

М. М. ПОСТНИКОВ

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

теория
гомотопий
клеточных
пространств



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

Постников М. М. Лекции по алгебраической топологии. Теории гомотопий клеточных пространств.—М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.—336 с.

Книга является непосредственным продолжением книги «Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий» того же автора, однако вполне доступна читателям и не знакомым с ней (но владеющим элементами теории гомотопий).

Основное внимание в книге уделено гомотопической теории клеточных пространств и теории гомотопических групп сфер.

Книга предназначена студентам старших курсов университетов, аспирантам и научным работникам, специализирующимся в области топологии и смежных дисциплин.

Ил. 19. Библиогр. 19 назв.

Р е ц е н з е н т

кандидат физико-математических наук Д. Б. Фукс

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
ЛЕКЦИЯ I	9
Относительные клеточные пространства.— Теорема Борсука.— Клеточные пространства и их клеточные подпространства.— Клеточные отображения.— Склеивание клеточных пространств.— Конечномерные и связные клеточные пространства.— Конечные и счетные клеточные пространства.— Локально конечные клеточные пространства.— Произведения клеточных пространств.— Клеточное пространство $X \times I$.— Цилиндр и конус клеточного отображения .	
ДОПОЛНЕНИЕ	33
Произведения счетных клеточных пространств.— Локальная стягиваемость клеточных пространств.— Паракомпактность клеточных пространств.— Гомотопически полные пространства.	
ЛЕКЦИЯ 2	40
Вспомогательная теорема.— Теорема о n -связности пары (X, X^n) .— Теорема о клеточной аппроксимации непрерывных отображений.— Общая теорема Фрейденшталя.— Стационарные и метастационарные гомотопические группы сфер.— Группы $\pi_n S^n$ и группа $\pi_3 S^2$.— Степень отображения.— Антиподальное отображение и касательные поля на сферах.	
ДОПОЛНЕНИЕ	58
Линейные симплексы.— Симплициальные схемы.— Симплициальные пространства.— Барицентрическое измельчение симплициальной схемы.— Мелкость барицентрического измельчения триангуляции.— Вспомогательная теорема в симплициальном варианте.— Теорема о счетности множества $[X, Y]$.— Симплициальные аппроксимации клеточных пространств.— Триангуляция пространства $ S \times I$.— Симплициальный цилиндр симплициального отображения.— Конус над симплициальным пространством.— Доказательство теоремы о симплициальных аппроксимациях клеточных пространств.	

ЛЕКЦИЯ 3	85
Слабые гомотопические эквивалентности.— Клеточные эквиваленты топологических пространств.— Пунктированные клеточные эквиваленты.— «Экономное» построение клеточного эквивалента.— Наращивания и вдавливания.— Теорема Уайтхеда о ∞ -эквивалентностях.— Ее обобщение на случай N -эквивалентностей.	
ДОПОЛНЕНИЕ	102
Представимые функторы и классифицирующие пары.— Непрерывность представимых функторов.— Обратные пределы диаграмм.— Амальгамы в гомотопической категории.— Полуточные функторы.— Теорема Брауна.— Универсальные пары.— Построение универсальных пар.— Лемма о надъективности.— Свойства полуточных функторов.— Завершение доказательства теоремы Брауна.— Фinitно полуточные функторы.— Каноническое распространение функторов с категории конечных пространств.— Фinitно гомотопическая категория и представимость функтора $\bar{F}$.— Лемма Йонеды и ее варианты для функтора $\bar{F}$.— Теорема Адамса.— Лемма об обратных пределах.— Последовательность Майера—Виеториса.— Завершение доказательства теоремы Адамса.— Полуточные функторы на категории CW.— Последовательность Пуппе непунктированной пары.— Полуточные функторы с тривиальной группой коэффициентов.— Доказательство теоремы Хеллера.— Другие категории.	
ЛЕКЦИЯ 4	160
Гомотопические операции.— Многоместные гомотопические операции.— Гомотопические группы букетов.— Аддитивные гомотопические операции.— Умножение Уайтхеда.— Алгебраические свойства умножения Уайтхеда.	
ДОПОЛНЕНИЕ	177
Стационарное гомотопическое кольцо сфер.— Смеш-умножение в гомотопических группах.	
ЛЕКЦИЯ 5	185
Джойн пространств.— Обобщенное умножение Уайтхеда.— Конструкция Хопфа.— Джойн отображений и гомотопических классов.— Альтернативное определение умножения Уайтхеда.— Косокоммутативность умножения Уайтхеда.— Билинейность умножения Уайтхеда.— Тождество Якоби для умножения Уайтхеда.	
ДОПОЛНЕНИЕ	206
Пространство $S\Omega SX$.— Пространство $\Omega(A \wedge SY)$.— Пространство $\Omega(SX \vee SY)$.— Группы $\pi_n(SX \vee SY)$.— Теорема Хилтона—Милнора.	
ЛЕКЦИЯ 6	235
Тип отображения произведения сфер.— Надстройка над произведением Уайтхеда.— Достаточное условие дистри-	

бутьности слева композиционного умножения.— Инвариант Хопфа—Уайтхеда.— Инвариант Хопфа.— Простейшая аддиционная лемма.— Аддиционная лемма Дж. Уайтхеда.— Инвариант Хопфа конструкции Хопфа.— Существование отображений с инвариантом Хопфа, равным единице.— Обобщенный инвариант Хопфа—Уайтхеда.

ДОПОЛНЕНИЕ 256
Теорема Хилтона.— Инварианты Хопфа—Хилтона.— Инвариант h_0 .— Инварианты h_1 и h_2 .— Формула для $(k\beta) \circ \alpha$.

ЛЕКЦИЯ 7 265
Теорема вырезания для гомотопических групп.— Редукция теоремы вырезания к теореме Блейккера — Масси.— Доказательство теоремы Блейккера — Масси.— Окончательное упрощение надстроечной последовательности.

ЛЕКЦИЯ 8 276
Вычисление гомоморфизма P .— «Трудная часть» теоремы Фрейденталя.— Вычисление групп $\pi_1 S$ и $\pi_2 S$.— Преобразование формулы, определяющей инвариант Хопфа—Уайтхеда.— Явное вычисление отображений классов $Q'\alpha$ и $AQ'\alpha$.— Доказательство теоремы Дж. Уайтхеда.

ЛЕКЦИЯ 9 293
Заклеивание гомотопических групп и убивающие пространства.— Пространства типа (Π, n) .— Вычисление фундаментальной группы произвольного клеточного пространства.— Теорема Зейферта—ван Кампена для клеточных пространств.— Группа $\pi_{n+1}(X, A)$ при односвязном A .— Операторное свойство универсальных накрытий.— Накрытия клеточных пространств.— Группа $\pi_{n+1}(X, A)$ в общем случае.

ДОПОЛНЕНИЕ 311
Двумерные поверхности.— Эйлерова характеристика и трехмерные многообразия.— Вычисление фундаментальных групп некоторых трехмерных многообразий.— Перестройки многообразий.— Фундаментальные группы многообразий размерности $n \geq 4$.— Поведение фундаментальной группы при перестройках трехмерных многообразий.— Торические узлы и их группы.— Многообразие Дена.

ЛИТЕРАТУРА 331

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 334

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является непосредственным продолжением книги «Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий». Напомню, что в указанной книге была отражена лишь первая часть курса по теории гомотопий, который я неоднократно читал для студентов и аспирантов МГУ. Вторая его часть (которая и отражена в предлагаемой читателю книге) состоит из 9 лекций.

В лекции 1 (бывшей в курсе лекцией 11) вводится и изучается категория клеточных пространств. Более хлопотно доказываемые свойства клеточных пространств (локальная стягиваемость и паракомпактность) вынесены в Дополнение.

В лекции 2 на основе обычной техники гладкой аппроксимации доказывается n -связность пар (X, X^n) и теорема о клеточной аппроксимации. В качестве приложения доказывается теорема Фрейдентала с обычными следствиями. В заключение рассматриваются свойства антиподальных отображений. В Дополнении после изложения основных понятий теории симплициальных пространств теорема об аппроксимации доказывается в ее симплициальном варианте. В этом же Дополнении на основе техники симплициальных аппроксимаций пространств доказывается теорема о счетности множества $[X, Y]$, аппроксимированная в лекции 0 «Основ теории гомотопий».

В лекции 3 категория клеточных пространств сравнивается с категорией всех пространств (теорема о том, что любое топологическое пространство слабо гомотопически эквивалентно клеточному пространству). Здесь же

доказывается теорема Уайтхеда о гомотопических эквивалентностях. Дополнение к этой лекции посвящено теоремам представимости (Брауна, Адамса и Хеллера).

На этом общая теория клеточных пространств временно прерывается, и со следующей лекции мы обращаемся к теории гомотопических операций.

В лекции 4 излагаются общие теоремы о гомотопических операциях (вытекающие из представимости гомотопических групп), характеризуются аддитивные операции и вводится умножение Уайтхеда. В лекции 5 обсуждается обобщенное умножение Уайтхеда и доказываются его алгебраические свойства (косокоммутативность, билинейность и тождество Якоби). В Дополнении к лекции 5 доказываются теорема Хилтона—Милнора о гомотопических группах букетов надстроек.

Геометрические свойства умножения Уайтхеда обсуждаются в лекции 6. Там же вводится инвариант Хопфа и его обобщения по Уайтхеду. Методом Уайтхеда вычисляется инвариант Хопфа конструкции Хопфа и, в частности, инвариант Хопфа отображений Хопфа. В Дополнении вводятся и изучаются инварианты Хопфа, обобщенные по Хилтону. В частности, обсуждается левый дистрибутивный закон для композиционного умножения.

В лекции 7 мы, возвращаясь на время к клеточным пространствам, доказываем теорему Блейкерса и Масси о вырезании для триад и на ее основе—теорему Фрейденталя для любых связных пространств.

В лекции 8 доказываются «трудная часть» теоремы Фрейденталя и вычисляются группы $\pi_{n+1}S^n$ и $\pi_{n+2}S^n$. В вычислении последней группы ключевую роль играет тот факт, что элемент $\eta_n \circ \eta_{n+1}$ группы $\pi_{n+2}S^n$ отличен от нуля. «Современное» доказательство этого факта основывается на теории когомологических операций. Поскольку этот путь нам пока недоступен, мы вынуждены изложить прямое геометрическое доказательство, предложенное в свое время Дж. Уайтхедом.

Материал заключительной лекции 9 концентрируется вокруг вопроса о влиянии на гомотопические группы π_n приклеивания клеток. При $n=1$ мы получаем известное описание образующих и соотношений фундаментальных групп клеточных пространств, что, в частности, позволяет доказать для этих пространств теорему Зейферта—ван Кампена в ее классической формулировке. При $n>1$ вводятся убивающие пространства, строятся пространства Эйленберга—Маклейна и вычисляется группа $\pi_n(X^n, X^{n+1})$ (на этой основе и будет в следующем семестре построена теория гомологий). В Дополнении к этой лекции вкратце рассматриваются трехмерные многообразия и их фундаментальные группы.

Принципы составления библиографии и указания авторов теорем сохранены прежними (см. Предисловие к «Основам теории гомотопий»).

При ссылках на лекции из «Основ теории гомотопий» их номера сопровождаются римской цифрой I.

М. М. Постников

Относительные клеточные пространства. — Теорема Борсука. — Клеточные пространства и их клеточные подпространства. — Клеточные отображения. — Склеивание клеточных пространств. — Конечномерные и связные клеточные пространства. — Конечные и счетные клеточные пространства. — Локально конечные клеточные пространства. — Произведения клеточных пространств. — Клеточное пространство $X \times I$. — Цилиндр и конус клеточного отображения.

В этой лекции мы опишем класс топологических пространств, наиболее приспособленный для построения в нем теории гомотопий.

Напомним, что при приклеивании к пространству A пространства E по непрерывному отображению $f: S \rightarrow A$, где $S \subset E$, получается пространство $X = E \cup_f A$, являющееся факторпространством дизъюнктного объединения $E \sqcup A$ по минимальному отношению эквивалентности, в котором $x \sim f(x)$ для любой точки $x \in S$. Отображение факторизации $E \sqcup A \rightarrow X$ является на $E \setminus S$ и A гомеоморфизмом, так что без ограничения общности можно считать, что $E \setminus S \subset X$ и $A \subset X$. Тогда $X = (E \setminus S) \cup A$, и множество $P \subset X$ тогда и только тогда замкнуто в X , когда множество $S \cup ((E \setminus S) \cap P)$ замкнуто в E , а множество $A \cap P$ замкнуто в A . В частности, если S замкнуто в E , то A замкнуто в X .

В случае пустого S по определению считается, что $X = E \sqcup A$.

Для нас особое значение будет иметь случай, когда E представляет собой дизъюнктное объединение замкнутых шаров E_α одной и той же размерности $n \geq 0$, а S состоит из их граничных сфер S_α . В этом случае ограничение на каждом шаре E_α отображения факторизации $E \sqcup A \rightarrow X$ представляет собой непрерывное отображение

$$\chi_\alpha: E_\alpha \rightarrow X,$$

являющееся гомеоморфизмом открытого шара $\mathring{E}_\alpha$ на его образ $e_\alpha = \chi_\alpha(\mathring{E}_\alpha)$ и эпиоморфизмом замкнутого шара E_α на множество $e_\alpha = \chi_\alpha(E_\alpha)$.

Заметим, что здесь мы не отождествляем $E \setminus S$ с его образом в X . Напротив, в отношении A мы это отождествление сделаем, т. е. будем считать пространство A подпространством пространства X . Так как S замкнуто в E , то A замкнуто в X .

Определение 1. Описанное пространство $X = E \cup A$ называется *элементарным клеточным расширением* пространства A . Число n называется *размерностью* расширения.

При $n = 0$ расширение X является дизъюнктивным объединением пространства A и некоторого дискретного множества.

Пространство, получающееся из пространства A последовательностью (вообще говоря, бесконечной; см. ниже) элементарных клеточных расширений возрастающих размерностей, называется *клеточным расширением* пространства A , а пара (X, A) называется *клеточным пространством относительно A* .

Таким образом, каждое клеточное расширение X пространства A является объединением возрастающей последовательности

$$(1) \quad A = X_A^{-1} \subset X_A^0 \subset \dots \subset X_A^n \subset \dots$$

таких подпространств X_A^n , что для каждого $n \geq 0$ подпространство X_A^n либо совпадает с пространством X_A^{n-1} , либо является его элементарным клеточным расширением размерности n . При этом ввиду бесконечности последовательности (1) требуется объяснить, как в объединение X пространств X_A^n вводится топология. Как всегда в аналогичных ситуациях мы будем требовать, чтобы пространство X было *свободным объединением* пространств X_A^n , т. е. чтобы подмножество $C \subset X$ тогда и только тогда было замкнуто в X , когда для любого $n \geq 0$ его пересечение $C \cap X_A^n$ с X_A^n замкнуто в X_A^n . Другими словами, мы будем требовать, чтобы последовательность (1) была фильтрацией пространства X .

Члены X_A^n фильтрации (1) называются *остовами* относительного клеточного пространства (X, A) и обозначаются также символом $Sk^n(X, A)$. Ясно, что все пары (X_A^n, A) также являются клеточными пространствами относительно A . Если $X = X_A^n$ и $X \neq X_A^{n-1}$, то число n называется *размерностью* относительного клеточного пространства (X, A) и обозначается символом $\dim(X, A)$. Если $X \neq X_A^n$ ни при каком n , то по определению $\dim(X, A) = \infty$.

Подмножество e топологического пространства X называется *клеткой* в X , если существует такое непрерывное отображение $\chi: E^n \rightarrow X$ единичного n -мерного шара E^n в пространство X , что:

а) замыкание $\bar{e}$ подмножества e является образом $\chi(E^n)$ шара E^n при отображении χ , причем отображение χ , рассматриваемое как отображение $E^n \rightarrow \bar{e}$, представляет собой эпиоморфизм;

б) при $n > 0$ ограничение $\chi|_{\dot{E}^n}$ отображения χ на внутренности $\dot{E}^n = E^n \setminus S^{n-1}$ шара E^n является гомеоморфизмом открытого шара $\dot{E}^n$ на e , причем $\chi(S^{n-1}) = \bar{e} \setminus e$.

Отображение χ называется *характеристическим* для клетки e , а его ограничение на S^{n-1} — отображением, *приклеивающим* клетку e . Число n называется *размерностью* клетки e и обозначается символом $\dim e$.

Для элементарного клеточного расширения $E \cup A$ введенные выше множества $e_\alpha = \chi_\alpha(\dot{E}_\alpha)$ являются клетками, а отображения χ_α — характеристическими отображениями. Клетки e_α , построенные для каждого элементарного клеточного расширения X_A^n , будут, конечно, и клетками свободного объединения $X = \bigcup X_A^n$ пространств X_A^n , причем

1°. *Подпространство $X \setminus A$ является дизъюнктивным объединением этих клеток.*

Указанные клетки называются *клетками относительного клеточного пространства (X, A)* . Для обозначения того, что клетка e в X является клеткой пространства (X, A) , мы будем пользоваться либо формулой $e \in (X, A)$, либо формулой $e \in X \setminus A$.

По определению элементарного клеточного расширения $E \cup A$ множество $C \subset E \cup A$ тогда и только тогда замкнуто, когда замкнуты его пересечения с A и с замыканием любой из клеток $e \in X \setminus A$. Поэтому аналогичное утверждение имеет место и для любого относительного клеточного пространства (X, A) , т. е.

2°. *Подмножество $C \subset X$ тогда и только тогда замкнуто, когда:*

i) *пересечение $A \cap C$ замкнуто в A ;*

ii) *для любой клетки $e \in X \setminus A$ пересечение $A \cap \bar{e}$ замкнуто в $\bar{e}$.*

Отсюда следует, что *каждое компактное подмножество K пространства X пересекается лишь с конечным числом*

клеток $e \in X \setminus A$ (в противном случае, выбрав в каждом из непустых множеств $K \cap e$ по точке, мы получим в компактном множестве K бесконечное дискретное подмножество).

В частности, любой путь в X задевает лишь конечное число клеток $e \in X \setminus A$.

Множество $\dot{e} = e \setminus e$ называется границей клетки e . При $n > 0$ оно не пусто (а при $n = 0$, напротив, пусто) и, являясь непрерывным образом компактного множества S^{n-1} , компактно. Следовательно,

3°. Граница $\dot{e}$ любой клетки $e \in X \setminus A$ пересекается лишь с конечным числом клеток клеточного пространства (X, A) .

Кроме того, по построению,

4°. Если $e \in X_A^n \setminus A$, то $\dot{e} \subset X_A^{n-1}$.

Наконец,

5°. Клеточное расширение X нормального пространства A нормально.

Это свойство немедленно вытекает из следующих двух общетопологических лемм:

Лемма 1. Пространство X нормально, если оно обладает фильтрацией

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots,$$

состоящей из нормальных подпространств.

Доказательство. Ясно, что все точки пространства X замкнуты. Поэтому достаточно доказать, что для любых двух дизъюнктивных замкнутых множеств $P, Q \subset X$ существует такая непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow I$, что $\varphi = 0$ на P и $\varphi = 1$ на Q . Для этого в свою очередь достаточно построить для каждого $n \geq 0$ такую непрерывную функцию $\varphi_n: X_n \rightarrow I$, что $\varphi_n = 0$ на $A \cap X_n$, $\varphi_n = 1$ на $B \cap X_n$ и $\varphi_n = \varphi_{n+1}|_{X_n}$ (ибо тогда, положив $\varphi(x) = \varphi_n(x)$, если $x \in X_n$, мы корректно определим функцию φ с нужными свойствами).

Существование функции φ_0 обеспечивается нормальностью пространства X_0 . Пусть для некоторого $n \geq 0$ функция φ_n уже построена. Тогда формула

$$\bar{\varphi}_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x), & \text{если } x \in X_n, \\ 0, & \text{если } x \in A \cap X_{n+1}, \\ 1, & \text{если } x \in B \cap X_{n+1}, \end{cases}$$

корректно определяет непрерывную функцию $\bar{\varphi}_n$ на замкнутом подмножестве $X_n \cup (A \cap X_{n+1}) \cup (B \cap X_{n+1})$ нормального пространства X_{n+1} . Произвольно продолжив (по теореме Титце) эту функцию на все пространство X_{n+1} , мы и получим функцию φ_{n+1} с нужными свойствами. $\square$

Лемма 2. Для любых нормальных пространств E и A , любого замкнутого подмножества $S \subset E$ и любого непрерывного отображения $f: S \rightarrow A$ пространство $X = E \cup A$ нормально.

Доказательство. Снова достаточно доказать, что для любых дизъюнктивных замкнутых множеств $P, Q \subset X$ существует такая непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow I$, что $\varphi = 0$ на P и $\varphi = 1$ на Q .

Так как пространство $A \subset X$ нормально, то существует такая функция $\alpha: A \rightarrow I$, что $\alpha = 0$ на $P \cap A$ и $\alpha = 1$ на $P \cap B$. Ясно, что формула

$$\bar{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha(f(x)), & \text{если } x \in S, \\ 0, & \text{если } x \in P \cap (E \setminus S), \\ 1, & \text{если } x \in Q \cap (E \setminus S) \end{cases}$$

(мы считаем, что $E \setminus S \subset X$), корректно определяет непрерывную функцию $\bar{\alpha}$ на замкнутом подмножестве $S \cup (P \cup (E \setminus S)) \cup (Q \cap (E \setminus S))$ нормального пространства E . Пусть β — ее продолжение на все пространство E (существующее по теореме Титце). Тогда формула

$$\varphi(x) = \begin{cases} \beta(x), & \text{если } x \in E \setminus S, \\ \alpha(x), & \text{если } x \in A \end{cases}$$

(напомним, что $X = (E \setminus S) \cup A$), будет корректно определять функцию $\varphi: X \rightarrow I$ с нужными свойствами. $\square$

Замечание 1. Если нормальность мы заменим хаусдорфовостью, то лемма 1 сохранится, а лемма 2 окажется неверной. Тем не менее свойство 5° после этой замены все же сохранится. Этот факт нам не понадобится.

Значение относительных клеточных пространств в теории гомотопий определяется следующим предложением

Предложение 1. Каждое относительное клеточное пространство (X, A) является замкнутой парой Борсука.

Из этого предложения немедленно вытекает следующее утверждение:

Следствие. Для любого относительного клеточного пространства (X, A) фильтрация (1) является фильтрацией Борсука. $\square$

Обратно, в силу леммы 1 лекции I.10¹⁾ из этого следствия вытекает предложение 1.

Поскольку при выводе следствия предложение 1 применяется только к элементарным клеточным расширениям, отсюда следует, что предложение 1 нам достаточно доказать лишь для этого случая. Иными словами (см. следствие из предложения 1 лекции I.1), нам достаточно доказать, что для любого элементарного клеточного расширения X произвольного пространства A подпространство $\tilde{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$ произведения $X \times I$ является его ретрактом. Это утверждение мы и будем доказывать.

Доказательство предложения 1. В частном случае, когда $(X, A) = (E^n, S^{n-1})$ ретракция $r: E^n \times I \rightarrow \tilde{S}^{n-1} = (E^n \times 0) \cup (S^{n-1} \times I)$ задается проектированием из точки $(0, 2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (см. рис. 1), т. е. формулами

$$(2) \quad r(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{2-t} x, 0 \right), & \text{если } 2|x| \leq 2-t, \\ \left(\frac{x}{|x|}, 2|x| + t - 2 \right), & \text{если } 2|x| \geq 2-t. \end{cases}$$

В общем случае элементарное клеточное расширение $X = E \cup A$ является факторпространством дизъюнктного объединения P пространства A и семейства дизъюнктных шаров E_α , находящихся в биективном соответствии с клетками относительного клеточного пространства (X, A) , причем соответствующее отображение факторизации $g: P \rightarrow X$ тождественно на A и (после отождествления $E_\alpha = E^n$) является на каждом шаре E_α характеристическим отображением для соответствующей клетки (и значит, границу S_α шара E_α отображает в A).

В частности, мы видим, что подпространство $g^{-1}(A)$ представляет собой дизъюнктное объединение $S \sqcup A$ пространства A и дизъюнктного объединения S сфер S_α . По-

¹⁾ Напомним (см. Предисловие), что «лекция I.10» — это лекция 10 из «Основ теории гомотопий».

этому отображение $g \times \text{id}: P \times I \rightarrow X \times I$ (являющееся в силу леммы 1 из Дополнения к лекции I.4 эпиоморфизмом) отображает подпространство

$$\widetilde{S \sqcup A} = (P \times 0) \cup ((S \sqcup A) \times I) = \bigsqcup_{\alpha} ((E_{\alpha} \times 0) \cup (S_{\alpha} \times I)) \sqcup (A \times I)$$

пространства $P \times I$ на подпространство $\tilde{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$ пространства $X \times I$.

Для завершения доказательства остается заметить, что ретракции (2), построенные для каждого шара E_{α} , составляют ретракцию $P \times I \rightarrow \widetilde{S \sqcup A}$, согласованную с эпиоморфизмом $g \times \text{id}$, и потому индуцирующую некоторую ретракцию $X \times I \rightarrow \tilde{A}$. $\square$

Идея предложения 1 и его доказательство в важнейшем частном случае принадлежит Борсуку. На этом основании это предложение обычно называется теоремой Борсука.

Мы сосредоточим основное внимание на относительных клеточных пространствах $X = (X, \emptyset)$ с пустым A .

При $A = \emptyset$ перечисленные выше свойства 1°—5° относительных клеточных пространств превращаются в следующие:

1°. Пространство X представлено в виде дизъюнктного объединения некоторого семейства клеток (принадлежность клетки $e \subset X$ этому семейству мы будем выражать формулой $e \in X$).

2°. Множество $C \subset X$ тогда и только тогда замкнуто, когда для любой клетки $e \in X$ пересечение $C \cap \bar{e}$ замкнуто.

3°. Граница $\dot{e}$ каждой клетки $e \in X$ содержится в подмножестве, являющемся объединением конечного числа клеток.

4°. Размерности всех этих клеток меньше размерности клетки e .

5°. Пространство X нормально.

Мы заменим свойство 5° следующим более слабым свойством:

6°. Пространство X хаусдорфово.

Определение 2. Пространство X , обладающее свойствами 1°—4° и 6°, называется клеточным пространством.

Предложение 2. *Пространство X тогда и только тогда является клеточным пространством, когда пара $(X, \emptyset)$ представляет собой относительно клеточное пространство.*

Мы предпошлим доказательству этого предложения несколько простых, но важных замечаний о клеточных пространствах.

Подмножество A клеточного пространства X называется его *подпространством* (или, более распространенно, — *клеточным подпространством*), если оно замкнуто и является объединением некоторых клеток $e \in X$.

Пара (X, A) называется *клеточной парой*, если X является клеточным пространством, а A — его клеточным подпространством.

Легко видеть, что *подмножество $A \subset X$ тогда и только тогда является клеточным подпространством клеточного пространства X , когда либо $e \cap A = \emptyset$, либо $\bar{e} \subset A$ для каждой клетки $e \in X$* . Действительно, если A состоит из клеток, то из $e \cap A \neq \emptyset$ следует — ввиду взаимной дизъюнктивности клеток, — что $e \subset A$ и, значит — если A замкнуто, — что $\bar{e} \subset A$. Обратно, если $\bar{e} \subset A$ для каждой клетки $e \in X$ с $e \cap A \neq \emptyset$, то A является, очевидно, объединением клеток. Кроме того, в силу условия 3° для любой клетки $e \in X$ существует в A лишь конечное число клеток $e_1, \dots, e_s \in X$, пересекающихся с замыканием $\bar{e}$ клетки e . При этом $\bar{e}_1 \subset A, \dots, \bar{e}_s \subset A$, и потому

$$\begin{aligned} (\bar{e}_1 \cap \bar{e}) \cup \dots \cup (\bar{e}_s \cap \bar{e}) &\subset A \cap \bar{e} \subset A \cap ((e_1 \cap \bar{e}) \cup \dots \cup (e_s \cap \bar{e})) = \\ &= (e_1 \cap \bar{e}) \cup \dots \cup (e_s \cap \bar{e}) \subset (\bar{e}_1 \cap \bar{e}) \cup \dots \cup (\bar{e}_s \cap \bar{e}). \end{aligned}$$

Следовательно, все включения здесь являются равенствами, так что $A \cap \bar{e} = (\bar{e}_1 \cap \bar{e}) \cup \dots \cup (\bar{e}_s \cap \bar{e})$. Поэтому пересечение $A \cap \bar{e}$ замкнуто, и, значит, согласно условию 2° множество A замкнуто. $\square$

Теперь легко показать, что *каждое клеточное подпространство A клеточного пространства X само является клеточным пространством* (по отношению к клеткам пространства X , из которых оно состоит). Действительно, условия 1°, 3°, 4° и 6° определения 2, очевидно, выполнены. Поэтому в доказательстве нуждается лишь условие 2°. Другими словами, нужно доказать, что подмножество $C \subset A$, для которого все пересечения $C \cap \bar{e}$, $e \in A$, замкнуты, само замкнуто. Но, как мы только что видели, если

$e_1, \dots, e_s$ — все клетки из A , пересекающиеся с замыканием $\bar{e}$ некоторой клетки $e \in X$, то $A \cap \bar{e} = (\bar{e}_1 \cap \bar{e}) \cup \dots \cup (\bar{e}_s \cap \bar{e})$. Поэтому пересечение

$$C \cap \bar{e} = C \cap (A \cap \bar{e}) = ((C \cap \bar{e}_1) \cup \dots \cup (C \cap \bar{e}_s)) \cap \bar{e}$$

замкнуто для любой клетки $e \in X$, и, значит, множество C замкнуто. $\square$

Ясно, что объединение и пересечение любого семейства клеточных подпространств является клеточным подпространством.

Кроме того, легко видеть, что каждая возрастающая последовательность

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$$

клеточных подпространств клеточного пространства X , объединением которых оно является, представляет собой фильтрацию этого пространства. Действительно, если $C \subset X$ и пересечение $C \cap X_n$ замкнуто для любого $n \geq 0$, то, выбрав для каждой клетки $e \in X$ такое n , что $e \in X_n$, мы получим, что пересечение $C \cap \bar{e} = (C \cap X_n) \cap \bar{e}$ замкнуто. Следовательно, C замкнуто. $\square$

Фильтрации клеточного подпространства, состоящие из клеточных подпространств, называются клеточными фильтрациями.

Объединение всех клеток e клеточного пространства X , размерность которых не превосходит n , обозначается символом $Sk^n X$ или X^n и называется n -м остовом клеточного пространства X . (Это определение согласуется с общим определением остова относительного клеточного пространства, но, поскольку предложение 2 у нас пока еще не доказано, мы вынуждены дать это определение заново.)

Так как $e \cap X^n = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\dim e > n$, то $\bar{e} \subset X^n$, если $e \cap X^n \neq \emptyset$. Следовательно, каждый остов X^n , $n \geq 0$, клеточного пространства X является его клеточным подпространством (а потому сам будет клеточным пространством).

В частности, мы видим, что остовы X^n клеточного пространства X замкнуты в X и составляют фильтрацию этого пространства.

Наше внимание к фильтрациям объясняется тем фактом (который мы уже имели поводы неоднократно использовать в предыдущих лекциях), что, как непосредственно вытекает из определения, отображение $f: X \rightarrow Y$

пространства X с фильтрацией $\{X_n\}$ в произвольное пространство Y тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывны все отображения $f|_{X_n}: X_n \rightarrow Y$.

Отсюда следует, что для построения непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ достаточно построить такие непрерывные отображения $f_n: X_n \rightarrow Y$, что $f_n = f_{n+1}|_{X_n}$ для каждого $n \geq 0$, поскольку тогда формула

$$f(x) = f_n(x), \text{ если } x \in X_n,$$

будет корректно определять непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$.

Этим—по существу очевидным—принципом индукции по фильтрации мы будем постоянно пользоваться (в частности, применительно к фильтрации $\{X^n\}$ клеточного пространства X).

Аналогично, для каждого клеточного пространства X и произвольного топологического пространства Y отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда непрерывно, когда для любой клетки $e \in X$ непрерывно отображение $f|_{\bar{e}}: \bar{e} \rightarrow Y$, что позволяет строить непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$ «по клеткам».

В частности, когда мы последовательно строим непрерывные отображения $f^n: X^n \rightarrow Y$, удовлетворяющие соотношениям $f^n = f^{n+1}|_{X^n}$, то непрерывность отображения f^n будет обеспечена, если будет непрерывно отображение f^{n-1} и все отображения $f^n|_{\bar{e}}$, где e —произвольная n -мерная клетка из X .

Эти замечания позволяют доказать, например, следующее предложение, указывающее простое, но на удивление часто бывающее полезным, достаточное условие разрешимости задачи распространения.

Предложение 3. Пусть (X, A) —такая клеточная пара, что $\dim(X, A) \leq n+1$ (т. е. $\dim e \leq n+1$ для каждой клетки $e \in X \setminus A$). Тогда для любого n -связного топологического пространства Y каждое отображение $f: A \rightarrow Y$ может быть распространено на X .

Доказательство. Пусть $X_A^m = X^m \cup A$, $m \geq 0$. Согласно сказанному нам достаточно для всех $m = 0, 1, \dots, n+1$ построить такие отображения $f^m: X_A^m \rightarrow Y$, что $f^0|_A = f$ и $f^{m+1}|_{X_A^m} = f^m$ при $m \leq n$. Поскольку множество X^0 дискретно, отображение f^0 на нульмерных клетках $e^0 \in X \setminus A$ мы можем задать произвольным образом. Пусть отображение f^m , $m \leq n$, уже построено. Тогда для любой

$(m+1)$ -мерной клетки $e \in X \setminus A$ будет определено отображение $f^{m+1}(\chi|_{S^m}): S^m \rightarrow Y$, где χ — характеристическое для клетки e отображение $E^{m+1} \rightarrow X$. Ввиду n -связности пространства Y (и неравенства $m \leq n$) это отображение может быть распространено до некоторого отображения $g: E^{m+1} \rightarrow Y$, и ясно, что формула

$$f^{m+1}(x) = \begin{cases} f^m(x), & \text{если } x \in X_A^m, \\ g(x), & \text{если } x \in \bar{e} \text{ и } \chi(x) = x, \end{cases}$$

корректно определяет отображение f^{m+1} на $X_A^m \cup e$. Сделав это для всех клеток $e \in X \setminus A$, мы и получим требуемое отображение $f^{m+1}: X_A^{m+1} \rightarrow Y$. $\square$

Замечание 2. Легко видеть, что предложение 3 (вместе с доказательством) остается справедливым для любого относительного клеточного пространства (X, A) с $\dim(X, A) \leq n+1$.

Лемма 3. Для любой клеточной пары (X, A) и любого $n \geq 0$ пространство $X_A^n = X^n \cup A$ является элементарным клеточным расширением пространства $X_A^{n-1} = X^{n-1} \cup A$.

Доказательство. Выбрав для каждой из клеток $e_\alpha \in X_A^n \setminus X_A^{n-1}$ характеристическое отображение $\chi_\alpha: E_\alpha \rightarrow X$, рассмотрим элементарное клеточное расширение $'X_A^n$ подпространства X_A^{n-1} , построенное с помощью соответствующих приклеивающих отображений $\rho_\alpha: S_\alpha \rightarrow X^{n-1}$, где S_α — граница шара E_α . По определению $'X_A^n = E \cup_\rho X_A^{n-1}$, где $E = \bigsqcup E_\alpha$ и $\rho = \bigsqcup \rho_\alpha$. Пусть $'g: E \sqcup X_A^{n-1} \rightarrow 'X_A^n$ — соответствующее отображение факторизации, и пусть $g: E \sqcup X_A^{n-1} \rightarrow X_A^n$ — отображение $(\bigsqcup \chi_\alpha) \sqcup \text{id}_{X_A^{n-1}}$. Ясно, что $'g(x_1) = 'g(x_2)$ тогда и только тогда, когда $g(x_1) = g(x_2)$. Поэтому тождественное отображение $E \sqcup X_A^{n-1} \rightarrow E \sqcup X_A^{n-1}$ индуцирует биективное отображение $i: 'X_A^n \rightarrow X_A^n$, замыкающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & E \sqcup X_A^{n-1} & \\ \text{\textit{f}} \swarrow & & \searrow \text{\textit{g}} \\ \text{\textit{X}}_A^n & \xrightarrow{\text{\textit{i}}} & \text{\textit{X}}_A^n \end{array}$$

Для доказательства леммы 3 достаточно, очевидно, доказать, что отображение i является гомеоморфизмом.

Это отображение непрерывно, потому что отображение g непрерывно, а отображение $'g$ эпиморфно. Кроме того, оно тождественно на X_A^{n-1} и каждую клетку $'e_\alpha =$

$= 'g(E_\alpha)$ из $'X_A^n \setminus X_A^{n-1}$ отображает на соответствующую клетку e_α из $X_A^n \setminus X_A^{n-1}$, а замыкание $'\bar{e}_\alpha$ клетки $'e_\alpha$ на замыкание $\bar{e}_\alpha$ клетки e_α . Но множество $'\bar{e}_\alpha$ компактно, а множество $\bar{e}_\alpha$, будучи подмножеством хаусдорфова пространства X , является хаусдорфовым пространством. Поэтому отображение $'\bar{e}_\alpha \rightarrow \bar{e}_\alpha$, индуцированное отображением i , представляет собой гомеоморфизм. Это означает, что на замыкании $\bar{e}_\alpha$ каждой клетки e_α отображение i^{-1} , обратное к отображению i , непрерывно. Поскольку на X_A^{n-1} отображение i^{-1} также непрерывно, оно в силу сделанных выше общих замечаний непрерывно на всем пространстве X_A^n . Следовательно, отображение i является гомеоморфизмом. $\square$

Следствие. Любая клеточная пара (X, A) является относительным клеточным пространством. $\square$

В силу предложения 1 этим, в частности, доказано, что любая клеточная пара (X, A) является парой Борсука.

Следовательно, каждая клеточная фильтрация клеточного пространства является фильтрацией Борсука.

Теперь мы можем доказать и предложение 2.

Доказательство предложения 2. По определению для каждого относительного клеточного пространства вида $(X, \emptyset)$ пространство X является клеточным пространством. Обратно, так как пустое подпространство $\emptyset$ является клеточным подпространством, то для любого клеточного пространства X пара $(X, \emptyset)$ является, согласно следствию, относительным клеточным пространством. $\square$

Из предложения 2 вытекает (см. свойство 5° клеточных расширений), что любое клеточное пространство нормально.

З а м е ч а н и е 3. Подчеркнем, что в структуру клеточного пространства входит его разбиение на клетки и при другом разбиении получается другое клеточное пространство. Поэтому клеточные пространства называются также «клеточными разбиениями». Конечно, следовало бы отличать клеточное пространство как собрание клеток от него же как топологического пространства, но чтобы не загромождать изложения, мы, как правило, этого различия делать не будем. Однако, когда это будет удобно, мы позволим себе клеточное пространство X , рассматриваемое как топологическое пространство, называть *телом*

клеточного пространства X , рассматриваемого как собрание клеток, и обозначать его символом $|X|$. Аналогично, собрание клеток клеточного пространства X мы будем иногда называть *клеточным разбиением* этого пространства (или пространства $|X|$).

В формуле $e \in X$ клеточное пространство X рассматривается как собрание клеток, а в формуле $e \subset X$ — как топологическое пространство (так что формула $e \subset X$ является лишь сокращением формулы $e \subset |X|$).

Замечание о терминологии. В литературе по топологии на русском языке для клеточных пространств употребляется также термин «CW-комплекс», являющийся калькой английского термина *CW-complex*. Этот термин весьма неудачен, и не только потому, что он неуклюж, плохо произносим и использует чуждые русскому языку аббревиатуры, но главным образом из-за невозможной перегруженности термина «комплекс» в математике вообще и в алгебраической топологии в частности. Мы этим термином пользоваться не будем.

Примеры клеточных пространств.

Пример 1. Любой граф (см. Дополнение к лекции 1.6) является клеточным пространством, клетками которого служат его вершины и ребра.

Пример 2. Сфера S^n является клеточным пространством с двумя клетками: одной нульмерной e^0 , являющейся точкой $s_0 = (1, 0, \dots, 0)$, и другой — n -мерной e^n , замыканием $\bar{e}^n$ которой является вся сфера S^n . Для этого клеточного пространства

$$X^0 = \dots = X^{n-1} = \{e^0\}, \quad X^n = X^{n+1} = \dots = S^n.$$

Характеристическое для клетки e^n отображение является не чем иным, как относительным гомеоморфизмом $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, s_0)$. Если явно не оговорено противное, мы всегда будем предполагать, что этим гомеоморфизмом является гомеоморфизм $\chi^{(n)}$, описанный в лекции 1.5.

Пример 3. Шар E^{n+1} является клеточным пространством с тремя клетками e^0 , e^n , e^{n+1} , причем клетки e^0 , e^n составляют клеточное разбиение граничной сферы S^n , а клетка e^{n+1} представляет собой внутренность $\bar{E}^{n+1}$ шара E^{n+1} (так что $\bar{e}^{n+1} = E^{n+1}$, а тождественное отображение $E^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$ является характеристическим для клетки e^{n+1}).

Пример 4. В вещественном $(n+1)$ -мерном проективном пространстве $\mathbb{R}P^{n+1}$ дополнение к подпространству $\mathbb{R}P^n$, состоящему из точек $(x_0: x_1: \dots: x_{n+1})$, для которых $x_{n+1} = 0$, является $(n+1)$ -мерной клеткой e^{n+1} . Замыкание $\bar{e}^{n+1}$ этой клетки совпадает с $\mathbb{R}P^{n+1}$, а ее характеристическое отображение $E^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ определяется формулой $x \mapsto (x_0: \dots: x_n: \sqrt{1 - |x|^2})$, где $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и (при $n \geq 1$) является на сфере S^n двулистным накрытием $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Очевидной индукцией отсюда следует, что пространство $\mathbb{R}P^{n+1}$ является клеточным пространством с клетками $e^0, e^1, \dots, e^{n+1}$ (по одной в каждой размерности), причем клетки $e^0, e^1, \dots, e^n$ составляют клеточное разбиение подпространства $\mathbb{R}P^n$.

Пример 5. Аналогичным образом строится клеточное разбиение комплексного $(n+1)$ -мерного проективного пространства $\mathbb{C}P^{n+1}$ (являющегося гладким многообразием размерности $2(n+1)$), состоящее из клеток $e^0, e^2, \dots, e^{2n+2}$ четной размерности. При этом замыкание $\bar{e}^{2n+2}$ клетки e^{2n+2} совпадает со всем пространством $\mathbb{C}P^{n+1}$, а соответствующее приклеивающее отображение $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, где сфера S^{2n+1} интерпретируется как граничная сфера единичного шара пространства $\mathbb{C}^n$, является расслоением Хопфа из лекции I.5.

Конечно, все рассмотренные в примерах 2—5 пространства обладают и другими, состоящими из большего числа клеток, клеточными разбиениями. Построенные же клеточные разбиения этих пространств мы будем называть их *минимальными клеточными разбиениями*.

Следующие два примера несколько патологического характера имеют своей единственной целью продемонстрировать широту понятия клеточного пространства.

Пример 6. Клеточным пространством (состоящим из клеток e^0, e^1, e^2, e^3) является пространство $X = E^2 \cup E^3$, получающееся приклеиванием трехмерного шара E^3 к двумерному диску E^2 посредством произвольного непрерывного отображения $f: S^2 \rightarrow E^2$, например композиции проекции $S^2 \rightarrow [-1, 1]$ сферы S^2 на отрезок $[-1, 1]$ оси абсцисс и некоторого отображения Пеано $[-1, 1] \rightarrow E^2$ последнего отрезка на диск E^2 .

Пример 7. Объединение единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ и отрезка $[0, 2]$ оси абсцисс является клеточным пространством с двумя нульмерными клетками e_1^0, e_2^0 (концами отрезка $[0, 2]$), одной одномерной клеткой e^1 (внутрен-

постью отрезка $[0, 2]$ и одной двумерной клеткой $e^2 = S^2 \setminus \{1\}$. Здесь замыкание $\bar{e}^2$ клетки e^2 не является объединением клеток меньшей размерности.

Противоположной цели служат следующие два примера. В них предполагается, что $n \geq 0$.

Пример 8. Представление сферы S^n в виде объединения всех ее точек не является клеточным разбиением, поскольку для него не выполнено условие 2°.

Пример 9. Представление шара E^{n+1} в виде объединения его внутренности и всех точек границы условию 2°, напротив, удовлетворяет. Все же оно не будет клеточным разбиением, поскольку для него не выполнено условие 3°.

Клеточные пространства и их непрерывные отображения составляют, очевидно, категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом CW .

Морфизмы категории CW никак не связаны с клеточной структурой ее объектов. Поэтому во многих вопросах целесообразно соответствующим образом их ограничить.

Определение 3. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ клеточного пространства X в клеточное пространство Y называется *клеточным отображением*, если $f(X^n) \subset Y^n$ для любого $n \geq 0$.

Клетки положительной размерности клеточное отображение может растягивать на несколько клеток.

Ясно, что клеточные пространства и их клеточные отображения составляют категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом $CELL$. Изоморфизмы этой категории мы будем называть *клеточными изоморфизмами*, а отображения, являющиеся клеточными изоморфизмами на свой образ, — *клеточными вложениями*.

Для любого относительного клеточного пространства (X, A) , любого клеточного пространства Y и любого непрерывного отображения $\varphi: A \rightarrow Y$ пространство $X \cup_{\varphi} Y = (X \setminus A) \cup Y$ естественным образом представляется в виде дизъюнктного объединения клеток из $X \setminus A$ и Y , т. е. удовлетворяет условию 1° определения 2. Если A нормально, то в силу леммы 2 это пространство удовлетворяет также условию 6° (даже условию 5°). Замыкание (в $X \cup_{\varphi} Y$) каждой клетки $e \in Y$ содержится в Y , а замыкание каждой клетки $e \in X \setminus A$ пересекается с Y по компакному множеству $\varphi(\bar{e} \cap A)$, где $\bar{e}$ — замыкание клетки e .

в X . Поэтому в обоих случаях это замыкание пересекается лишь с клеточным числом клеток из $X \cup_{\varphi} Y$. Это означает, что пространство $X \cup_{\varphi} Y$ удовлетворяет условию 3°. По определению множество $C \subset X \cup_{\varphi} Y$ тогда и только тогда замкнуто в $X \cup_{\varphi} Y$, когда замкнут его прообраз в $X \sqcup Y$, т. е. замкнуты множества $C \cap Y$ (в Y) и $\varphi^{-1}C \cup ((X \setminus A) \cap C)$ (в X). Но множество $C \cap Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки $e \in Y$ замкнуто (в Y , а значит, и в $X \cup_{\varphi} Y$) пересечение $C \cap \bar{e}$, а так как пересечение $[\varphi^{-1}C \cup ((X \setminus A) \cap C)] \cap A = \varphi^{-1}C$ замкнуто в A , то множество $\varphi^{-1}C \cup ((X \setminus A) \cap C)$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда для любой клетки $e \in X \setminus A$ замкнуто пересечение $[\varphi^{-1}C \cup ((X \setminus A) \cap C)] \cap \bar{e} = (\varphi^{-1}C \cap \bar{e}) \cup ((X \setminus A) \cap C) \cap \bar{e}$, являющееся не чем иным, как прообразом в $X \sqcup Y$ пересечения $C \cap \bar{e}$, где теперь $\bar{e}$ — замыкание клетки e в $X \cup_{\varphi} Y$, и потому замкнутое, если замкнуто это пересечение. Этим доказано, что пространство $X \cup_{\varphi} Y$ удовлетворяет условию 2° определения 2. Что же касается последнего условия 4°, то оно заведомо выполнено, когда отображение $\varphi: A \rightarrow Y$ обладает тем свойством, что для любой клетки $e \in X \setminus A$ множество $\varphi(\bar{e} \cap A)$ содержится в Y^n , где $n = \dim e$. Поскольку это условие, очевидно, выполнено, когда (X, A) является клеточной парой и отображение φ клеточно, тем самым доказано, что для любой клеточной пары (X, A) и любого клеточного отображения $\varphi: A \rightarrow Y$ пространство $X \cup_{\varphi} Y$ является клеточным пространством.

Это условие выполнено и при $Y = \text{pt}$. Следовательно, для любого относительного клеточного пространства (X, A) пространство X/A является клеточным пространством.

В частности, для любого клеточного подпространства A клеточного пространства X пространство X/A является клеточным пространством.

Ясно, что каждое непустое клеточное пространство X обязательно содержит нульмерные клетки (т. е. $X^0 \neq \emptyset$).

Нульмерные клетки клеточного пространства называются также его вершинами. Клеточное пространство называется одновершинным (или клеточно 0-связным), если оно содержит только одну вершину. Одновершинное клеточное пространство (или относительное клеточное пространство (X, A) с $A = X_A^0$), не содержащее клеток размерностей $1, 2, \dots, n$, называется клеточно n -связным.

Клеточное пространство называется *конечномерным*, если размерности его клеток ограничены сверху. Наивысшая размерность клеток конечномерного клеточного пространства X называется его *размерностью* и обозначается символом $\dim X$. По определению $\dim X^n \leq n$ и $\dim X^n = n$ тогда и только тогда, когда $X^n \neq X^{n-1}$. Таким образом, если $\dim X = n$, то $X^m = X$ для любого $m \geq n$.

Для бесконечномерного клеточного пространства X мы будем писать $\dim X = \infty$. Заметим, что *клеточное пространство X тогда и только тогда нульмерно ($\dim X = 0$), когда оно дискретно ($X = X^0$)*.

Одномерные клеточные пространства — это в точности графы (см. Дополнение к лекции I.6).

Так как замыкание каждой клетки связно, то любая компонента клеточного пространства вместе с каждой точкой содержит и замыкание содержащей эту точку клетки, т. е. является (клеточным) подпространством. Поэтому подпространством — и следовательно, замкнутым множеством — будет и объединение любого семейства компонент, в частности дополнение произвольной компоненты. Этим доказано, что *компоненты клеточного пространства являются его открытыми подпространствами*, т. е., другими словами, что любое клеточное пространство является дизъюнктивным объединением своих компонент.

Ясно, что элементарное клеточное расширение размерности $n \geq 2$ связного пространства связно, а несвязного несвязно (ибо непрерывный образ сферы S^{n-1} при $n \geq 2$ связан и потому не может задеть две разные компоненты одновременно).

Очевидной индукцией отсюда следует, что *для любого клеточного пространства X все остовы $X^n = Sk^n X$ при $n \geq 1$ одновременно либо связны, либо несвязны*.

Но легко видеть, что если все члены некоторой фильтрации пространства связны, то и само пространство связно, а если все они, начиная с некоторого, несвязны, то и само пространство несвязно. Следовательно, *клеточное пространство X тогда и только тогда связно, когда связан его остов X^1 (а вместе с ним и все остальные остовы X^n , $n \geq 1$)*.

З а м е ч а н и е 4. Все это верно при любом понимании связности: по Хаусдорфу (пространство связно, если оно не содержит нетривиального открыто-замкнутого подмножества) и в смысле линейной связности (которого мы придерживаемся). С другой стороны ясно, что оба пони-

мания связности совпадают для одномерных клеточных пространств (графов). Поэтому они совпадают и для любых клеточных пространств.

Клеточное пространство, состоящее из конечного числа клеток, называется *конечным*.

Ясно, что *клеточное пространство тогда и только тогда конечно, когда оно компактно*.

Хотя, как показывает пример 7, замыкание клетки клеточного пространства может не быть его (клеточным) подпространством, но все же каждая клетка e клеточного пространства X (а значит, и каждая его точка) содержится в некотором конечном подпространстве. Действительно, для нульмерных клеток это так (каждая такая клетка сама представляет собой подпространство), а любая клетка e положительной размерности содержится в подпространстве, являющемся объединением клетки e и подпространств, содержащих клетки меньшей размерности, пересекающихся с границей $\bar{e}$ клетки e . □

Отсюда непосредственно следует, что *каждое компактное подмножество клеточного пространства содержится в некотором конечном подпространстве*.

Клеточное пространство, состоящее из счетного (или конечного) числа клеток, называется *счетным*.

Легко видеть, что *клеточное пространство тогда и только тогда счетно, когда оно сепарабельно* (содержит счетное всюду плотное подмножество). Действительно, в счетном клеточном пространстве счетным всюду плотным подмножеством будет объединение счетных всюду плотных подмножеств клеток. Обратно, объединение конечных подпространств, содержащих точки счетного всюду плотного подмножества сепарабельного клеточного пространства, будет счетным клеточным подпространством, совпадающим — ввиду его замкнутости — со всем пространством. □

Очевидная индукция показывает также, что *клеточное пространство X тогда и только тогда счетно, когда в нем существует фильтрация*

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots,$$

состоящая из конечных подпространств.

Топологическое пространство X мы будем называть *счетно компактным*, если в нем существует фильтрация, состоящая из компактных подпространств.

Поскольку любое компактное подпространство клеточного пространства содержится в конечном подпространстве, мы видим, следовательно, что *клеточное пространство тогда и только тогда счетно, когда оно счетно-компактно*.

Относительное клеточное пространство (X, A) называется *относительной n -мерной клеткой*, если дополнение $e = X \setminus A$ является n -мерной клеткой.

Легко видеть, что если в относительной n -мерной клетке (X, A) подпространство A вкладывается в конечно-мерное евклидово пространство, то пространство X также обладает этим свойством. Действительно, если $i: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ — вложение (т.е. монeоморфное отображение), то формула

$$j(x) = \begin{cases} (i(x), 0, 0), & \text{если } x \in A, \\ (0, x, 1), & \text{если } x \in e \text{ и } |x| \leq 1/2, \\ ((2|x| - 1)(i \circ \chi)\left(\frac{x}{|x|}\right), \frac{1 - |x|}{|x|}x, 2(1 - |x|)), & \text{если } x \in e \text{ и } |x| \geq 1/2, \end{cases}$$

где $\chi: E^n \rightarrow X$ — характеристическое отображение для клетки $e = X \setminus A$, а $x = \chi^{-1}(x) \in E^n$ — прообраз точки $x \in e$ при этом отображении, корректно определяет вложение j пространства X в пространство $\mathbb{R}^{N+n+1} = \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$. $\square$

Очевидной индукцией отсюда следует, что *любое конечное клеточное пространство X вкладывается в конечно-мерное евклидово пространство*.

Поэтому, в частности, *каждое конечное клеточное пространство метризуемо и обладает счетной базой* (удовлетворяет второй аксиоме счетности).

Напомним, что топологическое пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, если любая его точка обладает счетной локальной базой (счетной фундаментальной системой окрестностей).

Определение 4. Клеточное пространство X называется *локально конечным*, если каждая его точка обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом клеток пространства X .

Предложение 4. Для клеточного пространства X следующие условия равносильны:

- (а) пространство X локально конечно;
- (б) каждая точка пространства X является внутренней точкой некоторого конечного подпространства;

(в) для каждой клетки $e \in X$ существует в X лишь конечное число клеток, с замыканиями которых клетка e пересекается;

(г) каждая клетка $e \in X$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом клеток из X ;

(г') каждая клетка $e \in X$ обладает окрестностью, для которой в X существует лишь конечное число клеток, с замыканиями которых эта окрестность пересекается;

(д) каждое компактное множество $K \subset X$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом клеток из X ;

(д') каждое компактное множество $K \subset X$ обладает окрестностью, для которой в X существует лишь конечное число клеток, с замыканиями которых эта окрестность пересекается;

(е) пространство X локально компактно;

(ж) пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Кроме того:

(з) в любом локально конечном клеточном пространстве X объединение замыканий любого семейства клеток является замкнутым пространством;

(и) клеточное пространство тогда и только тогда обладает счетной базой (удовлетворяет второй аксиоме счетности), когда оно локально конечно и счетно;

(к) связное локально конечное клеточное пространство счетно;

(л) связное локально конечное клеточное пространство обладает счетной базой.

Доказательство. Импликации $(г') \Rightarrow (г)$, $(д') \Rightarrow (д)$, $(д) \Rightarrow (а)$, $(г') \Rightarrow (в)$ и $(б) \Rightarrow (е)$ очевидны. Импликации $(г) \Rightarrow (г')$ и $(д) \Rightarrow (д')$ непосредственно вытекают из того, что открытое множество, пересекающее замыкание некоторого множества, пересекает само это множество, импликация $(а) \Rightarrow (д)$ — из того, что любое открытое покрытие множества K содержит конечное подпокрытие, а импликация $(а) \Rightarrow (б)$ — из того, что открытое множество U пространства X , пересекающееся лишь с конечным числом клеток $e \in X$, содержится в конечном подпространстве, содержащем эти клетки.

Импликация $(е) \Rightarrow (а)$ вытекает из того, что в клеточном пространстве компактное множество — в данном случае замыкание достаточно малой окрестности произвольной точки — пересекается лишь с конечным числом клеток,

а обратная импликация $(a) \Rightarrow (e)$ — из того, что замыкание окрестности, пересекающейся лишь с конечным числом клеток, содержится в объединении замыканий этих клеток, являющемся компактным множеством.

Импликация $(d) \Rightarrow (g)$ вытекает из того, что замыкание $\bar{e}$ каждой клетки $e \in X$ компактно, импликация $(g) \Rightarrow (a)$ — из того, что любая точка пространства X принадлежит некоторой клетке, а импликация $(b) \Rightarrow (ж)$ — из того, что любое конечное клеточное пространство удовлетворяет второй (а значит, и первой) аксиоме счетности.

Утверждение (з) вытекает из условия (в), поскольку для любого семейства клеток пространства X , удовлетворяющего условию (в), объединение их замыканий будет пересекаться с каждой клеткой $e \in X$ по замкнутому множеству и потому в силу условия слабости топологии будет замкнутым множеством. В частности, в клеточном пространстве, удовлетворяющем условию (в), будет замкнуто объединение всех замыканий клеток, обладающих тем свойством, что их замыкания не пересекаются с данной клеткой $e \in X$. Дополнение U к этому объединению является поэтому окрестностью клетки e . При этом, если замыкание некоторой клетки не пересекается с e , то оно не пересекается и с U . Следовательно (мы снова используем условие (в)), окрестность U клетки e пересекается лишь с конечным числом замыканий других клеток. Это доказывает импликацию $(в) \Rightarrow (г')$.

Пусть пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не локально конечно. Тогда, как легко видеть, существует такая точка $x_0 \in X$ и такое счетное множество $D \subset X \setminus x_0$, что $x_0 \in \bar{D}$ и все точки из D лежат в разных клетках. Но в силу последнего условия множество D пересекается с замыканием каждой клетки из X по конечному — и, значит, замкнутому — множеству. Следовательно, ввиду условия слабости топологии множество D замкнуто, что противоречит включениям $D \subset X \setminus x_0$ и $x_0 \in \bar{D}$. Это доказывает импликацию $(ж) \Rightarrow (a)$.

Очевидно, что равносильность всех условий $(a) — (ж)$ этим полностью доказана.

Поэтому, в частности, в формулировке утверждения (и) условие локальной конечности (условие (а)) можно заменить требованием, чтобы пространство X удовлетворяло первой аксиоме счетности (условие (ж)). Так как, кроме того, условие счетности клеточного пространства

равносильно его сепарабельности, то после такой замены утверждение (и) переходит в очевидное общетопологическое утверждение, что вторая аксиома счетности равносильна первой аксиоме и сепарабельности. Это доказывает (и).

Выбрав теперь в локально конечном клеточном пространстве X некоторую точку x_0 , рассмотрим для любого $n \geq 0$ подмножество X_n пространства X , состоящее из всех точек, которые можно соединить с точкой x_0 путем, задевающим не более n клеток. Поскольку ввиду компактности отрезка каждый путь в X задевает только конечное число клеток, возрастающая последовательность подмножеств X_n исчерпывает все пространство X . С другой стороны, замыкание каждой клетки из X_{n+1} пересекается, очевидно, с замыканием некоторой клетки из X_n . Поскольку в силу условия (д) любое компактное множество — и, в частности, замыкание любой клетки — пересекается с замыканиями лишь конечного числа клеток, отсюда посредством очевидной индукции вытекает, что все множества X_n состоят из конечного числа клеток. Следовательно, число клеток в их объединении X не более чем счетно. Этим доказано утверждение (к). Утверждение (л) является непосредственным следствием утверждений (и) и (к). $\square$

Замечание 5. Согласно известной из общей топологии метризации теореме Урысона регулярное пространство со счетной базой метризуемо. Поскольку любое метризуемое пространство удовлетворяет, очевидно, первой аксиоме счетности, отсюда следует, что *клеточное пространство тогда и только тогда метризуемо, когда оно локально конечно.*

Ясно, что если два клеточных пространства X и Y пересекаются по клеточному подпространству (т. е. если пересечение $X \cap Y$ является клеточным подпространством каждого из них), то их объединение $X \cup Y$ также будет клеточным пространством.

