может равняться $\aleph_\tau$, так что $C=\aleph_{\tau+1}$. Если τ не конфинально с ω, то мы видим, что $C \leqslant \aleph_\tau$ и ввиду $C \geqslant \aleph_\tau$ $C=\aleph_\tau$.

Отсюда следует, что мы можем строить модели, в которых $C=\aleph_2$, $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega^2+1}$ и т. д. Мы можем даже получить $C=\aleph_{\omega_1}$, где $\omega_1=\aleph_1$. Чтобы убедиться в этом, мы замечаем, что ω_1 имеет в M тот же смысл, что и в N, ибо кардиналы не меняются, и по той же причине $\aleph_{\omega_1}$ также сохраняет свой смысл. Мы можем высказать следующее точное утверждение. Пусть $A(x)$ — формула, для которой доказуемо, что в любом транзитивном множестве или классе, удовлетворяющем ZF, $A(x)$ определяет единственный ординал. Допустим далее, что $A(x)$ абсолютно в том смысле, что если S_1 и S_2 — два таких класса, $S_1 \subseteq S_2$, для которых понятия кардинала совпадают, то $A(x)$ определяет один и тот же элемент в S_1 и в S_2. Тогда можно построить модель для ZF, в которой если $A(\alpha)$ имеет место для некоторого α, то, коль скоро α не конфинально с ω, должно быть $C=\alpha$. Подробности доказательства предоставляются читателю.

В [4] определение мощности C в N использовало более прямолинейную, но менее изящную конструкцию. Мы приведем сейчас ее грубый набросок. Рассмотрим

---

[1]) Доказано $\bar{c}=\bar{c}'$ в N, а, в силу абсолютности равенства, это дает и $\bar{c}=\bar{c}'$. — *Прим. перев.*

доказательство того, что в L каждое действительное число строится некоторым счетным ординалом. Важнейшая идея состояла в том, что если $x \subseteq \omega$ и $x \in M_\alpha$, то, выбирая скулемовскую «оболочку» множеств α, ω и x, мы получаем изоморфизм $\alpha \to \alpha'$, где α' счетно и $x \in M_\alpha$. В N каждое множество конструктивно относительно $W = \{\langle \delta, a_\delta \rangle \mid \delta < \aleph_\tau\}$. Мы хотим вычислить мощность этой оболочки в M, так как в M мы очень хорошо знаем арифметику кардиналов. На всем протяжении предстоящего построения оболочки нам придется осуществлять счетное множество выборов в N. Однако путем рассмотрений всех возможных P, вынуждающих такие выборы, можно показать, что путем выполнения счетного множества выборов можно построить оболочку и что множество тех $c \in S$, которые при этом выбираются, образуют в M множество, и притом счетное. Так как в оболочке мы начинаем с W, нам может потребоваться выбрать некоторые элементы W. Оказывается, что та оболочка, которую мы построим, полностью определяет x. Так как любая оболочка содержит лишь счетное число элементов, основной вопрос состоит в том, каковы именно те счетные подмножества, которые в ней содержатся. Таким путем мы можем убедиться в том, что мощность C не превышает мощности множества всех счетных подмножеств $\aleph_\tau$.

В [6] и [25] были получены модели, в которых одновременно имеют место различные суждения кардинальной арифметики.

В [6] доказано, что если $G(\alpha)$ — любая функция в M, такая, что (i) $\alpha \leqslant \beta$ влечет $G(\alpha) \leqslant G(\beta)$ и (ii) $\aleph_{G(\alpha)}$ не конфинален ни с каким кардиналом $\leqslant \aleph_\alpha$, то в N $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{G(\alpha)}$ для всех регулярных кардиналов $\aleph_\alpha$ [1]). (Кардинал называется *регулярным*, если он не конфинален ни с каким меньшим кардиналом.) Дальнейшее ограничение на кардинальные равенства состоит, конечно, в том, что если $2^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma$ для всех β, таких, что $\delta \leqslant$

[1]) Имеется в виду, что в [6] доказано существование такой модели N (по-видимому, в тех же предположениях, что и в настоящей книге, но диссертация [6] еще не была получена в Москве). В подлиннике опечатка: $\aleph_{g(\alpha)}$ вместо последнего $\aleph_{G(\alpha)}$. — *Прим. перев.*

$\leqslant\beta<\alpha$, где δ, α фиксированы и α сингулярно (т. е. нерегулярно), то $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_\gamma$[1]). Используемая в [6] техника состоит во введении генерических множеств на различных уровнях, но приходится принимать предосторожности для того, чтобы генерические множества, вводимые на некотором уровне, не влияли на мощности гораздо более низких уровней, а влияли только на те мощности, ради влияния на которые они и были введены.

§ 9. Аксиома выбора

Теперь мы рассмотрим модели N, в которых АВ нарушается. Классические результаты в этом направлении были получены Френкелем и Мостовским, которые опустили аксиому экстенсиональности и ввели «атомы», т. е. фиктивные объекты x_i, для которых $\forall y(\sim y\in x_i)$, но $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$[2]). Ввиду того что такие атомы x_i, конечно, весьма трудно различать[3]), можно различными способами вводить симметрию в модели для теории множеств. Например, если мы введем атомы x_n, y_n, то можно добиться того, что каждое множество будет инвариантным при всех перестановках $(x_n y_n)$, не распространяющихся на конечные множества значений n. Ясно, что такие оговорки должны быть допущены, потому что x_1, например, не будет инвариантно при перестановке $(x_1 y_1)$. В наших моделях генерические множества будут играть роль, сходную с ролью этих атомов. Однако для стандартных моделей N не может существовать никаких настоящих автоморфизмов на N, потому что если бы имелся такой автоморфизм σ, то индукцией по $\operatorname{rank} x$

---

[1]) Ввиду отсутствия непрерывности у функции $2^{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{n}$ — кардинал (например, эта непрерывность отсутствует при $\mathfrak{n}=\aleph_0$), не понятно, что очевидного находит автор в этом утверждении (или почему он говорит здесь «конечно»). — *Прим. перев.*

[2]) Только для этих атомов и нарушалась аксиома экстенсиональности в моделях Френкеля и Мостовского Впрочем, вводя для них специальный алфавит переменных, эти авторы сохраняли аксиому экстенсиональности. — *Прим. перев.*

[3]) До тех пор пока для них не введены никакие дополнительные аксиомы, например превращающие некоторые из них в натуральные числа или изоморфные им объекты. — *Прим. перев.*

можно было бы доказать, что $\sigma x = x$. Это усложняет дело, но основная идея о наличии некоторого рода симметрии остается.

Были получены также некоторые результаты, в которых опускалась аксиома регулярности, но сохранялась аксиома экстенсиональности. В этом случае роль атома обычно играет такое множество x_0, что $x_0 = \{x_1\}$, ..., $x_n = \{x_{n+1}\}$, ... Эти результаты, конечно, ничего не дают для фундированных множеств, например, для вопроса о том, может ли быть вполне упорядочено множество всех действительных чисел.

В нашей первой модели мы введем некоторое множество V, состоящее из бесконечно многих генерических подмножеств ω. Построение [1]) будет организовано так, что можно будет отличать только конечное число таких множеств между собой и от любого другого множества. Таким образом, S_0 состоит из всех натуральных чисел. S_1 состоит из счетного множества символов a_n, каждый из которых будет генерическим и в конечном счете окажется [2]) подмножеством ω. S_2 состоит из одного-единственного генерического множества V, которое в конечном счете окажется состоящим в точности из множеств a_n. S_α при $\alpha > 2$ [3]) состоит из этикеток для *всех* формул из $\boldsymbol{ZF}$, релятивизованных к $\bigcup\{S_\beta \mid \beta < \alpha\}$ и могущих содержать константы из этого множества. Вынуждающие условия P представляют собой всевозможные конечные совокупности суждений вида $n \in a_m$ или $\sim n \in a_m$, не содержащие никакого суждения вместе с его отрицанием одновременно. Частичным упорядочением $\prec$ на этих множествах P служит включенне. Для каждого P множество $\psi(P)$ элементарных [4]) суждений, вынуждаемых

---

[1]) Ср. сноску 4 на стр. 240. — *Прим. перев.*

[2]) Точнее, подмножеством ω окажется не a_n, а $\bar{a}_n$; ср. сноски 4 на стр. 241 и 1 на стр. 243. Аналогично в следующей фразе: элементами $\bar{V}$ в конечном счете окажутся только $\bar{a}_n$. — *Прим. перев.*

[3]) Здесь и ниже, поскольку не оговорено противное, все α, β, γ обозначают ординалы $< \alpha_0$, а α_0 имеет тот же смысл, что и в предыдущих параграфах. — *Прим. перев.*

[4]) То есть «атомарных» суждений, или суждений вида $m \in n$, где m, n — этикетки. — *Прим. перев.*

этим P, состоит из суждений, задаваемых следующими тремя условиями:

i) если m, $n \in S_0$ и $m < n$, то $(m \in n) \in \psi(P)$,

ii) если $(m \in a_n) \in P$, то $(m \in a_n) \in \psi(P)$,

iii) $(a_n \in V) \in \psi(P)$ для всех n.

Пусть G — группа всех таких перестановок π множества ω, что $\pi(n) \neq n$ только для конечно многих n, и пусть G_n — подгруппа G, равная $\{\pi \mid \pi(m) = m$ для всех $m \leqslant n\}$. Мы определим теперь, как действует G на множество $S = \bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha$.

Определение. Для $c \in S_0$, $\pi \in G$ положим $\pi c = c$. Для $a_n \in S_1$ положим $\pi(a_n) = a_{\pi(n)}$. Положим $\pi(V) = V$. Для $\alpha > 2$, $c \in S_\alpha$ допустим, что c соответствует формуле $A(x, c_1, \ldots, c_m)$, где $c_i \in X_\alpha = \bigcup \{S_\beta \mid \beta < \alpha\}$ и подразумевается, что в A все переменные ограничены множеством X_α. Тогда $\pi(c)$ — это элемент S_α, соответствующий формуле $A(x, \pi(c_1), \ldots, \pi(c_m))$.

Определение. Пусть A — ограниченное суждение, $A \equiv B(c_1, \ldots, c_n)$, где $c_i \in S$, а B — формула $\boldsymbol{ZF}$ в которой каждый квантор снабжен ординальным индексом, т. е. имеет вид $\forall_\alpha$ или $\exists_\alpha$. Тогда $\pi(A) \equiv$ $\equiv B(\pi(c_1), \ldots, \pi(c_n))$, причем ординальные индексы остаются неизмененными. Аналогично для неограниченных суждений.

Определение. Если P — вынуждающее условие, то $\pi(P)$ — вынуждающее условие, определяемое посредством $(n \in a_m) \in P \leftrightarrow (n \in a_{\pi(m)}) \in \pi(P)$ и $(\sim n \in a_m) \not\in P \leftrightarrow (\sim n \in a_{\pi(m)}) \in \pi(P)$.

Лемма. *P вынуждает $A \leftrightarrow \pi(P)$ вынуждает $\pi(A)$.*

Доказательство. Эта лемма выражает тот смысл, в котором элементы G являются автоморфизмами нашей системы. Пусть A — ограниченное суждение. Доказательство проводится индукцией по $\operatorname{rank} A$. Очевидно, что лемма нуждается в проверке только для таких ограниченных суждений A, что $\operatorname{rank} A = (\alpha, i, r)$,

где $\alpha \leqslant 2$, ибо индукция тривиальна. Этот случай быстро сводится к таким, в которых A имеет вид $\pi \in a_m$. А для этого случая лемма очевидным образом усматривается из нашего определения того, как действует G на P и на A. Для неограниченных суждений результат получается индукцией по числу символов.

Лемма. *Для любых* $c \in S$, *суждения* A *и условия* P $\exists m$ *такое, что* $\pi \in G_m \rightarrow \pi(c) = c$, $\pi(A) = A$, $\pi(P) = P$.

Доказательство. Если $c \in S_\alpha$ и соответствует такой формуле $A(x, c_1, \ldots, c_n)$, что для некоторых m_i $\pi \in G_{m_i} \rightarrow \pi(c_i) = c_i$, то ясно, что при $m = \max(m_i)$ будет $\pi \in G_m \rightarrow \pi(c) = c$. Если $c \in S_0$ или $c \in S_2$, то $\pi(c) = c$ для всех π. Если $a_m \in S_1$, то $\pi(a_m) = a_m$ при $\pi \in G_m$. Случай суждений рассматривается аналогично. Случай условий P тривиален. Итак, хотя имеется бесконечно много a_n, каждое c симметрично по отношению к ним всем с возможным конечным числом исключений.

Теперь пусть N обозначает модель, получаемую путем выбора полной последовательности $\{P_n\}$. Положим $T = \overline{V}$.

Теорема 1. *N служит моделью для* ***ZF****, в которой множество T является подмножеством $P(\omega) = C$ и притом T бесконечно* [1]*, но не содержит никакого счетного подмножества* [2].

---

[1]) То есть не эквивалентно никакому натуральному числу. — *Прим. перев.*

[2]) Бесконечные (в только что указанном смысле) множества, не содержащие счетных подмножеств, называются *дедекиндовыми* множествами. Из АВ следует, что их не существует. Вполне упорядочиные множества независимо от АВ не могут содержать дедекиидовых подмножеств.

При отсутствии АВ в ***ZF*** доказуема теорема Рассела: множество содержит счетное подмножество в том и только в том случае, если оно эквивалентно некоторой своей правильной части. Доказательство: пусть множество B эквивалентно своей правильной части B', тогда если B взаимно однозначно отображается на B' посредством φ, то для $x \in B - B'$ положим $x_0 = x$, $x_{i+1} = \varphi(x_i)$. Обозначая $B_0 = B - B'$, $B_{i+1} = \varphi(B_i)$, индукцией доказываем, что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и что $x_i \in B_i$, откуда вытекает счетность последовательности $x_0, x_1, \ldots$, содержащейся в B. Обратно, если в B есть счетная

Доказательство. Если $m \neq n$, то никакое P не может вынуждать $a_m = a_n$, потому что всегда можно найти $Q > P$, которое для некоторого k вынуждает $k \in a_m$ и $\sim k \in a_n$ [1]). Таким образом, $\bar{a}_m \neq \bar{a}_n$ и ясно, что T бесконечно. Пусть $c \in S$, и допустим, что некоторое P из нашей полной последовательности $\{P_n\}$ вынуждает «c есть некоторая функция f, отображающая ω в V и такая, что $f(m) \neq f(n)$ при $m \neq n$». Пусть r таково, что $\pi \in G_r \to \pi(c) = c$, и притом r больше любого m, для которого a_m входит в одно из суждений P. В полной последовательности $\{P_n\}$ должно встретиться такое $P' \supseteq P$, что для некоторых k и s P' выиуждает $f(k) = a_s$, и притом s больше, чем r, ибо f принимает бесконечно много различных значений. Пусть $t > r$ — такое натуральное число, что a_t не встречается в P', и пусть π — перестановка, заменяющая s и t друг на друга и тождественная на всех других натуральных числах. Если $P'' = \pi(P')$, то P'' вынуждает $f(k) = a_t$. Кроме того, P' и P'' совместимы, т. е. $Q = P' \cup P''$ является вынуждающим условием, потому что P' и P'' совпадают, за исключением условий, содержащих a_s и a_t, причем в P' не встречается a_t, а в P'' не встречается a_s [2]). Итак, Q вынуждает f быть однозначной в силу $Q \supseteq P$ и в то же время вынуждает $f(k) = a_s$ и $f(k) = a_t$, что невозможно [3]).

последовательность $x_0, x_1, \ldots$, то ее можно отобразить на ее правильную часть посредством $x_i \to x_{i+1}$, и если остальные элементы B отобразить самих в себя, то получится отображение B на его правильную часть. Поэтому *дедекиндовы множества* — это такие, которые, будучи бесконечными, не эквивалентны никакой своей правильной части. — *Прим. перев.*

[1]) Точнее, вынуждает $k \in a_m$ и $\sim k \in a_n$, или вынуждает $\sim k \in a_m$ и $k \in a_n$. — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике «в P' не встречается t, а в P'' не встречается s», что является недосмотром, ибо t или s может входить в P' или P'' слева от $\in$. — *Прим. перев.*

[3]) Чтобы убедиться в этой невозможности, следует освоить некоторые логические преобразования формул A в контексте «P вынуждает A». Именно, для Q существует такое $Q' \supseteq Q$, что Q' вынуждает $\sim a_s = a_t$, но, согласно лемме 2 из § 4, Q' должно вынуждать $f(k) = a_s$ и $f(k) = a_t$, равно как и формулу, выражающую однозначность f. Равенства вида $f(k) = x$ следует при этом представлять в виде $\varphi(k, x)$, где φ — формула ZF, выражающая функцию f. Конечно, из формулы, выражающей однозначиость f, вместе с фор-

Следствие. *В N континуум не является вполне упорядоченным* [1]).

Следствие. *В N существует такая счетная последовательность* $\{B_n\}$, *что каждое* B_n *является множеством действительных чисел, и не существует никакой функции g, такой, что* $g(n) \in B_n$. *Таким образом, счетная* АВ *нарушается.*

Доказательство. Конечно, действительные числа взаимно однозначно соответствуют подмножествам ω, так что C можно рассматривать и как множество действительных чисел, и как $P(\omega)$. Кроме того, хорошо известно, что для любого n существует простое взаимно однозначное отображение всех n-ок действительных чисел на все действительные числа. (При этом отображении числа «сцепляются» друг с другом [2]).) Пусть B_n — множество всех действительных чисел, соответствующих тем n-м элементам T, у которых никакие

мулами $\varphi(k, a_s)$, $\varphi(k, a_t)$ и $\sim a_s = a_t$ можно получить противоречие средствами исчисления предикатов, и теперь остается показать, что если Q' вынуждает эти формулы, то некоторое $Q'' > Q'$ вынуждает противоречие, что невозможно в силу леммы 1 из § 4.

В только что указанном выводе противоречия не участвуют свободные переменные, т. е. в нем участвуют только суждения. Если P вынуждает A и $A \to B$, то P вынуждает B в силу леммы 1 из § 4. Теперь остается доказать, что для всякой замкнутой логической аксиомы и любого P существует $P' > P$, вынуждающее эту аксиому.

Для аксиом вида $\forall x A(x) \supset A(c)$, если P не вынуждает $A(c)$, то в силу леммы 3 из § 4 некоторое $P' > P$ вынуждает $A(c)$ или $\sim A(c)$. Если P' вынуждает $A(c)$, то оно вынуждает и эту аксиому. Если P' вынуждает $\sim A(c)$, то и любое $Q > P'$ вынуждает $\sim A(c)$, а потому любое такое Q не вынуждает $\forall x A(x)$, и, следовательно, P' вынуждает $\sim \forall x A(x)$, а значит, и рассматриваемую аксиому.

В силу леммы 3 из § 4 для всякого суждения A и для всякого P некоторое P' вынуждает $A \vee \sim A$, а значит, и $A \to A$. Легко проверить, что таким же образом дело обстоит и для остальных логических аксиом. — *Прим. перев.*

[1]) О связи этого следствия с КГ см. добавление II. — *Прим. перев.*

[2]) То есть из десятичных представлений 0, a_1a_2 и 0, b_1b_2 ... (где a_i, b_j — «молекулы» вида 00 ... 0m, где $m = 1, 2, \ldots, 9$) получается 0, $a_1b_1a_2b_2$, ... и аналогично при любом n. — *Прим. перев.*

два члена n-ки не совпадают. Если существует g, то можно получить счетное подмножество T [1]).

Определение. Мы будем говорить, что P *слабо вынуждает* A, если P вынуждает $\sim\sim A$.

Таким образом, если P слабо вынуждает A, то, если P входит в полную последовательность $\{P_n\}$, A должно быть истинно в N, ибо никакое $Q \supseteq P$ не может вынуждать $\sim A$. Ясно, что если P вынуждает A, то P слабо вынуждает A.

Лемма. *В N, если $x \in N$, $x \subseteq \omega$, то существует конечное число $b_1 = a_{i_1}, \ldots, b_m = a_{i_m}$, таких, что x конструктивно относительно $b_1, \ldots, b_m$.*

Доказательство. Мы говорим, что x *конструктивно относительно* $b_1, \ldots, b_m$, если, коль скоро мы принимаем определение $M_0 = \omega \cup \{b_1, \ldots, b_m\}$, $M_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta\right)'$, то для некоторого α $x \in M_\alpha$. Пусть $x = \bar{c}$, и допустим, что G_m сохраняет c неизменным [2]). Для каждого P пусть $\bar{P}$ обозначает множество тех условий из P, в которые входят лишь a_i с $i \leqslant m$. Мы утверждаем, что если P вынуждает $n \in c$, то $\bar{P}$ слабо вынуждает $n \in c$.

[1]) Именно, $g(n)$ представляет собой упорядоченную n-ку элементов T, и так как эти члены попарно различны, то теперь можно располагать их для $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, ... в естественном порядке, устраняя повторяющиеся, и получить таким образом бесконечную последовательность элементов T.

Пусть D_n — только что упомянутые множества n-ок. Всякую n^2-ку можно спроектировать на n-ку ее первых членов и таким путем получить отображение множества $\bigcup D_{n^2}$ на $\bigcup D_n$. Так как оба множества дедекиндовы, то первое из них имеет мощность меньшую, чем второе. Итак: при отсутствии АВ можно однозначно отобразить одно множество на другое, имеющее бо́льшую мощность, чем первое. Это было обнаружено А. Леви (Levy A., On models of set theory with Urelements, *Bull. Acad. Polon. Sci.* ser. math. 8 (1960), № 7, 463—465) для моделей типа Мостовского, а с помощью взаимно однозначных отображений D_n на B_n переносится и на множество действительных чисел (на что впервые было указано в работе Вопенки и Хаека (Hajek P., Vopěnka P., Some permutation submodels of the model V., *ibid.*, **14** (1966), № 1, 1—7). — *Прим. перев.*

[2]) То есть $\Pi(c) = c$ для любой $\Pi \in G_m$. (В подлиннике G_m keeps c fixed.} — *Прим. перев.*

В противном случае некоторое P', такое, что $P' \supseteq \bar{P}$, вынуждает $\sim n \in c$. Ясно, что существует такое $\pi \in G_m$, что $\pi(P')$ и P совместимы [1]). Тогда $\pi(P')$ вынуждает $\sim n \in c$, а следовательно, $P \cup \pi(P')$ вынуждает оба суждения $n \in c$ и $\sim n \in c$, что невозможно.

Функция h, переводящая любое $\bar{P}$ в множество всех таких n, что $\bar{P}$ слабо вынуждает $n \in c$, выразима в M. Ясно, что x теперь легко строится из h и $a_1, \ldots, a_m$, ибо эти a_i определяют, какие $\bar{P}$ входят в полную последовательность [2]).

Последняя лемма допускает обобщение на те случаи, когда x является произвольным подмножеством ординала. Мы включили ее, просто чтобы показать, как ведут себя a_i независимо друг от друга. Однако в приложениях нам понадобится несколько иная ее форма.

Каждому элементу c параметрического пространства S мы сопоставим конечное множество a_n, а именно тех a_n, от которых этот c «существенно» зависит. Это определение очевидно для $c \in S_0$ или для $c \in S_1$. Элементу V

[1]) В самом деле, P' и P могут оказаться несовместимыми только из-за того, что некоторые $n \in a_j$ входят в одно из них, тогда как $\sim n \in a_j$ — в другое; в силу $P' \supseteq \bar{P}$ и совместимости любых двух элементов P', при этом должно быть $j > m$, а потому некоторая перестановка $\Pi \in G$ переводит P' в такое $\Pi(P')$, которое совместимо с P. — *Прим. перев.*

[2]) «Легко строится из» — в подлиннике «is easily constructed from» а «конструктивное относительно $b_1, \ldots, b_m$» — «constructible from $b_1, \ldots, b_m$», или «то, которое можно построить из $b_1, \ldots, b_m$». Но здесь x легко строится из $h, a_1, \ldots, a_m$; впрочем, это присутствие h означает лишь, что в построении x из $a_1, \ldots, a_m$ участвует h.

Для данного x и c число m можно выбрать по предыдущей лемме и тем самым определить $\bar{P}$ для всех P. Только эти $\bar{P}$ (в силу доказанного в тексте утверждения) существенны для слабого вынуждения, и, поскольку P входят в полную последовательность, для установления истинности $n \in \bar{c}$, т. е. $n \in x$ в N. Аналогичное утверждение о P и $\bar{P}$ можно доказать и для вынуждений $\sim n \in c$ (и даже если P вынуждает $\sim n \in c$, то и $\bar{P}$ вынуждает $\sim n \in c$). Таким образом, x определяется не через полную последовательность $\{P_n\}$, а через соответствующую ей последовательность $\{\bar{P}_n\}$, определяемую лишь этикетками $a_0, \ldots, a_m$ (т. е. условиями $n \in a_i$ и $\sim m \in a_j$, где $i, j \leqslant m$). Такое определение выразимо в M через множества $a_0, \ldots, a_m$ (так же как в модели N из § 6, всякое множество конструктивно относительно a). — *Прим. перев.*

сопоставляется $\emptyset$. Теперь, если этикетка $c \in S_\alpha$ и соответствует формуле, в которую входят лишь этикетки $c_1, \ldots, c_n$, где $c_i \in \bigcup\{S_\beta \mid \beta < \alpha\}$, то мы сопоставим этикетке c множество $\varphi(c)$, являющееся объединением тех конечных подмножеств $\varphi(c_i)$ множества V, которые уже сопоставлены этикеткам c_i. Если B — конечное подмножество V, то мы рассмотрим все те этикетки c, для которых $\varphi(c) = B$, и обозначим этот класс посредством $D(B)$. Индукцией по α мы убеждаемся в том, что на $S_\alpha \cap D(B)$ можно естественным путем определить полное упорядочение. Пусть $\bar{D}(B)$ обозначает класс всех соответствующих множеств в N; тогда мы видим, что $\bar{D}(B)$ есть класс, определимый через V и имеющий полное упорядочение, определимое через V. Это верно потому, что то построение, посредством которого мы определили N, может быть описано в N с помощью одного только множества V. Далее, N является объединением всех $\bar{D}(B)$. Если бы множества B можно было вполне упорядочить, мы получили бы и полное упорядочение на N. Последнее, конечно, невозможно. Однако естественное упорядочение действительных чисел индуцирует некоторый *порядок* на множестве всех B, и теперь мы постараемся заключить отсюда, что можно определить порядок на всем N. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для каждого x в N существует такое B, что $x \in \bar{D}(B)$, и если $x \in \bar{D}(B')$, то $B \subseteq B'$.*

Мы наметим доказательство. Пусть $c_1 \in D(B_1)$, $c_2 \in D(B_2)$, и допустим, что P_0 вынуждает $c_1 = c_2$. Пусть $B = B_1 \cap B_2$. Мы покажем, что для некоторого $c_3 \in D(B)$ P_0 слабо вынуждает $c_1 = c_3$. На протяжении этого доказательства мы будем рассматривать лишь такие P, что $P \supseteq P_0$. Пусть $\bar{P}$ обозначает часть P, относящуюся к элементам $B_1 \cap B_2$. Если $c' \in D(B')$ и P вынуждает $c' \in c_1$, то точно такое же доказательство, как в предыдущей лемме, показывает, что если Q является объединением $\bar{P}$, P_0 и относящейся к элементам B' части P, то Q слабо вынуждает $c' \in c_1$. Мы теперь можем дать другое определение c_3 множества $\bar{c}_1$. Именно, это множество состоит из всех $\bar{c}'$, где при надлежащем α

$c' \in \bigcup\{S_\beta \mid \beta < \alpha\}$ и c' удовлетворяет следующему условию. Если $c' \in D(B')$, то пусть $F(c')$ — множество всех вынуждающих условий Q, слабо вынуждающих $c' \in c_1$ и притом являющихся объединением P_0 и условий, относящихся только к элементам $B' \cup B$. Тогда c_3 состоит из взятого по всем B' объединения таких $c' \in D(B')$, что некоторый элемент $F(c')$ содержится в элементе полной последовательности, определяющей N. Можно проверить, что в силу этого определения $c_3 \in D(B)$. Это предоставляется читателю в качестве упражнения.

Теперь для каждого x из N пусть B — минимальное конечное подмножество множества V, для которого $x \in D(B)$. Для всех x, соответствующих одному и тому же B, имеется определимое полное упорядочение. Так как теперь получено однозначное отображение x на B, то порядок на множествах B индуцирует определимый порядок на N. Результатом является следующая теорема, принадлежащая Леви и Халперну [17].

Теорема. *В N имеется определимый порядок для всех множеств, в котором одно лишь множество T* [1]) *встречается в качестве константы.*

Таким образом, из того факта, что каждое множество может быть упорядочено, не следует, что континуум может быть вполне упорядочен.

Пользуясь аналогичными идеями, можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Если A — множество действительных чисел в N, которое может быть вполне упорядочено, то для некоторого n все элементы A конструктивны относительно $a_0, \ldots, a_n$.*

Из нашего последнего доказательства следует, что любое множество не только может быть упорядочено, но и находится во взаимно однозначном соответствии с подмножеством $\alpha \times C$, где α — некоторый ординал, а C — континуум. Другой (до сих пор неопубликованный) результат об относительной силе различных

[1]) В подлиннике V. — *Прим. перев.*

следствий AB принадлежит Халперну и Лёйхли и состоит в том, что AB не следует из теоремы о простых идеалах (утверждающей, что каждая булева алгебра содержит нетривиальный простой идеал).

Следующий результат мы помещаем здесь за неимением лучшего места.