В частности, *дизъюнктное объединение клеточных пространств будет клеточным пространством.*

Это означает, что категории CW и CELL клеточных пространств являются категориями с прямыми суммами (копроизведениями).

Несколько иначе дело обстоит с произведениями.

Ясно, что если подмножество $e_1 \subset X$ является клеткой в пространстве X (с характеристическим отображением $\chi_1: E^n \rightarrow X$), а подмножество $e_2 \subset Y$ — клеткой в простран-

стве Y (с характеристическим отображением $\chi_2: E^m \rightarrow Y$), то произведение $e_1 \times e_2$ будет клеткой в пространстве $X \times Y$ (с характеристическим отображением $\chi_1 \times \chi_2: E^{n+m} = E^n \times E^m \rightarrow X \times Y$). Поэтому для любых клеточных пространств X и Y топологическое пространство $X \times Y = |X| \times |Y|$ представляется в виде объединения клеток $e_1 \times e_2$, где $e_1 \in X$, $e_2 \in Y$, и ясно, что все условия определения 2 будут выполнены, кроме — возможно — условия 2°.

Пусть P — дизъюнктное объединение замкнутых шаров, находящихся в биективном соответствии с клетками пространства X , и пусть g — непрерывное отображение $P \rightarrow X$, являющееся на каждом шаре из P характеристическим отображением для соответствующей клетки. Тогда условие 2° для пространства X равносильно требованию, чтобы отображение g было эпиморфизмом. Поэтому, если $h: Q \rightarrow Y$ — аналогичное отображение для клеточного пространства Y , то произведение $X \times Y$ тогда и только тогда будет клеточным пространством, когда отображение

$$g \times h: P \times Q \rightarrow X \times Y$$

является эпиморфизмом.

Это отображение можно разложить в композицию

$$P \times Q \xrightarrow{\text{id} \times h} P \times Y \xrightarrow{g \times \text{id}} X \times Y$$

отображения $\text{id} \times h: P \times Q \rightarrow P \times Y$ и отображения $g \times \text{id}: P \times Y \rightarrow X \times Y$. Так как пространство P локально компактно (и хаусдорфово), то, согласно лемме 1 из Дополнения к лекции I.4, первое отображение всегда является эпиморфизмом. Что же касается второго отображения, то в силу той же леммы оно будет эпиморфизмом, если пространство Y локально компактно, т. е. (предложение 2), если оно локально конечно. Таким образом, мы видим, что если клеточное пространство Y локально конечно, то для любого клеточного пространства X произведение $X \times Y$ будет клеточным пространством.

При $X=Y$ очевидная индукция показывает, что для любого локально конечного клеточного пространства X и любого $n \geq 1$ произведение

$$X^n = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}}$$

является клеточным пространством с клетками вида $e_1 \times \dots \times e_n$, где $e_1, \dots, e_n \in X$; при этом

$$\dim(e_1 \times \dots \times e_n) = \dim e_1 + \dots + \dim e_n.$$

(Не путайте X^n с n -м остовом, который — увы — обозначается точно так же!)

Замечание 6. Хотя произведение $X \times Y$ в общем случае не будет клеточным пространством (примите за X и Y счетный и несчетный букеты отрезков I с отмеченной точкой 0), но все же произведения в категориях CW и $CELL$ существуют (так что эти категории являются фм-категориями). Именно, чтобы построить произведение клеточных пространств X и Y в категории CW (или, что равносильно, в категории $CELL$) следует ослабить топологию в $X \times Y$ (уменьшить запас открытых множеств), и считать открытыми множествами только те множества, прообразы которых при отображении $g \times h$ открыты в $P \times Q$. Мы этой конструкцией пользоваться не будем.

Представляя отрезок I как клеточное пространство с клетками $0, 1$ и $(0, 1)$, мы получим, в частности, что для любого клеточного пространства X произведение $X \times I$ является клеточным пространством с клетками вида $e \times 0$, $e \times 1$ и $e \times (0, 1)$, где $e \in X$.

Поэтому сделанные выше замечания, касающиеся индуктивного построения непрерывных отображений, мы можем применить теперь к гомотопиям $f_t: X \rightarrow Y$. Таким образом, во-первых,

i) семейство отображений $f_t: X \rightarrow Y$ является гомотопией, если для любого $n \geq 0$ является гомотопией семейство отображений $f_t^n = f_t|_{X^n}: X^n \rightarrow Y$,
и, во-вторых,

ii) семейство отображений $f_t: X \rightarrow Y$ является гомотопией, если гомотопии составляют отображения $f_t^{n-1}: X^{n-1} \rightarrow Y$ и отображения $f_t^n|_{\bar{e}}: \bar{e} \rightarrow Y$, где e — произвольная n -мерная клетка из X .

Кроме того, для клеточного отображения $f: X \rightarrow Y$ клеточных пространств мы получаем, что его цилиндр $Cyl f$ представляет собой результат склеивания двух клеточных пространств $X \times I$ и Y посредством клеточного отображения. Поэтому цилиндр $Cyl f$ произвольного клеточного отображения $f: X \rightarrow Y$ является клеточным пространством.

Конус C , непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ получается из его цилиндра стягиванием в точку его подпространства X :

$$C_f = Cyl f / X.$$

Поэтому для любого клеточного отображения $f: X \rightarrow Y$ конус C_f является клеточным пространством.

В частности, для любого клеточного пространства X конус CX будет клеточным пространством (ибо $CX = C_{\text{id}}$). Клетками конуса CX являются его вершина e^0 и всевозможные клетки вида Ce , $e \in X$ (при этом $\dim Ce = \dim e + 1$).

Клеточным пространством будет, конечно, и надстройка SX над клеточным пространством X .

Рассматривая пунктированные клеточные пространства, мы раз навсегда условимся, что отмеченной точкой обязательно является вершина.

В силу этого условия цилиндр $\text{Cyl}^* f$ и конус $C^* f$ пунктированного отображения f пунктированных клеточных пространств будут пунктированными клеточными пространствами.

В частности, пунктированными клеточными пространствами будут конус $C^* X$ и надстройка $S^* X$.

ДОПОЛНЕНИЕ

Произведения счетных клеточных пространств. — Локальная стягиваемость клеточных пространств. — Паракомпактность клеточных пространств. — Гомотопически полные пространства.

Доказанное в лекции I утверждение об n -кратном произведении клеточного пространства на себя имеет место не только для локально конечных пространств, но, например, и для счетных пространств.

Предложение 1. Произведение $X \times Y$ счетных клеточных пространств X и Y является клеточным пространством.

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать, что если топологические пространства X и Y хаусдорфовы и счетно компактны, то для любого эпиморфизма $g: P \rightarrow X$ отображение $g \times \text{id}: P \times Y \rightarrow X \times Y$ является эпиморфизмом, для чего в свою очередь достаточно доказать (см. замечание 1 в Дополнении к лекции I.4), что если пространства X и Y хаусдорфовы и счетно компактны, то для них верен экспоненциальный закон, т. е. для любого пространства B и любого непрерывного отображения $f: Y \rightarrow B^X$ отображение

$$g = \theta^{-1} f: X \times Y \rightarrow B, \quad (x, y) \mapsto f(y) x,$$

непрерывно. Но если $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ — фильтрации пространств X и Y , состоящие из компактных множеств, то, как легко видеть,

$$\theta(g|_{X_n \times Y_n}) = j \circ f|_{Y_n} \quad \text{для любого } n \geq 1,$$

где j — отображение $B^X \rightarrow B^{X_n}$, индуцированное операцией ограничения отображений $X \rightarrow B$ на X_n . Поэтому согласно экспоненциальному закону, примененному к пространствам X_n и Y_n , отображение $g|_{X_n \times Y_n}$ непрерывно и, значит, достаточно доказать, что множества $X_n \times Y_n$ составляют фильтрацию пространства $X \times Y$ (так что пространство $X \times Y$ также оказывается счетно компактным), т. е. что множество $W \subset X \times Y$ открыто в $X \times Y$, если для любого $n \geq 1$ множество $W \cap (X_n \times Y_n)$ открыто в $X_n \times Y_n$.

Пусть $(x_0, y_0) \in W$, и пусть $(x_0, y_0) \in X_{n_0} \times Y_{n_0}$. Так как множество $W \cap (X_{n_0} \times Y_{n_0})$ открыто в $X_{n_0} \times Y_{n_0}$, а пространство $X_{n_0} \times Y_{n_0}$, будучи компактным и хаусдорфовым, регулярно, то существуют такие окрестности U_{n_0} и V_{n_0} точек x_0 и y_0 в пространствах X_{n_0} и Y_{n_0} соответственно, что $\bar{U}_{n_0} \times \bar{V}_{n_0} \subset W$. Пусть для некоторого $n \geq n_0$ уже построены такие окрестности U_n и V_n точек x_0 и y_0 в пространствах X_n и Y_n соответственно, что $\bar{U}_n \times \bar{V}_n \subset W$. Так как множество $W \cap (X_{n+1} \times Y_{n+1})$ по условию открыто в $X_{n+1} \times Y_{n+1}$, то для любой точки $(x, y) \in \bar{U}_n \times \bar{V}_n$ существуют такие окрестности $M_y(x)$ и $N_x(y)$ точек x и y в пространствах X_{n+1} и Y_{n+1} соответственно, что $\bar{M}_y(x) \times \bar{N}_x(y) \subset W$. Так как множество $\bar{U}_n$, будучи замкнутым подмножеством компактного пространства X_n , компактно, то существуют такие точки $x_1, \dots, x_s \in \bar{U}_n$, что для любой точки $y \in \bar{V}_n$ имеет место включение $\bar{U}_n \subset M_y$, где $M_y = M_y(x_1) \cup \dots \cup M_y(x_s)$. Пусть $N(y) = N_{x_1}(y) \cap \dots \cap N_{x_s}(y)$. Так как множество $\bar{V}_n$ также компактно, то существуют такие точки $y_1, \dots, y_t \in \bar{V}_n$, что $\bar{V}_n \subset V_{n+1}$, где $V_{n+1} = N(y_1) \cup \dots \cup N(y_t)$. При этом $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$, где $U_{n+1} = M_{y_1} \cap \dots \cap M_{y_t}$, и, кроме того, $\bar{U}_{n+1} \times \bar{V}_{n+1} \subset W$.

Тем самым множества U_n и V_n построены для всех $n \geq n_0$. Пусть

$$U = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} U_n, \quad V = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} V_n.$$

По построению пересечение $U_m \cap X_n$ при $m \geq n \geq n_0$ открыто в X_n , а так как

$$U \cap X_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (U_m \cap X_n),$$

то пересечение $U \cap X_n$ открыто в X_n . Следовательно, множество U открыто в X . По аналогичным соображениям множество V открыто в Y . Поскольку $(x_0, y_0) \in U \times V \subset W$, этим доказано, что любая точка (x_0, y_0) множества W является его внутренней точкой. Следовательно, множество W открыто. $\square$

Замечание 1. Предложение 1 без труда обобщается на случай локально счетных (= локально счетно компактных) клеточных пространств. Однако мне не известны реальные ситуации, в которых это обобщение было бы полезно.

Общетопологические свойства клеточных пространств, как правило, весьма хороши. Например, справедливо следующее предложение:

Предложение 2. Каждое клеточное пространство X локально стягиваемо.

Доказательство. Условие локальной стягиваемости будет выполнено, если каждая точка из X обладает фундаментальной системой окрестностей, каждая из которых стягивается к этой точке, или — иными словами — если для любого открытого множества $V \subset X$ и любой точки $x_0 \in V$ существует такая окрестность $U \subset V$ этой точки, что тождественное отображение $\text{id}: U \rightarrow U$ гомотопно (даже $\text{rel} \{x_0\}$) постоянному отображению $\text{const}_{x_0}: U \rightarrow U$.

Для построения окрестности U и гомотопии $\text{id} \sim \text{const}_{x_0}$ достаточно построить такую последовательность открытых (в X^n) множеств $U_n \subset V$, что $U_n = \emptyset$ при $n \leq n_0$ и $U_n = U_{n+1} \cap X^n$ и $x_0 \in U_n$ при $n \geq n_0$, где n_0 — некоторое число, и такую последовательность гомотопий $f_t^n: U_n \rightarrow U_n$, $n \geq n_0$, что $f_t^n = f_t^{n+1}|_{U_n}$ и $f_0^n = \text{id}$, $f_1^n = \text{const}_{x_0}$. Действи-

тельно, тогда множество $U = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$ будет содержащейся в V окрестностью точки x_0 , а формула $f_t(x) = f_t^n(x)$ при $x \in U_n$ будет определять гомотопию $f_t: U \rightarrow U$, связывающую тождественное отображение $\text{id}: U \rightarrow U$ с постоянным отображением $\text{const}_{x_0}: U \rightarrow U$.

Мы сделаем это индукцией по n , предполагая выпол-

ненным (что нужно для проведения индукции) даже более сильное включение $\bar{U}_n \subset V$.

Опишем предварительно одно общее построение, которое нам пригодится и в дальнейшем.

Пусть $C \subset S^n$ и $0 < \varepsilon < 1$. Радиальным ε -расширением множества C мы будем называть множество C_ε точек шара E^{n+1} , имеющих вид λx , где $x \in C$, а $\lambda \in (1-\varepsilon, 1]$. Ясно, что $C_\varepsilon \cap S^n = C$ и множество C_ε тогда и только тогда открыто (в E^{n+1}), когда открыто (в S^n) множество C .

Кроме того, $C_\varepsilon \subset C_{\varepsilon'}$, если $\varepsilon < \varepsilon'$ и $(C \cap D)_\varepsilon = C_\varepsilon \cap D_\varepsilon$ для любых множеств $C, D \subset S^n$. Наконец, если C замкнуто (= компактно) и $C \subset U$, где U открыто в E^{n+1} , то существует такое $\varepsilon > 0$, что $C_\varepsilon \subset U$.

Пусть теперь e_0 — такая клетка клеточного пространства X , что $x_0 \in e_0$. Пусть, далее, $n_0 = \dim e_0$, и пусть $x_0 \in \dot{E}^{n_0}$ — прообраз точки x_0 при характеристическом для клетки e_0 отображении $\chi_0: E^{n_0} \rightarrow X$. Мы примем за U_{n_0} образ в клетке e_0 внутренности произвольного замкнутого шара с центром в точке x_0 , целиком содержащегося в открытом множестве $\chi_0^{-1}(V)$, а за гомотопию $f_{t_0}^{n_0}: U_{n_0} \rightarrow U_{n_0}$ — образ радиальной деформации этого шара к его центру.

Пусть для некоторого $n \geq n_0$ окрестность U_n и ее деформация $f_t^n: U_n \rightarrow U_n$ уже построены. Рассмотрим произвольную клетку $e \in X^{n+1} \setminus X^n$ и соответствующее характеристическое отображение $\chi: E^{n+1} \rightarrow X$. Множество $C = \chi^{-1}(\bar{U}_n) \subset S^n$ замкнуто и содержится в открытом (в E^{n+1}) множестве $\chi^{-1}V$. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что $C_\varepsilon \subset \chi^{-1}V$. Мы примем за окрестность U_{n+1} объединение окрестности U_n со всеми множествами вида $\chi \dot{C}_\varepsilon$, $e \in X^{n+1} \setminus X^n$, где $\dot{C}_\varepsilon = \chi^{-1}U_n$. Так как для любой клетки $e \in X^{n+1} \setminus X^n$ пересечение $U_{n+1} \cap \bar{e} = (\chi \dot{C}_\varepsilon) \cup (U_n \cap \bar{e})$ открыто в $\bar{e}$, то множество U_{n+1} открыто в X^{n+1} . Кроме того, $x_0 \in U_{n+1}$ и $\bar{U}_{n+1} \subset V$.

Каждая точка $x \in U_{n+1} \setminus X^n$ имеет вид $\chi(x)$, где x — некоторая точка открытого шара $\dot{E}^{n+1}$, а χ — характеристическое отображение для клетки $e \in X^{n+1} \setminus X^n$, содержащей точку x . Для любого $t \in I$, мы положим

$$f_t^{n+1}(x) = \begin{cases} \chi \left(\frac{|x|+2t}{|x|} x \right), & \text{если } 0 \leq 2t \leq 1 - |x|, \\ (f_t^n \circ \chi) \left(\frac{x}{|x|} \right), & \text{если } 1 - |x| \leq 2t \leq 2, \end{cases}$$

где $\tau = \frac{2t-1+|x|}{1+|x|}$. Вместе с условием $f_t^{n+1}|_{U_n} = f_t^n$ это (как легко видеть, корректно) определяет гомотопию $f_t^{n+1}: U_{n+1} \rightarrow U_{n+1}$, для которой $f_0^{n+1} = \text{id}$ и $f_1^{n+1} = \text{const}$. Этим наше утверждение полностью доказано. $\square$

Напомним, что топологическое пространство X называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие $\{U_\alpha; \alpha \in A\}$ можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_\beta; \beta \in B\}$.

Предложение 3. Любое клеточное пространство паракомпактно.

Доказательство. Для построения покрытия $\{V_\beta\}$ достаточно для каждого $n \geq 0$ построить такое открытое покрытие $\{V_\beta^n\}$ остова X^n , что $V_\beta^n = V_\beta^{n+1} \cap X^n$ для любого $\beta \in B$. Покрытие $\{V_\beta\}$ будет при этом определяться формулой $V_\beta = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_\beta^n$ и будет вписано в покрытие $\{U_\alpha\}$, если любому индексу $\beta \in B$ сопоставлен такой индекс $\alpha(\beta) \in A$, что $V_{\alpha(\beta)}^n \subset U_\alpha$ для каждого $n \geq 0$ (впрочем, нам будет удобно требовать, чтобы $\bar{V}_{\alpha(\beta)}^n \subset U_\alpha$). Оно будет локально конечным, если для любого $n \geq 0$ и любой точки $x \in X^n$ существует такая окрестность W_x^n точки x в X^n , что $W_x^n \cap X^{n-1} = W_x^{n-1}$ при $x \in X^{n-1}$ и пересечение $W_x^n \cap V_\beta^n$ при $x \in X^n \setminus X^{n-1}$ не пусто лишь для конечного числа индексов β , а при $x \in X^n$, где $m \leq n-1$, не пусто тогда и только тогда, когда не пусто пересечение $W_x^m \cap V_\beta^m$.

Покрытие $\{V_\beta^n\}$ (и окрестности W_x^n) мы будем строить индукцией по n . В частности, индукцией по n мы будем строить множество B , представляя его в виде объединения возрастающей последовательности множеств $B_0 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$, где B_n состоит из тех индексов β , для которых $V_\beta^n \neq \emptyset$.

При $n=0$ за множество B_0 мы примем остов X^0 , за множество V_β^0 , соответствующее точке $\beta \in B_0$, мы примем саму эту точку, индекс $\alpha(\beta) \in A$, отвечающий индексу $\beta \in B_0$, мы произвольно выберем среди индексов α , для которых $\beta \in U_\alpha$, и, наконец, за окрестность W_x^0 точки $x \in X^0$ мы примем саму эту точку.

Пусть для некоторого $n \geq 0$ уже построены множество B_n , покрытие $\{V_\beta^n, \beta \in B_n\}$, отображение $B_n \rightarrow A$, $\beta \mapsto \alpha(\beta)$, и окрестности W_x^n , обладающие всеми нужными свойствами. Тогда для любой клетки $e \in X^{n+1} \setminus X^n$ (слу-

чай $X^{n+1} = X^n$ тривиален) с характеристическим отображением $\chi: E^{n+1} \rightarrow X$ множества $\chi^{-1}\bar{V}_\beta^n$ будут составлять такое замкнутое покрытие сферы S^n , что $\chi^{-1}\bar{V}_\beta^n \subset \chi^{-1}U_{\alpha(\beta)}$ для любого $\beta \in B_n$. Поскольку множество $\chi^{-1}U_{\alpha(\beta)}$ открыто в E^{n+1} , существует такое $\varepsilon_\beta > 0$, что для радиального ε_β -расширения V_β^* множества $\chi^{-1}V_\beta^n$ имеет место включение $\bar{V}_\beta^* \subset \chi^{-1}U_{\alpha(\beta)}$. Так как множество

$$V^* = \bigcup_{\beta \in B_n} V_\beta^*,$$

очевидно, открыто в E^{n+1} , то множество $E^{n+1} \setminus V^*$ замкнуто (и, значит, компактно). Поэтому в множестве A существует такое конечное подмножество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, что открытые множества $\chi^{-1}U_{\alpha_1}, \dots, \chi^{-1}U_{\alpha_s}$ покрывают множество $E^{n+1} \setminus V^*$. Поскольку шар E^{n+1} является нормальным пространством, по известной теореме общей топологии (см., например, [8], стр. 43) существует такое открытое покрытие $\{V_{\alpha_1}^*, \dots, V_{\alpha_s}^*\}$ множества $E^{n+1} \setminus V^*$, что $\bar{V}_{\alpha_i}^* \subset \chi^{-1}U_{\alpha_i}$ и $\bar{V}_{\alpha_i}^* \cap S^n = \emptyset$ для каждого $i = 1, \dots, s$. Для любой точки $x \in X^n$ мы обозначим через W_x^* радиальное расширение множества $\chi^{-1}W_x^n$, не пересекающееся с объединением всех множеств $\bar{V}_{\alpha_1}, \dots, \bar{V}_{\alpha_s}$ (ясно, что такое расширение существует).

За B_{n+1} мы примем объединение множества B_n и (предполагаемого дизъюнктым с B_n) множества всех пар вида (e, α_i) , $e \in X^{n+1} \setminus X^n$. Отображение $\beta \mapsto \alpha(\beta)$ мы доопределим на $B_{n+1} \setminus B_n$ формулой $(e, \alpha_i) \mapsto \alpha_i$. За множество V_{β}^{n+1} мы примем при $\beta = (e, \alpha_i)$ образ $\chi(V_{\alpha_i}^*)$ множества $V_{\alpha_i}^*$ при характеристическом для клетки e отображении $\chi: E^{n+1} \rightarrow X$, а при $\beta \in B_n$ — объединение множества V_β^n и всевозможных множеств вида $\chi(V_\beta^*)$, $e \in X^{n+1} \setminus X^n$. Очевидно, что множества V_β^{n+1} открыты в X^{n+1} , причем $V_\beta^{n+1} \cap X^n = V_\beta^n$ и $\bar{V}_\beta^{n+1} \subset U_{\alpha(\beta)}$ для любого $\beta \in B_{n+1}$. (Напомним, что при $\beta \notin B_n$ мы считаем, что $V_\beta^n = \emptyset$.)

Осталось построить окрестности W_x^{n+1} , $x \in X^{n+1}$. Пусть сначала $x \in X^{n+1} \setminus X^n$, и потому $x = \chi(x)$, где $\chi: E^{n+1} \rightarrow X$ — характеристическое для содержащей точку x клетки $e \in X^{n+1} \setminus X^n$ отображение, а x — некоторая однозначно определенная точка из E^{n+1} . В этом случае мы примем за W_x^{n+1} образ при отображении χ произвольной окрест-

ности точки x в шаре E^{n+1} . Пусть $x \in X^n$. Тогда, согласно сказанному выше, для любой клетки $e \in X^{n+1} \setminus X^n$ будет определено некоторое (возможно, пустое) множество $W_x^n \subset E^{n+1}$, а потому и множество $\chi(W_x^n) \subset X^{n+1}$. В этом случае мы примем за W_x^{n+1} объединение множества W_x^n и всех множеств вида $\chi(W_x^n)$, $e \in X^{n+1} \setminus X^n$. Автоматическая проверка показывает, что так построенные множества W_x^{n+1} обладают всеми нужными свойствами. $\square$

Локально стягиваемое пространство, конечно, полулокально стягиваемо, а если оно паракомпактно, то и нумерируемо полулокально стягиваемо. Следовательно, *каждое клеточное пространство нумерируемо полулокально стягиваемо*. Поэтому (см. Дополнение к лекции I.3) *любой связный клеточный Н-моноид является Н-группой*.

В предыдущих лекциях на рассматриваемые пространства довольно часто налагались те или иные общетопологические ограничения. Мы видим теперь, что для клеточных пространств все эти ограничения выполнены, так что все результаты предыдущих лекций справедливы для клеточных пространств без всяких оговорок.

Клеточные пространства обладают также тем приятным свойством, что, как мы знаем, их отображения и гомотопии между их отображениями можно строить «по клеткам» и индукцией по остовам.

Можно сказать, что клеточные пространства (и, конечно, пространства, им гомотопически эквивалентные) наиболее приспособлены к построению в них теории гомотопий. На этом основании топологические пространства, гомотопически эквивалентные клеточным пространствам, называются *гомотопически полноценными пространствами*.

Вместе с тем класс гомотопически полноценных пространств неожиданно чрезвычайно широк. Так, в своем месте мы покажем, что любое топологическое многообразие гомотопически полноценно и для любого компактного пространства K и любого гомотопически полноценного пространства X пространство X^K гомотопически полноценно. В частности, пространство петель ΩX гомотопически полноценного пространства X гомотопически полноценно,

Вспомогательная теорема. — Теорема о n -связности пары (X, X^n) . — Теорема о клеточной аппроксимации непрерывных отображений. — Общая теорема Фрейденшталя. — Стационарные и метастационарные гомотопические группы сфер. — Группы $\pi_n S^n$ и группа $\pi_3 S^3$. — Степень отображения. — Антиподальное отображение и касательные поля на сферах.

Углубленное изучение клеточных пространств и их клеточных отображений требует некоей аппроксимационной вспомогательной теоремы, являющейся обобщением и весьма далеким развитием соображений, использованных в лекции I.7 для вычисления групп $\pi_m S^n$ при $m \leq n$. Эта теорема возможна в двух вариантах: «гладком», основывающемся на теории гладких многообразий (гладкой топологии) и «симплициальном», основывающемся на теории симплициальных пространств (кусочно линейной топологии). Мы изложим гладкий вариант здесь, а симплициальный — в Дополнении.

Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — произвольное непрерывное отображение относительной n -мерной клетки (X, A) в относительную m -мерную клетку (Y, B) . Так как $f(A) \subset B$, то прообраз $G = f^{-1}(e^m)$ клетки $e^m = Y \setminus B$ при этом отображении лежит в клетке $e^n = X \setminus A$. Поэтому, выбрав для клеток e^n и e^m характеристические отображения $\chi_1: E^n \rightarrow X$ и $\chi: E^m \rightarrow Y$, мы можем рассмотреть непрерывное отображение $\hat{f} = \chi^{-1} \circ f \circ \chi_1$ открытого множества $\hat{G} = \chi_1^{-1}(G) \subset \hat{E}^n$ в открытый шар $\hat{E}^m$.

Отображение $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ мы назовем *регулярным*, если соответствующее отображение $\hat{f}: \hat{G} \rightarrow \hat{E}^m$ имеет хотя бы одно регулярное значение y_0 , т. е. (см. лекцию I.7), если во всех точках прообраза $\hat{f}^{-1}(y_0)$ отображение $\hat{f}$ гладко и ни одна из этих точек не является его критической точкой.

Вспомогательная теорема (гладкий вариант). Любое отображение $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ гомотопно относительно A некоторому регулярному отображению.

Доказательство вспомогательной теоремы основывается на теореме анализа, которую принято называть теоремой Вейерштрасса о полиномиальных аппроксимациях (и которую мы уже упоминали в лекции I.7). Для полноты мы начнем с того, что изложим доказательство этой теоремы, принадлежащее С. Н. Бернштейну.

Назовем *мультииндексом* произвольную точку $a \in \mathbb{R}^n$ с целыми неотрицательными координатами $a_1, \dots, a_n$. Если $a_i \leq m$ для любого $i = 1, \dots, n$, мы будем писать $a \leq m$.

Каждой непрерывной функции $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}$, заданной в n -мерном кубе I^n и каждому целому числу $m > 0$ мы сопоставим многочлен B_m от переменных $x_1, \dots, x_n$, определенный формулой

$$B_m(x) = \sum_{a \leq m} f\left(\frac{a}{m}\right) \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a}, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$ пробегает все мультииндексы, удовлетворяющие соотношению $a \leq m$, а

$$\frac{a}{m} = \left(\frac{a_1}{m}, \dots, \frac{a_n}{m}\right), \quad \binom{m}{a} = \binom{m}{a_1} \dots \binom{m}{a_n},$$

$$x^a = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}, \quad (1-x)^{m-a} = (1-x_1)^{m-a_1} \dots (1-x_n)^{m-a_n}.$$

Теорема Бернштейна. В кубе I^n многочлены B_m равномерно сходятся к функции f .

Доказательство. По определению утверждение теоремы означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что при $m \geq N$

$$|B_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{для любой точки } x \in I^n.$$

Но так как

$$\sum_{a \leq m} \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a} = \sigma_m(x_1) \dots \sigma_m(x_n) = 1,$$

где

$$\sigma_m(x) = \sum_{a=0}^m \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a} = (x + 1 - x)^m = 1,$$

то

$$|B_m(x) - f(x)| \leq \sum_{a \leq m} \left| f\left(\frac{a}{m}\right) - f(x) \right| \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a}.$$

С другой стороны, поскольку куб I^n компактен, функция f равномерно непрерывна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$, если $|y - x| < \delta$, где под $|y - x|$ подразумевается $\max |y_i - x_i|$.

Поэтому, если A — множество всех мультииндексов $a \leq m$, для которых $\left| \frac{a}{m} - x \right| < \delta$, то

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} \left| f\left(\frac{a}{m}\right) - f(x) \right| \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a} &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{a \in A} \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{a \leq m} \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

а если B — множество всех мультииндексов $a \leq m$, для которых $\left| \frac{a}{m} - x \right| \geq \delta$, то

$$\sum_{a \in B} \left| f\left(\frac{a}{m}\right) - f(x) \right| \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a} \leq 2M\Sigma_B,$$

где $M = \max_{x \in I^n} |f(x)|$, а

$$\Sigma_B = \sum_{a \in B} \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a}.$$

Следовательно,

$$|B_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\Sigma_B.$$

Осталось поэтому лишь оценить сумму Σ_B .

С этой целью мы, положив

$$[a] = \sum_{i=1}^n (a_i - mx_i)^2,$$

заметим, что при $a \in B$ имеет место оценка $[a] \geq \delta^2 m^2$. Поэтому

$$\Sigma_B \leq \frac{1}{\delta^2 m^2} \sum_{a \in B} [a] \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a} \leq \frac{1}{\delta^2 m^2} \Phi_m(x),$$

где

$$\Phi_m(x) = \sum_{a \leq m} [a] \binom{m}{a} x^a (1-x)^{m-a}.$$

Для завершения доказательства остается положить $N = \frac{Mn}{\delta^2\varepsilon}$. $\square$

Отображение $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *полиномиальным отображением*, если в координатах оно записывается многочленами.

Теорема Вейерштрасса. Для каждого непрерывного отображения $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданного на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, каждого компактного множества $K \subset U$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое полиномиальное отображение $\bar{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, что

$$|f(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon \text{ для любой точки } x \in K.$$

Доказательство. Так как отображение f задается m функциями $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то эту теорему достаточно доказать только при $m=1$, т. е. для случая, когда f является функцией (а g — многочленом). При этом без ограничения общности можно, очевидно, считать, что $U \subset I^n$. Поскольку пространство $\mathbb{R}^n$ нормально, существует такая непрерывная функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow I$, что $\varphi = 1$ на K и $\varphi = 0$ вне U . Тогда формула

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \varphi(x)f(x), & \text{если } x \in U, \\ 0, & \text{если } x \notin U, \end{cases} \quad x \in I^n,$$

корректно определяет на I^n некоторую непрерывную функцию $\tilde{f}$. Согласно теореме Бернштейна для достаточно большого N многочлен B_N , построенный для функции $\tilde{f}$, обладает тем свойством, что

$$|\tilde{f}(x) - B_N(x)| < \varepsilon \text{ для любой точки } x \in I^n.$$

Поскольку $\tilde{f} = f$ на K , этот многочлен и будет искомым многочленом $\bar{f}$. $\square$

Доказательство Вспомогательной теоремы. Сохраняя введенные выше обозначения ($\hat{G}$, $\hat{f}$ и т. д.), рассмотрим на открытом множестве $\hat{G}$ непрерывную функцию ρ , значение $\rho(x)$ которой в произвольной точке $x \in \hat{G}$ равно расстоянию этой точки от границы множества $\hat{G}$:

$$\rho(x) = \min_y |x - y|, \quad y \in \bar{\hat{G}} \setminus \hat{G}.$$

Пусть E_r^m — концентрический подшар шара E^m радиуса $r \leq 1$. Так как множество $\chi \hat{f}^{-1}(E_{1/2}^m) = \hat{f}^{-1}(\chi(E_{1/2}^m))$ замкнуто и содержится в клетке e^n , то множество $\hat{f}^{-1}(E_{1/2}^m) \subset \hat{E}^n$ компактно, и потому существует такое $\delta > 0$, что $\rho \geq 2\delta$ на $\hat{f}^{-1}(E_{1/2}^m)$. Иными словами, $\hat{f}^{-1}(E_{1/2}^m) \subset K_1 \subset K$, где K и K_1 — компактные подмножества множества $\hat{G}$, состоящие из всех точек $x \in \hat{G}$, для которых $\rho(x) \geq \delta$ или соответственно $\rho(x) \geq 2\delta$. Поскольку множество $\hat{f}(K) \subset \hat{E}^m$ также компактно, существует такое положительное $\varepsilon < 1/4$, что ε -окрестность этого множества содержится в $\hat{E}^m$. Согласно теореме Вейерштрасса (примененной к K , $\hat{G}$ и $\hat{f}$) существует такое полиномиальное отображение $\bar{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $|\hat{f}(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in K$. Ясно, что положив

$$\hat{f}_t(x) = \begin{cases} \hat{f}(x), & \text{если } x \in \hat{G} \setminus K, \\ \left(1 - t \frac{\rho(x) - \delta}{\delta}\right) \hat{f}(x) + t \frac{\rho(x) - \delta}{\delta} \bar{f}(x), & \text{если } x \in K \setminus K_1, \\ (1-t)\hat{f}(x) + t\bar{f}(x), & \text{если } x \in K_1, \end{cases}$$

мы получим гомотопию $\hat{f}_t: \hat{G} \rightarrow \hat{E}^m$, для которой $\hat{f}_0 = \hat{f}$ и $|\hat{f}_1(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in \hat{G}$, причем $\hat{f}_1(x) = \bar{f}(x)$, если $x \in K_1$ и $\hat{f}_1(x) = \hat{f}(x)$, если $x \in \hat{G} \setminus K$. Поскольку $\varepsilon < 1/4$, отсюда следует, что для любой точки $y \in E_{1/4}^m$ имеет место равенство $\hat{f}_1^{-1}(y) = \bar{f}^{-1}(y)$, и потому каждое регулярное значение отображения $\hat{f}$, содержащееся в $E_{1/4}^m$, будет регулярным значением и отображения $\hat{f}_1$. Поскольку, согласно теореме Сарда, в шаре $E_{1/4}^m$ существуют регулярные значения отображения $\bar{f}$, этим доказано, что отображение $\hat{f}_1: \hat{G} \rightarrow \hat{E}^m$ обладает хотя бы одним регулярным значением.

Но ясно, что, положив для любой точки $x \in X$

$$f_t(x) = \begin{cases} (\chi \circ \bar{f}_t)(\chi^{-1}(x)), & \text{если } x \in G, \\ f(x) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

мы получим гомотопию $f_t: X \rightarrow Y$ относительно A , связывающую отображение $f_0 = f$ с таким отображением f_1 :

$(X, A) \rightarrow (Y, B)$, что $G = f_1^{-1}(e^m)$ и $\chi^{-1} \circ f_1 \circ \chi_1 = \hat{f}_1$ на $\hat{G}$. Поскольку, согласно только что сказанному, отображение $\hat{f}_1$ обладает хотя бы одним регулярным значением, это означает, что отображение f_1 регулярно. $\square$

Следствие. Если размерность n относительной клетки (X, A) меньше размерности t относительной клетки (Y, B) , то любое отображение $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ гомотопно относительно A такому отображению $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, что $Y \setminus B \not\subset f(X \setminus A)$.

Доказательство. Согласно Вспомогательной теореме мы можем считать отображение f регулярным. Но при $n < t$ свойство регулярности в точности равносильно тому, что в клетке $e^m = Y \setminus B$ существуют точки, не принадлежащие образу отображения f , т. е. тому, что $Y \setminus B \not\subset f(X \setminus A)$. $\square$

Только это следствие нам пока и понадобится (и пока только для случая $(X, A) = (E^n, S^{n-1})$).

Замечание 1. Вспомогательная теорема непосредственно обобщается на случай, когда (Y, B) является произвольным относительным клеточным пространством (а пара (X, A) — по-прежнему относительной клеткой), если под регулярным отображением $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ понимать отображение, которое для любой клетки $e \in Y \setminus B$ является регулярным (в прежнем смысле) отображением $(X, A) \rightarrow (Y, Y \setminus e)$. Для доказательства достаточно заметить, что перестройка произвольного отображения $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ в регулярное отображение f_1 осуществляется внутри множеств $G := f^{-1}(e)$, которые для различных клеток $e \in Y \setminus B$ попарно не пересекаются.

Это замечание нам понадобится в лекции 7.

Применение Вспомогательной теоремы (или, точнее, — ее следствия) основывается на следующей простой лемме:

Лемма 1. Для любой относительной клетки (X, A) и любой точки $x_0 \in X \setminus A$ подпространство A является строгим деформационным ретрактом пространства $X \setminus x_0$.

Доказательство. Пусть, как всегда $\chi: E^n \rightarrow X$ — характеристическое отображение для клетки $e^n = X \setminus A$, и пусть $x_0 = \chi^{-1}(x_0) \in E^n$. Пользуясь тем, что каждая точка $x \in E^n \setminus x_0$ может быть единственным образом представлена в виде $x = sx_0 + (1-s)y$, где $y \in S^{n-1}$ и $0 \leq s < 1$, мы определим деформацию g_t пространства $X \setminus x_0$

формулой

$$g_t(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A, \\ \chi((1-t)sx_0 + (1-s(1-t))y), & \text{если} \\ & x \in X \setminus A \text{ и } \chi^{-1}(x) = sx_0 + (1-s)y. \end{cases}$$

Автоматическая проверка показывает, что тем самым мы получаем деформацию пространства $X \setminus x_0$ относительно A , концевое отображение которой является отображением на A . Следовательно, A является строгим деформационным ретрактом пространства $X \setminus x_0$. $\square$

Комбинируя эту лемму со следствием Вспомогательной теоремы, мы можем теперь доказать следующую теорему, являющуюся ключом ко всей гомотопической теории клеточных пространств.

Теорема 1. Для любого относительного клеточного пространства (X, A) и каждого $n \geq 0$ пара (X, X_A^n) является n -связной парой.

Доказательство. Утверждение о n -связности пары (X, X_A^n) означает, что для каждого $r \leq n$ любое отображение $(E^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, X_A^n)$ гомотопно относительно S^{r-1} стянутому на X_A^n отображению. Поскольку шар E^r компактен, его образ $f(E^r)$ содержится в некотором остове X_A^m , причем, конечно, рассмотрения заслуживает лишь случай, когда $m > n$. Очевидной индукцией отсюда следует, что для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что если $r < m$ (где $m > n$), то любое отображение $f: (E^r, S^{r-1}) \rightarrow (X_A^m, X_A^{m-1})$ гомотопно относительно S^{r-1} отображению $E^r \rightarrow X_A^{m-1}$.

Рассмотрим с этой целью произвольную m -мерную клетку e^m пространства (X, A) , пересекающуюся с $f(E^r)$. Согласно следствию Вспомогательной теоремы существует такая точка $x_0 \in e^m$, что $f(E^r) \subset X_A^m \setminus x_0$. Это означает, что отображение f мы можем представить в виде композиции $i \circ f'$, где f' — отображение $E^r \rightarrow X_A^m \setminus x_0$, а i — вложение $X_A^m \setminus x_0 \rightarrow X_A^m$. С другой стороны, согласно лемме 1 (примененной к относительной клетке $(X_A^m, X_A^m \setminus e^m)$) существует такая деформация g_t пространства $X_A^m \setminus x_0$ относительно $X_A^m \setminus e^m$, что $g_1(X_A^m \setminus x_0) = X_A^m \setminus e^m$. Отсюда следует, что, положив

$$f_t = i \circ g_t \circ f', \quad 0 \leq t \leq 1,$$

мы получим неподвижную на S^{r-1} гомотопию $f_t: E^r \rightarrow X_A^m$, связывающую отображение $f = f_0$ с таким отображением f_1 ,

что $f_1(E^r) \cap e^m = \emptyset$ и $f_1(E^r) \cap (X_A^m \setminus e^m) = f(E^r) \cap (X_A^m \setminus e^m)$. (Говорят, что гомотопия f_t *выметает* отображение f из клетки e^m .)

Поскольку в силу компактности шара E^r множество $f(E^r)$ пересекается лишь с конечным числом m -мерных клеток e^m пространства X , то мы можем шаг за шагом вымести отображение f из всех этих клеток. В результате мы и получим отображение $E^r \rightarrow X_A^{m-1}$, гомотопное отображению f относительно S^{r-1} . $\square$

Из теоремы 1 немедленно вытекают, например, следующие утверждения (которые для простоты мы формулируем только при $A = \emptyset$):

Следствие 1. Для любого клеточного пространства X и любого $n \geq 0$ гомоморфизм

$$i_*: \pi_r X^n \rightarrow \pi_r X,$$

индуцированный вложением $i: X^n \rightarrow X$, является при $r < n$ изоморфизмом, а при $r = n$ эпиморфизмом.

Доказательство. Согласно теореме $\pi_r(X, X^n) = 0$ при $r \leq n$. Поэтому следствие 1 вытекает из точности гомотопической последовательности пары (X, X^n) . $\square$

Следствие 2. Любое клеточно n -связное клеточное пространство X является n -связным пространством, т. е.

$$\pi_r X = 0 \quad \text{при} \quad r \leq n.$$

Доказательство. По условию $X^n = X^0 = pt$, и потому $\pi_r X^n = 0$ для любого $r \geq 0$. С другой стороны, согласно следствию 1 отображение $\pi_r X^n \rightarrow \pi_r X$ при $r \leq n$ является эпиморфизмом. Следовательно, $\pi_r X = 0$ при $r \leq n$. $\square$

В частности, мы видим, что сфера S^n , $n \geq 1$, является $(n-1)$ -связным пространством:

$$(4) \quad \pi_r S^n = 0 \quad \text{при} \quad r \leq n-1.$$

Этот факт нам уже известен из лекции I.7.

Аналог следствия 2 справедлив, конечно, и для относительных пространств:

Следствие 3. Любое клеточно n -связное относительное клеточное пространство (X, A) n -связно. $\square$

Докажем теперь одно общее предложение, содержащее в себе следствия 2 и 3.

Пусть X и Y — два клеточных пространства. Напомним (см. определение 3 лекции 1), что отображение $g: X \rightarrow Y$ называется клеточным, если $g(X^n) \subset Y^n$ для каждого $n \geq 0$.

Предложение 1. Любое отображение $f: X \rightarrow Y$ гомотопно некоторому клеточному отображению $g: X \rightarrow Y$. Если отображение f клеточно на клеточном подпространстве $A \subset X$, то клеточное отображение g можно считать совпадающим на A с отображением f , а гомотопию $F: f \sim g$ неподвижной на A .

Доказательство. Как мы знаем, отображение g и гомотопию $F: f \sim g$ достаточно последовательно построить на всех остовах $X_A^n = X^n \cup A$ относительного клеточного пространства (X, A) .

Пусть $n=0$, и пусть e^0 — произвольная вершина клеточного пространства X , не принадлежащая подпространству A . Рассмотрим наименьшее клеточное подпространство пространства Y , содержащее точку $f(e^0)$. В силу минимальности оно связно (напомним, что любая компонента клеточного пространства является его подпространством) и, являясь клеточным пространством, содержит хотя бы одну вершину e_1^0 пространства Y . Пути, соединяющие точки $f(e^0)$ с вершинами e_1^0 , определяют, очевидно, неподвижную на A гомотопию $f_t^0: X_A^0 \rightarrow Y$, связывающую отображение $f|_{X_A^0}$ с некоторым клеточным отображением $g_0: X_A^0 \rightarrow Y$.

Предположим теперь, что для некоторого $n \geq 0$ уже построены клеточное отображение $g_n: X_A^n \rightarrow Y$ и неподвижная на A гомотопия $f_t^n: X_A^n \rightarrow Y$, связывающая отображение $f|_{X_A^n}$ с отображением g_n . Рассмотрим произвольную $(n+1)$ -мерную клетку $e^{n+1} \in X \setminus A$ и соответствующее характеристическое отображение $\chi: E^{n+1} \rightarrow X$. Поскольку пара (E^{n+1}, S^n) является парой Борсука, существует такая гомотопия $F_t: E^{n+1} \rightarrow Y$, что $F_0 = f \circ \chi$ и $F_t|_{S^n} = f_t^n \circ (\chi|_{S^n})$, а поскольку, согласно теореме 1, пара (Y, Y^{n+1}) является $(n+1)$ -связной парой, существует такая неподвижная на S^n гомотопия $G_t: E^{n+1} \rightarrow Y$, что $G_0 = F_1$ и $G_1(E^{n+1}) \subset Y^{n+1}$. Для любой точки $x \in S^n$ и любых $t, s \in I$ мы положим

$$H_t(sx) = \begin{cases} \frac{F_{2t}(sx)}{s+1}, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2}, \\ \frac{G_{1+s-2t}(sx)}{s-1}, & \text{если } \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Автоматическая проверка показывает, что эта формула корректно определяет гомотопию $H_t: E^{n+1} \rightarrow Y$, для которой

$$H_0 = f \circ \chi, \quad H_1(E^{n+1}) \subset Y^{n+1} \quad \text{и} \quad H_t|_{sn} = f_t^n \circ (\chi|_{sn}).$$

Поэтому, положив

$$f_t^{n+1}(x) = \begin{cases} \chi H_t(x), & \text{если } x \in e^{n+1} \text{ и } x = \chi^{-1}(x), \\ f_t^n(x), & \text{если } x \in \dot{e}^{n+1}, \end{cases}$$

мы корректно определим на $\bar{e}^{n+1}$ такую гомотопию f_t^{n+1} , что $f_0^{n+1} = f|_{\bar{e}^{n+1}}$, $f_1^{n+1}(\bar{e}^{n+1}) \subset Y^{n+1}$ и $f_t^{n+1}|_{\dot{e}^{n+1}} = f_t^n|_{\dot{e}^{n+1}}$. Сделав это для каждой клетки $e^{n+1} \in X \setminus A$, мы и получим неподвижную на A гомотопию $f_t^{n+1}: X_A^{n+1} \rightarrow Y$, которая совпадает на X_A^n с гомотопией f_t^n и связывает отображение $f|_{X_A^{n+1}}$ с некоторым клеточным отображением $g_{n+1}: X_A^{n+1} \rightarrow Y$, совпадающим на X_A^n с отображением g_n . $\square$

Клеточные отображения $g_0, g_1: X \rightarrow Y$ называются *клеточно гомотопными* (относительно подпространства A), если существует (неподвижная на A) связывающая их гомотопия, являющаяся клеточным отображением $X \times I \rightarrow Y$.

Легко видеть, что *клеточные отображения $g_0, g_1: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда гомотопны, когда они клеточно гомотопны*. Действительно, любая связывающая их гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$ клеточна на подпространстве $(X \times 0) \cup \cup (X \times 1)$ (а при $A \neq \emptyset$ — на подпространстве $(X \times 0) \cup \cup (A \times I) \cup (X \times 1)$) и потому гомотопна относительно этого подпространства некоторому клеточному отображению $G: X \times I \rightarrow Y$, которое и будет клеточной гомотопией, связывающей отображения g_0 и g_1 . $\square$

Теперь следствия 2 и 3 делаются совершенно тривиальными, поскольку каждое клеточное отображение $S^r \rightarrow X$ является отображением в X^r , а каждая клеточная гомотопия $S^r \times I \rightarrow X$ — отображением в X^{r+1} .

Мы продолжим изучение гомотопических свойств общих клеточных пространств в лекции 7, а сейчас, чтобы поскорее прийти к конкретным геометрическим результатам, займемся исследованием надстроечной последовательности связного пространства X в случае, когда это пространство клеточно.

Нам будет удобно предполагать пространство X одновершинным. (Как мы увидим ниже, это предположение

общности не ограничивает; см. следствие 1 теоремы 1 лекции 3). Кроме того, мы предположим—и это уже принципиально,—что пространство X счетно (например, локально конечно; см. утверждение (к) предложения 4 лекции 1).

За отмеченную точку пространства X мы примем его единственную вершину e^0 . Тогда пространство X будет гладко пунктировано и, значит, к нему будет применима теорема Джеймса из лекции I.10. Поэтому (см. лекцию I.10) его надстроечная последовательность может быть записана в виде

$$\dots \rightarrow \pi_n X \xrightarrow{E} \pi_{n+1} S^* X \xrightarrow{H} \pi_n (JX, X) \xrightarrow{P} \pi_{n-1} X \rightarrow \dots$$

Так как по условию клеточное пространство X счетно, то для любого $n \geq 0$ его n -кратное произведение X^n на себя будет, согласно предложению 1 из Дополнения к лекции 1, клеточным пространством с клетками вида

$$(5) \quad e_1 \times e_2 \times \dots \times e_n,$$

где $e_1, e_2, \dots, e_n$ —клетки пространства X . Его подпространство X_{n-1}^n (см. Дополнение к лекции I.4) будет, очевидно, клеточным подпространством, и клетка (5) тогда и только тогда будет лежать в $X^n \setminus X_{n-1}^n$ (т. е. будет клеткой относительного клеточного пространства (X^n, X_{n-1}^n)), когда все клетки $e_1, \dots, e_n$ имеют положительную размерность (отличны от клетки e^0). Но мы знаем, что отображение факторизации $X^n \rightarrow J_n X$ является относительным гомеоморфизмом $(X^n, X_{n-1}^n) \rightarrow (J_n X, J_{n-1} X)$. Поскольку любой относительный гомеоморфизм каждое относительное клеточное пространство переводит, очевидно, в относительное клеточное пространство, этим доказано, что для любого $n \geq 1$ пара $(J_n X, J_{n-1} X)$ является относительным клеточным пространством, откуда очевидной индукцией следует, что универсальный моноид JX одновершинного счетного клеточного пространства X является клеточным пространством.

Это клеточное пространство одновершинно, а его клетки положительной размерности находятся в биективном соответствии с клетками (5), для которых $\dim e_i > 0$ при любом $i = 1, \dots, n$. Допуская определенную вольность, мы будем клетку пространства JX , отвечающую клетке (5), обозначать тем же символом $e_1 \times e_2 \times \dots \times e_n$. Вершину моноида JX (его единицу) мы будем обозначать прежним символом e^0 .

Пространства $J_n X$ являются, очевидно, клеточными подпространствами пространства JX . Клетка $e_1 \times \dots \times e_m$ тогда и только тогда принадлежит подпространству $J_n X$, когда $m \leq n$.

Так как пространство X счетно, то пространство JX также счетно, и потому произведение $JX \times JX$ является клеточным пространством. Далее, умножение $JX \times JX \rightarrow JX$ непрерывно на каждой клетке этого пространства (поскольку, как мы знаем, оно непрерывно на каждом подпространстве $J_n X \times J_m X$). Следовательно, это умножение непрерывно всюду. Таким образом, для каждого одновершинного счетного клеточного пространства X универсальный моноид JX является топологическим моноидом.

Относительное клеточное пространство (JX, X) состоит из клеток $e_1 \times \dots \times e_m$ с $m \geq 2$. При этом, если $\dim e_i \geq n$, т. е. если пространство X клеточно $(n-1)$ -связно, то $\dim(e_1 \times \dots \times e_m) \geq mn \geq 2n$. Этим доказано, что для счетного клеточно $(n-1)$ -связного клеточного пространства X относительное клеточное пространство (JX, X) клеточно $(2n-1)$ -связно.

Поэтому в силу следствия 3 это относительное пространство $(2n-1)$ -связно, т. е.

$$\pi_r(JX, X) = 0 \quad \text{при} \quad r \leq 2n-1,$$

и, значит, в силу точности надстроечной последовательности будет иметь место следующая теорема, обычно называемая теоремой Фрейденталю (который первый опубликовал доказательство этой теоремы для частного случая $X = S^n$):

Теорема 2. Для любого счетного клеточно $(n-1)$ -связного клеточного пространства X надстроечный гомоморфизм

$$E: \pi_r X \rightarrow \pi_{r+1} S^* X$$

является при $r < 2n-1$ изоморфизмом, а при $r = 2n-1$ — эпиморфизмом. $\square$

Замечание 2. Ограничение в теореме 2 счетными клеточными пространствами вызвано не существом дела, а лишь методом доказательства. Ниже, в лекции 7, мы докажем теорему Фрейденталю другим методом, пригодным для любых клеточных пространств.

Из теоремы 2, в частности, следует, что отображение

$$E: \pi_r S^n \rightarrow \pi_{r+1} S^{n+1}$$

является при $r < 2n-1$ изоморфизмом, а при $r = 2n-1$ эпиморфизмом.

Мы видим, таким образом, что в последовательности

$$\pi_{n+2}S^2 \xrightarrow{E} \pi_{n+3}S^3 \xrightarrow{E} \dots \xrightarrow{E} \pi_{n+k}S^k \xrightarrow{E} \pi_{n+k+1}S^{k+1} \rightarrow \dots$$

все гомоморфизмы E при $k \geq n+2$ являются изоморфизмами, т. е., как говорят, эта последовательность на $(n+2)$ -м члене $\pi_{2n+2}S^{n+2}$ стабилизируется.

Определение 1. Группа $\pi_{2n+2}S^{n+2}$ (или, что равносильно, группа $\pi_{n+k}S^k$ при любом $k \geq n+2$) называется n -й стационарной (или стабильной) гомотопической группой сфер. Мы будем обозначать ее символом $\pi_n S$.

Замечание 3. Аналогичный эффект стабилизации наблюдается и для многих других функторов алгебраической топологии. Можно даже сказать, не впадая в сильное преувеличение, что современная алгебраическая топология в основном нацелена на исследование стабилизированных функторов. Мы займемся общей теорией таких функторов в следующих семестрах.

Группа $\pi_{2n+1}S^{n+1}$ называется иногда n -й метастационарной гомотопической группой сфер. Стационарная группа $\pi_n S$ является ее эпиморфным образом.

Из лекции I.6 нам уже известна метастационарная группа $\pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$ (случай $n=0$). Кроме того, мы знаем, что следующая метастационарная группа $\pi_2 S^2$ изоморфна группе $\pi_3 S^3$ и, значит, изоморфна стационарной группе $\pi_2 S^2 = \pi_0 S$. Отсюда следует, что группы $\pi_0 S$ и $\pi_1 S$ являются циклическими группами (порождаются одним элементом), но вопрос об их порядке требует дополнительного специального исследования.

Мы снова воспользуемся построенным в лекции I.5 расслоением Хопфа $h: S^3 \rightarrow S^1$. Рассмотрим следующий отрезок гомотопической последовательности этого расслоения:

$$\dots \rightarrow \pi_2 S^3 \rightarrow \pi_2 S^2 \xrightarrow{\partial} \pi_1 S^1 \rightarrow \pi_1 S^3 \rightarrow \dots$$

Так как, согласно формуле (4), $\pi_2 S^3 = \pi_1 S^3 = 0$, то ввиду точности этой последовательности гомоморфизм

$$\partial: \pi_2 S^2 \rightarrow \pi_1 S^1$$

является изоморфизмом. Поскольку $\pi_n S^n \approx \pi_2 S^2$ при $n \geq 2$, этим заново доказан уже известный нам из лекции I.7

факт, что

$$(6) \quad \pi_n S^n = Z \text{ для любого } n \geq 1,$$

т. е. что

$$\pi_0 S = Z.$$

Более того, поскольку любой эпиморфизм $Z \rightarrow Z$ является изоморфизмом, мы также получаем, что *эпиморфизм*

$$E: \pi_1 S^1 \rightarrow \pi_2 S^2$$

является изоморфизмом. (Таким образом, при $n=0$ метастационарная группа изоморфна стационарной.)

Кроме того, мы теперь видим, что

$$(7) \quad \pi_3 S^3 = Z.$$

Вопрос о группе $\pi_4 S^3 = \pi_1 S$ более труден, и мы его пока отложим.

Пусть $\iota_n \in \pi_n S^n$ — гомотопический класс тождественного отображения $\text{id}: S^n \rightarrow S^n$. По построению

$$(8) \quad \iota_{n+1} = E \iota_n \text{ для любого } n \geq 1$$

и, как было показано в лекции I.6, элемент ι_1 порождает группу $\pi_1 S^1$. Поэтому для каждого $n \geq 1$ элемент ι_n порождает бесконечную циклическую группу $\pi_n S^n$.

В частности, элемент ι_2 порождает группу $\pi_2 S^2$ и, значит, элемент $\eta_3 = [h] = h_*(\iota_2)$ порождает группу $\pi_2 S^2$.

Кроме того, мы видим, что для любого непрерывного отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ имеет место равенство вида $f_*(\iota_n) = k \iota_n$, где k — целое число, однозначно определенное отображением f (и даже его гомотопическим классом α). Это число называется *степенью отображения f* (или класса α) и обозначается символом $\deg f$ (символом $\deg \alpha$). Таким образом, по определению

$$(9) \quad f_* \iota_n = \deg f \cdot \iota_n.$$

Если g — другое отображение $S^n \rightarrow S^n$, то

$$(g \circ f)_* \iota_n = g_*(f_* \iota_n) = g_*(\deg f \cdot \iota_n) = \deg f \cdot g_* \iota_n = \deg f \cdot \deg g \cdot \iota_n$$

и, значит,

$$(10) \quad \deg(g \circ f) = \deg f \cdot \deg g, \quad f, g: S^n \rightarrow S^n.$$

Так как $f_* \iota_n = f_* [\text{id}] = [f \circ \text{id}] = [f]$, то формулу (9) можно переписать также в виде

$$[f] = \deg f \cdot \iota_n,$$

откуда следует (поскольку, по определению, изоморфизм (6) переводит элемент $k \iota_n \in \pi_n S^n$ в число $k \in \mathbb{Z}$), что отображение

$$(11) \quad \deg: \pi_n S^n \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \alpha \mapsto \deg \alpha$$

совпадает с изоморфизмом (6). Таким образом, во-первых,

$$\deg(\alpha + \beta) = \deg \alpha + \deg \beta$$

для любых элементов $\alpha, \beta \in \pi_n S^n$ и, во-вторых,

$$\deg \alpha = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \alpha = 0.$$

В частности, мы видим, что

$$(12) \quad \deg(-\alpha) = -\deg \alpha$$

и

$$(13) \quad \deg E\alpha = \deg \alpha$$

для любого элемента $\alpha \in \pi_n S^n$.

Замечание 2. Отображение (11) совпадает с отображением $\deg$, построенным совсем другим способом в лекции I.7. Действительно, оба отображения являются изоморфизмами, принимающими на образующей $\iota_n \in \pi_n S^n$ одно и то же значение 1.

Степень является неожиданно сильным инструментом для получения конкретных геометрических результатов.