Теорема. *Пусть N обозначает модель, полученную в § 6 присоединением одного генерического множества $a \subseteq \omega$. Тогда, хотя AB имеет место, никакая формула, не содержащая констант из N, не определяет полного упорядочения.*

Доказательство. Мы здесь приведем лишь эскиз доказательства [7]. Пусть a — предел полной последовательности. Если для некоторого a' множество $(a' - a) \swarrow \mathrm{U}\,(a - a')$ конечно, то a' — снова предел некоторой полной последовательности. Действительно, если дано любое суждение A, то суждение о том, что некоторый начальный сегмент a' вынуждает A или вынуждает $\sim A$, само является суждением, которое должно вынуждаться некоторым начальным сегментом a, откуда, очевидно, следует, что a' — генерическое множество. Пусть R — множество всех подмножеств ω, отличающихся от a только конечным числом натуральных чисел. Если A — формула, вполне упорядочивающая N, то пусть a' — выбираемый ею элемент R, и допустим, что P вынуждает, что a' — выбранный ею элемент R. Пусть a_0 — элемент R, согласованный с a во всех натуральных числах, упомянутых в P, но $a_0 \neq a$, и пусть a_0' отличается от a_0 таким же образом, как a' отличается от a. Тогда предыдущее замечание показывает, что если полную последовательность изменить так, что a заменится на a_0, то модель N, а также множество R и формула A останутся неизменными. Но теперь a_0' выбирается из R посредством A — противоречие.

Мы теперь приведем пример, показывающий, что AB может нарушаться даже для пар. Пусть S_0 — множество всех натуральных чисел, S_1 — генерические множества a_{ij}, b_{ij}, которые в конечном счете окажутся подмноже-

ствами ω[1]). Множество S_2 состоит из множеств U_n, V_n, таких, что в конечном счете $U_n=\{a_{n1}, a_{n2}, \ldots\}$, $V_n=\{b_{n1}, b_{n2}, \ldots\}$. S_3 состоит из символов $\{U_n, V_n\}$, S_4 состоит из символов $\{n, \{U_n, V_n\}\}$, а S_5 — из одного символа V[2]) такого множества, элементами которого являются в точности все множества из S_4. Вынуждающие условия состоят из конечного числа не противоречащих друг другу условий вида $n\in a_{ij}$, $n\in b_{ij}$, $\sim n\in a_{ij}$ или $\sim n\in b_{ij}$, а также из очевидных условий, обеспечивающих, что элементы $S_2 \ldots, S_5$ имеют вид, описанный выше. Пусть G — группа таких перестановок a_{ij}, b_{ij}, что

i) $\pi(a_{ij})=a_{ij}$, $\pi(b_{ij})=b_{ij}$ для всех $i>n$, где n — некоторое натуральное число;

ii) для каждого i π отображает множество U_i на U_i, а V_i — на V_i или отображает множество U_i на V_i, а V_i — на U_i.

Пусть G_m — группа всех таких π, что $\pi(a_{ij})=a_{ij}$, $\pi(b_{ij})=b_{ij}$ при $i\leqslant m$. Теперь, рассуждая в точности так же, как прежде, можно показать, что любое c в S может различать U_i и V_i только в конечном числе случаев. Если N обозначает модель, полученную из какой-нибудь полной последовательности, то имеет место

Теорема. *В N счетная* АВ *нарушается для пар элементов множества* $P(P(\omega))$.

Изложенные методы могут быть направлены на получение многих других результатов, касающихся взаимоотношения различных форм АВ, и мы отсылаем читателя к литературе по поводу новейших результатов этого вида. Один из наиболее интересных результатов принадлежит Р. Соловею (и до сих пор не опубликован): можно построить такие модели N, в которых счетная АВ имеет место и все же каждое множество

[1]) Точнее такими подмножествами окажутся $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_{ij}$ (ср. сноски 4 на стр. 241, 1 на стр. 243 и 2 на стр. 264). — *Прим. перев.*

[2]) В подлиннике S_5 отождествляется с этим символом (S_5 is the one set symbol V), что не соответствует общему описанию моделей N в § 7. Подразумевается, что при $5<\alpha<\alpha_0$ множества S_α определяются, как в § 7, причем среди их элементов уже нет элементов G. — *Прим. перев.*

действительных чисел измеримо по Лебегу. Построение Соловея использует идею изменения мощностей, которая будет изложена в следующем параграфе.

§ 10. Модели N с изменением мощностей

В этом параграфе мы покажем, как можно получить модель N, в которой имеет место явление, совершенно отличное от рассмотренных. Пусть α_0 — фиксированный бесконечный ординал в M. Пусть S_0 состоит из всех пар $\langle n, \alpha\rangle$, где n — натуральное число, а $\alpha<\alpha_0$, а также из тех множеств, которые очевидным образом нужны для того, чтобы множество S_0 было транзитивным. S_1 будет состоять из одного-единственного генерического множества T, а S_α при $\alpha>1$ определяются обычным образом с помощью формул, в которых квантификация происходит по предыдущим S_β, $\beta<\alpha$. Вынуждающие условия P состоят теперь каждое из конечного числа пар вида $\langle n_i, \alpha_i\rangle$, где $\alpha_i<\alpha_0$ и $n_i\neq n_j$, $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$. Любое такое P вынуждает в точности суждения $\langle n_i, \alpha_i\rangle\in T$. Пусть N — возникающая при этом модель. Ясно, что T задает в ней взаимно однозначное отображение ω в α_0. В действительности оно отображает ω на α_0, ибо для любого данного $\beta<\alpha_0$ ясно, что никакое P не может вынуждать невхождение β в область этого отображения. Таким образом, в N ординал α_0 становится счетным. Если мы применим этот прием с $\alpha_0=\aleph_1$, то можно будет доказать, что $\aleph_1$ (из M) станет счетным в N, и вообще $\aleph_{n+1}$ из M превратится в $\aleph_n$ в N [1]). (Это последнее утверждение доказывается аналогично тому, как в § 8 было доказано, что мощности не менялись, но с учетом того, что теперь возможно существование $\aleph_1$ попарно несовместимых вынуждающих условий.) Как всегда в наших построениях [2]) моделей, в N не вводится никаких новых ординалов [3]), а следовательно, и никаких новых

[1]) Последнее, конечно, только при $n>0$ (n — натуральное число). — *Прим. перев.*

[2]) Ср. сноску 4 на стр. 240. — *Прим. перев.*

[3]) Точнее классы ординалов моделей M и N совпадают, являясь одним и тем же ординалом в универсуме. В предыдущих параграфах этот ординал обозначался через α_0, но теперь обозначение α_0 приобрело новый смысл, указанный в этом абзаце текста. — *Прим. перев.*

конструктивных множеств. Выбирая $\alpha_0=\aleph_1$, мы получаем теорему.

Теорема. *Существует модель N, в которой имеется только счетное множество конструктивных действительных чисел.*

Доказательство. Каждое конструктивное действительное число строится в M некоторым ординалом $\alpha<\aleph_1$.

Этот процесс превращения кардиналов в счетные множества был проведен далее А. Леви и Феферманом [8], которые доказали теорему

Теорема. *Существует такая модель N, что в ней $\aleph_1$ является точной верхней границей для некоторого счетного множества счетных ординалов. Кроме того, в N континуум является объединением счетного множества счетных множеств.*

Доказательство. Мы приведем здесь эскиз довольно сложного доказательства. Идея будет состоять в том, что все кардиналы $\aleph_n$ будут сделаны счетными, а $\aleph_\omega$ превратится в новый $\aleph_1$. Пусть S_0 будет множеством всех пар $\langle n, \alpha\rangle$, $\alpha<\aleph_\omega$, вместе с теми множествами, которые очевидным образом нужны для того, чтобы S_0 было транзитивным. Теперь мы намерены перечислить те множества, которые делают $\aleph_n$ счетными. Если бы мы просто сделали это, а затем начали наш обычный процесс, то мы тогда получили бы в N множество, дающее взаимно однозначное соответствие между $\aleph_\omega$ и $\aleph_0$. Чтобы избежать этого, мы поступим следующим образом. Пусть H — группа всех перестановок ω, оставляющих неподвижными все натуральные числа, за исключением конечного числа их, и пусть e — единица группы H. При $1\leqslant n<\omega$ S_n состоит из этикеток для генерических множеств, которые мы будем обозначать посредством πA_n, где π пробегает всю группу H. В конечном счете каждое множество πA_n станет [1]) взаимно однозначным

[1]) Ср. сноски 4 на стр. 241, 1 на стр. 243, 2 на стр. 264 и 1 на стр. 266. — *Прим. перев.*

отображением $f_{\pi, n}$ множества ω на $\aleph_n$, и притом таким образом, что $f_{\pi, n}(k) = f_{e, n}(\pi k)$. Итак, каждое S_n содержит целое семейство взаимно однозначных отображений ω на $\aleph_n$, и все они при этом входят столь симметрично, что нет никакой возможности выбрать по одному из них для каждого n. Мы будем писать A_n вместо eA_n. Чтобы получить вторую часть теоремы, нам надо будет сделать еще один шаг, прежде чем приступить к нашей обычной процедуре собирания. Пусть S_ω состоит из этикеток для следующих множеств:

i) для каждого n $B_n = \{\pi A_n \mid \pi \in H\}$.

ii) $T = \{\langle 1, B_1\rangle, \langle 2, B_2\rangle, \ldots\}$ и других множеств, которые очевидным образом нужны для того, чтобы S_ω было транзитивным.

При $\alpha > \omega$ мы определяем S_α как множество всех этикеток для формул, в которых квантификация происходит по предыдущим S_β, $\beta < \alpha$[1]). Каждое вынуждающее условие P состоит из конечной последовательности $Q_1, \ldots, Q_n$, где каждое Q_i является конечным множеством пар $\langle m_j, \alpha_j\rangle$, в которых $\alpha_j < \aleph_j$ и $m_j \neq m_k$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ при $j \neq k$. Любое такое P вынуждает $\langle m_j, \alpha_j\rangle$ принадлежать eA_i, а $\langle \pi m_j, \alpha_j\rangle$ принадлежать πA_i для всех i и j. Кроме того, P вынуждает все остальные очевидные соотношения между элементами S_α при $\alpha \leqslant \omega$. Для иллюстрации свойств симметрии мы определяем G как слабое прямое произведение ω экземпляров группы H, т. е. если $\pi \in G$, то $\pi = \{\pi_1, \ldots\}$, где $\pi_i \in H$ и для некоторого n $\pi_i = e$ при $i > n$. Если $\pi \in G$ $\pi = \{\pi_1, \ldots\}$, то π действует на S следующим образом: $\pi(\pi' A_i) = \pi_i \pi' A_i$, и затем действие G очевидным образом распространяется на все S. Действие G сохраняет неизменным каждое B_n. Ясно, что G сохраняет неизменным каждое множество S_α. Пусть G_m обозначает группу всех $\pi = \{\pi_1, \ldots\}$, в которых $\pi_i = e$ при $i \leqslant m$. Снова можно доказать, что для каждого c существует такое m, что G_m сохраняет c неизменным. G действует на условия P, переводя каждое $\langle k, \alpha\rangle$ из Q_i в $\langle \pi_i k, \alpha\rangle$. Кроме того, G очевидным обра-

[1]) Конечно, это означает, что квантификация в этих формулах происходит по $\bigcup \{S_\beta \mid \beta < \alpha\}$; кроме того, предполагается, что все входящие в них этикетки принадлежат тому же множеству $\bigcup \{S_\beta \mid \beta < \alpha\}$. — *Прим. перев.*

зом действует на суждения, и снова можно доказать, что P вынуждает A, если πP вынуждает πA.

Ясно, что если мы определим ранг множества $X_\alpha = \mathrm{U}\{S_\beta \mid \beta<\alpha\}$ посредством надлежащего c, то окажется, что для любого α существует такое $c \in S$, что $\bar{c}=\alpha$ независимо от выбора полной последовательности [1]). Кроме того, c будет инвариантным относительно G [2]). А так как каждое y из M строится некоторым α, мы видим также, что можно получить такое c, для которого $\bar{c}=y$ независимо от выбора полной последовательности, и G оставляет это c инвариантным. Это следует из уже упомянутого общего принципа, что абсолютные построения могут быть заданы некоторым c при условии, что можно найти границу для таких α, что это построение можно выполнить в некотором X_α.

Лемма. *Если $x \in N$ и все элементы x входят в M, то для некоторого n множество x конструктивно относительно $A_1, \ldots, A_n$.*

Доказательство. Пусть $x=\bar{c}_0$, и допустим, что G_m сохраняет c_0 неизменным. Тогда для каждого $y \in M$ существует такое c, инвариантное относительно G, что $\bar{c}=y$. Если какое-нибудь P вынуждает $c \in c_0$, то можно доказать, что часть P, относящаяся только к A_i, $i<m$, уже слабо вынуждает $c \in c_0$. Действительно, в противном случае можно, применяя G_m, найти два совместимых вынуждающих условия, вынуждающих противоположные суждения. Итак, ввиду того что слабое вынуждение выразимо в M, нам достаточно знать только $A_1, \ldots, A_m$ для того, чтобы полностью определить x, т. е. x конструктивно относительно $A_1, \ldots, A_m$. Это доказательство по существу совпадает с одним из доказательств, изложенных в предыдущем параграфе.

Лемма. *Если α, β — ординалы и $\bar{\bar{\alpha}} \geqslant \bar{\bar{\beta}}$ в N, то для некоторого n $\bar{\bar{\alpha}} \cdot \aleph_n \geqslant \beta$ в M.*

---

[1]) Именно, то c, которое является рангом X_α. Ср. § 6, стр. 233. — *Прим. перев.*

[2]) То есть $\pi c = c$ для всякого $\pi \in G$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть f из N отображает α на β. Тогда f является множеством упорядоченных пар ординалов и предыдущая лемма применима, а потому f фактически зависит только от $A_1, \ldots, A_m$ для некоторого m. Пусть P_0 вынуждает f быть однозначным. Тогда, если $P \supseteq P_0$ и $\gamma<\alpha$, то может существовать не более одного ординала, который P слабо вынуждает быть значением $f(\gamma)$. Так как существенную роль играет лишь та часть P, которая относится к $A_1, \ldots, A_m$, то мы видим, что область f содержится в некотором множестве, мощность которого в M является самое большее мощностью α, умноженной на число тех P, которые относятся только к $A_1, \ldots, A_m$, а это число, будучи вычислено в M, есть $\aleph_n$ для некоторого n, и лемма доказана.

Следствие. *$\aleph_\omega$ из M несчетно и равно $\aleph_1$ в N.*

Доказательство. В силу леммы $\aleph_\omega$ несчетно в N, а так как A_n делает $\aleph_n$ счетным, $\aleph_\omega$ оказывается первым несчетным ординалом в N.

Теорема. *В N $\aleph_1$ является точной верхней границей для счетного множества счетных ординалов.*

Доказательство. В силу $M \subseteq N$, $\aleph_\omega$ из M все еще является в N пределом $\aleph_n$ из M.

В силу одной из наших лемм, каждое действительное число x в N конструктивно относительно $A_1, \ldots, A_n$ для некоторого n. Пусть C_n — множество всех таких действительных чисел. Ясно, что C_n не меняется при замене A_i на $\pi_i A_i$. Мы докажем, что C_n счетно в N. Пусть $x=\bar{c}$, где G_n сохраняет c неизменным. Пусть R_k для каждого k будет множеством всех вынуждающих условий, относящихся только к $A_1, \ldots, A_n$ и слабо вынуждающих $k \in c$. Нетрудно видеть, что эти множества R_k в своей совокупности определяют x, коль скоро $A_1, \ldots, A_n$ рассматриваются как фиксированные [1]). Так как множества R_k входят в M, их мощность легко вычисляется в M и оказывается не превосходящей $\aleph_{n+2}$, а этот кар-

[1]) Ср. доказательство леммы на стр. 270. Существенно также, что это определение x через совокупность R_k выразимо в N (ср. сноску 2 на стр. 262). — *Прим. перев.*

динал оказывается счетным в N, так что и множество C_n счетно в N. Далее, C_n можно определить также как множество всех действительных чисел, конструктивных относительно $B_1, \ldots, B_n$. Ввиду того что множество $\{\langle 1, B_1\rangle, \ldots, \langle n, B_n\rangle, \ldots\}$ входит в N, мы можем занумеровать множества C_n в N, и мы доказали теорему.

Теорема. *В N континуум является счетным объединением счетных множеств.*

Пусть x — какое-либо вполне упорядоченное множество действительных чисел в N. Допустим, что G_n сохраняет неизменными x и полное упорядочение x. Тогда, если y является действительным числом в x, соответствующим ординалу α, то обычное рассуждение, основанное на симметрии, показывает, что ввиду инвариантности α относительно G условие $m \in y$ (при рассмотрении $y \subseteq \omega$ [1])) определяется через $A_1, \ldots, A_n$. Таким образом, все элементы x конструктивны относительно $A_1, \ldots, A_n$. Как мы уже видели [2]), отсюда следует счетность множества x [3]). Итак, доказана

Теорема. *В N только конечные и счетные множества действительных чисел могут быть вполне упорядочены.*

Этот процесс превращения кардиналов в счетные ординалы может быть продолжен. Вообще описанный выше процесс можно повторить в применении к любому кардиналу. Иначе говоря, пусть β — произвольный кардинал в M, и для каждого $\alpha < \beta$ пусть S_α содержит множество, делающее α счетным, а также все конечные перестановки этого множества, как это делалось выше. На стадии S_β мы начинаем наш обычный процесс собирания и образования новых множеств посредством формул, не

[1]) Имеется в виду, что континуум рассматривается как $P(\omega)$, так что $y \subseteq \omega$. В подлиннике ошибка: вместо $m \in y$ и $y \subseteq \omega$ стоит $m \in x$ и $x \subseteq \omega$. — *Прим. перев.*

[2]) См. доказательство счетности C_n в доказательстве предыдущей теоремы. — *Прим. перев.*

[3]) Конечно, здесь используется также счетность всякого бесконечного подмножества счетного множества. Следовало бы добавить, что x может оказаться конечным, что и сделано при переводе формулировки последней теоремы этого параграфа. — *Прим. перев.*

вводя никакого множества, аналогичного использованному выше $\{\langle 1, B_1\rangle, \ldots\}$. Если $\beta=\aleph_\tau$, где τ — предельный ординал, мы можем доказать, что только конечные и счетные множества действительных чисел могут быть вполне упорядочены. Однако допустим, что мы желаем сохранить этот факт и вместе с тем получить счетную АВ. Ввиду счетности каждого S_α при $\alpha<\beta$ это значит, что на стадии S_α мы должны ввести также полное упорядочение предыдущих $S_{\alpha'}$, где $\alpha'<\alpha$. Итак, мы, с одной стороны, делаем все $\alpha<\beta$ счетными, а с другой — в то же самое время мы вполне упорядочиваем так много множеств, что становится весьма правдоподобной возможность собрать вместе те множества, которые при $\alpha<\beta$ делают α счетными, и показать, таким образом, счетность самого β в N. Оказывается, что этого можно избежать, если выбрать β достаточно большим, например недостижимым.

§ 11. Устранение СМ

Если не заботиться о построении моделей, то результаты о независимости, изложенные в этой главе, могут быть получены чисто синтаксическим путем, без помощи СМ, а фактически даже целиком внутри элементарной теории чисел. Конечно, при этом получаются только результаты об относительной непротиворечивости, как это было объяснено в гл. III. Один из возможных путей состоит в следующем: мы полностью отказываемся от модели M и рассматриваем понятие вынуждения без каких-либо ограничений на использованные ординальные индексы. Каждому суждению A, ограниченному или неограниченному, можно сопоставить другое суждение, утверждающее, что P вынуждает A. (Сейчас суждения рассматриваются как цепочки символов, в которых могут встречаться ординалы.) Это родственно гёделевскому сопоставлению суждения A_L каждому суждению A. Теперь можно доказать чисто синтаксически, что если A — логически доказуемая формула, то всякое P слабо вынуждает A. Точнее говоря, можно указать сопоставление каждому доказательству формулы A доказательства суждения о том, что всякое P слабо вынуждает A. Кроме того, из приведенных выше доказательств соблюдения

аксиом в N теперь можно получить чисто формальные доказательства того, что всякое P слабо вынуждает аксиомы. Можно также доказать все основные леммы о вынуждении [1]). Можно также доказать, что всякое P слабо вынуждает $\sim$КГ, $\sim V=L$ или любое другое из рассмотренных выше суждений [2]). Так, если $ZF+$АВ$+$ $+\sim$КГ приводит к противоречию, то можно показать, что некоторое P вынуждает противоречие [3]), что противоречит одному из основных свойств вынуждения. Хотя такой взгляд на вещи может показаться весьма скучным способом устранения моделей, пусть будет упомянуто, что в нашем первоначальном подходе к вынуждению именно этот синтаксический взгляд был преобладающим, а модели были введены позднее, так как выяснилось, что они упрощают изложение [4]). Особая роль счетности множества M здесь полностью устранена [5]).

---

[1]) Автор здесь говорит чересчур кратко. Конечно, лемма 5 из § 4 теперь отпадает, ибо отпадают и модели N. — *Прим. перев.*

[2]) От каждой из ранее рассмотренных моделей при этом сохраняется само понятие вынуждении. Это утверждение автора об отдельных суждениях типа $\sim$КГ, $\sim V=L$ и т. п. относится к соответствующим конкретным понятиям вынуждения (получаемым при фиксации U, $\prec$ и Ψ в определении из § 7 этой главы), тогда как предыдущие утверждения были доказуемы для общего поиятия вынуждения. — *Прим. перев.*

[3]) Следовало бы заметить, что, во-первых, всякое доказательство суждения может быть преобразовано к такому виду, в котором участвуют только суждения, а во-вторых, что если P слабо вынуждает A и P слабо выиуждает $A\to B$, то P слабо вынуждает B. Кроме того, при этом сперва будет доказано лишь, что некоторое (а фактически даже, что всякое) P слабо вынуждает противоречие $B\&\sim B$, т. е. что P вынуждает $\sim\sim(B\&\sim B)$, откуда затем нетрудно получить, что некоторые P' вынуждают $B\&\sim B$. — *Прим. перев.*

[4]) Этим можно объяснить, что автор не до конца рассмотрел вопросы, отиосящиеся к доказательству леммы об абсолютности из § 5. Следует заметить, что в его первой публикации [2] о его важнейших открытиях уже рассматривались модели и проблема формализации доказательств его утверждеиий, относящихся к абсолютиости, ощущалась довольно остро. — *Прим. перев.*

[5]) Следует напомнить, что при построении модели N счетность M проявлялась главным образом при построеиии полных последовательностей, которые теперь не используются. Однако очевидно, что в § 10 использовалась также счетность $\aleph_1$ и даже $\aleph_\omega$ в модели M. Автор не указывает, как этот метод устранения СМ применим к результатам, изложенным в § 10. — *Прим. перев.*

Другой способ устранения СМ, вероятно, окажется более доступным при первом знакомстве с этим предметом [1]). Он состоит в следующем: аксиома СМ была использована только для построения счетной модели. Для доказательства непротиворечивости $ZF+\text{АВ}+\sim\text{КГ}$ достаточно доказать, что любое конечное множество аксиом $ZF+\text{АВ}+\sim\text{КГ}$ образует непротиворечивую систему. Чтобы доказать в N это конечное число суждений, требуется лишь конечное множество шагов, и, следовательно, при этом только для конечного числа аксиом ZF будет использовано их соблюдение в M. Путем анализа изложенного выше доказательства можно явным образом установить, какие именно аксиомы при этом используются [2]). Но в гл. II, § 8 мы доказали в ZF, что существуют модели [3]) M для любого конечного множества аксиом. Итак, мы можем работать с такой моделью M и избежать употребления аксиомы СМ [4]).

[1]) В частности, он применим и к результатам из § 10. — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, перечень этих аксиом зависит от того, какие именно аксиомы ZF включаются в рассматриваемую конечную систему. При рассмотрении аксиомы подстановки в § 6 фуикции f_r, g_r и h зависели от рассматриваемой формулы A, поэтому их можно было бы обозначать f_r^A, g_r^A и h^A; при этом r пробегало коиечное число m значений, зависящих от A. Нахождение различных Sup при этом опиралось иа аксиомы подстаиовки в M, и для каждой A можно таким путем указать конечный список аксиом подстановки, использоваиных в этом доказательстве. Еще одна, зависящая от A, аксиома подстановки была использована для получении β_0 при проверке аксиом подстановки в N. Во всех остальных случаях, когда в предыдущих параграфах использовались аксиомы подстаиовки в M, соответствующую формулу A при подробной формализации придется указать и она уже ие будет зависеть от выбора упомянутой конечиой подсистемы ZF. Всего, таким образом, будет использоваио соблюдеиие в M лишь коиечиого числа аксиом ZF. — *Прим. перев.*

[3]) И притом счетные. Так как отношение «=» рассматривалось при этом как абсолютиое, последняя теорема из § 5 гл. II к ним применима, так что можно считать эти модели M также транзитивными; см. также сиоску 2 иа стр. 205. — *Прим. перев.*

[4]) Имеино, эта M удовлетворяет всем аксиомам, понадобившимся для рассмотрения произвольио выбранной конечиой подсистемы $ZF+\text{АВ}+\sim\text{КГ}$ (и аналогично для $\sim\text{АВ}$ или других суждений, независимость которых была доказана выше с помощью СМ). Поэтому можно пользоваться этой M совершеино так же, как выше моделью M для ZF.

§ 12. Вывод АВ из ОКГ

Мы покажем теперь, что из ОКГ следует АВ. Так как мы не принимаем АВ, нам следует проявлять особую аккуратность при выборе определений для различных понятий, относящихся к мощности. Для двух множеств A и B мы будем писать $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ или $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$, если существует взаимно однозначное отображение A на или в B. Мы будем писать $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$, если $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$. В теореме Кантора — Бернштейна не используется АВ, а поэтому мы здесь признаем, что если $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$, то $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. ОКГ мы теперь формулируем следующим образом.

При формализации этого доказательства непротиворечивости некоторые затруднения возникают в связи с тем, что для неограниченных формул ZF понятие вынуждения не оказалось формализуемым в ZF, так что изложенное выше понятие полной последовательности (а вместе с тем и модели N) не удается, таким образом, выразить в ZF. Но (пользуясь одним замечанием автора на стр. 225 об определимости в ZF) можно при построении модели N заменить все неограниченные формулы (о соблюдении которых в этой модели идет речь) ограниченными формулами с индексом α_0 при кванторах, где α_0 имеет смысл, указанный в § 2 этой главы. Тогда отношение $F(P, A)$ из первой леммы § 5 этой главы распространяется и на тот случай, когда $\operatorname{rank} A=(\alpha_0, t, r)$ — и таким путем формализуется в ZF общее понятие вынуждения, а затем уже и полиой последовательности и любой рассмотренной выше модели N.

Это построение модели для любого конечного фрагмента (системы ZF+АВ+$\sim$КГ и т. п.) дает перевод всякого доказательства противоречия в этом фрагменте в доказательство противоречия в ZF. Такие доказательства относительной непротиворечивости всегда формализуемы в элементарной теории чисел. Наличие переменного конечного списка аксиом ZF этому не препятствует, ибо в сноске 2 на стр. 275 этот список играл роль параметра, участвующего в этой формализации, а кроме того, он входит лишь (в связи с применением теоремы Лёвенгейма — Скулема из гл. II, § 8) в суждение о доказуемости в ZF конъюнкции аксиом этого списка, но и такое суждение превращается путем гёделевской арифметизации в арифметическую теорему, в которой этот список является параметром. Аналогично обстоит дело и с использованной в начале этого абзаца достаточностью рассматривать только конечные подсистемы ZF +АВ+$\sim$КГ и т. п.; в элементарной теории чисел формализуемо доказательство теоремы о том, что любая формальная система непротиворечива, если непротиворечива ее каждая конечная подсистема. Поэтому любое из рассматриваемых здесь относительных доказательств непротиворечивости формализуемо (посредством гёделевской арифметизации) в элементарной теории чисел. — *Прим. перев.*

Если A — бесконечное множество, то не существует такого множества B, что $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{2^A}}$.

Чтобы избежать употребления показателей, мы будем писать $P_0(A)=A$, $P_{n+1}=P(P_n(A))$, где $P(X)$ обозначает множество-степень множества X. Кроме того, мы будем пренебрегать употреблением знака мощности $=$ и писать $X=Y$ при $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$. ОКГ является довольно сильным утверждением о существовании различных отображений, а именно, коль скоро нам дано $A\leqslant B\leqslant P(A)$, то должно существовать взаимно однозначное отображение B на A или B на $P(A)$. По существу это означает, что в нашем распоряжении оказывается так много отображений, что мы можем вполне упорядочить каждое множество. Пусть A — бесконечное множество и мы хотим доказать, что A можно вполне упорядочить. Приводимое здесь доказательство воспроизводит ход доказательства Серпинского [24].

Лемма 1. *Существует такое вполне упорядоченное множество W, что $W\subseteq P_4(A)$ и не имеет места $W\leqslant A$.*

Доказательство. Рассмотрим все вполне упорядочения A или подмножеств A. Ввиду того что любое полное упорядочение A является совокупностью упорядоченных пар элементов A, оно должно принадлежать $P_3(A)$. (Ибо пары принадлежат $P_1(A)$, а упорядоченные пары — множеству $P_2(A)$.) Рассмотрим теперь отношение эквивалентности, состоящее в том, что два вполне упорядочения эквивалентны, если между ними можно установить порядковый изоморфизм. Пусть W — множество всех классов эквивалентности, индуцированное этим отношением. (Таким образом, элементы W являются «порядковыми числами»[1].) Элементы W образуют вполне упорядоченное множество при обычном определении порядка для вполне упорядоченных множеств, приведенном в гл. II. Если $W\leqslant A$, то это должно озна-

[1]) В подлиннике «ordinal numbers»; уместно напомнить, что согласно фон-неймановской теории порядковых чисел, изложенной в § 3 гл. II, «порядковые» числа определялись иначе и назывались «ординалами». — *Прим. перев.*

чать, что W изоморфно одному из полных упорядочений, входящих в W, и, следовательно, имеется порядковый изоморфизм между W и некоторым собственным [1]) начальным сегментом W, что невозможно [2]).