Рассмотрим, например, *антиподальное отображение* $\sigma_n: S^n \rightarrow S^n$ (центральную симметрию), задаваемую формулой

$$\sigma_n(x) = -x, \quad x \in S^n.$$

При описанном в лекции I.3 отождествлении надстройки SS^n со сферой S^{n+1} (при этом отождествлении

точке $[x, t] \in SS^n$, $x \in S^n$, $t \in I$, соответствует точка $(\sin \pi(t - 1/2), \cos \pi(t - 1/2) \cdot x) \in S^{n+1}$, отображению $\sigma_{n+1}: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ отвечает отображение $[x, t] \mapsto [-x, 1-t]$, т. е. композиция симметрии $\rho: [x, t] \mapsto [x, 1-t]$ надстройки относительно экватора и отображения $E\sigma_n: [x, t] \mapsto [-x, t]$. Поскольку по определению сложения в гомотопических группах (или, более общо, в группах вида $[S^k X, Y]$) для любого элемента $\alpha \in [f]^*$ гомотопической группы отображение $f \circ \rho$ задает противоположный элемент $-\alpha$, этим доказано, что в группе $\pi_{n+1} S^{n+1}$ имеет место равенство

$$\sigma_{n+1} = -E\sigma_n$$

(здесь мы позволяем себе обозначать отображение и его гомотопический класс одним и тем же символом) и, значит, что

$$\deg \sigma_{n+1} = -\deg \sigma_n.$$

С другой стороны, как мы видели в лекции I.6 (стр. 262) отображение σ_1 индуцирует тождественное отображение группы $\pi_1 S^1$, т. е. $\deg \sigma_1 = 1$. Очевидной индукцией отсюда вытекает, что

$$\deg \sigma_n = (-1)^{n+1},$$

т. е. что $\sigma_n = (-1)^{n+1} \iota_n$. Таким образом, *антиподальное отображение $\sigma_n: S^n \rightarrow S^n$ тогда и только тогда гомотопно тождественному отображению, когда n нечетно.* [При $n = 2m - 1$ нечетном сферу S^{2m-1} можно рассматривать как единичную сферу комплексного пространства $\mathbb{C}^m$, состоящую из точек $z = (z_1, \dots, z_m)$, для которых $z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_m \bar{z}_m = 1$. Тогда формула $z \mapsto e^{i\pi t} z$, $0 \leq t \leq 1$, будет задавать гомотопию $\text{id} \sim \sigma_{2m-1}$.]

Антиподальное отображение σ_n не имеет, конечно, неподвижных точек. Обратно, если отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ не имеет неподвижных точек, то формула

$$(x, t) \mapsto \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}, \quad x \in S^n, t \in I,$$

корректно определяет гомотопию, связывающую отображение f с антиподальным отображением. Следовательно, степень любого отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ без неподвижных точек равна $(-1)^{n+1}$. Иначе говоря, *если $\deg f \neq$*

$\neq (-1)^{n+1}$, то отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ имеет неподвижные точки.

В частности, если n четно, то любое отображение $f: S^n \rightarrow S^n$, гомотопное тождественному отображению, имеет неподвижную точку.

Точка $x \in S^n$ называется антиподальной точкой отображения $f: S^n \rightarrow S^n$, если $f(x) = -x$. Если отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ не имеет антиподальных точек, то отображение $g = \sigma_n \circ f: x \mapsto -f(x)$ не имеет неподвижных точек. Поэтому $\deg g = (-1)^{n+1}$ и, значит, $\deg f = 1$. Следовательно, если $\deg f \neq 1$, то отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ имеет антиподальные точки.

В частности, мы видим, что если n четно, то любое отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ имеет либо неподвижную, либо антиподальную точку.

Каждое поле касательных векторов на сфере S^n можно рассматривать как гладкое отображение $u: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, обладающее тем свойством, что $(x, u(x)) = 0$ для любой точки $x \in S^n$. Если $u(x) \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $|u(x)| = 1$, т. е. что вектор $u(x)$ единичен. Любое поле единичных касательных векторов $u(x)$ задает по формуле

$$(x, t) \mapsto \cos \pi t \cdot x + \sin \pi t \cdot u(x), \quad x \in S^n, t \in I,$$

гомотопию $S^n \times I \rightarrow S^n$, связывающую тождественное отображение с антиподальным. Поэтому при четном n на сфере S^n не существует поля единичных касательных векторов (или, что равносильно, поля касательных векторов, нигде не обращающихся в нуль).

[При $n = 2m - 1$ такое поле может быть задано формулой $z \mapsto iz$, или, в вещественных координатах, формулой $(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) \mapsto (-y_1, x_1, \dots, -y_m, x_m)$.]

В частности, поля единичных касательных векторов не существует на сфере S^2 . Наглядно это означает, что у ежа, свертывающегося в клубок, все иглы не могут лежать гладко и некоторые непременно будут торчать. Другая интерпретация: на голове не может быть ровного волосяного покрова, — обязательно должна быть макушка. Поэтому теорему о несуществовании поля единичных касательных векторов называют также теоремой об еже или теоремой о макушке.

ДОПОЛНЕНИЕ

Линейные симплексы.—Симплициальные схемы.—Симплициальные пространства.—Барицентрическое измельчение симплициальной схемы.—Мелкость барицентрического измельчения триангуляции.—Вспомогательная теорема в симплициальном варианте.—Теорема о счетности множества $[X, Y]$.—Симплициальные аппроксимации клеточных пространств.—Триангуляция пространства $|S| \times I$.—Симплициальный цилиндр симплициального отображения.—Конус над симплициальным пространством.—Доказательство теоремы о симплициальных аппроксимациях клеточных пространств.

Пусть $\mathcal{V}^0$ —произвольное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ (вообще говоря, бесконечномерное). Часто нам будет удобно рассматривать $\mathcal{V}^0$ не как линейное, а как аффинное пространство над $\mathbb{R}$. В этом случае мы будем называть его элементы не векторами, а точками.

Система точек $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ пространства $\mathcal{V}^0$ называется *независимой*, если векторы $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ линейно независимы.

Конечно, *любая линейно независимая система независима*, но обратное, вообще говоря, не верно.

Выпуклая оболочка произвольной независимой системы $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ точек пространства $\mathcal{V}^0$ называется *линейным* (или *евклидовым*) *симплексом* с вершинами $a_0, a_1, \dots, a_n$ и обозначается символом $|a_0 a_1 \dots a_n|$.

Автоматическая проверка показывает, что точка $x \in \mathcal{V}^0$ тогда и только тогда принадлежит симплексу $|a_0 a_1 \dots a_n|$, когда

$$(1) \quad x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n,$$

где $\lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ и $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ называются *барицентрическими координатами* точки x в симплексе $|a_0 a_1 \dots a_n|$. Они однозначно определены этой точкой.

Число n называется *размерностью* симплекса $|a_0 a_1 \dots a_n|$.

Симплекс $|a_0 a_1 \dots a_n|$ при $n=0$ является точкой, при $n=1$ —отрезком, при $n=2$ —треугольником, а при $n=3$ —тетраэдром.

Из формулы (1) следует, что симплекс $|a_0 a_1 \dots a_n|$ лежит в n -мерном подпространстве $a_0 + \mathcal{W}$ пространства $\mathcal{V}^0$, где $\mathcal{W}$ —линейное подпространство, порожденное векторами $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$, и, значит, наследует обычную евклидову топологию этого подпространства (заметим, что в само пространство $\mathcal{V}^0$ —в случае, когда его размерность бесконечна,—мы никакой топологии не вводим).

Эта топология на $|a_0 a_1 \dots a_n|$ индуцируется метрикой

$$\rho(x, y) = \sqrt{(\lambda_0 - \mu_0)^2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)^2},$$

где $x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n$ и $y = \mu_0 a_0 + \dots + \mu_n a_n$ — произвольные точки симплекса $|a_0 a_1 \dots a_n|$.

Предложение 1. Каждый линейный симплекс $|a_0 \dots a_n|$ гомеоморфен n -мерному шару E^n .

Для доказательства предложения 1 нам нужна одна общая лемма о конусах CX .

По определению (см. лекцию 1.2) конус CX над произвольным пространством X получается из произведения $X \times I$ стягиванием в точку подпространства $X \times 0$:

$$CX = X \times I / X \times 0,$$

и потому, вообще говоря, пространства CX и $X \times I$ не гомеоморфны (рассмотрите, скажем, случай $X = S^1$). Тем не менее в одном важном случае эти пространства все же оказываются гомеоморфными.

Лемма 1. Если пространство X само является конусом, то пространства CX и $X \times I$ гомеоморфны.

Доказательство. Лемма утверждает, что для любого пространства X существует гомеоморфизм $CCX \rightarrow CX \times I$.

Мы определим отображения

$$\varphi: CCX \rightarrow CX \times I \quad \text{и} \quad \psi: CX \times I \rightarrow CCX$$

формулами

$$\varphi([x, t], s) = \begin{cases} \left(\left[x, \frac{st}{1-t} \right], s \right), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \left([x, s], \frac{s(1-t)}{t} \right), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\psi([x, t], s) = \left[\left[x, \frac{t}{t+s} \right], \max(s, t) \right],$$

где $x \in X$, $t, s \in I$. Непосредственная проверка показывает, что отображения φ и ψ корректно определены, непрерывны и удовлетворяют соотношениям $\varphi \circ \psi = \text{id}$, $\psi \circ \varphi = \text{id}$. Следовательно, эти отображения являются взаимно обратными гомеоморфизмами. $\square$

Лемма 2. Каждый линейный симплекс $|a_0 \dots a_n|$, $n > 0$, гомеоморфен конусу $C|a_0 \dots a_n|$ над симплексом $|a_0 \dots a_{n-1}|$. Существует гомеоморфизм

$$(2) \quad C|a_0 \dots a_{n-1}| \rightarrow |a_0 \dots a_n|,$$

тождественный на $|a_0 \dots a_{n-1}|$ и переводящий вершину конуса $C|a_0 \dots a_{n-1}|$ в вершину a_n симплекса $|a_0 \dots a_n|$.

Доказательство. Гомеоморфизм (2) может быть определен формулой

$$[x, t] \mapsto tx + (1-t)a_n,$$

где $x \in |a_0 \dots a_{n-1}|$, $0 \leq t \leq 1$. $\square$

Доказательство предложения 1. При $n=0$ и $n=1$ предложение 1 очевидно. Пусть $n \geq 2$, и пусть уже доказано, что любой $(n-1)$ -мерный линейный симплекс гомеоморфен шару E^{n-1} (или, что равносильно, кубу I^{n-1}). Согласно лемме 2 произвольный n -мерный симплекс $|a_0 \dots a_n|$ является конусом над симплексом $|a_0 \dots a_{n-1}|$, который в свою очередь является (при $n \geq 2$) конусом над симплексом $|a_0 \dots a_{n-2}|$. Поэтому, согласно лемме 1, симплекс $|a_0 \dots a_n|$ гомеоморфен произведению $|a_0 \dots a_{n-1}| \times I$ и, значит, — в силу индуктивного предположения — кубу $I^n = I^{n-1} \times I$ (а потому и шару E^n). $\square$

При $n > 0$ подмножество симплекса $|a_0 \dots a_n|$, состоящее из точек (1), для которых $0 < \lambda_0 < 1, \dots, 0 < \lambda_n < 1$, называется его *внутренностью* (оно открыто в введенном выше подпространстве $a_0 + \mathcal{W}^0$). При $n=0$ симплекс $|a_0|$ состоит из точки a_0 и, по определению, его внутренность совпадает с ним самим.

Подмножество симплекса $|a_0 \dots a_n|$, состоящее из точек, не принадлежащих его внутренней, называется *границей* симплекса $|a_0 \dots a_n|$. Оно состоит из точек, хотя бы одна барицентрическая координата которых равна нулю.

Из теоремы об инвариантности области (следствие 3 предложения 3 Дополнения к лекции 1.7) непосредственно вытекает, что любой гомеоморфизм $|a_0 \dots a_n| \rightarrow E^n$ отображает внутренность симплекса $|a_0 \dots a_n|$ на внутренность $\dot{E}^n$ шара E^n (и, значит, его границу — на границу S^{n-1} шара E^n). Впрочем, для гомеоморфизма $|a_0 \dots a_n| \rightarrow E^n$, построенного в доказательстве предложения 1, это свойство очевидно (достаточно заметить, что для любого пространства X гомеоморфизм φ из леммы 1 переводит «край» двойного конуса CCX , состоящий из точек $[[x, t], s]$, для которых либо $t=1$, либо $s=1$, в «край» призмы $CX \times I$, состоящий из точек $([x, t], s)$, для которых либо $t=1$, либо $s=0$ или 1).

Таким образом, граница любого n -мерного линейного симплекса $|a_0 \dots a_n|$ гомеоморфна $(n-1)$ -мерной сфере S^{n-1} .

Каждый симплекс вида $|a_{i_0} \dots a_{i_m}|$, где $0 \leq i_0 < \dots < i_m \leq n$, называется *гранью* симплекса $|a_0 \dots a_n|$. Граница симплекса $|a_0 \dots a_n|$ является, очевидно, объединением всех его граней размерности $< n$.

Наша ближайшая цель будет состоять в аккуратном описании класса топологических пространств, допускающих разбиение на симплексы, пересекающиеся лишь по их граням. Каждое такое пространство полностью характеризуется схемой примыкания его симплексов, и мы начнем с определения такого рода комбинаторных схем.

Определение 1. Множество S называется *симплициальной схемой*, если в нем отмечены некоторые конечные подмножества, называемые *симплексами* этой схемы, причем выполнены следующие две аксиомы:

СС1. Любой элемент множества S принадлежит хотя бы одному симплексу.

СС2. Каждое подмножество симплекса является симплексом.

Тот факт, что σ является симплексом схемы S , мы будем выражать формулой $\sigma \in S$.

Симплексы, содержащиеся в симплексе σ , называются *гранями* симплекса σ . Пустой симплекс $\emptyset$ является, таким образом, гранью любого симплекса схемы.

Точки симплициальной схемы S называются ее *вершинами*.

Симплекс называется *n -мерным*, если он состоит из $n+1$ вершин.

Из аксиом СС1 и СС2 непосредственно вытекает, что в силу обычного отождествления одноэлементных множеств с их элементами нульмерные симплексы симплициальной схемы S отождествляются с ее вершинами, так что вершины каждого симплекса — это в точности его нульмерные грани.

Для произвольной симплициальной схемы S мы рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^S$ всех функций $x: S \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих тем свойством, что множество вершин $e \in S$, для которых $x(e) \neq 0$, конечно. Схема S естественным образом вкладывается в пространство $\mathbb{R}^S$ (каждой вершине $e \in S$ отвечает функция $e: S \rightarrow \mathbb{R}$, равная единице в e и нулю во всех остальных вершинах схемы S) и является

в $\mathbb{R}^S$ базисом. Более абстрактно $\mathbb{R}^S$ можно поэтому определить как линейное пространство, в котором выбран базис, находящийся в биективном соответствии с множеством S . Векторы этого базиса мы будем называть *ортами*.

Для любого симплекса $\sigma = \{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}\}$ схемы S в пространстве $\mathbb{R}^S$ определен линейный симплекс

$$|\sigma| = |e_{i_0} \dots e_{i_n}|.$$

Пусть $|S|$ — объединение всех симплексов $|\sigma|$, $\sigma \in S$. Мы введем в $|S|$ топологию, считая множество $C \subset |S|$ тогда и только тогда замкнутым, когда для любого симплекса $|\sigma|$ пересечение $C \cap |\sigma|$ замкнуто в $|\sigma|$. Тогда внутренность σ каждого симплекса $|\sigma|$ будет клеткой пространства $|S|$ (с замыканием $|\sigma|$) и эти клетки будут, как легко видеть, составлять клеточное разбиение пространства $|S|$.

Определение 2. Клеточное пространство $|S|$ (с клетками σ , $\sigma \in S$) называется *геометрической реализацией* схемы S .

Клеточные пространства, являющиеся геометрическими реализациями симплициальных схем, называются *симплициальными пространствами*, а их тела называются *полиэдрами*.

Пример 1. Симплициальная схема с вершинами $e_0, \dots, e_N$ называется *полной*, если любое ее подмножество является симплексом. Ясно, что геометрической реализацией такой схемы является N -мерный линейный симплекс $|e_0 \dots e_N|$.

Пример 2. Пусть S — симплициальная схема с вершинами $e_0, \dots, e_{N+1}$, симплексами которой являются все ее подмножества, отличные от S . Геометрической реализацией этой схемы является граница $(N+1)$ -мерного линейного симплекса $|e_0 \dots e_{N+1}|$, гомеоморфная, как мы знаем, N -мерной сфере S^N . На этом основании схема S (а также ее геометрическая реализация) называется иногда *симплициальной сферой*.

Пример 3. Пусть S — симплициальная схема с вершинами $e_1, \dots, e_N, e'_1, \dots, e'_N$, симплексами которой являются всевозможные подмножества, не содержащие одновременно двух вершин e_i и e'_i с одним и тем же индексом i . При $N=2$ геометрическая реализация этой схемы является границей ромба, а при $N=3$ — поверхностью октаэдра. Для любого $N \geq 2$ эта геометрическая реали-

зация представляет собой 2^N -гранник, гомеоморфный сфере S^{N-1} и являющийся многомерным обобщением октаэдра.

Рассмотренные в примерах 1—3 симплициальные схемы состояли из конечного числа вершин. Такие симплициальные схемы называются *конечными*. Они характеризуются тем, что их геометрические реализации компактны.

Формула

$$(3) \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{e \in S} (x(e) - y(e))^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^S,$$

определяет в пространстве $\mathbb{R}^S$ (а потому и на множестве $|S| \subset \mathbb{R}^S$) метрику (обычно называемую *евклидовой метрикой*). Следует иметь в виду, что соответствующая топология пространства $|S|$ (называемая *метрической топологией*) отлична от введенной выше *слабой топологии* (имеет меньший запас открытых множеств). Ясно, однако, что если схема S конечна, то метрическая топология совпадает со слабой. [Легко видеть (докажите!), что для совпадения метрической топологии со слабой необходимо и достаточно, чтобы схема S была, в понятном смысле, локально конечной.]

Замечание 1. В начальный период развития алгебраической топологии в ней рассматривались исключительно полиэдры, которые изучались по их симплициальным схемам, т. е. чисто комбинаторными методами. На этом основании алгебраическую топологию называли в то время «комбинаторной топологией». В настоящее же время полиэдры вытеснены на периферию алгебраической топологии, а их теория — в значительной мере независимая от алгебраической топологии — называется «кусочно линейной топологией». Поэтому употребление термина «комбинаторная топология» следует признать совершенно устаревшим.

Каждой симплициальной схеме S мы можем сопоставить новую симплициальную схему $ba S$, вершинами которой являются симплексы схемы S , а симплексами — произвольные их множества, упорядоченные по включению. Схема $ba S$ называется *барицентрическим измельчением* схемы S .

Пример 4. Для полной симплициальной схемы S_N с $N+1$ вершинами $e_0, e_1, \dots, e_N$ схема $ba S$ имеет 2^{N+1} вершин и содержит $N!$ симплексов размерности N , каждый из которых задается перестановкой $e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_N}$ вершин схемы S_N и состоит из симплексов $\{e_{i_0}\}, \{e_{i_0}, e_{i_1}\}, \dots, \{e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_N}\}$.

Вершины схемы $\text{ba} S_N$ наглядно можно отождествлять с барицентрами (центрами тяжести) линейных симплексов $|\sigma|$ геометрической реализации $|S|$ схемы S . См. рис. 2 для случая $N=2$.

Чтобы придать этому наглядному представлению точный смысл, необходимы соответствующие общие определения.

Обозначая орт пространства $\mathbb{R}^{\text{ba} S}$, отвечающий симплексу $\sigma \in S$ (вершине схемы $\text{ba} S$), через e_σ , мы можем каждую точку $x \in |\text{ba} S|$ единственным образом представить формулой

$$x = \sum_{\sigma} \mu_{\sigma} e_{\sigma},$$

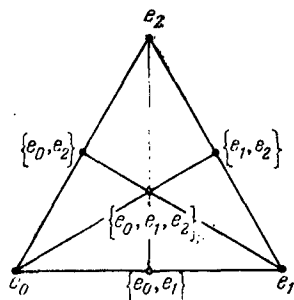


Рис. 2.

где $\mu_{\sigma} \geq 0$ и $\sum \mu_{\sigma} = 1$, причем $\mu_{\sigma} = 0$ для всех симплексов $\sigma \in S$, за исключением их конечного числа $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$, составляющих симплекс из $\text{ba} S$ (т. е. таких, что $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_n$).

Отсюда следует, что точка

$$l(x) = \sum_{\sigma} \mu_{\sigma} b(\sigma),$$

где $b(\sigma) = \frac{1}{n+1} e_0 + \dots + \frac{1}{n+1} e_n$ — барицентр симплекса $|\sigma| = |e_0 \dots e_n|$, корректно определена и принадлежит линейному симплексу $|\sigma_n| \subset |S|$. Тем самым мы получаем некоторое (очевидно, непрерывное) отображение

$$l: |\text{ba} S| \rightarrow |S|.$$

Предложение 2. Отображение l является гомеоморфизмом.

Доказательство. По определению каждый симплекс схемы $\text{ba} S$ имеет вид $\tau = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, где $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ — такие симплексы схемы S , что $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_n$. Мы будем называть симплекс σ_n носителем симплекса τ .

Для каждого симплекса $\sigma \in S$ мы обозначим через $S(\sigma)$ множество всех симплексов τ схемы $\text{ba} S$ с носителем σ , а через $|S(\sigma)|$ — подпространство пространства $|\text{ba} S|$, состоящее из симплексов $|\tau|$, $\tau \in S(\sigma)$. Ясно, что подпро-

Из этих равенств непосредственно следует, что условия (4) равносильны условиям

$$(6) \quad 0 \leq \lambda_{i_n} \leq \lambda_{i_{n-1}} \leq \dots \leq \lambda_{i_0} \text{ и } \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Этим доказано, что отображение l является гомеоморфизмом симплекса $|\sigma^\alpha|$ на часть симплекса $|\sigma|$, характеризующуюся соотношениями (6).

Но ясно, что для любой точки симплекса $|\sigma|$ существует такая перестановка $\alpha = (i_0, i_1, \dots, i_n)$, что для барицентрических координат $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ этой точки имеют место соотношения (5). Следовательно, l отображает объединение $|S(\sigma)|$ всех симплексов $|\sigma^\alpha|$ на симплекс $|\sigma|$.

Пусть $x, y \in |S(\sigma)|$ и $x \in |\sigma^\alpha|, y \in |\sigma^\beta|$, где $\alpha = (i_0, \dots, i_n)$, $\beta = (j_0, \dots, j_n)$. Если $x \neq y$, но $l(x) = l(y)$, то $\alpha \neq \beta$, поскольку на каждом симплексе $|\sigma^\alpha|$ отображение l является гомеоморфизмом. Вместе с тем для барицентрических координат $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ точки $l(x) = l(y)$ наряду с соотношениями (6) будут иметь место соотношения

$$(7) \quad 0 \leq \lambda_{j_n} \leq \lambda_{j_{n-1}} \leq \dots \leq \lambda_{j_0} \text{ и } \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Пусть среди чисел $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ имеется m различных, причем самое большое из них повторяется p_1 раз, следующее по величине $p_2 - p_1$ раз и т. д. Разбив перестановки α и β на m последовательных блоков, длин, соответственно $p_1, p_2 - p_1, \dots$ и т. д., мы получим, что соотношения (6) и (7) тогда и только тогда одновременно выполнены, когда для перестановок α и β эти блоки состоят из одинаковых чисел (внутри каждого блока, вообще говоря, как угодно переставленных).

С другой стороны, так как (см. соотношения (5)) $\mu_k = 0$ при $\lambda_{i_k} = \lambda_{i_{k+1}}$, то точка x принадлежит грани $|\tau|$ симплекса $|\sigma^\alpha|$, где τ — грань $\{\sigma_{p_1}^\alpha, \sigma_{p_2}^\alpha, \dots, \sigma_{p_m}^\alpha\}$ симплекса σ^α . Аналогично показывается, что точка y принадлежит грани $|\tau'|$ симплекса $|\sigma^\beta|$, где $\tau' = \{\sigma_{p_1}^\beta, \sigma_{p_2}^\beta, \dots, \sigma_{p_m}^\beta\}$, причем координаты точки x в грани $|\tau|$ будут равны барицентрическим координатам точки y в грани $|\tau'|$.

Но если блоки, на которые разбиты перестановки α и β , состоят из одинаковых чисел, то каждый симплекс $\sigma_{p_k}^\alpha$ будет совпадать с соответствующим симплексом $\sigma_{p_k}^\beta$ (эти симплексы будут иметь одни и те же вершины, лишь по разному занумерованные), так что точки x и y будут

иметь в одних и тех же симплексах одни и те же барицентрические координаты и потому будут совпадать.

Этим доказано, что если $l(x) = l(y)$, то $x = y$. Следовательно, отображение l является гомеоморфизмом подпространства $|S(\sigma)|$ на симплекс $|\sigma|$. $\square$

Топологическое пространство X называется *триангулируемым*, если оно гомеоморфно геометрической реализации $|S|$ некоторой симплициальной схемы S . Каждый гомеоморфизм $t: |S| \rightarrow X$ называется при этом *триангуляцией* пространства X , а схема S называется *схемой триангуляции* t .

Триангуляция $t: |S| \rightarrow X$ называется *конечной* (соответственно *локально конечной*), если схема S конечна (локально конечна). Для того чтобы пространство X обладало конечной (соответственно локально конечной) триангуляцией, необходимо, чтобы X было компактно (метризуемо).

Каждое симплициальное пространство $|S|$ по определению триангулируемо и обладает триангуляцией $\text{id}: |S| \rightarrow |S|$. Согласно предложению 2 отображение $l: |ba S| \rightarrow |S|$ также является триангуляцией пространства $|S|$.

Более общим образом, для любой триангуляции $t: |S| \rightarrow X$ триангулируемого пространства X композиция $t \circ l: |ba S| \rightarrow X$ также является триангуляцией этого пространства. Триангуляция $t \circ l$ обозначается символом $ba(t)$ и называется *барицентрическим измельчением* триангуляции t .

Барицентрические измельчения можно итерировать. По определению

$$ba^k(t) = ba(ba^{k-1}(t)), \quad ba^0(t) = t.$$

Если пространство X обладает непрерывной метрикой ρ (не обязательно индуцирующей его топологию), то для каждой его триангуляции $t: |S| \rightarrow X$ определено число

$$\text{mesh } t = \max_{\sigma \in S} \text{diam } t(|\sigma|) = \max_{\sigma \in S} \max_{x, y \in |\sigma|} \rho(t(x), t(y)),$$

называемое *мелкостью* триангуляции t (по отношению к метрике ρ).

В частности, для любого симплициального пространства $|S|$ имеет смысл говорить о мелкости его тождественной триангуляции id и ее последовательных барицентрических измельчений $l^k = ba(l^{k-1})$, $l^0 = \text{id}$, по отношению к евклидовой метрике (3).

Ясно, что $\text{mesh id} = \sqrt{2}$. Оценим $\text{mesh } l^k$ для любого $k \geq 0$, предполагая, что *схема S конечна*.

Если $a_0, \dots, a_n$ — независимые точки евклидова пространства $\mathcal{V}^n$, то для любых точек

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n, \\ \lambda_0 &\geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1, \\ y &= \mu_0 a_0 + \dots + \mu_n a_n, \\ \mu_0 &\geq 0, \dots, \mu_n \geq 0, \quad \mu_0 + \dots + \mu_n = 1, \end{aligned}$$

симплекса $|a_0 \dots a_n|$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} (8) \quad |x - y| &= \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i - \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \right) y \right| = \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i (a_i - y) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^n \lambda_i |a_i - y| \leq \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \right) \max_i |a_i - y| = \max_i |a_i - y|. \end{aligned}$$

В частности, $|a_i - y| = |y - a_i| \leq \max_j |a_j - a_i|$, и потому

$$|x - y| \leq \max_{i, j} |a_j - a_i|.$$

Следовательно,

$$\text{diam}(|a_0 \dots a_n|) = \max_{i, j} |a_i - a_j|$$

(диаметр симплекса равен длине его наибольшего ребра).

Рассмотрим теперь произвольный симплекс $|b_0 \dots b_m|$, $m \leq n$, вершины которого являются барицентрами каких-то граней симплекса $|a_0 \dots a_n|$, т. е. имеют вид $\frac{1}{s+1} (a_{i_0} + \dots + a_{i_s})$, где $0 \leq s \leq n$ и $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_s \leq n$. Согласно общей оценке (8) для каждого ребра $b_k - b_l$ этого симплекса имеет место неравенство

$$|b_k - b_l| \leq \max_j |b_k - a_j|.$$

Но если $b_k = \frac{1}{s+1} (a_{i_0} + \dots + a_{i_s})$, то

$$\begin{aligned} |b_k - a_j| &= \frac{1}{s+1} |(a_{i_0} - a_j) + \dots + (a_{i_s} - a_j)| \leq \\ &\leq \frac{1}{s+1} (|a_{i_0} - a_j| + \dots + |a_{i_s} - a_j|) \leq \\ &\leq \frac{s}{s+1} \max_l |a_{i_l} - a_j| \leq \frac{n}{n+1} \max_l |a_l - a_j|, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\max_i |b_i - a_i| \leq \frac{n}{n+1} \max_{i,j} |a_i - a_j|.$$

Следовательно,

$$\text{diam } |b_0 \dots b_m| \leq \frac{n}{n+1} \text{diam } |a_0 \dots a_n|.$$

Чтобы применить этот результат к итерированным триангуляциям l^k : $|ba^k S| \rightarrow |S|$, $k \geq 1$, мы заметим, что, как показывает очевидная индукция, каждое множество $l^k(|\tau|)$, $\tau \in ba^k S$, представляет собой линейный симплекс, вершинами которого служат барицентры каких-то граней симплекса $l^{k-1}(|\sigma|)$, где $\sigma \in ba^{k-1} S$ — носитель симплекса τ . Поэтому, согласно доказанному,

$$\text{diam } l^k(|\tau|) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam } l^{k-1}(|\sigma|), \quad \text{где } n = \dim \sigma.$$

Отсюда следует (если учесть, что $\frac{n}{n+1}$ монотонно растет с ростом n), что

$$\text{mesh } l^k \leq \frac{n}{n+1} \text{mesh } l^{k-1} \quad \text{для любого } k \geq 1,$$

где n — наибольшая размерность симплексов конечной схемы S (а значит, и всех схем $ba^k S$). Следовательно,

$$\text{mesh } l^k \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \sqrt{2}.$$

В частности, мы видим, что

$$(9) \quad \text{mesh } l^k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Предложение 3. Для любой конечной триангуляции t : $|S| \rightarrow X$ компактного метрического пространства X

$$\text{mesh } ba^k(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Ясно, что $ba^k(t) = ba^k(\text{id}) \circ t = l^k \circ t$. Поэтому предложение 2 вытекает из формулы (9), поскольку триангуляция t , являясь гомеоморфизмом компактных метрических пространств, представляет собой эквиоморфизм (равномерно непрерывное биективное отображение, для которого обратное отображение также равномерно непрерывно), и потому множества, диаметр

которых стремится к нулю, переводит в такие же множества. $\square$

Замечание 2. Для некомпактных пространств предложение 2 теряет силу. Впрочем, как мы увидим, реальный интерес представляет лишь следствие предложения 2, утверждающее существование сколь угодно мелких триангуляций, а это следствие может быть доказано — с использованием измельчений более общих, чем барицентрические, — и в общем случае.

Теперь мы можем сформулировать и доказать Вспомогательную теорему в симплициальном варианте.

Клеточная пара (X, A) называется *симплициальной парой*, если пространство X симплициально, или — что фактически равносильно — если пространство X триангулируемо. (Легко видеть, что клеточное подпространство A симплициального пространства X само является симплициальным пространством, но этот факт нам не понадобится.)

Пусть (Y, B) — произвольная m -мерная относительная клетка и $\chi: E^m \rightarrow Y$ — характеристическое отображение для клетки $e^m = Y \setminus B$. Для любого числа r , $0 < r \leq 1$, мы обозначим через E_r^m концентрический подшар шара E^m , состоящий из точек $x \in E^m$, для которых $|x| \leq r$, а через e_r^m — образ его внутренности E_r^m при отображении χ (являющийся клеткой в e^m).

Отображение $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ симплициальной пары (X, A) в относительную клетку (Y, B) мы назовем *регулярным* по отношению к триангуляции $t: |S| \rightarrow X$ пространства X , если для любого симплекса $\sigma \in S$ множество $(g \circ t)|_{\sigma}$ либо не пересекается с $\bar{e}_{1/4}^m$, либо целиком содержится в e^m и композиция $\chi^{-1} \circ g \circ t: |\sigma| \rightarrow E^m$ является аффинным отображением (записывается в барицентрических координатах линейными функциями).

Вспомогательная теорема (симплициальный вариант). Пусть (X, A) — симплициальная пара с компактным X , а (Y, B) — относительная m -мерная клетка. Тогда для любого непрерывного отображения $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ существует такая триангуляция $t: |S| \rightarrow X$ пространства X и такое регулярное по отношению к этой триангуляции отображение $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, что $f \sim g$ rel A .

Доказательство. На множестве $f^{-1}(\bar{e}_{3/4}^m)$ отображение $\chi^{-1} \circ f$ равномерно непрерывно, и потому существ-

вует такое $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in f^{-1}(\bar{e}_{3/4}^m)$ из $\rho(x, y) < \delta$ вытекает, что $\rho((\chi^{-1} \circ f)(x), (\chi^{-1} \circ f)(y)) < 1/4$. Согласно предложению 3 существует такая триангуляция $t: |S| \rightarrow X$ пространства X , что $\text{mesh } t < \delta$. Для упрощения формул мы, отождествив $|S|$ с X посредством t , будем считать t тождественным отображением.

Мы определим отображение $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ на каждой клетке $\sigma \subset X$ в отдельности. Если $f(|\sigma|) \subset \subset Y \setminus \bar{e}_{1/2}^m$ и, в частности, если $|\sigma| \subset A$, мы будем считать, что на σ (и даже на $|\sigma|$) отображение g совпадает с отображением f (так что, в частности, $g = f$ на A). Пусть $f(|\sigma|) \subset \subset e_{1/2}^m$, и пусть $|\sigma| = |a_0 a_1 \dots a_n|$. Тогда для любой точки

$$x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n, \quad \lambda_0 > 0, \dots, \lambda_n > 0, \\ \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1,$$

симплекса $|\sigma|$ мы положим

$$g(x) = \chi(\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_n b_n),$$

где

$$b_0 = \chi^{-1}(f(a_0)), \dots, b_n = \chi^{-1}(f(a_n)).$$

Ясно, что это корректно определит непрерывное отображение g на объединении всех симплексов $|\sigma|$, для которых $f(|\sigma|) \subset \subset e_{1/2}^m$. При этом в силу выпуклости шара $E_{1/2}^m$ для любого такого симплекса $|\sigma|$ будет иметь место включение $g(|\sigma|) \subset \subset e_{1/2}^m$.

Осталось построить отображение g на симплексах $|\sigma|$, для которых $f(|\sigma|) \cap e_{1/2}^m \neq \emptyset$ и $f(|\sigma|) \not\subset \subset e_{1/2}^m$ (и, значит, $f(|\sigma|) \cap \bar{e}_{1/2}^m \neq \emptyset$). Из условия, которому удовлетворяет число δ , непосредственно следует, что для каждого такого симплекса $|\sigma|$ множество $f(|\sigma|)$ содержится в клетке e^m и, более того, множество

$$\text{conv } f(|\sigma|) = \chi(\text{conv } (\chi^{-1} \circ f)(|\sigma|)),$$

где $\text{conv } (\chi^{-1} \circ f)(|\sigma|)$ — выпуклая оболочка множества $(\chi^{-1} \circ f)(|\sigma|)$ в шаре E^m , не пересекается с $\bar{e}_{1/4}^m$. Мы построим отображение g на симплексе $|\sigma|$, так чтобы $g(|\sigma|) \subset \subset \text{conv } f(|\sigma|)$. Тогда множество $g(|\sigma|)$ не будет пересекаться с $\bar{e}_{1/4}^m$, откуда следует, что для симплекса $\sigma \in \mathcal{S}$

соотношение $g(|\sigma|) \cap \bar{e}_{1/2}^m \neq \emptyset$ может иметь место только в рассмотренном выше случае $f(|\sigma|) \subset e_{1/2}^m$. Поскольку в этом случае отображение $\chi^{-1} \circ g$ на симплексе $|\sigma|$ по построению аффинно, мы видим, следовательно, что отображение g будет регулярным отображением.

Воспользуемся индукцией по размерности $s = \dim \sigma$ симплекса σ . Если $s = 0$, т. е. симплекс $|\sigma|$ представляет собой точку, мы положим $g(|\sigma|) = f(|\sigma|)$. Пусть $s > 0$, и пусть отображение g уже построено на всех собственных гранях $|\tau|$ симплекса $|\sigma|$ (т. е. на его границе $|\dot{\sigma}|$). По условию $g(|\tau|) \subset \operatorname{conv} f(|\tau|) \subset \operatorname{conv} f(|\sigma|)$, т. е.

$$g(|\dot{\sigma}|) \subset \operatorname{conv} f(|\sigma|).$$

Пусть b_0 — произвольная внутренняя точка симплекса $|\sigma|$ (например, его барицентр). Каждая точка $x \in |\sigma| \setminus b_0$ единственным образом представляется в виде $x = ub_0 + (1-u)y$, где $y \in |\dot{\sigma}|$, $u \in I$. Мы положим

$$g(x) = \begin{cases} \chi(u(\chi^{-1} \circ f)(b_0) + (1-u)(\chi^{-1} \circ g)(y)), & \text{если } x \in |\sigma| \setminus b_0, \\ f(b_0), & \text{если } x = b_0 \end{cases}$$

(это — так называемая «коническая конструкция»; ср. лемму 2). Ясно, что построенное отображение $g: |\sigma| \rightarrow X$ непрерывно и обладает тем свойством, что $g(|\sigma|) \subset \subset \operatorname{conv} f(|\sigma|)$.

Тем самым мы построили некоторое регулярное отображение $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, совпадающее на A с отображением f . Непосредственная проверка показывает теперь, что, положив для любой точки $x \in X$ и любого $t \in I$

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in |\sigma| \text{ и } f(|\sigma|) \subset Y \setminus \bar{e}_{1/2}^n, \\ \chi((1-t)(\chi^{-1} \circ f)(x) + t\chi^{-1}g(x)), & \text{если } x \in |\sigma| \text{ и } f(|\sigma|) \not\subset Y \setminus \bar{e}_{1/2}^n, \end{cases}$$

мы получим гомотопию относительно A , связывающую отображение f с отображением g . $\square$

Размерностью $\dim(X, A)$ симплициальной пары (X, A) называется наибольшая размерность клеток $\dot{\sigma} \subset X \setminus A$.

Следствие. Если $\dim(X, A) < m$, где $m = \dim(Y, B)$, то любое отображение $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ гомотопно относительно A такому отображению $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, что $Y \setminus B \not\subset f_*(X \setminus A)$.

Доказательство. Согласно Вспомогательной теореме мы можем считать отображение f регулярным. Предположим, что вопреки утверждению $Y \setminus B \subset f(X \setminus A)$. Тогда, в частности, $\tilde{e}_{1/4}^m \subset f(X \setminus A)$, т. е. $\tilde{e}_{1/4}^m$ содержится в объединении множеств вида $f(|\sigma|)$. Без ограничения общности мы можем считать, что все эти множества пересекаются с $\tilde{e}_{1/4}^m$ и потому имеют вид $(\chi \circ f')(|\sigma|)$, где f' — некоторое аффинное отображение $|\sigma| \rightarrow E^m$. При этом условии шар $E_{1/4}^m$ будет содержаться в объединении конечного числа множеств вида $f'(|\sigma|)$, каждое из которых является либо симплексом размерности $\dim \sigma$, либо некоторым выпуклым множеством, содержащимся в плоскости размерности, строго меньшей $\dim \sigma$. Поэтому существует такой симплекс σ , что $\dim \sigma \geq m$, что противоречит условию $\dim(X, A) < m$. Следовательно, $X \setminus A \not\subset f(Y \setminus B)$. $\square$

При $(X, A) = (E^n, S^{n-1})$ (когда, собственно говоря, доказанное следствие нам только и нужно) это следствие совпадает со следствием из Вспомогательной теоремы в гладком варианте и не несет никаких следов своего «симплициального» происхождения.

Замечание 3. Ясно, что отмеченное в замечании 1 лекции 2 обобщение Вспомогательной теоремы полностью сохраняется (вместе с доказательством) и в симплициальном варианте.

Замечание 4. По аналогии с триангулируемыми пространствами можно ввести в рассмотрение пространства, гомеоморфные кубируемым множествам (которые — за отсутствием лучшего термина — можно называть *топологически кубируемыми* пространствами), и получить соответствующий «кубический» вариант Вспомогательной теоремы. В принципе это несколько проще, поскольку роль барицентрических измельчений будет теперь играть тривиальная процедура измельчения кубильяжей. Вместе с тем без особого труда можно показать, что (компактное) топологическое пространство тогда и только тогда триангулируемо, когда оно топологически кубируемо. Поэтому симплициальный и кубический варианты Вспомогательной теоремы полностью равносильны. Мы отдали предпочтение симплициальному варианту в основном по традиции.

С помощью симплициальных пространств можно также доказать одну важную теорему, в формулировке которой эти пространства не участвуют.

Напомним, что множество мы называем *счетным*, если оно конечно или счетно.

Пусть X и Y — клеточные пространства.

Теорема 1. Если пространство X конечно, а пространство Y счетно, то множество гомотопических классов $[X, Y]$ непрерывных отображений $X \rightarrow Y$ счетно.

Доказательство теоремы 1 мы вынуждены начать довольно издавна.

Для простоты мы будем отождествлять симплициальные схемы с нульмерными остовами их геометрических реализаций. В частности, вместо e_i будем писать просто e_i .

Пусть S и T — симплициальные схемы.

Определение 2. Отображение $\varphi: S \rightarrow T$ называется *симплициальным*, если оно переводит симплексы в симплексы. Геометрической реализацией симплициального отображения $\varphi: S \rightarrow T$ называется отображение

$$|\varphi|: |S| \rightarrow |T|,$$

на каждом симплексе $|\sigma|$ являющееся аффинным (линейным в барицентрических координатах) отображением на симплекс $|\varphi\sigma|$ (и, значит, совпадающее на $S = |S|^0$ с отображением φ). Ясно, что отображение $|\varphi|$ клеточно (и, в частности, непрерывно).

Для сокращения формулировок геометрические реализации симплициальных отображений схем принято также называть *симплициальными отображениями*. К недоразумениям это не приводит.

Для любой точки x произвольного симплициального пространства $X = |S|$ мы будем обозначать символом $si\ x$ симплекс $|\sigma| \in |S|$, обладающий тем свойством, что $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ (этот симплекс существует и единствен, ибо множества $\overset{\circ}{\sigma}$, $\sigma \in S$, составляют клеточное разбиение пространства $|S|$).

В частности, для любого непрерывного отображения

$$f: |S| \rightarrow |T|$$

симплициальных пространств и любой точки $x \in |S|$ определен симплекс $si\ f(x)$ пространства $|T|$.

Определение 3. Симплициальное отображение

$$|\varphi|: |S| \rightarrow |T|$$

называется *симплициальной аппроксимацией* непрерывного отображения $f: |S| \rightarrow |T|$, если

$$(10) \quad |\varphi|(x) \in \text{si } f(x)$$

для каждой точки $x \in |S|$.

Пусть $f_t(x)$ — точка, делящая в отношении t : $1-t$ прямолинейный отрезок, соединяющий в симплексе $\text{si } f(x)$ точку $f(x)$ с точкой $|\varphi|(x)$. Ясно, что $f_t: |S| \rightarrow |T|$ является гомотопией, связывающей отображение $f_0 = f$ с отображением $f_1 = |\varphi|$. Таким образом, любая *симплициальная аппроксимация* отображения f гомотопна f .

Чтобы переформулировать условие (10) в более удобной форме, нам понадобится следующее определение:

Определение 4. Звездой $\text{st } \sigma$ симплекса $|\sigma|$, $\sigma \in S$, называется объединение внутренностей всех симплексов из $|S|$, содержащих симплекс $|\sigma|$. Звездой $\text{st } x$ точки $x \in |S|$ называется звезда $\text{st si } x$ симплекса $\text{si } x$.

Очевидно, что множества $\text{st } \sigma$ (и $\text{st } x$) открыты, а их замыкания $\overline{\text{st } \sigma}$ (и $\overline{\text{st } x}$) являются клеточными подпространствами клеточного пространства $|S|$.

Пусть $\sigma = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ — произвольное подмножество схемы S . Легко видеть, что σ тогда и только тогда является симплексом схемы S , когда пересечение

$$(11) \quad \bigcap_{i=0}^n \text{st } e_i$$

не пусто. Действительно, ясно, что

$$\bigcap_{i=0}^n \text{st } e_i = \begin{cases} \dot{\sigma}, & \text{если } \sigma \text{ является симплексом схемы } S, \\ \emptyset & \text{в противном случае. } \square \end{cases}$$

Предложение 4. Симплициальное отображение $|\varphi|: |S| \rightarrow |T|$ тогда и только тогда является симплициальной аппроксимацией непрерывного отображения $f: |S| \rightarrow |T|$, когда

$$(12) \quad f(\text{st } e) \subset \text{st } \varphi(e)$$

для любой вершины $e \in S$.

Доказательство. Пусть $x \in \text{st } e$, т. е. пусть $x \in \dot{\sigma}$, где σ — некоторый симплекс схемы S с вершиной e . Тогда $|\varphi|(x) \in \dot{\tau}$, где $\tau = \varphi(\sigma)$ — образ симплекса σ при отображении φ . Поэтому, если условие (10) выполнено, то $|\tau| = \text{si } f(x)$, и, значит, $f(x) \in \dot{\tau}$. С другой стороны, так

как $\varphi(e)$ является вершиной симплекса τ , то $\dot{\tau} \subset \text{st } \varphi(e)$. Следовательно, $f(x) \in \text{st } \varphi(e)$, т. е. $f(\text{st } e) \subset \text{st } \varphi(e)$.

Обратно, если выполнено условие (12), то для любой точки $x \in |S|$ будет иметь место включение

$$(13) \quad f(x) \in f\left(\bigcap_{i=0}^n \text{st } e_i\right) \subset \bigcap_{i=0}^n f(\text{st } e) \subset \bigcap_{i=0}^n \text{st } \varphi(e_i) = \dot{\tau},$$

где $e_0, \dots, e_n$ — вершины симплекса $|\sigma| = \text{si } x$, а τ — симплекс $\varphi(\sigma)$ с вершинами $\varphi(e_0), \dots, \varphi(e_n)$ (возможно, повторяющимися). Следовательно, $\text{si } f(x) = |\tau|$. С другой стороны, по определению $|\varphi|(x) \in |\tau|$. Таким образом, $|\varphi|(x) \in \text{si } f(x)$ и, значит, φ является симплициальной аппроксимацией отображения f . $\square$

Следствие. Непрерывное отображение $f: |S| \rightarrow |T|$ тогда и только тогда обладает хотя бы одной симплициальной аппроксимацией $|\varphi|: |S| \rightarrow |T|$, когда для любой вершины $e \in S$ существует такая вершина $e' \in T$, что

$$(14) \quad f(\text{st } e) \subset \text{st } e'.$$

Доказательство. Если аппроксимация $|\varphi|$ существует, то свойством (14) обладает вершина $e' = \varphi(e)$. Обратно, обозначив e' через $\varphi(e)$ мы видим, что условие (14) равносильно существованию такого отображения $\varphi: S \rightarrow T$, что

$$(15) \quad f(\text{st } e) \subset \text{st } \varphi(e)$$

для любой вершины $e \in S$. Поэтому надо только доказать, что отображение $\varphi: S \rightarrow T$, обладающее свойством (15), симплициально, т. е. что для любого симплекса $\sigma = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ схемы S вершины $\varphi(e_0), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ являются (возможно, с повторениями) вершинами некоторого симплекса τ схемы T или, иначе говоря, что пересечение (11) не пусто. Но уже известное нам рассуждение (см. (13)) показывает, что это пересечение содержит все множество $f(\dot{\sigma})$. Поскольку $f(\dot{\sigma}) \neq \emptyset$, этим следствие 1 полностью доказано. $\square$

Теперь мы должны считать схему S конечной.

Теорема 2 (о симплициальной аппроксимации). Если симплициальная схема S конечна, то для любого непрерывного отображения $f: |S| \rightarrow |T|$ существует такое число $m > 0$, что отображение f , рассматриваемое как отображение $|b^m S| \rightarrow |T|$, обладает симплициальной аппрок-

симацией

$$|\varphi|: |ba^m S| \rightarrow |T|.$$

Доказательство. Звезды вершин симплициального пространства $Y = |T|$ составляют открытое покрытие этого пространства, и, значит, их прообразы — открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства $X = |S|$. Так как пространство X , будучи конечным клеточным пространством, метризуемо и компактно, то, выбрав в нем некоторую метрику, мы можем применить к покрытию $\mathcal{U}$ лемму Лебега (см. Дополнение к лекции I.1). Согласно этой лемме существует такое число $\varepsilon > 0$, что любое подмножество $K \subset X$ диаметра $< \varepsilon$ содержится в каком-то элементе покрытия $\mathcal{U}$, т. е. в схеме $|T|$ существует такая вершина e' , что $f(K) \subset \text{st } e'$.

Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно в силу следствия 1 предложения 4 доказать, что при некотором $m > 0$ звезды вершин схемы $ba^m S$ будут иметь диаметр $< \varepsilon$. Но ясно, что диаметры звезд вершин произвольной триангуляции не превосходят удвоенной мелкости этой триангуляции, и потому существование числа m обеспечивается предложением 3. $\square$

Следствие (теорема 1 для ∇ -симплициальных пространств). Если симплициальная схема S конечна, а симплициальная схема T счетна, то множество $[|S|, |T|]$ гомотопических классов непрерывных отображений $|S| \rightarrow |T|$ счетно.

Доказательство. Согласно теореме 2 любое непрерывное отображение $|S| \rightarrow |T|$ гомотопно отображению вида $|\varphi|: |ba^m S| \rightarrow |T|$, а множество последних отображений, очевидно, счетно. $\square$

В силу этого следствия для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующее предложение, имеющее, конечно, и самостоятельный интерес:

Предложение 5. Любое клеточное пространство X гомотопически эквивалентно симплициальному пространству X' той же размерности. Если пространство X конечно (счетно), то пространство X' также конечно (счетно).

Рохлин и Фукс называют пространство X' симплициальной аппроксимацией клеточного пространства X .

Для доказательства предложения 5 нам будут нужны две — интересные и сами по себе — конструкции над симплициальными схемами.

Для каждой симплициальной схемы S произведение $|S| \times I$ будет клеточным, но, вообще говоря, не симплициальным пространством. Однако оказывается, что клетки этого пространства (являющиеся треугольными призмами вида $\Delta \times I$, где Δ — симплекс) можно разбить на симплексы так, чтобы получилось симплициальное пространство. Простейший (наиболее экономный) способ такого

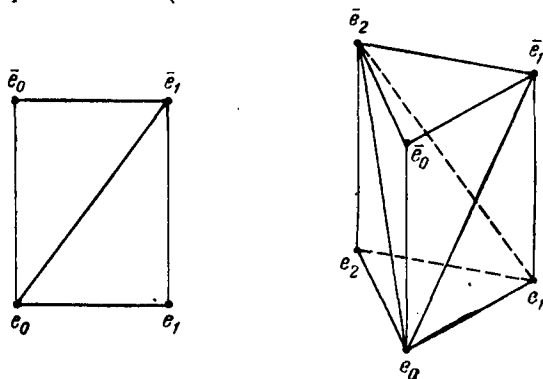


Рис. 3.

разбиения (изображенный для случаев $n=1$ и $n=2$ на рис. 3) может быть описан следующим образом.

Симплициальная схема S называется *упорядоченной*, если на ней задано частичное отношение порядка (обозначаемое символом $<$) по отношению к которому все симплексы схемы S линейно упорядочены.

Для любой упорядоченной симплициальной схемы S введем в рассмотрение симплициальную схему $S \times I$, вершинами которой являются символы e и $\bar{e}$, где e — вершины схемы S , а симплексами — произвольные подмножества таких множеств вида $\{e_0, \dots, e_p, \bar{e}_p, \dots, \bar{e}_n\}$, что:

а) множество $\sigma = \{e_0, \dots, e_p, \bar{e}_p, \dots, \bar{e}_n\}$ является симплексом схемы S ;

б) $e_0 < \dots < e_p < \dots < \bar{e}_p < \dots < \bar{e}_n$ в схеме S .

Линейный симплекс $|e_0 \dots e_p \bar{e}_p \dots \bar{e}_n|$ геометрической реализации $|S \times I|$ схемы $S \times I$ мы для сокращения формул будем обозначать символом $|\sigma, p|$.

Каждая точка $z \in |S \times I|$ принадлежит одному из симплексов вида $|\sigma, p|$, т. е. выражается формулой

$$(16) \quad z = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_p e_p + \mu_0 \bar{e}_p + \dots + \mu_{n-p} \bar{e}_n,$$

где $\lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_p \geq 0, \mu_0 \geq 0, \dots, \mu_{n-p} \geq 0$ и

$$\lambda_0 + \dots + \lambda_p + \mu_0 + \dots + \mu_{n-p} = 1.$$

Любой такой точке z мы отнесем точку

$$k_1(z) = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_{p-1} e_{p-1} + (\lambda_p + \mu_0) e_p + \dots + \mu_{n-p} e_n$$

симплекса $|\sigma|$ и число

$$k_2(z) = \lambda_0 + \dots + \lambda_p$$

отрезка I . Автоматическая проверка показывает, что точка

$$(17) \quad k(z) = (k_1(z), k_2(z))$$

пространства $|S| \times I$ не зависит от выбора симплекса $|\sigma, p|$ (поскольку мы не требуем, чтобы точка z была внутренней точкой симплекса $|\sigma, p|$, таких симплексов может быть много), и, значит, формула (17) корректно определяет некоторое непрерывное отображение

$$k: |S \times I| \rightarrow |S| \times I.$$

Обратно, пусть (x, t) — произвольная точка пространства $|S| \times I$, и пусть $x \in |\sigma|$, где $\sigma = \{e_0, \dots, e_n\}$ — некоторый симплекс схемы S , т. е. пусть

$$x = \alpha_0 e_0 + \dots + \alpha_n e_n,$$

где $\alpha_0 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$ и $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$. Предполагая, что $e_0 < \dots < e_n$ в схеме S , рассмотрим наименьший индекс $p = p(x, t)$, обладающий тем свойством, что

$$t \leq \alpha_0 + \dots + \alpha_p.$$

Пусть $k'(x, t)$ — точка (16) симплекса $|\sigma, p|$, для которой

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \alpha_0, \dots, \lambda_{p-1} = \alpha_{p-1}, \quad \lambda_p = t - \alpha_0 - \dots - \alpha_{p-1}, \\ \mu_0 &= \alpha_0 + \dots + \alpha_p - t, \quad \mu_1 = \alpha_{p+1}, \dots, \mu_{n-p} = \alpha_n. \end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что точка $k'(x, t) \in |S \times I|$ корректно определена и получающееся отображение

$$k': |S| \times I \rightarrow |S \times I|$$

обратно к отображению k . Следовательно, отображения k и k' являются взаимно обратным гомеоморфизмами.

В дальнейшем мы будем отождествлять точки z и $k(z)$. Тогда в категории топологических пространств будет иметь место равенство

$$|S \times I| = |S| \times I,$$

и каждая клетка $|\sigma| \times I$ пространства $|S| \times I$ будет объединением всех симплексов вида $|\sigma, p|$.

Перенесем теперь на симплициальные отображения понятие цилиндра отображения.

Пусть S и T — симплициальные схемы, причем схема T упорядочена, и пусть $\varphi: S \rightarrow T$ — симплициальное отображение.

Определение 5. Цилиндром симплициального отображения $\varphi: S \rightarrow T$ называется симплициальная схема $\text{Cyl } \varphi$, множеством вершин которой служит множество $S \sqcup T$, а симплексами — такие подмножества $\sigma \subset S \sqcup T$, что:

- 1) пересечение $\sigma \cap S$ является симплексом схемы S ;
- 2) множество $\varphi(\sigma \cap S) \cup (\sigma \cap T)$ является симплексом схемы T ;
- 3) если $\sigma \cap S \neq \emptyset$ и $\sigma \cap T \neq \emptyset$, то $\sigma \cap T$ является образом при отображении φ некоторого симплекса схемы S ;
- 4) для любых двух вершин $e \in \sigma \cap S$ и $e' \in \sigma \cap T$ в схеме T имеет место соотношение

$$\varphi(e) \leq e'.$$

Геометрическая реализация $|\text{Cyl } \varphi|$ схемы $\text{Cyl } \varphi$ называется симплициальным цилиндром симплициального отображения $f = |\varphi|$ и обозначается символом $\text{Cyl}_s f$.

Ясно, что вложения схем S и T в схему $\text{Cyl } \varphi$ являются симплициальными отображениями. Это позволяет считать симплициальные пространства $X = |S|$ и $Y = |T|$ подпространствами пространства $\text{Cyl}_s f$.

Рассмотрим теперь (очевидно, симплициальное) отображение

$$\varphi': e_i \mapsto e_i, \bar{e}_i \mapsto \varphi(e_i),$$

схемы $S \times I$ в схему $\text{Cyl } \varphi$. Геометрическая реализация $|\varphi'|: |S \times I| \rightarrow \text{Cyl}_s f$ этого отображения, рассматриваемая как отображение $|S| \times I \rightarrow \text{Cyl}_s f$, переводит любую точку вида $(x, 1)$, где $x \in X = |S|$, в точку $f(x)$ подпространства $Y = |T|$ пространства $\text{Cyl}_s f$. Поэтому вместе с вложением $Y \rightarrow \text{Cyl}_s f$ это отображение инду-

цирует некоторое непрерывное отображение

$$\bar{\varphi}: \text{Cyl } f \rightarrow \text{Cyl}_s f,$$

где $\text{Cyl } f$ — цилиндр (обращенный) отображения f (см. лекцию I.2).

Непосредственное сравнение определений показывает, что отображение $\bar{\varphi}$ *надъективно* (и, более того, является эпиморфизмом). Однако *это отображение, вообще говоря, не инъективно* (что и вынуждает различать пространства $\text{Cyl } f$ и $\text{Cyl}_s f$). Действительно, по построению цилиндр $\text{Cyl } f$ является клеточным пространством, состоящим из клеток вида $|\tau|$, где $\tau \in T$ (на этих клетках отображение тождественно), и из клеток, являющихся образами симплексов $|\sigma, p|$ пространства

$$|S \times I| = X \times I$$

и их граней при отображении факторизации $X \times I \rightarrow \text{Cyl } f$. При этом на клетках второго вида отображение $\bar{\varphi}$ индуцировано аффинным отображением $|\varphi'|$, переводящим симплекс $|\sigma, p|$ в симплекс $|e_{i_0} \dots e_{i_p} e'_{j_1} \dots e'_{j_q}|$ пространства $\text{Cyl}_s f$, где $e'_{j_1}, \dots, e'_{j_q}$ — все неповторяющиеся вершины вида $\varphi(e_{i_p}), \dots, \varphi(e_{i_n})$. Поэтому, если среди вершин $\varphi(e_{i_p}), \dots, \varphi(e_{i_n})$ есть одинаковые, то отображение $\bar{\varphi}$ заведомо не инъективно. $\square$

По определению отображение $|\varphi'|$ (или, точнее, отображение $|\varphi'| \circ k'$) каждую точку $(x, t) \in |S \times I|$ переводит в точку пространства $\text{Cyl}_s f$, выражающуюся формулой

$$\alpha_0 e_{i_0} + \dots + \alpha_{p-1} e_{i_{p-1}} + (t - \alpha_0 - \dots - \alpha_{p-1}) e_{i_p} + \\ + \beta_1 e'_{j_1} + \dots + \beta_q e'_{j_q},$$

где $\beta_s, s = 1, \dots, q$, — сумма всех чисел $\mu_k, 0 \leq k \leq n - p$, для которых $\varphi(e_{i_{p+k}}) = e'_{j_s}$.

Поэтому, в частности, *если*

$$|\varphi'| (x_1, t_1) = |\varphi'| (x_2, t_2),$$

то $t_1 = t_2$ и для любого $t \in I$

$$|\varphi'| (x_1, t) = |\varphi'| (x_2, t).$$

Для канонической ретрагирующей деформации $H: (\text{Cyl } f) \times I \rightarrow \text{Cyl } f$ (см. формулу (4) лекции I.2) отсюда следует, что эта деформация согласована с эпиморфизмом $\bar{\varphi}: \text{Cyl } f \rightarrow \text{Cyl}_s f$ (если $\bar{\varphi}(z_1) = \bar{\varphi}(z_2), z_1, z_2 \in \text{Cyl } f$, то

$(\bar{\varphi} \circ H)(z_1, \tau) = (\bar{\varphi} \circ H)(z_2, \tau)$ для любого $\tau \in I$. Следовательно, деформация H определяет некоторую ретрагирующую деформацию

$$\bar{H}: (\text{Cyl}_s f) \times I \rightarrow \text{Cyl}_s f$$

(удовлетворяющую соотношению $H \circ (\bar{\varphi} \times \text{id}) = \bar{\varphi} \circ H$). Таким образом, подобно цилиндру $\text{Cyl} f$ симплициальный цилиндр $\text{Cyl}_s f$ деформационно ретрагируется на подпространство $Y = |T|$.

При этом отображение f также, очевидно, будет композицией $r \circ i$ вложения $i: X \rightarrow \text{Cyl}_s f$ и деформационной ретракции $r = \bar{H}_1$ (рассматриваемой как отображение $\text{Cyl}_s f \rightarrow Y$).

Таким образом, в этом отношении цилиндр $\text{Cyl}_s f$ ведет себя вполне аналогично цилиндру $\text{Cyl} f$.

Хотя отображение $\bar{\varphi}$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда отображение φ инъективно, пространства $\text{Cyl}|\varphi|$ и $\text{Cyl}_s|\varphi|$ могут быть гомеоморфны и для неинъективных φ .

Пусть, например, схема T состоит из единственной вершины e' и, значит, отображение $|\varphi|$ представляет собой постоянное отображение $X \rightarrow \text{pt}$. В этом случае множеством вершин схемы $\text{Cyl} \varphi$ является множество $S \sqcup \{e'\}$, а ее симплексами — всевозможные подмножества множеств вида $\sigma \cup \{e'\}$, где σ пробегает все симплексы схемы S . Эта схема называется *конусом* над схемой S и обозначается символом CS .

Пусть, как и выше, $(x, t) \in |S| \times I$, где $x = \alpha_0 e_{i_0} + \dots + \alpha_n e_{i_n}$, и пусть $[x, t]$ — соответствующая точка конуса $C|S|$ над пространством $|S|$. Тогда легко видеть, что формула

$$[x, t] \mapsto t\alpha_0 e_{i_0} + \dots + t\alpha_n e_{i_n} + (1-t)e'$$

корректно определяет гомеоморфное отображение $C|S| \rightarrow |CS|$, и, значит, в этом случае цилиндр $\text{Cyl}|\varphi| = C|S|$ отображения $|\varphi|$ гомеоморфен симплициальному цилиндру $\text{Cyl}_s|\varphi| = |CS|$. [Однако, скажем, для симплициального отображения $|\varphi|$ треугольника $|e_0 e_1 e_2|$ на отрезок $|e_0 e_1|$, заданного соответствием $e_0 \mapsto e_0$, $e_1 \mapsto e_1$, $e_2 \mapsto e_1$, цилиндры $\text{Cyl}|\varphi|$ и $\text{Cyl}_s|\varphi|$ заведомо не гомеоморфны.]

В частности, мы видим, что любая триангуляция $t: |S| \rightarrow S^{n-1}$ сферы S^{n-1} продолжается до некоторой три-

ангуляции шара E^n . Действительно, в силу отождествлений $C|S| = |CS|$ и $CS^{n-1} = E^n$ отображение

$$Ct: C|S| \rightarrow CS^{n-1}, [x, \tau] \mapsto [t(x), \tau],$$

будет триангуляцией шара E^n , продолжающей триангуляцию t . $\square$

Теперь мы уже можем доказать предложение 5.

Доказательство предложения 5. Мы построим последовательность симплициальных пространств X'_n , последовательность симплициальных вложений $i_n: X'_n \rightarrow X'_{n+1}$ и последовательность клеточных гомотопических эквивалентностей

$$f_n: X^n \rightarrow X'_n,$$

обладающих следующими свойствами:

а) для любого $n \geq 1$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X^{n-1} & \xrightarrow{\subset} & X^n \\ f_{n-1} \downarrow & & \downarrow f_n \\ X'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & X'_n \end{array}$$

коммутативна;

б) $\dim X'_n = \dim X^n$;

в) если пространство X^n конечно (счетно), то и пространство X'_n (т. е. соответствующая симплициальная схема) конечно (счетно);

г) если $X^n = X^{n+1}$, то $X'_n = X'_{n+1}$ и $i_n = \text{id}$.

Объединение X' пространств X'_n будет тогда симплициальным пространством, конечным или счетным одновременно с X , и его размерность $\dim X'$ будет равна размерности $\dim X$ пространства X . Кроме того, отображения f_n будут определять клеточное отображение $f: X \rightarrow X'$, являющееся в силу теоремы Милнора гомотопической эквивалентностью (см. теорему 1 Дополнения к лекции I.10; условия этой теоремы выполнены, поскольку обе фильтрации $\{X^n\}$ и $\{X'_n\}$ являются фильтрациями Борсука и потому гомотопически правильными).

Положив $X'_0 = X^0$ и $f_0 = \text{id}$, предположим, что для некоторого $n \geq 1$ пространства X'_{n-1} и гомотопическая эквивалентность $f_{n-1}: X^{n-1} \rightarrow X'_{n-1}$ уже построены. По определению $X^n = E \cup_g X^{n-1}$, где E — объединение непересекающихся n -мерных шаров, а g — непрерывное отображение его края S в остов X^{n-1} . Поэтому (см. лекцию I.2) гомотопическая эквивалентность $f_{n-1}: X^{n-1} \rightarrow X'_{n-1}$ рас-

пространяется до некоторой гомотопической эквивалентности

$$f'_n: X^n \rightarrow E \cup f_{n-1} \circ g X'_{n-1},$$

тождественной на E .

Но согласно теореме 2, примененной к ограничениям отображения $f_{n-1} \circ g$ на каждой из сфер, составляющих S , существует отображение $|\varphi|: S \rightarrow X'_{n-1}$, являющееся симплициальной аппроксимацией отображения $f_{n-1} \circ g$ по отношению к некоторой триангуляции пространства S , и, значит, гомотопное этому отображению. Поэтому (см. снова лекцию I.2) существует гомотопическая эквивалентность

$$h': E \cup f_{n-1} \circ g X'_{n-1} \rightarrow E \cup |\varphi| X'_{n-1},$$

тождественная на X'_{n-1} .

Наконец, так как $|\varphi| = r \circ i$, где $i: S \rightarrow \text{Cyl}_s |\varphi|$ — вложение, а $r: \text{Cyl}_s |\varphi| \rightarrow X'_{n-1}$ — каноническая деформационная ретракция (и, значит, гомотопическая эквивалентность), то существует гомотопическая эквивалентность

$$h'': E \cup |\varphi| X'_{n-1} \rightarrow E \cup_i \text{Cyl}_s |\varphi|,$$

совпадающая на X'_{n-1} с вложением i . Снабдив пространство E триангуляцией, продолжающей данную триангуляцию его края S , мы, очевидно, получим триангуляцию пространства $E \cup_i \text{Cyl}_s |\varphi|$, т. е. введем в него структуру симплициального пространства. Это пространство мы и примем за пространство X'_n . Ясно, что условия б), в) и г) будут при этом соблюдены.

Столь же ясно, что, положив $f_n = h'' \circ h' \circ f'_n$, мы удовлетворим и условию а).

Тем самым предложение 5 полностью доказано. $\square$

Вместе с тем полностью доказана теорема 1. $\square$

Замечание 5. В связи с последним шагом в конструкции симплициального пространства X'_n стоит заметить, что если (X_1, A) и (X_2, A) — две симплициальные пары с одним и тем же A , то триангуляции пространств X_1 и X_2 могут и не объединяться в единую триангуляцию пространства $X_1 \cup X_2$. Типичный пример получается, когда X_1 и X_2 являются двумя дизъюнктными евклидовыми симплексами (в их стандартной триангуляции из примера 1), границы которых отождествлены по некоторому симплициальному гомеоморфизму. Однако при объединении триангуляций пространств E и $\text{Cyl}_s |\varphi|$ подобной ситуации, как легко видеть, не возникает.

Слабые гомотопические эквивалентности.— Клеточные эквиваленты топологических пространств.— Пунктированные клеточные эквиваленты.— «Экономное» построение клеточного эквивалента.— Нарастивания и вдавливания.— Теорема Уайтхеда о ∞ -эквивалентностях.— Ее обобщение на случай N -эквивалентностей.

В этой лекции мы введем и изучим важное понятие слабой гомотопической эквивалентности. Результаты этой лекции будут широко использоваться в следующих семестрах, но для наших ближайших целей они по существу бесполезны. Тем не менее их изложение здесь вполне уместно хотя бы потому, что они проливают новый и неожиданный свет на взаимоотношения произвольных топологических пространств с клеточными пространствами.

Определение 1. Непрерывное отображение $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$ называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если для любого клеточного пространства K отображение

$$\varphi_K: [K, \hat{X}] \rightarrow [K, X], \quad [f] \mapsto [\varphi \circ f], \quad f: K \rightarrow \hat{X}$$

биективно.

Ясно, что любая гомотопическая эквивалентность является слабой гомотопической эквивалентностью, но обратное, вообще говоря, неверно.

Однако можно утверждать, что если $\hat{X}$ и X являются клеточными пространствами, то любая слабая гомотопическая эквивалентность $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$ будет гомотопической эквивалентностью. Действительно, если $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$ является слабой гомотопической эквивалентностью, то, в частности, отображение $\varphi_X: [X, \hat{X}] \rightarrow [X, X]$ биективно. Следовательно, существует такое отображение $\psi: X \rightarrow \hat{X}$, что $\varphi_X[\psi] = [\text{id}]$, т. е. такое, что $\varphi \circ \psi \sim \text{id}$. Поэтому $\varphi_{\hat{X}}[\psi \circ \varphi] = [\varphi \circ \psi \circ \varphi] = [\varphi] = \varphi_{\hat{X}}[\text{id}]$, откуда ввиду биективности отображения $\varphi_{\hat{X}}$ следует, что $\psi \circ \varphi \sim \text{id}$. $\square$

Таким образом, на категории клеточных пространств слабые гомотопические эквивалентности совпадают с гомотопическими эквивалентностями.

Аналогично доказывается, что если для слабых гомотопических эквивалентностей $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$ и $\varphi_1: \hat{X}_1 \rightarrow X$ пространства $\hat{X}$ и $\hat{X}_1$ являются клеточными пространствами, то эти пространства гомотопически эквивалентны. Действительно, поскольку φ является слабой гомотопической эквивалентностью, а пространство $\hat{X}_1$ клеточно, существует такое отображение $\psi_1: \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}$, что $\varphi \circ \psi_1 \sim \varphi_1$. По симметрии существует также отображение $\psi: \hat{X} \rightarrow \hat{X}_1$, для которого $\varphi_1 \circ \psi \sim \varphi$. Поэтому $\varphi \circ (\psi_1 \circ \psi) \sim \varphi_1 \circ \psi \sim \varphi$ и, значит, $\psi_1 \circ \psi \sim \text{id}$ в силу инъективности отображения $\varphi_{\hat{X}}$. По аналогичным соображениям $\psi \circ \psi_1 \sim \text{id}$. $\square$

Определение 2. Клеточное пространство $\hat{X}$ называется клеточным эквивалентом топологического пространства X , если существует слабая гомотопическая эквивалентность $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$.

Согласно сделанным выше замечаниям, если клеточный эквивалент $\hat{X}$ существует, то с точностью до гомотопической эквивалентности он единствен.

Докажем теперь существование клеточных эквивалентов:

Теорема 1. Для любого топологического пространства X существует его клеточный эквивалент $\hat{X}$.

Доказательство. Клеточное пространство $\hat{X}$ и слабую гомотопическую эквивалентность $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$ мы будем строить индукцией по остовам. За вершины пространства $\hat{X}$ мы примем компоненты линейной связности пространства X (так что для связного пространства X клеточное пространство $\hat{X}$ будет одновершинным). Отображение $\varphi_0: \hat{X}^0 \rightarrow X$ мы построим, сопоставив каждой компоненте пространства X ее произвольную—но раз навсегда выбранную—точку.

Пусть уже построено клеточное пространство $\hat{X}^n$ и отображение $\varphi_n: \hat{X}^n \rightarrow X$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}^n$ всевозможных отображений $f: S^n \rightarrow \hat{X}^n$, обладающих тем свойством, что $\varphi_n \circ f \sim \text{const}$, и выберем в нем такое семейство отображений $f_\alpha: S^n \rightarrow \hat{X}^n$, что любое отображение из $\mathfrak{M}^n$ гомотопно некоторому (вообще говоря, не единственному) отображению f_α . Так как $\varphi_n \circ f_\alpha \sim \text{const}$, то для каждого α множество $\mathfrak{N}_\alpha^n$ всех отображений g :

$E^{n+1} \rightarrow X$, для которых $g|_{S^n} = \varphi_n \circ f_\alpha$, не пусто. Мы выберем в $\mathcal{N}_\alpha^n$ такое семейство отображений $g_{\alpha\beta}: E^{n+1} \rightarrow X$, что любое отображение из $\mathcal{N}_\alpha^n$ гомотопно относительно S^n некоторому отображению $g_{\alpha\beta}$.

Обозначив для каждого составного индекса $\alpha\beta$ через $E_{\alpha\beta}$ экземпляр шара E^n (все шары $E_{\alpha\beta}$ предполагаются непересекающимися), а через $f_{\alpha\beta}$ — отображение $E_{\alpha\beta} \rightarrow \hat{X}^n$, совпадающее с отображением f_α , мы положим

$$\hat{X}^{n+1} = E \cup_f \hat{X}^n, \quad \text{где } E = \bigsqcup_{\alpha} E_{\alpha\beta} \text{ и } f = \bigsqcup_{\beta} f_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, клеточное пространство $\hat{X}^{n+1}$ получается из клеточного пространства $\hat{X}^n$ приклеиванием $(n+1)$ -мерных клеток $e_{\alpha\beta}$ посредством приклеивающих отображений $f_{\alpha\beta}$. Ясно, что отображение $E \sqcup \hat{X}^n \rightarrow X$, совпадающее на $\hat{X}^n$ с отображением φ_n , а на каждом шаре $E_{\alpha\beta}$ — с соответствующим отображением $g_{\alpha\beta}$, индуцирует некоторое непрерывное отображение $\varphi_{n+1}: \hat{X}^{n+1} \rightarrow X$, обладающее тем свойством, что $\varphi_{n+1}|_{\hat{X}^n} = \varphi_n$. Положив

$$\hat{X} = \bigcup_n \hat{X}^n, \quad \varphi|_{\hat{X}^n} = \varphi_n,$$

мы получим, таким образом, некоторое клеточное пространство $\hat{X}$ и отображение $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$. Остается показать, что отображение φ является слабой гомотопической эквивалентностью.

Пусть K — произвольное клеточное пространство. Утверждение, что отображение φ_K надъективно, означает, что для любого непрерывного отображения $g: K \rightarrow X$ существует такое непрерывное отображение $f: K \rightarrow \hat{X}$, что $g \sim \varphi \circ f$. Мы докажем даже большее:

Лемма 1. Пусть для отображения $g: K \rightarrow X$ существует такое клеточное подпространство A пространства K и такое непрерывное отображение $f': A \rightarrow \hat{X}$, что $\varphi \circ f' = g$ на A . Тогда существует такое непрерывное отображение $f: K \rightarrow \hat{X}$, что $f = f'$ на A и $g \sim \varphi \circ f \operatorname{rel} A$.

Из этой леммы вытекает не только надъективность отображения φ_K (при $A = \emptyset$), но и его инъективность. Действительно, если для отображений $f_0, f_1: K \rightarrow \hat{X}$ существует такая гомотопия $g_t: K \rightarrow X$, что $g_0 = \varphi \circ f_0$ и $g_1 = \varphi \circ f_1$, то, применив к этой гомотопии, рассматриваемой как отображение $K \times I \rightarrow X$, лемму 1 (приняв за A

подпространство $(K \times 0) \cup (K \times 1)$, мы получим гомотопию $f_t: K \rightarrow \hat{X}$, связывающую отображения f_0 и f_1 . Таким образом, по модулю леммы 1 мы можем считать теорему 1 доказанной. $\square$

Доказательство леммы 1. Нам нужно построить такие непрерывные отображения $f_n: K^n \rightarrow \hat{X}^n$ и такие неподвижные на A гомотопии $h_{n,t}: K^n \rightarrow X$, что

$$\begin{aligned} f_n|_{A^n} &= f', & h_{n,0} &= g|_{K^n}, & h_{n,1} &= \varphi \circ f_n, \\ f_{n+1}|_{K^n} &= f_n, & h_{n+1,t}|_{K^n} &= h_{n,t}. \end{aligned}$$

Для любой вершины $e^0 \in K^0$ мы примем за $f_0(e^0)$ вершину клеточного пространства $\hat{X}$ (т. е. компоненту пространства X), содержащую точку $g(e^0)$, а за гомотопию $t \mapsto h_{0,t}(e^0)$ — путь в X , соединяющий точку $g(e^0)$ с точкой $\varphi(f_0(e^0))$ (лежащей по условию в той же компоненте пространства X). Если при $g(e^0) = \varphi(f_0(e^0))$ мы условимся за путь $t \mapsto h_{0,t}(e^0)$ принимать постоянный путь, то все условия, наложенные на отображение f_0 и гомотопию $h_{0,t}$, будут, очевидно, выполнены.

Пусть для некоторого $n \geq 0$ отображение f_n и гомотопия $h_{n,t}$ уже построены. Рассмотрим произвольную $(n+1)$ -мерную клетку e^{n+1} пространства K и ее характеристическое отображение $\chi: E^{n+1} \rightarrow K$. Пусть $\rho = \chi|_{S^n}$ — соответствующее приклеивающее отображение. Отображение $f_n \circ \rho: S^n \rightarrow \hat{X}^n$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi \circ (f_n \circ \rho) \sim (g|_{K^n}) \circ \rho = (g \circ \chi)|_{S^n} \sim \text{const},$$

т. е. принадлежит $\mathcal{M}^n$, и потому существует такое α , что $f_n \circ \rho \sim f_\alpha$ (мы предполагаем, что $e^{n+1} \notin A$, поскольку при $e^{n+1} \in A$ проблемы нет). Пусть $a_t: S^n \rightarrow \hat{X}^n$ — такая гомотопия, что $a_0 = f_n \circ \rho$ и $a_1 = f_\alpha$. Определим отображение $F: E^{n+1} \rightarrow X$ формулой

$$F(x) = \begin{cases} (g \circ \chi)(3x), & \text{если } 0 \leq |x| \leq 1/3, \\ (h_{n,3|x|-1} \circ \rho)\left(\frac{x}{|x|}\right), & \text{если } 1/3 \leq |x| \leq 2/3, \\ (\varphi \circ a_{3|x|-2})\left(\frac{x}{|x|}\right), & \text{если } 2/3 \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

где $x \in E^{n+1}$. Так как $F|_{S^n} = \varphi \circ a_1 = \varphi \circ f_\alpha$, то существует такое β , что $F \sim g_{\alpha\beta} \text{ rel } S^n$. Пусть $e_{\alpha\beta}$ — соответствующая клетка пространства $\hat{X}$ и $\chi_{\alpha\beta}: E^{n+1} \rightarrow \hat{X}$ — характеристическое для клетки $e_{\alpha\beta}$ отображение. Так как $a_0(x) = (f_n \circ \rho)(x)$

для любой точки $x \in S^n, \mathbb{R}$ то формула

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \chi_{\alpha\beta}(2x), & \text{если } 0 \leq |x| \leq 1/2, \\ a_{2-2|x|} \left(\frac{x}{|x|} \right), & \text{если } 1/2 \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

где $x \in \bar{e}^{n+1}$ и $x \in E^{n+1}$ — такая точка, что $\chi(x) = x$, корректно определяет отображение f_{n+1} на замыкании $\bar{e}^{n+1}$ клетки e^{n+1} . Тем самым — в силу произвольности клетки e^{n+1} — отображение f_{n+1} построено на всем остове K^{n+1} , и ясно, что $f_{n+1}|_{K^n} = f_n$.

Осталось построить гомотопию $h_{n+1, t}$. Условия, которым должна удовлетворять эта гомотопия, означают, что, рассматриваемая как отображение $K \times I \rightarrow X$, гомотопия $h_{n+1, t}$ на замыкании произвольной клетки вида $e^{n+1} \times (0, 1)$, $e^{n+1} \in K$, индуцируется отображением $E^{n+1} \times I \rightarrow X$, являющимся распространением отображения $H: (E^{n+1} \times I)^* \rightarrow X$, определенного на границе $(E^{n+1} \times I)^* = (E^{n+1} \times 0) \cup (S^n \times I) \cup (E^{n+1} \times 1)$ произведения $E^{n+1} \times I$ формулой

$$H(x, t) = \begin{cases} (g \circ \chi)(x), & \text{если } t = 0, \\ (h_t \circ \rho)(x), & \text{если } x \in S^n, \\ (\varphi \circ a_{2-2|x|}) \left(\frac{x}{|x|} \right), & \text{если } t = 1 \text{ и } 1/2 \leq |x| \leq 1, \\ (\varphi \circ \chi_{\alpha\beta})(2x), & \text{если } t = 1 \text{ и } 0 \leq |x| \leq 1/2. \end{cases}$$

Поэтому достаточно доказать, что отображение H может быть распространено на произведение $E^{n+1} \times I$.

С этой целью мы введем в рассмотрение отображение $\omega: (E^{n+1} \times I)^* \rightarrow (E^{n+1} \times I)^*$, определенное формулой

$$\omega(x, t) = \begin{cases} (3x, 0), & \text{если } t = 0 \text{ и } 0 \leq |x| \leq 1/3, \\ \left(\frac{x}{|x|}, 3|x| - 1 \right), & \text{если } t = 0 \text{ и } 1/3 \leq |x| \leq 2/3, \\ \left(\frac{(4-3|x|)x}{2|x|}, 1 \right), & \text{если } t = 0 \text{ и } 2/3 \leq |x| \leq 1, \\ \left(\frac{x}{2}, 1 \right), & \text{если } x \in S^n \text{ или } t = 1. \end{cases}$$

Это отображение очевидным образом гомотопно тождественному отображению, и потому отображение H распространимо тогда и только тогда, когда распространимо отображение $H \circ \omega$. Но, сравнив определения, мы

немедленно получим, что

$$(H \circ \omega)(x, t) = \begin{cases} F(x), & \text{если } t = 0, \\ g_{\alpha\beta}(x), & \text{если } x \in S^n \text{ или } t = 1 \end{cases}$$

(напомним, что по построению $g_{\alpha\beta} = \varphi \circ \chi_{\alpha\beta}$), и, значит, поскольку $F \sim g_{\alpha\beta} \text{ rel } S^n$, отображение $H \circ \omega$ может быть распространено на $E^{n+1} \times I$.

Тем самым лемма 1 полностью доказана. $\square$

Построенный клеточный эквивалент $\hat{X}$ отличается тем, что для связного пространства X он одновершинен. При X клеточном мы получаем тем самым следующее утверждение:

Следствие. Любое связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно одновершинному клеточному пространству.

Теорема 1 без труда переносится в категорию пар:

Теорема 2. Для любой топологической пары (X, A) существует такая клеточная пара $(\hat{X}, \hat{A})$ и такое непрерывное отображение

$$\varphi: (\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow (X, A),$$

что оба отображения

$$\varphi: \hat{X} \rightarrow X \quad \text{и} \quad \varphi|_{\hat{A}}: \hat{A} \rightarrow A$$

являются слабыми гомотопическими эквивалентностями.

При этом, если пара (X, A) является парой Борсука, то индуцированное отображением φ отображение кослов

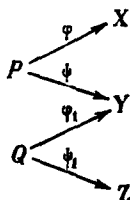
$$\hat{X}/\hat{A} \rightarrow X/A$$

также будет слабой гомотопической эквивалентностью. $\square$

Доказательство этой теоремы фактически повторяет (с соответствующими самоочевидными уточнениями) доказательство теоремы 1, и поэтому мы оставим его читателю в качестве очень полезного упражнения.

Замечание 1. Отношение «быть связанным слабой гомотопической эквивалентностью» рефлексивно и транзитивно, но, вообще говоря, не симметрично. Будем называть пространства X и Y слабо гомотопически эквивалентными, если существуют две слабые гомотопические эквивалентности $\varphi: P \rightarrow X$ и $\psi: P \rightarrow Y$ с одним и тем же пространством P (которое в силу теоремы 1 можно, не теряя общности, считать клеточным). Это отношение оче-

видным образом рефлексивно и симметрично. Оказывается, что оно также и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности. Действительно, если имеет место диаграмма



слабых гомотопических эквивалентностей, где P и Q — клеточные пространства, то ввиду того, что пространство P клеточно, а отображение φ_1 является слабой гомотопической эквивалентностью, существует отображение $f: P \rightarrow Q$, для которого $\varphi_1 \circ f \sim \psi$ и которое поэтому является слабой гомотопической эквивалентностью. Но тогда отображение $\psi_1 \circ f: P \rightarrow Z$ также будет слабой гомотопической эквивалентностью и, значит, пространства X и Z будут слабо гомотопически эквивалентны.

Перейдем теперь в категорию TOP^* . Напомним, что, рассматривая пунктированное клеточное пространство, мы всегда предполагаем, что отмеченная точка выбрана среди его вершин.

Определение 3. Пунктированное отображение $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$ пунктированных пространств называется *слабой пунктированной гомотопической эквивалентностью*, если для любого пунктированного клеточного пространства K отображение

$$\varphi_K^*: [K, \hat{X}]^* \rightarrow [K, X]^*, \quad [f]^* \mapsto [\varphi \circ f]^*, \quad f: K \rightarrow X,$$

биективно. Пунктированное клеточное пространство $\hat{X}$ называется *пунктированным клеточным эквивалентом* пунктированного пространства X , если существует пунктированная слабая гомотопическая эквивалентность $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$.

Так же, как для непунктированных пространств, немедленно доказывается, что если пунктированный клеточный эквивалент существует, то с точностью до пунктированной гомотопической эквивалентности он единствен.

Что же касается существования пунктированного клеточного эквивалента, то здесь имеет место следующее,

возможно несколько неожиданное, предложение, сводящее этот вопрос к теореме 1.

Предложение 1. *Пунктированное клеточное пространство $(\hat{X}, \hat{x}_0)$ тогда и только тогда является пунктированным клеточным эквивалентом пунктированного топологического пространства (X, x_0) , когда непунктированное клеточное пространство $\hat{X}$ является клеточным эквивалентом непунктированного пространства X .*

Доказательство. Если отображение $\varphi: (\hat{X}, \hat{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ является слабой пунктированной гомотопической эквивалентностью, то оно, в частности, индуцирует изоморфизм $\varphi_*: \pi_1 \hat{X} \rightarrow \pi_1 X$ фундаментальных групп. Поэтому для любого пунктированного клеточного пространства K биективное отображение $\varphi_K^*: [K, \hat{X}]^* \rightarrow [K, X]^*$ будет индуцировать биективное отображение множества $[K, \hat{X}]^* / \pi_1 \hat{X} = [K, \hat{X}]$ на множество $[K, X]^* / \pi_1 X = [K, X]$. Поскольку последнее отображение является, очевидно, не чем иным, как отображением φ_K , этим доказано, что отображение φ представляет собой слабую гомотопическую эквивалентность и, следовательно, что пространство $\hat{X}$ является клеточным эквивалентом пространства X .

Обратно, пусть пространство $\hat{X}$ является клеточным эквивалентом пространства X , и пусть $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$ — соответствующая слабая гомотопическая эквивалентность. Из определения 1 (примененного к случаю $K = \text{pt}$) непосредственно следует, что в клеточном пространстве X существует такая вершина $\hat{x}_0$, что точка $\varphi(\hat{x}_0)$ лежит в той же компоненте пространства X , что и точка x_0 . Поскольку пара $(\hat{X}, \hat{x}_0)$ является парой Борсука, отсюда вытекает, что без ограничения общности мы можем считать, заменив, если нужно, отображение φ гомотопным отображением, что $\varphi(\hat{x}_0) = x_0$, т. е. что $\varphi: (\hat{X}, \hat{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$.

[В предположении, что эквивалент $\hat{X}$ построен описанным при доказательстве теоремы 1 способом (это предположение общности, конечно, не ограничивает), можно обойтись без ссылки на определение 1: достаточно за вершину $\hat{x}_0$ принять компоненту пространства X , содержащую точку x_0 , и при построении отображения φ брать за точку $\varphi_0(\hat{x}_0)$ точку x_0 .]

Теперь доказательство предложения 1 немедленно завершается уже известными нам двумя ссылками на лем-

му 1 (только применять эту лемму надо не к подпространствам $A = \emptyset$ и $A = (K \times 0) \cup (K \times 1)$, а соответственно к подпространствам $A = \{\hat{x}_0\}$ и $A = (K \times 0) \cup (x_0 \times I) \cup (K \times 1)$). $\square$

Замечание 2. Пусть X и Y — пунктированные клеточные пространства и $f: X \rightarrow Y$ — пунктированное отображение, являющееся гомотопической эквивалентностью. Тогда f будет слабой гомотопической эквивалентностью и, значит, по только что доказанному, слабой пунктированной гомотопической эквивалентностью. Следовательно, поскольку оба пространства X и Y клеточны, отображение f будет пунктированной гомотопической эквивалентностью. Тем самым мы заново доказали предложение 1 лекции I.4 (правда, только для клеточных пространств).

По построению (или — если хотите — по определению) компоненты клеточного эквивалента $\hat{X}$ являются клеточными эквивалентами компонент пространства X . При этом оказывается, что для пунктированного пространства (X, x_0) компоненту его клеточного эквивалента $\hat{X}$, отвечающую компоненте пространства X , содержащей точку x_0 , можно построить экономнее, чем это имплицитно предполагается предложением 1. Именно, для пунктированного и связного пространства (X, x_0) в изложенном выше построении клеточного эквивалента $\hat{X}$ мы можем считать, что множество $\mathcal{M}^n$ состоит лишь из пунктированных отображений $f: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, обладающих тем свойством, что $\varphi_n \circ f \sim \text{const}$. Соответственно этому от отображений f_α и $g_{\alpha\beta}$ мы потребуем, чтобы каждое отображение f из $\mathcal{M}^n$ (каждое отображение g из $\mathcal{M}_\alpha^n$) было пунктированно гомотопно одному и — для экономности — только одному из отображений f_α (отображений $g_{\alpha\beta}$). Кроме того, мы, во-первых, потребуем, чтобы то из отображений f_α , которое гомотопно нулю (обозначим это отображение через f_0), было постоянным отображением и, значит, чтобы соответствующее множество $\mathcal{M}_0^n$ состояло из отображений g вида $(E^{n+1}, S^n) \rightarrow (X, x_0)$, и, во-вторых, чтобы среди отображений $g \circ \beta \in \mathcal{M}_0^n$ находилось постоянное отображение $\text{const}: E^{n+1} \rightarrow X$ (которому мы присвоим обозначение g_{00}). При этом клетки $e_{\alpha\beta}$ мы будем приклеивать только при $\alpha\beta \neq 00$. Просмотрев доказательство леммы 1, мы немедленно убедимся, что (для отображений катего-

рии TOP') оно полностью сохранится, если при $\alpha\beta = 00$ под $\chi_{\alpha\beta}$ понимать постоянное отображение. Следовательно, получающееся пространство будет пунктированным клеточным эквивалентом пространства (X, x_0) .

Достигающаяся этим способом экономия в числе клеток пространства $\hat{X}$ совсем не так мала, как это может показаться с первого взгляда. Например, при $X = \mathbb{R}^1$ пространство $\hat{X}$ получается также одноточечным, тогда как ранее оно было бесконечномерным клеточным пространством, имеющим в каждой положительной размерности бесконечно много клеток (но, конечно, гомотопически эквивалентным пространству $\mathbb{R}^1$).

Как правило, мы всегда будем пользоваться этим «экономным» клеточным эквивалентом даже когда пространство X заранее не пунктировано.

Если пространство X n -связно ($n \geq 0$), то его экономный клеточный эквивалент $\hat{X}$ не будет, очевидно, иметь клеток положительной размерности меньшей n , т.е. будет клеточно n -связным клеточным пространством. Поскольку в случае, когда пространство $\hat{X}$ клеточно, оно гомотопически эквивалентно пространству $\hat{X}$, это доказывает следующее предложение, обобщающее следствие теоремы 1:

Предложение 2. Любое n -связное клеточное пространство X гомотопически эквивалентно клеточно n -связному клеточному пространству $\hat{X}$.

Обратим внимание на то, что клеточная структура пространства $\hat{X}$ определяется лишь гомотопическими свойствами пространства X и никак не связана с клеточной структурой последнего. Это не всегда бывает удобно (например, без дополнительных рассуждений мы не можем, скажем, утверждать, что для счетного клеточного пространства X пространство $\hat{X}$ также счетно), и потому стоит поискать конструкцию пространства $\hat{X}$, лишенную этого недостатка.

Пусть X — произвольное топологическое пространство и $\rho: C^n_{(-)} \rightarrow X$ — непрерывное отображение южной полушеры $C^n_{(-)}$ сферы S^n в пространство X . Тогда результат $X' = E^{n+1} \cup_{\rho} X$ приклеивания шара E^{n+1} к пространству X посредством отображения ρ будет, очевидно, клеточным расширением пространства X , получающимся приклеиванием двух клеток e^n и e^{n+1} размерностей n и $n+1$. Ха-

рактическим отображением для клетки e^{n+1} будет отображение факторизации $\chi: E^{n+1} \rightarrow X'$, а для клетки e^n — его ограничение на северной полусфере $C_{(-)}^n$ сферы S^n . См. рис. 4.

Определение 4. Операция перехода к пространству X' (а также само пространство X') называется *элементарным наращиванием* пространства X . Обратная операция перехода от X' к X (а также само X) называется *элементарным вдавливанием* пространства X' .

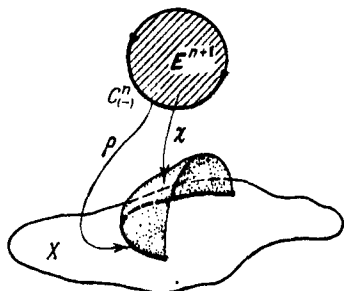


Рис. 4.

Поскольку полусфера $C_{(-)}^n$ является строгим деформационным ретрактом шара E^{n+1} , пространство X является строгим деформационным ретрактом пространства X' . Это утверждение, очевидно, останется в силе и в случае, когда X получается из X' произвольной последовательностью элементарных вдавливания. Соответствующую деформационную ретракцию $X' \rightarrow X$ мы будем называть *ретракцией вдавливания*, а гомотопически обратное ей вложение $X \rightarrow X'$ — *отображением наращивания*.

Наращивания и вдавливания наиболее интересны, конечно, в категории клеточных пространств. Если пространство X клеточно, то элементарное наращивание X' будет клеточным пространством при условии, что $\rho(C_{(-)}^n) \subset X^n$. В дальнейшем, говоря о наращиваниях клеточных пространств, мы всегда будем предполагать это условие выполненным.

Вдавливание клеточного пространства, конечно, всегда будет клеточным пространством.

Замечание 2. Наращивания и вдавливания лежат в основе так называемой теории простого гомотопического типа конечных клеточных пространств — одного из наиболее красивых и геометрически ориентированных разделов алгебраической топологии. Ясно, что любая композиция отображений наращивания и ретракций вдавливания является гомотопической эквивалентностью. Основная задача теории простого гомотопического типа состоит в характеристизации такого рода гомотопических эквивалентностей. Данное Уайтхедом решение этой задачи, основывающееся на глубоком изучении ал-

гебраического строения группового кольца фундаментальной группы, явилось одним из основных источников так называемой алгебраической K -теории. К сожалению, у нас нет времени на все эти интереснейшие вопросы. Превосходное их изложение читатель может найти в статье Милнора (Милнор Дж. Кручение Уайтхеда. — Сб. пер. «Математика», 1967, 11, № 1, с. 3—42) или в книге Коэна (Cohen M. M. Course in simple homotopy theory. — grad. Texts Math., 10. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1973).

Предложение 3. Для любого n -связного ($n \geq 0$) относительно клеточного пространства (X, A) существует такое клеточно n -связное относительно клеточное пространство $(X', A') \supset (X, A)$, что X' вдавливается на X , а A' вдавливается на A .

Доказательство. Очевидная индукция показывает, что это предложение достаточно доказать (при $n \geq 1$) лишь для случая, когда пространство (X, A) клеточно $(n-1)$ -связно.

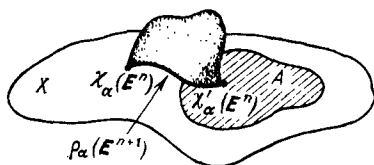


Рис. 5.

Пусть e_α^n — произвольная n -мерная клетка n -связного и клеточно $(n-1)$ -связного пространства (X, A) , и пусть

$\chi_\alpha: E^n \rightarrow X$ — характеристическое для этой клетки отображение. Поскольку $\pi_n(X, A) = 0$, это отображение гомотопно относительно S^n некоторому отображению вида $i \circ \chi'_\alpha$, где i — вложение $A \rightarrow X$, а $\chi'_\alpha: E^n \rightarrow A$ (причем без ограничения общности мы можем считать, что $\chi'_\alpha(E^n) \subset A^n$). Соответствующую гомотопию мы можем представлять себе как отображение $\rho_\alpha: E^{n+1} \rightarrow X$ шара E^{n+1} в пространство X , совпадающее на северной полушере $C_{(+)}^n \approx E^n$ его граничной сферы S^n с отображением χ_α , а на южной полушере $C_{(-)}^n$ — с отображением $i \circ \chi'_\alpha$. Поэтому, отождествив шар E^{n+1} с южной полушферой $C_{(-)}^{n+1}$ граничной сферы S^{n+1} шара E^{n+2} , мы можем произвести соответствующее наращивание пространства X (см. рис. 5). Сделав это для всех клеток $e_\alpha^n \in X^n \setminus A$, мы получим наращивание X' пространства X , содержащее для любого α две новые клетки e_α^{n+1} и e_α^{n+2} размерностей $n+1$ и $n+2$ соответственно. По определению X' вдавливается на X .

Рассмотрим теперь наращивание пространства A , соответствующее отображению $\chi'_\alpha: C_{(-)}^n \rightarrow A$ южной полушферы

ры C_{α}^n , сферы S^n в пространство A . Это наращивание очевидным образом отождествляется с подпространством $A \cup e_{\alpha}^n \cup e_{\alpha}^{n+1} = A \cup \bar{e}_{\alpha}^{n+1}$ пространства X' . Поэтому, сделав эти наращивания для всех α , мы получим подпространство $A' = A \cup \bigcup \bar{e}_{\alpha}^{n+1}$ пространства X' , вдавливающееся на A .

Для завершения доказательства остается заметить, что поскольку A' содержит все n -мерные клетки из $X \setminus A$, пара (X', A') клеточно n -связна. $\square$

Аналогичное утверждение имеет место и для абсолютных клеточных пространств:

Предложение 4. Любое n -связное ($n \geq 0$) клеточное пространство X гомотопически эквивалентно клеточно n -связному клеточному пространству $X^{\#}$, которое является кослоем некоторого вложения $A' \rightarrow X'$, где A' стягиваемо, а X' вдавливается на X .

Доказательство. Произвольно выбрав в X вершину x_0 и применив предложение 3 к относительно клеточному пространству (X, x_0) , мы получим клеточно n -связную клеточную пару (X', A') , для которой пространство X' вдавливается на X (и потому гомотопически эквивалентно X), а пространство A' вдавливается на $\{x_0\}$ и (поэтому стягиваемо). При этом, согласно лемме 6 лекции 1.4 (применимой к паре (X', A') ввиду предложения 1 лекции 2), пространство X' (а значит, и пространство X) гомотопически эквивалентно клеточному — и, очевидно, клеточно n -связному — пространству $X^{\#} = X'/A'$. $\square$

В отличие от клеточной структуры пространства $\hat{X}$ из предложения 2, клеточная структура пространства $X^{\#}$ тесно связана с клеточной структурой пространства X и потому легко контролируется. Например, из конструкции пространства $X^{\#}$ непосредственно следует, что для конечного (или счетного) пространства X пространство $X^{\#}$ также конечно (или соответственно счетно).

Вернемся теперь к общей теории слабых гомотопических эквивалентностей.

Оказывается, что слабые гомотопические эквивалентности (и, значит, для случая клеточных пространств, гомотопические эквивалентности) допускают важную — и несколько неожиданную — характеристику в терминах индуцированных ими гомоморфизмов гомотопических групп.

Определение 5. Отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ категории TOP^* называется ∞ -эквивалентностью, если для каждого $n \geq 0$ индуцированный им гомоморфизм гомотопических групп

$$(1) \quad f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

является изоморфизмом.

Аналогично, отображение $f: X \rightarrow Y$ категории TOP называется ∞ -эквивалентностью, если при любом выборе точки $x_0 \in X$ гомоморфизм (1) (где $y_0 = f(x_0)$) является для каждого $n \geq 0$ изоморфизмом.

Ясно, что в категории TOP^* отображение f тогда и только тогда будет ∞ -эквивалентностью, когда ∞ -эквивалентностью является его ограничение на компоненте пространства X , содержащей отмеченную точку.

С другой стороны, легко видеть, что если пространства X и Y связны, то отображение $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ категории TOP^* тогда и только тогда является ∞ -эквивалентностью, когда оно является ∞ -эквивалентностью как отображение категории TOP .

Ясно, что любая слабая гомотопическая эквивалентность является ∞ -эквивалентностью. (В силу предложения 2 это утверждение достаточно доказать лишь для пунктированных эквивалентностей, когда оно очевидно: положите $K = S^n$ в определении 3.) Замечательно, что это необходимое условие оказывается также и достаточным:

Теорема 3. Отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является слабой гомотопической эквивалентностью, когда оно представляет собой ∞ -эквивалентность.

В этой теореме отображение f предполагается непунктированным. Для пунктированного отображения f нужно дополнительно требовать, чтобы пространства X и Y были связны.

Прежде чем доказывать теорему 3 в полной общности, мы рассмотрим предварительно ее важнейший частный случай.

Напомним (см. лекцию I.8), что равенство $\pi_n(X, A) = 0$ для пары (X, A) при $n = 0$ означает, что каждая компонента пространства X пересекается с A , а при $n \geq 1$, — что любое отображение $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ гомотопно относительно S^{n-1} стянутому на A отображению (отображающему E^n в A).

Предложение 5. Пусть (X, A) — такая клеточная пара, что $\pi_n(X, A) = 0$ для любого $n \geq 0$. Тогда $X \simeq A$

Доказательство. Деформационную ретракцию $r: X \rightarrow A$ и соответствующую ретрагирующую деформацию $f_t: \text{id} \sim i \circ r$, где $i: A \rightarrow X$ — вложение, мы, как всегда, будем строить индукцией по остовам и клеткам. Другими словами, для любого $n \geq 0$ мы построим такую ретракцию

$$r_n: X_A^n \rightarrow A, \quad X_A^n = X^n \cup A,$$

и такую гомотопию

$$f_{n,t}: X_A^n \rightarrow X_A^n,$$

что

$$f_{n,0} = \text{id}, \quad f_{n,1} = i \circ r_n \quad \text{и} \quad r_n = r_{n+1}|_{X_A^n}, \quad f_{n,t} = f_{n+1,t}|_{X_A^n}.$$

Так как $\pi_0(X, A) = 0$, то для любой вершины $e^0 \in X^0 \setminus A$ в X существует путь $t \mapsto u(t; e^0)$, соединяющий эту вершину с некоторой вершиной из A . Положив для любой точки $x \in X_A^0$

$$f_{0,1}(x) = \begin{cases} u(t; e^0), & \text{если } x = e^0, \\ x, & \text{если } x \in A, \end{cases}$$

и $r_0(x) = f_{0,1}(x)$, мы корректно определим гомотопию $f_{0,t}$ и отображение r_0 .

Пусть для некоторого $n \geq 0$ отображение r_n и гомотопия $f_{n,t}$ уже построены. Рассмотрим произвольную $(n+1)$ -мерную клетку $e^{n+1} \in X \setminus A$ и соответствующее характеристическое отображение $\chi: E^{n+1} \rightarrow X$. Так как $\chi(S^n) \subset X^n$, то на S^n определена гомотопия $f_{n,t} \circ \rho: S^n \rightarrow A$, где $\rho = \chi|_{S^n}$ — отображение, приклеивающее клетку e^{n+1} . Так как пара (E^{n+1}, S^n) является парой Борсука и $f_{n,0} = \text{id}$, то эта гомотопия распространяется до некоторой гомотопии $F: E^{n+1} \times I \rightarrow X$, связывающей отображение χ с таким отображением $F_1: E^{n+1} \rightarrow X$, что $F_1: (E^{n+1}, S^n) \rightarrow (X, A)$. Так как по условию $\pi_{n+1}(X, A) = 0$, то существует неподвижная на S^n гомотопия $G: E^{n+1} \times I \rightarrow X$, связывающая отображение F_1 с таким отображением $G_1: E^{n+1} \rightarrow X$, что $G_1(E^{n+1}) \subset A$. Для любой точки $x \in e^{n+1}$ и любого $t \in I$ мы положим

$$f_{n+1,t}(x) = \begin{cases} F\left(x, \frac{2t}{1+|x|}\right), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1+|x|}{2}, \\ G\left(x, \frac{2t-|x|-1}{1-|x|}\right), & \text{если } \frac{1+|x|}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и $r_{n+1}(x) = G(x, 1)$, где x — такая точка из E^{n+1} , что

$\chi(x) = x$. Легко видеть, что эти формулы корректно определяют на e^{n+1} гомотопию $f_{n+1, t}$ и отображение r_{n+1} , обладающие всеми требуемыми свойствами. Сделав это для всех клеток $e^{n+1} \in X \setminus A$ (и считая, что на A отображение $f_{n+1, t}$ тождественно, а $r_{n+1} = i$), мы определим гомотопию $f_{n+1, t}$ и ретракцию r_{n+1} на всем остове X_A^{n+1} . $\square$

Заметим, что в силу точности гомотопической последовательности пары (X, A) условие $\pi_n(X, A) = 0$, $n \geq 0$, равносильно требованию, чтобы отображение вложения $i: A \rightarrow X$ было ∞ -эквивалентностью.

Теорема 4. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ клеточного пространства X в клеточное пространство Y тогда и только тогда является гомотопической эквивалентностью, когда оно представляет собой ∞ -эквивалентность.*

Доказательство. Согласно предложению 1 лекции 2 мы без ограничения общности можем считать отображение f клеточным. Тогда его цилиндр $\text{Cyl } f$ будет клеточным пространством, а пара $(\text{Cyl } f, X)$ — клеточной парой. С другой стороны, как было доказано в лекции 1.2, отображение f гомотопически эквивалентно вложению $i: X \rightarrow \text{Cyl } f$, которое, следовательно, будет гомотопической эквивалентностью или ∞ -эквивалентностью одновременно с отображением f . Для завершения доказательства остается применить к паре $(\text{Cyl } f, X)$ предложение 5. $\square$

Теорема 4 (так же как и общая теорема 3) известна как теорема Уайтхеда, который впервые ее доказал.

Теорема 3 вытекает из теоремы 4 легким формальным рассуждением.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ — клеточные эквиваленты пространств X и Y , и пусть $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$ и $\psi: \hat{Y} \rightarrow Y$ — соответствующие слабые гомотопические эквивалентности. Так как ψ является слабой гомотопической эквивалентностью, а пространство $\hat{X}$ клеточно, то существует такое отображение $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, что $\psi \circ \hat{f} \sim f \circ \varphi$, т. е. такое, что диаграмма

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{Y} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

гомотопически коммутативна. Так как все отображения этой диаграммы — кроме, быть может, отображения $\hat{f}$ — являются ∞ -эквивалентностями, то отображение $\hat{f}$ также будет ∞ -эквивалентностью и, значит, в силу теоремы 4, гомотопической эквивалентностью, а потому и слабой гомотопической эквивалентностью. Таким образом, в диаграмме (2) все отображения — кроме, быть может, отображения $\hat{f}$ — являются слабыми гомотопическими эквивалентностями. Поэтому слабой гомотопической эквивалентностью будет и отображение f . $\square$

Теорема 3 допускает полезное обобщение.

Определение 6. Пусть $0 \leq N \leq \infty$. Отображение $f: X \rightarrow Y$ (категории TOP или TOP^*) называется N -эквивалентностью, если гомоморфизм (1) (при любом выборе точки $x_0 \in X$ для отображения категории TOP) является изоморфизмом при $n < N$ и эпиморфизмом при $n = N$. Это отображение называется *слабой гомотопической эквивалентностью до размерности N* , если для любого клеточного пространства K отображение φ_K (или φ_K) биективно, когда $\dim K < N$, и надъективно, когда $\dim K = N$.

Теорема 5. Отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является слабой гомотопической эквивалентностью до размерности N , когда оно представляет собой N -эквивалентность.

В частности, для любых клеточных пространств X и Y размерности $< N$ каждая N -эквивалентность $X \rightarrow Y$ является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство этой теоремы повторяет с соответствующими оговорками доказательство теоремы 3, и мы оставим его читателю. $\square$

Так же, как теоремы 3 и 4, теорема 5 относится к категории TOP . Для категории TOP^* пространства X и Y нужно предполагать связными.

ДОПОЛНЕНИЕ

Представимые функторы и классифицирующие пары.— Непрерывность представимых функторов.— Обратные пределы диаграмм.— Амальгамы в гомотопической категории.— Полуточные функторы.— Теорема Брауна.— Универсальные пары.— Построение универсальных пар.— Лемма о надъективности.— Свойства полуточных функторов.— Завершение доказательства теоремы Брауна.— Фinitно полуточные функторы.— Каноническое распространение функторов с категории конечных пространств.— Фinitно гомотопическая категория и представимость функтора $\hat{F}$.— Лемма Йонеды и ее варианты для функтора $\hat{F}$.— Теорема Адамса.— Лемма об обратных пределах.— Последовательность Майера—Внеториса.— Завершение доказательства теоремы Адамса.— Полуточные функторы на категории CW.— Последовательность Пуппе непуиктированной пары.— Полуточные функторы с тривиальной группой коэффициентов.— Доказательство теоремы Хеллера.— Другие категории.

Напомним (см. лекцию I.3), что для произвольной категории $\mathbf{A}$ любой ее объект K определяет контравариантный функтор $K^*: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS}$, принимающий значения в категории множеств $\mathbf{ENS}$ (символом $\mathbf{A}^{\text{op}}$ мы обозначаем *двойственную категорию*, получающуюся из категории $\mathbf{A}$ обращением всех стрелок). Объекту X категории $\mathbf{A}$ функтор K^* сопоставляет множество $\mathbf{A}(X, K)$ всех морфизмов $X \rightarrow K$ из $\mathbf{A}$, а морфизму $f: X \rightarrow Y$ — отображение $\mathbf{A}(Y, K) \rightarrow \mathbf{A}(X, K)$, состоящее в компонировании морфизмов $g \in \mathbf{A}(Y, K)$ с морфизмом f :

$$K^*(X) = \mathbf{A}(X, K), \quad K^*(f): g \mapsto g \circ f.$$

Несколько расширяя (и углубляя) терминологию лекции I.3, мы введем следующее определение:

Определение 1. Функтор $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS}$ называется *представимым*, если он изоморфен (в категории функторов) функтору вида K^* , т. е., другими словами, если для любого X существует естественное биективное отображение

$$\omega^X: K^*(X) \rightarrow F(X).$$

Для такого функтора в множестве $F(K)$ определен элемент $u = \omega^K(\text{id}_K)$, по которому естественное отображение ω^X однозначно восстанавливается по формуле

$$\omega^X(f) = f * u, \quad f \in K^*(X) = \mathbf{A}(X, K)$$

(здесь — как и всюду ниже — мы для упрощения формул обозначаем отображение $F(f)$ символом f^*).

Говорят, что пара (u, K) (или объект K) *классифицирует* функтор F . Соответствующее биективное отображение ω^X мы будем, как правило, обозначать символом $u_\#^X$.

Вообще, для любого функтора $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS}$ и любой пары (u, K) , где K —объект категории $\mathbf{A}$, а $u \in F(K)$, формула

$$u_\#^X(f) = f^*u,$$

в которой X —произвольный объект категории $\mathbf{A}$, а f —произвольный морфизм $X \rightarrow K$ категории $\mathbf{A}$ (элемент множества $K^*(X) = \mathbf{A}(X, K)$), определяет отображения

$$u_\#^X: K^*(X) \rightarrow F(X),$$

составляющие морфизм функтора K^* в функтор F .

Пара (u, K) тогда и только тогда классифицирует функтор F , когда этот морфизм является изоморфизмом.

Заметим, что *с точностью до изоморфизма классифицирующая пара (u, K) определена единственным образом*, т. е. для любой другой классифицирующей пары (u', K') существует такой изоморфизм $h: K' \rightarrow K$ категории $\mathbf{A}$, что $h^*u = u'$. Действительно, по условию существуют такие морфизмы $h: K' \rightarrow K$ и $h': K \rightarrow K'$, что $u_\#^{K'}(h) = u'$ и $u_\#^K(h') = u$, т. е. такие, что $h^*u = u'$ и $h'^*u' = u$. Пусть $g = h \circ h': K \rightarrow K$. Тогда $g^*u = u$, т. е. $u_\#^K(g) = u$. Но ясно, что $u_\#^K(\text{id}) = u$. Поэтому в силу биективности отображения $u_\#^K$ должно иметь место равенство $g = \text{id}$, т. е. равенство $h \circ h' = \text{id}$. Аналогично доказывается, что $h' \circ h = \text{id}$. Следовательно, морфизм h категории $\mathbf{A}$ (обладающий по построению тем свойством, что $h^*u = u'$) является изоморфизмом. $\square$

Пусть в категории $\mathbf{A}$ существует копроизведение $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ произвольного семейства объектов X_{α} , и пусть $i_{\alpha} = \text{in}_{\alpha}: X_{\alpha} \rightarrow X$ —канонические инъекции. Тогда для любого функтора $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS}$ формула

$$x \mapsto \{i_{\alpha}^*x\}, \quad x \in F(X),$$

будет определять некоторое отображение множеств

$$(1) \quad F(X) \rightarrow \prod_{\alpha} F(X_{\alpha}).$$

При $F = K^*$ это отображение задается формулой

$$f \mapsto \{f \circ i_{\alpha}\},$$

где f — произвольный морфизм $X \rightarrow K$. Но, так как $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$, то по определению копроизведения (см. лекцию I.3) для любого семейства морфизмов $f_{\alpha}: X_{\alpha} \rightarrow K$ существует единственный морфизм $f: X \rightarrow K$, обладающий тем свойством, что $f \circ i_{\alpha} = f_{\alpha}$ для всех α . Следовательно, при $F = K^*$ отображение (1) биективно. Значит, *отображение (1) биективно для любого представимого функтора $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$.*

Пусть, далее, в категории $\mathbf{A}$ существует амальгама X произвольной диаграммы вида $A \xleftarrow{i_A} C \xrightarrow{i_B} B$ (см. лекцию I.1), и пусть Φ — подмножество прямого произведения $F(A) \times F(B)$, состоящее из таких пар (a, b) , $a \in F(A)$, $b \in F(B)$, что $i_A^*(a) = i_B^*(b)$ (коамальгама диаграммы $F(A) \xrightarrow{i_A^*} F(C) \xleftarrow{i_B^*} F(B)$). Тогда формула

$$x \mapsto (j_A^* x, j_B^* x), \quad x \in F(X),$$

где $j_A: A \rightarrow X$, $j_B: B \rightarrow X$ — морфизмы, составляющие инициальный конус над парой (i_A, i_B) с вершиной X , будет корректно определять некоторое отображение множеств (2)

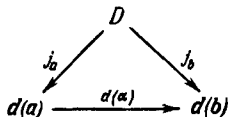
$$F(X) \rightarrow \Phi.$$

В случае, когда $F = K^*$, включение $(a, b) \in \Phi$ означает, что морфизмы $a: A \rightarrow K$ и $b: B \rightarrow K$ удовлетворяют соотношению $i_A \circ a = i_B \circ b$, т. е. составляют прямой конус над парой (i_A, i_B) . Значит, — по определению амальгамы — существует единственный морфизм $x: X \rightarrow K$, обладающий тем свойством, что $x \circ j_A = x \circ j_B$, т. е. переходящий при отображении (2) в элемент (a, b) . Таким образом, при $F = K^*$ отображение (2) биективно. Следовательно, *отображение (2) биективно для любого представимого функтора $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$.*

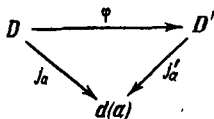
Функтор $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$, для которого отображения (1) и (2) биективны (для любого семейства $\{X_{\alpha}\}$ и любой диаграммы $A \leftarrow C \rightarrow B$), называется *непрерывным (слева)*. Таким образом, мы можем сказать, что *любой представимый функтор непрерывен*, т. е. что условие непрерывности необходимо для представимости функтора.

Целесообразно разъяснить это условие с более общих позиций. Для этого нам понадобится понятие обратного предела диаграммы, двойственное к уже известному нам понятию прямого предела (см. Дополнение к лекции I.6).

Пусть $d: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}$ — произвольная диаграмма над категорией $\mathbf{A}$. Обратным конусом над диаграммой d с вершиной D называется такое семейство морфизмов $j_a: D \rightarrow d(a)$, $a \in \mathbf{D}$, категории $\mathbf{A}$, что для любой стрелки $\alpha: a \rightarrow b$ из $\mathbf{D}$ диаграмма



коммутативна ($j_b = d(\alpha) \circ j_a$). Морфизмом конуса $\{j_a: D \rightarrow d(a)\}$ в конус $\{j'_a: D' \rightarrow d(a)\}$ называется такой морфизм $\varphi: D \rightarrow D'$ категории $\mathbf{A}$, что для любой вершины $a \in \mathbf{D}$ диаграмма



коммутативна. Все обратные конусы над диаграммой d и их морфизмы образуют, очевидно, категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом $\text{CON}(d)$.

В случае, когда схема $\mathbf{D}$ имеет вид $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$, диаграммами типа $\mathbf{D}$ являются пары морфизмов $i_A: A \rightarrow C$, $i_B: B \rightarrow C$ категории $\mathbf{A}$, и мы получаем обратные конусы над парами (i_A, i_B) в смысле лекции I.1.

В случае, когда схема $\mathbf{D}$ не имеет стрелок и, значит, диаграммами типа $\mathbf{D}$ являются семейства $\{X_a, a \in \mathbf{D}\}$ объектов категории $\mathbf{A}$, обратными конусами над $\{X_a, a \in \mathbf{D}\}$ являются семейства морфизмов $j_a: D \rightarrow X_a$, а их морфизмами — обычные морфизмы семейств.

Определение 2 (ср. определение 1 из Дополнения к лекции I.6). Обратным пределом $\varprojlim d$ диаграммы $d:$

$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}$ называется вершина D терминального объекта категории $\text{CON}(d)$, т. е. такого обратного конуса $\{j_a:$

$D \rightarrow d(a)\}$, что для любого конуса $\{j'_a: D' \rightarrow d(a)\} \in \text{CON}(d)$

существует единственный морфизм $\varphi: D' \rightarrow D$ из $\{j'_a\}$ в $\{j_a\}$.

Ясно, что обратный предел диаграммы (когда он существует) определен с точностью до канонического изоморфизма однозначно.

Обратным пределом диаграммы $A \rightarrow C \rightarrow B$ является ее коамальгама, а обратным пределом семейства $\{X_a\}$ — прямое произведение $\prod X_a$.

Категория A называется *замкнутой* (соответственно *козамкнутой*), если любая диаграмма над A обладает обратным (соответственно прямым) пределом (здесь, как и всегда, мы игнорируем известные логико-математические трудности, связанные с употреблением слова «любой»).

З а м е ч а н и е 1. Замкнутые (козамкнутые) категории называют также *полными* (соответственно *кополными*) категориями.

Можно показать (сделайте это!), что категория тогда и только тогда замкнута (козамкнута), когда в ней существует произведение (копроизведение) любого семейства объектов и коамальгама произвольной диаграммы $A \rightarrow C \leftarrow B$ (амальгама произвольной диаграммы $A \leftarrow C \rightarrow B$). Поэтому, в частности, к числу замкнутых категорий принадлежат категории

(3) $\text{ENS}, \text{ENS}^*, \text{GROUPS}, \text{TOP}, \text{TOP}^*$

(эти категории также и козамкнуты; см. Дополнение к лекции I.6). Впрочем, замкнутость категорий (3) легко усматривается и непосредственно. Именно, автоматическая проверка показывает, что обратным пределом произвольной диаграммы $d: D \rightarrow \text{ENS}$ над категорией ENS является подмножество D прямого произведения $\prod d(a)$, состоящее из таких элементов $\{x_a, x_a \in d(a)\}$, что $d(\alpha) x_a = x_b$ для любой стрелки $\alpha: a \rightarrow b$ схемы D . Для диаграммы d над категорией ENS^* это подмножество содержит точку $\{x_a^{(0)}\}$, где $x_a^{(0)}$ — отмеченные точки множеств $d(a)$. Отметив эту точку, мы получим обратный предел категории d в категории ENS^* . Аналогично, для диаграммы над категориями $\text{GROUPS}, \text{TOP}$ или TOP^* обратным пределом будет то же подмножество D , рассматриваемое соответственно как группа относительно покомпонентного умножения или как топологическое пространство относительно топологии, индуцированной топологией прямого произведения. $\square$

Конечно, каждая категория D является диаграммной схемой, и, значит, каждый функтор $F: D \rightarrow A$ — диаграммой над категорией A . Предел этой диаграммы называется *пределом функтора F* .