Фактически мы теперь можем ожидать, что W равномощно $P(A)$, так как если верна АВ, то W является множеством всех ординалов мощности меньшей или равной $\overline{\overline{A}}$, а потому это ближайший следующий кардинал, который в силу ОКГ является мощностью множества $P(A)$. Чтобы применить ОКГ, мы сейчас рассмотрим ситуации, возникающие, когда W или некоторое связанное с W множество лежит между X и $P(X)$ для некоторого X. *Сперва мы допустим, что* $2P_i(A)=P_i(A)$ при $0\leqslant i\leqslant 4$. Тогда мы знаем, что $P_3(A)\leqslant W+P_3(A)\leqslant P_4(A)+P_3(A)=P_4(A)$ по допущению [3]). Следовательно, в силу ОКГ, $W+P_3(A)=P_4(A)$ или $W+P_3(A)=P_3(A)$. Для рассмотрения первого случая нам придется доказать следующую простую лемму.

Лемма 2. *Если* X *и* Y *— такие множества, что* $X+Y=P(2X)$, *то* $Y\geqslant P(X)$.

Доказательство. Здесь $2X$ обозначает объединение двух дизъюнктных экземпляров X, например X_1 и X_2. Если f отображает $X\cup Y$ на $P(X_1\cup X_2)=P(X_1)\times P(X_2)$, то образ X, спроецированный на $P(X_1)$, не может

[1]) Ибо тот порядковый тип, который естественно обозначать через $W+1$, также является порядковым типом некоторого полного упорядочения подмножества A. (Если W конечно, это следует из бесконечности A, а если W бесконечно, это следует из совпадения мощности вполне упорядоченных множеств W и $W+1$.) Следовательно, $W+1$ входит в W и определяет W как собственный начальный сегмент W.

В этом изложении термин «порядковый изоморфизм» употребляется иногда для полных упорядочений, иногда для вполне упорядоченного множества W и некоторого полного упорядочения, что не должно вызывать никаких затруднений, так как полное упорядочение однозначно определяет соответствующее вполне упорядоченное множество. — *Прим. перев.*

[2]) См. конец стр. 108 и последнюю сноску на ней. — *Прим. перев.*

[3]) Ибо $P_4(A)+P_3(A)\leqslant 2P_4(A)=P_4(A)$ по допущению. — *Прим. перев.*

накрыть все множество $P(X_1)$, ибо $X_1 < P(X_1)$ [1]), а поэтому если c не входит в эту проекцию, то f должно отображать некоторое подмножество Y на $c \times P(X_2)$, что означает $Y > P(X)$.

Теперь если $W + P_3(A) = P_4(A) = P(2P_3)(A)$, то мы можем заключить по лемме 2, что $W \geqslant P_4(A)$ или ввиду $W \leqslant P_4(A)$ $W = P_4(A)$; следовательно, $P_4(A)$ вполне упорядочено, и ввиду того что A можно погрузить в $P_4(A)$, A вполне упорядочено, и мы у цели. Если $W + P_3(A) = P_3(A)$, то $W \leqslant P_3(A)$, и, повторяя это же рассуждение [2]), мы заключаем, что A вполне упорядочено или $W \leqslant P_2(A)$. Повторяя его еще раз, мы сведем рассмотрение к случаю $W \leqslant P_1(A)$. На этот раз, однако, мы можем по лемме 1 исключить возможность того, что $W = P_0(A) = A$, так что мы должны заключить, что $W = P_1(A)$ и A вполне упорядочено.

Остается устранить ограничение $2P_i(A) = P_i(A)$ при $0 \leqslant i \leqslant 4$. Если мы положим $B = P(A \cup \omega)$, где A дизъюнктно с ω [3]), то легко проверить, что $2P_i(B) = P_i(B)$ при $0 \leqslant i \leqslant 4$. Действительно, $2B = P(A + \omega + 1) = P(A + \omega) = B$, ибо $\omega + 1 = \omega$. Кроме того, $B \leqslant B + 1 \leqslant 2B$, откуда $B + 1 = B$. Теперь $2 \cdot 2^B = 2^{B+1} = 2^B$, и совершенно такое же рассуждение показывает, что $2P_i(B) = P_i(B)$ для всех i. Следовательно, предыдущее рассуждение применимо к B, а потому B можно вполне упорядочить. Так

---

[1]) Неточность: как показано в сноске 4 на стр. 260—261, однозначные отображения с повышением мощности вообще существуют. Однако здесь достаточно сослаться на усиление теоремы Кантора, состоящее в невозможности однозначного отображения X на $P(X)$ (см. сноску 1 на стр. 127). — *Прим. перев.*

[2]) В нем (помнмо $2P_i(A) = P_i(A)$ для $0 \leqslant i \leqslant 4$) было использовано лишь $P_3(A) \leqslant W + P_3(A) \leqslant P_4(A) + P_3(A) = P_4(A)$ и $W \leqslant P_4(A)$. Теперь $W \leqslant P_3(A)$ имеется, и можно применить $P_2(A) \leqslant W + P_2(A) \leqslant P_3(A) + P_2(A) \leqslant P_3(A)$, и т. д. — *Прим. перев.*

[3]) Если A содержит счетное подмножество T, то, представляя T в виде $T_1 \cup T_2$, где $T_1 = T_2 = \omega$, можно получить равномощное A множество $(A - T) \cup T_1$, дизъюнктное с T_2, где $T_2 = \omega$. Если A не содержит никакого счетного подмножества, то $A \cap \omega$ конечно и $\omega - A$ счетно и дизъюнктно с A. Поэтому можно без ограничения общности считать, что A дизъюнктно с ω. — *Прим. перев.*

как A можно естественным образом погрузить в B, то и A можно вполне упорядочить, чем закончено доказательство.

§ 13. Заключение

Мы теперь столкнулись с проблемой — как следует рассматривать такие вопросы, как КГ, в свете этих результатов о независимости. Попытаемся дать обзор некоторых возможных позиций. Финитистская точка зрения, конечно, категорически отбрасывает теорию множеств как связанную с несуществующими функциями, а поэтому она не чувствует, что КГ должна быть «истинной» или «ложной». Вероятно, этот взгляд должны разделять другие логики с несколько более либеральными убеждениями, например интуиционисты. Хотя эта точка зрения может казаться весьма крайней, она может быть изложена вполне действенно и убедительно. Ее суть в том, что теорию множеств можно воспринимать как весьма успешную оболочку, не имеющую ничего общего с «настоящими» множествами, а в лучшем случае описывающую некоторый тип умственного процесса, употребляемого при описании таких настоящих (real) объектов, как натуральные числа. Большой недостаток этой точки зрения состоит в том, что она не объясняет, почему эта фикция оказалась столь успешной и каким образом предположительно неправильная интуиция привела нас к столь замечательной системе. В самом деле, как это следует из гёделевской теоремы о неполноте, мы можем порождать арифметические суждения, доказуемые в теории множеств, но не в системах более низкого уровня. Попросту отбросить эти суждения и навсегда отказаться от любой возможности разрешить их — это столь же неудовлетворительно, как и не знать, что делать с КГ.

Ввиду того что большинство математиков являются в большей или меньшей мере идеалистами в их мнении, что множества действительно существуют и вопросы типа КГ являются осмысленными, мы теперь будем обсуждать указанную проблему именно с этой точки зрения. Можно чувствовать, что наша интуиция множеств неисчерпаема и что в конце концов будет найдена

интуитивно ясная аксиома, которая решит проблему КГ. Одна из таких возможностей — это $V=L$, но она отвергается почти всеми. Введение любых высших аксиом бесконечности не меняет ситуации, ибо читатель может сам убедиться в том, что если модель M обладает очень большими кардиналами, то введение генерических множеств, использованных в доказательстве непротиворечивости $\sim$КГ, не изменит объема (в каком угодно смысле этого термина) кардиналов в N [1]). Создается впечатление, что только аксиомы, ограничивающие характер множеств, как это делает $V=L$, дают какую-либо надежду на доказательство КГ, а эти аксиомы не вполне приемлемы.

Точка зрения, которая, как предчувствует автор, может в конце концов стать принятой, состоит в том, что

---

[1]) В сущности этот вопрос решается теоремами о том, что все изложенные доказательства относительной непротиворечивости сохраняют силу и при замене ZF на ZF с высшими аксиомами бесконечности. Для модели L эта теорема была доказана Гёделем в переиздании его работы [14], 1951 г. (и была упомянута уже в [12]).

Доказательство этих теорем основано на абсолютности понятий «достижимый ординал» в модели L и на том, что, если в модели M настоящей главы имеется недостижимый ординал $\aleph_\tau$, он же является недостижимым и в N (см. сноску 1 на стр. 252). (Первое из этих утверждений легко проверяется и влечет, что недостижимый кардинал универсума должен быть таковым и в L.) Теперь, если для всех $\beta<\alpha$ доказано, что в мире и в L (соответственно в M и в N) имеется β-й недостижимый кардинал In_β, и притом $\mathrm{In}_{\beta, L} \leqslant \mathrm{In}_\beta$, где $\mathrm{In}_{\beta, L}$ есть β-й недостижимый кардинал в L (соответственно $\mathrm{In}_{\beta, N} \leqslant \mathrm{In}_{\beta, M}$, где части неравенства имеют аналогичный смысл), то из существования в мире (соответственно в M) α-го недостижимого кардинала In_α (соответственно $\mathrm{In}_{\alpha, M}$) следует существование α-го недостижимого кардинала и в L (соответственно в N), причем $\mathrm{In}_{\alpha, L} \leqslant \mathrm{In}_\alpha$ (соответственно $\mathrm{In}_{\alpha, N} \leqslant \mathrm{In}_{\alpha, M}$). Поэтому указанные теоремы распространяются и на высшие аксиомы бесконечности типа $\forall\alpha\exists\gamma\,(\gamma=\mathrm{In}_\alpha)$. Правда (см. гл. II, § 7), этими аксиомами не исчерпываются все мыслимые высшие аксиомы бесконечности. Усложнения типа $\forall\alpha\exists\gamma\left(\gamma=\mathrm{In}_{\mathrm{In}_\alpha}\right)$ рассматриваются по существу так же. Но так как вся проблематика этих аксиом плохо поддается формализации, можно «чувствовать», что в этих вопросах всегда будет иметься некоторый остаток, неисследованный имеющимися (на любой стадии изучения) относительными доказательствами непротиворечивости. — *Прим. перев.*

КГ является, *очевидно,* ложной. Вероятно, главная причина, по которой принимают аксиому бесконечности, состоит в ощущении абсурдности той мысли, будто процесс добавления только по одному множеству за раз может исчерпать весь мир. Аналогично обстоит дело с высшими аксиомами бесконечности. Далее, $\aleph_1$ — это множество всех счетных ординалов, и в этом состоит только частный и простейший способ порождения высших кардиналов. Множество C, напротив, порождено совершенно новым и более сильным принципом, а именно аксиомой степени. Нет разумных оснований ожидать, что какое-либо описание большего кардинала, которое пытается построить этот кардинал с помощью идей, происходящих от аксиомы подстановки, окажется когда-либо достаточным для получения C. Таким образом, C больше, чем $\aleph_n$, $\aleph_\omega$, $\aleph_\alpha$, где $\alpha=\aleph_\omega$ и т. д. С этой точки зрения C рассматривается как невероятно большое множество, которое дано нам какой-то смелой новой аксиомой и к которому нельзя приблизиться путем какого бы то ни было постепенного процесса построения. Быть может, последующие поколения научатся яснее видеть эту проблему и выражаться о ней более красноречиво.

Мы закончим эту книгу замечанием, что проблема КГ не относится к числу тех, от которых можно избавиться, исключив из рассмотрения тот тип, которому принадлежат множества действительных чисел. Аналогичную неразрешимую проблему можно поставить, пользуясь только понятием действительного числа. Именно, рассмотрим суждение о том, что каждое действительное число может быть построено счетным ординалом. Вместо счетных ординалов мы можем говорить о надлежащих подмножествах ω. Построение $\alpha \to F_\alpha$ для $\alpha \leqslant \alpha_0$, где α_0 счетно, может быть полностью описано, если только заданы все такие пары $\langle \alpha, \beta \rangle$, что $F_\alpha \in F_\beta$. Это в свою очередь можно закодировать действительным числом, если занумеровать эти ординалы. Таким образом, можно говорить только о действительных числах и все же получить суждение, неразрешимое в ZF. Но нельзя продолжить этот путь и выразить любой из рассмотренных нами теоретико-множественных вопросов как суждение, говорящее только о натуральных числах. В самом деле,

мы можем постулировать как довольно смутный пункт веры, что любое арифметическое суждение разрешимо в «нормальной» теории множеств, т. е. посредством некоторой приемлемой аксиомы бесконечности. Конечно, именно так обстоит дело с суждениями, неразрешимыми по теореме Гёделя, ибо они непосредственно разрешимы в высших системах.

ДОБАВЛЕНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

I. О понятии абсолютности

Автор, по моему мнению, слишком бегло рассматривает вопросы, относящиеся к абсолютности понятий и отношений. В его формулировках встречаются даже неточности, требующие исправления. Слишком бегло рассматривается также вопрос о выразимости в ***ZF*** функций X_r и X' (см. § 3 гл. III), а также отношения $C(u, n, t_1, \ldots, t_k)$ (см. § 4 гл. III). Эти пробелы и неточности сказываются и на изложении основных результатов автора в гл. IV (первая лемма из § 5 и теорема 1 из § 8). В этом добавлении я укажу эти неточности и приемлемый способ восполнения этих пробелов.

§ 1. Я буду говорить об *абсолютности* не только отношений, но и функций. (Автор в § 5 гл. III, стр. 193, также вскользь говорит об абсолютности функций J, K_1, K_2 и N, не определяя этого понятия.) n-ичные отношения $A(x_1, \ldots, x_n)$ при $n=1$ я буду называть *свойствами,* и соответственно я буду говорить об абсолютности свойств. Иногда автор пользуется вспомогательными переменными — α, β ... для ординалов, i, k, ... для натуральных чисел. Предметная область таких переменных определяется свойством (быть ординалом, быть порядковым числом и т. п.), и, если это свойство абсолютно, я буду называть *абсолютной* и соответствующую переменную. Константы (т. е. однозначно определенные множества или классы) рассматриваются при этом как функции от 0 аргументов, и соответственно я буду применять понятие *абсолютности* и к ним (ср. [14]).

Наряду с системой ***ZF*** автор рассматривает иногда и систему ***GB***. Понятие абсолютности естественно переносится и на эту систему. Я поэтому считаю себя вправе

(как это иногда делает и автор), обозначая некоторый класс, скажем, буквой B, обозначить через $B(x)$ соответствующее свойство и рассматривать выражения $x \in B$ и $B(x)$ как синонимы. Конечно, первое из них относится к ***GB***, а второе может относиться к ***ZF*** (и относится, если $B(x)$ есть формула ***ZF***).

Употребленный выше термин «функция» обозначает, вообще говоря, любую функцию $y=\varphi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$, выражаемую в ***ZF*** формулой $A(x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k)$, для которой в ***ZF*** имеет место $\forall x_1, \ldots, x_n \exists ! y A(x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k)$. Здесь n, $k \geqslant 0$ и $t_1, \ldots, t_k$ — параметры этой функции φ (отсутствующие при $k=0$). Согласно первой теореме из § 6 гл. II, всякая такая функция представляется в ***GB*** классом A $(n+1)$-ок $\langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle$ (или $\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle$, или классом пар $\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, y\rangle$ — сейчас безразлично). Но я буду (как и автор) употреблять термин «функция» и в более широком смысле, считая, что φ имеет *область определения*, состоящую в точности из всех таких n-ок $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, которые удовлетворяют некоторому условию $D(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$, выразимому формулой ***ZF***; условие $\forall x_1, \ldots, x_n \exists ! y A(x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k)$ заменяется при этом на $\forall x_1, \ldots, x_n (D(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k) \rightarrow \exists ! y A(x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k))$. Согласно только что упомянутой теореме, эта область определения представляется в ***GB*** некоторым классом D (точнее $D_{t_1, \ldots, t_k}$); этот класс может оказаться и множеством, т. е. объектом ***ZF***, и тогда в силу аксиомы подстановки множеством будет и функция φ (точнее: в силу надлежащей аксиомы подстановки множеством будет класс W значений φ, а φ будет множеством, в силу $6'_n$, как подкласс $D \times W$). Понятие абсолютности будет относиться и к функциям в только что указанном смысле.

§ 2. Введенное автором понятие абсолютности отношения, определяемого формулой $A(x_1, \ldots, x_n)$ (см. § 3 гл. III, стр. 179), принадлежит не теории ***ZF***, а ее *метатеории*, т. е. теории о ***ZF***. Это следует из вхождения в это определение оборота «для всех транзитивных условий B» (и аналогично для B'). ***GB*** представляет собой

некоторую метатеорию для **ZF**, и в ней это понятие абсолютности выражается формулой

$$\forall B \forall B' (\mathrm{Tr}(B) \& \mathrm{Tr}(B') \& B \subseteq B' \& B(x_1) \& \swarrow \ldots \& B(x_n) \& A_B(x_1, \ldots, x_n) \to A_{B'}(x_1, \ldots, x_n)),$$

где $\mathrm{Tr}(C)$ является сокращением для $\forall x, y (x \in C \& y \swarrow \in x \to y \in C)$. Следует обратить внимание на кванторы $\forall B \forall B'$. Из-за них эта формула не выразима в **ZF**, и к ней не применима первая теорема из § 6 гл. II о существовании классов. Поэтому, например, нельзя (по крайней мере без дальнейшего обоснования) применять индукцию от r к $r+1$ для доказательства абсолютности отношения $Y = X_r$.

Это обстоятельство вынуждает меня заменить только что указанную формулу на

$$(*)\ \mathrm{Tr}(B) \& \mathrm{Tr}(B') \& B \subseteq B' \& B(x_1) \& \swarrow \ldots \& B(x_n) \& A_B(x_1, \ldots, x_n) \to A_{B'}(x_1, \ldots, x_n),$$

зависящую от B и B' как от параметров. В **ZF** (*) следует рассматривать как *схему формул*, зависящих от формул B и B' как от параметров. (Конечно, $B \subseteq B'$ означает при этом $\forall x (B(x) \to B(x'))$ и т. п.) Отношение $A(x_1, \ldots, x_n)$ я буду называть (B, B') — *абсолютным*, если оно удовлетворяет условию (*), и я буду говорить при этом также (следуя автору), что формула $A(x_1, \ldots, x_n)$ определяет (B, B')-*абсолютное отношение*. Впрочем, в тех случаях, когда параметры B и B' фиксированы или их значения несущественны, я буду иногда опускать их и говорить просто об абсолютности отношений. Всегда будет идти речь лишь о таких значениях B и B', которые удовлетворяют $B \subseteq B'$ и некоторым другим условиям, например $\mathrm{Tr}(B)$ и $\mathrm{Tr}(B')$, и лишь о таких $x_1, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют $B(x_1) \& \ldots \& B(x_n)$. Это позволит записывать (*) короче:

$$(**)\qquad A_B(x_1, \ldots, x_n) \to A_{B'}(x_1, \ldots, x_n).$$

Ввиду выразимости (*) (при фиксированных формулах B и B') в **ZF** (B, B')-абсолютность отношения $Y = X_r$ можно доказывать в **ZF** индукцией по r, и аналогично обстоит дело с другими случаями применения

индукции. Ясно, между прочим, что если для любых (подлежащих рассмотрению) значений B и B' можно доказать с помощью индукции по r (B, B')-абсолютность отношения, зависящего от r, то и абсолютность этого отношения может быть доказана (путем навешивания $\forall B\,\forall B'$ на доказанную формулу GB со свободными переменными B и B').

Автор допускает и еще одну неточность. Именно, условий $\mathrm{Tr}(B)$ и $\mathrm{Tr}(B')$ недостаточно для доказательства абсолютности некоторых из рассматриваемых им отношений. Так, если B есть ординал >1, а B' — мир (т. е. универсальный класс V), то отношение $z=x\times y$ (см. отношение 10 из таблицы в § 3 гл. III) не является (B, B')-абсолютным, так как для любых непустых x, $y\in B$ имеет место $(0=x\times y)_B$ (ибо в B нет упорядоченных пар), но не $(0=x\times y)_{B'}$. В. Н. Гришин заметил, что по аналогичной причине не является (B, B')-абсолютным понятие «x — бесконечно» (т. е. не эквивалентно никакому натуральному числу) и отношение $Y=X'$ (по крайней мере если формулы отождествляются с числами >2, $B=2$ и $B'=V$; в самом деле, определение X' дает $\forall z\,(z\in X'\leftrightarrow z\subseteq X\,\&\,\exists\varphi\,(\varphi$ — релятивизованная к X формула $\ldots z\ldots)\big)$, где выражение, стоящее в скобках после $\exists\varphi$, указано не полностью, но отображена его зависимость от z; при релятивизации к $B=2$ квантор $\exists\varphi$ обеспечивает ложность правой части эквивалентности, откуда $(\emptyset=\emptyset')_B$, но, конечно, $(\emptyset\neq\emptyset')_{B'}$).

Поэтому наряду с $\mathrm{Tr}(B)$ и $\mathrm{Tr}(B')$ я буду включать в левую часть импликации (*) некоторые другие условия. Прежде всего это $\omega\subseteq B$ и $\forall x,\ y(x,\ y\in C\swarrow\rightarrow\{x,\ y\}\in C)$, где C есть B или B' (т. е. оба эти условия: для $C=B$ и для $C=B'$). Это второе условие я буду называть *парной замкнутостью* C. Так же как и $\omega\subseteq C$, она вытекает из следующего условия *конечной замкнутости* C: $x\subseteq C\,\&\,(x$ конечно$)\rightarrow x\in C$; здесь «конечность» означает эквивалентность какому-либо натуральному числу.

Я буду в нужных случаях предполагать классы B и B' (которые, впрочем, могут быть множествами) конечно-замкнутыми, а иногда также удовлетворяющими дополнительным условиям, о которых речь пойдет ниже

(см. теорему AM на стр. 325). Хотя этим и будет сужено авторское понятие абсолютности, нужные для целей этой книги доказательства (B, B')-абсолютности от этого не пострадают, так как достаточно будет рассматривать лишь конечно-замкнутые B и B', удовлетворяющие этим дополнительным условиям. При этом можно будет считать, что условие (B, B')-абсолютности выражается формулой (**).

§ 3. Автор ничем не обосновывает утверждение, что импликация (**) достаточна для его целей. Импликацию

$$A_{B'}(x_1, \ldots, x_n) \to A_B(x_1, \ldots, x_n)$$

(рассматриваемую в условиях, о которых шла речь в § 2) я буду называть *обратной* (B, B')*-абсолютностью* отношения $A(x_1, \ldots, x_n)$, а эквивалентность

$$A_B(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow A_{B'}(x_1, \ldots, x_n)$$

(рассматриваемую в тех же условиях) — *двусторонней* (B, B')*-абсолютностью* этого же отношения (опуская иногда «(B, B')» в тех случаях, когда значения этих параметров фиксированы или несущественны).

Очевидно, что обратная (B, B')-абсолютность отношения A равнозначна (B, B')-абсолютности отношения $\sim A$.

Отношения, выразимые в ***ZF*** формулами, не содержащими кванторов, тривиальным образом двусторонне абсолютны. Поэтому двусторонне абсолютны $x \in y$ и $x = y$ (равенство рассматривается в этой книге как первоначальное отношение!).

Однако при доказательстве абсолютности отношения 4 (стр. 180), т. е. $x \subset y$, или $x \subseteq y \,\&\, \sim x = y$, автор, очевидно, пользуется абсолютностью $\sim x = y$ или обратной абсолютностью $x = y$. В других случаях он пользуется *прямой* (т. е. обычной) абсолютностью $x = y$. Поэтому двусторонняя абсолютность рассматриваемых отношений иногда бывает нужна для его целей. Как он однажды замечает (см. стр. 180), таковая (при $B' = V$ и $A_{B'} \leftrightarrow A$) фактически имеет место в интересующих его случаях, однако это требует проверки. (Говоря здесь и ниже просто об «абсолютности», я имею в виду

(B, B')-абсолютность для любых фиксированных, подлежащих рассмотрению B и B'.)

Вот несколько положений, касающихся абсолютности и легко доказываемых средствами исчисления высказываний:

i) Из абсолютности отношений $A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_k(x_1, \ldots, x_n)$ следует абсолютность $A_1(x_1, \ldots, x_n) \& \ldots \& A_k(x_1, \ldots, x_n)$ и $A_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee A_k(x_1, \ldots, x_n)$;

ii) Из абсолютности $C(x_1, \ldots, x_n)$ и обратной (двусторонней) абсолютности $A(x_1, \ldots, x_n)$ следует абсолютность $A(x_1, \ldots, x_n) \to C(x_1, \ldots, x_n)$;

iii) Из двусторонней абсолютности $A_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $C(x_1, \ldots, x_n)$ следует двусторонняя абсолютность

$$A(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow C(x_1, \ldots, x_n).$$

Далее, если $\mathrm{Tr}(B)$, то для любого $B' \supseteq B$

iv) Из (двусторонней) (B, B')-абсолютности $A(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ следует (двусторонняя) (B, B')-абсолютность каждого из отношений $\forall z_1, \ldots, z_m (z_1 \in x_1 \& \ldots \& z_m \in x_m \to A(z_1, \ldots, z_m, y_1, \ldots, y_n))$ и $\exists z_1, \ldots, \exists z_m (z_1 \in x_1 \& \ldots \& z_m \in x_m \& A(z_1, \ldots, z_m, y_1 \ldots, y_n))$;

v) Из (двусторонней) (B, B')-абсолютности $A(x, y_1, \ldots, y_n)$ следует (двусторонняя) (B, B')-абсолютность каждого из отношений $\forall z (z \in x_1 \& \ldots \& z \in x_m \to A(z, y_1, \ldots, y_n))$ и $\exists z (z \in x_1 \& \ldots \& z \in x_m \& A(z, y_1, \ldots, y_n))$.

(Для каждого из случаев iv) и v) доказывается сперва, с помощью $\mathrm{Tr}(B)$ и $B \subseteq B'$, простая (B, B')-абсолютность, а затем уже, с помощью замены A на $\sim A$, двусторонняя. $\mathrm{Tr}(B)$ применяется для замены $\forall z$ на $\forall z \in B$, $\exists z$ на $\exists z \in B$ и т. п.)

vi) Если формула $A(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow C(x_1, \ldots, x_n)$ (могущая содержать любые константы из B) доказуема в исчислении предикатов и $\emptyset \neq B \subseteq B'$, то из (двусторонней) (B, B')-абсолютности $A(x_1, \ldots, x_n)$ следует (двусторонняя) (B, B')-абсолютность $C(x_1, \ldots, x_n)$. Это утверждение сохраняет силу и в том случае, если в доказательстве $A(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow C(x_1, \ldots, x_n)$ участвуют, помимо теорем исчисления предикатов, истинные в B и

B' утверждения $D_1, \ldots, D_k$ (могущие содержать те же константы).

(Ибо при $\emptyset \neq B \subseteq B'$ доказуемость $A \to C$ в исчислении предикатов влечет доказуемость $A_B \to C_B$ и $A_{B'} \to C_{B'}$ в нем же и т. д.) Если D_i устанавливает (B, B')-абсолютное отношение между некоторыми из упомянутых констант, то истинность D_i в B влечет истинность D_i в B' $(i=1, \ldots, k)$.

vii) Для любых B и B' из (B, B')-абсолютности $A(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, где $m>1$, следует (B, B')-абсолютность $A(x, \ldots, x, y_1, \ldots, y_n)$.

Теперь для отношений 3—13 (см. стр. 180—181) утверждения об абсолютности (в нужных случаях двусторонней) получаются с помощью vi) и следующих формул, эквивалентных тем, которые определяют в 3—13 эти отношения (дальнейшие пояснения, указываемые в скобках для каждого из этих пунктов, служат лишь для установления абсолютности отношений, выражаемых приводимыми формулами; доказательства эквивалентности этих формул простым отношениям 3—13 предоставляются читателю). При этом (в связи с iv) и v)) используется $\mathrm{Tr}(B)$.

3. $\forall t(t \in x \to t \in y)$ (с помощью 1 и iv)).

5. $\forall z(z \in x \to \sim z = z)$ (с помощью iv), vii) и абсолютности $\sim x = y$).

5′. Двусторонняя (B, B')-абсолютность $x = \emptyset$ вытекает, при $\mathrm{Tr}(B)$, из $\sim x = \emptyset \leftrightarrow \exists z\ z \in x$.

6. $\forall t(t \in z \to t \in x \,\&\, t \in y) \,\&\, \forall t(t \in x \,\&\, t \in y \to t \in z)$ с помощью i), v) и $\forall t(t = x \to F(t)) \leftrightarrow F(x) \leftrightarrow \exists t(t = x \,\&\, F(t))$.

7. $\forall t(t \in z \to t = x \vee t = y) \,\&\, \forall t(t = x \to t \in z) \,\&\, \forall t(t = y \to t \in z)$ (с помощью i), iv) и еще раз i)).

7′. Двусторонняя абсолютность $z = \{x, y\}$: с помощью 7, i) (дающего двустороннюю абсолютность $t = x \vee t = y$), iv) для двусторонней абсолютности и i). Члены $\forall t(t = x \to t \in z)$ и $\forall t(t = y \to t \in z)$ заменяются при этом на $x \in z$ и $y \in z$ соответственно.

8. $\exists u \exists v(u \in z \,\&\, v \in z \,\&\, z = \{u, v\} \,\&\, u = \{x, x\} \,\&\, v = \{x, y\})$. (С помощью 7, vii) для $u = \{x, x\}$, i), iv) — сперва с $u \in z_1$ вместо $u \in z$ — и снова vii) для замены z_1 на z.)

8′. Двусторонняя абсолютность $z = \langle x, y \rangle$. Аналогично 7′.