Пусть, в частности, A — произвольное *предупорядоченное множество* (множество с транзитивным отношением $\leq$;

в отличие от *частично упорядоченных множеств*, в пред упорядоченном множестве из соотношений $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$ еще не вытекает, что $\alpha = \beta$). Считая каждое соотношение $\alpha \leq \beta$ стрелкой $\beta \rightarrow \alpha$, мы превратим A в категорию. Функторы на этой категории, т. е. семейства объектов X_α , $\alpha \in A$, и морфизмов $\pi_\alpha^\beta: X_\beta \rightarrow X_\alpha$, определенных при $\alpha \leq \beta$ и удовлетворяющих при $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ соотношению $\pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma$, называются *обратными системами над A* . Поскольку обратные системы являются функторами, имеет смысл говорить об их пределах. Обратный предел обратной системы $\{X_\alpha; \pi_\alpha^\beta\}$ называется также *обратным пределом объектов X_α относительно морфизмов π_α^β* и обозначается символом $\varprojlim \{X_\alpha; \pi_\alpha^\beta\}$ или просто $\varprojlim X_\alpha$.

В частности, обратный предел определен для любой последовательности вида

$$X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \dots \leftarrow X_n \leftarrow \dots$$

(где X_n — объекты произвольной замкнутой категории; скажем, одной из категорий (3)). Он называется *обратным пределом объектов X_n* и обозначается символом $\varprojlim X_n$.

Для каждого функтора $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{B}$ и любой диаграммы $d: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}$ композиция $F \circ d$ будет диаграммой $\mathbf{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{B}$, где $\mathbf{D}^{\text{op}}$ — *двойственная схема*, получающаяся обращением всех стрелок, и для каждого прямого конуса $\{j_n: d(a) \rightarrow D\}$ над диаграммой d морфизмы $j_n^*: FD \rightarrow Fd(a)$ составляют обратный конус над диаграммой $F \circ d$. Поэтому (в случае, когда для диаграммы $F \circ d$ существует ее предел $\varprojlim (F \circ d)$) определен морфизм $FD \rightarrow \varprojlim (F \circ d)$. В частности, при $D = \varprojlim d$ получается морфизм

$$(4) \quad F(\varprojlim d) \rightarrow \varprojlim (F \circ d).$$

В теории категорий функтор $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{B}$ называется *непрерывным (слева)*, если для любой диаграммы d над категорией $\mathbf{A}$ морфизм (4) является изоморфизмом (категорию $\mathbf{A}$ мы для простоты считаем козамкнутой, а категорию $\mathbf{B}$ — замкнутой). Можно показать (сделайте это!) что для непрерывности функтора достаточно, чтобы морфизм (4) был изоморфизмом для диаграмм без стрелок и для диаграмм вида $A \leftarrow C \rightarrow B$. С другой стороны, в случае $\mathbf{B} = \mathbf{ENS}$ морфизм (4) для диаграммы без стрелок

является не чем иным, как рассмотренным выше отображением (1), а для диаграмм $A \leftarrow C \rightarrow B$ — отображением (2). Это оправдывает нашу терминологию.

Как было объяснено в лекции I.3, нам интересны лишь гомотопически инвариантные функторы, т. е. функторы, определенные на категории $[TOP]$ (или на некоторой ее подкатегории, скажем, $[CW]$). Однако здесь мы сталкиваемся с той трудностью, что категория $[TOP]$ (так же как, кстати сказать, и категория $[TOP^*]$) не козамкнута.

Разберем этот вопрос подробнее.

Конечно, копроизведения в категориях TOP и TOP^* (дизъюнктное объединение и букет) останутся копроизведениями и в категориях $[TOP]$ и $[TOP^*]$. Поэтому проблема состоит только в отношении амальгам.

Рассмотрим простейший случай, когда в диаграмме $A \leftarrow C \rightarrow B$ над категорией TOP обе стрелки $i_A: C \rightarrow A$ и $i_B: C \rightarrow B$ являются вложениями, а пространства A и B — подпространствами одного и того же пространства X — их объединения. (Таким образом, фактически речь здесь идет о триаде $(X; A, B)$ с $A \cup B = X$ и $A \cap B = C$.) Прямым конусом над парой (i_A, i_B) в категории TOP является пара отображений $j_A: A \rightarrow D$, $j_B: B \rightarrow D$, совпадающих на C и потому корректно определяющих такое отображение $j: X \rightarrow D$, что $j|_A = j_A$ и $j|_B = j_B$. Это показывает, что X является амальгамой диаграммы $A \leftarrow C \rightarrow B$ над категорией TOP .

В категории же $[TOP]$ условие совпадения ограничений отображений j_A и j_B на C заменяется условием их гомотопности, что непосредственно не позволяет построить отображение $j: X \rightarrow D$. Однако если, скажем, пара (B, C) является парой Борсука, то гомотопию, связывающую отображения $j_A|_C$ и $j_B|_C$, можно продолжить до такой гомотопии $h_t: B \rightarrow D$, что $h_0|_C = j_A|_C$ и $h_1 = j_B$. Поэтому будет существовать такое отображение $j: X \rightarrow D$, что $j|_A = j_A$ и $j|_B = h_0$, т. е. такое, что $j|_A \sim j_A$ и $j|_B \sim j_B$.

На первый взгляд кажется, что тем самым доказано, что пространство X является (при указанных условиях) амальгамой диаграммы $A \leftarrow C \rightarrow B$ и в категории $[TOP]$. Однако это не так, поскольку отображение j (даже рассматриваемое с точностью до гомотопии) зависит от выбора гомотопии h_t и при другом выборе этой гомотопии может получиться негомотопное отображение. С этой

неоднозначностью ничего сделать нельзя, и потому приходится с ней мириться.

Определение 3. Слабой амальгамой диаграммы $A \xleftarrow{i_A} C \xrightarrow{i_B} B$ над категорией $\mathbf{A}$ называется вершина X такого прямого конуса $\{A \rightarrow X, B \rightarrow X\}$ над парой (i_A, i_B) , что для любого конуса $\{j_A: A \rightarrow D, j_B: B \rightarrow D\}$ существует (вообще говоря, не единственный) морфизм $j: X \rightarrow D$ конуса $\{A \rightarrow X, B \rightarrow X\}$ в конус $\{j_A: A \rightarrow D, j_B: B \rightarrow D\}$.

В отличие от амальгамы, слабая амальгама (когда она существует) определена, вообще говоря, не единственным образом.

Предложение 1. В категории $[\mathbf{TOP}]$ для любой диаграммы $A \xleftarrow{i_A} C \xrightarrow{i_B} B$ существует слабая амальгама X , функториально зависящая от этой диаграммы.

Доказательство. Если не заботиться о функториальности, то можно рассуждать следующим образом. Мы знаем (теорема 1 лекции I.2), что в категории $\mathbf{TOP}$ любое отображение гомотопически эквивалентно корасслоению. Поэтому, без ограничения общности, отображения i_A и i_B можно считать вложениями, а пару (B, C) — парой Борсука. Но тогда будет применимо изложенное выше рассуждение и пространство $X = A \cup B$ будет слабой амальгамой диаграммы $A \xleftarrow{i_A} C \xrightarrow{i_B} B$.

Чтобы получить функториальную амальгаму X , нужно в этом рассуждении явно раскрыть все ссылки.

Пусть

$$X = (C \times I) \cup_i (A \sqcup B),$$

где i — отображение $(C \times 0) \cup (C \times 1) \rightarrow A \sqcup B$, определенное формулой

$$i(c, t) = \begin{cases} i_A(c), & \text{если } t = 0, \\ i_B(c), & \text{если } t = 1. \end{cases}$$

Допуская определенную вольность, мы для наглядности будем писать

$$(5) \quad X = A \cup_{i_A} (C \times I) \cup_{i_B} B.$$

Ясно, что пространство X функториально зависит от пары (i_A, i_B) . Пусть $i^A: A \rightarrow X$ и $i^B: B \rightarrow X$ — канонические вложения. Тогда $i^A \circ i_A \sim i^B \circ i_B$, т. е. пара (i^A, i^B) является в категории $[\mathbf{TOP}]$ прямым конусом над парой (i_A, i_B) с вершиной X .

Пусть теперь $\{j_A, j_B\}$ — произвольный прямой конус над парой (i_A, i_B) в категории $[\text{TOP}]$, т. е. такая пара отображений $j_A: A \rightarrow D$ и $j_B: B \rightarrow D$, что $j_A \circ i_A \sim j_B \circ i_B$. Для любой гомотопии $H: C \times I \rightarrow D$, связывающей отображение $j_A \circ i_A$ с отображением $j_B \circ i_B$, формула

$$j(x) = \begin{cases} j_A(a), & \text{если } x = a \in A, \\ H(c, t), & \text{если } x = (c, t) \in C \times I, \\ j_B(b), & \text{если } x = b \in B, \end{cases}$$

корректно определяет отображение $j: X \rightarrow D$, обладающее тем свойством, что $j \circ i^A = j_A$ и $j \circ i^B = j_B$, т. е. являющееся морфизмом конуса $\{i^A, i^B\}$ в конус $\{j_A, j_B\}$. Следовательно, пространство (5) является слабой амальгамой диаграммы $A \xleftarrow{i^A} C \xrightarrow{i^B} B$. $\square$

Слабая амальгама (5) называется также *гомотопической амальгамой* (пространств A и B с данными отображениями $i_A: C \rightarrow A$ и $i_B: C \rightarrow B$).

Категория $\mathbf{A}$ называется *слабо козамкнутой*, если в ней существует копроизведение любого семейства морфизмов и слабая амальгама любой диаграммы вида $A \leftarrow C \rightarrow B$, функториально зависящая от этой диаграммы. [Можно — понятным образом — определить *слабый предел* (прямой и обратный) произвольной диаграммы над категорией $\mathbf{A}$ и показать (сделайте это!), что в слабо козамкнутой категории существует слабый прямой предел любой диаграммы, функториально зависящий от этой диаграммы.]

Предложение 1 означает, что категория $[\text{TOP}]$ *слабо козамкнута*.

Слабо козамкнута, конечно, и категория $[\text{TOP}^*]$. Слабая амальгама в категории $[\text{TOP}^*]$ получается из амальгамы (5) стягиванием в точку отрезка $c_0 \times I$ (т. е. заменой операции $\times$ на операцию $\dot{\times}$).

В силу теоремы о клеточной аппроксимации (предложение 1 лекции 2) в любой диаграмме $A \xleftarrow{i^A} C \xrightarrow{i^B} B$ над категорией $[\text{CW}]$ (категорией $[\text{CW}^*]$) отображения i_A и i_B мы можем считать клеточными. Но тогда амальгама (5) будет клеточным пространством и, значит, слабой амальгамой в категории $[\text{CW}]$ (категории $[\text{CW}^*]$). Поэтому категории $[\text{CW}]$ и $[\text{CW}^*]$ *слабо козамкнуты*.

Ниже мы будем рассматривать также подкатегорию $\text{cop } \text{CW}^*$ категории CW^* , объектами которой являются пунктированные связные клеточные пространства (а мор-

физмами — их непрерывные отображения), и соответствующую гомотопическую категорию $[\text{cop } \text{CW}^*]$. Поскольку для связных пространств A и B амальгама (5) также связна (и букет связных пространств связан), категория $[\text{cop } \text{CW}^*]$ *слабо козамкнута*.

Пусть $\mathbf{A}$ — произвольная слабо козамкнутая категория, и пусть F — произвольный функтор $\mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$. Тогда для любой диаграммы $A \xleftarrow{i_A} C \xrightarrow{i_B} B$ над категорией $\mathbf{A}$ и ее слабой амальгамы X определено отображение (2), где Φ — по-прежнему коамальгама диаграммы множеств $F(A) \xrightarrow{i_A^*} F(C) \xleftarrow{i_B^*} F(B)$, и для любого семейства объектов X_α категории $\mathbf{A}$ определено отображение (1).

Определение 4. Функтор $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ называется *полуточным*, если для любого семейства объектов X_α категории $\mathbf{A}$ отображение (1) биективно и для любой диаграммы $A \leftarrow C \rightarrow B$ над категорией $\mathbf{A}$ отображение (2) надъективно.

Условие надъективности отображения (2) равносильно тому, что множество $F(X)$ является «слабой коамальгамой» диаграммы $F(A) \rightarrow F(C) \leftarrow F(B)$. Поэтому свойство полуточности функтора F означает, что этот функтор переводит копроизведения в произведения, а слабые амальгамы в слабые коамальгамы. Отсюда можно вывести (сделайте это!), что полуточный функтор слабые прямые пределы переводит в слабые обратные пределы, т. е. является в этом смысле непрерывным функтором. К сожалению, термин «полуточный функтор» (впервые предложенный, по-видимому, Дольдом по некоторой — довольно, впрочем, отдаленной — ассоциации с полуточными функторами из теории абелевых категорий) не отражает этой стороны дела. Мы все же будем им пользоваться, за отсутствием лучшего термина.

Рассуждение, доказывающее, что каждый представимый функтор непрерывен (см. выше) практически дословно переносится на случай слабых амальгам. Следовательно, *любой представимый функтор $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ полуточен*.

Основная цель этого дополнения — рассмотреть вопрос об обращении этого утверждения для категорий $[\text{CW}]$ и $[\text{cop } \text{CW}^*]$ (а также для категории $[\text{cop } \text{CW}_{\text{fin}}^*]$ связных конечных клеточных пространств). При этом, как всегда, мы перейдем к категориям CW и $\text{cop } \text{CW}^*$ и будем рассмат-

ривать гомотопически инвариантные функторы, определенные на этих категориях. Такой функтор мы будем называть *представимым*, если он представим как функтор на соответствующей гомотопической категории.

В первую очередь мы рассмотрим категорию $\text{cop } \mathcal{CW}^*$.

Теорема 1. *Каждый гомотопически инвариантный полуточный функтор на категории $\text{cop } \mathcal{CW}^*$ представим.*

Эта теорема известна как теорема Брауна.

Доказательство теоремы 1 мы разобьем в ряд лемм.

Во всем даднейшем символ F будет означать некоторый фиксированный гомотопически инвариантный полуточный функтор $\text{cop } \mathcal{CW}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$. При этом, для любой пары (X, A) категории $\text{cop } \mathcal{CW}^*$ (т. е. для связной пунктированной клеточной пары) мы, предвосхищая—хотя бы в обозначениях—теорему Брауна, образ произвольного элемента $x \in F(X)$ при отображении $i^*: F(X) \rightarrow F(A)$, индуцированном вложением $i: A \rightarrow X$, будем обозначать символом $x|_A$.

Пользуясь этим обозначением, сформулируем еще раз определения полуточных и представимых функторов применительно к категории $\text{cop } \mathcal{CW}^*$.

Поскольку копроизведениями в категории $\text{cop } \mathcal{CW}^*$ являются букеты, свойство полуточности функтора F по отношению к копроизведениям (биективность отображения (1)) приобретает для функторов на $\text{cop } \mathcal{CW}^*$ следующий вид:

Б. *Для любых пространств X_α и их букета $X = \bigvee_\alpha X_\alpha$ отображение*

$$(6) \quad F(X) \rightarrow \prod_\alpha F(X_\alpha),$$

заданное формуло

$$x \mapsto \{x|_{X_\alpha}\} \quad x \in F(X),$$

биективно

Требование, чтобы функтор F обладал этим свойством, называется *аксиомой букета* (короче, *аксиомой Б*).

Аналогично, полуточность гомотопически инвариантного функтора F по отношению к (слабым) амальгамам означает выполнение следующей аксиомы:

А. *Для любых двух клеточных отображений $i_A: C \rightarrow A$, $i_B: C \rightarrow B$ и любых элементов $a \in F(A)$, $b \in F(B)$, удов-*

удовлетворяющих соотношению

$$i_A^*(a) = i_B^*(b),$$

существует такой элемент $x \in F(X)$, где

$$(5) \quad X = A \cup_{i_A} (C \times I) \cup_{i_B} B,$$

что

$$x|_A = a, \quad x|_B = b.$$

Эта аксиома называется аксиомой амальгамы (или, короче, аксиомой **A**).

В случае, когда отображения i_A и i_B являются вложениями, причем $C = A \cap B$, аксиома **A** приобретает следующий вид:

МВ. Для любых элементов $a \in F(A)$, $b \in F(B)$, удовлетворяющих соотношению

$$a|_C = b|_C,$$

существует такой элемент $x \in F(X)$, где $X = A \cup B$, что

$$x|_A = a, \quad x|_B = b.$$

[Для доказательства достаточно заметить, что в рассматриваемом случае пространство (5) гомотопически эквивалентно пространству $A \cup B$.]

Аксиома **МВ** называется аксиомой Майера—Виеториса.

Легко видеть, что для гомотопически инвариантного функтора F аксиома **A** вытекает из своего частного случая **МВ**, т. е. что аксиомы **A** и **МВ** равносильны. [Достаточно заметить, что пространство (5) является объединением двух подпространств

$$A' = (C \times [0, 1/2]) \cup_{i_A} A \quad \text{и} \quad B' = (C \times [1/2, 1]) \cup_{i_B} B,$$

которые, во-первых, деформационно ретрагируются на пространства A и B соответственно и, во-вторых, обладают тем свойством, что $A' \cap B' = C \times \{1/2\} = C$.]

Поэтому гомотопически инвариантный функтор $F: \text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ тогда и только тогда полноточен, когда он удовлетворяет аксиомам **B** и **МВ**. Именно это определение полноточности обычно принимается в литературе (см., например [11], гл. 9).

Что же касается представимости, то гомотопически инвариантный функтор $F: \text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ представим, если для него существует классифицирующая пара (u, K) ,

т. е. такое пространство K категории $\text{cop } \mathcal{C}\mathcal{W}^*$ (пунктированное, связное и клеточное) и такой элемент $u \in F(K)$, что для любого пространства X категории $\text{cop } \mathcal{C}\mathcal{W}^*$ отображение

$$(7) \quad u_{\#}^X: [X, K]^* \rightarrow F(X),$$

определенное формулой $u_{\#}^X[f] = f^*u$, $f: X \rightarrow K$, биективно.

Согласно доказанной выше общекатегорной теореме единственности классифицирующая пара (u, K) с точностью до гомотопической эквивалентности определена единственным образом, т. е. для любой другой классифицирующей пары (u', K') существует такая гомотопическая эквивалентность $h: K' \rightarrow K$, что $h^*(u) = u'$.

При $X = S^q$, $q \geq 1$, множество $[X, K]^*$ является не чем иным, как гомотопической группой $\pi_q K$ и, значит, отображение (7) (которое мы будем обозначать символом $u_{\#}^q$) — отображением

$$(8) \quad u_{\#}^q: \pi_q K \rightarrow F(S^q).$$

Рассмотрим в связи с этим множество $F(S^q)$, $q \geq 1$, подробнее (для произвольного полуточного функтора $F: \text{cop } \mathcal{C}\mathcal{W}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$).

Пусть $a, b \in F(S^q)$. Согласно аксиоме Б существует такой (единственный) элемент $x \in F(S^q \vee S^q)$, что

$$x|_{(S^q \times S^0)} = a, \quad x|_{(S^0 \times S^q)} = b.$$

Пусть $m: S^q \rightarrow S^q \vee S^q$ — стандартное коумножение в сфере S^q (см. формулу (16) лекции I.3 при $X = S^q$). Мы положим

$$a + b = m^*x.$$

Автоматическая проверка показывает, что относительно этого сложения множество $F(S^q)$ является группой. При этом отображение $u_{\#}^q$ является гомоморфизмом. [Действительно, если $a = f^*u$ и $b = g^*u$, где $f: S^q \rightarrow K$ и $g: S^q \rightarrow K$, то $x = (f \vee g)^*u$, и потому $u_{\#}^q([f] + [g]) = u_{\#}^q([(f \vee g) \circ m]) = m^*((f \vee g)^*u) = m^*x = a + b = f^*u + g^*u = u_{\#}^q[f] + u_{\#}^q[g].$]

Пусть $n \geq 0$.

Определение 5. Пара (u, K) , $u \in F(K)$, называется универсальной до размерности n (для функтора F), если

отображение (8) является изоморфизмом при $q < n$ и эпиморфизмом при $q = n$. Пара (u, K) называется *универсальной*, если она универсальна до любой размерности.

Таким образом, согласно этому определению, *любая классифицирующая пара (u, K) универсальна*.

Ключом к доказательству теоремы Брауна является утверждение о справедливости обратного предложения:

Лемма 1. *Любая универсальная пара (u, K) классифицирует функтор F .*

Таким образом, в силу этой леммы для доказательства теоремы 1 достаточно найти для функтора F хотя бы одну универсальную пару (u, K) .

Лемма 2. *Для любого пространства K_0 категории $\text{cop } \text{CW}^*$ и любого элемента $u_0 \in F(K_0)$ существует такая универсальная пара (u, K) , что $K_0 \subset K$ и $u|_{K_0} = u_0$.*

Лемма 2, обеспечивая существование (даже не одной) универсальной пары, доказывает в силу леммы 1 теорему 1. Таким образом, нам нужно лишь доказать леммы 1 и 2.

Мы докажем лемму 2 по индукции, опираясь на следующую лемму:

Лемма 3. *Для любой универсальной до размерности $n \geq 0$ пары (u, K) существует такая универсальная до размерности $n+1$ пара (u', K') , что:*

(i) *пространство K' является элементарным $(n+1)$ -мерным клеточным расширением пространства K ;*

(ii) *имеет место равенство*

$$u'|_K = u.$$

Каждая пара (u_0, K_0) , где K_0 — пространство категории $\text{cop } \text{CW}^*$, а $u_0 \in F(K_0)$, универсальна, конечно, до размерности 0. Поэтому, отправляясь от произвольной пары (u_0, K_0) и повторно применяя лемму 3, мы можем построить такую бесконечную последовательность пар (u_n, K_n) , что для любого $n \geq 0$

а) пространство K_{n+1} является элементарным $(n+1)$ -мерным клеточным расширением пространства K_n ;

б) имеет место равенство

$$(9) \quad u_{n+1}|_{K_n} = u_n.$$

Множества $F(K_n)$ составляют диаграмму

$$F(K_0) \leftarrow F(K_1) \leftarrow \dots \leftarrow F(K_n) \leftarrow \dots,$$

стрелки которой индуцированы вложениями, а равенства (9)

означают, что последовательность $\{u_n\}$ является элементом обратного предела $\varprojlim F(K_n)$ этой диаграммы.

При этом—как непосредственно следует из формулы (9)—для любых q и n будет иметь место коммутативная диаграмма

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} \pi_q K_n & \xrightarrow{\quad} & \pi_q K_{n+1} \\ & \searrow (u_n)_\#^q & \swarrow (u_{n+1})_\#^q \\ & F(S^q) & \end{array}$$

верхняя строчка которой индуцирована вложением $K_n \rightarrow K_{n+1}$. Эта диаграмма означает, что гомоморфизмы $(u_n)_\#^q: \pi_q K_n \rightarrow F(S^q)$ составляют прямой конус над диаграммой

$$\pi_q K_0 \rightarrow \pi_q K_1 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_q K_n \rightarrow \dots,$$

и потому индуцируют гомоморфизм

$$(11) \quad \begin{array}{c} \varprojlim \pi_q K_n \rightarrow F(S^q) \\ \rightarrow \end{array}$$

прямого предела $\varinjlim \pi_q K_n$ групп $\pi_q K_n$ в группу $F(S^q)$.

Но так как при $n > q$ гомоморфизмы $(u_n)_\#^q$ являются по условию изоморфизмами, то для любого $q \geq 1$ гомоморфизм (11) представляет собой изоморфизм.

Рассмотрим теперь объединение K последовательности

$$(12) \quad K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$$

пространств K_n .

По определению оно представляет собой клеточное расширение пространства K_0 и потому является—одно-временно с пространством K_0 —связным пунктированным клеточным пространством (объектом категории cop CW^*). При этом последовательность (12) будет клеточной фильтрацией пространства K .

Вообще, пусть X —произвольное пространство категории cop CW^* , и пусть

$$(13) \quad X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$$

—некоторая клеточная фильтрация пространства X (состоящая из связных подпространств). Тогда определено множество $\varprojlim F(X_n)$ (состоящее из таких последователь-

ностей $\{x_n\}$, $x_n \in F(X_n)$, что $x_{n+1}|_{x_n} = x_n$ и отображение

$$(14) \quad F(X) \longrightarrow \varprojlim F(X_n),$$

действующее по формуле

$$x \mapsto \{x|_{x_n}\}, \quad x \in F(X).$$

Лемма 4. *Отображение (14) надъективно.*

С помощью этой леммы лемма 2 доказывается теперь без особого труда.

Доказательство леммы 2. Согласно лемме 4, примененной к фильтрации (12), существует такой элемент $u \in F(K)$, что

$$u|_{K_n} = u_n \quad \text{для любого } n \geq 0.$$

При этом для каждого $q \geq 1$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_q K_n & \xrightarrow{\quad} & \pi_q K \\ (u_n)_\# \searrow & & \swarrow u_\# \\ & F(S^q) & \end{array}$$

верхняя стрелка которой индуцирована вложением $K_n \subset K$, и, значит, — коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim \pi_q K_n & \xrightarrow{i} & \pi_q K \\ \searrow & & \swarrow u_\# \\ & F(S^q) & \end{array}$$

левая стрелка которой является изоморфизмом (11), а горизонтальная стрелка i индуцирована гомоморфизмами $\pi_q K_n \rightarrow \pi_q K$.

Но ввиду компактности сферы S^q каждое отображение $S^q \rightarrow K$ (а также каждое отображение $S^q \times I \rightarrow K$) является на самом деле отображением в некоторое K_n , откуда непосредственно вытекает, что отображение i представляет собой изоморфизм.

Поэтому изоморфизмом будет и отображение $u_\#^q$, т. е. пара (u, K) будет универсальной парой. $\square$

Таким образом, нам лишь осталось доказать леммы 1, 3 и 4. Мы начнем с леммы 4.

Доказательство леммы 4. Воспользуемся развитой в Дополнении к лекции 1.10 техникой телескопных

нормализаций фильтратий. Ясно, что все результаты этого Дополнения непосредственно переносятся на случай пунктированных пространств; нужно лишь в конструкции телескопа произвести дополнительное стягивание в точку подпространства $\{x_0\} \times \mathbb{R}^+$, т. е. произведение $X \times \mathbb{R}^+$ заменить произведением $X \dot{\times} \mathbb{R}^+$.

Таким образом, телескопом T фильтрации (13) будет подмножество (являющееся пунктированным связным клеточным пространством) произведения $X \dot{\times} \mathbb{R}^+ = (X \times \mathbb{R}^+) / (\{x_0\} \times \mathbb{R}^+)$, состоящее из таких точек (x, r) , $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$, что $x \in X_n$; когда $n \leq r < n+1$.

Будучи клеточной, фильтрация (13) является фильтрацией Борсука и, значит (предложение 2 Дополнения к лекции I.10), гомотопически правильна, т. е. каноническая проекция $p: T \rightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью.

Подпространства T_n телескопа T , состоящие из точек (x, r) , для которых $r \leq n$, составляют его клеточную фильтрацию. Мы вложим X_n в T_n , отождествив каждую точку (x, n) , $x \in X_n$, с точкой $x \in X_n$. Тогда подпространство X_n будет строгим деформационным ретрактом пространства T_n , причем соответствующей ретракцией $T_n \rightarrow X_n$ будет ограничение на T_n проекции $p: T \rightarrow X$.

Телескоп T удобно представлять себе в виде объединения подпространств

$$X'_n = [n, n+1] \dot{\times} X_n.$$

(в Дополнении к лекции I.10 подпространства X'_n обозначались через C_{n+1}).

Заметим, что

$$(15) \quad X'_n \cap X'_{n+1} = X_n$$

и $T_n = X'_0 \cup \dots \cup X'_{n-1} \cup X_n$ при $n \geq 1$ (тогда как $T_0 = X_0$). Кроме того, объединение C всех пространств X_n в T будет, очевидно, их букетом $\vee X_n$ (напомним, что луч $\{x_0\} \times \mathbb{R}^+$ стянут в T в одну точку).

Мы положим

$$A = \bigcup_{m=0}^{\infty} X'_{2m}, \quad B = \bigcup_{m=0}^{\infty} X'_{2m+1}.$$

Ясно, что A и B являются клеточными подпространствами телескопа T , причем

$$A \cup B = T \quad \text{и} \quad A \cap B = C.$$

Кроме того, так как $X'_n \cong X_n$, то $A \cong A_1$ и $B \cong B_1$, где

$$A_1 = \bigvee_{m=0}^{\infty} X_{2m}, \quad B_1 = \bigvee_{m=0}^{\infty} X_{2m+1}$$

(так что $C = A_1 \vee B_1$).

Пусть теперь $\{x_n\}$, $x_n \in F(X_n)$, — произвольный элемент множества $\lim F(X_n)$. В силу аксиомы Б существуют такие элементы $\overleftarrow{a} \in F(A_1)$ и $b \in F(B_1)$, что

$$a|_{X_{2m}} = x_{2m}, \quad b|_{X_{2m+1}} = x_{2m+1} \quad \text{для любого } m \geq 0.$$

При этом в силу гомотопической инвариантности функтора F мы можем считать, что $a \in F(A)$, $b \in F(B)$.

Согласно формуле (15) для любого $m \geq 1$ имеет место включение $X_{2m-1} \subset X'_{2m}$, причем композиция соответствующего вложения $X_{2m-1} \rightarrow X'_{2m}$ с ретракцией $X'_{2m} \rightarrow X_{2m}$ является, очевидно, не чем иным, как вложением $X_{2m-1} \rightarrow X_{2m}$. Поэтому

$$a|_{X_{2m-1}} = x_{2m}|_{X_{2m-1}} = x_{2m-1} = b|_{X_{2m-1}}.$$

Аналогично показывается, что

$$b|_{X_{2m}} = x_{2m+1}|_{X_{2m}} = x_{2m} = a|_{X_{2m}}.$$

Таким образом, элементы a и b обладают тем свойством, что их ограничения на каждом слагаемом букета $C = \bigvee X_n$ совпадают. В силу аксиомы Б отсюда следует, что эти элементы совпадают на всем букете C , т. е. $a|_C = b|_C$. Но тогда, согласно аксиоме МВ (примененной к триаде $(T; A, B)$), будет существовать такой элемент $x \in F(T)$, что $x|_A = a$ и $x|_B = b$. В силу отождествления $F(X) = F(T)$ (индуцированного гомотопической эквивалентностью p) мы можем считать, что $x \in F(X)$, и ясно, что тогда для любого $n \geq 0$ будет иметь место равенство

$$x|_{X_n} = x_n,$$

т. е. образом элемента x при отображении (10) будет данный элемент $\{x_n\}$.

Тем самым надъективность отображения (14) полностью доказана. $\square$

Для доказательства леммы 3 мы начнем с нескольких общих замечаний о полуточном функторе F .

Пусть X — произвольное пространство (категории $\text{cop } \mathcal{CW}'$) и пусть $p: X \vee X \rightarrow X$ — отображение схлопыва-

ния. Так как $p \circ \text{in}_1 = \text{id}$ и $p \circ \text{in}_2 = \text{id}$, где $\text{in}_1, \text{in}_2: X \rightarrow X \vee X$ — канонические вложения, то композиция отображения $p^*: F(X) \rightarrow F(X \vee X)$ с отображением

$q: F(X \vee X) \rightarrow F(X) \times F(X), z \mapsto (\text{in}_1^* z, \text{in}_2^* z), z \in F(X \vee X),$

является не чем иным, как диагональным отображением

$$\Delta: F(X) \rightarrow F(X) \times F(X), x \mapsto (x, x), x \in F(X).$$

С другой стороны, если пространство X состоит только из отмеченной точки x_0 , то отображение p представляет собой гомеоморфизм, и, значит, отображение p^* биективно. Поскольку, согласно аксиоме Б, отображение q также биективно, мы получаем, следовательно, что для одноточечного пространства $X = \{x_0\}$ диагональное отображение Δ биективно, что возможно только тогда, когда множество $F(X)$ состоит только из одного элемента. Мы будем обозначать этот элемент символом 0.

Для любого пространства X образ элемента 0 при отображении $\text{const}^*: F(\{x_0\}) \rightarrow F(X)$, индуцированном постоянным отображением $\text{const}: X \rightarrow \{x_0\}$, мы также будем обозначать символом 0. [Отметив элемент 0, мы тем самым получим из $F(X)$ пунктированное множество и ясно, что тогда F будет функтором из категории $\text{cop CW}^{\text{op}}$ в категорию ENS^* пунктированных множеств.]

Заметим, что если отображение $f: X \rightarrow Y$ гомотопно постоянному отображению, то $f^*y = 0$ для любого элемента $y \in F(Y)$.

Пусть теперь отображение $f: X \rightarrow Y$ (категории cop CW^*) произвольно, и пусть

$$C^*(f) = C^*X \cup_j Y$$

— конус отображения f , а $j: Y \rightarrow C^*(f)$ — каноническое вложение. Рассмотрим трехчленную последовательность

$$(16) \quad F(C^*(f)) \xrightarrow{j^*} F(Y) \xrightarrow{f^*} F(X)$$

пунктированных множеств, получающуюся применением функтора F к последовательности пространств

$$(17) \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C^*(f).$$

Так как $j \circ f \sim \text{const}$, то $f^*(j^*(z)) = 0$ для любого элемента $z \in F(C^*(f))$. Обратно, пусть y — такой элемент множества $F(Y)$, что $f^*y = 0$. Так как конус $C^*(f)$ является, очевидно, не чем иным, как гомотопической амальгамой (5)

диаграммы

$$\{x_0\} \xleftarrow{\text{const}} X \xrightarrow{f} Y,$$

то, согласно аксиоме **A** (примененной к паре $(0, y)$), существует такой элемент $z \in F(C^*(f))$, что $j^*z = y$. Таким образом, $f^*y = 0$ тогда и только тогда, когда $y = j^*z$, т. е. *последовательность (16) точна в члене $F(Y)$* .

[Это свойство и имел в виду Дольд, называя функторы, удовлетворяющие аксиомам **B** и **MB**, полуточными.]

Теперь мы уже можем доказать лемму 3.

Доказательство леммы 3. Выбрав для любого элемента α ядра $\text{Ker } u_\#^n$ гомоморфизма

$$u_\#^n: \pi_n K \rightarrow F(S^n)$$

представитель $f_\alpha: S_\alpha^n \rightarrow K$, где S_α^n — экземпляр сферы S^n , рассмотрим элементарное клеточное расширение K^* пространства K , получающееся приклеиванием к K клеток e_α^{n+1} посредством отображений f_α (при $n=0$ мы полагаем $K^* = K$). Пусть

$$K' = K \vee \bigvee_{\lambda} S_{\lambda}^{n+1},$$

где λ пробегает множество $F(S^{n+1})$, а S_{λ}^{n+1} — экземпляры сферы S^{n+1} .

Если существует такой элемент $u^* \in F(K^*)$, что $u^*|_K = u$, то, согласно аксиоме **B**, существует и такой элемент $u' \in F(K')$, что

$$(18) \quad u'|_{K^*} = u^* \quad \text{и} \quad u'|_{S_{\lambda}^{n+1}} = \lambda$$

(в последнем равенстве мы отождествляем $F(S_{\lambda}^{n+1})$ с $F(S^{n+1})$). Лемма 3 будет, очевидно, доказана, если мы покажем, что пара (u', K') универсальна до размерности $n+1$ (и что элемент u^* существует).

С этой целью мы в первую очередь заметим (при $n > 0$), что так как пара (K', K) по построению клеточно n -связна, то (см. следствие 3 теоремы 1 лекции 2) она n -связна, и потому — как непосредственно вытекает из точности гомотопической последовательности пары (K', K) — индуцированный вложением $i: K \rightarrow K'$ гомоморфизм

$$i_q: \pi_q K \rightarrow \pi_q K'$$

гомотопических групп является при $q < n$ изоморфизмом, а при $q = n$ эпиморфизмом. Поскольку (в силу первого

из равенств (18)) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_q K & \xrightarrow{i_q} & \pi_q K' \\ & \searrow u_{\#}^q & \swarrow u_{\#}^{q'} \\ & F(S^q) & \end{array}$$

отсюда следует, что пара (u', K') одновременно с парой (u, K) универсальна до размерности n . В частности, отображение $u_{\#}^n$ является эпиморфизмом.

Более того, из построения пространства K^* немедленно следует, что каждое отображение f_{α} , $\alpha \in \text{Ker } u_{\#}^n$, рассматриваемое как отображение в K^* , гомотопно нулю в K^* и, следовательно, в K . Значит, $i_n \alpha = 0$. Это означает, что

$$\text{Ker } u_{\#}^n \subset \text{Ker } i_n.$$

Пусть теперь $\alpha' \in \text{Ker } u_{\#}^n$. Поскольку отображение i_n эпиморфно, существует такой элемент $\alpha \in \pi_q K$, что $i_n \alpha = \alpha'$. При этом $u_{\#}^n \alpha = u_{\#}^n \alpha' = 0$, т. е. $\alpha \in \text{Ker } u_{\#}^n$, и, значит, $\alpha \in \text{Ker } i_n$. Следовательно, $\alpha' = i_n \alpha = 0$, т. е. эпиморфизм $u_{\#}^n$ является изоморфизмом (при $n=0$ все эти рассуждения бессодержательны и потому верны).

Наконец, если i_{λ} — вложение $S_{\lambda}^{n+1} \rightarrow K'$, то

$$u_{\#}^{n+1} [i_{\lambda}] = i_{\lambda}^* (u') = u' \big|_{S_{\lambda}^{n+1}} = \lambda,$$

и, значит, поскольку элементы λ пробегают все множество $F(S^{n+1})$, отображение $u_{\#}^{n+1}$ является эпиморфизмом. (Это в равной мере справедливо при $n=0$.)

Следовательно, пара (u', K') универсальна на самом деле до размерности $n+1$.

Таким образом, для завершения доказательства леммы 3 остается доказать существование элемента u^* (заметим, что аксиомой **MB** мы пока нигде не пользовались).

С этой целью мы рассмотрим отображение

$$f = \bigvee_{\alpha} f_{\alpha} : \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \rightarrow K,$$

совпадающее на каждой сфере S_{α}^n с отображением f_{α} . Ясно, что конусом $C^*(f)$ этого отображения является как раз пространство K^* . Поэтому отвечающая этому отображению

последовательность (16) имеет вид

$$F(K^*) \xrightarrow{f^*} F(K) \xrightarrow{f^*} F\left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n\right)$$

и эта последовательность точна в члене $F(K)$. С другой стороны, так как $q \circ f^* = \prod f_{\alpha}^*$, где q — отображение (6) (при $X_{\alpha} = S_{\alpha}^n$), и так как по условию

$$f_{\alpha}^* u = u_{\#}^n(\alpha) = 0,$$

то $f^* u = 0$. Следовательно, существует такой элемент $u^* \in F(K^*)$, что $f^* u^* = u$, т. е. такой, что $u^*|_K = u$.

Тем самым лемма 3 полностью доказана. $\square$

Для доказательства леммы 1 нам понадобится еще одна лемма.

Лемма 5. Пусть:

(X, A) — произвольная пара пространств категории $\text{cop } CW^*$;

(u, K) — универсальная пара;

$g: A \rightarrow K$ — пунктированное клеточное отображение и

x — такой элемент множества $F(X)$, что

$$x|_A = g^* u.$$

Тогда существует такое клеточное отображение $h: X \rightarrow K$, что

$$h|_A = g \quad \text{и} \quad h^* u = x.$$

Доказательство леммы 1. Нам нужно доказать, что для любой универсальной пары (u, K) и любого связного пунктированного клеточного пространства X отображение

$$u_{\#}^X: [X, K]^* \rightarrow F(X), \quad [f] \mapsto f^* u,$$

биективно.

Пусть $x \in F(X)$. Применив лемму 5 к паре (X, x_0) , отображению $g: \{x_0\} \rightarrow K$ и элементу x , мы получим такое отображение $h: X \rightarrow K$, что $h^* u = x$, т. е. такое, что $u_{\#}^X[h] = x$. Следовательно, отображение $u_{\#}^X$ надъективно.

Пусть $f_0: X \rightarrow K$ и $f_1: X \rightarrow K$ — такие пунктированные отображения, что $u_{\#}^X[f_0] = u_{\#}^X[f_1]$. В силу теоремы о клеточной аппроксимации мы без ограничения общности можем считать отображения f_0 и f_1 клеточными.

Рассмотрим пространство

$$X \dot{\times} I = X \times I / \{x_0\} \times I,$$

его подпространство A , являющееся объединением подпространств $X \times 0$ и $X \times 1$ (очевидно, что A представляет собой букет этих подпространств), отображение $g: A \rightarrow K$, определенное формулами

$$g[\xi, t] = \begin{cases} f_0(\xi), & \text{если } t=0, \\ f_1(\xi), & \text{если } t=1, \end{cases} \quad \xi \in X,$$

и элемент $x = (f_0 \circ p)^* u$ множества $F(X \dot{\times} I)$, где p — проекция $X \dot{\times} I \rightarrow X$. Отображение g клеточно и в силу равенства $u_{\#}^X[f_0] = u_{\#}^X[f_1]$, т. е. равенства $f_0^* u = f_1^* u$, обладает тем свойством, что

$$g^* u|_A = x.$$

Таким образом, к паре $(X \dot{\times} I, A)$, отображению g и элементу x применима лемма 5, согласно которой существует такое отображение $h: X \dot{\times} I \rightarrow K$, что $h|_A = g$, т. е., иначе говоря, такая пунктированная гомотопия $h_t: X \rightarrow K$, что $h_0 = f_0$ и $h_1 = f_1$. Следовательно, $[f_0] = [f_1]$ и, значит, отображение $u_{\#}^X$ инъективно. $\square$

Осталось доказать лемму 5.

Доказательство леммы 5. Пусть

$$K_0 = X \cup_i (A \dot{\times} I) \cup_g K$$

— гомотопическая амальгама диаграммы

$$X \xleftarrow{i} A \xrightarrow{g} K,$$

где $i: A \rightarrow X$ — вложение. Так как по условию $i^* x = g^* u$, то, согласно аксиоме А, существует такой элемент $u_0 \in F(K_0)$, что $u_0|_X = x$, $u_0|_K = u$. С другой стороны, согласно лемме 2 существует такая универсальная пара $(\bar{u}, \bar{K})$, $\bar{u} \in F(\bar{K})$, что $K_0 \subset \bar{K}$ и $\bar{u}|_{K_0} = u_0$. В частности, $K \subset \bar{K}$ и $\bar{u}|_K = u$. Следовательно, для любого $q \geq 1$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_q K & \xrightarrow{j_q} & \pi_q \bar{K} \\ u_q^{\#} \searrow & & \swarrow \bar{u}_q^{\#} \\ & F(S^q) & \end{array}$$

горизонтальное отображение $j_q: \pi_q K \rightarrow \pi_q \bar{K}$ которой индуцировано вложением $j: K \rightarrow \bar{K}$. Поскольку обе пары (u, K) и $(\bar{u}, \bar{K})$ универсальны и, значит, отображения $u_q^\#$ и $\bar{u}_q^\#$ являются изоморфизмами, из коммутативности этой диаграммы следует, что отображение j_q также является изоморфизмом, т. е. что вложение $j: K \rightarrow \bar{K}$ представляет собой ∞ -эквивалентность. Следовательно, $\pi_q(\bar{K}, K) = 0$ для всех $q \geq 1$, и потому (предложение 5 лекции 2) $\bar{K} \cong K$. (Напомним, что пространства K и $\bar{K}$ по условию связны.) При этом, если $r: \bar{K} \rightarrow K$ — деформационная ретракция, то $r^*u = \bar{u}$.

С другой стороны, так как $X \subset K_0$, то $X \subset \bar{K}$. Пусть $k: X \rightarrow \bar{K}$ — соответствующее вложение. Так как на подпространстве A отображение k гомотопно, очевидно, отображению $j \circ g: A \rightarrow \bar{K}$ (соответствующая гомотопия $A \times I \rightarrow \bar{K}$ является композицией вложений $A \times I \rightarrow K_0$ и $K_0 \rightarrow \bar{K}$), а пара (X, A) является парой Борсука, существует такое отображение $\bar{k}: X \rightarrow \bar{K}$ (гомотопное отображению k), что

$$\bar{k}|_A = j \circ g.$$

Пусть $h = r \circ \bar{k}: X \rightarrow K$. Так как $k \sim \bar{k}$ (и, значит, $k^* = \bar{k}^*$), то

$$h^*u = \bar{k}^*(r^*u) = k^*\bar{u} = \bar{u}|_X = u_0|_X = x.$$

Кроме того;

$$h|_A = r \circ (\bar{k}|_A) = r \circ j \circ g = g.$$

Это доказывает лемму 5 и вместе с ней теорему 1. $\square$

Замечание 2. Для любого связного пунктированного пространства X мы можем рассмотреть ограничение на copCW^{op} функтора $X^*: \text{TOP}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$. Это ограничение, являясь очевидно, полуточным функтором, согласно теореме 1 представимо, т. е. для него существует классифицирующая пара $(u, \hat{X})$. Но ясно, что свойство пары $(u, \hat{X})$ представлять функтор X^* в точности означает, что любое отображение $\varphi: \hat{X} \rightarrow X$ гомотопического класса $u \in X^*(\hat{X}) = [\hat{X}, X]^*$ является слабой гомотопической эквивалентностью, т. е. что пространство $\hat{X}$ является клеточ-

ным эквивалентом пространства X . Таким образом, теорема 1 лекции 3 (в части, касающейся связных и пунктированных пространств) является весьма частным случаем теоремы Брауна.

Перейдем теперь к функторам, заданным на категории $\text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}$ конечных связных и пунктированных клеточных пространств.

Для этих функторов мы представимость будем понимать в обобщенном смысле. Именно, функтор $F: \text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ мы будем называть *представимым*, если он является ограничением некоторого представимого функтора $\text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$, т. е. если для любого конечного связного пунктированного клеточного пространства X существует естественное биективное отображение

$$\omega^X: [X, K]^* \rightarrow F(X),$$

где K — некоторое (не обязательно конечное) связное пунктированное клеточное пространство. (Таким образом, для представимого функтора $F: \text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ множество $F(K)$, вообще говоря, не определено, и поэтому представление ω^X в виде $u_{\#}^X$ невозможно.)

Наша цель состоит в отыскании условий на функтор $F: \text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$, обеспечивающих его представимость. Чтобы применить к этой задаче метод универсальных пар, мы временно предположим, что данный функтор является ограничением на $\text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}$ некоторого функтора $\text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$. Тогда нашу задачу можно будет сформулировать как задачу об условиях на функтор $F: \text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$, обеспечивающих представимость его ограничения $F|_{\text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}}$.

Теперь мы уже можем говорить о парах вида (u, K) , где $u \in F(K)$, а K — произвольное (связное и пунктированное) клеточное пространство. Мы будем говорить, что пара (u, K) *финитно классифицирует* функтор F , если для любого конечного связного пунктированного клеточного пространства X отображение

$$(19) \quad u_{\#}^X: [X, K]^* \rightarrow F(X), \quad [f] \mapsto f^*u,$$

биективно.

В частности, отображение (19) биективно при $X = S^q$, $q \geq 1$, т. е. *любая финитно классифицирующая пара универсальна*.

Существование для функтора F финитно классифицирующей пары обеспечивает, конечно, представимость функтора $F|_{\text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}}$ (при этом $\omega^X = u_*^X$). Поэтому нам достаточно найти условия, обеспечивающие существование такой пары.

Пусть X — связное пунктированное клеточное пространство, и пусть $\{X_\alpha\}$ — произвольное семейство его клеточных подпространств (связных и пунктированных). Для любого функтора $F: \text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ мы можем говорить о пределе $\varprojlim F(X_\alpha)$ множеств $F(X_\alpha)$ по отношению к отображениям, индуцированным вложениями. Этот предел состоит из элементов вида $\{x_\alpha\}$, $x_\alpha \in F(X_\alpha)$, обладающих тем свойством, что $x_\alpha = x_\beta|_{X_\alpha}$ при $X_\alpha \subset X_\beta$, и потому формула $x \mapsto \{x|X_\alpha\}$ определяет некоторое отображение

$$(20) \quad F(X) \rightarrow \varprojlim F(X_\alpha).$$

Мы будем говорить, что функтор F удовлетворяет аксиоме **ЛН** (аксиоме линейной непрерывности), если отображение (20) биективно всякий раз, когда $X = \bigcup X_\alpha$, и семейство $\{X_\alpha\}$ линейно упорядочено по включению (т. е. для любых индексов α и β либо $X_\alpha \subset X_\beta$, либо $X_\beta \subset X_\alpha$).

Далее, мы будем говорить, что функтор $F: \text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ удовлетворяет аксиоме **МВ**, если аксиома **МВ** (или, что равносильно, аксиома **А**) выполнена всякий раз, когда клеточное пространство C конечно.

Функтор $F: \text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$, удовлетворяющий аксиомам **Б**, **МВ**, и **ЛН**, мы будем называть *финитно полуточным* функтором.

Предложение 2. Для любого гомотопически инвариантного финитно полуточного функтора $F: \text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ существует финитно классифицирующая пара (u, K) (u , значит, функтор $F|_{\text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}}$ представим).

Принимая за образец доказательство теоремы 1, мы докажем это предложение в серии аналогичных лемм.

Пусть $F: \text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ — произвольный гомотопически инвариантный финитно полуточный функтор.

Лемма 1_{ЛН}. Любая универсальная пара (u, K) финитно классифицирует функтор F .

Лемма 2_{ЛН}. Для любого пространства K_0 категории $\text{cop } CW^*$ и любого элемента $u_0 \in F(K_0)$ существует такая универсальная пара (u, K) , что $K_0 \subset K$ и $u|_K = u_0$.

Лемма 3_{fin} . Для любой универсальной до размерности n пары (u, K) существует такая универсальная до размерности $n+1$ пара (u', K') , что:

- (i) пространство K' является элементарным $(n+1)$ -мерным клеточным расширением пространства K ;
- (ii) имеет место равенство

$$u' |_K = u.$$

Предложение 2 является непосредственным следствием лемм 1_{fin} и 2_{fin} . С другой стороны, лемма 2_{fin} выводится из леммы 3_{fin} дословно так же, как лемма 2 из леммы 3; лишь ссылку на лемму 4 надо заменить ссылкой на аксиому ЛН. Поэтому нам нужно доказать лишь леммы 1_{fin} и 3_{fin} .

Выше мы показали, что значения полуточных функторов фактически принадлежат категории ENS^* . Поскольку этот вывод остается, очевидно, в силе и для финитно полуточных функторов, мы для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ категории cop CW^* можем поставить вопрос о точности (в члене $F(Y)$), соответствующей последовательности (16). Доказательство точности этой последовательности сводится, как мы знаем, к применению аксиомы А к диаграмме (17). Следовательно, последовательность (16) будет точна в члене $F(Y)$ и для финитно полуточного функтора F , если пространство X конечно.

Доказательство леммы 3_{fin} . Пространство K' мы построим так же, как в доказательстве леммы 3, т. е. по формуле

$$K' = K^* \vee \bigvee_{\lambda} S_{\lambda}^{n+1},$$

где K^* — элементарное клеточное расширение пространства K , получающееся приклеиванием клеток e_{α}^{n+1} посредством отображений $f_{\alpha}: S_{\alpha}^n \rightarrow K$, гомотопические классы которых пробегают ядро гомоморфизма $u_{\#}^n: \pi_n K \rightarrow F(S^n)$, а S_{λ}^{n+1} — экземпляры сферы S^{n+1} с индексами $\lambda \in F(S^{n+1})$. Если мы, как и в доказательстве леммы 3, предположим, что существует элемент $u^* \in F(K^*)$, для которого $u^* |_K = u$, то построение элемента $u' \in F(K')$ и доказательство универсальности до размерности $n+1$ пары (u', K') полностью сохранится. Поэтому нам нужно доказать лишь существование элемента u^* . При этом мы, конечно, можем считать, что $n > 0$.

С этой целью мы введем в рассмотрение множество $\mathcal{L}$ всех пар (v, L) , где L — клеточное подпространство (связное и пунктированное) пространства K^* , содержащее пространство K , а $v \in F(L)$ — такой элемент, что $v|_K = u$. Ясно, что множество $\mathcal{L}$ не пусто (ибо пара (u, K) принадлежит $\mathcal{L}$).

Мы введем в $\mathcal{L}$ отношение (частичного) порядка, считая, что $(v_1, L_1) \leq (v_2, L_2)$ тогда и только тогда, когда $L_1 \subset L_2$ и $v_2|_{L_1} = v_1$. Из аксиомы ЛН непосредственно вытекает, что относительно этого порядка множество $\mathcal{L}$ индуктивно, т. е. для любого его линейно упорядоченного подмножества (цепи) существует наименьшая верхняя грань.

Следовательно, согласно лемме Цорна в $\mathcal{L}$ существует максимальный элемент (v_0, L_0) . Если $L_0 = K^*$, то за u^* мы можем принять элемент v_0 . Таким образом, для завершения доказательства леммы $\exists_{\text{fin}}$ нам осталось лишь показать, что $L_0 = K^*$.

Пусть $L_0 \neq K^*$, т. е. пусть существует клетка $e_{\alpha}^{n+1} \subset K^* \setminus L_0$, и пусть $L'_0 = L_0 \cup e_{\alpha}^{n+1}$. Пусть, далее, $i: K \rightarrow L_0$ и $j: L_0 \rightarrow L'_0$ — вложения, и пусть $g = i \circ f_{\alpha}$. Тогда $L'_0 = C^*(g)$ и, значит, согласно сделанному выше замечанию, последовательность

$$F(L'_0) \xrightarrow{i^*} F(L_0) \xrightarrow{g^*} F(S^n)$$

точна в члене $F(L_0)$. Но по условию

$$g^*v_0 = f_{\alpha}^*u = u_{\#}^n [f_{\alpha}] = 0,$$

и потому существует такой элемент $v'_0 \in F(L'_0)$, что $j^*(v'_0) = v_0$, т. е. такой, что $v'_0|_{L_0} = v_0$. Поскольку L'_0 является клеточным подпространством пространства K^* (связным и пунктированным), это означает, что пара (v'_0, L'_0) принадлежит $\mathcal{L}$ и следует за парой (v_0, L_0) . Так как это противоречит максимальной паре (v_0, L_0) , то, следовательно, $L_0 = K^*$.

Тем самым лемма $\exists_{\text{fin}}$ полностью доказана. $\square$

Что же касается леммы 1_{fin} , то ее доказательство (вместе с доказательством соответствующего аналога леммы 5) дословно дублирует доказательство леммы 1; следует только пространство X предполагать конечным.

Таким образом, предложение 2 мы можем считать полностью доказанным. $\square$

Чтобы применять предложение 2 к функторам, определенным лишь на категории $\text{cop} \text{CW}_{\text{fin}}^{\text{op}}$, нам в первую

очередь нужно рассмотреть вопрос о распространении таких функторов на всю категорию $\text{cop } CW^{\text{op}}$.

Пусть F — произвольный функтор $\text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$. Для любого пространства X категории $\text{cop } CW^*$ мы положим

$$\bar{F}(X) = \varprojlim F(X_\gamma),$$

где X_γ пробегает все конечные (связные и пунктированные) клеточные подпространства пространства X .

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение категории $\text{cop } CW^*$, и пусть $\{X_\gamma\}$ — семейство всех конечных подпространств пространства X , а $\{Y_\delta\}$ — семейство всех конечных подпространств пространства Y . Ясно, что для любого индекса γ существует индекс δ , обладающий тем свойством, что $f(X_\gamma) \subset Y_\delta$. Раз навсегда выбрав такое δ , обозначим его через $\delta(\gamma)$, а отображение $X_\gamma \rightarrow Y_{\delta(\gamma)}$, индуцированное отображением f , — через f_γ .

Пусть $\varphi_\gamma: \varprojlim F(Y_\delta) \rightarrow F(X_\gamma)$ — композиция канонического отображения $\varprojlim F(Y_\delta) \rightarrow F(Y_{\delta(\gamma)})$ и отображения $f_\gamma^*: F(Y_{\delta(\gamma)}) \rightarrow F(X_\gamma)$. Автоматическая проверка показывает, что отображения φ_γ составляют обратный конус над обратной системой $\{F(X_\gamma)\}$ и потому индуцируют некоторое отображение

$$f^*: \varprojlim F(Y_\delta) \rightarrow \varprojlim F(X_\gamma).$$

В явном виде отображение f^* представляется формулой

$$f^*\{y_\delta\} = \{f_\gamma^* y_{\delta(\gamma)}\}.$$

От выбора функции $\gamma \mapsto \delta(\gamma)$ это отображение, очевидно, не зависит.

Ясно, что соответствия $X \mapsto \bar{F}(X)$ и $f \mapsto f^*$ составляют функтор

$$\bar{F}: \text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS},$$

совпадающий на $\text{cop } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}$ с функтором F (или, точнее, ему естественно изоморфный). Мы будем называть функтор $\bar{F}$ каноническим распространением функтора F .

Предложение 3. Функтор F тогда и только тогда представим, когда для функтора $\bar{F}$ существует финитно классифицирующая пара (u, K) .

Доказательство. Если пара (u, K) существует, то функтор F представим (так как $\tilde{F}|_{\text{con } \text{CW}_{\text{fin}}^{\text{op}}} = F$). Обратно, пусть функтор F представим, т. е. для любого конечного (связного и пунктированного) пространства X существует естественное биективное отображение

$$\omega^X: [X, K]^* \rightarrow F(X),$$

где K — некоторое пространство категории $\text{con } \text{CW}^*$. По определению $\tilde{F}(K) = \varprojlim F(K_\gamma)$, где K_γ пробегает все конечные (связные и пунктированные) подпространства пространства K . Для любого γ мы положим

$$u_\gamma = \omega^{K_\gamma}[i_\gamma],$$

где i_γ — вложение $K_\gamma \rightarrow K$. Ясно, что семейство $u = \{u_\gamma\}$ принадлежит множеству $\tilde{F}(K)$, и, как показывает непосредственная проверка, отвечающее ему отображение $u_\#^X$ для любого конечного X совпадает с отображением ω^X . Следовательно, пара (u, K) финитно классифицирует функтор $\tilde{F}$. $\square$

Вообще говоря, пара (u, K) , финитно классифицирующая функтор $\tilde{F}$ (когда она существует), определена не единственным образом. Чтобы применить к проблеме ее единственности общекатегорные соображения, мы должны ввести категорию, в которой функтор $\tilde{F}$ представим.

Определение 6. Пусть X и Y — произвольные пространства. Отображения $f, g: X \rightarrow Y$ мы будем называть *финитно гомотопными*, если для любого конечного клеточного пространства Z и любого отображения $h: Z \rightarrow X$ отображения $f \circ h$ и $g \circ h$ гомотопны. Отношение финитной гомотопности является, очевидно, отношением эквивалентности. Множество всех классов финитно гомотопных отображений $X \rightarrow Y$ мы будем обозначать символом $[X, Y]_{\text{fin}}$.

Аналогичные определения возможны, конечно, и для пунктированных пространств и их отображений. Множество всех классов финитно гомотопных пунктированных отображений $X \rightarrow Y$ мы будем обозначать символом $[X, Y]_{\text{fin}}^*$.

Замечание 3. Некоторые авторы (см., например, [11]) финитно гомотопные отображения называют *слабо*

гомотопными отображениями. Эта терминология находится в некотором конфликте с терминологией из лекции 3, и мы ею пользоваться не будем.

Теперь мы можем ввести категорию $[\text{cop } CW^*]_{\text{fin}}$, объектами которой являются связные пунктированные клеточные пространства, а морфизмами — финитно гомотопические классы их отображений. Впрочем, в соответствии с нашим общим обыкновением мы предпочтем функторы, заданные на этой категории, отождествлять с *финитно гомотопически инвариантными* функторами на категории $\text{cop } CW^*$ (т. е. с функторами, принимающими на финитно гомотопных отображениях одинаковые значения).