9. $\exists r(r\in z\,\&\,\exists u\exists v(u\in r\,\&\,v\in r\,\&\,z=\langle u, v\rangle))$ (с помощью 8, i), iv) с $u\in r_1$ вместо $u\in r$ и vii) для замены r_1 на r, затем i) с $r\in z_1$ вместо $r\in z$, iv) и vii) для замены z_1 на z).

10. $\forall t(t\in z\to\exists u\exists v(u\in x\,\&\,v\in y\,\&\,t=\langle u, v\rangle))\,\swarrow$

$$\&\,\forall t(\exists u\exists v(u\in x\,\&\,v\in y\,\&\,t=\langle u, v\rangle)\to t\in z).$$

(Первый член: с помощью 8 и iv). Для второго члена (B, B')-абсолютность устанавливается лишь в предположении о парной замкнутости B. Именно — пусть $x, y, z\in B$ и этот член соблюдается в B. Тогда для всякого $t\in B'$ из $\exists u\exists v(u\in x\,\&\,v\in y\,\&\,t=\langle u, v\rangle)$ следует, в силу Tr (B), $u\in B$ и $v\in B$ и, в силу парной замкнутости B, $t\in B$, и так как этот член соблюдается в B, а ввиду Tr (B) $\exists u\in B'\exists v\in B'$ оказываются здесь равнозначными $\exists u\in B\exists v\in B$, то $t\in z$ имеет место в B, а в силу абсолютности $\in$ и в B'.)

11. $\forall z(z\in x\to z$ — упорядоченная пара) $\&\forall u, v, w\cdot$ $\cdot(\langle u, v\rangle\in x\,\&\,\langle u, w\rangle\in x\to v=w)$.

(Первый член рассматривается с помощью 9 и iv). Во втором члене $\langle u, v\rangle\in x$ есть сокращение для $\exists t(t=\langle u, v\rangle\,\&\,t\in x)$, а $\langle u, w\rangle\in x$ — для $\exists s(s=\langle u, w\rangle\,\&\,s\in x)$. (B, B')-абсолютность второго члена рассматривается с помощью париой замкнутости B. Именно — пусть $x\in B$ и этот член соблюдается в B, а u, v, $w\in B'$. Тогда, в силу обратной (B, B')-абсолютности отношения 8 и $\in$, из

$$\exists t\in B'(t=\langle u, v\rangle\,\&\,t\in x)\quad\text{и}\quad\exists s\in B'(s=\langle u, w\rangle\,\&\,s\in x)_{B'}$$

т. е. из $\exists t\in B'((t=\langle u, v\rangle)_{B'}\,\&\,(t\in x)_{B'})$ и $\exists s\in B'((s=\langle u, w\rangle)\,\&\,(s\in x)_{B'})$ следует $\exists t\in B'((t=\langle u, v\rangle_B\,\&\,(t\in x)_B)$ и $\exists s\in B'((s=\langle u, w\rangle)_B\,\&\,(s\in x)_B)$, и далее — в силу Tr (B) и абсолютности $\in$ — $t\in B$, $s\in B$, u, v, $w\in B$, а потому $\langle uv\rangle\in x$ и $\langle u, w\rangle\in x$ соблюдаются в B и из соблюдения в B второго члена 11 и абсолютности $=$ следует $v=w$ в B'.)

11′. Двусторонняя (B, B')-абсолютность отношения «x — функция» (при Tr (B)). (x — не функция $\leftrightarrow\swarrow$ $\exists z(z\in x\,\&\,z$ — не упорядоченная пара$)\vee\exists u, v, w(\langle u, v\rangle\swarrow$ $\in x\,\&\,\langle u, w\rangle\in x\,\&\sim v=w)$. Tr (B) дает $z\in B$ или

соответственно $\langle u, v\rangle \in B$, $\langle u, w\rangle \in B$, $u, v, w \in B$ — и утверждение следует из обратной (B, B')-абсолютности отношений 8 и 2, с помощью iv)).

12. См. первую лемму в § 2 гл. III (которая дает даже двустороннюю (B, B')-абсолютность свойства «x — ординал» для любых транзитивных B и B'. Простая (B, B')-абсолютность этого свойства не зависит при этом ни от каких свойств $B' \supseteq B$).

13. x — ординал $\&\, \forall y (y \in x \to y = \emptyset \vee y$ — сын$) \vee \sim x = \emptyset \,\&\sim (x$ — сын$)$.

Чтобы установить абсолютность этого отношения, я установлю сперва абсолютность отношения

$$6'. \qquad z = x \cup y.$$

Именно, это устанавливается, аналогично 6, с помощью формулы

$$\forall t (t \in z \to t \in x \vee t \in y) \,\&\, \forall t (t \in x \to t \in z) \,\&\, \forall t (t \in y \to t \in z).$$

Далее, отношение $z = x+1$ двусторонне абсолютно, так как оно эквивалентно $\forall t (t \in z \to t \in x \vee t = x) \,\&\, \forall t (t \in x \to t \in z) \,\&\, x \in z$, а его отрицание эквивалентно $\exists t (t \in z \,\&\sim t \in x \,\&\sim t = x) \,\&\, \exists t (t \in x \,\&\sim t \in z) \,\&\sim x \in z$ (см. iv) и i)); при этом используется двусторонняя абсолютность $\in$ и $=$). Далее, в силу i) и iv) двусторонне абсолютно отношение «z — сын», определяемое формулой $\exists x (x \in z \,\&\; x$ — ординал $\&\, z = x+1)$. Остается воспользоваться положениями i) и iv) и абсолютностями для отношений 5, 5′ и 12.

Помимо рассмотренных до сих пор, понадобится еще (в предположении $\mathrm{Tr}(B)$ и парной замкнутости B) (B, B')-абсолютность следующих отношений:

11a. x — функция, а y — область ее определения.

11b. x — функция, а y — область ее значений.

13a. x — конечное множество натуральных чисел.

Здесь (как и в 11) слово «функция» означает множество упорядоченных пар, представляющих функцию. Область определения функции x я буду обозначать через $D(x)$, а область ее значений — через $W(x)$. Отношения 11a и 11b выражаются формулами:

$$(x \text{ — функция}) \,\&\, \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u \langle z, u\rangle \in x)$$

и

$$(x \text{ — функция}) \,\&\, \forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists v\,\langle v, z\rangle \in x).$$

Коль скоро $x, y \in B$ кванторы, $\forall z \in B'$ оказываются равнозначными $\forall z \in B$ (ибо $\mathrm{Tr}(B)$) и (по той же причине) $\langle z, u\rangle \in x$ дает $u \in B$, а $\langle v, z\rangle \in x - v \in B$. Поэтому (B, B')-абсолютность отношений 11a, 11b и 13a вытекает из (B, B')-абсолютности 11, установленной для $B \subseteq B'$ с помощью $\mathrm{Tr}(B)$ и парной замкнутости B.

§ 4. Функция $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k))$ где $t_1, \ldots, t_k$ — параметры, $k \geqslant 0$) задается в общем случае такой формулой $A(x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k)$, что в *ZF* имеет место $\forall x_1, \ldots, x_n\,(P(x_1, \ldots, x_n) \swarrow \rightarrow \exists!\, y A(x_1, \ldots, x_n, y, t_1, \ldots, t_k))$. Здесь $P(x_1, \ldots, x_n)$ — отношение, задающее *область определения* φ. *Релятивизацией* этой функции к произвольному классу C называется такая функция φ_C, что $\forall x_1 \in C, \ldots, \forall x_n \swarrow \in C(P_C(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \exists!\, y \in C A_C(x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k)$, где $y = \varphi_C(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k))$. (Запись $\exists!\, y \in C D(y)$ обозначает для любой формулы $D(y)$, могущей содержать и другие переменные или параметры, отличные от z, формулу $\exists y \in C \forall z \in C(D(z) \leftrightarrow y = z)$. Условие $P(x_1, \ldots, x_n)$ может быть и тривиальным: $x_1 = x_1 \& \swarrow \ldots \& x_n = x_n$, и тогда его можно опустить.) Вообще говоря, релятивизация φ к C существует не обязательно и, кроме того, ее существование, как и сама функция φ_C, может зависеть от той формулы $A(x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k)$, которая была использована при определении φ. Впрочем, если A' — другая такая формула и $A(x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k) \leftrightarrow A'(x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k)$ доказуема в исчислении предикатов, а $C \neq \emptyset$, то эта зависимость исчезает; то же самое относится и к случаю, если только что указанная эквивалентность $A \leftrightarrow A'$ устанавливается в исчислении предикатов с помощью утверждений $D_1, \ldots, D_k$ (могущих зависеть от $x_1, \ldots, x_n, y; t_1, \ldots, t_k$), имеющих место в *ZF* и в C. Для каждой рассматриваемой функции φ я буду считать известной (с точностью до эквивалентности) ту формулу A, с помощью которой она была введена в рассмотрение — и тем самым φ_C, если существует, будет иметь однозначно определенный смысл. Если не оговорено противное,

при $k>0$ параметры $t_1, \ldots, t_k$ будут предполагаться принадлежащими классу C. Область $P(x_1, \ldots, x_n)$ будет, как правило, абсолютной.

Функцию $y=\varphi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$ я буду называть (B, B')-*абсолютной*, если существуют ее релятивизации к B и к B' и отношение $y=\varphi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$ & $\&P(x_1, \ldots, x_n)$ (B, B')-абсолютно. Коль скоро параметры B и B' фиксированы или их значения (из числа подлежащих рассмотрению) несущественны, я буду говорить просто об *абсолютности* функции φ. Кроме того, я буду часто опускать рассмотрение члена $P(x_1, \ldots, x_n)$, коль скоро его (B, B')-абсолютность установлена, а также на основании леммы F на стр. 332 (где эта область определения обозначена через C).

Теперь я рассмотрю вопрос об абсолютности функций, определяемых посредством трансфинитной рекурсии (см. теорему на стр. 120). Замечу прежде всего, что эта теорема, как и ее доказательство, сохраняет силу и в том случае, если функция $y=\varphi(x)$ зависит также от $\beta(\leqslant\alpha)$, так что вместо $A(x, y; t_1, \ldots, t_k)$ и $y=\varphi(x)$ следует при этом писать $A(x, y; \beta; t_1, \ldots, t_k)$ и $y=\varphi(x; \beta)_j$. В этом я предоставляю убедиться читателю, а в дальнейшем, в случае надобности, буду понимать эту теорему именно таким образом. Далее — функции f, определяемые посредством рекурсии, рассматриваются автором как определенные на ординале $\alpha+1$. Поскольку рассматриваются их релятивизации к C, достаточно рассматривать их лишь на ординалах $\alpha+1\subseteq C$. Функцию $\varphi(x)$, через которую, согласно теореме о трансфинитной рекурсии (стр. 120), определяется $f(x)$, я буду называть *опорной функцией для* f. Функцию f, ограниченную ординалом $\beta\leqslant\alpha$, я буду обозначать через $f\restriction\beta$, а иногда короче: h_β, или, если вместо f пишется f' или $\bar f$, через h'_β или $\bar h_\beta$ и т. п. Релятивизованная функция f_C совпадает с той функцией f^C, которая, согласно теореме о рекурсии, определяется условиями $f^C(0)=z$ и $\beta\leqslant\alpha\rightarrow$ $\rightarrow f^C(\beta)=\varphi_C(h^C_\beta)$, причем условия $z\in C$ и $\beta\leqslant\alpha\rightarrow h^C_\beta\in C$ существенны для определения f^C. Именно — если формула $A(\beta, y)$ определяет, согласно теореме о рекурсии, функцию $y=f(\beta)$, где $\beta\leqslant\alpha$, то $A(\beta, y)\leftrightarrow\beta=0\,\&\,y=$

$=z \vee \beta \neq 0 \,\&\, \exists f,\ \gamma(\langle \beta, y\rangle \in f \,\&$ (f — функция, определенная на γ) $\&\, \gamma \leqslant \alpha+1 \,\&\, \forall \delta (0<\delta \leqslant \alpha \to \Phi(h_j,\ f(\delta))$, где Φ — формула, определяющая функцию φ. Пусть A^c получается из A заменой Φ на Φ_C — тогда $A^c(\beta,\ y)$ определяет функцию f^c на $\alpha+1$ и, в силу $(C,\ V)$-абсолютности отношений 11а, $\langle \beta,\ y\rangle \in f$, $y=z$ и $0<\delta \leqslant \alpha$, а также $\beta \leqslant \alpha \to h^c_\beta \in C$, для любого y и $\beta \leqslant \alpha$ имеет место $A^c(\beta,\ y) \leftrightarrow A_C(\beta,\ y)$, откуда $f^c = f_C$. Поэтому (при $z \in C$ и $\beta \leqslant \alpha \to h^c_\beta \in C$) для f_C имеют место условия $f_C(0)=z$ и $\beta \leqslant \alpha \to f_C(\beta) = \varphi_C(h_{C,\beta})$.

Для всякой функции $y=\varphi(x)$, определенной для $x \in C$, *тривиальным продолжением* $\varphi(x)$ этой функции на весь мир V я буду называть такую функцию $\bar{\varphi}$, что $x \in C \to \bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\sim x \in C \to \bar{\varphi}(x) = \emptyset$. Если φ зависит от параметров $t_1, \ldots, t_k$, эти определяющие условия распространяются лишь на случай $t_1, \ldots, t_k \in C$ и к ним присоединяется $\bar{\varphi}(x)=\emptyset$, коль скоро $\sim t_1 \in C \vee \ldots \vee \sim t_k \in C$. Ясно, что если $y=\varphi(x)$ определяется формулой $A(x,\ y;\ t_1, \ldots, t_k)$ $(k \geqslant 0;\ \forall x \in C \exists!\ y \in C A(x,\ y;\ t_1, \ldots, t_k))$, то φ определяется формулой $\bar{A}(x,\ y;\ t_1, \ldots, t_k) \equiv A(x,\ y;\ t_1, \ldots, t_k) \,\&\, x \in C \,\&\, t_1 \in C \,\&\, \ldots \,\&\, t_k \in C \vee (\sim x \in C \vee \sim t_1 \in C (\vee \ldots \vee \sim t_k \in C) \,\&\, y \neq \emptyset$.

Для любого класса C и функции f, определяемой посредством рекурсии с опорной функцией φ, условие $\beta \leqslant \alpha \to h_\beta \in C$ (т. е. $\beta \leqslant \alpha \to (f \mid \beta) \in C$) я буду называть *начальной* α-φ-*замкнутостью* C. Условие $x \in C \to \varphi(x) \in C$ я буду называть *замкнутостью* C *относительно* φ. Из начальной 1-φ-замкнутости C следует $h_1 \in C$, т. е. $\{\langle 0,\ f(0)\rangle\} = \{\langle 0,\ z\rangle\} \in C$, где $z=f(0)$; в случае $\mathrm{Tr}(C)$ это дает $z \in C$.

Об абсолютности функций, определяемых посредством трансфинитной рекурсии, говорит следующая

Теорема AR. *Пусть* $\mathrm{Tr}(B)$, B *парно замкнут и* $z \in B \subseteq B'$, φ — *такая функция, что* B *замкнут относительно* φ *и пусть для (всякого) ординала* $\alpha \in B$ *класс* B *удовлетворяет условию начальной* α-φ-*замкнутости. (Короче, перечисленные условия для* B, *кроме* $B \subseteq B'$, *я буду называть* **рекурсивной замкнутостью** B (**для** z **и** φ).) *Пусть, согласно теореме о рекурсии, функция* f *определе-*

на на $\alpha+1$, *так, что* $f(0)=z$ и $\beta\leqslant\alpha\to f(\beta)=\varphi(h_\beta)$. *Тогда если функция* φ (B, V)-*абсолютна и* (B, B')-*абсолютна, то и функция* f (B, B')-*абсолютна. При этом функции* f_B *и* $f_{B'}$ *определены на* $\alpha+1$ *однозначно и* $f_B=f_{B'}=f$.

Доказательство. Из (B, B')-абсолютности φ следует существование релятивизаций φ_B и $\varphi_{B'}$. Релятивизованные функции f_B и $f_{B'}$ (коль скоро они существуют) должны определяться условиями $f_B(0)=f_{B'}(0)=z$, $\beta\leqslant\alpha\to f_B(\beta)=\varphi_B(h_{B,\beta})$ и $\beta\leqslant\alpha\to f_{B'}(\beta)=\varphi_{B'}(h_{B',\beta})$, где $h_{B,\beta}$ и $h_{B'\beta}$ суть соответственно функции f_B и $f_{B'}$, ограниченные ординалом β. (Из $\alpha\in B$ и $\mathrm{Tr}(B)$ следует $\alpha+1\subseteq B$ и $\alpha+1$, как общая область определения функций f, f_B и $f_{B'}$, релятивизации не подлежит; условие $\beta\leqslant\alpha$ абсолютно.) Пусть $\bar{\varphi}_B$ — тривиальное продолжение φ_B. Тогда, согласно теореме о трансфинитной рекурсии, существует определенная на $\alpha+1$ функция $\bar{f}_B$, такая, что $\bar{f}_B(0)=z$, $\beta\leqslant\alpha\to\bar{f}_B(\beta)=\bar{\varphi}_B(\bar{h}_{B,\beta})$, где $\bar{h}_{B,\beta}$ есть $\bar{f}_B$, ограниченная ординалом β. Я утверждаю, что $\gamma\leqslant\alpha\to\bar{f}_B(\gamma)=f(\gamma)$. Действительно, если γ — наименьший ординал $\leqslant\alpha$, для которого $\bar{f}_B(\gamma)\neq f(\gamma)$, то $\bar{h}_{B,\gamma}=h_\gamma$ и, в силу $\gamma\leqslant\alpha$ и начальной α-φ-замкнутости B, $h_\gamma\in B$ и далее — $\bar{f}_B(\gamma)=\bar{\varphi}_B(\bar{h}_{B,\gamma})=\bar{\varphi}_B(h_\gamma)=\varphi_B(h_\gamma)=\varphi(h_\gamma)$ (в силу (B, V)-абсолютности φ и замкнутости B относительно φ_B) $=f(\gamma)$ — противоречие. Итак, $\gamma\leqslant\alpha\to\bar{f}_B(\gamma)=f(\gamma)$, откуда $\gamma\leqslant\alpha\to\bar{h}_{B,\gamma}=h_\gamma$ и $\beta\leqslant\alpha\to\bar{f}_B(\beta)=f(\beta)=\varphi(h_\beta)=\varphi(\bar{h}_{B,\beta})$, т. е. $\beta\leqslant\alpha\to\bar{f}_B(\beta)=\varphi(\bar{h}_{B,\beta})$; так как $\bar{h}_{B,\beta}=h_\beta\in B$ (в силу начальной $(\alpha$-$\varphi)$-замкнутости B и $\beta\leqslant\alpha$), то $\varphi_B(\bar{h}_{B,\beta})\in B$ и, в силу (B, V)-абсолютности φ, $\varphi_B(\bar{h}_{B,\beta})=\bar{f}_B(\beta)$, откуда $\beta\leqslant\alpha\to\bar{f}_B(\beta)=\varphi_B(\bar{h}_{B,\beta})$, т. е. функция $\bar{f}_B$ удовлетворяет определению f_B.

Пусть, с другой стороны, $\bar{\varphi}_B$ — тривиальное продолжение функции $\varphi_{B'}$. Тогда, согласно теореме

о трансфинитной рекурсии, существует определенная на $\alpha+1$ функция $\bar{f}_{B'}$, такая, что $\bar{f}_{B'}(0)=z$, $\beta\leqslant\alpha\swarrow\rightarrow\bar{f}_{B'}(\beta)=\bar{\varphi}_{B'}(\bar{h}_{B',\beta})$, где $\bar{h}_{B',\beta}$ есть $f_{B'}$, ограниченная ординалом β. По-прежнему $\gamma\leqslant\alpha\rightarrow\bar{f}_{B'}(\gamma)=f(\gamma)$. Действительно, если $\gamma\leqslant\alpha$ — наименьший ординал, для которого $\bar{f}_{B'}(\gamma)\neq f(\gamma)$, то $\bar{h}_{B',\gamma}=h_\gamma$ и, в силу $\gamma\leqslant\alpha$ и начальной α-φ-замкнутости B, $h_\gamma\in B$ и далее — $f(\gamma)=\varphi(h_\gamma)=\varphi_B(h_\gamma)$ (см. выше) $=\varphi_{B'}(h_\gamma)$ (в силу (B, B')-абсолютности φ, замкнутости B относительно φ_B и $h_\gamma\in B$) $=\bar{\varphi}_{B'}(h_\gamma)$ (в силу $h_\gamma\in B\subseteq B'$) $=\bar{\varphi}_{B'}(\bar{h}_{B',\gamma})=$ $=\bar{f}_{B'}(\gamma)$ — противоречие. Итак, $\gamma\leqslant\alpha\rightarrow\bar{f}_{B'}(\gamma)=f(\gamma)$, откуда $\gamma\leqslant\alpha\rightarrow\bar{h}_{B',\gamma}=h_\gamma$ и далее $\beta\leqslant\alpha\rightarrow\bar{f}_{B'}(\beta)=f(\beta)=\bar{f}_B(\beta)$ (см. выше) $=\varphi_B(\bar{h}_B,\beta)$ (см. выше) $=\varphi_B(h_\beta)$ (ибо $\beta\leqslant\alpha\rightarrow$ $\rightarrow\bar{h}_{B,\beta}=h_\beta$, см. выше) $=\varphi_{B'}(h_\beta)$ (в силу (B, B')-абсолютности φ, ибо $h_\beta\in B$ и $\varphi_B(h_B)\in B$) $=\varphi_{B'}(\bar{h}_{B',\beta})$, т. е. $\beta\leqslant\alpha\rightarrow\bar{f}_{B'}(\beta)=\varphi_{B'}(\bar{h}_{B',\beta})$ и $\bar{f}_{B'}$ удовлетворяет определению $f_{B'}$.

Ввиду совпадения с f на $\alpha+1$ функции $\bar{f}_B$ и $\bar{f}_{B'}$ определены однозначно. Пусть $\beta\leqslant\alpha$, $y=\bar{f}_B(\beta)$, тогда $y=\bar{f}_{B'}(\beta)(=\bar{f}_B(\beta)=f(\beta))$, следовательно, отношение $\beta\leqslant\alpha\,\&\,y=f(\beta)$ (B, B')-абсолютно. Теорема AR доказана.

Если $\alpha<\omega$, то начальная α-φ-замкнутость следует из $z\in B$, замкнутости B относительно φ и конечной замкнутости B, т. е. условие начальной α-φ-замкнутости B можно в этом случае заменить (в теореме AR) условием конечной замкнутости B.

Теорема AS. *Если функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1, \ldots$ $\ldots, g_n$ (B, B')-*абсолютны, то* (B, B')-*абсолютна и функция* $f(g_1, \ldots, g_n)$.

Доказательство. По условию существуют релятивизации к B: f_B, $g_{1B}, \ldots, g_{nB}$. Коль скоро все аргументы функции g_{iB} принадлежат B, это верно и

для соответствующего значения $g_{iB}(i=1, \ldots, n)$ а потому существует и $f_B(g_{1B}, \ldots, g_{nB})$ (причем ее значение принадлежит B). Аналогично для B'.

Допустим $y=f_B\left(g_{1B}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m_1}}\right), \ldots, g_{nB}\left(x_{i_n}, \ldots, x_{i_m}\right)\right)$, т. е. $\exists z_1, \ldots, z_n\left(z_1=g_{1B}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m_1}}\right) \& \ldots \& z_n=g_{nB}\left(x_{i_n}, \ldots, x_{i_{m_n}}\right) \& y=f_B(z_1, \ldots, z_n)\right)$, причем $y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, \ldots, x_{i_n}, \ldots, x_{i_{m_n}} \in B$. Тогда $z_1, \ldots, z_n \in B$ (в силу замкнутости B относительно g_{iB}, $i=1, \ldots, n$) и, в силу (B, B')-абсолютности функций $g_1, \ldots, g_n, f$ имеют место равенства $z_1=g_{1B'}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m_1}}\right), \ldots, z_n=g_{nB'}\left(x_{i_n}, \ldots, x_{i_{m_n}}\right)$, $y=f_{B'}(z_1, \ldots, z_n)$, откуда $y=f_{B'}\left(g_{1B'}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m_1}}\right), \ldots, g_{nB'}\left(x_{i_n}, \ldots, x_{i_{m_n}}\right)\right)$, т. е. отношение $y=f\left(g_1\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m_1}}\right), \ldots, g_n\left(x_{i_n}, \ldots, x_{i_{m_n}}\right)\right)$ (B, B')-абсолютно и теорема AS доказана.

Аналогичная теорема имеет место для суперпозиций отношения и функций:

Теорема AS′. *Если отношение* $A(x_1, \ldots, x_n)$ *и функции* $f_1\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m_1}}\right), \ldots, f_n\left(x_{i_n}, \ldots, x_{i_{m_n}}\right)$ (B, B')-*абсолютны, то* (B, B')-*абсолютно и отношение* $A\left(f_1\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m_1}}\right), \ldots, f_n\left(x_{i_n}, \ldots, x_{i_{m_n}}\right)\right)$.

Доказательство снова состоит в рассмотрении $A\left(f_1\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m_1}}\right), \ldots, f_n\left(x_{i_n}, \ldots, x_{i_{m_n}}\right)\right) \leftrightarrow \exists z_1, \ldots, z_n\left(z_1=f_1\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m_1}}\right) \& \ldots \& z_n=f_n\left(x_{i_n}, \ldots, x_{i_{m_n}}\right) \& A(z_1, \ldots, z_n)\right)$ с использованием $z_1, \ldots, z_n \in B$ и (B, B')-абсолютности $f_1, \ldots, f_n$ и A.

В частности, ввиду абсолютности функции $x_i=x_i$ $(i=1, \ldots, n)$ в условиях теоремы AS′ (B, B')-абсолютно отношение, получаемое из $A(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой f_i вместо x_i для некоторых, но не всех $i=1, \ldots, n$. Например, если функция $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ (B, B')-абсолютна, то (B, B')-абсолютно и отношение $z \in f(x_1, \ldots, x_n)$. (Таким образом, из (B, B')-абсолютности функции M_α будет следовать (B, B')-абсолютность

отношения $z \in M_\alpha$.) Ввиду (B, B')-абсолютности функции $\langle x, y\rangle$, (B, B')-абсолютны и отношения $\langle x, y\rangle \in z$, $\sim \langle x, y\rangle \in z$.

Кроме того, для константы $c \in B$ отношение $x = c$, а значит, и функция $x = c$ (B, B')-абсолютны для любого $B' \supseteq B$ (в силу абсолютности $=$). Поэтому если отношение $A(x_1, \ldots, x_n)$ или функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (B, B')-абсолютно, то (B, B')-абсолютен и результат замены в A или в φ всех или некоторых x_i на константы $c_i \in B$.

Следующая теорема говорит об абсолютности функций, определяемых посредством обычной рекурсии от n к $n+1$. Ее доказательство использует следующую лемму:

Лемма А. *Если* $\omega \subseteq B$ *и* $\mathrm{Tr}(B)$, *то при любом* $B' \supseteq B$ *отношение* $\tau(y, x) \leftrightarrow \exists n(\langle n, y\rangle \in x \,\&\, \forall m \forall v (m > n \rightarrow \sim \langle m v\rangle \in x))$ *двусторонне* (B, B')*-абсолютно.*

Доказательство. Пусть $y, x \in B$ и $\tau(y, x)$. Тогда существует такое n, что $\langle n, y\rangle \in x$ и $\forall m \forall v (m > n \rightarrow \sim \langle m, v\rangle \in x)$. Ввиду $\omega \subseteq B$, $n \in B$, и притом n является натуральным числом относительно B и B' ввиду абсолютности отношения $x = \omega$. Если натуральное число $m \in B'$, то $m \in B$ ввиду $\omega \subseteq B$ и по той же причине m — натуральное число относительно B. $\langle m, v\rangle \in x$ влечет $v \in B$ в силу $\mathrm{Tr}(B)$. Теперь лемма следует из (B, B')-абсолютности $t = \langle n, y\rangle \in x$, $\sim \langle m, v\rangle \in x$, $\langle m, v\rangle \in x$ и $m > n$ (ибо можно добавить члены $v \in x$ и $m \in \omega$ и т. п.).

Лемма В. *Пусть* $y = \tau(x)$ *— такая функция, что если* x *— функция, определенная на некотором натуральном числе вида* $n+1$, *то* $y = \tau(x) \leftrightarrow \tau(y, x)$, *и* $y = \emptyset$ *в противном случае. Тогда если* B *транзитивен и конечно замкнут и* $B \subseteq B'$, *то функция* $y = \tau(x)$ (B, B')*-абсолютна.*

Доказательство. Пусть $x \in B$. Если x — функция в смысле B (т. е. удовлетворяет релятивизованному к B предикату «быть функцией»), то x — функция и в смысле B' в силу (B, B')-абсолютности отношения 11. Так как это отношение двусторонне абсолютно, верно и обратное. Итак, x является функцией в смысле B в том

и только в том случае, если оно является функцией в смысле B'. Так как можно взять $B'=V$, то x является функцией в смысле B или B' в том и только в том случае, если оно является функцией. В силу конечной замкнутости B, $\omega \subseteq B$, и в силу абсолютности отношений 11а, 13 и 5 только что доказанное утверждение верно и для свойства «x — функция, определенная на натуральном числе вида $n+1$». Так как отношение $\tau(y, x)$ двусторонне (B, B')-абсолютно и, если x — функция, определенная на натуральном числе вида $n+1$, то $\exists! y \tau(y, x)$, то для функции τ существуют релятивизации к B и к B' и отношение $y=\tau(x)$ (B, B')-абсолютно.

Теорема AR_ω. *Пусть B — транзитивный, конечнозамкнутый класс и $B \subseteq B'$. Пусть функция $y=\varphi(x; t_1, \ldots, t_k)$ (где $k \geqslant 0$, $t_1, \ldots, t_k$ — параметры) (B, V)- и (B, B')-абсолютна и функция $f(n)$ определяется для натуральных чисел n условиями $f(0)=z$ и $f(n+1)=\varphi(f(n))$. (Как и φ, функция f может зависеть от параметров $t_1, \ldots, t_k$.) Пусть, наконец, $z, t_1, \ldots, t_k \in B$. Тогда функция f (B, B')-абсолютна; указанными условиями она определяется однозначно, причем $f=f_B=f_B$*

Доказательство. В силу определения τ, для всякого натурального n $f(n)=\tau(h_{n+1})$. Пусть $\psi(x)=\varphi(\tau(x))$, тогда условие $f(n+1)=\varphi(f(n))$ дает $f(n+1)=\psi(h_{n+1})$. В силу леммы B и теоремы AS, функция ψ (B, B')-абсолютна (условие $\omega \subseteq B$ леммы A вытекает из конечной замкнутости B). Так как в лемме B можно взять $B'=V$, то (ввиду (B, V)-абсолютности φ) по теореме AS функция ψ (B, V)-абсолютна. Из (B, V)-абсолютности φ вытекает существование φ_B, причем (ввиду $t_1, \ldots, t_k \in B$) из $u \in B$ следует $\varphi_B(u) \in B$, т. е. $\exists y \in B y=\varphi_B(u)$, и (B, V)-абсолютность φ дает $y=\varphi_B(u) \to y=\varphi(u)$, так что B замкнут относительно φ. Поэтому индукцией по n (ввиду $z \in B$) устанавливается, что для любого натурального числа n $f(n) \in B$. Из $\mathrm{Tr}(B)$ следует (по аксиоме регулярности) $\emptyset \in B$, а значит, и $x \in B \to \tau(x) \in B$, т. е. замкнут относительно τ и, далее — относительно $\varphi(\tau(x))$, т. е. относительно $\psi(x)$. Теперь ввиду конечной замкнутости B начально n-ψ-замкнут.

Так как ψ (B, V)- и (B, B')-абсолютна, то по теореме AR (B, B')-абсолютна функция f, ограниченная любым натуральным числом n, т. е. каждая из функций h_n. Остается установить существование, единственность и (B, B')-абсолютность самой функции f.

Функцию f я теперь определяю как $\bigcup_n h_n$. Легко доказать индукцией по $i<m$, что при $m \leqslant n$ $h_m(i) = h_n(i)$, так что f является функцией и ее ограничение любым натуральным числом n совпадает с h_n. Для f выполняются условия $f(0)=z$ и $f(n+1)=\psi(h_{n+1})=\varphi(\tau)(h_{n+1}))=\varphi(f(n))$ (ибо $f(n+1)=h_{n+2}(n+1)=\psi(h_{n+1})$ по определению h_{n+2}, так как $(f|n+2)|(n+1)=f|(n+1)=h_{n+1}$ и $\tau(h_{n+1})=h_{n+1}(n)=f(n)$). Этими условиями функция f определяется на ω однозначно. Для всякого $n\in\omega$ существует $h_{n+1}(n)\in B$ и ввиду (B, B')-абсолютности h_{n+1} существуют и релятивизации к B и к B' этой функции, а значит, и их значения $h_{B,\,n+1}(n)$ и $h_{B',\,n+1}(n)$, которые принадлежат соответственно B и B'. Релятивизация f_B есть $\bigcup_n h_{B,\,n}$ (ибо $\omega\subseteq B$) и свойство «быть натуральным числом» абсолютно; аналогично для B'. Это верно и при $B'=V$, а потому из $i<m\leqslant n$ следует $h_{B,\,m}(i)=h_m(i)=h_n(i)=h_{B,\,n}(i)$, следовательно, f_B есть функция; ввиду $h_{B,\,m}(i)\in B$ и (B, B')-абсолютности функций h_m, $h_{B,\,m}(i)=h_{B',\,m}(i)$ и $h_{B,\,n}(i)=h_{B',\,n}(i)$, а потому $h_{B',\,m}(i)=h_{B',\,n}(i)$ и $f_{B'}=\bigcup_n h_{B',\,n}$ также есть функция. Наконец, если $y\in B$ и $y=f_B(n)$, то $y=h_{B,\,n+1}(n)=h_{B',\,n+1}(n)$ (ввиду (B, B')-абсолютности $h_{n+1})=f_{B'}(n)$, т. е. отношение $y=f(n)$ (B, B')-абсолютно. Если взять $B'=V$, то из $y=f_B(n)$ следует $y=f(n)$, т. е. функции f_B и f совпадают. Совпадают и f с $f_{B'}$ (ввиду только что доказанной (B, B')-абсолютности). Теорема AR_ω доказана.

Эта теорема легко обобщается следующим образом:

Теорема AR′ω. *Пусть соблюдаются условия теоремы* AR *с той оговоркой, что функция* $y=\varphi(x; t_1, \ldots, t_k)$ *определена лишь для области* $K(x; t_1, \ldots, t_k)$,

которой принадлежат также и ее значения, причем эта область определяется (B, B')*-абсолютным отношением, а* $t_1, \ldots, t_k$ *— параметры. Тогда заключение теоремы* AR_ω *остается в силе, причем все значения* f *принадлежат* $K(x; t_1, \ldots, t_k)$.

Лемма С. *Пусть* $S(n_1, \ldots, n_k)$ *— арифметический предикат, т. е. предикат, выразимый формулой системы* Z_1 *из* § 6 *гл. I. Пусть* B *— транзитивный, конечно-замкнутый класс (так что* $\omega \subseteq B$*) и* $B \subseteq B'$*. Тогда* S, S_B *и* $S_{B'}$ *равнозначны, а потому отношение* S (B, B')*-абсолютно.*

Доказательство. Z_1 содержится в ZF, а потому формула, представляющая $S(n_1 \ldots, n_k)$, может быть записана на языке ZF, причем $n_1, \ldots, n_k$ — переменные натуральные числа и все кванторы этой формулы имеют вид $\forall m$ или $\exists m$, где m — переменное натуральное число. В более подробной записи они выглядят $\forall x(x \in \omega \rightarrow \ldots)$ и $\exists x(x \in \omega \& \ldots)$; ввиду $\omega \subseteq B \subseteq B'$ релятивизация, превращающая их в $\forall x(x \in B \& x \in \omega \rightarrow \ldots)$ или $\exists x(x \in B \& x \in \omega \& \ldots)$, сохраняет их силу. Аналогично для B'.

Следствие. *Пусть* B *— транзитивный конечно-замкнутый класс,* $B \subseteq B'$ *и* $m = \varphi(n_1, \ldots, n_k)$ *— арифметическая функция, т. е. функция, представимая арифметическим предикатом* $S(m, n_1, \ldots, n_k)$*, для которого* $\forall n_1, \ldots, n_k \exists! m S(m, n_1, \ldots, n_k)$*. Тогда* φ (B, B')*-абсолютна, причем* $\varphi = \varphi_B = \varphi_{B'}$.

Доказательство основано на предположении, что φ определяется через S. Тогда φ_B определяется через S_B, $\varphi_{B'}$ — через $S_{B'}$ и утверждение следует из $S \leftrightarrow S_B \leftrightarrow S_{B'}$.

В частности, если B транзитивен и конечно-замкнут, а $B \subseteq B'$, то всякая п. р. функция φ (B, B')-абсолютна и $\varphi = \varphi_B = \varphi_{B'}$; это же относится и к общерекурсивным функциям (ибо $<$, а значит, и оператор μ_y, (B, B')-абсолютны), а также к рекурсивным и рекурсивноперечислимым множествам натуральных чисел.

Лемма D. *Пусть B транзитивен и конечно замкнут (так что $\omega \subseteq B$), $B \subseteq B'$ и функция $y = \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k)$ (B, B')-абсолютна и (B, V)-абсолютна; при этом $k \geqslant 0$, $t_1, \ldots, t_k \in B$ — параметры, n — переменное натуральное число и $S(n)$ — арифметический предикат. Тогда отношения $u = \bigcup\limits_{S(n)} \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k)$ и $v = \bigcap\limits_{S(n)} \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k)$ (B, B')-абсолютны.*

Доказательство. $z \in u \leftrightarrow \exists n (S(n) \& z \in \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k))$. Так как $S(n)$ и $z \in \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k)$ (B, B')-абсолютны, в силу i) (B, B')-абсолютна и их конъюнкция, а релятивизация $\exists n$ к B или B' не меняет значения этого квантора в силу $\omega \subseteq B \subseteq B'$. При $u, x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_k \in B$ z также должно входить в B в силу $\mathrm{Tr}(B)$ и замкнутости B относительно φ_B и $\varphi_v = \varphi$. Поэтому $\forall z (z \in u \leftrightarrow \exists n (S(n) \swarrow \& z \in \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k))$, т. е. $u = \bigcup\limits_{S(n)} \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k)$ (B, B')-абсолютно. Аналогично рассматривается $\forall z (z \in v \leftrightarrow \forall n (S(n) \rightarrow z \in \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t, \ldots, t_k))$, так как (ввиду $S(n) \leftrightarrow S_B(n) \swarrow \leftrightarrow S_{B'}(n)$) свойство $S(n)$ двусторонне (B, B')-абсолютно. Лемма D доказана.

Следует заметить, что в условиях леммы D утверждения $u \in B$ и $v \in B$ не поддаются доказательству, а потому я не утверждаю, что функции $\bigcup\limits_{S(n)} \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k)$ и $\bigcap\limits_{S(n)} \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k)$ должны быть в этих условиях (B, B')-абсолютными (хотя для этого достаточно существования их релятивизаций к B и к B'). При $S(n) \leftrightarrow n = n$ лемма D утверждает (при остальных указанных в ней условиях) (B, B')-абсолютность отношений $u = \bigcup\limits_{n} \varphi(n, x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_k)$ и $v = \bigcap\limits_{n} \varphi(n, x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_k)$.

§ 5. Теперь я рассмотрю вопрос о выразимости в ***ZF*** функций X_r, X' и $C(u, n, t_1, \ldots, t_k)$ при $X \neq 0$. Для пер-

вых двух надо будет также исследовать вопрос об их абсолютности (чем я займусь в § 6).

Для произвольного множества X автор обозначает через X_r множество, состоящее из всех множеств S, образованных упорядоченными n-ками некоторого указанного им вида; здесь $n=1, 2, \ldots$, так что $X_r = \bigcup_{n \neq 0} X_r^n$, где X_r^n — это множество таких S с фиксированным n. При подробном исследовании я не могу обойтись без рассмотрения этих X_r^n и вопроса об их абсолютности.

Определение множеств X_r^n связано с рассмотрением термов и формул из языка ZF, а также их метатеоретических записей вида $A(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$ и т. п. Термы, формулы, как и записи, — это цепочки знаков, точный вид которых не имеет ровно никакого значения. Я предлагаю поэтому рассматривать отныне (в настоящем добавлении) знаки просто как натуральные числа, а формулы или записи, состоящие из n вхождений знаков, — как упорядоченные n-ки таких чисел. Подробности этих соглашений не имеют принципиального значения; например, можно считать переменные x, x', x'', ... четными числами, не делящимися на 4, различные константы c, c', c'', ... которые могут понадобиться, числами, делящимися на 4, другие, указанные на стр. 4 знаки ($\sim$, &, ..., $=$ и скобки), а также $\in$ — нечетными числами от 1 до 21, а остальные нечетные числа резервировать для обозначения метатеоретических букв типа A (в записи $A(x_1, \ldots, x_n)$), параметров (вида $t_1, \ldots, t_k$) и т. п. При этом легко определить п. р. функцию χ, осуществляющую пересчет всех формул, а также записей. Так как проверка для каждой n-ки знаков (т. е. чисел) того, является ли она формулой (в частности, поф и т. п.), требует рассмотрения лишь конечного числа знаков (это число не превосходит номера этой формулы при естественной нумерации), то свойство n-ки быть термом, формулой, поф, конъюнкцией и т. п. выражается п. р. предикатами; это относится и к распознаванию свободных и связанных вхождений переменных; такие операции или функции, как образование конъюнкций, отрицаний, связывание квантором, подстановка терма вместо

переменной, релятивизация формулы, число вхождений кванторов в формулу и т. п., выражаются при этом посредством п. р. функций, во всяком случае, посредством арифметических (т. е. выразимых в Z_1) фуикций или предикатов, чего здесь достаточно. В силу леммы C и следствия из нее, эти функции и предикаты (B, B')-абсолютны, коль скоро класс B транзитивен и конечнозамкнут, а $B \subseteq B'$.

Формулы часто будут (с помощью χ) отождествляться с числами $i, j, \ldots$; поэтому конъюикцию формул i и j можно будет обозначать через $i\,\&\,j$, отрицание i — через $\sim i$ и т. п. Эти функции будут п. р. функциями, если их продолжить до определенных для любых i, j, полагая их, например, равными нулю, коль скоро i или j не является формулой. Аналогично можно употреблять записи $\forall xi$ или $\exists xi$, где x обозначает число, являющееся переменной; они тоже будут обозначать п. р. функции при аналогичном доопределении их для случаев, когда x — не переменная или i — не формула. Эти операции $\&$, $\sim$, $\forall$, $\exists$ и т. п. я буду называть *арифметизированными логическими операциями.*

Термы вида $t(x)$, $\{t(x)\,|\,A(x)\}$ и т. п. также представляются числами (с помощью χ и чисел-знаков для функциональных символов, для $|$, $\{$ и $\}$ и т. п.).

(Теперь обычное определение доказательства в *ZF* приводит к арифметизированному понятию быть *числом-теоремой.*)

Теперь я рассмотрю ряд функций, последней из которых будет X_0^n. Вопросы об их определимости в *ZF* и абсолютности решаются рассмотренными до сих пор средствами — в большинстве случаев тривиально, а в отдельных случаях с помощью легких дополнительных соображений.

1) $X^1 = X$. $X^{n+1} = X \times X^n$.

2) $\langle x, y\rangle \in C^{A,B} \swarrow$

$$\leftrightarrow \exists u, v\,[u \in A \,\&\, v \in B \,\&\, x = \langle u, v\rangle \,\&\, y = v].$$

Таким образом, для $\langle u, v\rangle \in A\times B$, $C^{A,B}(\langle u, v\rangle) = v$.

3) $u \in X^n \to Q^X_{0,n}(u) = u$.

$$u \in X^n \,\&\, i+1 < n \to Q^X_{i+1,n}(u) = C^{X, X^{n-i-1}}\left(Q^X_{i,n}(u)\right).$$

$$u \in X^n \,\&\, i+1 \geqslant n \to Q^X_{i+1,n} = \emptyset.$$

$$\sim u \in X^n \to Q^X_{i,n}(u) = \emptyset \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Это определение подводится под схему рекурсии от i к $i+1$ с помощью эквивалентности

$$y = Q^X_{i+1,n}(u) \leftrightarrow \left(i+1 < n \,\&\, y = C^{X, X^{n-i-1}}\left(Q^X_{i,n}(u)\right) \vee i+1 \geqslant n \,\&\, y = \emptyset\right) \,\&\, u \in X^n \vee y = \emptyset \,\&\, (\sim u \in X^n),$$

через которую (с помощью определения, указанного для $Q^X_{0,n}(u)$) определяется при этом $Q^X_{i,n}(n)$ как функция от i. При $i < n$ $Q^X_{i,n}(u)$ есть (для $u \in X^n$) „i-й хвост“ n-ки u: $Q^X_{0,n}(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, $Q^X_{1,n}(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_2, \ldots, x_n\rangle, \ldots, Q^X_{i-1,n}(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_n\rangle = x_n$; в остальных случаях $Q^X_{i,n}(u) = \emptyset$.

4) при $j < n \neq 1$ $\langle u, v\rangle \in T^n_j \swarrow$

$$\leftrightarrow u \in X^n \,\&\, v \in X^n \,\&\, \exists x_1 \in X \swarrow$$

$$\exists x_j \in X \left\{\exists w \left[\langle x_j, w\rangle = Q^X_{j-1,n}(u) \,\&\, \langle x_1, w\rangle = Q^X_{j-1,n}(v)\right] \swarrow \right.$$

$$\left. \&\, \forall h < j-2 \forall x \in X \left(\exists y \langle x, y\rangle = Q^X_{h+1,n}(u) \swarrow \right.\right.$$

$$\left.\left. \leftrightarrow \exists z \langle x, z\rangle = Q^X_{h+1,n}(v)\right) \,\&\, \exists s \langle x_j, s\rangle \in v \,\&\, \exists t \langle x_1, t\rangle \in u\right\}.$$

При $j = n$ — так же, с заменой $\exists w [\ldots]$ на $Q^X_{n-1,n}(u) = x_n \,\&\, Q^X_{n-1,n}(v) = x_1$.

$$T^n_j \subseteq X^n \times X^n$$

$$T^1_1(\langle x\rangle) = \langle x\rangle = x.$$

При $1 \leqslant j \leqslant n \neq 1$ $T^n_j(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_j, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \ldots, x_n\rangle$, где $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^n$. (Точнее

было бы писать $T_j^{X,\,n}$.) Неравенство $h<j-2$ обеспечивает $n-j<n-h-2<n$ и, тем самым, наличие в y (и в z) более чем $n-j$, но менее чем $n-1$ членов, являющихся элементами X. При $j>n$ эта функция не будет рассматриваться, а при $j\leqslant n\neq 1$ для нее было дано явное определение (через $Q^X_{j,\,n}(u)$), выразимое в ***ZF***.

5) Пусть $n\geqslant 2$. $U_1^n=T_2^n$.

При $j>1$: $\langle u, v\rangle\in U_j^n \leftrightarrow \exists x, y, z\,[u=\langle x, y\rangle \,\&\, v=\langle x, z\rangle \,\&\, \langle y, z\rangle\in T_{j-1}^{n-1}]$ $U_j^n\subseteq X^n\times X^n$.

При $j=1$, $U_1^n(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)=\langle x_2, x_1, \ldots, x_n\rangle$; при $1<j\leqslant n$ $U_j^n(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)=\langle x_1, x_j, x_3, \ldots, x_{j-1}, x_2, x_{j+1}, \ldots, x_n\rangle$. При $j>n$ и при $n<2$ эта функция не будет рассматриваться.

Легко доказать, что всякое натуральное число $m(\geqslant 0)$ однозначно представимо в виде $m=\frac{n(n-1)}{2}+j-1$, где $1\leqslant j\leqslant n$ $\left(0=\frac{1\cdot(1-1)}{2}+1-1\right.$, далее — индукция по m, основанная на замене j числом $\left.j+1\right)$. Я буду обозначать $n=d_1(m)$, $j=d_2(m)$; это п. р. функции. Кроме того, заменяя в этом представлении m на $m+1$, получаем однозначное представление m в виде $m=\frac{\bar n(\bar n-1)}{2}+\bar j-2$, где $1\leqslant\bar j\leqslant\bar n$; я буду обозначать $\bar n=e_1(m)$, $\bar j=e_2(m)$. Ясно, что $e_1(m)=d_1(m+1)$, $e_2(m)=d_2(m+1)$. Кроме того, $d_1(0)=d_2(0)=1$, $d_1(1)=2$, $d_2(1)=1$ и $m<n\to d_1(m)<d_1(n)$ $(i=1, 2)$, откуда при любом m $e_1(m)\geqslant 2$. Итак, определены четыре п. р. функции, такие, что

$$6)\quad m=\frac{d_1(m)\,(d_1(m)-1)}{2}+d_2(m)-1,$$

$$1\leqslant d_2(m)\leqslant d_1(m),$$

$$7)\quad m=\frac{e_1(m)\,(e_1(m)-1)}{2}+e_2(m)-2,$$

$$1\leqslant e_2(m)\leqslant e_1(m);\ e_1(m)\geqslant 2.$$

Далее (ввиду $1 \leqslant d_2(m) \leqslant d_1(m)$, $1 \leqslant e_2(m) \leqslant e_1(m)$) определены функции:

8) $d(m) = T^{d_1(m)}_{d_2(m)}$,

9) $e(m) = U^{e_1(m)}_{e_2(m)}$.

Из определения функций $T^n_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ следует, что последовательность $d(0)$, $d(1)$, $d(2)$, ... осуществляет общую нумерацию функций f^m_j, определенных на $X^m (1 \leqslant j \leqslant m)$ следующим образом:

$$f^m_1(\langle x_1, \ldots, x_m\rangle) = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle,$$

$$f^m_2(\langle x_1, \ldots, x_m\rangle) = \langle x_2, x_1, x_3, \ldots, x_m\rangle$$

. . . . . .

$$f^m_j(\langle x_1, \ldots, x_m\rangle) = \langle x_j, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \ldots, x_m\rangle,$$

. . . . . .

$$f^m_m(\langle x_1, \ldots, x_m\rangle) = \langle x_m, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_1\rangle —$$

именно $d(0)$ есть f^1_1, $d(1)$ есть f^2_1, $d(2)$ есть f^2_2, $d(3)$ есть f^3_1, $d(4)$ есть f^3_2 и т. д. (т. е. $d(m)$, $m = 0, 1, 2 \ldots$ есть пересчет списка $f^1_1, f^2_1, f^2_2, f^3_1, f^3_2, f^3_3, f^4_1, \ldots$). Аналогично, $e(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, осуществляет пересчет функций $g^2_1, g^2_2, g^3_1, g^3_2, g^3_3, g^4_1, \ldots$, определяемых (при $n \geqslant 2$, $j \leqslant n$) на X^n посредством

$$g^n_1(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n\rangle,$$

$$g^n_2(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle,$$

. . . . . .

$$g^n_j(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_1, x_j, x_3, \ldots, x_{j-1}, x_2, x_{j+1}, \ldots, x_n\rangle,$$

. . . . . .

$$g^n_n(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_1, x_n, x_3, \ldots, x_{n-1}x_2\rangle.$$

При этих пересчетах $i > 1 \to f^i_k = d\left(\frac{i(i-1)}{2} + k\right) \& g^i_k = e\left(\frac{i(i-1)}{2} + k - 1\right)$.

Обычным образом определяется (при $n \neq 0$) п. р. функция

10) $\left[\frac{m}{n}\right]$, т. е. целая часть дроби $\frac{m}{n}$ ($\left[\frac{m}{n}\right]$ есть наибольшее q, для которого $nq \leqslant m$) и п. р. предикат.

11) $a \equiv l \pmod{c}$, где $c \neq 0$ (т. е. $a \geqslant b \,\&\, \exists d\,(a - b = cd) \vee a < b \,\&\, \exists d\,(b - a = cd)$).

Теперь я буду определять пять функций $s_0^{(l)}$, $s_1^{(l)}$, $s_2^{(l)}$, $t_1^{(l)}$ и $t_2^{(l)}$, определенных для натуральных чисел $i < 2(n+k)^2$ (где n и k — параметры, обозначающие натуральные числа). Их значениями могут быть 0, 1, а также множества, обозначаемые параметрами $t_1, \ldots, t_k$.

12) $i < (n+k)^2 \to s_0(i) = 0$,

$(n+k)^2 \leqslant i < 2(n+k)^2 \to s_0(i) = 1$,

13) $i < (n+k)\cdot n \vee (n+k)^2 \leqslant i < (n+k)^2 \swarrow$
$+ (n+k)\cdot n \to s_1(i) = 0$,

$(n+k)\cdot n \leqslant i < (n+k)^2 \vee (n+k)^2 \swarrow$
$+ (n+k)\cdot n \leqslant i < 2(n+k)^2 \to s_1(i) = 1$,

14) $\exists c < 2(n+k)\,(c(n+k) \swarrow$
$\leqslant i < c(n+k) + n) \to s_2(i) = 0$,

$\exists c < 2(n+k)\,(n + c(n+k) \swarrow$
$\leqslant i < (c+1)(n+k)) \to s_2(i) = 1$.

(Числа $< 2(n+k)^2$ распадаются на следующие друг за другом цепочки, длины которых поочередно — n и k; общее число этих цепочек длины n = общему числу цепочек длины $k = 2(n+k)$; на цепочках длины n $s_2(i) = 0$, а на цепочках длины k $s_2(i) = 1$.)

15) $i < (n+k)\cdot n \to t_1(i) = \left[\frac{i}{n+k}\right] + 1$,

$(n+k)\,n \leqslant i < (n+k)^2 \to t_1(i) = t_{\left[\frac{i-(n+k)\,n}{n+k}\right]+1}$,

$(n+k)^2 \leqslant i < (n+k)^2 + (n+k)\cdot n \to t_1(i) =$
$= \left[\frac{i-(n+k)^2}{n+k}\right] + 1$,

$(n+k)^2 + (n+k)\,n \leqslant i < 2(n+k)^2 \to t_1(i) =$
$= t_{\left[\frac{i-(n+k)^2-(n+k)\,n}{n+k}\right]+1}$,

16) $i \equiv p (\mathrm{mod}\, n+k) \& p < n+k \to p < n \& t_2(i) = p+1 \vee n \leqslant p \& t_2(i) = t_{p-n+1}$

Значение этих функций таково. Пусть φ_i есть i-я формула в перечне

$$x_1 \in x_1,\ x_1 \in x_2,\ \ldots,\ x_1 \in x_n,\ x_1 \in t_1,\ \ldots,\ x_1 \in t_k,$$
$$x_2 \in x_1,\ x_2 \in x_2,\ \ldots,\ x_2 \in t_k,\ \ldots,\ x_n \in x_1,\ \ldots,\ x_n \in t_k,$$
$$t_1 \in x_1,\ t_1 \in x_2,\ \ldots,\ t_1 \in x_n,\ t_1 \in t_1,\ \ldots,\ t_1 \in t_k,$$
$$t_2 \in x_1,\ \ldots,\ t_2 \in t_k,\ \ldots,\ t_k \in x_1,\ \ldots,\ t_k \in t_k,$$
$$x_1 = x_1,\ x_1 = x_2,\ \ldots,\ x_1 = x_n,\ x_1 = t_1,\ \ldots,\ x_1 = t_k,$$
$$x_2 = x_1,\ x_2 = x_2,\ \ldots,\ x_2 = t_k,\ \ldots,\ x_n = x_1,\ \ldots,\ x_n = t_k,$$
$$t_1 = x_1,\ t_1 = x_2,\ \ldots,\ t_1 = x_n,\ t_1 = t_1,\ \ldots,\ t_1 = t_k,$$
$$t_2 = x_1,\ \ldots,\ t_2 = t_k,\ \ldots,\ t_k = x_1,\ \ldots,\ t_k = t_k.$$
$$(i = 0,\ \ldots,\ 2(n+k)^2 - 1).$$

(Если буквами $u_1, \ldots, u_{n+k}$ обозначить сейчас буквы $x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_k$ в указанном порядке, то первые две пары строк представляют собой формулы $u_i \in u_j$, расположенные в лексикографическом порядке, а следующие две пары строк, расположенные в таком же порядке формулы $u_i = u_j$.)

(v1) $s_0(i) = 0$, если в φ_i входит $\in$, $s_0(i) = 1$, если в φ_i входит $=$.

(v2) $s_1(i) = 0$, если в φ_i слева от $\in$ или $=$ стоит x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, и $s_1(i) = 1$ в противном случае (т. е. если слева от $\in$ или $=$ в φ_i стоит t_j, $1 \leqslant j \leqslant k$).

(v3) $s_2(i) = 0$, если в φ_i справа от $\in$ или $=$ стоит x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, и $s_2(i) = 1$ в противном случае.

(v4) $t_1(i) = j$, если в φ_i слева от $\in$ или $=$ стоит x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

(v5) $t_1(i) = t_j$, если в φ_i слева от $\in$ или $=$ стоит t_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$.

(v6) $t_2(i) = j$, если в φ_i справа от $\in$ или $=$ стоит x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

(v7) $t_2(i) = t_j$, если в φ_i справа от $\in$ или $=$ стоит t_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$.

Теперь я буду определять функцию $m^i_{n,k}(X, t_1, \ldots, t_k)$, которую буду короче обозначать $m^i_{n,k}$ (здесь

$i<2(n+k)^2$ и X, t_1, ..., t_k — параметры, и достаточно рассматривать случаи $t_1, \ldots, t_k \in X$). Определение будет проведено путем разбора случаев. Во всех случаях $m^i_{n,k} \subseteq X^n$.

17) a) $s_0(i)=s_1(i)=s_2(i)=0$, $t_1(i)=1$, $t_2(i)=2$,
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \swarrow$
$\leftrightarrow x_1 \in X \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in X \,\&\, x_1 \in x_2$;

b) $s_0(i)=s_1(i)=s_2(i)=0$, $t_1(i)=t_2(i)$,
$m^i_{n,k}=\emptyset$;

c) $s_0(i)=1$, $s_1(i)=s_2(i)=0$, $t_1(i)=1$, $t_2(i)=2$,
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \swarrow$
$\leftrightarrow x_1 \in X \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in X_n \,\&\, x_1 = x_2$;

d) $s_0(i)=1$, $s_1(i)=s_2(i)=0$, $t_1(i)=t_2(i)$,
$m^i_{n,k}=X^n$;

e) $s_0(i)=s_1(i)=0$, $s_2(i)=1$, $t_1(i)=1$,
$t_2(i)=t_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$,
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \swarrow$
$\leftrightarrow x_1 \in X \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in X \,\&\, x_1 \in t_j$;

f) $s_0(i)=s_2(i)=0$, $s_1(i)=1$,
$t_1(i)=t_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, $t_2(i)=1$,
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \swarrow$
$\leftrightarrow x_1 \in X \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in X \,\&\, t_j \in x_1$;

g) $s_0(i)=1$, $s_1(i)=0$, $s_2(i)=1$, $t_1(i)=1$,
$t_2(i)=t_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$,
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \swarrow$
$\leftrightarrow x_1 \in X \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in X \,\&\, x_1 = t_j$;

h) $s_0(i)=1,\ s_2(i)=0,\ s_1(i)=1,\ t_2(i)=1,$
$t_1(i)=t_j\ (1\leqslant j\leqslant k),$
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \swarrow$
$\leftrightarrow x_1\in X\ \&\ \ldots\ \&\ x_n\in X\ \&\ t_j=x_1;$

i) $s_0(i)=0,\ s_1(i)=s_2(i)=1,$
$t_1(i)=t_j\ (1\leqslant j\leqslant k),\ \ t_2(i)=t_h\ (1\leqslant h\leqslant k)$
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \swarrow$
$\leftrightarrow x_1\in X\ \&\ \ldots\ \&\ x_n\in X\ \&\ t_j\in t_h;$

j) $s_0(i)=1,\ s_1(i)=s_2(i)=1,$
$t_1(i)=t_j\ (1\leqslant j\leqslant k),\ \ t_2(i)=t_h\ (1\leqslant h\leqslant k)$
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \swarrow$
$\leftrightarrow x_1\in X\ \&\ \ldots\ \&\ x_n\in X\ \&\ t_j=t_j,$

Теперь множество $m^i_{n,k}$ (при фиксированных X, $t_1, \ldots, t_k$ и при $i<2(n+k)^2$) определено для всех случаев, за исключением:

(k) $s_0(i)=s_1(i)=s_2(i)=0,\ t_1(i)\neq t_2(i),$
$t_1(i)\neq 1 \vee t_2(i)\neq 2$ (ср. a));

(l) $s_0(i)=1,\ s_1(i)=s_2(i)=0,\ t_1(i)\neq t_2(i),$
$t_1(i)\neq 1 \vee t_2(i)\neq 2$ (ср. c));

(m) $s_0(i)=s_1(i)=0,\ s_2(i)=1,\ t_1(i)\neq 1$ (ср. e));

(n) $s_0(i)=s_2(i)=0,\ s_1(i)=1,\ t_2(i)\neq 1$ (ср. f));

(o) $s_0(i)=s_2(i)=1,\ s_1(i)=0,\ t_1(i)\neq 1$ (ср. g));

(p) $s_0(i)=s_1(i)=1,\ s_2(i)=0,\ t_2(i)\neq 1$ (ср. h)).