Ясно, что для любого функтора $F: \text{cop } CW^*_{\text{fin}} \rightarrow \text{ENS}$ функтор $\tilde{F}: \text{cop } CW^{*\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ *финитно гомотопически инвариантен* (и, значит, может рассматриваться как функтор на категории $[\text{cop } CW^*]_{\text{fin}}^{\text{op}}$). Поэтому для любой пары (u, K) , $u \in \tilde{F}(K)$, и любого пространства X категории $\text{cop } CW^*$ отображение $u_*^X: [f] \mapsto f^*u$ будет на самом деле отображением

$$(21) \quad u_*^X: [X, K]_{\text{fin}} \rightarrow \tilde{F}(X).$$

Предложение 4. Пара (u, K) тогда и только тогда финитно классифицирует функтор $\tilde{F}$, когда естественное отображение (21) биективно (т. е. пара (u, K) классифицирует функтор $\tilde{F}$ как функтор на категории $[\text{cop } CW^*]_{\text{fin}}^{\text{op}}$).

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна (ибо, если X конечно, то $[X, K]_{\text{fin}} = [X, K]^*$). Поэтому надо доказать только его необходимость, т. е. доказать, что для финитно классифицирующей пары (u, K) отображение (21) биективно.

Пусть пара (u, K) финитно классифицирует функтор $\tilde{F}$, и пусть $f, g: X \rightarrow K$ — такие отображения, что $f^*u = g^*v$ в $\tilde{F}(X)$. Тогда для любого конечного (связного и пунктированного) клеточного пространства Z и любого отображения $h: Z \rightarrow X$ будет иметь место равенство

$$(f \circ h)^*u = h^*(f^*u) = h^*(g^*u) = (g \circ h)^*u,$$

возможное — в силу финитной классифицируемости пары (u, K) — только при $f \circ h \sim g \circ h$. Следовательно, отображения f и g финитно гомотопны, а, значит, отображение (21) инъективно.

Пусть теперь $\{x_\gamma\}$ — произвольный элемент множества $\hat{F}(X) = \varprojlim F(X_\gamma)$ (где, как и выше, $\{X_\gamma\}$ — семейство всех конечных подпространств пространства X , а $x_\gamma \in F(X_\gamma)$).

Рассмотрим множество $\mathcal{U}$ всех пар (g, Y) , где $Y \subset X$, а g — такое отображение $Y \rightarrow K$ (не гомотопический класс!), что

$$g^*u|_{X_\gamma} = x_\gamma$$

для любого $X_\gamma \subset Y$. Множество $\mathcal{U}$, очевидно, не пусто и индуктивно (относительно частичного порядка, в котором $(g, Y) \leq (g', Y')$ тогда и только тогда, когда $Y \subset Y'$ и $g'|_Y = g$). Поэтому, согласно лемме Цорна, в нем существует максимальный элемент (g_0, Y_0) .

Если $Y_0 \neq X$, то в X существует такое конечное подпространство X_{γ_0} , что $X_{\gamma_0} \not\subset Y_0$. Так как пара (u, K) финитно классифицирует функтор $\hat{F}$, то существует такое (с точностью до гомотопии единственное) отображение $f_{\gamma_0}: X_{\gamma_0} \rightarrow K$, что $f_{\gamma_0}^*u = x_{\gamma_0}$. При этом на пересечении $Y_0 \cap X_{\gamma_0}$ отображение f_{γ_0} гомотопно отображению g_0 . Поэтому в силу леммы Борсука мы, без ограничения общности, можем считать, что $f_{\gamma_0} = g_0$ на $X_0 \cap X_{\gamma_0}$. Но тогда формула

$$g_1(\xi) = \begin{cases} g_0(\xi), & \text{если } \xi \in Y_0, \\ f_{\gamma_0}(\xi), & \text{если } \xi \in X_{\gamma_0}, \end{cases}$$

будет определять на подпространстве $Y_1 = Y_0 \cup X_{\gamma_0}$ отображение $g_1: Y_1 \rightarrow K$, обладающее тем свойством, что пара (g_1, Y_1) принадлежит $\mathcal{U}$ и следует за парой (g_0, Y_0) .

Поскольку в силу максимальной пары (g_0, Y_0) это невозможно, тем самым доказано, что $Y_0 = X$. Следовательно, для любого γ имеет место равенство $g_0^*(u)|_{X_\gamma} = x_\gamma$, по определению, означающее, что $u^*_{\#}[g_0] = \{x_\gamma\}$. Таким образом, отображение (21) не только инъективно, но и сюръективно. $\square$

Следствие 1. Функтор

$$F: \text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$$

на категории $\text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}$ тогда и только тогда представим, когда на категории $[\text{con } CW]^{\text{op}}_{\text{fin}}$ представим функтор $\hat{F}$.

Доказательство. См. предложение 3. $\square$

Теперь мы можем ответить на вопрос об единственности финитно классифицирующей пары (u, K) .

Отображение $h: X \rightarrow Y$ называется *финитной гомотопической эквивалентностью*, если его финитно гомотопический класс $[h]_{\text{fin}}$ обратим в категории $[\text{con } \mathcal{C}\mathcal{W}']_{\text{fin}}$ (является изоморфизмом этой категории).

Следствие 2. Любые две пары (u, K) и (u', K') , финитно классифицирующие функтор $\hat{F}$, финитно гомотопически эквивалентны (т. е. существует такая финитно гомотопическая эквивалентность $h: K' \rightarrow K$, что $h^*u = u'$).

Доказательство. Из общей теории категорий известно (см. выше), что любые две пары, классифицирующие представимый функтор, изоморфны. $\square$

Для любых двух функторов G и F (определенных на некоторой категории $\mathbf{A}$) множество всех естественных преобразований $G \rightarrow F$ (морфизмов функторов) мы будем обозначать символом $\text{Mog}(G, F)$.

В частности, для любого функтора $F: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS}$ и любого объекта X категории $\mathbf{A}$ определено множество $\text{Mog}(X^*, F)$ всех естественных преобразований $X^* \rightarrow F$, и очевидная проверка показывает, что формула

$$\hat{F}(X) = \text{Mog}(X^*, F)$$

определяет некоторый функтор $\hat{F}: \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS}$. При этом формула

$$\omega^X(\varphi) = \varphi^X(\text{id}_X),$$

где $\varphi \in \hat{F}(X) = \text{Mog}(X^*, F)$ (и, значит, $\varphi^X: X^*(X) \rightarrow F(X)$, т. е. $\varphi^X: A(X, X) \rightarrow F(X)$) определяет отображения $\omega^X: \hat{F}(X) \rightarrow F(X)$, составляющие — как показывает автоматическая проверка — естественное преобразование

$$(22) \quad \omega: \hat{F} \rightarrow F.$$

Следующее важное общекатегорное утверждение является одной из форм так называемой леммы Ионеды.

Предложение 5. Если функтор F представим, то преобразование (22) биективно (является изоморфизмом функторов).

Доказательство. Пусть функтор F классифицируется парой (u, K) , $u \in F(K)$. Тогда для любого объекта X категории $\mathbf{A}$ каждый элемент $x \in F(X)$ единственным образом представляется в виде f^*u , где f — некоторый

морфизм $X \rightarrow K$. Для произвольного объекта Y категории $\mathbf{A}$ мы определим отображение множеств

$$\varphi^Y: X^*(Y) \rightarrow F(Y),$$

сопоставив произвольному элементу $g \in X^*(Y)$, т. е. морфизму $g: Y \rightarrow X$, элемент $(f \circ g)^* u \in F(Y)$. Автоматическая проверка показывает, во-первых, что отображения φ^Y составляют естественное преобразование $\varphi: X^* \rightarrow F$, во-вторых, что возникающие таким образом отображения

$$F(X) \rightarrow \text{Mor}(X^*, F), \quad x \mapsto \varphi,$$

в свою очередь составляют естественное преобразование $F \rightarrow \hat{F}$, и, в-третьих, что это естественное преобразование обратное к преобразованию (22). Следовательно, преобразование (22) биективно. $\square$

Таким образом, согласно предложению 5 для любого представимого функтора F каждое множество $F(X)$ естественным образом отождествляется с множеством $\text{Mor}(X^*, F)$.

В частности, это верно для представимых функторов на категории copCW^{op} , так что для любого представимого функтора $F: \text{copCW}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ и любого связного пунктированного клеточного пространства X множество $F(X)$ естественным образом отождествляется с множеством $\text{Mor}(X^*, F)$ естественных преобразований $X^* \rightarrow F$:

$$(23) \quad F(X) = \text{Mor}(X^*, F).$$

Аналогично, обозначив через X_{fin}^* функтор $[\text{copCW}^*]_{\text{fin}} \rightarrow \text{ENS}$, определенный формулой

$$X_{\text{fin}}^*(Y) = [Y, X]_{\text{fin}}, \quad Y \in \text{copCW}^*,$$

мы немедленно получим, что для любого представимого функтора $F: \text{copCW}_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ и любого связного пунктированного клеточного пространства X множество $\hat{F}(X)$ естественным образом отождествляется с множеством $\text{Mor}(X_{\text{fin}}^*, \hat{F})$ всех естественных преобразований $X_{\text{fin}}^* \rightarrow \hat{F}$:

$$(24) \quad \hat{F}(X) = \text{Mor}(X_{\text{fin}}^*, \hat{F}).$$

В последнем равенстве функтор $\hat{F}$ рассматривается, конечно, как функтор на $[\text{copCW}^*]_{\text{fin}}^{\text{op}}$. Однако аналогичный результат можно получить, и оставаясь в рамках категории $\text{copCW}_{\text{fin}}^*$.

С этой целью мы заметим, что для любого пространства X категории $\text{con } CW^*$ и любого функтора $F: \text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ определено множество

$$\text{Mog}(X^* |_{\text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}}, F)$$

всех естественных преобразований $X^* |_{\text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}} \rightarrow F$, где

$X |_{\text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}}$ — ограничение функтора

$$X^*: \text{con } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$$

на категории $\text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}$. Допуская определенную волюнтарность, мы будем это множество обозначать символом $\text{Mog}(X^*, F)$ (а его элементы будем называть естественными преобразованиями $X^* \rightarrow F$).

Теперь легко видеть, что для любого функтора $F: \text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ и любого пунктированного связного клеточного пространства X множества $\text{Mog}(X^*, F)$ и $\text{Mog}(X_{\text{fin}}^*, F)$ находятся в естественном биективном соответствии. Действительно, пусть $\varphi: X^* \rightarrow F$ — произвольное естественное преобразование функтора X^* в функтор F , и пусть Y — произвольное пространство категории $\text{con } CW^*$. Тогда для каждого отображения $g: Y \rightarrow X$ и каждого конечного подпространства $Y_\gamma \subset Y$ в множестве $F(Y_\gamma)$ будет определен элемент $y_\gamma = \varphi^{Y_\gamma}[g|_{Y_\gamma}]$, зависящий только от финитно гомотопического класса $[g]_{\text{fin}}$ отображения g . Непосредственная проверка показывает при этом, что семейство $\{y_\gamma\}$ принадлежит множеству $\varprojlim F(Y_\gamma) = \tilde{F}(Y)$ и что получающиеся отображения

$$\varphi^Y: X_{\text{fin}}^*(Y) \rightarrow \tilde{F}(Y), \quad [g]_{\text{fin}} \mapsto \{y_\gamma\},$$

составляют естественное преобразование $\tilde{\varphi}: X_{\text{fin}}^* \rightarrow \tilde{F}$.

Обратно, так как для каждого конечного пространства Y отображения $Y \rightarrow X$ гомотопны тогда и только тогда, когда они финитно гомотопны, то любое естественное преобразование $\psi: X_{\text{fin}}^* \rightarrow \tilde{F}$ корректно определяет естественное преобразование $\psi': X^* \rightarrow F$, для которого

$$\psi'^Y[g] = \psi^Y[g]_{\text{fin}},$$

где $g: Y \rightarrow X$ и $Y \in \text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}}$. Автоматическая проверка

показывает при этом, что соответствия $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ и $\psi \mapsto \psi'$ взаимно обратны. $\square$

В частности, мы видим, что для любого представимого функтора $F: \text{copCW}_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ и любого связного пунктированного клеточного пространства X множество $\overleftarrow{F}(X)$ естественным образом отождествляется с множеством $\text{Mor}(X^*, F)$ естественных преобразований $X^* \rightarrow F$:

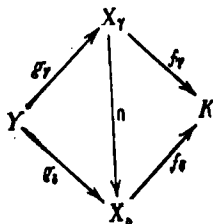
$$(25) \quad \overleftarrow{F}(X) = \text{Mor}(X^*, F).$$

В явном виде отождествление (25) описывается следующим образом.

Пусть $\{x_\gamma\}$ — произвольный элемент множества $\overleftarrow{F}(X) = \varprojlim F(X_\gamma)$, где, как и выше, X_γ пробегает все конечные (связные и пунктированные) подпространства пространства X , а $x_\gamma \in F(X_\gamma)$. Условие представимости функтора F означает, что для любого пространства Y категории $\text{copCW}_{\text{fin}}$ задано естественное биективное отображение $\omega^Y: [Y, K] \rightarrow F(Y)$, где K — некоторое пространство категории copCW^* . Поэтому, в частности, для любого X_γ существует такое (с точностью до гомотопии единственное) отображение $f_\gamma: X_\gamma \rightarrow K$, что

$$\omega^{X_\gamma}[f_\gamma] = x_\gamma.$$

С другой стороны, для любого пространства Y категории $\text{copCW}_{\text{fin}}$ произвольное отображение $g: Y \rightarrow X$ может быть для некоторого γ записано в виде $g = i_\gamma \circ g_\gamma$, где $g_\gamma: Y \rightarrow X_\gamma$, а $i_\gamma: X_\gamma \rightarrow X$ — вложение. При этом, если $X_\gamma \subset X_\delta$, то в диаграмме



левый треугольник будет коммутативен. Что же касается правого треугольника, то ввиду соотношения $x_\gamma | x_\delta = x_\delta$,

он будет гомотопически коммутативен. Это показывает, что формула

$$\varphi^Y[g] = \omega^Y[f_Y \circ g_Y],$$

где $[g] \in [Y, X]^* = X^*(Y)$, корректно определяет некоторый элемент $\varphi^Y[g]$ множества $F(Y)$, т. е. что эта формула задает некоторое отображение

$$\varphi^Y: X^*(Y) \rightarrow F(Y).$$

Отображения φ^Y составляют естественное преобразование $\varphi: X^* \rightarrow F$, которое и отождествляется в силу (25) с элементами $\{x_Y\}$.

Рассмотрим теперь вопрос об условиях, обеспечивающих представимость функтора

$$F: \text{cop CW}_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$$

(т. е., что равносильно, существование для функтора $\tilde{F}: \text{cop CW}^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$ финитно классифицирующей пары).

Конечно, для представимости функтора F необходимо, чтобы он был *полуточен*, т. е. чтобы он удовлетворял следующим аналогам аксиом **B** и **MB** для категории $\text{cop CW}_{\text{fin}}^*$.

B_{fin}. Для любого конечного семейства $\{X_\alpha\}$ конечных (связных и пунктированных) клеточных пространств и их букета $X = \bigvee X_\alpha$ отображение

$$F(X) \rightarrow \prod_{\alpha} F(X_\alpha), \quad x \mapsto \{x|_{X_\alpha}\}, \quad x \in F(X),$$

биективно.

MB_{fin}. Пусть X — конечное (связное и пунктированное) клеточное пространство, а A и B — такие его клеточные подпространства (также связные и пунктированные), что $X = A \cup B$. Тогда для любых элементов $a \in F(A)$, $b \in F(B)$, удовлетворяющих соотношению

$$a|_C = b|_C, \quad \text{где } C = A \cap B,$$

существует такой элемент $x \in F(X)$, что

$$x|_A = a, \quad x|_B = b.$$

Функтор $F: \text{cop CW}_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{GROUPS}$, принимающий значения в категории групп, мы будем называть *полуточным*, если полуточным функтором является его композиция с функтором игнорирования $\text{GROUPS} \rightarrow \text{ENS}$.

Аналогично, функтор $F: \text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{GROUPS}$ мы будем называть *представимым*, если представима его композиция с функтором игнорирования, т. е. если для любого пространства X категории $\text{con } CW_{\text{fin}}$ существует естественное биективное отображение

$$\omega^X: [X, K] \rightarrow F(X),$$

где K — некоторое связное пунктированное (не обязательно конечное) клеточное пространство. [Заметим, что пространство K , вообще говоря, H -группой не является.]

Теорема 2. *Любой гомотопически инвариантный полуточный функтор*

$$F: \text{con } CW_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \text{GROUPS}$$

представим.

Эта теорема известна как теорема Адамса.

В силу предложения 2 для доказательства теоремы 2 достаточно доказать, что функтор $\tilde{F}$ *финитно полуточен* (удовлетворяет аксиомам **Б**, **ЛН** и **МВ_f**).

Проверка аксиомы **Б**. Пусть $X = \bigvee X_\alpha$, и пусть $\{X_{\gamma_\alpha}\}$ — семейство всех конечных (связных и пунктированных) подпространств пространства X_α (здесь α пробегает некоторое множество индексов A , а γ_α — множество индексов Γ_α). Для каждого конечного подмножества γ множества $\Gamma = \bigcup \Gamma_\alpha$ (мы считаем, что $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \emptyset$ для различных индексов $\alpha, \beta \in A$) букет

$$X_\gamma = \bigvee_{\gamma_\alpha \in \gamma} X_{\gamma_\alpha}$$

является конечным подпространством пространства X , и любое конечное (связное и пунктированное) подпространство пространства X имеет такой вид. Следовательно,

$$\tilde{F}(X) = \varprojlim F(X_\gamma),$$

т. е. $\tilde{F}(X)$ состоит из всех семейств $\{x_\gamma\}$, где $x_\gamma \in F(X_\gamma)$ и $x_{\gamma'} = x_\gamma|_{X_{\gamma'}}$, если $X_{\gamma'} \subset X_\gamma$. При этом $X_{\gamma'} \subset X_\gamma$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $\gamma'_\alpha \in \gamma'$ существует такой элемент $\gamma_\alpha \in \gamma$, принадлежащий тому же множеству Γ_α , что $X_{\gamma'_\alpha} \subset X_{\gamma_\alpha}$. Поэтому, положив $x_{\gamma_\alpha} = x_{\{\gamma_\alpha\}}$ для любого элемента $\gamma_\alpha \in \Gamma_\alpha$, где $\{\gamma_\alpha\}$ — одноэле-

ментное множество, состоящее из элемента γ_α , мы для каждого $\alpha \in A$ получим элемент $x_\alpha = \{x_{\gamma_\alpha}\}$ множества $\tilde{F}(X_\alpha)$, и формула $q(x_\gamma) = \{x_\alpha\}$ будет определять некоторое отображение

$$q: \tilde{F}(X) \rightarrow \prod_{\alpha} \tilde{F}(X_\alpha).$$

При этом, так как, согласно аксиоме B_{fin} , любой элемент $x_\gamma \in F(X_\gamma)$ однозначно определяется элементами

$$x_{\gamma_\alpha} = x_\gamma|_{X_{\gamma_\alpha}}, \quad \gamma_\alpha \in \gamma,$$

и любой набор элементов x_{γ_α} задает некоторый элемент x_γ , то отображение q биективно.

Для завершения доказательства остается заметить, что отображение $\{x_\gamma\} \mapsto x_\alpha$ является не чем иным, как отображением $\tilde{F}(X) \rightarrow \tilde{F}(X_\alpha)$, индуцированным вложением $X_\alpha \rightarrow X$, значит, отображение q — не чем иным, как отображением (б) из аксиомы Б.

Тем самым, аксиома Б для функтора $\tilde{F}$ полностью проверена.

Проверка аксиомы ЛН. Пусть $X = \bigcup X_\alpha$, где X_α , $\alpha \in A$, линейно упорядочены по включению, и пусть $\{X_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — семейство всех конечных (связных и пунктированных) подпространств пространства X . Пусть, далее, Γ_α — подмножество множества Γ , состоящее из таких индексов γ_α , что $X_{\gamma_\alpha} \subset X_\alpha$. Тогда, по определению,

$$\tilde{F}(X) = \varprojlim F(X_\gamma), \quad \tilde{F}(X_\alpha) = \varprojlim F(X_{\gamma_\alpha}),$$

и отображение (20) (для функтора $\tilde{F}$) переводит произвольный элемент $x = \{x_\gamma\} \in \tilde{F}(X)$, $x_\gamma \in F(X_\gamma)$, в элемент $\{x_\alpha\} \in \varprojlim \tilde{F}(X_\alpha)$, определенный формулой

$$x_\alpha = \{x_{\gamma_\alpha}\}, \quad \gamma_\alpha \in \Gamma_\alpha$$

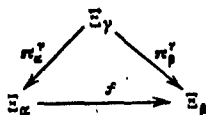
(рассматриваемый как функция $\gamma_\alpha \mapsto x_{\gamma_\alpha}$, элемент x_α является не чем иным, как ограничением на $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$ элемента x , рассматриваемого как функция $\gamma \mapsto x_\gamma$). Поскольку для любого $\gamma \in \Gamma$ существует такое $\alpha \in A$, что $X_\gamma \subset X_\alpha$, отсюда непосредственно следует, что отображение (20) биективно. $\square$

Замечание 1. Элемент α , для которого $X_\gamma \subset X_\alpha$, существует и в более общем случае, когда предупорядоченное множество A всего лишь *направленно* (для любых двух элементов $\alpha, \beta \in A$ существует такой элемент γ , что $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$). Поэтому отображение (20) биективно для любого упорядоченного по включению семейства $\{X_\alpha\}$, множество индексов A которого направленно.

Проверка оставшейся аксиомы **MB**, более деликатна и требует довольно большого предварительного труда. (В частности, в ней впервые используется предположение, что функтор F принимает значения в категории групп.)

Пусть $\{\Xi_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$ — обратная система непустых множеств Ξ_α с индексами из направленного множества A .

Мы скажем, что индексы $\alpha, \beta \in A$ *эквивалентны*, если существует такой индекс γ и такое биективное отображение $f: \Xi_\alpha \rightarrow \Xi_\beta$, что $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$ и диаграмма



коммутативна. Ясно, что это отношение действительно является отношением эквивалентности и потому определено множество $\bar{A}$ соответствующих классов эквивалентности.

Лемма 6. Если все отображения π_α^β надъективны, а множество $\bar{A}$ счетно (или конечно), то обратный предел $\lim \Xi_\alpha$ множеств Ξ_α не пуст.

Доказательство. Пусть $\{\gamma_i, i=0, 1, 2, \dots\}$ — счетная система представителей классов из $\bar{A}$. Поскольку множество A направленно, существует такая возрастающая последовательность

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_i < \dots$$

его элементов, что $\gamma_i \leq \alpha_i$ для любого $i=0, 1, 2, \dots$, а поскольку все отображения π_α^β надъективны, существуют такие элементы $x_{\alpha_i} \in \Xi_{\alpha_i}$, что $\pi_{\alpha_j}^{\alpha_i} x_{\alpha_i} = x_{\alpha_j}$ для любых i и $j \leq i$. Наша цель состоит в том, чтобы доопределить элементы x_α для всех $\alpha \in A$ таким образом, чтобы для

любых индексов $\alpha, \beta \in A$ при $\alpha \leq \beta$ имело место равенство

$$(26) \quad \pi_{\alpha}^{\beta} x_{\beta} = x_{\alpha}.$$

(Тогда семейство $\{x_{\alpha}\}$ будет элементом множества $\lim_{\leftarrow} \Xi_{\alpha}$ и, значит, это множество будет не пусто.)

С этой целью мы для каждого $\alpha \in A$ выберем единственный индекс γ_i , эквивалентный α , и рассмотрим соответствующее отображение $f: \Xi_{\gamma_i} \rightarrow \Xi_{\alpha}$, удовлетворяющее для некоторого $\gamma \geq \alpha$, γ_i соотношению $f \circ \pi_{\gamma_i}^{\gamma} = \pi_{\alpha}^{\gamma}$. (Заметим, что в силу надъективности отображения $\pi_{\gamma_i}^{\gamma}$, отображение f единственно). Затем мы положим

$$x_{\alpha} = (f \circ \pi_{\gamma_i}^{\alpha}) x_{\alpha_i}.$$

Тем самым элементы x_{α} будут однозначно определены для всех α , и нам остается лишь показать, что для них выполнено соотношение (26).

По определению

$$x_{\beta} = (g \circ \pi_{\gamma_j}^{\alpha_j}) x_{\alpha_j},$$

где γ_j — индекс, эквивалентный β , а $g: \Xi_{\gamma_j} \rightarrow \Xi_{\beta}$ — такое отображение, что для некоторого $\gamma' \geq \beta$, γ_j имеет место равенство $g \circ \pi_{\gamma_j}^{\gamma'} = \pi_{\beta}^{\gamma'}$. При этом, пользуясь тем, что γ' можно неограниченно увеличивать (если годится γ' , то годится и любое $\gamma'' \geq \gamma'$), мы без ограничения общности, можем считать, что $\gamma' = \gamma$. Более того, по тем же соображениям можем считать, что $\gamma \geq \alpha_i, \alpha_j$.

Пусть сначала $i \leq j$. Тогда имеет место — очевидно, коммутативная — диаграмма

$$(27) \quad \begin{array}{ccccc} & & \Xi_{\gamma_j} & \xrightarrow{g} & \Xi_{\beta} \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ \Xi_{\alpha_j} & \xrightarrow{\quad} & \Xi_{\gamma_j} & & \Xi_{\beta} \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & \Xi_{\gamma} & & \\ & \nwarrow & & \nwarrow & \\ \Xi_{\alpha_i} & \xrightarrow{\quad} & \Xi_{\gamma_i} & \xrightarrow{f} & \Xi_{\alpha} \end{array}$$

все стрелки которой, за исключением стрелок f и g , являются отображениями π . При этом, поскольку отображение $\pi_{\alpha_j}^{\gamma}$ надъективно, существует такой элемент

$x \in \Xi_\gamma$, что $\pi_{\alpha_j}^\gamma x = x_{\alpha_j}$ (и, значит, $\pi_{\alpha_i}^\gamma x = x_{\alpha_i}$). Поэтому

$$\pi_{\alpha}^\beta x_\beta = (\pi_{\alpha}^\beta \circ g \circ \pi_{\gamma_j}^{\alpha_j} \circ \pi_{\alpha_j}^\gamma) x = (f \circ \pi_{\gamma_i}^{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i}^\gamma) x = \\ = (f \circ \pi_{\gamma_i}^{\alpha_i}) x_{\alpha_i} = x_\alpha.$$

При $i \geq j$ в диаграмме (27) лишь обращается левая вертикальная стрелка. В этом случае элемент $x \in \Xi_\gamma$ надо выбрать из условия $\pi_{\alpha_i}^\gamma x = x_{\alpha_i}$ (и тогда для него будет иметь место равенство $\pi_{\alpha_j}^\gamma x = x_{\alpha_j}$). В остальном выкладка полностью сохраняется. $\square$

Вернемся теперь к полуточному функтору F , принимающему значения в категории GROUPS. Интересующие нас сейчас его свойства в принципе не зависят, определен ли этот функтор на категории $\text{cop}CW_{\text{fin}}^{\text{op}}$ или на категории $\text{cop}CW^{\text{op}}$. Поэтому мы одновременно будем рассматривать обе возможности.

Наша ближайшая цель будет состоять в обобщении и усилении утверждения о точности последовательности (16). При этом нам будет удобно пространства X и Y обозначить через A и X , а отображение $f: X \rightarrow Y$ — через $i: A \rightarrow X$. Последовательность (16) приобретет вид

$$F(C^*(i)) \xrightarrow{i^*} F(X) \xrightarrow{i^*} F(A),$$

где $C^*(i) = CA \cup_i X$, и будет концом бесконечной влево последовательности

$$(28) \quad \dots \rightarrow F(S^{n+1}A) \xrightarrow{(S^n k)^*} F(S^n C^*(i)) \xrightarrow{(S^n i)^*} F(S^n X) \xrightarrow{(S^n i)^*} \\ \rightarrow F(S^n A) \rightarrow \dots \rightarrow F(S^1 A) \xrightarrow{k^*} F(C^*(i)) \xrightarrow{i^*} F(X) \xrightarrow{i^*} F(A),$$

получающейся применением функтора F к точной последовательности Пуппе

$$(29) \quad A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} C^*(i) \xrightarrow{k} S^1 A \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow S^n A \xrightarrow{S^n i} S^n X \xrightarrow{S^n j} S^n C^*(i) \xrightarrow{S^n k} S^{n+1} A \rightarrow \dots$$

отображения $i: A \rightarrow X$ (см. формулу (26) Дополнения к лекции I.5).

Коточность последовательности (29), по определению, означает, что для любого представимого функтора F

последовательность (28) точна. Однако на самом деле последовательность (28) точна для любого гомотопически инвариантного функтора F , удовлетворяющего аксиоме $\mathbf{MB}$ (и, в частности, для любого полуточного функтора F), поскольку по построению любой трехчленный отрезок последовательности (29) гомотопически изоморфен некоторой последовательности вида (17) (см. Дополнение к лекции I.5) и, значит, отвечающий ему отрезок последовательности (28) изоморфен (в категории $\mathbf{ENS}'$) соответствующей точной последовательности (16). (Естественно, что в случае, когда клеточные пространства A и X конечны, достаточно требовать, чтобы функтор F удовлетворял аксиоме $\mathbf{MB}_{\text{fin.}}$)

Как уже выше было замечено, для любого полуточного функтора $F: \text{cop } \mathbf{CW}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS}$ (или $F: \text{cop } \mathbf{CW}_{\text{fin}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS}$) множества $F(S^q)$, $q \geq 1$, являются группами. По аналогичным соображениям являются группами все множества вида $F(S^*X)$ (и вообще, — вида $F(K)$, где K — произвольная $\mathbf{H}$ -когруппа). При этом, если F принимает значения в категории групп, то $F(S^*X)$ будет группой категории $\mathbf{GROUPS}$ и, значит, согласно общей лемме 3 из Дополнения к лекции I.4, будет абелевой группой (а обе групповые структуры на $F(S^*X)$ будут совпадать).

Таким образом, мы видим, что для полуточного функтора F , принимающего значения в категории групп, все группы последовательности (28), за исключением последних трех групп, являются абелевыми группами.

В частном случае, когда i является корасслоением (условие, автоматически выполненное для любой клеточной пары (X, A)), последовательность (29), как мы знаем (см. Дополнение к лекции I.5), гомотопически изоморфна последовательности

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A \xrightarrow{k} S^1 A \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow S^n A \xrightarrow{S^ni} S^n X \xrightarrow{S^nj} S^n(X/A) \xrightarrow{S^nk} S^{n+1} A \rightarrow \dots,$$

где теперь j — отображение факторизации, а k — композиция гомотопической эквивалентности, обратной к отображению факторизации $C^*(i) \rightarrow C^*(i)/C^*A = X/A$, и отображения k из последовательности (29) (являющегося отображением факторизации $C^*(i) \rightarrow C^*(i)/X = S^1 A$). Поэтому в этом случае точная последовательность (28) изоморфна

-последовательности

$$(30) \quad \dots \rightarrow F(S^{n+1}A) \xrightarrow{(S^{n+1}k)^*} F(S^n(X/A)) \xrightarrow{(S^n j)^*} F(S^n X) \xrightarrow{(S^n i)^*} \\ \rightarrow F(S^n A) \rightarrow \dots \rightarrow F(S^1 A) \xrightarrow{k^*} F(X/A) \xrightarrow{i^*} F(X) \xrightarrow{i^*} F(A),$$

которая, следовательно, также точна.

Пусть теперь нам дана клеточная триада $(X; A, B)$, состоящая из связных пунктированных пространств, для которой $X = A \cup B$. Предполагая пересечение $C = A \cap B$ связным, мы наряду с точной последовательностью (30) для пары (X, A) можем построить аналогичную точную последовательность для пары (B, C) . Во избежание путаницы отображения i, j, k для пары (X, A) мы обозначим символами i_X, j_X, k_X , а для пары (B, C) — символами i_B, j_B, k_B . Поскольку символы i, j, k теперь освободились, мы используем символ i для обозначения вложения $C \rightarrow A$, символ k для обозначения вложения $B \rightarrow X$, а символ j для обозначения естественного отображения

$$B/C \rightarrow X/A.$$

Кроме того, для упрощения формул мы для произвольного пространства Z вместо $F(S^n Z)$ будем писать $F^n Z$ и аналогично для произвольного отображения r вместо $(S^n r)^*$ будем писать r^n . (Таким образом, $F^0 = F$ и $r^0 = r^*$.)

Все эти соглашения позволяют нам написать бесконечную влево диаграмму

$$(31) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{i_X^{n+1}} & F^{n+1}A & \xrightarrow{k_X^n} & F^n(X/A) & \xrightarrow{j_X^n} & F^n X & \xrightarrow{i_X^n} & \dots \\ & & \downarrow i^{n+1} & & \downarrow j^n & & \downarrow k^n & & \\ \dots & \xrightarrow{i_B^{n+1}} & F^{n+1}C & \xrightarrow{k_B^n} & F^n(B/C) & \xrightarrow{j_B^n} & F^n B & \xrightarrow{i_B^n} & \dots \\ & & & & & & & & \\ & & & & \xrightarrow{i_X^n} & F^n A & \xrightarrow{k_X^{n-1}} & F^{n-1}(X/A) & \xrightarrow{j_X^{n-1}} & \dots \\ & & & & \downarrow i^n & & & \downarrow j^{n-1} & & \\ & & & & \xrightarrow{i_B^n} & F^n C & \xrightarrow{k_B^{n-1}} & F^{n-1}(B/C) & \xrightarrow{j_B^{n-1}} & \dots \end{array}$$

каждый квадрат которой коммутативен, а строки точны.

Легко видеть, что отображение $j: B/C \rightarrow X/A$ является гомеоморфизмом. Поэтому все отображения j^n представляют собой изоморфизмы (и, значит, для них определены обратные изоморфизмы $(j^n)^{-1}: F^n(B/C) \rightarrow F^n(X/A)$).

Считая все группы диаграммы (31) записанными аддитивно, мы для любого $n \geq 0$ определим отображения

$$\begin{aligned}\varphi^n: F^n A \oplus F^n B &\rightarrow F^n C, \\ \psi^n: F^n X &\rightarrow F^n A \oplus F^n B, \\ \Delta^n: F^{n+1} C &\rightarrow F^n X\end{aligned}$$

формулами

$$\begin{aligned}\varphi^n(a, b) &= i^n a - i_B^n b, \quad a \in F^n A, \quad b \in F^n C, \\ \psi^n x &= (i_X^n x, k^n x), \quad x \in F^n X, \\ \Delta^n &= j_X^n \circ (j^n)^{-1} \circ k_B^n.\end{aligned}$$

В результате мы получим бесконечную влево последовательность

$$(32) \quad \dots \rightarrow F^{n+1} A \oplus F^{n+1} B \xrightarrow{\varphi^{n+1}} F^{n+1} C \xrightarrow{\Delta^n} F^n X \xrightarrow{\psi^n} F^n A \oplus F^n B \xrightarrow{\varphi^n} F^n C \rightarrow \dots \rightarrow F^1 C \xrightarrow{\Delta} F X \xrightarrow{\psi} F A \oplus F B \xrightarrow{\varphi} F C$$

(где $\Delta = \Delta^0$, $\psi = \psi^0$ и $\varphi = \varphi^0$), называемую *последовательностью Майера — Виеториса* триады $(X; A, B)$ (по отношению к функтору F).

Заметим, что все отображения последовательности (32) являются гомоморфизмами, за возможным исключением отображения φ (в случае, когда группа FC неабелева).

Предложение 3. Для любого полуточного гомотопически инвариантного функтора F , принимающего значения в категории групп, последовательность Майера — Виеториса (32) точна.

Доказательство. Точность в члене $F^n A \oplus F^n B$. По определению

$$(\varphi^n \circ \psi^n) x = (i^n \circ i_X^n) x - (i_B^n \circ k^n) x = 0$$

для любого элемента $x \in F^n X$. Обратно, если $\varphi^n(a, b) = 0$, т. е. $i^n a = i_B^n b$, то

$$(j^{n-1} \circ k_X^{n-1}) a = (k_B^{n-1} \circ i^n) a = (k_B^{n-1} \circ i_B^n) b = 0$$

и, значит, $k_X^{n-1} a = 0$ (ибо j^{n-1} — изоморфизм). Поэтому существует такой элемент $x' \in F^n X$, что $a = i_X^n x'$. При этом

$$(i_B^n \circ k^n) x' = (i^n \circ i_X^n) x' = i^n a = i_B^n b,$$

и, значит, существует такой элемент $c \in F^n(B/C)$, что

$$j_B^n c = b - k^n x'.$$

Мы положим

$$x = x' + (j_X^n \circ (j^n)^{-1}) c.$$

Тогда

$$i_X^n x = i_X^n x' = a \quad \text{и} \quad k^n x = k^n x' + j_B^n c = b,$$

т. е. $\psi^n x = (a, b)$.

Точность в члене $F^n X$. По определению $(\psi^n \circ \Delta^n) c = (i_X^n \Delta^n c, k^n \Delta^n c)$ для любого элемента $c \in F^{n+1} C$. Но, так как $i_X^n \circ k^n = 0$, то $i_X^n \circ \Delta^n = 0$, а так как $k^n \circ j_X^n = j_B^n \circ j^n$, то $k^n \circ \Delta^n = j_B^n \circ k_B^n = 0$. Следовательно, $\psi^n \circ \Delta^n = 0$. Обратно, если $\psi^n x = 0$, т. е. $i_X^n x = 0$ и $k^n x = 0$, то существует такой элемент $a \in F^n (X/A)$, что $j_X^n a = 0$, причем этот элемент будет удовлетворять соотношению $(j_B^n \circ j^n) a = 0$. Поэтому существует такой элемент $c \in F^{n+1} C$, что $k_B^n c = j^n a$, т. е. такой, что

$$\Delta^n c = (j_X^n \circ (j^n)^{-1} \circ k_B^n) c = j_X^n a = x.$$

Точность в члене $F^{n+1} C$. По определению

$$(\Delta^n \circ \varphi^{n+1})(a, b) = (\Delta^n \circ i^{n+1}) a - (\Delta^n \circ i_B^{n+1}) b$$

для любых элементов $a \in F^{n+1} A$ и $b \in F^{n+1} B$. Но

$$\Delta^n \circ i^{n+1} = j_X^n \circ (j^n)^{-1} \circ k_B^n \circ i^{n+1} = j_X^n \circ k_X^n = 0$$

и

$$\Delta^n \circ i_B^{n+1} = j_X^n \circ (j^n)^{-1} \circ k_B^n \circ i_B^{n+1} = 0.$$

Следовательно, $\Delta^n \circ \varphi^{n+1} = 0$. Обратно, если $\Delta^n c = 0$, $c \in F^{n+1} C$, то существует такой элемент $a \in F^{n+1} A$, что $k_X^n a = ((j^n)^{-1} \circ k_B^n) c$, т. е. такой, что

$$(k_B^n \circ i^{n+1}) a = k_B^n c.$$

Поэтому существует такой элемент $b \in F^{n+1} B$, что $i_B^{n+1} b = i^{n+1} a - c$, т. е. такой, что

$$c = i^{n+1} a - i_B^{n+1} b = \psi^{n+1}(a, b). \quad \square$$

Предложение 3 справедливо как для функторов на категории $\text{cop} CW^{\text{op}}$, так и для функторов на категории $\text{cop} CW_{\text{fin}}^{\text{op}}$ (разумеется, в последнем случае пространство X надо предполагать конечным).

Заметим, что точность последовательности (32) в члене $FA \oplus FB$ равносильна аксиоме **MB** (или **MB**_{fin}).

Теперь мы уже можем вернуться к проверке для функтора $\tilde{F}$ аксиомы **MB**_J.

Проверка аксиомы **MB**_J. Пусть (связное и пунктированное) клеточное пространство X разложено в объеди-

нение двух (связных и пунктированных) клеточных подпространств A и B , пересечение $C = A \cap B$ которых конечно (и связно). Пусть, далее, $a \in \tilde{F}(A)$ и $b \in \tilde{F}(B)$ — такие элементы, что

$$a|_C = b|_C.$$

Нам нужно показать, что существует такой элемент $x \in \tilde{F}(X)$, что

$$(33) \quad a = x|_A, \quad b = x|_B.$$

С этой целью мы в первую очередь заметим, что множество всех конечных (и связных) подпространств пространства A , содержащих подпространство C , конфинально в множестве всех конечных подпространств этого пространства, т. е. для любого клеточного (связного и пунктированного) подпространства $A' \subset A$ существует такое конечное (связное и пунктированное) подпространство $A'' \subset A$, содержащее подпространство C , что $A' \subset A''$ (годится, например, $A'' = A' \cup C$). Поэтому, без ограничения общности, мы можем считать, что

$$\tilde{F}(A) = \varprojlim F(A_\alpha),$$

где A_α пробегает все конечные (и связные) подпространства пространства A , содержащие подпространство C .

Аналогично, мы можем считать, что

$$\tilde{F}(B) = \varprojlim F(B_\beta),$$

где B_β пробегает все конечные (и связные) подпространства пространства B , содержащие подпространство C , и

$$\tilde{F}(X) = \varprojlim F(X_{\alpha\beta}), \quad \text{где} \quad X_{\alpha\beta} = A_\alpha \cup B_\beta.$$

Пусть, $a = \{a_\alpha\}$, где $a_\alpha \in F(A_\alpha)$, $b = \{b_\beta\}$, где $b_\beta \in F(B_\beta)$, и пусть $\Xi_{\alpha\beta}$ — множество всех таких элементов $x_{\alpha\beta} \in F(X_{\alpha\beta})$, что

$$x_{\alpha\beta}|_{A_\alpha} = a_\alpha \quad \text{и} \quad x_{\alpha\beta}|_{B_\beta} = b_\beta.$$

Так как функтор F удовлетворяет по условию аксиоме **MB_{fin}**, то все множества $\Xi_{\alpha\beta}$ не пусты.

Если $A_{\alpha'} \subset A_\alpha$ и $B_{\beta'} \subset B_\beta$, то $X_{\alpha'\beta'} \subset X_{\alpha\beta}$, и потому определено отображение $F(X_{\alpha\beta}) \rightarrow F(X_{\alpha'\beta'})$. Ясно, что это отображение переводит $\Xi_{\alpha\beta}$ в $\Xi_{\alpha'\beta'}$ и потому

индуцирует некоторое отображение

$$(34) \quad \pi_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}: \Xi_{\alpha\beta} \rightarrow \Xi_{\alpha'\beta'}.$$

Обратный предел $\varprojlim \Xi_{\alpha\beta}$ множеств $\Xi_{\alpha\beta}$ относительно этих отображений является, очевидно, подмножеством множества $\varprojlim F(X_{\alpha\beta}) = \hat{F}(X)$, состоящим из элементов x , удовлетворяющих соотношениям (33). Поэтому нам нужно только доказать, что *этот обратный предел не пуст*.

В силу леммы 6 для этого достаточно доказать следующие три утверждения:

а. Множество A всех пар $\alpha\beta$ направленно (имеется в виду, что $\alpha\beta < \alpha'\beta'$, если $X_{\alpha\beta} \subset X_{\alpha'\beta'}$).

б. Отображения (34) надъективны.

в. Множество $\bar{A}$ счетно.

Впрочем, утверждение а очевидно (любые два конечных подпространства содержатся в некотором конечном подпространстве, например в их объединении). Поэтому в доказательстве нуждаются лишь утверждения б и в.

Доказательство утверждения б. Пусть, как и выше, $A_{\alpha} \subset A_{\alpha'}$, $B_{\beta} \subset B_{\beta'}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} F(SC) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta}} & FX_{\alpha\beta} & \xrightarrow{\psi_{\alpha\beta}} & FA_{\alpha} \oplus FB_{\beta} \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\ F(SC) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha'\beta'}} & FX_{\alpha'\beta'} & \xrightarrow{\psi_{\alpha'\beta'}} & FA_{\alpha'} \oplus FB_{\beta'} \end{array}$$

вертикальные стрелки которой индуцированы вложениями, а строчки являются отрезками последовательностей Майера—Виеториса триад $(X_{\alpha\beta}; A_{\alpha}, B_{\beta})$ и $(X_{\alpha'\beta'}; A_{\alpha'}, B_{\beta'})$ (заметим, что для обеих триад пересечения $A_{\alpha} \cap B_{\beta}$ и $A_{\alpha'} \cap B_{\beta'}$ совпадают с пространством $C = A \cap B$). По определению множество $\Xi_{\alpha\beta}$ состоит из таких элементов $x \in F(X_{\alpha\beta})$, что $\psi_{\alpha\beta}x = (a_{\alpha}, b_{\beta})$, множество $\Xi_{\alpha'\beta'}$ — из таких элементов $x' \in F(X_{\alpha'\beta'})$, что $\psi_{\alpha'\beta'}x' = (a_{\alpha'}, b_{\beta'})$, а отображение (34) индуцировано вложением $X_{\alpha'\beta'} \rightarrow X_{\alpha\beta}$. Поскольку $a_x|_{A_{\alpha'}} = a_{\alpha'}$ и $b_{\beta}|_{B_{\beta'}} = b_{\beta'}$, отсюда следует, что для любых элементов $x \in \Xi_{\alpha\beta}$ и $x' \in \Xi_{\alpha'\beta'}$ имеет место равенство

$$\psi_{\alpha'\beta'}(x' - \pi_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}x) = 0.$$

Поэтому существует такой элемент $y \in F(SC)$, что $\Delta_{\alpha'\beta'} y = x' - \pi_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} x$. Но тогда

$$\pi_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} (x + \Delta_{\alpha\beta} y) = x',$$

и, значит, отображение $\pi_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}$ надъективно. $\square$

Доказательство утверждения в. Согласно теореме 1 из Дополнения к лекции 2 для любой триады $(X; A, B)$ с конечным X и любого $n \geq 0$ множество всех гомотопических классов отображений $S^n A \rightarrow S^n C$ счетно (возможно, конечно). Поэтому (см. диаграмму (31)) для гомоморфизма $i^n: F^n C \rightarrow F^n A$ имеется только счетное число возможностей. По аналогичным соображениям, счетное число возможностей имеется и для гомоморфизма $i_B^n: F^n B \rightarrow F^n C$, а потому и для гомоморфизма $\varphi^n: F^n A \oplus F^n B \rightarrow F^n C$. Значит, для подгруппы $\text{Im } \varphi^n$ группы FC^n также имеется лишь счетное число возможностей.

Пусть, в частности,

$$\varphi_{\alpha\beta}^1: F(SA_\alpha) \oplus F(SB_\beta) \rightarrow F(SC)$$

— гомоморфизм φ^1 из последовательности Майера—Витториса триады $(X_{\alpha\beta}; A_\alpha, B_\beta)$. Тогда для подгрупп $\text{Im } \varphi_{\alpha\beta}^1$ группы $F^1 C = F(SC)$ будет иметься счетное число возможностей, т. е. множество этих подгрупп будет счетно. Поэтому для доказательства утверждения в достаточно доказать, что элементы $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ множества A эквивалентны тогда и только тогда, когда $\text{Im } \varphi_{\alpha\beta}^1 = \text{Im } \varphi_{\alpha'\beta'}^1$.

Но, по определению, элементы $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ множества A тогда и только тогда эквивалентны, когда существует такой элемент $\gamma\delta$, что, во-первых, $\alpha\beta \leq \gamma\delta$, $\alpha'\beta' \leq \gamma\delta$ (т. е. $A_\alpha \subset A_\gamma$, $B_\beta \subset B_\delta$ и $A_{\alpha'} \subset A_\gamma$, $B_{\beta'} \subset B_\delta$) и, во-вторых, имеет место коммутативная диаграмма вида

$$(35) \quad \begin{array}{ccc} & \Xi_{\gamma\delta} & \\ \pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \swarrow & & \searrow \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta} \\ \Xi_{\alpha\beta} & \xrightarrow{f} & \Xi_{\alpha'\beta'} \end{array}$$

где f — некоторое биективное отображение. Поэтому нам нужно только доказать, что равенство $\text{Im } \varphi_{\alpha\beta}^1 = \text{Im } \varphi_{\alpha'\beta'}^1$ является необходимым и достаточным условием существования диаграммы вида (35).

Пусть диаграмма (35) существует. Дополним ее до диаграммы

$$(36) \quad \begin{array}{ccccccc} F(SA_\alpha) \oplus F(SB_\beta) & \xrightarrow{\varphi_{\alpha\beta}^1} & F(SC) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta}} & FX_{\alpha\beta} & \supset & \Xi_{\alpha\beta} \\ \uparrow & & \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow \pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \\ F(SA_\gamma) \oplus F(SB_\delta) & \xrightarrow{\varphi_{\gamma\delta}^1} & F(SC) & \xrightarrow{\Delta_{\gamma\delta}} & FX_{\gamma\delta} & \supset & \Xi_{\gamma\delta} \\ \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta} \\ F(SA_{\alpha'}) \oplus F(SB_{\beta'}) & \xrightarrow{\varphi_{\alpha'\beta'}^1} & F(SC) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha'\beta'}} & FX_{\alpha'\beta'} & \supset & \Xi_{\alpha'\beta'} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} f$$

строчки которой являются отрезками последовательностей Майера—Виеториса соответствующих триад, а вертикальные стрелки индуцированы вложениями. Для любого элемента $w \in F(SA_\alpha) \oplus F(SB_\beta)$ в группе $F(X_{\alpha\beta})$ имеет место равенство $(\Delta_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\alpha\beta}^1) w = 0$, а, значит, и равенство

$$(\Delta_{\gamma\delta} \circ \varphi_{\alpha\beta}^1) w|_{X_{\alpha\beta}} = 0.$$

Поэтому для любого элемента $x \in \Xi_{\gamma\delta}$ элемент $x + (\Delta_{\gamma\delta} \circ \varphi_{\alpha\beta}^1) w$ также принадлежит множеству $\Xi_{\gamma\delta}$. При этом

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta}(x + (\Delta_{\gamma\delta} \circ \varphi_{\alpha\beta}^1) w) &= (f \circ \pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta})(x + (\Delta_{\gamma\delta} \circ \varphi_{\alpha\beta}^1) w) = \\ &= f(\pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} x + (\Delta_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\alpha\beta}^1) w) = (f \circ \pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}) x = \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta} x, \end{aligned}$$

и, значит, образ $(\Delta_{\gamma\delta} \circ \varphi_{\alpha\beta}^1) w|_{X_{\alpha'\beta'}}$ элемента $(\Delta_{\gamma\delta} \circ \varphi_{\alpha\beta}^1) w$ в группе $F(X_{\alpha'\beta'})$ также равен нулю. Следовательно,

$$(\Delta_{\alpha'\beta'} \circ \varphi_{\alpha\beta}^1) w = 0,$$

и потому существует такой элемент $w' \in F(SA_{\alpha'}) \oplus F(SB_{\beta'})$, что $\varphi_{\alpha'\beta'}^1 w' = \varphi_{\alpha\beta}^1 w$. Таким образом, $\text{Im } \varphi_{\alpha'\beta'}^1 \subset \text{Im } \varphi_{\alpha\beta}^1$ и по симметрии $\text{Im } \varphi_{\alpha'\beta'}^1 = \text{Im } \varphi_{\alpha\beta}^1$.

Обратно, пусть $\text{Im } \varphi_{\alpha'\beta'}^1 = \text{Im } \varphi_{\alpha\beta}^1$. Положив $A_\gamma = A_\alpha \cup A_{\alpha'}$ и $B_\delta = B_\beta \cup B_{\beta'}$, снова рассмотрим диаграмму (36) (без отображения f). Поскольку, как мы уже знаем, отображения (34) надъективны, для любого элемента $x \in \Xi_{\alpha\beta}$ существует такой элемент $y \in \Xi_{\gamma\delta}$, что $\pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} y = x$. Если $y' — другой элемент множества $\Xi_{\gamma\delta}$, отображающийся в элемент x , то отображение$

$$\psi_{\gamma\delta}: FX_{\gamma\delta} \rightarrow FA_\gamma \oplus FB_\delta$$

из последовательности Майера—Виеториса триады $(X_{\gamma\delta}; A_\gamma, B_\delta)$ будет переводить разность $y - y'$ в нуль. Поэтому будет существовать такой элемент $c \in F(SC)$, что $\Delta_{\gamma\delta} c = y - y'$. Для этого элемента $\Delta_{\alpha\beta} c = 0$ и, значит, $c \in \text{Im } \varphi_{\alpha\beta}^1 = \text{Im } \varphi_{\alpha'\beta'}^1$. Следовательно, существует такой

элемент $u' \in F(SA_{\alpha'}) \oplus F(SB_{\beta'})$, что $\varphi_{\alpha'\beta'}^1 u' = c$. Таким образом,

$$y = y' + (\Delta_{\gamma\delta} \circ \varphi_{\alpha'\beta'}^1) u'$$

и, значит,

$$\pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta} y = \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta} y' + (\Delta_{\alpha'\beta'} \circ \varphi_{\alpha'\beta'}^1) u' = \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta} y'.$$

Поэтому формула

$$f(x) = \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta} y$$

корректно определяет отображение f , замыкающее диаграмму (36), т. е. удовлетворяющее соотношению $f \circ \pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta}$.

По симметрии существует и отображение $f': \Xi_{\alpha'\beta'} \rightarrow \Xi_{\alpha\beta}$, удовлетворяющее соотношению $f' \circ \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta} = \pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$. Но тогда

$$f' \circ f \circ \pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = f' \circ \pi_{\alpha'\beta'}^{\gamma\delta} = \pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta},$$

что ввиду надъективности отображения $\pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ возможно только при $f' \circ f = \text{id}$.

Аналогично доказывается, что $f \circ f' = \text{id}$.

Таким образом, отображение f , замыкающее диаграмму (36), биективно, и, значит, индексы $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ эквивалентны.

Тем самым утверждение **в** полностью доказано, и, значит, функтор $\tilde{F}$ удовлетворяет условию $\overline{\mathbf{MB}}_f$.

Доказательство теоремы 2 закончено. $\square$

Следующей категорией, которую мы хотим рассмотреть, является категория $\mathcal{CW}$ всех (непунктированных) клеточных пространств (или, точнее, соответствующая гомотопическая категория $[\mathcal{CW}]$).

В этой категории копроизведениями являются дизъюнктные объединения, и потому для функторов $F: \mathcal{CW}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{ENS}$ аксиома букета **Б** заменяется следующей аксиомой дизъюнктного объединения:

ДО. Для любых клеточных пространств X_α и их дизъюнктного объединения $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ отображение

$$F(X) \rightarrow \prod_\alpha F(X_\alpha),$$

заданное формулой

$$x \mapsto \{x|_{X_\alpha}\}, \quad x \in F(X),$$

биективно.

Что же касается аксиомы **МВ** (или **А**), то ее формулировка остается прежней (и потому мы ее повторять не будем).

Таким образом, гомотопически инвариантный функтор $F: CW^{op} \rightarrow ENS$ *полуточен*, если он удовлетворяет аксиомам **ДО** и **МВ** (или **А**).

Как и в предыдущих случаях, гомотопически инвариантный функтор $F: CW^{op} \rightarrow ENS$ мы будем называть *представимым*, если он представим как функтор на категории $[CW]$.

Оказывается, что в отличие от категории $cop CW^*$, на категории CW существуют *непредставимые гомотопически инвариантные полуточные функторы*.

Следующий пример принадлежит Хеллеру.

Пример 1. Для любого связного клеточного пространства X и любой его точки $x_0 \in X$ множество всех инвариантных подгрупп группы $\pi_1(X, x_0)$ не зависит от точки x_0 (точнее, в различных точках эти множества находятся в естественном биективном соответствии). Мы будем обозначать его символом ρX .

Любому непрерывному отображению $f: X \rightarrow Y$ связных пространств мы отнесем отображение $f^*: \rho Y \rightarrow \rho X$, сопоставляющее инвариантной подгруппе $H \subset \pi_1(Y, y_0)$ ее полный прообраз $f_*^{-1}H$ при отображении $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, индуцированном отображением f (мы предполагаем точки x_0 и y_0 выбранными так, чтобы $f(x_0) = y_0$). Ясно, что соответствия $X \mapsto \rho X$, $f \mapsto f^*$ составляют гомотопически инвариантный контравариантный функтор $\rho: cop CW^{op} \rightarrow ENS$, определенный на категории $cop CW$ связных клеточных пространств. Мы распространим его на всю категорию CW , полагая для любого несвязного пространства X

$$\rho X = \prod_{\alpha} \rho X_{\alpha},$$

где X_{α} пробегает все компоненты пространства X , и соответствующим образом определяя отображения f^* .

Если бы функтор ρ был представим, то для любого связного пространства X индексы инвариантных подгрупп его фундаментальной группы (и, в частности, мощность самой фундаментальной группы) были бы ограничены наибольшей из мощностей фундаментальных групп компонент соответствующего классифицирующего пространства K , что, конечно, невозможно (фундаментальной груп-

пой клеточного пространства может быть группа произвольной — сколь угодно большой — мощности). Поэтому *функтор ρ непредставим*. Вместе с тем можно показать, что *функтор ρ полуточен*. [Прямое доказательство требует общей формулы, выражающей группу $\pi_1(A \cup B)$ через группы $\pi_1 A$, $\pi_1 B$ и $\pi_1(A \cap B)$ в случае, когда пересечение $A \cap B$ не обязательно связно, т. е. в случае, когда теорема Зейферта — ван Кампена (см. Дополнение к лекции I.6 и ниже предложение 4 лекции 9) непосредственно неприменима. Чтобы обойти эту трудность, Хеллер доказывает полуточность функтора ρ другим способом. Именно, он показывает, что на любой подкатегории CW , объекты которой составляют множество (такие подкатегории называются *малыми*), функтор ρ представим, что, как легко видеть, обеспечивает его полуточность на всей категории CW . Доказательство требует теоретико-групповых конструкций, изложение которых увело бы нас слишком далеко в сторону (кстати сказать, те же конструкции нужны и для описания группы $\pi_1(A \cup B)$ при $A \cap B$ несвязном)].

Однако оказывается, что (как и в случае категории $\text{cop } CW_{\text{fin}}^*$) для функторов, принимающих значения в категории групп, такой пример невозможен.

Теорема 3. *Любой гомотопически инвариантный полуточный функтор*

$$F: CW^{\text{op}} \rightarrow \text{GROUPS},$$

принимающий значения в категории групп, представим.

Эта теорема также принадлежит Хеллеру. Как и в аналогичной теореме Адамса, в теореме 3 функтор $F: CW^{\text{op}} \rightarrow \text{GROUPS}$ называется *полуточным* (соответственно *представимым*), если полуточна (соответственно *представима*) его композиция с функтором игнорирования

$$\text{GROUPS} \rightarrow \text{ENS}.$$

Для доказательства теоремы 3 в первую очередь необходимо получить для функторов на категории CW^{op} аналог точной последовательности (30). При этом, поскольку нам понадобится лишь начальный отрезок этой последовательности, мы ограничимся лишь им. Построение же всей последовательности мы оставим читателю. (Фактически нужно шаг за шагом повторить построение

последовательности (30) и убедиться, что переход к непунктированным пространствам никаких новых осложнений не вносит.)

Пусть (X, A) — произвольная клеточная пара (фактически достаточно требовать, чтобы (X, A) была парой Борсука, но мы не будем сейчас на этом останавливаться).

Поступая по аналогии со случаем пунктированных пространств, введем в рассмотрение последовательность вложений

$$(37) \quad A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} C(i) \xrightarrow{k} C(j) \xrightarrow{l} C(k) \rightarrow \dots,$$

где

$C(i) = CA \cup X$ — конус (неприведенный) вложения i ,

$C(j) = CX \cup C(i) = CX \cup CA$ — конус вложения j ,

$C(k) = CC(i) \cup C(j) = CCA \cup CX$ — конус вложения k

(см. рис. 6).

Так как конус CA стягиваем, то (см. лемму 6 лекции I.4) отображение факторизации $C(i) \rightarrow C(i)/CA$ является гомотопической эквивалентностью. Поэтому гомотопической эквивалентностью будет и его композиция $C(i) \leftarrow X/A$ с естественным гомеоморфизмом $C(i)/CA \rightarrow X/A$.