Они отличаются от указанных при них для сравнения случаев a), c), e), f), g) и h) лишь заменой условий $t_1(i)=1$ или $t_2(i)=1$ их отрицаниями, или конъюнкции этих условий ее отрицанием, т. е. дизъюнкцией $t_1(i)\swarrow \neq 1 \vee t_2(i)\neq 2$. Множество $m^i_{n,k}$, определенное для любого из случаев q) (где «q» обозначает одну из букв a, c, e, f, g и h), я буду сейчас обозначать $m^{i,q}_{n,k}$.

В случаях k) — p) множество $m^i_{n,k}$ будет получаться из соответствующего $m^{i,q}_{n,k}$ перестановкой букв x_i ($i=1, \ldots, n$) или парой таких перестановок. Проще всего это определяется для случаев m) — p), когда требуется лишь одна перестановка, именно перестановка $(1\ t_1(i))$ в индексах при букве «x» в случаях m) и o) и перестановка $(1\ t_2(i))$ в этих индексах в случаях n) и p). Эти перестановки осуществляются с помощью функций $f^n_{t_1(i)}$ и $g^n_{t_2(n)}$ соответственно, т. е. определение $m^i_{n,k}$ имеет для этих случаев вид

в случае m): $m^n_{l,k} = f^n_{t_1(l)}[m^{n,e}_{l,k}]$;

в случае o): $m^n_{l,k} = f^n_{t_1(l)}[m^{n,g}_{l,k}]$;

в случае n): $m^n_{l,k} = f^n_{t_2(l)}[m^{n,f}_{l,k}]$;

в случае p): $m^n_{l,k} = f^n_{t_2(l)}[m^{n,h}_{l,k}]$.

(Записью $\varphi[m]$, где φ обозначает функцию, а m — множество или класс, я пользуюсь в этом добавлении для обозначения множества или класса значений, принимаемых функцией φ на элементах m, т. е. для обозначения $\{\varphi(x) \mid x \in m\}$, где x — буква, не входящая в обозначения „φ“ и „m“.) В системе *ZF* функции $f^n_{t_1(l)}$ и $g^n_{t_2(l)}$ определяются как $d\left(\frac{n(n-1)}{2} + t_1(i)\right)$ и $e\left(\frac{n(n-1)}{2} + t_2(i) - 1\right)$ (см. выше, стр. 308 перед определением 10); условие $n > 1$ соблюдается, так как при $t_1(i) \neq 1 \vee t_2(i) \neq 1$ в условиях случаев k) — p) имеет место $s_1(i) = 0 \vee s_2(i) = 0$, так что слева или справа от $\in$ или $=$ в φ_i стоит $x_{t_1(i)}$ или $x_{t_2(i)}$, и притом $1 \leqslant t_1(i) \leqslant n$ или соответственно $1 \leqslant t_2(i) \leqslant n$). Таким образом, определение $m^n_{l,k}$ для случаев m) — p) может быть выражено в *ZF*, напрнмер в виде $m^n_{l,k} = d\left(\frac{n(n-1)}{2} + t_1(i)\right)[m^{n,e}_{l,k}]$ для случая m) и т. п. Однако для простоты письма я буду продолжать пользоваться записями «$f^n_{t_1(l)}$» и «$g^n_{t_2(l)}$».

Остается рассмотреть случаи k) и l). Они рассматриваются совершенно аналогично — путем рассмотрения подслучаев, которые я тут явно рассмотрю лишь для k).

$k_1)$ $t_1(i)=2$, $t_2(i)=1$ — в этом случае надлежит иметь $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \leftrightarrow x_1 \in X \& \ldots \& x_n \in X \& x_2 \in x_1$, и определением для $m^i_{n,k}$ служит $m^i_{n,k} = f^n_2[m^{i,a}_{n,k}]$ $(= g^n_1[m^{i,a}_{n,k}])$.

$k_2)$ $t_1(i)=2$, $t_2(i)\neq 1$ — в этом случае надлежит иметь $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \leftrightarrow x_1 \in X \& \ldots \& x_n \in X \& x_2 \in x_{t_2(i)}$, и ввиду того что при этом для $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^n$ должно быть

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \leftrightarrow x_2 \in x_{t_2(i)} \leftrightarrow \langle x_2, x_{t_2(i)}, x_3, \ldots, x_{t_2(i)-1},$$
$$x_1, x_{t_2(i)+1}, \ldots, x_n\rangle \in m^{i,a}_{n,k}$$
$$\leftrightarrow g^n_{t_2(i)}(\langle x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n\rangle) \in m^{i,a}_{n,k}$$
$$\leftrightarrow g^n_{t_2(i)}(f^n_2(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)) \in m^{i,a}_{n,k},$$

определением для $m^i_{n,k}$ служит

$$m^i_{n,k} = f^n_2[g^n_{t_2(i)}[m^{i,a}_{n,k}]].$$

$k_3)$ $t_2(i)=1$, $t_1(i)\neq 2$. В этом случае надлежит иметь $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \leftrightarrow x_1 \in X \& \ldots \& x_n \in X \& x_{t_1(i)} \in x_1$, и аналогичным образом устанавливается, что определением для $m^i_{n,k}$ служит

$$m^i_{n,k} = g^n_{t_1(i)}[f^n_2[m^{i,a}_{n,k}]].$$

$k_4)$ $t_1(i)\neq 2$, $t_2(i)\neq 1$. В этом случае надлежит иметь $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in m^i_{n,k} \leftrightarrow x_1 \in X \& \ldots \& x_n \in X \& x_{t_1(i)} \in x_{t_2(i)}$, и аналогичным образом устанавливается, что определением для $m^i_{n,k}$ служит

$$m^i_{n,k} = f^n_{t_1(i)}[g^n_{t_2(i)}[m^{i,a}_{n,k}]]$$

(или $m^i_{n,k} = g^n_{t_2(i)}[f^n_{t_1(i)}[m^{i,a}_{n,k}]]$ — порядок выполнения перестановок $f^n_{t(i)}$ и $g^n_{t_2(i)}$ в этом случае не играет роли, что, впрочем, не будет использовано).

Случай l) распадается на подслучаи $l_1) - l_4)$, определяемые совершенно теми же условиями для $t_1(i)$ и $t_2(i)$; определение для $m^i_{n,k}$ отличается в каждом из этих случаев от только что рассмотренного для k) лишь заменой $m^{i,a}_{n,k}$ на $m^{i,c}_{n,k}$.

Тем самым определение 17) функции $m^i_{n,k}$ (в более подробной записи $m^i_{n,k}(X, t_1, \ldots, t_k)$) окончено. В нем $n \neq 0$, $k \geqslant 0$ и $i < 2(n+k)^2$.

Для функции $m^i_{n,k}$ имеет место соотношение

(w) $x_1 \in X \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in X \swarrow$
$\rightarrow (\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in m^i_{n,k}(X, t_1, \ldots, t_k) \leftrightarrow \varphi_i)$.

В случаях a) — j) справедливость обнаруживается непосредственным рассмотрением определения $m^i_{n,k}$ для этих случаев с учетом (v1)—(v4) и (v6); в случаях k) — p) к этому рассмотрению достаточно добавить, что эти случаи сводятся к ранее рассмотренным перестановкам букв $x_1, \ldots, x_n$, выражаемым посредством функций f^n_j и g^n_j и соответствующим образом учтенным в определении $m^i_{n,k}$ для этих новых случаев.

Функция $m^i_{n,k}(X, t_1, \ldots, t_k)$ осуществляет пересчет множеств n-ок $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, соответствующих, как указано в (w), $2(n+k)^2$ атомарным формулам φ_i, рассматриваемым в ранее указанном порядке.

Формула (w) распадается на конечное число случаев, не зависящее от n и k (эти случаи занумерованы буквами a) — p) с подразделением k) и l) на 4 подслучая). Для каждого из этих случаев доказательство проводится совершенно единообразно, завися от i, n, k, X, $t_1, \ldots, t_k$ лишь как от параметров, и соответствующая формула представляется числом, зависящим от этих же параметров.

Теперь я буду определять функцию $C^X_{n,k,t_1,\ldots,t_k}(i)$ (сокращенно: $C(i)$), осуществляющую такой же пересчет для всевозможных формул, получаемых из этих φ_i конечным числом применений логических операций $\sim$ и &. Определение будет дано посредством рекурсии по всевозможным натуральным числам i, причем H_j (в бо-

лее подробной записи $H_j(X, n, k, t_1, \ldots, t_k))$ будет обозначать функцию $C(i)$, ограниченную натуральным числом j.

В ближайших определениях 18) — 20) буквы «a» и «b» обозначают произвольные натуральные числа.

18) $g(a, b) = 2^a \cdot (2b+1) + 2(n+k)^2$.

Функция $g(a, b)$ осуществляет взаимно-однозначное отображение всех пар $\langle a, b\rangle$ на все четные натуральные числа, превосходящие $2(n+k)^2$. (Доказательство предоставляется читателю; оно использует теорему об однозначности разложения чисел на множители или ii) на стр. 53 в § 7 гл. I, а это формализуемо в ***ZF***.) Таким образом, $2^a \cdot (2b+1)$ пробегает все четные числа. Обратные функции $h_1(m)$ и $h_2(m)$ определяются сейчас только для четных $m > 2(n+k)^2$ (ср. аналогичные функции на стр. 64, § 8 гл. I) условиями:

19) $h_1(2^a \cdot 2(b+1) + 2(n+k)^2) = a$,

20) $h_2(2^a \cdot 2(b+1) + 2(n+k)^2) = b$.

$g(a, b)$ есть п. р. функция. Для того чтобы считать таковыми и h_1 и h_2, я дополню определения 19) — 20) условиями $h_1(2a+1) = h_2(2a+1) = 0$ и $a < 2(n+k)^2 \to h_1(a) = h_2(a) = 0$. Во всяком случае, $h_1(a) < a$ и $h_2(a) < a$ при $a \neq 0$.

Следующие два определения аналогичны введенным в леммах A и B.

21) $p = 1 \vee p = 2 \to [\tau_p(y, x) \leftrightarrow \exists n \neq 0$ (x — функция, определенная на n & $\langle h_p(n), y\rangle \in x$)].

22) $p = 1 \vee p = 2 \to [y = \tau_p(x) \leftrightarrow \exists n \neq 0$ (x — функция, определенная на n & $\tau_p(y, x)$) $\vee \sim \exists n \neq 0$ (x — функция, определенная на n) & $y = \emptyset$].

Если x — функция, определенная на n, то $y = \tau_p(x)$ есть значение этой функции на $h_p(n)$ ($< n \neq 0$; $p = 1, 2$).

Совершенно аналогично леммам A и B доказывается следующая

Лемма E. *Если класс B транзитивен и конечнозамкнут и $B \subseteq B'$, то функции $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ (B, B')-абсолютны.*

Теперь функция $C(i)$ определяется так:

23) $y = C(i) \leftrightarrow (i < 2(n+k)^2 \,\&\, y = m^i_{n,k}) \swarrow$
$\vee\, [i \geqslant 2(n+k)^2 \,\&\, (\exists j\,(i = 2j+1 \,\&\, y = X^n - \tau(H_i))\swarrow$
$\vee\, \exists j\,(i = 2j \,\&\, y = \tau_1(H_i) \cap \tau_2 H_i))]$.

Если правую часть этой эквивалентности обозначить через $A(H_i, y; i)$ (подробнее: $A(H_i, y; i; X, n, k, t_1, \ldots, t_k)$), то в ***ZF*** легко доказывается формула $\forall i \forall x \exists!\, y A(x, y; i)$. Согласно теореме о рекурсии (см. замечание на стр. 294), этим определена функция $C(i)$ (подробнее: $C^X_{n,k,t_1,\ldots,t_k}(i)$) для всех натуральных чисел i.

Выше была определена нумерация φ_i атомарных формул, содержащих лишь буквы $x_1, \ldots, x_n$ и параметры $t_1, \ldots, t_k$ ($i < 2(n+k)^2$). Теперь я продолжу эту нумерацию, распространив ее на всевозможные формулы φ_j, полученные из различных φ_i, $i < 2(n+k)^2$, с помощью операций $\sim$ и $\&$. При $i \geqslant 2(n+k)^2$, коль скоро $i = 2j+1$ и определена формула φ_j, φ_i определяется как $\sim\varphi_{2j}$, а коль скоро $i = 2j$ и при $g < i$ формулы φ_g определены, φ_i определяется как $\varphi_{h_1(2j)} \& \varphi_{h_2(2j)}$. Тем самым φ_i определена для любого натурального числа i и всякая формула только что описанного вида совпадает с φ_i для какого-нибудь i. (Это не та нумерация формул, о которой шла речь на стр. 304—305. Но переход от одной из них к другой осуществляется средствами п. р. функций и потому выразим в ***ZF***.)

При $i < 2(n+k)^2$, $C(i) = m^i_{n,k}$ и соотношение (w) дает

(w_1) $\quad x_1 \in X \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in X \rightarrow (\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in C(i) \leftrightarrow \varphi_i)$.

Пусть теперь $i \geqslant 2(n+k)^2$ и соотношение (w_1), с заменой в нем i на j, имеет место при всех $j < i$. Тогда, если $i = 2j+1$, то $C(i) = X^n - \tau(H_i) = X^n - C(2j)$ (ибо $\tau(H_{2j+1}) = C(2j)$), а $\varphi_i = \sim\varphi_{2j}$, и так как $2j < i$, то по условию

$x_1 \in X \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in X \rightarrow (\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in C(2j) \leftrightarrow \varphi_{2j})$,

откуда теперь следует (w_1) для $i = 2j+1$. Если же $i = 2j$, то $C(i) = \tau_1(H_i) \cap \tau_2(H_i) = H_i(h_1(i)) \cap H_i(h_2(i)) =$

$=C(h_1(i))\cap C(h_2(i))$, и так как $h_p(i)<i$ $(p=1,2)$, то по условию

$$x_1\in X\,\&\,\ldots\,\&\,x_n\in X\to(\langle x_1,\ \ldots,\ x_n\rangle\in C(h_p(i))\leftrightarrow\varphi_{h_p(i)})$$
$$(p=1,\ 2),$$

а так как $\varphi_i=\varphi_{h_1(2j)}\,\&\,\varphi_{h_2(2j)}=\varphi_{h_1(i)}\,\&\,\varphi_{h_2(i)}$, то это дает (w$_1$) для $i=2j$. Теперь (w$_1$) доказывается для всех натуральных чисел i посредством индукции. Если же φ_i рассматриваются как числа i, j, ... (см. стр. 304—305), то сами (w$_1$) становятся такими формулами-числами, а доказуемость их в ***ZF*** устанавливается индукцией по числу вхождений логических операций в правые части φ_i (с помощью сопоставлений этих операций с X^n-u, $u\cap v$, а также (w)).

Таким образом определена такая функция $C^X_{n,\,k,\,t_1,\,\ldots,\,t_k}(i)$ $(n>0,\ k\geqslant 0)$, что ее значения для $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ образуют класс таких n-ок $\langle x_1,\ \ldots,\ x_n\rangle$ из X^n, что φ_i истинна для $x_1,\ \ldots,\ x_n$, подставленных вместо ее соответствующих аргументов (обозначавшихся прежде буквами «x_1», ..., «x_n»). При этом φ_i пробегает всевозможные формулы, составленные из рассмотренных выше $2(n+k)^2$ атомарных формул с помощью $\sim$ и &, но так как остальные пропозициональные операторы ($\vee$, $\to$ и $\leftrightarrow$) сводятся к $\sim$ и & (в смысле эквивалентности формул), то класс значений $C^X_{n,\,k,\,t_1,\,\ldots,\,t_k}(i)$ представляет собой множество ($\subseteq P(X^n)$) таких $S^X_{n,\,k,\,t_1,\,\ldots,\,t_k}$, каждое из которых есть множество всех n-ок $\langle x_1,\ \ldots,\ x_n\rangle\in X^n$, удовлетворяющей какой-нибудь бескванторной формуле $A(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_k)$.

Далее,

24) $$C^X_{n,\,k}=\bigcup_{t_1,\ \ldots,\ t_k\in X,\ i\in\omega}\{C^X_{n,\,k,\,t_1,\,\ldots,\,t_k}(i)\}$$

есть множество таких же $S^X_{n,\,k,\,t_1,\,\ldots,\,t_k}$, для которых $t_1,\ \ldots,\ t_k\in X$, и при этом, ввиду отсутствия кванторов в формуле A, $A\equiv A_X$. Теперь

25) $$C^X_n=\bigcup_{k\in\omega}C^X_{n,\,k}$$

есть множество всевозможных таких S, что $S=\{\langle x_1,\ \ldots,\ x_n\rangle\,|\,A_X(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_k)\}$, где $x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t_1,\ \ldots$

$\ldots$, $t_k \in X$, и $A(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$ — бескванторная формула, не содержащая никаких термов, кроме $x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_k$ (где $t_1, \ldots, t_k$ — параметры, $k \geqslant 0$). Иными словами,

$$(\nabla) \qquad X_0^n = C_n^X,$$

и доказано, что X_0^n — и значит, и $X_0 = \bigcup_{n \neq 0} X_0^n$ — выразимо в ***ZF***.

Далее, при $r>0$, $n>0$, функцию X_r^n можно (следуя автору, см. начало § 3, гл. III) определить условием

$$(*) \qquad \begin{aligned} S \in X_r^n \swarrow \\ \leftrightarrow \exists T \in X_{r-1}^{n+1} \forall u (u \in S \leftrightarrow \exists x_0 \in X \langle x_0, u \rangle \in T) \swarrow \\ \vee \exists T \in X_{r-1}^{n+1} \forall u (u \in S \leftrightarrow \forall x_0 \in X \langle x_0, u \rangle \in T), \end{aligned}$$

которое выразимо в ***ZF***, если выразима соответствующая форма рекурсии.

Чтобы выразить эту рекурсию в ***ZF***, я введу следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R(X, T) &= \{u \mid \exists x_0 \in X \langle x_0, u \rangle \in T\}, \\ Z(X, T) &= \{u \mid \forall x_0 \in X \langle x_0, u \rangle \in T\}, \\ G(X, T) &= \{R(X, T), Z(X, T)\}, \\ E(X, Z) &= \bigcup_{T \in Z} G(X, T). \end{aligned}$$

Теперь (*) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S \in X_r^n \leftrightarrow \exists T \in X_{r-1}^{n+1} (S = R(X, T) \vee \exists T \in X_{r-1}^{n+1} (S = Z(X, T) \swarrow \\ \leftrightarrow \exists T \in X_{r-1}^{n+1} (S \in \{R(X, T), Z(X, T)\}) \swarrow \\ \leftrightarrow \exists T \in X_{r-1}^{n+1} (S \in G(X, T)) \swarrow \\ \leftrightarrow S \in E(X, X_{r-1}^{n+1}), \end{aligned}$$

что равносильно

$$X_r^n = E(X, X_{r-1}^{n+1})$$

или

$$(**) \qquad y = X_r^n \leftrightarrow \exists z (z = X_{r-1}^{n+1} \& y = E(X, z)).$$

Теперь, записывая, при любых n, r и y, $\langle ny\rangle \in h_r$ вместо $y = X_r^n$ получаем из (**)

(***) $\quad \langle ny\rangle \in h_r \leftrightarrow \exists z(\langle n+1, z\rangle \in h_{r-1} \& y = E(X, z))$

Пусть теперь F_ω — класс функций с областью определения ω; этот класс выразим формулой $\boldsymbol{ZF}$. Пусть

(+) $\quad v = \{\langle n, y\rangle \mid \exists z(\langle n+1, z\rangle \in u \& y = E(X, z))\}$.

Для $u \in F_\omega$ существует единственное v, удовлетворяющее (+), и притом $v \in F_\omega$ (ибо для всякого n $\exists!\, z\langle n+1\ z\rangle \in u$ и $y = E(X, z)$ определено однозначно). Теперь обычной рекурсией от r к $r+1$ определяется такая функция h_r, определенная на ω, что $h_0 = X_0^n$ (рассматриваемая как функция от n) и для $r \neq 0$ $h_r = \{\langle n, y\rangle \mid \exists z(\langle n+1, z\rangle \in h_{r-1} \& y = E(X, z))\}$. Для нее имеет место (***). Так как (в силу индукции по r) $\forall r \forall n \exists! y \langle n, y\rangle \in h_r$, я теперь определяю $y = X_r^n$ как $\langle n, y\rangle \in h_r$, что дает (**) и, наконец, (*). Итак, определение (*), т. е. $y = X_r^n$ сводится в $\boldsymbol{ZF}$ к обычной рекурсии от n к $n+1$.

Итак, функция X_r^n от r и n определима в $\boldsymbol{ZF}$. Индукцией по r легко доказывается, при $X \neq \emptyset$, $\forall n (S \in X^n \to S \subseteq X^n)$. Именно, при $r = 0$ $X_0^n = C_n^X$ было определено выше как $\bigcup\limits_{k \in \omega} C_{n,k}^X$, где $C_{n,k}^X$ — множество, элементами которого служат $S_{n,k,t_1,\ldots,t_k}^X \subseteq X^n$, откуда $S \in X_0^n \to S \subseteq X^n$. Далее, при $r \neq 0$, в предположении $\forall T \forall m (T \in X_{r-1}^m \to T \subseteq X^m)$, (*) дает

$$S \in X_r^n \to \exists T \in X_{r-1}^{n+1} | \forall u (u \in S \to \exists x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \in T) \vee \exists T \in X_{r-1}^{n+1} \forall u (u \in S \to \forall x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \in T)] \to \exists T \in X_{r-1}^{n+1} [\forall u (u \in S \to \exists x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \in T]$$

(ибо $\forall x_0 \in XA \to \exists x_0 \in XA$, а дизъюнкция идемпотентна) $\to \exists T \subseteq X^{n+1} [\forall u (u \in S \to \exists x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \in T) \to \exists T \forall u (u \in S \to \exists x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \in X^{n+1}) \to \forall u (u \in S \to \exists x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \in X^{n+1}) \to \forall u (u \in S \to u \in X^n) \to S \subseteq X^n$.

Поэтому (*) дает (при $X \neq \emptyset$)

$S \in X_r^n \leftrightarrow S \subseteq X^n \& [\exists T \in X_{r-1}^{n+1} \forall u (u \in S \leftrightarrow \exists x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \swarrow$

(****) $\in T) \vee \exists T \in X_{r-1}^{n+1} \forall u (u \in S \leftrightarrow \forall x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \in T)$.

X_0^n совпадает по предыдущему с C_n^X, т. е. множеством всех $S = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^n \mid A_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)\}$, где A — бескванторная формула, составленная из $x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_k \in X$. Коль скоро $r > 0$ при всяком m, X_{r-1}^m есть множество таких же S с тем лишь отличием, что A — это $(r-1)$-кванторная формула; в силу (****), X_r^n является множеством таких же S с r-кванторными A и представленными в предваренной форме, что, согласно известным теоремам исчисления предиктов, не является ограничением. (Релятивизация к X передается по индукции благодаря членам $\exists x_0 \in X$ и $\forall x_0 \in X$ в (****).)

Итак, X_r^n, выраженные в ***ZF*** в виде функций от r и n, являются именно теми множествами, которыми они должны были быть, т. е. это определение X_r^n в ***ZF*** достигает своей цели. Теперь можно определить $X_r = \bigcup_{n \neq 0} X_r^n$, и это будут те X_r, которые имеет в виду автор, однако они на самом деле не нужны для его целей.

После этого функция $Y = X'$ вводится в ***ZF*** определением $X' = X \bigcup \bigcup_{r \in \omega} X_r^1$ при $X \neq \emptyset$ и $\emptyset' = \{\emptyset\}$.

Определение X', а тем самым и M_α и L, в ***ZF*** окончено.

Чтобы покончить с нужными для гл. III определениями, остается выразить в ***ZF*** отношение $C(u, n, t_1, \ldots, t_k)$ (см. начало § 4, гл. III, стр. 181), т. е. $u = \{x \in X \mid B_{n,X}(x; t_1, \ldots, t_k)\}$, где B_n указывает некоторую нумерацию формул (которые снова, без ограничения общности, можно считать предваренными), а индекс X указывает релятивизацию B_n к X. По существу, оно получается так же, как и определение отношения $v = \bigcup_{r \in \omega} X_r^1$, но без суммирования по $t_1, \ldots, t_k$ и k; при $k > 0$ будет предполагаться, что $t_1, \ldots, t_k \in X$. Все, что требуется от участия индекса n, — это возможность ну-

мировать им формулы B из **ZF**, но это не должно быть предметом специальной заботы, если формулы отождествлены с числами, как это указано на стр. 305. Не требуется, в частности, для использования $C(u, n, t_1, \ldots, t_k)$ в этой книге, чтобы n пробегало весь натуральный ряд. Я буду писать i вместо n, где i пробегает числа, представляющие формулы, и обозначать это отношение посредством $C(u, i, t_1, \ldots, t_k)$.

Точнее, я следующим образом введу в рассмотрение функции $\bar{X}_r^n(k, t_1, \ldots, t_k)$, или, короче, $\bar{X}_r^n$, где $X \neq 0$[1]

$$\bar{X}_0^n = \bigcup_{i \in \omega} \{C^X_{n,\,k,\,t_1,\,\ldots,\,t_k}(i)\},$$

$$S \in \bar{X}_r^n \leftrightarrow \exists T \in \bar{X}_{r-1}^{n+1} \forall u (u \in S \leftrightarrow \exists x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \in T) \vee$$
$$\vee \exists T \in \bar{X}_{r-1}^{n+1} \forall u (u \in S \leftrightarrow \forall x_0 \in X \langle x_0, u\rangle \in T).$$

Оформление этой двойной рекурсии по r и n производится в **ZF** так же, как на стр. 319—320 для функции X_r^n. По-прежнему доказывается $S \in \bar{X}_r^n \to S \subseteq X^n$.

Здесь $k \geqslant 0$ и $t_1, \ldots, t_k$ — параметры, от которых зависит это определение $\bar{X}_r^n$. Так же, как соответствующее утверждение на стр. 321, теперь доказывается (при любых фиксированных значениях этих параметров), что при всяком r $\bar{X}_r^n$ является множеством всех таких S, для которых существует r-кванторная формула $A(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$, для которой $S = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^n | A_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)\}$.

Это доказательство формализуемо в **ZF**. Теперь, пользуясь упомянутым представлением формул (языка **ZF** с термами t_j) числами i, я буду обозначать через $\delta(i)$ число вхождений кванторов в i, через $p(i)$ число различных свободных переменных в i и через $q(i)$ число параметров t_j, входящих в i. δ, p и q являются п. р. функциями. Достаточно того, что эти функ-

[1]) Ниже, на стр. 323, следует довольно сложное определение для $i_X(x_m; t_j)$, дающее возможность определить, следуя идее Тарского, «истинное в X» суждение i как такое, что $\forall t(tyди_X)$, (что оказывается равнозначным $\emptyset yди_X$); см. сноску 2 на стр. 152. Здесь можно было бы применить простую трактовку $i_X(x_m; t_j)$, изложенную в сноске 3 на стр. 182.

ции вычислимы и являются арифметическими; тот факт, что i пробегает не весь натуральный ряд, во-первых, устраним, а во-вторых, несуществен, так как на стр. 304 по существу был введен п. р. предикат $F(n)$, «n представляет формулу», так что в случае $\sim F(n)$ можно положить $\delta(n)=p(n)=q(n)=0$. Если формула $A(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$ представляется числом i, а формулы $A_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$ — числом i_X (причем i_X — п. р. функция от i и X, а следовательно, выразима в $\boldsymbol{ZF}$), то посредством $i_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$ я буду выражать, что $x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_k$ *удовлетворяют* i_X. Это понятие выразимо в $\boldsymbol{ZF}$ следующим образом (причем запись $t(x)$ обозначает $\emptyset$, если неверно, что t — функция, в область определения которой входит x, $x\varepsilon y=\langle x, 21, y\rangle$ и $x\doteq y=\langle x, 15, y\rangle$, x, y, z — числа-переменные, а 21 и 15 — это $\in$ и $=$):

$$t\ y\partial\ (x\varepsilon y) \leftrightarrow t(x) \in t(y),\ t\ y\partial\ (x \doteq y) \leftrightarrow t(x) = t(y),$$

$$t\ y\partial\ (\sim y) \leftrightarrow \sim t\ y\partial\ j,\ t\ y\partial\ (i\ \&\ j) \leftrightarrow t\ y\partial\ i\ \&\ t\ y\partial\ j,$$

$$t\ y\partial\ \forall z\,(z\varepsilon y \to j) \leftrightarrow \forall u \in t(y)\,((t-(t|\{z\}))\cup\{\langle z, u\rangle\}\ y\partial\ j).$$

Теперь (обозначая x, x', x'', ... как на стр. 304) запись $i_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)$ я буду считать обозначающей

$$F(i)\ \&\ p(i) \leqslant n \&\ q(i) \leqslant k \&\ \exists w\,(w > i \&\ \{\langle 2, x_1\rangle, \langle 6, x_2\rangle, \ldots, \langle 4n-2, x_n\rangle, \langle 0, t_1\rangle, \ldots, \langle 4k, t_k\rangle, \langle 4(n+w)+2, X\rangle\}\ y\partial\ i_{4\,(n+w)+2},$$

где условие $w<i$ обеспечивает невхождение переменной $4(n+w)+2$ в формулу i.

Итак, в $\boldsymbol{ZF}$ выразима и доказуема эквивалентность

$$S \in \bar{X}^n_r(k, t_1, \ldots, t_k) \leftrightarrow \exists i\,(F(i)\swarrow \&\ \delta(i)=r\ \&\ p(i) \leqslant n\ \&\ q(i) \leqslant k\swarrow \&\ S=\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^n \mid i_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\}).$$

Следовательно, в $\boldsymbol{ZF}$ выразима и правая часть этой эквивалентности, а значит, и отношение

$$D(S, i, n, r, t_1, \ldots, t_k) \equiv F(i)\ \&\ \delta(i)=r\swarrow \&\ p(i) \leqslant n\ \&\ q(i) \leqslant k\swarrow \&\ S=\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^n \mid i_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k)\}.$$

Теперь остается определить

$$C(u,\ i,\ t_1,\ \ldots,\ t_k) \equiv \exists r D(u,\ i,\ 1;\ r,\ t_1,\ \ldots,\ t_k).$$

Теперь уже нетрудно доказать $C(u,\ i,\ t_1,\ \ldots,\ t_k)$ $\leftrightarrow \exists r(F(i)\,\&\,\delta(i)=r\,\&\,p(i)\leqslant 1\,\&\,q(i)\leqslant k\,\&\,u=\{x\in X\mid i_X($ $t_1,\ \ldots,\ t_k)\}$, а затем $C(u,\ i,\ t_1,\ \ldots,\ t_k)\leftrightarrow u=\{x$ $\in X\mid i_X(x; t_1,\ \ldots,\ t_k)\}$, и кроме того, что $i_X(x; t_1,\ \ldots,\ t_k)$ $\leftrightarrow B_{i,X}(x; t_1,\ \ldots,\ t_k)$ (см. стр. 181), где B_i — та форму ла **ZF**, которая представляется числом i. Последнее до казывается проще всего путем индукции по числу логи ческих операций в B, с помощью указанных определе ний для *туд j* на каждом шаге. Это — один из возмож ных путей восполнения пробелов, сознательно допущен ных автором (причем, как указал В. Н. Гришин, это оп ределение для *туд j* позволяет определить X' и устано вить абсолютность X' гораздо проще, чем это здесь описывается, не вводя $m^i_{n,k}$ и т. п. Именно, полагая $t^s_v=(t-(t\{v\}))\cup\{\langle v,\ s\rangle\}$, можно затем положить $X'=$ $=\{u\subseteq X\mid \exists i\exists t\forall s\ (s\in u\leftrightarrow t^s\ уд i)\}$; абсолютность *уд*, а затем и X' можно доказать с помощью аналога теоремы AR на стр. 295. Затем, положив $C_X(u,\ i,\ t)\equiv\forall s$ $(s\in u\leftrightarrow t^s_2 уд i)$, можно определить $C(u,\ i;\ t_1,\ \ldots,\ t_k)$ как $C_X(u,\ i,\ t)$, где $t=\{\langle 6,\ t_1\rangle,\ \langle 10,\ t_2\rangle,\ \ldots,\ \langle 4k+2,\ t_k\rangle\}$).

§ 6. Как уже было отмечено, одной транзитивности классов B и B' недостаточно для $(B,\ B')$-абсолютности отношения 15, т. е. $Y=X'$. Ввиду этого было предложено считать класс B конечно-замкнутым — но и этого окажется недостаточным, по крайней мере для того способа, которым я намерен восполнять имеющиеся в изложении автора пробелы. Конечно, достаточно рассматривать лишь такие B и B', для которых $(B,\ B')$-абсолютность каких-либо отношений или функций используется в рассуждениях автора.

В § 3, гл. III речь идет о $(L,\ V)$-абсолютности отношений 14—17; кроме того, в доказательстве теоремы 1 из § 4 гл. III используется $(R,\ V)$-абсолютность отношения $y\in M_\beta$. При этом R — транзитивное множество, $\in$-изоморфное T, где T — некоторое экстенсиональное множество, удовлетворяющее условиям леммы 1 из § 4 гл. III. Это множество было определено с помощью тео-

ремы Лёвенгейма — Скулема из § 8, гл. II, а также с помощью соблюдения в **ZF** аксиомы экстенсиональности и суждения «β строит M_β». Конечно, доказательство теоремы 1 остается в силе и в случае присоединения (в определении T) к этим суждениям любого конечного числа других суждений, доказуемых в **ZF**; это обстоятельство будет использовано.

Конечно-замкнутыми являются, в частности, все множество M_α, где α — предельный ординал, а также класс L. Если к числу только что упомянутых суждений, доказуемых в **ZF** и используемых при определении множества T из леммы 1 § 4 гл. III, присоединить теорему о существовании множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ для любых $x_1, \ldots, x_n$, где n — натуральное число, то T, а следовательно, и R, будет конечно-замкнутым, но следует позаботиться о надлежащей формулировке этой теоремы в **ZF**.

Из $M_\alpha \subseteq T$ и бесконечности α следует $\omega \subseteq T$. Присоединю к определению T аксиому пары. Тогда T и R будут парно-замкнутыми. Только что упомянутая теорема о существовании $\{x_1, \ldots, x_n\}$ теперь может быть заменена утверждением о существовании области значений для любой взаимно однозначной функции, определенной на любом $n<\omega$. Это утверждение доказуемо в **ZF**, а присоединение его к определению T обеспечивает и соблюдение его в R и тем самым конечную замкнутость R.

Теперь я приступаю к доказательству (B, B')-абсолютности отношений 15—17 из § 3 гл. III для нужных B и B'. При этом будет использована теорема AR, в связи с чем для некоторых функций φ придется доказывать (B, V)-абсолютность. (Впрочем, в гл. III всюду $B'=V$, а B есть L или R.) Надо будет проверять замкнутость класса B относительно нужных φ, а также начальную α-φ-замкнутость.

(Хотя и можно будет доказать абсолютность также и для отношения $14: Y=X_r$, где $X_r = \bigcup_{n\neq 0} X_r^n$, в этом не будет надобности, так как в определении X' участвовало не X_r, а X_r^n.) При определении M_α использование трансфинитной рекурсии заведомо неизбежно. Так как

абсолютность отношения $y \in M_\beta$ будет доказывать с помощью теоремы AS′, я буду доказывать абсолю ность не только отношения, но и функции $x = M_\alpha$.

Теорема AM. *Пусть* B — *транзитивный конечн замкнутый класс,* $B \subseteq B'$, β — *предельный ординал ви* $\delta + \omega^2$, $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \in B$. *Тогда*: a) *функция* $Y = X'$, *ограниче ная множеством* $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, (B, B')-*абсолютна*; b) *функци* $x = M_\alpha$, *ограниченная ординалом* β, (B, B')-*абсолютн*

Доказательство. a) Рассмотрю на $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ п порядку функции и предикаты, использованные пр определении X'. В силу леммы C и следствия из нее арифметические функции и предикаты (B, B')-абсолют ны. В силу леммы F на стр. 332 можно не заботиться (B, B')-абсолютности этой области $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$.

1) X^n. Эта функция определена путем рекурсии от n к $n+1$ (начиная с $n=1$, что, конечно, несущественно хотя бы потому, что вместо «X^n» можно было бы всюду писать «X^{n-1}»). Согласно теореме AR_ω, достаточно ука зать на условие $X \in B$ (вытекающее из $X \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \in B$ и $\mathrm{Tr}(B)$) и на (B, B')- и (B, V)-абсолютность функции $x \times y$, ограниченной множествами x и y из $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Коль скоро $x, y \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, существует $\gamma<\beta$, такое, что $x, y \in M_\gamma$, и, ввиду $\mathrm{Tr}(M_\gamma)$, для любых $u \in x$, $v \in y$ имеет место $u, v \in M_\gamma$, $\{u\}, \{uv\} \in M_{\gamma+1}$, $\langle u, v\rangle \in M_{\gamma+2}$, $x \times y = \{\langle u, v\rangle \mid u \in x \,\&\, v \in y\} \in M_{\gamma+3}$ (ибо $x, y \in M_\gamma \subseteq M_{\gamma+3}$); ввиду предельности β, из $\gamma<\beta$ следует $\gamma+3<\beta$ и $x \times y \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Ввиду $\mathrm{Tr}(B)$, $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \in B$ дает $x \times y \in B$.

Итак, $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ замкнуто относительно функции $x \times y$, ограниченной множествами $x, y \in \bigcup M_\alpha$. Следовательно,

класс B замкнут относительно этой функции, рассматриваемой лишь для аргументов из $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$. При формализации определения $x\times y$ ($x\times y=\{w \mid \exists u, v\, w=\langle u, v\rangle \& u \in x \& v \in y\}$ с последующей заменой формулы $w=\langle u, v\rangle$) войдут лишь кванторы с переменными (u, v и т. д.), ограниченными множеством $M_\gamma \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, а потому релятивизация ограниченной (как указано) функции $x\times y$ к любому $C \supset \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, в частности к B и к B', существует (и притом не меняет значения $x\times y$). (B, B')-абсолютность отношения $z=x\times y$ уже была доказана. Следовательно, и функция $z=x\times y$ (B, B')-абсолютна (и это верно также при $B'=V$).

Итак, функция X^n $\left(\text{для } x \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha\right)$ (B, B')-абсолютна; следовательно, существуют ее релятивизации к B и к B', и, в силу теоремы AR_ω, при $X \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \in B$ они совпадают с X^n. Следовательно, $X^n \in B$, т. е. B замкнут относительно X^n (а индукцией по n доказывается для $X \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ и $X^n \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$).

2) $C^{A, D}$ для $A, D \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$. ($B$, B')-абсолютность отношения $\langle x, y\rangle \in C^{A,D}$ при $A, D \in B$ доказывается так же, как для отношения 9 из § 3 гл. III (а $A, D \in B$ следует из $A, D \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \in B$ и $\mathrm{Tr}(B)$). Замкнутость B относительно $C^{A, D}$ (ограниченного множествами $A, D \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$) и существование (и неизменность) релятивизации этой функции от A, D к B и B' (включая случай $B'=V$) доказывается совершенно так же, как для $x\times y$ при рассмотрении 1).

3) $Q^X_{i, n}(u)$. Эта функция была определена рекурсией от i к $i+1$. Так как $\left(\text{при } X \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \in B\right)$ $Q^X_{0, n}(u) = u \in X^n \in B$, согласно теореме AR_ω, достаточно устано-

вить (B, V)- и (B, B')-абсолютность функции от $v \in B$, определяемой условием

$$\big(i+1<n \,\&\, y = C^{X,\ X^{n-i-1}}(v) \vee i+1 \geqslant n \,\&\, y = \emptyset\big) \swarrow$$
$$\&\, u \in X^n \vee y = \emptyset \,\&\, (\sim u \in X^n).$$

Для установления абсолютности этого отношения достаточно теперь сослаться на теорему AS, а тот факт, что это отношение определяет функцию $y = \psi(v)$, относительно которой класс B замкнут, устанавливается разбором (трех) случаев; при этом (с помощью 2) и абсолютности $y = \emptyset$) устанавливается (B, B')- и (B, V)-абсолютность этой функции.

Согласно последнему утверждению теоремы AR_ω этим доказана и замкнутость B относительно $Q^X_{i,\,n}(u)$ (как функции от i).

4) T^n_j (при $1 \leqslant j < n$). В силу $u, v \in X^n \in B$, $\mathrm{Tr}(B)$ дает $u, v \in B$; $x_1, x_j \in X \in B$ так же дает $x_1, x_j \in B$; $u, v \in B$ дает, ввиду только что установленной замкнутости B относительно $Q^X_{i,\,n}(u), Q^X_{j,\,n}(u) \in B$, $Q^X_{j+1,\,n}(u) \in B$, $Q^X_{n+1,\,n}(v) \in B$, откуда, в силу $\mathrm{Tr}(B)$, $w \in B$, $\langle x, y\rangle \in B$, $\langle x, z\rangle \in B$, $y \in B$, $z \in B$; далее, в силу $\mathrm{Tr}(B)$, $x, x_1, x_j \in X$ дают $x, x_1, x_j \in B$, а $v \in B$ и $\langle x_j, s\rangle \in v$ дает $s \in B$. В силу конечной замкнутости B, $h \in B$. Следовательно, релятивизация к B или к $B' \supseteq B$ не меняет отношения $\langle u, v\rangle \swarrow \in T^n_j$ и оно (B, B')-абсолютно. Кроме того, оно определяет функцию $T^n_j(u) = v \in X^n$, определенную на X^n — и, ввиду $X^n \in B$, B замкнут относительно этой функции, которая, ввиду неизменности определяющего ее отношения $\langle u, v\rangle \in T^n_j$ при релятивизациях к B и к B', (B, B')-абсолютна. Аналогично при $j = n$.

5) U^n_j (при $n \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant n$). Ввиду $u, v \in X^n \in B$ и $\mathrm{Tr}(B)$, $u, v \in B$ и далее — $u = \langle x, y\rangle$ и $v = \langle x, z\rangle$ вместе с $\mathrm{Tr}(B)$ дают $x, y, z \in B$. Поэтому релятивизация к B или к $B' \supseteq B$ не меняет значений кванторов в определении U^n_j — и, в силу (B, B')-абсолютности отношения $u = \langle x, y\rangle$ и функции T^{n-1}_{j-1}, отношение $\langle u, v\rangle \in U^n_j$ (B, B')-абсолютно; оно определяет функцию U^n_j, относительно которой B замкнут в силу $v \in B$, а ввиду только что ука-

занной неизменности кванторов при релятивизации к B и B' эта функция U_j^n (B, B')-абсолютна.

Функции 6) и 7) — арифметические, и теперь функции 8) и 9) (B, B')-абсолютны (в частности, при $B'=V$) в силу теоремы AS. Функции и отношения 10)—14) — арифметические.

Далее — если функция определяется разбором случаев, в каждом из которых она, будучи ограничена аргументами, удовлетворяющими условиям, определяющим этот случай, (B, B')-абсолютна, то эта функция (B, B')-абсолютна. (Это легко доказывается разбором тех же случаев.) Арифметическая функция, ограниченная арифметическим же условием (как в определении тех случаев, на которые разлагается определение функций 15) и 16) — $(n+k)n \leqslant i < (n+k)^2$, $n \leqslant p$ и т. п.) — (B, B')-абсолютна (легко доказывается с помощью леммы C). Функция $y=t$, где $t \in B$ — параметр, (B, B')-абсолютна, а потому (B, B')-абсолютна и каждая из функций $t_h(i) = t_{r(i, p, n, k)}$, где n и k — числовые параметры, а $r(i, p, n, k)$ — вычислимая арифметическая функция, для которой $1 \leqslant r(i, p, n) \leqslant k$ $(h=1, 2)$, какими бы арифметическими условиями не ограничить i в $\tau_h(i)$. Поэтому (B, B')-абсолютны функции 15), 16) и 17). Для 17) надо в каждом случае установить $m^i_{n, k} \in B$. Во всех случаях $m^i_{n, k} \subseteq X^n$, где $X \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha$ и существует $\gamma < \beta$ такое, что $X^n \in M_\gamma$, а при $t_1, \ldots, t_k \in X$ будет и $t_1, \ldots, t_k \in M_\gamma$; множество $m^i_{n, k}$ в каждом случае выделяется из X^n условием, зависящим лишь от x_i, $t_j \in X_\gamma$ и от ранее рассмотренных (B, B')-абсолютных функций T_j^n и U_j^n, значения которых $\in X^n \subseteq M_\gamma$, без участия кванторов, не входящих в определения этих функций, откуда $m^i_{n, k} \in M_{\gamma+1}$, а так как β предельно, то $\gamma+1<\beta$ и $m^i_{n, k} \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha \in B$; в силу $\mathrm{Tr}(B)$, $m^i_{n, k} \in B$, так что B замкнуто относительно $m^i_{n, k}$, а (B, B')-абсолютность этой функции, ограниченной условиями каждого из случаев ее определения, доказывается уже упомянутыми средствами.

Функции 18) — 20) — арифметические, а 21) и 22) (B, B')-абсолютны (в частности, при $B'=V$) в силу леммы E).

Функция 23) определяется посредством трансфинитной рекурсии, но только для натуральных чисел, а потому условие начальной α-φ-замкнутости теоремы AR заменяется условием конечной замкнутости B. $C(0)=m_{n,k}\in B$ в силу замкнутости B относительно $m^i_{n,k}$ и $0\in B$. В качестве φ из теоремы AR_ω выбирается функция, определяемая правой частью 23) как функция y от аргумента H_i, ограниченного множеством $\bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha$ и рассматриваемого сейчас как произвольный элемент этого множества. (Это ограничение области определения φ будет оправдано в конце настоящего абзаца.) Ввиду $\omega\subseteq B$ кванторы при этом не меняют своего значения при релятивизации к B и к B'. Так как согласно леммам B и E, функции τ, τ_1 и τ_2 (B, B')-абсолютны, равно как и X^n, то остается установить (B, B')-абсолютность разности $u-v$ (для $u=X^n$ и $v=\tau(H_j)$) и пересечения $u\cap v$, причем ввиду $u\cap v=u-(u-v)$ и теоремы AS достаточно рассмотреть разность $u-v$ (для $u, v\in\bigcup\limits_{\alpha<\beta}M_\alpha$). $z=u-v$ (B, B')-абсолютно, так как равнозначно $\forall t(t\in z\leftrightarrow t\in u\,\&\sim t\in v$, (см. iii) и v)), причем, в силу $\mathrm{Tr}(B)$ $t\in z$ или $t\in u$ влечет $t\in B$ при z, $u\in B$, а потому квантор $\forall t$ не меняет своего значения при релятивизации к B и к $B'\supseteq B$. Поэтому остается доказать, что при $u, v\in\bigcup\limits_{\alpha<\beta}M_\alpha$ $u-v\in\bigcup\limits_{\alpha<\beta}M_\alpha\in B$. Пусть $u\in M_{\alpha_1}$, $v\in M_{\alpha_2}$, $\alpha_1, \alpha_2<\beta$, $\gamma=\max(\alpha_1, \alpha_2)<\beta$, тогда $u, v\in M_\gamma$ и $u-v\in M_{\gamma+1}$ и в силу предельности β $\gamma+1<\beta$, откуда $u-v\in\bigcup\limits_{\alpha<\beta}M_\alpha\subseteq B$. Так как при любом δ из $x\in M_\delta$ следует $\tau(x)$, $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)\in M_\delta$, то из $H_i\in\bigcup\limits_{\alpha<\beta}M_\alpha$ следует теперь $C(i)\in\bigcup\limits_{\alpha<\beta}M_\alpha$ и, в силу конечной замкнутости $\bigcup\limits_{\alpha<\beta}M_\alpha$, $H_{i+1}\in\bigcup\limits_{\alpha<\beta}M_\alpha$ (чем оправдывается принятое выше ограничение области определения φ).

Теперь, в силу теоремы AR_ω, доказана (B, B')-абсолютность функции $C(i)$, т. е. $C^X_{n,k,t_1,\ldots,t_k}(i)$ с параметрами $X, n, k, t_1, \ldots, t_k$ и совпадение ее с ее релятивизацией к B, а потому и замкнутость B относительно этой функции. В частности, возможно $B' = V$.

Так как $\omega \subseteq B$ и рассматриваются лишь $X \subseteq B$ (в силу $X \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha \in B$ и $\mathrm{Tr}(B)$), то суммирования по t_j, i и k в определениях 24) и 25) сохраняют (B, B')-абсолютность, т. е. отношения $y = C^X_{n,k}$ и $y = C^X_n$ (B, B')-абсолютны; именно релятивизация к B и к $B' \supseteq B$ не меняет значения тех кванторов, которыми выражаются в ***ZF*** эти суммирования. Поэтому если B замкнут относительно этих функций (рассматриваемых для $X \in \bigcup\limits_{\alpha\in\beta} M_\alpha$), то их релятивизации к B и к B' совпадают с ними же и эти функции (B, B')-абсолютны.

Выше было доказано, что при $u, v \in M_\gamma$, где $\gamma < \beta$, $u - v \in M_{\gamma+1}$, причем (начиная с $i = 2(n+k)^2$) $C(i) = u - v$, так что $C(i) \in M_{\gamma+1}$, или же $C(i)$ есть $u \cap v$, где $u \in M_{\gamma_1}$, $v \in M_{\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 < \beta$ и $C(i) \in M_{\max(\gamma_1,\gamma_2)+1}$. Поэтому всякое $H_j \in M_{\gamma+j}$, где $j < \omega$, и $C^X_{n,k,t_1,\ldots,t_k}(i) \in \bigcup\limits_{j<\omega} M_{\gamma+j} \subseteq M_{\gamma+\omega}$; здесь $\gamma + \omega < \beta$ ввиду условия, что β имеет вид $\delta + \omega^2$. Ввиду $X \subseteq M_{\gamma+\omega}$, $\omega \subseteq M_{\gamma+\omega}$, суммирования по t_j, i и k приводят к $C^X_{n,k} \in M_{\gamma+\omega+1}$ и $C^X_n \in M_{\gamma+\omega+1}$, где $\gamma + \omega + 1 < \beta$, ибо β имеет вид $\delta + \omega^2$, а следовательно, $C^X_{n,k} \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha$, $C^X_n \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha \subseteq B$ и B замкнут относительно рассматриваемых функций.

Итак, доказана (B, B')-абсолютность функции C^X_n, т. е. функции $Y = X^n_0$. Далее легко доказывается (B, B')-абсолютность функций $R(X, T)$, $Z(X, T)$, $G(X, T)$ и $E(X, Z)$, ограниченных аргументами, принадлежащими $\bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Именно, условия $\exists x_0 \in X\, \langle x_0, u\rangle \in T$ и $\forall x_0 \in X\, \langle x_0, u\rangle \in T$ (B, B')-абсолютны в силу $X \subseteq B$, так что релятивизация к B и к B' не может изменить

первых двух функций и остается лишь доказать замкнутость B относительно них. Пусть X, $T \in M_\gamma$, где $\gamma < \beta$, тогда, ввиду $\mathrm{Tr}(M_\gamma)$, $u \in M_\gamma$, а также $x_0 \in M_\gamma \subseteq M_{\gamma+2}$; так как $\langle x_0, u\rangle \in M_{\gamma+2}$, то после устранения символа пары $\langle x_0, u\rangle$ появляются лишь переменные с областью $M_{\gamma+2}$, откуда $R(X, T)$ и $Z(X, T) \in M_{\gamma+3}$, причем $\gamma+3<\beta$ ввиду предельности β. Далее очевидна (B, B')-абсолютность $G(X, T) \in M_{\gamma+4}$. Если еще $z \in M_\gamma$ (что не является ограничением), то квантор $\exists T\, Z \in$ в определении $E(X, Z)$ не меняет своего значения при релятивизации к B и к $B' \supseteq B$, так что опять остается лишь доказать замкнутость B относительно $E(X, Z)$ для X, $Z \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Очевидно, что $E(X, Z) \in M_{\gamma+5}$.

Класс $F\omega(B, B')$-абсолютен ввиду (B, B')-абсолютности отношений 11а, 13 и 2 из § 3 гл. III.

Далее, в силу $\mathrm{Tr}(B)$ при $u \in B$ квантор $\exists z$ в $(+)$ не меняет своего значения при релятивизации к B и к $B' \supseteq B$, а потому отношение между u и v, выражаемое формулой $(+)$, (B, B')-абсолютно, и если $u \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha \to v \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha$, то B замкнут относительно этой функции v от u, ограниченной множеством $\bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha$ и эта функция (B, B')-абсолютна. Пусть X, $u \in M_\gamma$, где $\omega<\gamma<\beta$ (такое γ существует ввиду $\beta=\delta+\omega^2$). Тогда, ввиду $\mathrm{Tr}(M_\gamma)$, будет $z \in M_\gamma$, $y \in M_{\gamma+5}$ и $\langle n, y\rangle \in M_{\gamma+7}$, $\langle n+1, z\rangle \in M_{\gamma+7}$, а потому $v \in M_{\gamma+8}$ и $\gamma+8<\beta$. Это верно и при $B'=V$; так как $h_0 = X_0^n = C_n^X \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} M_\alpha$, то по теореме $\mathrm{AR}'_\omega(B, B')$-абсолютна и функция h_r, определенная с помощью $(+)$. Так как $\forall r \forall n \exists! y \langle n, y\rangle \swarrow \in h_r \in F_\omega$, то (B, B')-абсолютность функции X_r^n вытекает теперь из $y \in M_{\gamma+5}$ и следующей простой леммы:

Лемма F. *Пусть отношение $A(x_1, \ldots, x_n, y)$ удовлетворяет условиям $A \leftrightarrow A_B \leftrightarrow A_{B'}$, для всех $x_1, \ldots, x_n \in C \subseteq B$ и $y \in B$, и пусть еще $\forall x_1 \in B, \ldots, \forall x_n \in B\ \exists! y \in B A(x_1, \ldots, x_n, y)$. Тогда функция $y=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, определяемая этим отношением для $x_1, \ldots, x_n \in C$, (B, B')-абсолютна.*

(Условие $y \in M_{\gamma+5}$ обеспечивает неизменность квантора $\exists! y$ при релятивизации $\exists! y \langle n, y\rangle \in h_r$.)

Теперь доказана (B, B')-абсолютность функции $Y = X_r^n$ — в частности, при $B' = V$. (B, B')-абсолютность функции $Y = X'$, рассматриваемой для $X \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, вытекает теперь из $X' = X \cup \bigcup_{n\neq 0} X_r^n$, ибо квантор $\exists r \neq 0$ не меняет своего значения при релятивизации к B и к $B' \supseteq B$, а $X \in M_\gamma$ влечет $X \subseteq M_\gamma$ (в силу $\mathrm{Tr}(M_\gamma)$) и далее (в силу монотонности X') $X' \subseteq (M_\gamma)' = M_{\gamma+1} \in M_{\gamma+2} \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$. (Случай $X \neq \emptyset$ рассматривается очень просто, но отдельно.) Итак, (B, B')-абсолютна и функция $Y = X'$, причем допустимо $B' = V$.

b) Чтобы доказать (B, B')-абсолютность функции $x = M_\alpha$, ограниченной ординалом β, достаточно с помощью теоремы AR доказать (B, B')-абсолютность этой же функции, ограниченной произвольным ординалом вида $\gamma+1<\beta$. Действительно, тогда для всякого $\gamma<\beta$ $y = M_\gamma$ является значением функции M_α, ограниченной ординалом $\gamma+1<\beta$, и в силу (B, B')-абсолютности этой функции $y = M_\gamma = (M_\gamma)_B = (M_\gamma)_{B'}$, откуда следует для функции M_α, ограниченной ординалом β, существование релятивизаций к B и к B', совпадающих с этой функцией, а также (B, B')-абсолютность отношения $y = M_\gamma$ при $\gamma<\beta$, т. е. (B, B')-абсолютность функции M_α, ограниченной ординалом β.

Отныне я буду обозначать через h_γ функцию M_α, ограниченную (произвольным) ординалом γ.

Пусть теперь $\gamma+1<\beta$. Функция $h_{\gamma+1}$, т. е. функция M_α, ограниченная ординалом $\gamma+1$, определяется посредством рекурсии с помощью некоторой функции φ, такой, что $0<\delta \leqslant \gamma \to M_\delta = \varphi(h_\delta)$. Ввиду $M_0 \in M_1 \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \subseteq B$, согласно теореме *AR*, достаточно доказать замкнутость B относительно φ, (B, V)- и (B, B')-абсолютность φ и начальную γ- φ-замкнутость B.

Пусть $\delta \leqslant \gamma$. Тогда из $\langle x, y\rangle \in h_\delta$ следует $\delta \neq 0$ и, кроме того, $x \in \delta \,\&\, y = M_x \,\&\, \mathrm{On}\, x$, и, в силу $\mathrm{On}\, x$

$\to x \in M_{x+1}$, $x+1 \leqslant \delta$, $y = M_x \in M_{x+1}$, из $\langle x, y\rangle \in h_\delta$ следует $x, y \in M_\delta$ и $\langle x, y\rangle \in M_{\delta+2}$, откуда $h_\delta \subseteq M_{\delta+2}$.

Далее, $z \in h_\delta \leftrightarrow \exists x \in M_\delta \exists y \in M_\delta [z = \langle x, y\rangle \& x < \delta \& y = M_x \& \mathrm{On}\, x]$, откуда $h_\delta = \{z \mid \exists x \in M_\delta \exists y \in M_\delta (z = \langle x, y\rangle \& x < \delta \& y = M_x \& \mathrm{On}\, x)\}$; ввиду $\mathrm{Tr}(M_{\delta+2})$ здесь δ, M_x, $M_\delta \in M_{\delta+2}$ и, ввиду $M_\delta \subseteq M_{\delta+2}$, релятивизация к $M_{\delta+2}$ не меняет значения кванторов $\exists x \in M_\delta$, $\exists y \in M_\delta$, а при дальнейшей формализации, состоящей в устранении $\langle x, y\rangle$, появятся лишь кванторы, ограниченные множествами $\subseteq M_{\delta+2}$ (ибо $\langle x, y\rangle \in M_{\delta+2}$). Теперь $h_\delta \subseteq M_{\delta+2}$ дает $h_\delta \in (M_{\delta+2})' = M_{\delta+3} \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \subseteq B$, откуда $h_\delta \in B$. Итак, $\delta \leqslant \gamma \to h_\delta \in B$, следовательно, класс B γ-φ-замкнут.