Аналогично, гомотопическими эквивалентностями будут композиция $C(j) \rightarrow SA$ отображения факторизации $C(j) \rightarrow C(j)/CX$ с естественным гомеоморфизмом $C(j)/CX \rightarrow SA$ и композиция $C(k) \rightarrow SX$ отображения факторизации $C(k) \rightarrow C(k)/CCA$ с естественным гомеоморфизмом $C(k)/CCA \rightarrow SX$. Поэтому последовательность (37) гомотопически эквивалентна последовательности (38)

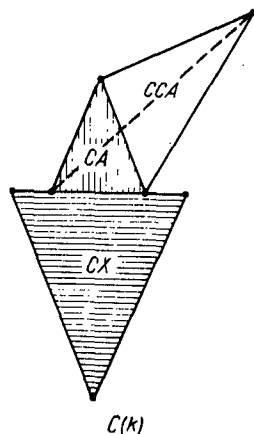


Рис. 6.

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A \xrightarrow{k} SA \xrightarrow{l} SX \rightarrow \dots,$$

где j , k и l обозначают композиции отображений j ; k и l из последовательности (37) с соответствующими гомотопическими эквивалентностями (и с отображениями, им обрат-

ными). При этом легко видеть, что отображение l из последовательности (38) гомотопно вложению $Si: SA \rightarrow SX$.

Следовательно, применив к последовательностям (37) и (38) произвольный гомотопически инвариантный функтор $F: CW^{op} \rightarrow \text{GROUPS}$, мы получим изоморфные последовательности групп.

С другой стороны, применив функтор F к первым трем членам последовательности (37), мы получим последовательность

$$(39) \quad F(C(i)) \xrightarrow{l^*} FX \xrightarrow{i^*} FA,$$

аналогичную последовательности (16). Так как доказательство точности последовательности (16) опиралось только на аксиому **МВ** (или, точнее, на равносильную аксиому **A**) и так как аксиомы **МВ** для категорий CW^* и CW идентичны, то для любого функтора $F: CW^{op} \rightarrow \text{GROUPS}$, удовлетворяющего аксиоме **МВ** (и, в частности, для любого полуточного функтора F) последовательность (39) точна в члене FX . Но каждый трехчленный отрезок последовательности (37) является начальным отрезком аналогичной последовательности, построенной для соответствующего вложения. Поэтому последовательность групп, получающаяся применением функтора F к последовательности (37), точна в каждом члене (кроме, естественно, первого). Поэтому точна и последовательность

$$(40) \quad \dots \rightarrow F(SX) \xrightarrow{(Sl)^*} F(SA) \xrightarrow{k^*} F(X/A) \xrightarrow{l^*} FX \xrightarrow{i^*} FA,$$

получающаяся применением функтора F к последовательности (37).

Тем самым доказано, что для любой клеточной пары (X, A) и любого полуточного функтора $F: CW^{op} \rightarrow \text{GROUPS}$ имеет место точная последовательность (40).

Группу $F(pt)$, где pt — одноточечное пространство, мы будем называть группой коэффициентов полуточного функтора $F: CW^{op} \rightarrow \text{GROUPS}$.

В первую очередь мы рассмотрим случай, когда эта группа тривиальна (состоит только из единичного элемента). Так как, согласно аксиоме **ДО**, для любого дискретного пространства A группа $F(A)$ является прямым произведением групп $F(pt)$ (в числе, равном мощности пространства A), то из равенства $F(pt) = 1$ следует, что $F(A) = 1$ для любого дискретного пространства A . [Для

групп $F(X)$ мы здесь — и ниже — пользуемся мультипликативной записью.]

Пусть F^* — функтор $\text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{ENS}$, являющийся композицией функтора игнорирования отмеченных точек $\text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow \text{cop } CW^{\text{op}}$, функтора вложения $\text{cop } CW^{\text{op}} \rightarrow CW^{\text{op}}$, полуточного функтора $F: CW^{\text{op}} \rightarrow \text{GROUPS}$ и функтора игнорирования $\text{GROUPS} \rightarrow \text{ENS}$. (Впрочем, иногда для упрощения формулировок мы будем опускать последний функтор, т. е. будем считать, что функтор F^* принимает значения в категории GROUPS .)

Лемма 7. Если $F(\text{pt}) = 1$, то функтор F^* полуточен.

Доказательство. Поскольку функтор F^* очевидным образом удовлетворяет аксиоме **MB**, в проверке нуждается лишь аксиома **B**.

Пусть $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ — произвольное семейство связных пунктированных клеточных пространств, $X = \bigsqcup X_\alpha$ — дизъюнктное объединение пространств X_α и A — его дискретное подпространство, состоящее из вершин x_α . Подпространство A является, очевидно, ретрактом (не деформационным!) пространства X (чтобы получить ретракцию $r: X \rightarrow A$, достаточно каждую компоненту X_α пространства X отобразить в соответствующую точку x_α) и, значит, пространство SA — ретрактом пространства SX (с ретрагирующим отображением $Sr: SX \rightarrow SA$). Поэтому для гомоморфизма $(Si)^*$ из точной последовательности (40) будет иметь место равенство $(Si)^* \circ (Sr)^* = \text{id}$, показывающее, что этот гомоморфизм является эпиморфизмом. Следовательно, в силу точности последовательности (40) гомоморфизм j^* будет мономорфизмом.

С другой стороны, так как $F(A) = 1$, то этот гомоморфизм является эпиморфизмом и, значит, изоморфизмом.

Таким образом, $F(X) \approx F(X/A)$.

Но $X/A = \vee X_\alpha$, а в силу аксиомы **ДО** группа $F(X)$ изоморфна группе $\prod F(X_\alpha)$. Следовательно, группа $F(X/A) = F^*(X/A) = F^*(\vee X_\alpha)$ также изоморфна группе $\prod F(X_\alpha)$, т. е. функтор F^* удовлетворяет аксиоме **B**. $\square$

Следствие. Если $F(\text{pt}) = 1$, то функтор F представим.

Доказательство. Так как при $F(\text{pt}) = 1$ функтор F^* полуточен, то, согласно теореме Брауна, он представим, т. е. существует такое связное пунктированное пространство K , что $[X, K]^* \approx F^*(X)$ для любого пунктированного пространства X . Поскольку множество

$F^*(X) = F(X)$ является группой, пространство K должно быть при этом H -группой и, значит (см. лекцию I.4), множество $[X, K]^*$ пунктированных гомотопических классов совпадает с множеством $[X, K]$ свободных гомотопических классов. Таким образом, $F(X) \approx [X, K]$ для любого связного клеточного пространства X . Но тогда в силу аксиомы **ДО**

$$F(X) \approx \prod_{\alpha} F(X_{\alpha}) \approx \prod_{\alpha} [X_{\alpha}, K] \approx [\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}, K] \approx [X, K]$$

и для любого клеточного пространства $X = \bigsqcup X_{\alpha}$ (где X_{α} — компоненты пространства X). Значит, функтор F представим. $\square$

Теперь у нас уже все готово для доказательства теоремы 3.

Доказательство теоремы 3. Пусть π_0 — функтор $CW \rightarrow CW$, сопоставляющий произвольному клеточному пространству X множество $\pi_0 X$ его компонент, рассматриваемое как дискретное (= нульмерное) клеточное пространство. Выбрав в каждой компоненте X_{α} пространства X по вершине x_{α} , мы вложим $\pi_0 X$ в X , отождествив компоненту X_{α} с ее вершиной x_{α} . Тогда пространство $\pi_0 X$ окажется дизъюнктивным объединением одноточечных пространств x_{α} , и потому, согласно аксиоме **ДО**, группа $F(\pi_0 X)$ будет естественно изоморфна произведению $\prod F(x_{\alpha})$ групп $F(x_{\alpha})$. С другой стороны, это произведение естественным образом отождествляется с множеством всевозможных отображений $X \rightarrow G$, где $G = F(\text{pt})$, т. е. — в предположении, что группа G снабжена дискретной топологией — с множеством гомотопических классов $[X, G] = G^*(X)$. Это означает, что функтор $F \circ \pi_0: CW^{\text{op}} \rightarrow \text{GROUPS}$ естественно изоморфен функтору G^* , т. е. *функтор $F \circ \pi_0$ представим* (группой G).

Введем теперь в рассмотрение функтор $F_0: CW^{\text{op}} \rightarrow \text{GROUPS}$, сопоставляющий произвольному клеточному пространству X ядро $F_0(X)$ гомоморфизма $i^*: F(X) \rightarrow F(\pi_0 X)$, индуцированного вложением $i: \pi_0 X \rightarrow X$.

Автоматическая проверка показывает, что функтор F_0 полуточен и обладает тем свойством, что $F_0(\text{pt}) = 1$. Поэтому, согласно следствию из леммы 7, *функтор F_0 представим*. Пусть K_0 — соответствующее классифицирующее пространство (являющееся, конечно, H -группой).

Так как $roi = \text{id}$, где $r: X \rightarrow \pi_0 X$ — ретракция, сопоставляющая каждой точке $x \in X$ вершину x_α содержащей эту точку компоненты X_α пространства X , то отображение $r^*: F(\pi_0 X) \rightarrow F(X)$ является мономорфизмом и определяет разложение группы $F(X)$ в полупрямое произведение инвариантной подгруппы $F_0(X)$ и подгруппы $\text{Im } r^*$, изоморфной группе $F(\pi_0 X) \approx G^*(X)$. Таким образом, как функтор в категорию множеств, функтор F является прямым произведением представимых функторов F_0 и $F \circ \pi_0$. Поэтому функтор F также представим, причем соответствующим классифицирующим пространством будет произведение $K_0 \times G$ (но структура Н-группы на $K_0 \times G$ не будет прямым произведением структур Н-групп на K_0 и G). $\square$

Заметим в заключение, что для категорий, отличных от трех рассмотренных ($\text{cop } CW^*$, $\text{cop } CW^*_{\text{fin}}$ и CW), никаких теорем представимости, не сводящихся тривиальным образом к теоремам 1—3, по-видимому, не известно.

В частности, ничего не известно о представимости функторов на категории CW^{op} (даже принимающих значения в категории групп). Напротив, легко видеть, что *любой полуточный функтор $CW^{op}_{\text{fin}} \rightarrow \text{GROUPS}$ представим* (пространством категории CW). [Для доказательства достаточно повторить доказательство теоремы 3, заменив ссылку на теорему Брауна ссылкой на теорему Адамса.] Для функторов на категории $\text{cop } CW^{op}$ из условия полуточности смысл имеет лишь аксиома **MB** (в категории $\text{cop } CW$ нет копроизведений). Вместе с тем непосредственная проверка показывает, что любой функтор $F: \text{cop } CW^{op} \rightarrow \text{GROUPS}$, удовлетворяющий аксиоме **MB**, распространяется по формуле

$$\hat{F}(X) = \prod_{\alpha} F(X_{\alpha}) \quad (X_{\alpha} \text{ — компоненты } X)$$

до полуточного (и, значит, представимого) функтора $\hat{F}: CW^{op} \rightarrow \text{GROUPS}$ (ср. выше построение функтора ρ в примере 1). Поэтому *каждый удовлетворяющий аксиоме **MB** функтор $\text{cop } CW^{op} \rightarrow \text{GROUPS}$ представим* (но, вообще говоря, несвязным пространством).

Гомотопические операции.— Многоместные гомотопические операции.— Гомотопические группы букетов.— Аддитивные гомотопические операции.— Умножение Уайтхеда.— Алгебраические свойства умножения Уайтхеда.

Определение 1. Гомотопической операцией типа $(n; r)$, где $n, r \geq 1$, называется произвольный морфизм функторов (естественное преобразование)

$$\theta: \pi_n \rightarrow \pi_r,$$

т. е. правило, сопоставляющее каждому пунктированному пространству X такое отображение $\theta: \pi_n X \rightarrow \pi_r X$ (не являющееся, вообще говоря, гомоморфизмом), что для любого пунктированного отображения $f: X \rightarrow Y$ имеет место коммутативная диаграмма

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \pi_n X & \xrightarrow{\theta} & \pi_r X \\ f_* \downarrow & \theta & \downarrow f_* \\ \pi_n Y & \xrightarrow{\theta} & \pi_r Y \end{array}$$

Относительно очевидной операции сложения $(\theta_1 + \theta_2: \beta \mapsto \theta_1 \beta + \theta_2 \beta$ для любого элемента $\beta \in \pi_n X$) множество $O(n; r)$ всех гомотопических операций типа $(n; r)$ является, очевидно, группой (при $r > 1$ абелевой).

Так как $\pi_r S^n = [S^r, S^n]^*$ и $\pi_n X = [S^n, X]^*$, то для любых элементов $\alpha \in \pi_r S^n$, $\beta \in \pi_n X$ определен элемент $\beta \circ \alpha \in \pi_r X$, задающийся отображением $g \circ f: S^r \rightarrow X$, где $f: S^r \rightarrow S^n$ и $g: S^n \rightarrow X$ — отображения, задающие элементы α и β соответственно. Мы будем называть элемент $\beta \circ \alpha$ *композиционным произведением* элементов α и β . (При $r = n$ и $X = S^n$ это произведение мы фактически уже рассматривали в лекции 2; см. формулу (10) лекции 2).

Для любого фиксированного элемента $\alpha \in \pi_r S^n$ отображение $\theta_\alpha: \beta \mapsto \beta \circ \alpha$ является, очевидно, гомотопической операцией (коммутативность диаграммы (1) вытекает из ассоциативности операции компонирования отображений). Так как $\beta \circ \alpha$ есть не что иное, как $g_*(\alpha)$, то для любых элементов $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_r S^n$ имеет место равенство

$$\beta \circ (\alpha_1 + \alpha_2) = \beta \circ \alpha_1 + \beta \circ \alpha_2$$

(правая дистрибутивность композиционного умножения), означающее, что $\theta_{\alpha_1 + \alpha_2} = \theta_{\alpha_1} + \theta_{\alpha_2}$, т. е. что отображение

$$(2) \quad \pi_r S^n \rightarrow O(n; r), \quad \alpha \mapsto \theta_\alpha,$$

является гомоморфизмом.

Замечательно, что отображение (2) представляет собой изоморфизм, т. е. что любая гомотопическая операция θ типа $(n; r)$ единственным образом представляется в виде θ_α , где $\alpha \in \pi_r S^n$. Действительно, при $X = S^n$ операция θ переводит группу $\pi_n S^n$ в группу $\pi_r S^n$ и, значит, элемент $\iota_n \in \pi_n S^n$ в некоторый элемент $\theta \iota_n \in \pi_r S^n$. Тем самым возникает отображение

$$(3) \quad O(n; r) \rightarrow \pi_r S^n, \quad \theta \mapsto \theta \iota_n,$$

группы $O(n; r)$ в группу $\pi_r S^n$. Поскольку $\theta_\alpha \iota_n = \iota_n \circ \alpha = \alpha$, композиция $\alpha \mapsto \theta_\alpha \mapsto \theta_\alpha \iota_n$ отображений (2) и (3) является тождественным отображением. Пусть $\alpha = \theta \iota_n$, и пусть $\beta = [g: S^n \rightarrow X] \in \pi_n X$. Диаграмма (1) для отображения g имеет вид

$$\begin{array}{ccc} \pi_n S^n & \xrightarrow{\theta} & \pi_r S^n \\ g_* \downarrow & 0 & \downarrow g_* \\ \pi_n X & \rightarrow & \pi_r X \end{array}$$

а так как $\beta = g_* \iota_n$, то

$$\theta \beta = \theta (g_* \iota_n) = g_* (\theta \iota_n) = g_* (\alpha) = \beta \circ \alpha = \theta_\alpha \beta,$$

т. е. $\theta = \theta_\alpha$. Это означает, что композиция $\theta \mapsto \theta \iota_n \mapsto \theta_\alpha$ отображений (3) и (2) также является тождественным отображением. Следовательно, отображения (2) и (3) представляют собой взаимно обратные изоморфизмы. $\square$

Если $\theta = \theta_\alpha$, то мы будем говорить, что элемент $\alpha \in \pi_r S^n$ представляет гомотопическую операцию $\theta \in O(n; r)$.

Замечание 1. Доказанное утверждение имеет на самом деле чисто категорный характер. Именно, дословно то же самое рассуждение показывает, что для любого функтора $G: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{ENS}$ из произвольной категории $\mathbf{A}$ в категорию множеств $\mathbf{ENS}$ и любого объекта A категории $\mathbf{A}$ морфизмы $\theta: F_A \rightarrow G$ в функтор G функтора $F_A: X \mapsto \mathbf{A}(A, X)$, представленного объектом A , находятся в биективном соответствии с множеством $G(A)$, причем взаимно обратные биективные отображения

$$\text{Mor}(F_A, G) \rightarrow G(A) \quad \text{и} \quad G(A) \rightarrow \text{Mor}(F_A, G),$$

где $\text{Мог}(F_A, G)$ — множество всех морфизмов $\theta: F_A \rightarrow G$, задаются формулами $\theta \mapsto \theta(\text{id})$, $\text{id}: A \rightarrow A$, и $\alpha \mapsto \theta_\alpha$, где $\theta_\alpha \beta = G(\beta) \alpha$ для любого $\beta: A \rightarrow X$ из $F_A(X)$.

Таким образом, описание всех гомотопических операций сводится к вычислению групп $\pi_r S^n$. Уже это одно оправдывает наш особый интерес к этим группам.

В частности, мы видим, что при $r < n$ не существует ненулевых гомотопических операций типа $(n; r)$.

При $r = n$ любое целое число $k \in \mathbb{Z}$ определяет операцию $\beta \mapsto k\beta$ умножения на k . Оказывается, что этими операциями исчерпываются все гомотопические операции типа $(n; n)$. Поскольку любой элемент $\alpha \in \pi_n S^n$ имеет вид $k\iota_n$, где $\iota_n = [\text{id}]^*$ — образующая группы $\pi_n S^n$, а $k \in \mathbb{Z}$, это утверждение является лишь иной формулировкой следующего предложения:

Предложение 1. Для любого элемента $\beta \in \pi_n X$ имеет место равенство

$$\beta \circ (k\iota_n) = k\beta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Иными словами, элемент $k\iota_n$ представляет операцию умножения на k .

Доказательство. Умножение на k переводит элемент ι_n в элемент $k\iota_n$ и потому совпадает с операцией $\theta_{k\iota_n}$. $\square$

Предложение 1 означает, что если отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ имеет степень k , то для любого пунктированного отображения $g: S^n \rightarrow X$ составное отображение $g \circ f: S^n \rightarrow X$ задает элемент $k\beta$ группы $\pi_n X$, где β — элемент, задаваемый отображением g . Например, если отображение f имеет степень -1 (скажем, является обращающим ориентацию диффеоморфизмом), то отображение $g \circ f$ задает элемент $-\beta$.

Можно рассматривать гомотопические операции и от нескольких аргументов.

Пусть $n_1, \dots, n_s$, $r \geq 1$.

Определение 2. Гомотопической операцией типа $(n_1, \dots, n_s; r)$ называется произвольный морфизм функторов

$$\theta: \pi_{n_1} \times \dots \times \pi_{n_s} \rightarrow \pi_r.$$

Для любого пунктированного пространства X эта операция относит произвольным элементам $\beta_1 \in \pi_{n_1} X, \dots, \beta_s \in \pi_{n_s} X$ некоторый элемент $\theta(\beta_1, \dots, \beta_s) \in \pi_r X$, причем для любого пунктированного отображения $f: X \rightarrow Y$

имеет место равенство

$$f_*\theta(\beta_1, \dots, \beta_s) = \theta(f_*\beta_1, \dots, f_*\beta_s).$$

Каждый элемент $\alpha \in \pi_r(S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_s})$ определяет операцию θ_α , сопоставляющую элементам $\beta_1 = [g_1: S^{n_1} \rightarrow X]^* \in \pi_{n_1}X, \dots, \beta_s = [g_s: S^{n_s} \rightarrow X]^* \in \pi_{n_s}X$ гомотопический класс $\theta_\alpha(\beta_1, \dots, \beta_s) \in \pi_rX$ отображения

$$(g_1 \vee \dots \vee g_s) \circ f: S^r \rightarrow X,$$

где $f: S^r \rightarrow S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_s}$ — отображение, задающее элемент α , и уже известное нам рассуждение (или прямая ссылка на замечание 1) показывает, что *любая гомотопическая операция θ типа $(n_1, \dots, n_s; r)$ единственным образом представляется в виде θ_α , где $\alpha \in \pi_r(S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_s})$.*

Таким образом, описание многоместных гомотопических операций сводится к вычислению гомотопических групп букетов сфер.

Рассмотрим сначала гомотопические группы букетов в общей ситуации. Для простоты будем считать, что $s=2$ (случай $s>2$ сложнее лишь в обозначениях).

Нам понадобится следующая алгебраическая лемма:

Лемма 1. *Если для точной последовательности*

$$\dots \rightarrow A_r \xrightarrow{a_r} B_r \xrightarrow{b_r} C_r \xrightarrow{c_r} A_{r-1} \rightarrow \dots$$

абелевых групп существуют такие гомоморфизмы $s_r: C_r \rightarrow B_r$, что $b_r \circ s_r = \text{id}$, то эта последовательность распадается в серию коротких точных последовательностей

$$(4) \quad 0 \rightarrow A_r \xrightarrow{a_r} B_r \xrightarrow{b_r} C_r \rightarrow 0,$$

в каждой из которых группа B_r изоморфна прямой сумме групп A_r и C_r :

$$B_r = A_r \oplus C_r.$$

Доказательство. Так как $b_r \circ s_r = \text{id}$, то отображение b_r является эпиморфизмом. Поэтому $c_r = 0$ и, значит, отображение a_r является мономорфизмом. Это доказывает первое утверждение. Второе утверждение вытекает из того, что для короткой точной последовательности (4) гомоморфизм s_r является расщепляющим гомоморфизмом (см. Дополнение к лекции I.5). $\square$

Следствие 1. Если пунктированное расслоение $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ обладает сечением $s: (B, b_0) \rightarrow (E, e_0)$, то $\pi_r E = \pi_r F \oplus \pi_r B$ для любого $r \geq 1$,

где, как всегда, $F = p^{-1}(b_0)$ — слой расслоения p .

Доказательство. Достаточно применить лемму 1 к гомотопической последовательности расслоения p , принимая за s_r гомоморфизмы $\pi_r B \rightarrow \pi_r E$, индуцированные сечением s . $\square$

Следствие 2. Для любых пунктированных пространств X и Y имеет место изоморфизм

$$\pi_r (X \times Y) = \pi_r X \oplus \pi_r Y, \quad r \geq 1.$$

Доказательство. Расслоение $\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, обладает сечением $\text{in}_1: X \rightarrow X \times Y$, $x \mapsto (x, y_0)$. $\square$

Заметим, что в условиях следствия 2 изоморфизм $\pi_r (X \times Y) \rightarrow \pi_r X \oplus \pi_r Y$ задается соответствием

$$\beta \mapsto (\text{pr}_{1*} \beta, \text{pr}_{2*} \beta), \quad \beta \in \pi_r (X \times Y),$$

где $\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X$ и $\text{pr}_2: X \times Y \rightarrow Y$ — эпиморфизмы $(x, y) \mapsto x$ и $(x, y) \mapsto y$, а обратный изоморфизм $\pi_r X \oplus \pi_r Y \rightarrow \pi_r (X \times Y)$ — соответствием

$$(\alpha, \gamma) \mapsto \text{in}_{1*} \alpha + \text{in}_{2*} \gamma, \quad \alpha \in \pi_r X, \gamma \in \pi_r Y,$$

где $\text{in}_1: X \rightarrow X \times Y$ и $\text{in}_2: Y \rightarrow X \times Y$ — монеоморфизмы $x \mapsto (x, y_0)$ и $y \mapsto (x_0, y)$. По определению (см. Дополнение к лекции I.5, подстрочное примечание на стр. 232) это означает, что *прямое разложение* $\pi_r (X \times Y) = \pi_r X \oplus \pi_r Y$ задается инъекциями in_{1*} , in_{2*} и проекциями pr_{1*} , pr_{2*} .

В частности, отсюда следует, что в группе $\pi_r (X \times Y)$ имеет место соотношение

$$\text{in}_{1*} \circ \text{pr}_{1*} + \text{in}_{2*} \circ \text{pr}_{2*} = \text{id}.$$

Замечание 2. Легко видеть, что следствие 2 справедливо и при $r=1$, хотя группы $\pi_1 X$ и $\pi_1 Y$, вообще говоря, и неабелевы.

Предложение 2. Для любых пунктированных пространств X и Y при каждом $r \geq 1$ имеет место короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow \pi_{r+1} (X \times Y, X \vee Y) \rightarrow \pi_r (X \vee Y) \rightarrow \pi_r X \oplus \pi_r Y \rightarrow 0,$$

а при $r \geq 2$ — изоморфизм

$$(5) \quad \pi_r (X \vee Y) = \pi_r X \oplus \pi_r Y \oplus \pi_{r+1} (X \times Y, X \vee Y).$$

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned} i_1: X &\rightarrow X \vee Y, & x &\mapsto (x, y_0), \\ i_2: Y &\rightarrow X \vee Y, & y &\mapsto (x_0, y), \end{aligned}$$

связанные с введенными выше отображениями in_1 и in_2 соотношениями $i \circ i_1 = \text{in}_1$, $i \circ i_2 = \text{in}_2$, где $i: X \vee Y \rightarrow X \times Y$ — вложение, и гомоморфизм

$$s: \pi_r(X \times Y) \rightarrow \pi_r(X \vee Y),$$

определенный формулой

$$s = i_{1*} \circ \text{pr}_{1*} + i_{2*} \circ \text{pr}_{2*}.$$

Так как

$$i_* \circ s = \text{in}_{1*} \circ \text{pr}_{1*} + \text{in}_{2*} \circ \text{pr}_{2*} = \text{id},$$

то гомотопическая последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{r+1}(X \times Y, X \vee Y) &\rightarrow \pi_r(X \vee Y) \xrightarrow{i_*} \pi_r(X \times Y) \xrightarrow{i_*} \\ &\xrightarrow{i_*} \pi_r(X \times Y, X \vee Y) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

пары $(X \times Y, X \vee Y)$ удовлетворяет условиям леммы 1 (при $a_r = \partial$, $b_r = i_*$, $c_r = j_*$ и $s_r = s$). Это, если учесть еще следствие 2, доказывает предложение 2 при $r \geq 2$. Случай $r = 1$ мы оставим читателю. $\square$

Замечание 3. Группа $\pi_1(X \vee Y)$ является не прямой суммой, а свободным произведением $\pi_1 X \sqcup \pi_1 Y$ групп $\pi_1 X$ и $\pi_1 Y$. См. Дополнение к лекции I.6.

В разложении (5) слагаемые вкладываются в группу $\pi_r(X \vee Y)$ посредством, соответственно, мономорфизмов i_{1*} , i_{2*} и ∂ . Для упрощения обозначений мы для элементов $\alpha_1 \in \pi_r X$ и $\alpha_2 \in \pi_r Y$ положим

$$\alpha'_1 = i_{1*} \alpha_1, \quad \alpha'_2 = i_{2*} \alpha_2.$$

Тем самым каждый элемент группы $\pi_r(X \vee Y)$ будет однозначно записываться в виде суммы

$$(6) \quad \alpha'_1 + \alpha'_2 + \partial\beta,$$

где $\alpha_1 \in \pi_r X$, $\alpha_2 \in \pi_r Y$ и $\beta \in \pi_{r+1}(X \times Y, X \vee Y)$.

Если X и Y являются клеточными пространствами (обладающими тем свойством, что их произведение $X \times Y$ также является клеточным пространством) и если пространство X клеточно $(n-1)$ -связно, а пространство Y клеточно $(m-1)$ -связно (где $n, m > 0$), то наименьшая размерность клеток из $X \times Y \setminus X \vee Y$ будет равна $n + m$

и, следовательно (см. следствие 3 теоремы 1 лекции 2), пара $(X \times Y, X \vee Y)$ будет $(n+m-1)$ -связной парой. Этим доказано

Следствие. Если клеточные пространства X и Y соответственно клеточно $(n-1)$ - и $(m-1)$ -связны, то

$$(7) \quad \pi_r(X \vee Y) = \pi_r X \oplus \pi_r Y \quad \text{при } r < n+m-1. \quad \square$$

Замечание 4. Разложение (7) на самом деле имеет место для любого гладко пунктированного $(n-1)$ -связного пространства X и любого гладко пунктированного $(m-1)$ -связного пространства Y .

В случае $X = S^n$ и $Y = S^m$ разложение (5) приобретает вид

$$(8) \quad \pi_r(S^n \vee S^m) = \pi_r S^n \oplus \pi_r S^m \oplus \pi_{r+1}(S^n \times S^m, S^n \vee S^m).$$

В этом случае сумму (6) можно переписать в более удобном виде.

Пусть $\iota' \in \pi_n(S^n \vee S^m)$ — гомотопический класс отображения $i_1: S^n \rightarrow S^n \vee S^m$, $x \mapsto x_1$. Тогда, по определению, $\alpha'_1 = i_{1*} \alpha_1 = \iota' \circ \alpha_1$ для любого элемента $\alpha_1 \in \pi_r S^n$. Аналогично, если $\iota'' \in \pi_m(S^n \vee S^m)$ — гомотопический класс отображения $i_2: S^m \rightarrow S^n \vee S^m$, $x \mapsto x_2$, то $\alpha''_2 = \iota'' \circ \alpha_2$ для любого элемента $\alpha_2 \in \pi_r S^m$. Следовательно, при $X = S^n$ и $Y = S^m$ разложение (6) произвольного элемента группы $\pi_r(S^n \vee S^m)$ имеет вид

$$(9) \quad \iota' \circ \alpha_1 + \iota'' \circ \alpha_2 + \partial \beta,$$

где $\alpha_1 \in \pi_r S^n$, $\alpha_2 \in \pi_r S^m$ и $\beta \in \pi_{r+1}(S^n \times S^m, S^n \vee S^m)$.

Элементы ι' и ι'' обладают тем важным свойством, что для любых элементов $\beta_1 \in \pi_n X$ и $\beta_2 \in \pi_m X$ существует такое отображение $f: S^n \vee S^m \rightarrow X$, что $f_* \iota' = \beta_1$, $f_* \iota'' = \beta_2$. Действительно, если $\beta_1 = [f_1: S^n \rightarrow X]$ и $\beta_2 = [f_2: S^m \rightarrow X]$, то годится отображение $f = f_1 \vee f_2$. $\square$

Это свойство называется свойством универсальности элементов ι' и ι'' .

Из него следует, что для любой гомотопической операции θ типа $(n, m; r)$ имеет место равенство $\theta(\beta_1, \beta_2) = f_* \theta(\iota', \iota'')$. Это означает, что операция θ представляется элементом $\theta(\iota', \iota'') \in \pi_r(S^n \vee S^m)$.

При $n=m$ оба элемента ι' и ι'' принадлежат одной группе $\pi_n(S^n \vee S^n)$, и, следовательно, определена их сумма $\iota' + \iota''$. Поэтому для любого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$

в группе $\pi_r(S^n \vee S^n)$ определен элемент $(\iota' + \iota'') \circ \alpha$. Пусть

$$(\iota' + \iota'') \circ \alpha = \iota' \circ \alpha_1 + \iota'' \circ \alpha_2 + \partial\beta$$

— его разложение (9). При гомоморфизме $\text{pr}_{1*}: \pi_r(S^n \vee S^n) \rightarrow \pi_r S^n$, индуцированном проекцией $\text{pr}_1: S^n \vee S^n \rightarrow S^n$ на первое слагаемое, это равенство переходит, очевидно, в равенство $\iota_n \circ \alpha = \iota_n \circ \alpha_1$, откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha$. Аналогично доказывается, что $\alpha_2 = \alpha$. Таким образом, для любого элемента $\alpha \in \pi_n S^n$ в группе $\pi_r(S^n \vee S^n)$ имеет место равенство

$$(10) \quad (\iota' + \iota'') \circ \alpha = \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha + \partial\beta,$$

где $\beta \in \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$.

Определение 3. Элемент $\alpha \in \pi_r S^n$ называется *примитивным*, если в равенстве (10) $\beta = 0$.

Согласно следствию 1 предложения 2 (примененному к случаю $X = Y = S^n$), если $r \leq 2n - 1$, то любой элемент группы $\pi_r S^n$ примитивен.

Определение 4. Гомотопическая операция θ типа $(n; r)$ называется *аддитивной*, если она является гомоморфизмом групп, т. е. если

$$\theta(\beta_1 + \beta_2) = \theta\beta_1 + \theta\beta_2 \quad \text{для любых элементов } \beta_1, \beta_2 \in \pi_n X.$$

Для представляющего элемента $\alpha \in \pi_r S^n$ это условие равносильно выполнению соотношения левой дистрибутивности:

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha.$$

Предложение 3. Элемент $\alpha \in \pi_r S^n$ тогда и только тогда примитивен, когда операция $\theta_\alpha: \beta \mapsto \beta \circ \alpha$ аддитивна, т. е., иначе говоря, когда для элемента α выполнено условие левой дистрибутивности.

Доказательство. Если операция θ_α аддитивна, то, в частности, $(\iota' + \iota'') \circ \alpha = \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha$, и, значит, в равенстве (10) $\beta = 0$. Обратно, если $(\iota' + \iota'') \circ \alpha = \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha$, то для любого отображения $f: S^n \vee S^n \rightarrow X$ будет иметь место равенство

$$(f_*\iota' + f_*\iota'') \circ \alpha = f_*((\iota' + \iota'') \circ \alpha) = f_*\iota' \circ \alpha + f_*\iota'' \circ \alpha$$

и, значит, для элементов $\beta_1 = f_*\iota'$, $\beta_2 = f_*\iota''$ — равенство $(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha$. Следовательно, — в силу универсальности элементов ι', ι'' — операция θ_α аддитивна. $\square$

Следствие. При $r \leq 2n - 1$ каждая гомотопическая операция типа $(n; r)$ аддитивна. $\square$

В силу теоремы Фрейденталя это следствие вытекает также из следующего предложения, которое интересно и само по себе:

Предложение 4. *Элемент $\alpha \in \pi_r S^n$ примитивен, если он принадлежит образу надстроечного гомоморфизма $E: \pi_{r-1} S^{n-1} \rightarrow \pi_r S^n$, т. е. если существует такой элемент $\beta \in \pi_{r-1} S^{n-1}$, что $\alpha = E\beta$.*

Доказательство. Согласно предложению 3 нам надо доказать, что для любых элементов $\beta_1, \beta_2 \in \pi_n X$ имеет место равенство

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ E\beta = \beta_1 \circ E\beta + \beta_1 \circ E\beta,$$

что сводится к расшифровке определений и непосредственному сравнению левой и правой частей равенства. Действительно, для любого отображения $g: S^{r-1} \rightarrow S^{n-1}$ отображение $Eg: S^r \rightarrow S^n$ задается (в силу отождествлений $S^r = SS^{r-1}$ и $S^n = SS^{n-1}$) формулой $(Eg)[x, t] = [gx, t]$, $x \in S^{r-1}, t \in I$, и значит, для любых отображений $g_1: S^n \rightarrow X$ и $g_2: S^n \rightarrow X$ отображение $g_1 \circ Eg + g_2 \circ Eg$ задается формулой

$$(g_1 \circ Eg + g_2 \circ Eg)[x, t] = \begin{cases} g_1[gx, 2t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g_2[gx, 2t - 1], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

т. е. той же самой формулой, что и отображение $(g_1 + g_2) \circ Eg$. $\square$

Для любого $n \geq 1$ каждая одностная гомотопическая операция θ типа $(m; r)$ определяет по формуле

$$\theta'(\alpha, \beta) = \theta\alpha, \quad \alpha \in \pi_n X, \quad \beta \in \pi_n X,$$

двуместную операцию θ' типа $(m, n; r)$. Ясно, что если $\theta = \theta_\alpha$, $\alpha \in \pi_r S^m$, то $\theta' = \theta_{\alpha'}$, где $\alpha' = i' \circ \alpha \in \pi_r (S^m \vee S^n)$. Это дает «операционную» интерпретацию первого члена разложения (9). Второй член интерпретируется аналогично.

Поскольку, согласно следствию 1 предложения 2 (примененному к случаю $X = S^m$, $Y = S^n$) в разложении (9) при $r < m + n - 1$ присутствуют только первые два члена, мы видим, что при $r < m + n - 1$ все двуместные гомотопические операции типа $(m, n; r)$ возникают описанным образом из одностных операций.

Наименьшее значение r , при котором возможны «истинно двуместные» операции, равно, таким образом,

$m+n-1$. Эти операции представляются элементами $\partial\beta$, где $\beta \in \pi_{m+n}(S^m \times S^n, S^m \vee S^n)$.

Согласно определению 1 лекции 1.8 элементами относительно гомотопической группы $\pi_r(X, A)$ являются гомотопические классы пунктированных отображений $(E^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, A)$. С другой стороны, для любой r -мерной клетки e^r произвольного клеточного пространства X соответствующее характеристическое отображение χ мы можем рассматривать как отображение $(E^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, X^{r-1})$. Поэтому отображение χ будет определять некоторый элемент группы $\pi_r(X, X^{r-1}, x_0)$, где $x_0 = \chi(s_0)$. Предполагая отображение χ для клетки e^r раз навсегда выбранным, мы будем обозначать этот элемент символом $[e^r]$.

В общем виде мы рассмотрим эту конструкцию в лекции 9, а сейчас ограничимся случаем клеточного пространства $X = S^m \times S^n$, где $m, n \geq 1$, рассматриваемого в его минимальном клеточном разбиении, состоящем из клеток e^0, e^m, e^n и $e^{m+n} = e^m \times e^n$ размерностей $0, m, n$ и $m+n$.

Поскольку $X^{m+n-1} = S^m \vee S^n$, элемент $[e^{m+n}]$ принадлежит в этом случае интересующей нас группе $\pi_{m+n}(S^m \times S^n, S^m \vee S^n)$. По определению он является гомотопическим классом отображения $\chi = \chi^{(m)} \times \chi^{(n)}$, где $\chi^{(m)}: E^m \rightarrow S^m$ и $\chi^{(n)}: E^n \rightarrow S^n$ — характеристические отображения (напомним — раз навсегда у нас выбранные) клеток $e^m = S^m \setminus s_0$ и $e^n = S^n \setminus s_0$. (Отображение $\chi^{(m)} \times \chi^{(n)}$, очевидно, пунктировано; впрочем, это замечание существенно только при $m=1$ или $n=1$.)

Однако нас интересует не столько элемент $[e^{m+n}]$, сколько его образ $\partial[e^{m+n}]$ в группе $\pi_{m+n-1}(S^m \vee S^n)$ при граничном гомоморфизме

$$\partial: \pi_{m+n}(S^m \times S^n, S^m \vee S^n) \rightarrow \pi_{m+n-1}(S^m \vee S^n).$$

Этот образ задается ограничением ρ отображения χ на границе $(E^m \times E^n)$ произведения $E^m \times E^n$, т. е., точнее, отображением $\rho \circ \tilde{\omega}_{m,n}$, где

$$(11) \quad \tilde{\omega}_{m,n}: S^{m+n-1} \rightarrow (E^m \times E^n)$$

— некоторый раз навсегда выбранный пунктированный гомеоморфизм.

Являясь элементом группы $\pi_{m+n-1}(S^m \vee S^n)$, элемент $\partial[e^{m+n}]$ представляет некоторую двуместную гомотопическую операцию типа $(m, n; m+n-1)$. Опишем эту операцию в явном виде.

Ясно, что

$$(E^m \times E^n)' = (E^m \times S^{n-1}) \cup (S^{m-1} \times E^n),$$

причем $(E^m \times S^{n-1}) \cap (S^{m-1} \times E^n) = S^{m-1} \times S^{n-1}$. Поэтому для любых отображений $f: (E^m, S^{m-1}) \rightarrow (X, x_0)$ и $g: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ формула

$$(12) \quad h(x, y) = \begin{cases} f(x), & \text{если } y \in S^{n-1}, \\ g(y), & \text{если } x \in S^{m-1}, \end{cases} \quad (x, y) \in (E^m \times E^n)',$$

корректно определяет некоторое пунктированное отображение $h: (E^m \times E^n)' \rightarrow X$. Автоматическая проверка показывает, что гомотопический класс $\gamma = [h \circ \mathfrak{D}_{m,n}]' \in \pi_{m+n-1} X$ отображения $h \circ \mathfrak{D}_{m,n}: S^{m+n-1} \rightarrow X$ зависит (при выбранном гомеоморфизме $\mathfrak{D}_{m,n}$) только от гомотопических классов $\alpha \in \pi_n X$ и $\beta \in \pi_n X$ отображений f и g , и что соответствие $(\alpha, \beta) \mapsto \gamma$ обладает свойством естественности, т. е. является гомотопической операцией.

Определение 5. Построенная гомотопическая операция (или, точнее, целое семейство операций, зависящее от двух параметров m и n) называется *умножением Уайтхеда*. Результат $[h \circ \mathfrak{D}_{m,n}]'$ ее применения к элементам α и β называется *произведением Уайтхеда* этих элементов и обозначается символом $[\alpha, \beta]$.

Иногда для упрощения речи мы будем позволять себе отображение $h \circ \mathfrak{D}_{m,n}$ (или даже отображение h) называть произведением Уайтхеда отображений f и g (и обозначать символом $[f, g]$).

Если $X = S^m \vee S^n$, а $\alpha = i'$ и $\beta = i''$, то за отображения f и g мы можем принять характеристические отображения $\chi^{(m)}$ и $\chi^{(n)}$ (точнее, их композиции с вложениями $i_1: S^m \rightarrow S^m \vee S^n$ и $i_2: S^n \rightarrow S^m \vee S^n$). Соответствующее отображение h будет тогда не чем иным, как ограничением на $(E^m \times E^n)'$ отображения $\chi = \chi^{(m)} \times \chi^{(n)}$, и, значит, будет иметь место равенство $[h \circ \mathfrak{D}_{m,n}]' = \partial [e^{m+n}]$, т. е. равенство

$$(13) \quad [i', i''] = \partial [e^{m+n}].$$

По определению это равенство означает, что операция $(\alpha, \beta) \mapsto [\alpha, \beta]$ представляется элементом $\partial [e^{m+n}]$.

Алгебраические свойства умножения Уайтхеда описываются в следующей теореме.

Теорема 1. Умножение Уайтхеда

а) билинейно, т. е.

$$(14) \quad \begin{aligned} [\alpha_1 + \alpha_2, \beta] &= [\alpha_1, \beta] + [\alpha_2, \beta], \\ [\alpha, \beta_1 + \beta_2] &= [\alpha, \beta_1] + [\alpha, \beta_2] \end{aligned}$$

для любых элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in \pi_m X$, $\beta_1, \beta_2, \beta \in \pi_n X$, где $m, n \geq 2$;

б) с точностью до знака коммутативно, т. е.

$$(15) \quad [\beta, \alpha] = \pm [\alpha, \beta]$$

для любых элементов $\alpha \in \pi_m X$, $\beta \in \pi_n X$, где $m, n \geq 1$;

в) с точностью до знаков удовлетворяет тождеству Якоби, т. е.

$$(16) \quad \pm [[\alpha, \beta], \gamma] \pm [[\beta, \gamma], \alpha] \pm [[\gamma, \alpha], \beta] = 0$$

для любых элементов $\alpha \in \pi_l X$, $\beta \in \pi_m X$, $\gamma \in \pi_n X$, где $l, m, n \geq 2$;

г) перестановочно с операциями из группы $\pi_1 X$, т. е.

$$(17) \quad \xi[\alpha, \beta] = [\xi\alpha, \xi\beta]$$

для любых элементов $\xi \in \pi_1 X$, $\alpha \in \pi_m X$, $\beta \in \pi_n X$, где $m, n \geq 1$ (конечно, под $\xi\alpha$ при $m=1$ здесь понимается элемент $\xi(\alpha) = \xi\alpha\xi^{-1}$, а под $\xi\beta$ при $n=1$ — элемент $\xi(\beta) = \xi\beta\xi^{-1}$);

д) при $m=1$ и $n \geq 1$ выражается формулой

$$(18) \quad [\xi, \beta] = \pm (\xi\beta - \beta), \quad \xi \in \pi_1 X, \beta \in \pi_n X.$$

Неопределенность в знаках в формулах (15), (16) и (18) объясняется тем, что эти знаки зависят от выбора отождествляющих гомеоморфизмов (11). Долгое время был популярен выбор гомеоморфизмов, при которых формулы (15), (16) и (18) имеют соответственно вид

$$(15') \quad [\beta, \alpha] = (-1)^{mn} [\alpha, \beta],$$

$$(16') \quad (-1)^{ln} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{lm} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{mn} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0,$$

$$(18') \quad [\xi, \beta] = \xi\beta - \beta.$$

Однако в последнее время распространился другой, оказавшийся более удобным выбор гомеоморфизмов (11), который в сравнении с классическим выбором сводится к замене $[\alpha, \beta]$ на $(-1)^m [\alpha, \beta]$. При таком выборе формула (18') остается прежней, а формулы (15') и (16') приобретают

вид

$$(15'') \quad [\beta, \alpha] = -(-1)^{(m-1)(n-1)} [\alpha, \beta],$$

$$(16'') \quad (-1)^{(l-1)(n-1)} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{(l-1)(m-1)} [[\beta, \gamma], \alpha] + \\ + (-1)^{(m-1)(n-1)} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0,$$

означающий, что после сдвига градуировки на единицу прямая сумма групп $\pi_{n-1}X$, $n \geq 1$, является по отношению к умножению Уайтхеда градуированной алгеброй Ли (над кольцом $\mathbb{Z}$) или в другой терминологии — супералгеброй Ли.

Чтобы описать соответствующие гомеоморфизмы (11), мы заметим, что точки сферы $S^{m+n-1} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ могут быть представлены в виде $(\cos \frac{\pi}{2} t \cdot x, \sin \frac{\pi}{2} t \cdot y)$, где $x \in S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$, $y \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и $t \in I$, причем при $t \neq 0$ и $t \neq 1$ это представление единственно. Сопоставив этой точке при $0 \leq t \leq 1/2$ точку $(x, 2ty) \in S^{m-1} \times E^n$, а при $1/2 \leq t \leq 1$ точку $((2-2t)x, y) \in E^m \times S^{n-1}$, мы, как показывает автоматическая проверка, получим некоторый гомеоморфизм $S^{m+n-1} \rightarrow (E^m \times E^n)$. Его мы и примем за гомеоморфизм $\Phi_{m,n}$.

Замечание 5. Формулы (14) и (16) можно обобщить так, чтобы они оказались справедливыми и для исключенных значений l , m и n . Для этого следует для любых элементов $\xi \in \pi_p X$ и $\alpha \in \pi_n X$ при $p > 1$ условиться понимать под $\xi\alpha$ элемент α . Тогда, скажем, первую формулу (14) мы можем переписать в виде

$$[\alpha + \beta, \gamma] = [\alpha, \beta\gamma] + [\beta, \gamma],$$

и в этом виде, как непосредственно вытекает из формулы (18), она будет справедлива и при $m = 1$ и при $n = 1$ (если, конечно, при $m = 1$ и $n = 1$ под $\beta\gamma$ понимать, как всегда, $\beta\gamma\beta^{-1}$). Аналогично, формула (16) (или, точнее, формула (16'')) будет верна при $l \geq 1$, $m \geq 1$ и $n \geq 2$, если ее записать в виде

$$(-1)^{(l-1)(n-1)} [[\alpha, \beta], \bar{\gamma}] + (-1)^{(l-1)(m-1)} [[\beta, \gamma], \alpha] + \\ + (-1)^{(m-1)(n-1)} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0,$$

где $\bar{\gamma} = \beta(\alpha\gamma)$, и будет верна при $l \geq 1$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, если ее записать в виде

$$(-1)^{mn+m+n} \beta [[-\beta, \alpha], \gamma] + (-1)^{nl+n+l} \gamma [[-\gamma, \beta], \alpha] + \\ + (-1)^{lm+l+m} \alpha [[-\alpha, \gamma], \beta] = 0.$$

Это замечание иногда позволяет исключить отдельное рассмотрение особых случаев.

Замечание 6. Из формулы (15') следует, что при $m = n$ справедливо равенство

$$[\beta, \alpha] = (-1)^n [\alpha, \beta].$$

Ясно, что это равенство сохраняется при любом выборе гомеоморфизмов (11). То же самое верно и для тождества Якоби при $l = m = n$, имеющего в этом случае классический вид

$$[\alpha, [\beta, \gamma]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] = 0.$$

Что касается доказательства теоремы 1, то наибольшие затруднения вызывает формула (16), в которой участвуют шесть причудливо переплетающихся гомеоморфизмов (11). Справедливость этой формулы была предположена Вейлем почти одновременно с открытием в 1941 г. умножения Уайтхеда, но в течение почти 13 лет все попытки ее доказательства были безуспешными, пока, наконец, около 1954 г. не было получено разными авторами сразу несколько доказательств, ни одно из которых не было простым. Однако впоследствии было предложено новое определение умножения Уайтхеда (трудно сказать, кем это было впервые сделано), из которого формула (16) вытекает уже без особого труда. Мы изложим это определение и выведем из него формулу (16) (в уточненном виде (16'')) в следующей лекции 5. Там же мы весьма просто докажем и формулы (14) (их непосредственное доказательство также несложно, и читателю будет очень полезно продумать это доказательство, не дожидаясь лекции 5). Для доказательства же формулы (15) достаточно заметить, что гомеоморфизм $E^n \times E^m \rightarrow E^m \times E^n$, $(x, y) \mapsto (y, x)$, перестановки множителей (точнее, его ограничение T на $(E^n \times E^m)'$) переводит отображение (12) в аналогичное отображение, построенное для отображений g и f . Уточненная версия (15') этой формулы требует вычисления степени отображения $S^{m+n-1} \rightarrow S^{m+n-1}$, возникающего из гомеоморфизма T в силу отождествлений $S^{m+n-1} = (E^n \times E^m)'$ и $S^{m+n-1} = (E^m \times E^n)'$ (т. е., более формально, вычисления степени отображения $\mathfrak{S}_{m,n} \circ T \circ \mathfrak{S}_{n,m}^{-1}$). Мы также сделаем это в лекции 5.

Пока же ограничимся доказательством формул (17) и (18).

Доказательство формулы (17). Если

$$\begin{aligned}\xi &= [\mu: (I, I) \rightarrow (X, x_0)]^* \in \pi_1 X, \\ \alpha &= [f: (E^m, S^{m-1}) \rightarrow (X, x_0)]^* \in \pi_m X, \\ \xi\alpha &= [f_1: (E^m, S^{m-1}) \rightarrow (X, x_0)]^* \in \pi_m X, \\ \beta &= [g: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)]^* \in \pi_n X, \\ \xi\beta &= [g_1: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)]^* \in \pi_n X,\end{aligned}$$

то (см. лекцию I.5) существуют такие отображения $F: E^m \times I \rightarrow X$, $G: E^n \times I \rightarrow X$, что

$$\begin{aligned}F(x, 0) &= f(x), \quad F(x, 1) = f_1(x) \text{ для любой точки } x \in E^m, \\ F(x, t) &= u(1-t) \text{ для любой точки } x \in S^{m-1} \text{ и любого } t \in I, \\ G(y, 0) &= g(y), \quad G(y, 1) = g_1(y) \text{ для любой точки } y \in E^n, \\ G(y, t) &= u(1-t) \text{ для любой точки } y \in S^{n-1} \text{ и любого } t \in I.\end{aligned}$$

Мы определим гомотопию

$$H_t: (E^m \times E^n)^* \rightarrow X,$$

положив

$$H_t(x, y) = \begin{cases} F(x, t), & \text{если } y \in S^{n-1}, \\ G(y, t), & \text{если } x \in S^{m-1}, \end{cases} \quad (x, y) \in (E^m \times E^n)^*.$$

Ясно, что $H_0 = h$, где h — отображение (12), а $H_1 = h_1$, где h_1 — отображение (12), построенное для отображений f_1 и g_1 . Поэтому гомотопия $\bar{H}_t = H_t \circ \bar{\omega}_{m, n}: S^{m+n-1} \rightarrow X$

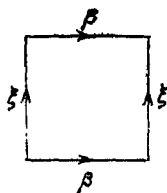


Рис. 7.

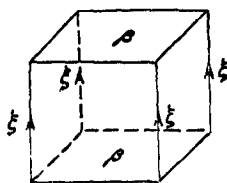


Рис. 8.

будет связывать отображение $h \circ \bar{\omega}_{m, n}$ (класса $[\alpha, \beta]$) с отображением $h_1 \circ \bar{\omega}_{m, n}$ (класса $[\xi\alpha, \xi\beta]$), причем для любого $t \in I$ будет иметь место равенство $\bar{H}_t(s_0) = u(1-t)$. Поскольку $\xi = [\mu]^*$, это доказывает формулу (17). $\square$

Формула (18) при $n = 1$ имеет вид

$$[\xi, \beta] = \xi\beta\xi^{-1}\beta^{-1}$$

и непосредственно очевидна из чертежа (см. рис. 7). При $n > 1$ чертеж аналогичен (см. рис. 8), но доказательство требует некоторых приготовлений.

Пусть h — такое отображение $(E^1 \times E^n)^* \rightarrow X$, что $h(y, x) = x_0$ при $x \in S^{n-1}$ и любом $y \in E^1$, и пусть $f(x) = h(-1, x)$ и $g(x) = h(1, x)$. Тогда

$$f: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0), \quad g: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0),$$

так что определены элементы $\alpha = [f]^*$ и $\beta = [g]^*$ группы $\pi_n X$. С другой стороны, выбрав (пунктированный) гомеоморфизм $\mathfrak{D}: S^n \rightarrow (E^1 \times E^n)^*$, мы можем рассмотреть в группе $\pi_n X$ элемент $\gamma = [h \circ \mathfrak{D}]^*$.

Лемма 2. В описанной ситуации имеет место равенство

$$\gamma = \pm (\beta - \alpha)$$

(знак $\pm$ зависит от выбора гомеоморфизма $\mathfrak{D}$).

Доказательство. отождествив шар E^n с конусом $CS^{n-1} = S^{n-1} \times I / S^{n-1} \times 0$, а сферу S^n с надстройкой SS^{n-1} , мы зададим гомеоморфизм

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}: SS^{n-1} &\rightarrow (E^1 \times CS^{n-1})^* = \\ &= (\{-1\} \times CS^{n-1}) \cup (E^1 \times S^{n-1}) \cup (\{1\} \times CS^{n-1}), \end{aligned}$$

положив

$$\mathfrak{D}[x, t]^S = \begin{cases} (-1, [x, 4t]^C), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ (4t-2, x), & \text{если } 1/4 \leq t \leq 3/4, \\ (1, [x, 4-4t]^C), & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

для любых точек $x \in S^{n-1}$, $t \in I$ (см. рис. 9). Тогда отображение $h \circ \mathfrak{D}$ будет суммой (по отношению к коумножению в надстройке $SS^{n-1} = S^n$) четырех отображений $S^n \rightarrow X$: отображения $[x, t] \mapsto f[x, t]$ (т. е. отображения f , рассматриваемого как отображение из $S^n = E^n/S^{n-1}$ в X), двух постоянных отображений $\text{const}: [x, t] \mapsto x_0$ и отображения $[x, t] \mapsto g[x, 1-t]$ (т. е. отображения $S^n \rightarrow X$, противоположного к отображению g , рассматриваемому как отображение из E^n/S^{n-1} в X). Следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma = [h \circ \mathfrak{D}]^* &= [f]^* + [\text{const}]^* + [\text{const}]^* - [g]^* = \\ &= \alpha + 0 + 0 - \beta = -(\beta - \alpha). \quad \square \end{aligned}$$

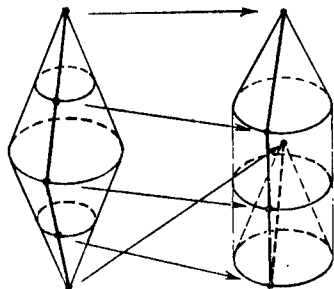


Рис. 9.

Замечание 7. Лемма 2 является одной из простейших аддитивных лемм (ср. с леммой 1 из лекции 1.9).

Теперь мы можем доказать формулу (18) при $n > 1$.

Доказательство формулы (18). По определению, если

$$\beta = [g: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)]^* \text{ и } \xi = [u: (I, I) \rightarrow (X, x_0)]^*,$$

то $\xi\beta = [g_1: (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)]^*$, где g_1 — конечное отображение такой гомотопии $g_t: E^n \rightarrow X$, что $g_0 = g$ и

$$g_t(x) = u(1-t) \text{ для любых } x \in E^n, t \in I.$$

С другой стороны, если f — такое отображение $(E^1, S^0) \rightarrow (X, x_0)$, что $u = [f]^*$ (это отображение связано с петлей u соотношением $f(2t-1) = u(t)$, $t \in I$), то $[\xi, \beta] = [h \circ \Phi_{1,n}]$, где h — отображение $(E^1 \times E^n)^* \rightarrow X$, заданное формулами

$$h(y, x) = \begin{cases} f(y), & \text{если } x \in S^{n-1}, \\ g(x), & \text{если } y \in S^0 \text{ (т. е. } y = \pm 1). \end{cases}$$

Имея это в виду, рассмотрим пунктированную гомотопию $h_t: (E^1 \times E^n)^* \rightarrow X$, определенную (очевидно, корректно) формулами

$$h_t(y, x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } y = -1, x \in E^n, \\ g_{2t}(x), & \text{если } y = 1, 0 \leq t \leq 1/2, \\ & x \in E^n, \\ g_1(x), & \text{если } y = 1, 1/2 \leq t \leq 1, \\ & x \in E^n, \\ u\left(\frac{1+y}{2-2t}\right), & \text{если } -1 \leq y \leq 1-2t, \\ & 0 \leq t \leq 1/2, x \in S^{n-1}, \\ u(2-2t-y), & \text{если } 1-2t \leq y \leq 1, \\ & 0 \leq t \leq 1/2, x \in S^{n-1}, \\ u(2(1+y)(1-t)), & \text{если } -1 \leq y \leq 0, \\ & 1/2 \leq t \leq 1, x \in S^{n-1}, \\ u(2(1-y)(1-t)), & \text{если } 0 \leq y \leq 1, \\ & 1/2 \leq t \leq 1, x \in S^{n-1} \end{cases}$$

(см. рис. 10). Ясно, что $h_0 = h$, и потому $[\xi, \beta] = [h_1 \circ \mathfrak{S}_1, n]^*$.

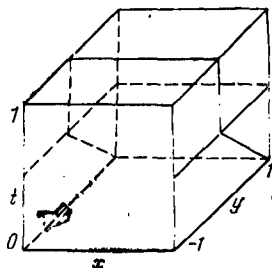


Рис. 10.

Но отображение $h_1: (E^1 \times E^n)^* \rightarrow X$ задается формулами

$$h_1(y, x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } y = -1, x \in E^n, \\ g_1(x), & \text{если } y = 1, x \in E^n, \\ x_0, & \text{если } x \in S^{n-1}, \end{cases}$$

и, значит, удовлетворяет условиям леммы 2 (с g и g_1 в роли f и g). Поэтому $[h_1 \circ \mathfrak{S}_1, n] = \pm (\xi\beta - \beta)$. $\square$

ДОПОЛНЕНИЕ!

Стационарное гомотопическое кольцо сфер. — Смеш-умножение в гомотопических группах.

Из предложения 4 лекции 4 вытекает важное следствие, касающееся стационарных гомотопических групп сфер $\pi_p S$.

Пусть $\pi_* S$ — градуированная группа, компонентами которой являются стационарные гомотопические группы сфер:

$$\pi_0 S = Z, \quad \pi_1 S, \quad \pi_2 S, \quad \dots, \quad \pi_p S, \quad \dots$$

Можно считать, что однородные элементы $\alpha \in \pi_p S$ этой группы задаются непрерывными отображениями вида $S^{n+p} \rightarrow S^n$, причем:

1) для любого $n > p + 1$ существует отображение $f: S^{n+p} \rightarrow S^n$, задающее данный элемент $\alpha \in \pi_p S$;

2) отображения $f: S^{n+p} \rightarrow S^n$ и $g: S^{m+p} \rightarrow S^m$ тогда и только тогда задают один и тот же элемент $\alpha \in \pi_p S$, когда для каждого $N > \max(p + 1 + n, p + 1 + m)$ отображения $E^{N-n} f: S^{N+p} \rightarrow S^N$ и $E^{N-m} g: S^{N+p} \rightarrow S^N$ гомотопны.