Остается рассмотреть функцию φ, которую при этом можно считать ограниченной множеством $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ (ибо только что доказано $\delta \leqslant \gamma \to h_\delta \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, так что ограничение φ этим множеством не изменит определяемой по рекурсии функции $f(\delta)$, т. е. M_δ).

Через $W(x)$ я обозначаю множество $\{v \mid \exists u \langle u, v\rangle \in x\}$.

Пусть $\psi(x) = \{z \mid \exists y \exists \delta \in W(x)(z \in y \& \langle \delta, y\rangle \in x\}$ — функция от x, ограниченная множеством $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Пусть $x \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, тогда $x \in M_{\alpha'}$ для некоторого $\alpha' < \alpha < \beta$ и из $z \in y \& \langle \delta, y\rangle \in x$ следует, ввиду $\mathrm{Tr}(M_{\alpha'})$ $\delta, y, z \in M_{\alpha'}$. При устранении терма $\langle \delta, y\rangle$ появятся, ввиду $\langle \delta, y\rangle \in x \in M_{\alpha'}$, лишь переменные, ограниченные множествами $\subseteq M_{\alpha'}$. При устранении $W(x)$ (из $\exists \delta \in W(x)$, дающего конъюнктивный член $\delta \in W(x)$), появится $\exists u(\langle u, \delta\rangle \in x)$, и $x \in M_{\alpha'}$ вместе с $\mathrm{Tr}(M_{\alpha'})$ дают $u \in M_{\alpha'}$; при этом $\langle u, \delta\rangle \in x$ и $x \in M_\alpha$ дает $\langle u, \delta\rangle \in M_\alpha$, а потому при устранении $W(x)$ и $\langle u, \delta\rangle$ также появятся лишь переменные, ограниченные множествами $\subseteq M_{\alpha'}$. Поэтому релятивизация к M_α всех переменных, участвующих в определении $\psi(x)$, не может изменить значения этой функции; считая

ее выполненной, получаем $\psi(x) \in M_{\alpha'+1}$ и, так как $\alpha'+1 \leqslant \alpha < \beta$, $\psi(x) \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \subseteq B$. Следовательно, классы $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ и B замкнуты относительно функции $\psi(x)$, и, в силу $M_{\alpha'} \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \subseteq B$, релятивизация определения этой функции к B или к $B' \supseteq B$ существует и не может изменить ее значения, так что функция $\psi(x)$ (B, B')-абсолютна. При этом возможно $B'=V$.

Теперь

$$\begin{aligned} z \in \psi(h_\delta) &\leftrightarrow \exists y \exists \delta' \in W(h_\delta)(z \in y \,\&\, \langle \delta', y\rangle \in h_\delta) \\ &\leftrightarrow \exists y \exists \delta' < \delta (z \in y \,\&\, \langle \delta', y\rangle \in h_\delta) \\ &\leftrightarrow \exists y \exists \delta' < \delta (z \in y \,\&\, y = h_\delta(\delta')) \\ &\leftrightarrow \exists \delta' < \delta (z \in h_\delta(\delta')) \\ &\leftrightarrow \exists \delta' < \delta (z \in M_{\delta'}) \leftrightarrow z \in \bigcup_{\delta'<\delta} M_{\delta'}. \end{aligned}$$

Отсюда $\psi(h_\delta) = \bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha$ для всех $\delta \leqslant \gamma$ и $\varphi(h_\delta) = \psi(h_\delta)' (= M_\delta)$.

Функция $\varphi(x)$ сейчас рассматривается лишь для $x \in \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Раньше было доказано, что множество $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ замкнуто относительно функции $y=x'$, а также относительно $\psi(x)$, следовательно, и относительно их суперпозиции $\varphi(x)$ (огранниченной множеством $\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$). Кроме того, обе функции $\psi(x)$ и $y=x'$ (B, B')-абсолютны (в частности, при $B'=V$), а потому, согласно теореме AS, (B, V)- и (B, B')-абсолютна и их суперпозиция $\varphi(x)$.

Теорема AM доказана.

Так как для всякого ординала α $\alpha < \alpha+\omega^2$ и $\bigcup_{\beta<\alpha+\omega^2} M_\beta \in L$, из нее следует (L, V)-абсолютность отношения 16 из гл. III, т. е. $x=M_\alpha$, а также функции $x=M_\alpha$. (Эта абсолютность используется в связи с теоремой AS′ при рассмотрении $y \in M_\beta$.)

Отношение 17 есть $\exists y(\mathrm{On}\, y \& x = M_y)$; оно (L, V)-абсолютно, так как из $\mathrm{Tr}(L)$ следует $\mathrm{On}_L y \leftrightarrow \mathrm{On} y$ (см. первую лемму из § 2 гл. III).

Теперь обоснованы все утверждения об абсолютности, используемые в § 3 гл. III. Чтобы покончить с этим вопросом в связи с гл. III, остается лишь описать применение теоремы АМ к доказательству теоремы 1 из § 4 гл. III.

Я несколько изменю рассуждение автора. Именно, в условиях теоремы 1 я введу в рассмотрение $\beta + \omega^2$. Без ограничения общности β можно считать бесконечным, тогда $\overline{\overline{\beta + \omega^2}} = \overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\alpha}} = \overline{M_\alpha}$. Лемму 1 я буду применять с $\beta + \omega^2$ в качестве β (в частности, совершая эту замену в «β строит M_β»); при построении T в качестве множества S из теоремы Лёвенгейма — Скулема будет взято объединение множеств M_α, $\{\beta, \beta+1, \ldots, \beta+\omega^2\}$, $\{M_{\beta+\omega^2}\}$ и $\{y\}$. По-прежнему, в применении только что упомянутой теоремы будет использовано доказуемое в $\boldsymbol{ZF}$ суждение о существовании области значений любой взаимно однозначной функции с областью определения $n \in \omega$, что обеспечивает конечную замкнутость R (см. стр. 325). (Замечу, что суждение «β строит M_6» употребляется автором неформально; формализация может потребовать предварительного построения других функций — скажем, уже использованных в настоящем добавлении для построения функции M_α — и включения в «β строит M_β» суждений о существовании значений этих функций; так как число их конечно, это не помешает применению теоремы Лёвенгейма — Скулема, но R будет замкнуто и относительно этих функций, по крайней мере рассматриваемых на нужных областях.)

Пусть по-прежнему $\varphi(\beta) = \beta'$, тогда $\beta+1, \ldots, \beta+\omega$. перейдут в R в $\beta'+1, \ldots, \beta'+\omega^2$, т. е. $\varphi(\beta+\omega^2) = \beta'+\omega^2$[22] Суждение «$\beta+\omega^2$ строит $M_{\beta+\omega^2}$» в T даст в R суждение $M_{\beta'+\omega^2} \in R$, т. е. $\left(\bigcup_{\alpha < \beta'+\omega^2} M_\alpha\right)' \in R$ и ввиду $X \in X'$ и $\mathrm{Tr}(R)$ $\bigcup_{\alpha < \beta'+\omega^2} M_\alpha \in R$. Теперь, согласно теореме АМ ввиду конечной замкнутости R, функция $x = M_\alpha$, ограниченная ординалом $\beta'+\omega^2$, (R, V)-абсолютна и

$(y \in M_{\beta'})_R$ дает $y \in M_{\beta'}$. По-прежнему $\beta' \subseteq R$ дает $\overline{\overline{\beta'}} \leqslant \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{T}} = \overline{\alpha}$, откуда $\overline{\overline{\beta'}} \leqslant \overline{\alpha}$.

Вопрос об абсолютности в связи с ее применениями в гл. III этим исчерпан.

§ 7. Остается рассмотреть вопрос о применениях абсолютности в гл. IV. Надлежит указать, каким образом доказывается первая лемма из § 5 гл. IV, а также где и с какими B и B' она используется, только для этих B и B' ее здесь и надо рассматривать. Надлежит установить (для этих B и B') не только простую, но и двустороннюю абсолютность $F(P, A)$ (т. е. и абсолютность $\sim F(P, A)$ (см. сноску 2 к стр. 225). При уточнении во второй лемме из § 5 участвуют те же B и B', что и в первой).

В § 6 гл. IV используется (M, V)-абсолютность отношения «P вынуждает $\varphi(c) = c'$» и (M, V)-абсолютность «P вынуждает (1)», где «(1)» обозначает формулу, выписанную на стр. 161 (при доказательстве второй теоремы из § 6 гл. IV, т. е. разновидности теоремы Лёвенгейма — Скулема). Именно, эта абсолютность используется при переходе от утверждений о том, что функции $g(P, C)$, f_r и g_r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ определены в M к использованию соответствующих утверждений в мире V (так что вынуждаемые формулы превращаются в истинные в N при замене всех c на $\bar{c}$). В § 7 подразумевается, что такие же утверждения об абсолютности (с теми же B и B') используются при доказательстве той же теоремы Лёвенгейма — Скулема для обобщенного понятия вынуждения (связанного с обобщениями параметрического пространства S и моделей N). Так как об U и $\prec$ в их определении там говорится, что они принадлежат M, они, тем самым, предполагаются выразимыми в ZF (что и имеет место при определении модели N в § 8—10 гл. IV). Точно так же и отображение ψ предполагается выразимым в ZF. Поэтому для обобщенного в § 7 понятия вынуждения двусторонняя абсолютность $F(P, A)$ будет установлена так же, как и для этого отношения, рассмотренного в § 5. Других использований этой абсолютности в главе IV нет. (Поэтому можно было бы считать, что всюду в этой книге

$B'=V$, однако желательно сохранить ту свободу рассмотрения B', на которой в § 3 гл. III настаивает автор.)

Отношение $F(P, A)$, где P — вынуждающее условие, а A — ограниченное суждение, определено автором для **ZF** посредством трансфинитной рекурсии по рангу суждения A. Ранги являются не ординалами, а тройками $\langle\alpha, i, r\rangle$, но рекурсия по ним сводится к рекурсии по тем ординалам, на которые они естественно отображаются путем изоморфизма, сохраняющего порядок. (Этот изоморфизм легко выразим в **ZF** и отображает класс всех таких троек на Оп, а следовательно, это верно и в M, и, в силу (M, V)-абсолютности понятий функции и изоморфизма, а также отношения $<$ между рангами и $\in$, в V существует множество, осуществляющее этот изоморфизм между тройками $\langle\alpha, i, r\rangle$, где $\alpha<\alpha_0$, и ординалами $<\alpha_0$.) Поэтому первую лемму из § 5 гл. IV можно будет получить с помощью следующей теоремы:

Теорема AN. *Пусть функция f определима в* **ZF** *для любого ординала посредством трансфинитной рекурсии*[1]) *с опорной (M, B')-абсолютной функцией φ, где $B'=N$ или $B'=V$. Пусть еще $f(0)=z\in M$. Тогда f (M, B')* абсолютна.

Доказательство. Так как M — модель для **ZF** то релятивизация f к M существует; более того, ввиду $z\in M$ и существования φ_M можно и я буду считать f_M функцией, определенной в M посредством трансфинитной рекурсии с опорной функцией φ_M.

M конечно замкнуто, так как $\emptyset\in M$ и в M имеют место аксиомы пары и объединения, достаточные для получения в M любого $\{x_1, \ldots, x_m\}$, где $x_1, \ldots, x_m\in M$ (что доказывается в **ZF** индукцией по m). Поэтому ввиду $\mathrm{Tr}(M)$, $z\in M\subseteq B'$ и теоремы AR, достаточно доказать, что M замкнут относительно φ и начально α-φ-замкнут для всякого ординала $\alpha<\alpha_0$, принадлежащего области определения f.

Без ограничения общности я буду считать φ всюду определенной в **ZF**, так как в противном случае φ опре-

[1]) Имеется в виду эта теорема для определения функций на Оп; см. сноску на стр. 150—151.

деляет ту же функцию f. Следовательно, φ_M определена в M всюду. Пусть теперь $x \in M$ и $y = \varphi_M(x)$, тогда, ввиду (M, V)-абсолютности φ, $y = \varphi(x)$. Из $y = \varphi_m(x)$ следует, кроме того, $y \in M$, так как φ_M определена в M всюду. Следовательно, $\varphi(x) \in M$. Итак, $x \in M \to \varphi(x) \in M$, т. е. M замкнут относительно φ.

Кроме того, $x \in M \to \varphi_M(x) = \varphi(x)$.

Релятивизация f_M существует, так как M является моделью для ***ZF***. Пусть для произвольного ординала β (из M) h_β и $h_{M,\beta}$ обозначают соответственно функцию f или f_M, ограниченную этим ординалом. (Для $h_{M,\beta}$ ограничение понимается относительно M, но из (M, V)-абсолютности отношения 11а легко вывести, что оно является и ограничением h_M в мире V ординалом β.) Пусть, далее, β — наименьший ординал из M, для которого $f_M(\beta) \neq f(\beta)$. Так как равенство $f(0) = z$ входит в определение f, то $f_M(0) = z$ и $\beta \neq 0$. Из определения β следует $h_{M,\beta} = h_\beta$ и $h_{M,\beta}$ по определению $\in M$, а поэтому при $\beta \neq 0$ $f_M(\beta) = \varphi_M(h_{M,\beta}) = \varphi(h_{M,\beta}) = \varphi(h_\beta) = f(\beta)$ — противоречие. Следовательно, для всех $\beta \in M$ $f_M(\beta) = f(\beta)$ и, далее, $h_{M,\beta} = h_\beta$ для всех $\beta \in M$, а потому $\forall \beta \in M h_\beta \in M$, т. е. M начально β-φ-замкнут для всякого $\beta < \alpha_0$.

Теорема AN доказана. Теперь, чтобы доказать первую лемму из § 5 гл. IV и притом в более сильном виде, утверждающем двустороннюю абсолютность $F(P, A)$, остается показать, каким образом отношение $F(P, A)$, а следовательно, и $\sim F(P, A)$, (где P — вынуждающее условие, а A — ограниченное суждение) выражается в ***ZF*** посредством трансфинитной рекурсии. Так как вопросов абсолютности при этом уже не придется рассматривать, я ограничусь лишь важнейшими указаниями.

Пусть rA обозначает ординал из M, соответствующий рангу A при изоморфизме, упомянутом на стр. 338. В § 3 гл. IV было дано (не вполне формализованное) рекурсивное определение отношения $F(P, A)$, причем рекурсия шла по rA. (Именно, $F(P, A)$ было выражено через всевозможные $F(Q, B)$, где $rB < rA$.) В § 7 была указана совершенно аналогичная рекурсия для обобщенного понятия вынуждения. Тем самым (для каждого из этих случаев) была посредством трансфинитной рекур-

сии определена некоторая функция $f(\alpha)$, значением которой для любого ординала α является отношение $F_\alpha(P, A)$, представляющее собой ограничение $F(P, A)$ теми A, для которых $rA \leqslant \alpha$. (Отношения сейчас рассматриваются как функции, принимающие лишь значения 0 и 1; ясно, что достаточно доказать первую лемму из § 5 гл. IV для отношений, рассматриваемых таким образом.) Индукцией по β легко доказывается, что $\alpha \leqslant \beta \rightarrow F_\alpha(P, A) = F_\beta(P, A)$. (Доказательство состоит в очевидном применении определений $F(P, A)$ (из § 3 или § 7 гл. IV) к наименьшему $\beta \geqslant \alpha$, для которого $F_\alpha(P, A) \neq F_\beta(P, A)$.) Теперь $F(P, A)$ можно определить как $F_{rA}(P, A)$. (Конечно, этот последний шаг представляет собой суперпозицию и тут, помимо AN, применяется теорема AS, а также используется (M, B')-абсолютность rA, и эта последняя вытекает из AN, поскольку A рассматриваются указанным в § 5 гл. IV способом как конечные последовательности ординалов $<\alpha_0$. Кроме того, тут используется, что P и A рассматриваются просто как аргументы этого отношения F_α, не подлежащие релятивизации ввиду $P, A \in M$ или удовлетворяющие $P_M = P$ и $A_M = A$.)

Остается лишь уточнить доказательство определимости $f(\alpha)$ в ***ZF*** посредством трансфинитной индукции, т. е. указать $f(0)$ и соответствующую функцию $\varphi(x)$, такую, что $\beta > 0 \rightarrow f(\beta) = \varphi(h_\beta)$, где h_β есть f, ограниченная ординалом β.

Этому должно предшествовать определение в ***ZF*** параметрического пространства S, определяемого, как указано в начале § 3 и в § 7 гл. IV (с уточнениями, касающимися функций φ^1_α и φ^2_α на стр. 213—214 и т. д.). В § 7 S зависит от параметра G (подлежащего фиксации при определении понятия вынуждения для конкретных моделей N). G рассматривается при этом как множество, могущее содержать a, или a_δ и другие множества, указанные в § 8, и т. д.; эти a или a_δ и т. п., можно представить произвольными фиксированными множествами из V, не участвующими явно в других частях определения S. Определение S распадается на определение $\varphi(\alpha)$ (т. е. пары функций φ^1_α и φ^2_α) и множеств S_α

$\alpha<\alpha_0$, с последующим $S=\bigcup_{\alpha<\alpha_0} S_\alpha$. Итак, S определимо в ***ZF***.

Далее, определение $f(\alpha)$ задается дизъюнкцией 11 попарно несовместимых случаев в § 3 или в § 7 (где случаев тоже 11, так как случай 9 распадается на два).

Если $\alpha=i=0$, то при $\mathrm{rank}\,A=(\alpha, i, r)$ $f(r, A)$ определяется случаем 11 в § 3 или случаем 9ii) в § 7.

Остальные случаи приводят к определению φ. Например, случай 2 дает: $F_{r\forall_\alpha x B(x)}(P, \forall_\alpha x B(x)) \leftrightarrow \forall Q \supseteq P \forall \beta<\alpha \forall c \in S_\beta \sim F_{r\sim B(c)}(Q, B(c))$, причем $r\sim B(x)<r\forall_\alpha x B(x)$, поэтому в правую часть входит $f(r\sim B(x))$, а в левую—значение $f(r\forall_\alpha x B(x))$ для рассматриваемых в этом случае P и $A\equiv\forall_\alpha x B(x)$. Не только $r\sim B(x)<r\forall_\alpha x B(x)$, но и $\sim B(c)$, рассматриваемая как последовательность ординалов (см. § 5 гл. IV), является значением выразимой в ***ZF*** функции от $\forall_\alpha x B(x)$ и $c\in S_\beta$, $\beta<\alpha$. Аналогично обстоит дело в остальных случаях, по существу рассмотренных автором. Дизъюнкция всех этих случаев дает исчерпывающее выражение $f(\alpha)$ через h_α в виде задания $F_\alpha(P, A)$ (где $rA=\alpha$) через $F_{rB}(P, B)$, где $rB<\alpha$, и этим задается формула A', определяющая φ в ***ZF***. В тексте § 3 и 7 содержится все необходимое для того, чтобы эту формулу A' записать явно. В частности, те формулы B с $rB<rA$, к которым сводится рассмотрение суждения A, указаны там явно, т. е. указан способ χ_i получения B из A в каждом из 10 обсуждаемых сейчас случаев, и это χ_i представляется (согласно представлению формул из § 5 гл. IV) функцией в ***ZF***, выразимой формулой $T_i(i=1, \ldots, 10)$, и эти формулы T_i участвуют в построении формулы A'. Остальное читателю предоставляется расписать самостоятельно.

II. О независимости КГ как гипотезы о промежуточных мощностях

Следствием из теоремы 1 § 9 гл. IV автор устанавливает (для ***ZF*** без АВ) независимость КГ, понимаемой как $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Но при отсутствии АВ сомнительно, что

именно это утверждение следует выбирать в качестве формулировки КГ, а не отсутствие мощностей, промежуточных между $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$, так как при отсутствии АВ $\aleph_1$ может быть несравним с $2^{\aleph_0}$ — см. последнюю теорему из § 10 гл. IV, а потому, пожалуй, при отсутствии АВ естественнее рассматривать КГ именно как гипотезу об отсутствии этих промежуточных мощностей.

T будет сейчас обозначать множество, обозначенное так в теореме 1 из § 9 гл. IV. Определение «дедекиндова множества» см. в сноске 2 на стр. 258.

Чтобы утверждать нарушение в N континуум-гипотезы в той форме, в какой она отрицает существование мощностей, промежуточных между $\aleph_0$ и C, достаточно теперь доказать, что $\aleph_0+T$ является такой промежуточной мощностью. $\aleph_0 \leqslant \aleph_0+T \leqslant C$ очевидно, и $\aleph_0=\aleph_0+T$ невозможно, ибо множество мощности $\aleph_0$ не может содержать дедекиндова подмножества T. Равенство $\aleph_0+T=C$ невозможно, так как, с одной стороны, $C+C=C$ независимо от аксиомы выбора (это доказывается, например, проекцией средней линии треугольника на его сторону, с помощью теоремы Кантора — Бернштейна), а с другой — $(\aleph_0+T)+(\aleph_0+T)\neq\aleph_0+T$, что доказывается следующим образом: пусть f взаимно однозначно отображает $\aleph_0+T$ на $(\aleph_0'+T_1)+(\aleph_0''+T_2)$, где $\aleph_0'+T_1$ и $\aleph_0''+T_2$ дизъюнктны и $\overline{\overline{T_1}}=\overline{\overline{T_2}}=\overline{\overline{T}}$, а $\aleph_0'$ и T_1, равно как $\aleph_0''$ и T_2, дизъюнктны. Тогда, в силу дедекиндовости (отсутствия счетных подмножеств) f отображает T на T_1+T_2 взаимно однозначно с точностью до конечных частей T и T_1+T_2, не участвующих в этом отображении, так как они отображаются в $\aleph_0'+\aleph_0''$ или являются образом конечной части $\aleph_0$. Итак, $T-m$ взаимно однозначно отображается посредством F на $(T_1-m_1)\not\cup(T_2-m_2)$, где множества m, m_1 и m_2 конечны. Ввиду бесконечности T_2, бесконечно и T_2-m_2, а потому (независимо от АВ) существует $m_3\subseteq T_2-m_2$, эквивалентное m_1, и с помощью этой эквивалентности можно получить из f взаимно однозначное отображение g множества $T-m$ на $T_1\cup(T_2-(m_2\cup m_3)$, причем $T_2-(m_2\cup m_3)$ бесконечно и, следовательно, непусто. Так как $T-m$

эквивалентно части T' множества T_1, то существует взаимно однозначное отображение T' на $T_1 \cup (T_2 - (m_2 \cup m_3))$ или наоборот, $T_1 \cup (T_2 - (m_2 \cup m_3))$ можно взаимно однозначно отобразить на $T' \subseteq T_1 - n$ и, в силу теоремы Рассела (см. сноску 2 на стр. 258—259), множество $T_1 \cup (T_2 - (m_2 \cup m_3))$ содержит счетное подмножество. Пересечение последнего хотя бы с одним из множеств T_1 и $T_2 - (m_2 \cup m_3)$ должно быть бесконечно, а потому счетно. Итак, T_1 или T_2, а следовательно, и T содержат счетное подмножество. Равенство $(\aleph_0 + \overline{\overline{T}}) + (\aleph_0 + \overline{\overline{T}}) = \aleph_0 + \overline{\overline{T}}$ этим противоречием опровергнуто.

Аналогично доказывается, что мощности $(\aleph_0 + \overline{\overline{T}}) + (\aleph_0 + \overline{\overline{T}})$, $(\aleph_0 + \overline{\overline{T}}) + (\aleph_0 + \overline{\overline{T}}) + (\aleph_0 + T) \ldots$, являющиеся суммами конечного числа дизъюнктных множеств $\aleph_0 + T$, возрастают, будучи промежуточными между $\aleph_0$ и C. Можно доказать, что мощность $\aleph_0 + (\overline{\overline{T^2}})$ еще больше и остается промежуточной между $\aleph_0$ и C и т. д. Последовательность же $\aleph_0 + \overline{\overline{T}}$, $\aleph_0 + \overline{\overline{T}} + \overline{\overline{T}} = (\aleph_0 + \overline{\overline{T}}) + (\aleph_0 + \overline{\overline{T}})$, $\aleph_0 + \overline{\overline{T}} + \overline{\overline{T}} + \overline{\overline{T}}, \ldots$ можно получить без помощи АВ с помощью твердого перенесения множества $\aleph_0 + T$ с интервала (0, 1) на интервалы (1, 2), (2, 3) и т. д.

Именно этот переход от независимости КГ в форме $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ к независимости КГ как гипотезы о промежуточных мощностях я имел в виду в работе: Essenin-Volpin A. S., Le programme ultra-intuitionniste des fondements des mathematiques, Infinitistic Methods, 1961, pp. 201—223. Там также было намечено доказательство непротиворечивости $ZF + \sim$АВ$ + \sim$КГ, но по отношению не к ZF, а к другой теории, направленной на обоснование ZF.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cantor G. (Кантор), Gesammelte Abhandlungen, Berlin, 1932.

[2] Cohen P. J. (Коэн), Independence of the Axiom of Choice, Stanford, University, 1963.

[3] Cohen P. J., A Minimal Model for Set Theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 537—540.

[4] Cohen P. J., The Independence of the Continuum Hypothesis, I, II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A*, **50** (1963), 1143—1148; **51** (1964), 105—110. [Русский перевод см сб. *Математика*, 9 : 4 (1965), 142—155.]

[5] Cohen P. J., Independence Results in Set Theory, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1965, pp 39—54.

[6] Easton W. B. (Истон), Powers of Regular Cardinals, Princeton University, диссертация, 1964.

[7] Feferman S. (Феферман), Some Applications of the Notions of Forcing Generic. *Fund. Math.*, **55** (1965), 325—345.

[8] Feferman S., Lévy A. (Феферман, Леви), Independence Results in Set Theory by Cohen's Method, II, *Amer. Math. Soc. Notices*, **10** (1963), 593.

[9] Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y. (Френкель, Бар-Хиллел). Foundations of Set Theory, Amsterdam, 1958. (Русский перевод: Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, Москва, «Мир», 1966.)

[10] Gödel K. (Гёдель), Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Functionen-kalküls, *Monatsh. Math. u. Phys.*, 37 (1930), 349—360.

[11] Gödel K., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I, *Monatsh. Math. u. Phys*, 38 (1931), 173—198. (Английский перевод в сборнике The Undecidable, editor Martin Davis, New York, 1966.)

[12] Gödel K., Consistency-proof for the Generalized Continuum Hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **25** (1939), 220—224.

[13] Gödel K., What is Cantor's Continuum Problem?, *Amer. Math. Monthly*, 54 (1947), 515—525.

[14] Gödel K., The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theo-

гу, 4-е издание, Princeton, 1958, 69 pp. (Русский перевод: Гёдель К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, *Успехи матем. наук*, 3, № 1, 1948, стр. 96—149, был сделан с 1-го издания этой работы, вышедшего в Принстоне в 1940 г. Все четыре американских издания мимеографические.)

[15] Kleene S. C. (Клини С. К.) Introduction to Metamathematics, Amsterdam and Groningen, New York and Toronto, 1952. (Русский перевод: Клини С., Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957, 526 стр.)

[16] Lévy A. (Леви), Axiom Schemata of Strong Infinity, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 223—238.

[17] Lévy A., Independence Results in Set Theory by Cohen's Method. I, II, III, IV, *Amer. Math Soc. Notices*, **10** (1963), 592—593.

[18] Löwenheim L. (Лёвенхейм), Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Ann.*, **76** (1915), 447—470.

[19] Mendelson E. (Мендельсон), The Axiom of Fundierung and the Axiom of Choice, *Arch. Math. Logik Grundlagenforsch*, 4 (1948), 65—70.

[20] Mostowski A. (Мостовский), Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip, *Fund. Math.*, 32 (1939), 201—252.

[21] Shepherdson J. C. (Шепердсон), Inner Models for Set Theory, Part I, *J. Symb. Logic*, **16** (1951), 161—190.

[22] Shepherdson J. C., Inner Models for Set Theory, Part II, *J. Symb. Logic*, **17** (1952), 225—237.

[23] Shepherdson J. C., Inner Models for Set Theory, Part III, *J. Symb. Logic*, **18** (1953), 145—167.

[24] Sierpinski W. (Серпинский), L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix, *Fund. Math.*, **34** (1947), 1—5.

[25] Solovay R. (Соловей), Independence Results in the Theory of Cardinals, I, II, Preliminary Report, *Amer. Math. Soc. Notices*, **10** (1963), 595.

[26] Tarski A. (Тарский), A decision Method for Elementary Algebra and Geometry, 2-е издание, переработанное, Berkeley — Los Angeles, 1951, iii+63 pp.

[27] Whitehead A. N., Russell B. (Уайтхед, Рассел) Principia mathematica, 1, 2-е издание, Cambridge, 1925, xivi+674 pp.

[28] Zermelo E. (Цермело), Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Math. Ann.*, **65** (1908), 261—281.

ОГЛАВЛЕНИЕ*)

*) Цифры в скобках указывают страницы подлиннпка.

П. Дж. Коэн

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ
И
КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗА

Редактор *А. А. Бряндинская*
Художник *А. Г. Антонова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Л. М. Харьковская*
Корректор *А. Я. Шехтер*

Сдано в производство 21/VI 1968 г.
Подписано к печати 21/III 1969 г.
Бумага тип. № 2 84×108$^{1}/_{32}$=5,44 бум. л.
18,27 усл. печ. л. 18,24 уч.-изд. л.
Изд. № 1/4438. Цена 1 р. 26 к. Заказ № 1319

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва, I-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29