В частности, для любых двух элементов $\alpha \in \pi_p S$ и $\beta \in \pi_q S$ существует такое n , что эти элементы задаются

соответственно отображениями $f: S^{n+p+q} \rightarrow S^{n+q}$ и $g: S^{n+q} \rightarrow S^n$, и ясно, что элемент группы $\pi_{p+q}S$, задаваемый отображением $g \circ f: S^{n+p+q} \rightarrow S^n$, не зависит от выбора отображений f и g и определяется исключительно элементами α и β . Мы будем обозначать этот элемент символом $\beta \circ \alpha$ или просто $\beta \alpha$ и будем называть его *произведением* элементов β и α .

Если в силу отождествлений $\pi_p S = \pi_{p+n} S^n$, $n > p + 1$, и $\pi_q S = \pi_{q+m} S^m$, $m > q + 1$, элементы α и β считать элементами групп $\pi_{p+n} S^n$ и $\pi_{q+m} S^m$ соответственно, то элемент $\beta \alpha$ будет — в силу отождествления $\pi_{p+q} S = \pi_{p+q+n+m} S^{n+m}$ — элементом $E^n \beta \circ E^{q+m} \alpha$ группы $\pi_{p+q+n+m} S^{n+m}$.

Построенное умножение, очевидно, ассоциативно и обладает единицей (которой служит элемент $\iota_n \in \pi_n S^n$, рассматриваемый в силу отождествления $\pi_n S^n = \pi_0 S$ как элемент группы $\pi_0 S$; мы будем этот элемент обозначать символом ι). Кроме того, это умножение дистрибутивно (справа — из-за дистрибутивности справа композиционного произведения элементов гомотопических групп, а слева — ввиду предложения 4 лекции 4). Следовательно, *по отношению к умножению* $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \alpha$ *градуированная группа* $\pi_* S$ *является градуированным кольцом с единицей*.

Определение 1. Кольцо $\pi_* S$ называется *стационарным гомотопическим кольцом сфер*.

Вычисление этого кольца является одним из оселков, на которых оттачиваются методы алгебраической топологии. В этом семестре нам удастся выяснить его строение (см. лекцию 8) только в размерностях ≤ 2 , но в дальнейшем, когда будет развита более мощная техника, мы сможем узнать о нем довольно много.

Одним из удивительных свойств кольца $\pi_* S$ является тот факт, что, несмотря на сугубо неравноправную роль, которую в умножении $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \alpha$ играют элементы α и β , *кольцо* $\pi_* S$ *косокоммутативно* (коммутативно как градуированное кольцо), т. е.

$$\alpha \beta = (-1)^{pq} \beta \alpha$$

для любых элементов $\alpha \in \pi_p S$, $\beta \in \pi_q S$.

Для доказательства этого факта мы вернемся к рассмотренному в Дополнении к лекции I. 4 смеш-умножению гомотопических классов

$$(1) \quad [A, X]^* \times [B, Y]^* \rightarrow [A \wedge B, X \wedge Y]^*, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta,$$

при $A = S^p$ и $B = S^q$ (и, значит, при $[A, X]^* = \pi_p X$ и $[B, Y]^* = \pi_q Y$). Так как пара $(S^p \times S^q, S^p \vee S^q)$ является $(p+q)$ -мерной относительной клеткой (и, значит, относительно гомеоморфна клетке (E^{p+q}, S^{p+q-1})), то ее кослой $S^p \wedge S^q$ гомеоморфен кослоу E^{p+q}/S^{p+q-1} , т.е. гомеоморфен сфере S^{p+q} . Соответствующий гомеоморфизм

$$(2) \quad \sigma_{p,q}: S^{p+q} \rightarrow S^p \wedge S^q$$

является композицией

$$S^{p+q} \rightarrow E^{p+q}/S^{p+q-1} \rightarrow E^p \times E^q / (E^p \times E^q)^* \rightarrow \\ \rightarrow S^p \times S^q / S^p \vee S^q = S^p \wedge S^q$$

1) гомеоморфизма, обратного к гомеоморфизму $E^{p+q}/S^{p+q-1} \rightarrow S^{p+q}$, индуцированного относительным гомеоморфизмом (3) лекции 1.5 (при $n = p+q$), который, напомним, задается формулой

$$\chi^{(n)}(ax) = [x, a],$$

где $x \in S^{n-1}$, $a \in I$ (так что $ax \in E^n$) и где символ $[x, a]$ обозначает точку $(\cos \pi a, \sin \pi a \cdot x)$ единичной сферы S^n пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

2) гомеоморфизма, индуцированного гомеоморфизмом

$$(E^{p+q}, S^{p+q-1}) \rightarrow (E^p \times E^q, (E^p \times E^q)^*),$$

определенным формулой

$$(ax, by) \mapsto \begin{cases} (rx, rba^{-1}y), & \text{если } b \leq a, \\ (rab^{-1}x, ry), & \text{если } a \leq b, \end{cases}$$

где $x \in S^{p-1}$, $y \in S^{q-1}$, $a, b \in I$, $r^2 = a^2 + b^2 \leq 1$ (так что $(ax, by) \in E^{p+q}$) и где пространство $\mathbb{R}^{p+q}$ отождествлено с произведением $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$;

3) гомеоморфизма, индуцированного относительным гомеоморфизмом

$$\chi^{(p)} \times \chi^{(q)}: (E^p \times E^q, (E^p \times E^q)^*) \rightarrow (S^p \times S^q, S^p \vee S^q).$$

Поэтому в введенных выше обозначениях гомеоморфизм $\sigma_{p,q}$ задается формулой

$$\sigma_{p,q}[(ax, by), t] = \begin{cases} [x, t] \wedge [y, tba^{-1}], & \text{если } b \leq a, \\ [x, tab^{-1}] \wedge [y, t], & \text{если } a \leq b, \end{cases}$$

где $x \in S^{p-1}$, $y \in S^{q-1}$, $a, b \in I$, $a^2 + b^2 = 1$ (так что $(ax, by) \in S^{p+q-1}$ и $t \in I$ (напомним, что, скажем, символ $[x, t]$ обозначает точку $(\cos \pi t, \sin \pi t \cdot x)$ единичной сферы S^p пространства $\mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ и, соответственно этому, сим-

вол $[(ax, by), t]$ — точку $(\cos \pi t, a \sin \pi t \cdot x, b \sin \pi t \cdot y)$ единичной сферы S^{p+q} пространства $\mathbb{R}^{p+q+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Отождествив посредством гомеоморфизма (2) пространство $S^p \wedge S^q$ со сферой S^{p+q} , мы из умножения (1) при $A = S^p$ и $B = S^q$ получим отображение

$$(3) \quad \pi_p X \times \pi_q Y \rightarrow \pi_{p+q} (X \wedge Y), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta,$$

называемое *внешним смеш-умножением* элементов гомотопических групп.

Предложение 1. Умножение (3) дистрибутивно относительно сложения, т. е.

$$(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma \quad \text{и} \quad \alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$$

для любых элементов $\alpha, \beta \in \pi_p X$, $\gamma \in \pi_q Y$ и соответственно $\alpha \in \pi_p X$, $\beta, \gamma \in \pi_q Y$.

Доказательство. Из Дополнения к лекции I.4 мы знаем, что умножение (1) дистрибутивно по отношению к сложению, индуцированному коумножениями $m \wedge \text{id}$ и $\text{id} \wedge m$ в $S^p \wedge S^q$, где m — стандартное коумножение в S^p и S^q соответственно. Поэтому для доказательства предложения 1 достаточно доказать, что стандартное коумножение m в S^{p+q} гомеоморфизм (2) переводит в коумножения $m \wedge \text{id}$ и $\text{id} \wedge m$ (или хотя бы в отображения, им гомотопные), т. е. что этот гомеоморфизм является гомотопическим изоморфизмом соответствующих Н-когрупп. Мы докажем этот факт только для коумножения $m \wedge \text{id}$, поскольку для коумножения $\text{id} \wedge m$ доказательство проводится совершенно аналогично.

С этой целью мы определим гомотопию

$$f_\tau: S^{p+q} \rightarrow (S^p \vee S^q) \wedge S^q, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

формулой

$$f_\tau[(ax, by), t] = \begin{cases} [x, 2t]_I \wedge [y, (1+\tau) t b a^{-1}], & \text{если } b \leq a \text{ и } 0 \leq t \leq 1/2, \\ [x, 2t-1]_{II} \wedge [y, (1+\tau) t b a^{-1} - \tau], & \text{если } b \leq a \text{ и } 1/2 \leq t \leq 1, \\ [x, 2tab^{-1}]_I \wedge [y, (1+\tau) t], & \text{если } a \leq b \text{ и } 0 \leq t \leq \frac{b-(b-a)\tau}{2a}, \\ [x, (1-ab^{-1})\tau + 2tab^{-1} - 1]_{II} \wedge [y, (1+\tau)t - \tau], & \text{если } a \leq b \text{ и } \frac{b-(b-a)\tau}{2a} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что эта гомотопия корректно определена и связывает отображения $(m \wedge \text{id}) \circ \sigma$ и $(\sigma \vee \sigma) \circ m$ из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} S^{p+q} & \xrightarrow{\sigma} & S^p \wedge S^q \\ m \downarrow & & \downarrow m \wedge \text{id} \\ S^{p+q} \vee S^{p+q} & \xrightarrow{\sigma \vee \sigma} & (S^p \wedge S^q) \vee (S^p \wedge S^q) = (S^p \vee S^p) \wedge S^q \end{array}$$

где $\sigma = \sigma_{p,q}$. Таким образом, эта диаграмма гомотопически коммутативна, и, значит, σ является гомотопическим морфизмом по отношению к коумножениям m и $m \vee \text{id}$. $\square$

В силу предложения 1 корректно определен гомоморфизм

$$\pi_p X \otimes \pi_q Y \rightarrow \pi_{p+q} (X \wedge Y), \quad \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \wedge \beta,$$

который также называется *внешним смеш-умножением*.

Из Дополнения к лекции I.4 мы знаем, что после соответствующих отождествлений умножение (1) коммутативно. Казалось бы это свойство должно сохраниться и для умножения (3). Однако это не так, поскольку в построении последнего умножения участвует дополнительное отождествление посредством гомеоморфизма (2), из-за чего элементы $\alpha \wedge \beta$ и $\beta \wedge \alpha$ группы $\pi_{p+q} (X \wedge Y) = \pi_{q+p} (Y \wedge X)$ окажутся связанными соотношением $\beta \wedge \alpha = (-1)^d \alpha \wedge \beta$, где $(-1)^d$ — степень гомеоморфизма $T = \sigma_{q,p}^{-1} \sigma_{p,q} : S^{p+q} \rightarrow S^{p+q}$. Но ясно, что

$$T[(ax, by), t] = [(by, ax), t] \quad \text{для любой точки } [(ax, by), t] \in S^{p+q},$$

откуда непосредственно следует, что $d = pq$. Тем самым доказано, что

$$(4) \quad \beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta \quad \text{для любых элементов } \alpha \in \pi_p X, \beta \in \pi_q Y,$$

т. е. что *смеш-умножение (3) косокоммутативно*.

Аналогичное вычисление показывает, что в тождестве ассоциативности степень соответствующего гомеоморфизма равна 1. Поэтому *смеш-умножение (3) ассоциативно*, т. е. для любых элементов $\alpha \in \pi_p X$, $\beta \in \pi_q Y$, $\gamma \in \pi_r Y$ имеет место равенство

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

(если, конечно, каноническое отображение $(X \wedge Y) \wedge Z \rightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$ является гомеоморфизмом или хотя бы гомотопической эквивалентностью).

При $X = S^1$ и $\alpha = \iota_1$ элемент $\iota_1 \wedge \beta$ для любого элемента $\beta \in \pi_q Y$ принадлежит в силу отождествления $S^1 \wedge Y = S^1 Y$ группе $\pi_{q+1}(S^1 Y)$ и, как показывает непосредственное сравнение определений, совпадает с элементом $S^1 \beta = E\beta$:

$$(5) \quad \iota_1 \wedge \beta = E\beta, \quad \beta \in \pi_q Y.$$

Важный частный случай (или, лучше сказать, — вариант) смеш-умножения (3) возникает при $X = S^m$ и $Y = S^n$. Поскольку в этом случае $X \wedge Y = S^{m+n}$, мы получаем, следовательно, отображение

$$(6) \quad \pi_p S^m \times \pi_q S^n \rightarrow \pi_{p+q} S^{m+n}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta,$$

которое называется *внутренним смеш-умножением* элементов гомотопических групп сфер.

Очевидно, что подобно умножению (3) умножение (6) дистрибутивно относительно сложения и потому определяет гомоморфизм

$$\pi_p S^m \otimes \pi_q S^n \rightarrow \pi_{p+q} S^{m+n}, \quad \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \wedge \beta,$$

также называемый смеш-умножением.

Очевидно также, что *умножение* (6) *ассоциативно*, т. е. для любых элементов $\alpha \in \pi_p S^m$, $\beta \in \pi_q S^n$, $\gamma \in \pi_r S^l$ в группе $\pi_{p+q+r} S^{m+n+l}$ имеет место равенство

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Тождество (5) также сохраняется для умножения (6). Кроме того, ясно, что

$$\underbrace{\iota_1 \wedge \dots \wedge \iota_1}_{p \text{ раз}} = \iota_p.$$

Поэтому в силу ассоциативности

$$(7) \quad \iota_p \wedge \beta = E^p \beta \text{ для любого элемента } \beta \in \pi_q S^n,$$

где

$$E^p = \underbrace{E \circ \dots \circ E}_{p \text{ раз}}$$

— итерированный надстроечный гомоморфизм.

Что же касается вопроса о коммутативности умножения (6), то поскольку при перестановке множителей S^m и S^n в равенстве $S^{m+n} = S^m \wedge S^n$ сфера S^{m+n} подвергается, как мы уже знаем, гомеоморфизму степени $(-1)^{mn}$, то

для любых элементов $\alpha \in \pi_p S^m$, $\beta \in \pi_q S^n$ в группе $\pi_{p+q} S^{m+n}$ будет иметь место равенство

$$(8) \quad \beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} ((-1)^{mn} \iota_{m+n} \circ (\alpha \wedge \beta)).$$

Хотя, вообще говоря, композиция с элементом вида $-\iota_N$ не сводится к умножению на -1 (см. формулу (10) в Дополнении к лекции 6), но, оказывается, что в данном случае вынос знака возможен и, значит,

$$(9) \quad \beta \wedge \alpha = (-1)^{pq+mn} \alpha \wedge \beta$$

для любых элементов $\alpha \in \pi_p S^m$, $\beta \in \pi_q S^n$.

В частности, в силу формулы (7)

$$(10) \quad \beta \wedge \iota_p = (-1)^{p(q+n)} E^p \beta \text{ для любого элемента } \beta \in \pi_q S^n.$$

Легко, впрочем, доказать формулу (10) и непосредственно из формулы (8). Действительно,

$$\begin{aligned} \beta \wedge \iota_p &= (-1)^{pq} ((-1)^{mp} \iota_{p+m} \circ (\iota_p \wedge \beta)) = \\ &= (-1)^{pq} ((-1)^{mp} \iota_{p+m} \circ E^p \beta) = (-1)^{pq+mp} E^p \beta, \end{aligned}$$

поскольку в силу предложения 4 лекции 4 элемент $E^p \beta$ примитивен, и потому вынос знака возможен. $\square$

Чтобы доказать теперь формулу (9), мы заметим, что в силу функториальности смеш-умножения

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (\alpha \circ \iota_p) \wedge (\iota_n \circ \beta) = (\alpha \wedge \iota_n) \circ (\iota_p \wedge \beta), \\ \alpha \wedge \beta &= (\iota_m \circ \alpha) \wedge (\beta \circ \iota_q) = (\iota_m \wedge \beta) \circ (\alpha \wedge \iota_q), \end{aligned}$$

и потому, согласно формуле (10),

$$(11) \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{n(p+m)} E^n \alpha \circ E^p \beta = (-1)^{q(p+m)} E^m \beta \circ E^q \alpha$$

для любых элементов $\alpha \in \pi_p S^m$, $\beta \in \pi_q S^n$.

Эта замечательная формула, выражающая операцию $\wedge$ через операции E и $\circ$, называется тождеством Барата — Хилтона.

Ввиду функториальности гомоморфизма E (т. е. тождества $E(\beta \circ \alpha) = E\beta \circ E\alpha$, которое имеет место для любых элементов $\alpha \in \pi_p S^m$ и $\beta \in \pi_m X$) из формулы (11) вытекает, что $\alpha \wedge \beta = E\gamma$, где, скажем, $\gamma = (-1)^{n(p+m)} E^{n-1} \alpha \circ E^{p-1} \beta$. Следовательно, элемент $\alpha \wedge \beta$ примитивен и, значит, вынос знака в формуле (8) возможен. $\square$

Теперь мы, наконец, можем доказать косокоммутативность кольца $\pi_* S$.

Предложение 2. Для любых элементов $\alpha \in \pi_p S$, $\beta \in \pi_q S$ в кольце $\pi_* S$ имеет место равенство

$$\beta\alpha = (-1)^{pq} \alpha\beta.$$

Доказательство. Согласно формуле (11), если $\alpha \in \pi_{p+m} S^m$ и $\beta \in \pi_{q+n} S^n$, то в группе $\pi_{p+q+m+n} S^{m+n}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} E^m \beta \circ E^{q+n} \alpha &= (-1)^{(q+n)(p+m)-n(p+m)} E^n \alpha \circ E^{p+m} \beta = \\ &= (-1)^{pq} E^n \alpha \circ E^{p+m} \beta. \quad \square \end{aligned}$$

Джойн пространств.— Обобщенное умножение Уайтхеда.— Конструкция Хопфа.— Джойн отображений и гомотопических классов.— Альтернативное определение умножения Уайтхеда.— Косокоммутативность умножения Уайтхеда.— Билинейность умножения Уайтхеда.— Тождество Якоби для умножения Уайтхеда.

В этой лекции мы построим умножение Уайтхеда в его естественной общности для произвольных групп вида $[S^*A, X]^*$, что позволит нам дать вполне прозрачное доказательство теоремы 1 предыдущей лекции, не отягощенное необходимостью сравнивать результаты различных отождествлений.

Для этого нам нужно в первую очередь описать одну интересную и саму по себе конструкцию, обобщающую построение границы

$$(E^m \times E^n)^* = (E^m \times S^{n-1}) \cup (S^{m-1} \times E^n)$$

произведения $E^m \times E^n$.

Для любых пространств X и Y мы введем в рассмотрение подпространство $X \bar{*} Y$ произведения $CX \times CY$, определенное формулой

$$X \bar{*} Y = (CX \times Y) \cup (X \times CY),$$

т. е. являющееся второй компонентой произведения пар

$$(CX, X) \times (CY, Y) = (CX \times CY, X \bar{*} Y).$$

Таким образом, $S^{m-1} \bar{*} S^{n-1} = (E^m \times E^n)^*$ в силу отождествлений $E^m = CS^{m-1}$, $E^n = CS^{n-1}$.

Каждая точка пространства $X \bar{*} Y$ имеет либо вид $([x, t], y)$, либо вид $(x, [y, t])$, где $x \in X$, $y \in Y$, $t \in I$, причем при $t = 1$ точка $([x, t], y)$ не зависит от x , а точка $(x, [y, t])$ — от y .

Чтобы лучше представить себе устройство пространства $X \bar{*} Y$, мы рассмотрим его отображение в пространство $CX \times CY$, определенное формулами

$$\begin{aligned} ([x, t], y) &\mapsto ([x, (1+t)/2], [y, (1-t)/2]), \\ (x, [y, t]) &\mapsto ([x, (1-t)/2], [y, (1+t)/2]). \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что это отображение является гомеоморфизмом пространства $X \bar{*} Y$ на замкнутое подпространство произведения $CX \times CY$, состоящее из таких точек $([x, t], [y, s])$, что $s + t = 1$. (Обратный гомеоморфизм задается, очевидно, формулой

$$([x, t], [y, 1-t]) \mapsto \begin{cases} (x, [y, 1-2t]), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ ([x, 2t-1], y), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $x \in X$, $y \in Y$ и $t \in I$). Отождествив соответствующие точки, мы тем самым можем (и будем) считать точками пространства $X \bar{*} Y$ пары вида $([x, t], [y, 1-t])$, где $x \in X$, $y \in Y$ и $t \in I$.

При $t=0$ точка $([x, t], [y, 1-t])$ естественным образом отождествляется с точкой x , а при $t=1$ — с точкой y . Тем самым X и Y вкладываются в $X \bar{*} Y$. Кроме того, для любых фиксированных точек $x \in X$ и $y \in Y$ точки вида $([x, t], [y, 1-t])$ составляют подмножество пространства $X \bar{*} Y$, гомеоморфное отрезку I . Следовательно, пространство $X \bar{*} Y$ можно представлять себе как объединение прямолинейных отрезков, соединяющих каждую точку из X с каждой точкой из Y и не имеющих общих внутренних точек. (В исходной интерпретации пространства $X \bar{*} Y$ этим отрезкам отвечают двузвенные ломаные, составленные из образующих конусов CX и CY).

Чтобы исследовать топологию пространства $X \bar{*} Y$, мы введем в рассмотрение надъективное (и, очевидно, непрерывное) отображение

$$(1) \quad X \times I \times Y \rightarrow X \bar{*} Y, \quad (x, t, y) \mapsto ([x, t], [y, 1-t]).$$

Соответствующее отношение эквивалентности на пространстве $X \times I \times Y$, т. е. отношение, определяющее разбиение этого пространства на прообразы точек при отображении (1), обладает тем свойством, что $(x_1, t_1, y_1) \sim (x_2, t_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда либо $t_1 = t_2 = 0$ и $x_1 = x_2$, либо $t_1 = t_2 = 1$ и $y_1 = y_2$.

Определение 1. Факторпространство пространства $X \times I \times Y$ по этому отношению эквивалентности называется *джойном* (или *джойн-произведением*) пространств X и Y и обозначается символом $X * Y$.

Класс эквивалентности точки (x, t, y) обозначается символом $\langle x, t, y \rangle$. При $t=0$ этот класс отождествляется с точкой x , а при $t=1$ — с точкой y . Для любых фиксированных точек $x \in X$, $y \in Y$ все точки вида $\langle x, t, y \rangle$

составляют подмножество, гомеоморфное отрезку I и соединяющее точку x с точкой y . Таким образом, подобно пространству $X \bar{*} Y$, пространство $X * Y$ является объединением прямолинейных отрезков, соединяющих каждую точку из X с каждой точкой из Y и не имеющих общих внутренних точек.

Однако, вообще говоря, топология пространств $X \bar{*} Y$ и $X * Y$ различны, т. е., точнее говоря, биективное непрерывное отображение

$$(2) \quad X * Y \rightarrow X \bar{*} Y, \quad \langle x, t, y \rangle \mapsto ([x, t], [y, 1-t]),$$

индуцированное отображением (1), может и не быть гомеоморфизмом.

Отображение (2) тогда и только тогда является гомеоморфизмом, когда отображение (1) представляет собой эпиморфизм. С другой стороны, из леммы 1 Дополнения к лекции I.4 непосредственно следует, что это условие выполнено, когда оба пространства X и Y хаусдорфовы и локально компактны. Таким образом, *если пространства X и Y хаусдорфовы и локально компактны, то отображение (2) является гомеоморфизмом.*

В этом случае мы будем отождествлять пространства $X * Y$ и $X \bar{*} Y$ посредством гомеоморфизма (2), т. е. будем считать символ $\langle x, t, y \rangle$ лишь иной записью пары $([x, t], [y, 1-t])$ (и, значит, при $0 \leq t \leq 1/2$ пары $(x, [y, 1-2t])$, а при $1/2 \leq t \leq 1$ — пары $([x, 2t-1], y)$).

Замечание 1. В книге Рохлина и Фукса [10], стр. 45—49, ошибочно утверждается совпадение операций $*$ и $\bar{*}$ для любых пространств X и Y .

Ясно, что перестановка множителей индуцирует естественный гомеоморфизм $X \bar{*} Y \rightarrow Y \bar{*} X$. Аналогично, для любых трех пространств X, Y и Z пространства $(X \bar{*} Y) \bar{*} Z$ и $X \bar{*} (Y \bar{*} Z)$ посредством гомеоморфизмов

$$(3) \quad \begin{aligned} &([([x, t], [y, 1-t]), s], [z, 1-s]) \mapsto \\ &\mapsto ([x, t+s-ts], [y, 1-t+ts], [z, 1-s]), \\ &([x, t], ([y, s], [z, 1-s]), 1-t) \mapsto \\ &\mapsto ([x, t], [y, 1-t+ts], [z, 1-ts]) \end{aligned}$$

естественным образом отождествляются с подпространством $X \bar{*} Y \bar{*} Z$ пространства $CX \times CY \times CZ$, состоящим из точек $([x, t], [y, s], [z, r])$, для которых $t+s+r=2$. В этом смысле операция $\bar{*}$ коммутативна и ассоциативна.

Заметим, что тем самым пространства $(X \bar{*} Y) \bar{*} Z$ и $X \bar{*} (Y \bar{*} Z)$ отождествляются посредством гомеоморфизма

$$(4) \quad ([([x, t], [y, 1-t]), s], [z, 1-s]) \mapsto \\ \mapsto ([x, t+s-st], [([y, s/(t+s-st)], \\ [z, t(1-s)/(t+s-st)], (1-t)(1-s)]),$$

где $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ и $s, t \in I$.

Что же касается операции $*$ (джойн-умножения), то, конечно, *эта операция коммутативна* (естественный гомеоморфизм $X * Y \rightarrow Y * X$ задается формулой $\langle x, t, y \rangle \mapsto \langle y, 1-t, x \rangle$), но, как показывают примеры, вообще говоря, не ассоциативна, т. е. естественное отображение $(X * Y) * Z \rightarrow X * (Y * Z)$, задаваемое (см. формулу (4)) формулой

$$(5) \quad \langle \langle x, t, y \rangle, s, z \rangle \mapsto \langle x, t+s-ts, \langle y, s/(t+s-ts), z \rangle \rangle, \\ x \in X, y \in Y, z \in Z, s, t \in I,$$

не является гомеоморфизмом (оно не будет, вообще говоря, даже непрерывно). Однако если пространства X , Y и Z хаусдорфовы и локально компактны, то в силу отождествления операции $*$ с операцией $\bar{*}$ отображение (5) будет совпадать с гомеоморфизмом (4) и потому само будет гомеоморфизмом. Таким образом, *на категории хаусдорфовых и локально компактных пространств джойн-умножение ассоциативно* (с точностью до естественного гомеоморфизма).

Так как в силу отождествлений $CS^p = E^{p+1}$ и $CS^q = E^{q+1}$ пространство $S^p \bar{*} S^q$, как уже было замечено, отождествляется для любых $p, q \geq 0$ с пространством $(E^{p+1} \times E^{q+1})$, то пространство $S^p * S^q$ естественно гомеоморфно пространству $(E^{p+1} \times E^{q+1})$ и, значит, сфере S^{p+q+1} . Приняв за гомеоморфизм $S^{p+q+1} \rightarrow (E^{p+1} \times E^{q+1})$ описанный в лекции 4 гомеоморфизм $\mathfrak{B}_{p+1, q+1}$ (и учтя, что точка $[x, t] \in CS^p$ отождествляется с точкой $(1-t)x \in E^{p+1}$), мы получим гомеоморфизм

$$(6) \quad S^p * S^q \rightarrow S^{p+q+1}, \langle x, t, y \rangle \mapsto \left(\cos \frac{\pi}{2} t \cdot x, \sin \frac{\pi}{2} t \cdot y \right), \\ x \in S^p, y \in S^q, t \in I.$$

Далее мы, как правило, будем отождествлять пространство $S^p * S^q$ со сферой S^{p+q+1} посредством этого гомеоморфизма.

В частности, мы получаем, что $S^0 * S^n = S^{n+1} = SS^n$ для любого $n \geq 0$. Вообще легко видеть, что для любого пространства X

$$S^0 * X = SX.$$

Считая точками сферы S^0 числа ± 1 , соответствующее отождествление можно задать формулами

$$\begin{aligned} \langle -1, t, x \rangle &\mapsto [x, t/2], \\ \langle +1, t, x \rangle &\mapsto [x, (1-t)/2] \end{aligned} \quad x \in X, t \in I$$

(в силу отождествления $SS^n = S^{n+1}$, заданного формулой (15) лекции 1.3, это отождествление при $X = S^n$ переходит в отождествление (6)).

Заметим также, что

$$pt * X = CX$$

для любого пространства X .

В категории TOP^* пространство $X \bar{*} Y$ определяется как подпространство произведения $C^*X \times C^*Y$, состоящее из всех точек вида $([x, t], [y, 1-t])$, $x \in X$, $y \in Y$, $t \in I$, или — что приводит к гомеоморфному пространству — как кослой пары $((CX \times Y) \cup (X \times CY), (Cx_0 \times y_0) \cup (x_0 \times Cy_0))$ (конусы не приведенные!), где x_0 и y_0 — отмеченные точки пространств X и Y соответственно. Для пространства $X * Y$ это приводит к дополнительному отождествлению всех точек вида $\langle x_0, t, y_0 \rangle$, $t \in I$ (в отмеченную точку этого пространства).

В случае, когда требуется подчеркнуть различие между операциями $\bar{*}$ и $*$ в категориях TOP и TOP^* , мы будем обозначать результат применения этих операций к пунктированным пространствам (X, x_0) и (Y, y_0) символами $(X, x_0) \bar{*} (Y, y_0)$ и $(X, x_0) * (Y, y_0)$ соответственно.

Заметим, что если пространства (X, x_0) и (Y, y_0) гладко пунктированы, то пространства $(X, x_0) \bar{*} (Y, y_0)$ и $(X, x_0) * (Y, y_0)$ гомотопически эквивалентны пространствам $X \bar{*} Y$ и $X * Y$.

Конечно, если пространства X и Y хаусдорфовы и локально компактны, то $X \bar{*} Y = X * Y$ и в категории TOP^* .

Теперь мы можем дать определение умножения Уайтхеда в его естественной общности.

Пусть A , B и X — произвольные пунктированные пространства. Для любых двух отображений $f: S^*A \rightarrow X$ и $g: S^*B \rightarrow X$ мы в соответствии с формулой (12) лекции 4

определим отображение $h: A \ast B \rightarrow X$ формулами

$$h([a, t]^c, b) = f[a, 1-t]^s, \quad h(a, [b, t]^c) = g[b, 1-t]^s,$$

т. е. — в другой интерпретации пространства $A \ast B$ — формулой

$$h([a, t]^c, [b, 1-t]^c) = \begin{cases} g[b, 2t]^s, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ f[a, 2-2t]^s, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Впрочем, мы предпочтем вместо отображения h рассматривать его композицию с отображением (2) (построенным для пространств A и B), т. е. отображение

$$[f, g]: A \ast B \rightarrow X,$$

определенное формулой

$$(7) \quad [f, g] \langle a, t, b \rangle = \begin{cases} g[b, 2t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ f[a, 2-2t], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $a \in A$, $b \in B$, $t \in I$.

Уже известное нам рассуждение (опирающееся на лемму 1 из Дополнения к лекции I.4) показывает, что для любых гомотопий $f_t: S^*A \rightarrow X$, $g_t: S^*B \rightarrow X$ отображения $[f_t, g_t]$ составляют гомотопию из $A \ast B$ в X , связывающую отображение $[f_0, g_0]$ с отображением $[f_1, g_1]$. Поэтому гомотопический класс отображения $[f, g]$ зависит только от гомотопических классов $\alpha \in [S^*A, X]^*$ и $\beta \in [S^*B, X]^*$ отображений f и g . Обозначив этот класс через $[\alpha, \beta]$, мы, следовательно, получим отображение

$$(8) \quad [S^*A, X]^* \times [S^*B, X]^* \rightarrow [A \ast B, X]^*, \quad (\alpha, \beta) \mapsto [\alpha, \beta].$$

Сравнение определений показывает, что при $A = S^{m-1}$, $B = S^{n-1}$ (и, значит, при $A \ast B = S^{m+n-1}$) это произведение является не чем иным, как умножением Уайтхеда из лекции 4.

Отображение (8) и в общем случае мы будем называть *умножением Уайтхеда*, а гомотопический класс $[\alpha, \beta]$ — *произведением Уайтхеда* гомотопических классов α и β .

Ключом к доказательству теоремы 1 лекции 4 является возможность дать умножению Уайтхеда равносильное определение, делающее утверждения этой теоремы почти очевидными. Для этого мы должны связать джойн-умножение $*$ со смеш-умножением $\wedge$.

Каждое пунктированное отображение $f: A \times B \rightarrow C$ определяет по формуле

$$\mathcal{H}(f) \langle a, t, b \rangle = [f(a, b), t], \quad a \in A, b \in B, t \in I,$$

некоторое отображение

$$(9) \quad \mathcal{H}(f): A * B \rightarrow S^* C.$$

Определение 2. Об отображении $\mathcal{H}(f)$ говорят, что оно получено применением к отображению f конструкции Хопфа.

В частности, нас будет интересовать отображение

$$\mathcal{H}(j): A * B \rightarrow S^*(A \wedge B), \quad \langle a, t, b \rangle \mapsto [a \wedge b, t],$$

получающееся применением конструкции Хопфа к отображению факторизации $j: A \times B \rightarrow A \wedge B$.

Непосредственная проверка показывает, что это отображение является относительным гомеоморфизмом

$$(A * B, Q) \rightarrow (S^*(A \wedge B), pt),$$

где Q — подпространство пространства $A * B$, состоящее из таких точек $\langle a, t, b \rangle$, что либо $a = a_0$, либо $b = b_0$, и потому индуцирует гомеоморфизм

$$(A * B)/Q \rightarrow S^*(A \wedge B).$$

Но легко видеть, что пространство Q естественно гомеоморфно букету $C^*A \vee C^*B$ и потому стягиваемо. Кроме того, если пространства X и Y гладко пунктированы, и, значит (как нетрудно показать, используя, скажем, результаты лекции I.3), пара $(A * B, Q)$ является парой Борсука, то, согласно лемме 6 лекции I.4, отображение факторизации

$$A * B \rightarrow (A * B)/Q$$

будет гомотопической эквивалентностью. Значит, гомотопической эквивалентностью будет и отображение $\mathcal{H}(j)$.

Для удобства ссылок мы сформулируем этот результат в виде отдельной леммы:

Лемма 1. Для любых гладко пунктированных пространств A и B отображение

$$(10) \quad \mathcal{H}(j): A * B \rightarrow S^*(A \wedge B), \quad \langle a, t, b \rangle \mapsto [a \wedge b, t],$$

является гомотопической эквивалентностью. $\square$

Для произвольных отображений $f: A \rightarrow X$ и $g: B \rightarrow Y$ категорий TOP или TOP^* формула

$$(f * g) \langle a, t, b \rangle = \langle f(a), t, g(b) \rangle, \quad a \in A, b \in B, t \in I,$$

корректно определяет отображение $f * g: A \times B \rightarrow X * Y$ (той же категории TOP или TOP^*), и соответствия $(A, B) \mapsto A * B$, $(f, g) \mapsto f * g$, составляют, очевидно, двуместный функтор из категории TOP (категории TOP^*) в себя. При этом для любых гомотопий $f_t: A \rightarrow X$, $g_t: B \rightarrow Y$ отображения $f_t * g_t$ составляют гомотопию из $A * B$ в $X * Y$ (функтор $*$ гомотопически инвариантен). Следовательно (для определенности мы ограничиваемся категорией TOP^*), для любых элементов $\alpha = [f]^* \in [A, X]^*$, $\beta = [g]^* \in [B, Y]^*$ формула $\alpha * \beta = [f * g]^*$ корректно определяет элемент $\alpha * \beta \in [A * B, X * Y]^*$. Этот элемент называется *джойном* гомотопических классов α и β .

Ясно, что соответствия $(A, B) \mapsto A * B$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$, составляют двуместный функтор из категории $[\text{TOP}^*]$ в себя. Гомотопическая эквивалентность (10) осуществляет, очевидно (на подкатегории гладко пунктированных пространств), изоморфизм этого функтора с функтором $(A, B) \mapsto S^*(A \wedge B)$, так что, отождествив посредством изоморфизма $\mathcal{H}(j)^X: [S^*(A \wedge B), X] \rightarrow [A \times B, X]$ группу $[S^*(A \wedge B), X]^*$ с группой $[A * B, X]^*$, мы для любых элементов $\alpha \in [A, X]^*$, $\beta \in [B, Y]^*$ будем иметь равенство

$$(11) \quad \alpha * \beta = E(\alpha \wedge \beta).$$

Поэтому в силу коммутативности и ассоциативности операции $\wedge$ (см. Дополнение к лекции 4) операция

$$(12) \quad [A, X]^* \times [B, Y]^* \rightarrow [A * B, X * Y]^*, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta,$$

коммутативна и ассоциативна (после соответствующих отождествлений и, конечно, при условии, что для рассматриваемых пространств эти отождествления возможны).

При $A = S^p$, $B = S^q$ операция (12) в силу отождествления $S^p * S^q = S^{p+q+1}$ имеет вид

$$(13) \quad \pi_p X \times \pi_q Y \rightarrow \pi_{p+q+1}(X * Y), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta.$$

Эта операция связана с соответствующей операцией $\wedge$ (т. е. с операцией (3) из Дополнения к лекции 4) той же формулой (11). Поэтому операция (13) ассоциативна и дистрибутивна относительно сложения (и, значит, определяет гомоморфизм $\pi_p X \otimes \pi_q Y \rightarrow \pi_{p+q+1}(X * Y)$, $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha * \beta$). Кроме того, операция (13) косоком-

мутативна:

$\beta * \alpha = (-1)^{pq} \alpha * \beta$ для любых элементов $\alpha \in \pi_p X$, $\beta \in \pi_q Y$.

Наконец, при $X = S^m$ и $Y = S^n$ мы в силу отождествления $X * Y = S^{m+n+1}$ получаем операцию

$$(14) \quad \pi_p S^m \times \pi_q S^n \rightarrow \pi_{p+q+1} S^{m+n+1}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta,$$

которая ассоциативна, дистрибутивна относительно сложения и удовлетворяет тождеству

$$\beta * \alpha = (-1)^{pq+mn} \alpha * \beta, \quad \alpha \in \pi_p S^m, \quad \beta \in \pi_q S^n.$$

Предложение 1. Для любых гомотопических классов $\alpha \in [A, A']^*$, $\beta \in [B, B']^*$, $\gamma \in [S^* A', X]$, $\delta \in [S^* B', X]$

в группе $[A * B, X]^*$ имеет место равенство

$$(15) \quad [\gamma \circ E\alpha, \delta \circ E\beta] = [\gamma, \delta] \circ (\alpha * \beta).$$

Доказательство. По определению для любой точки $\langle a, t, b \rangle \in A * B$

$$\begin{aligned} & [\gamma \circ E\alpha, \delta \circ E\beta] \langle a, t, b \rangle = \\ & = \begin{cases} (\delta \circ E\beta) [b, 2t] = [(\delta \circ \beta)(b), 2t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (\gamma \circ E\alpha) [a, 2-2t] = [(\gamma \circ \alpha)(a), 2-2t], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(для упрощения формул мы здесь позволяем себе обозначить отображения той же буквой, что и их гомотопические классы), и аналогично

$$\begin{aligned} & ([\gamma, \delta] \circ (\alpha * \beta)) \langle a, t, b \rangle = [\gamma, \delta] \langle \alpha(a), t, \beta(b) \rangle = \\ & = \begin{cases} [(\delta \circ \beta)(b), 2t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ [(\gamma \circ \alpha)(a), 2-2t], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Формула (15) имеет место, в частности, при $\alpha \in \pi_p S^{m-1}$, $\beta \in \pi_q S^{n-1}$, $\gamma \in \pi_m X$ и $\delta \in \pi_n Y$ (или $\gamma \in \pi_m S^j$, $\delta \in \pi_n S^k$); только, конечно, в этом случае умножение $[,]$ нужно понимать в первоначальном, не обобщенном смысле, а операцией $*$ считать операцию (13) (или операцию (14)).

Альтернативное определение умножения Уайтхеда основывается на рассмотрении последовательности

$$(16) \quad pt \rightarrow S^*(A \vee B) \xrightarrow{S^*i} S^*(A \times B) \xrightarrow{S^*j} S^*(A \wedge B) \rightarrow pt,$$

где $i: A \vee B \rightarrow A \times B$ — каноническое вложение, а $j: A \times B \rightarrow A \wedge B$ — каноническое отображение факторизации.

Заметим, что отображение S^*j является относительным гомеоморфизмом

$$(S^*(A \times B), S^*(A \vee B)) \rightarrow (S^*(A \wedge B), pt)$$

и потому индуцирует гомеоморфизм

$$S^*(A \times B)/S^*(A \vee B) \rightarrow S^*(A \wedge B).$$

Полезно также иметь в виду, что формулы

$$[a_i, t] \mapsto [a, t]_i, [b_{ii}, t] \mapsto [b, t]_{ii}, \quad a \in A, b \in B, t \in I,$$

определяют естественный гомеоморфизм

$$(17) \quad S^*(A \vee B) \rightarrow S^*A \vee S^*B$$

(в дальнейшем мы всегда будем посредством этого гомеоморфизма отождествлять $S^*(A \vee B)$ с $S^*A \vee S^*B$).

Лемма 2. Для гладко пунктированных пространств A и B :

а) букет $S^*A \vee S^*B \rightarrow S^*(A \vee B)$ является ретрактом надстройки $S^*(A \times B)$;

б) последовательность (16) является кочной расщепляющей последовательностью;

в) надстройка $S^*(A \times B)$ гомотопически эквивалентна букету

$$S^*A \vee S^*B \vee S^*(A \wedge B).$$

Доказательство. Так как пара $(A \times B, A \vee B)$, а значит, и пара $(S^*(A \times B), S^*(A \vee B))$, является парой Борсука, то из а) следует б), а из б) следует в) (см. Дополнение к лекции I.5; последовательность (16) является, очевидно, последовательностью Н-когрупп). Кроме того, по той же причине утверждение а) достаточно доказать лишь в категории TOP, т. е. достаточно найти такое отображение $r: S^*(A \times B) \rightarrow S^*(A \vee B)$, что $r \circ S^*i \sim id$.

Пусть

$$in_A: A \rightarrow A \vee B, \quad in_B: B \rightarrow A \vee B$$

— канонические вложения, а

$$pr_A: A \times B \rightarrow A, \quad pr_B: A \times B \rightarrow B$$

— канонические проекции. Так как пространство $S^*(A \times B)$ является Н-когруппой, то для отображений

$$S^*in_A \circ S^*pr_A: S^*(A \times B) \rightarrow S^*A \vee S^*B,$$

$$S^*in_B \circ S^*pr_B: S^*(A \times B) \rightarrow S^*A \vee S^*B$$

определена их сумма $r = S^* \text{pr}_A + S^* \text{pr}_B$, также представляющая собой отображение $S^*(A \times B) \rightarrow S^*(A \vee B)$. При этом

$$(r \circ S^*(i \circ \text{in}_A))[a, t] = \begin{cases} [a_1, 2t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ [b_0, 2t - 1], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

для любой точки $[a, t] \in S^*A$. Это означает, что $r \circ S^*(i \circ \text{in}_A) = S^*(\text{in}_A) + \text{const}$ относительно стандартного коумножения в Н-когруппе S^*A , и потому

$$r \circ S^*(i \circ \text{in}_A) \sim S^*(\text{in}_A).$$

Аналогично показывается, что

$$r \circ S^*(i \circ \text{in}_B) \sim S^*(\text{in}_B).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} r \circ S^*i &= r \circ S^*(i \circ (\text{in}_A \vee \text{in}_B)) = \\ &= r \circ S^*(i \circ \text{in}_A) \vee r \circ S^*(i \circ \text{in}_B) \sim \\ &\sim S^*(\text{in}_A) \vee S^*(\text{in}_B) = S^*(\text{in}_A \vee \text{in}_B) = \text{id}, \end{aligned}$$

ибо $\text{in}_A \vee \text{in}_B = \text{id}$. $\square$

Следствие 1. Для любого пунктированного пространства X гомоморфизм

$$(S^*j)^X: [S^*(A \wedge B), X]^* \rightarrow [S^*(A \times B), X]^*, \\ [f]^* \mapsto [f \circ S^*j]^*,$$

является мономорфизмом.

Доказательство. Коточность последовательности (16) означает, что имеет место точная последовательность групп

$$0 \rightarrow [S^*(A \wedge B), X]^* \xrightarrow{(S^*j)^X} [S^*(A \times B), X]^* \xrightarrow{(S^*i)^X} [S^*(A \vee B), X]^* \rightarrow 0. \quad \square$$

Пусть теперь $\alpha \in [S^*A, X]^*$ и $\beta \in [S^*B, X]^*$. Рассмотрим в группе $[S^*(A \times B), X]^*$ элементы

$$\bar{\alpha} = (S^* \text{pr}_A)^X \alpha = \alpha \circ [S^* \text{pr}_A], \quad \bar{\beta} = (S^* \text{pr}_B)^X \beta = \beta \circ [S^* \text{pr}_B]$$

и их коммутатор

$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$$

(мы пользуемся аддитивной записью группы $[S^*(A \times B), X]^*$; для обозначения коммутатора используем круглые скобки,

чтобы избежать путаницы с умножением Уайтхеда). Очевидно, что в группе

$$[S^*(A \vee B), X]^* = [S^*A \vee S^*B, X]^* = [S^*A, X]^* \oplus [S^*B, X]^*$$

элемент $(S^*i)^X \bar{\alpha} = \alpha \circ [S^* \text{pr}_A \circ S^*i] = \alpha \circ [S^*(\text{pr}_A \circ i)]$ принадлежит первому слагаемому, а аналогичный элемент $(S^*i)^X \bar{\beta} = \beta \circ [S^*(\text{pr}_B \circ i)]$ — второму. Следовательно, эти элементы перестановочны, и их коммутатор $((S^*i)^X \bar{\alpha}, (S^*i)^X \bar{\beta}) = (S^*i)^X(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ равен нулю. Поэтому существует (единственный!) элемент $[\alpha, \beta]' \in [S^*(A \wedge B), X]^*$, удовлетворяющий соотношению

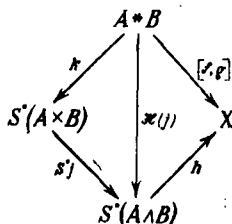
$$(18) \quad (S^*j)^X [\alpha, \beta]' = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}).$$

Теорема 1. Для любых элементов $\alpha \in [S^*A, X]^*$, $\beta \in [S^*B, X]^*$ в группе $[A * B, X]^*$ имеет место равенство

$$(19) \quad \mathcal{H}(j)^X [\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta],$$

где $\mathcal{H}(j)^X: [S^*(A \wedge B), X]^* \rightarrow [A * B, X]^*$ — изоморфизм, индуцированный гомотопической эквивалентностью (10).

Доказательство. Рассмотрим диаграмму



где f и g — отображения классов α и β , $[f, g]$ — отображение (7), h — отображение класса $[\alpha, \beta]'$, $\mathcal{H}(j)$ — гомотопическая эквивалентность (10), а k — отображение, определенное формулой

$$k\langle a, t, b \rangle = [(a, b), t], \quad a \in A, b \in B, t \in I$$

(т. е. являющееся результатом $\mathcal{H}(\text{id})$ применения конструкции Хопфа к тождественному отображению $\text{id}: A \times B \rightarrow A \times B$). Так как левый треугольник этой диаграммы, очевидно, коммутативен ($S^*j \circ \mathcal{H}(\text{id}) = \mathcal{H}(j)$), а равенство (19) означает гомотопическую коммутативность ее правого треугольника, и, кроме того, по определению, $[h \circ S^*j]' = (S^*j)^X [\alpha, \beta]' = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, то для доказательства

теоремы 1 достаточно показать, что отображение $[f, g]$ гомотопно отображению $(\bar{f}, \bar{g}) \circ k$, где $(\bar{f}, \bar{g})$ — отображение $S^*(A \times B) \rightarrow X$, определенное формулой

$$(\bar{f}, \bar{g})[(a, b), t] = \begin{cases} f[a, 4t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ g[b, 4t-1], & \text{если } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ f[a, 3-4t], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ g[b, 4-4t], & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(и принадлежащее, очевидно, классу $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$). С этой целью мы рассмотрим гомотопии $F_\tau: A*B \rightarrow A*B$ и $G_\tau: A*B \rightarrow X$, $0 \leq \tau \leq 1$, определенные формулами

$$F_\tau \langle a, t, b \rangle = \begin{cases} \langle a, (1-\tau)t, b \rangle, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ \langle a, \tau t + t - \tau/2, b \rangle, & \text{если } 1/4 \leq t \leq 3/4, \\ \langle a, (1-\tau)t + \tau, b \rangle, & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$G_\tau \langle a, t, b \rangle = \begin{cases} f[a, (4t-1)\tau + 1], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ g[b, 4t-1], & \text{если } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ f[a, 3-4t], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ g[b, (3-4t)\tau + 1], & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $a \in A$, $b \in B$, $t, \tau \in I$. Непосредственная проверка показывает, что $F_0 = \text{id}$, $[f, g] \circ F_1 = G_0$ и $G_1 = (\bar{f}, \bar{g}) \circ k$. Следовательно, $[f, g] \sim (\bar{f}, \bar{g}) \circ k$. $\square$

Таким образом, равенства (18) и (19) дают нам новое определение умножения Уайтхеда (8) (в предположении, что пространства A и B гладко пунктированы). Оно отличается тем, что даже в классическом случае $A = S^{m-1}$, $B = S^{n-1}$ в нем участвует не гомотопическая группа $[S^*(S^{m-1} \times S^{n-1}), X]$.

Определение произведения $[\alpha, \beta]'$ можно сформулировать и по-другому, если, воспользовавшись сопряженностью между функторами S^* и Ω , трактовать отображения f, g и h как отображения соответственно из A, B и $A \wedge B$ в ΩX .

Пусть

$$\varphi = \varphi_2: \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$$

— коммутаторное отображение (см. Дополнение к лекции I.4). Так как $\varphi|_{\Omega X \vee \Omega X} \sim \text{const}$, то в случае, когда пространство X гладко пунктировано — и, значит, пара $(\Omega X \times \Omega X, \Omega X \vee \Omega X)$ является парой Борсука, — отобра-

жение φ гомотопно отображению

$$c: \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X,$$

обладающему тем свойством, что $c|_{\Omega X \vee \Omega X} = \text{const}$, и потому индуцирующему отображение $\Omega X \wedge \Omega X \rightarrow \Omega X$, которое мы также будем обозначать символом c . Тем же символом c мы будем обозначать и гомотопический класс этого отображения.

В этих обозначениях для любых двух отображений $f: A \rightarrow \Omega X$ и $g: B \rightarrow \Omega X$ будет иметь место гомотспически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f \times g} & \Omega X \times \Omega X \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ A \wedge B & \xrightarrow{f \wedge g} & \Omega X \wedge \Omega X \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow c \\ \searrow c \end{array} \quad \Omega X$$

«верхнее» отображение $c \circ (f \times g)$ которой с точностью до гомотопии совпадает с отображением $(\bar{f}, \bar{g})$ (рассматриваемым как отображение $A \times B \rightarrow \Omega X$), а значит, «нижнее» отображение $c \circ (f \wedge g)$ — с отображением h . Для гомотопических классов $\alpha = [f]^*$ и $\beta = [g]^*$ это означает, что

$$[\alpha, \beta]' = c \circ (\alpha \wedge \beta).$$

З а м е ч а н и е 2. В этой конструкции пространство ΩX может быть заменено произвольной H -группой K . Соответствующая операция

$$[A, K]^* \times [B, K]^* \rightarrow [A \wedge B, K]^*, \quad (\alpha, \beta) \mapsto c \circ (\alpha \wedge \beta),$$

называется *умножением Самельсона*.

Алгебраические свойства умножения Уайтхеда естественно выводить с помощью формул (18) и (19) из алгебраических свойств коммутаторов. Известно (и автоматически проверяется непосредственным подсчетом), что в любой группе G коммутаторы

$$(a, b) = a + b - a - b$$

(мы по-прежнему пользуемся аддитивной записью) удовлетворяют следующим соотношениям (где xy обозначает

элемент $x + y - x$:

$$(20) \quad (a, b) = -(b, a),$$

$$(21) \quad \begin{aligned} (a, b + c) &= (a, b) + (a, c) + ((c, a), b), \\ (a + b, c) &= (b, c) + ((c, b), a) + (a, c), \end{aligned}$$

$$(22) \quad \begin{aligned} &((a, b), c) + c((a, b), (-c, b)) + \\ &+ ((b, c), a) + a((b, c), (-a, c)) + \\ &+ ((c, a), b) + b((c, a), (-b, a)) = 0. \end{aligned}$$

Для любых элементов $\alpha \in [S^*A, X]^*$ и $\beta \in [S^*B, X]^*$ мы можем построить элементы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ как в группе $[S^*(A \times B), X]^*$, так и в группе $[S^*(B \times A), X]^*$; и тогда, как непосредственно следует из коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc} B \times A & \xrightarrow{T} & A \times B \\ \text{pr}_A \searrow & & \nearrow \text{pr}_A \\ & A & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B \times A & \xrightarrow{T} & A \times B \\ \text{pr}_B \searrow & & \nearrow \text{pr}_B \\ & B & \end{array}$$

где T — гомеоморфизм $(b, a) \mapsto (a, b)$ перестановки множителей, для изоморфизма

$$(S^*T)^X: [S^*(A \times B), X]^* \rightarrow [S^*(B \times A), X]^*$$

будут иметь место равенства

$$(S^*T)^X \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \quad \text{и} \quad (S^*T)^X \bar{\beta} = \bar{\beta},$$

а значит, и равенство

$$(S^*T)^X (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}).$$

Так как для гомеоморфизма $B \wedge A \rightarrow A \wedge B$, индуцированного гомеоморфизмом T (и обозначаемого тем же символом T), имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B \times A & \xrightarrow{T} & A \times B \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ B \wedge A & \xrightarrow{T} & A \wedge B \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются каноническими отображениями факторизации, то в силу формулы (20) для элемента $[\beta, \alpha]'$ группы $[S^*(B \wedge A), X]^*$ будут иметь место равенства

$$\begin{aligned} (S^*j)^X [\beta, \alpha]' &= (\bar{\beta}, \bar{\alpha}) = -(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = -(S^*T)^X (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \\ &= -(S^*T)^X (S^*j)^X [\alpha, \beta]' = -(S^*j)^X (S^*T)^X [\alpha, \beta]', \end{aligned}$$

и, значит, — равенство

$$(23) \quad [\beta, \alpha]' = -(S^*T)^X [\alpha, \beta]'.$$

Чтобы снять в этой формуле штрихи, мы рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B * A & \xrightarrow{T} & A * B \\ \mathcal{H}(j) \downarrow & & \downarrow \mathcal{H}(j) \\ S^*(B \wedge A) & \xrightarrow{S^*T} S^*(A \wedge B) \xrightarrow{\mu} & S^*(A \wedge B) \end{array}$$

где T в верхней строчке — гомеоморфизм $\langle b, t, a \rangle \mapsto \langle a, 1-t, b \rangle$, $a \in A$, $b \in B$, $t \in I$, а μ — гомеоморфизм обращения $[x, t] \mapsto [x, 1-t]$, $x \in A \wedge B$, $t \in I$. Эта диаграмма, очевидно, коммутативна и потому

$$\begin{aligned} [\beta, \alpha] &= \mathcal{H}(j)^X [\beta, \alpha]' = -\mathcal{H}(j)^X (S^*T)^X [\alpha, \beta]' = \\ &= \mathcal{H}(j)^X (S^*T)^X \mu^X [\alpha, \beta]' = T^X \mathcal{H}(j)^X [\alpha, \beta]' = T^X [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

(напомним, что, по определению, $-\xi = \mu^X \xi$ для любого элемента $\xi \in [S^*(A \wedge B), X]^*$).

Тем самым доказано, что

$$(24) \quad [\beta, \alpha] = T^X [\alpha, \beta]$$

для любых элементов $\alpha \in [S^*A, X]^*$ и $\beta \in [S^*B, X]^*$, где T^X — изоморфизм $[A * B, X]^* \rightarrow [B * A, X]^*$, индуцированный отображением $T: B * A \rightarrow A * B$.

Пусть теперь $A = S^{m-1}$, $B = S^{n-1}$. Тогда, как мы знаем, после отождествлений пространств $A * B$ и $B * A$ со сферой S^{m+n+1} отображение T оказывается гомеоморфизмом степени $(-1)^{mn}$, и потому формула (24) переходит в формулу (15') лекции 4. Тем самым эта формула полностью доказана. $\square$

Чтобы аналогичным образом воспользоваться формулами (21), мы предположим, что пространства A и B сами являются надстройками (и, значит, $\text{cat } A = \text{cat } B = 1$; см. Дополнение к лекции I.4). Тогда, согласно теореме Басси (следствие 2 леммы 2 из Дополнения к лекции I.4),

$$\text{cat}(A \times B) \leq \text{cat}(S^*A) + \text{cat}(S^*B) = 2,$$

и потому, согласно предложению 4 (и замечанию 7) из Дополнения к лекции I.4, если пространство X , а по-

тому и пространство ΩX , гладко пунктировано, то

$$\text{nil}[S^*(A \times B), X]^* = \text{nil}[A \times B, \Omega X]^* \leq 2$$

и, значит, в группе $[S^*(A \times B), X]^*$ любой двойной коммутатор равен нулю. В частности, для любых элементов $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in [S^*A, X]^*$ и $\beta, \beta_1, \beta_2 \in [S^*B, X]^*$ в группе $[S^*(A \times B), X]^*$ будут иметь место равенства

$$((\bar{\beta}_2, \bar{\alpha}), \bar{\beta}_1) = 0, \quad ((\bar{\beta}, \bar{\alpha}_2), \bar{\alpha}_1) = 0,$$

а значит (см. формулы (21)), и равенства

$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}_1) + (\bar{\alpha}, \bar{\beta}_2),$$

$$(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}) = (\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}) + (\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}).$$

Переходя в группу $[S^*(A \wedge B), X]^* = [A * B, X]^*$, мы немедленно получаем (учитывая абелевость этой группы), что для произведений Уайтхеда имеют место аналогичные формулы

$$(25) \quad \begin{aligned} [\alpha, \beta_1 + \beta_2] &= [\alpha, \beta_1] + [\alpha, \beta_2], \\ [\alpha_1 + \alpha_2, \beta] &= [\alpha_1, \beta] + [\alpha_2, \beta], \end{aligned}$$

т. е. что (при сделанных предположениях) *умножение Уайтхеда билинейно*.

В частности, при $A = S^{m-1}$, $m \geq 2$, и $B = S^{n-1}$, $n \geq 2$, это доказывает формулы (14) из теоремы 1 лекции 4 (поскольку предположение, что пространство X гладко пунктировано, очевидным образом не влияет на общность этих формул).

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 1 лекции 4, нам осталось доказать лишь формулу (16) (а точнее формулу (16'')) лекции 4. Мы докажем ее аналог в рассматриваемом сейчас общем случае для гомотопических классов $\alpha \in [S^*A, X]^*$, $\beta \in [S^*B, X]^*$, $\gamma \in [S^*C, X]^*$ при дополнительном — строго говоря, не необходимом — предположении, что (гладко пунктированные) пространства A, B, C хаусдорфовы и локально компактны, и, значит, что для них имеют место отождествления

$$(26) \quad \begin{aligned} A \wedge (B \wedge C) &= A \wedge B \wedge C = (A \wedge B) \wedge C, \\ S^*(A \wedge (B \times C)) &= S^*A \wedge (B \times C) = A \wedge S^*(B \times C), \\ S^*(A \wedge B \wedge C) &= S^*A \wedge (B \wedge C) = A \wedge S^*(B \wedge C) \end{aligned}$$

(см. Дополнение к лекции 4).

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \times B \times C & \xrightarrow{j'} & A \wedge (B \times C) \\ \text{id} \times j \downarrow & & \downarrow \text{id} \wedge j \\ A \times (B \wedge C) & \xrightarrow{j''} & A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C, \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки являются каноническими отображениями факторизации, а j — каноническим отображением факторизации $B \times C \rightarrow B \wedge C$. Эта диаграмма, очевидно, коммутативна, и потому для любого пунктированного пространства X она индуцирует коммутативную диаграмму групп

$$(27) \quad \begin{array}{ccc} [S^*(A \wedge B \wedge C), X] & \xrightarrow{(S^*j'')^X} & [S^*(A \times (B \wedge C)), X] \\ (S^*(\text{id} \wedge j))^X \downarrow & & \downarrow (S^*(\text{id} \times j))^X \\ [S^*(A \wedge (B \times C)), X] & \xrightarrow{(S^*j')^X} & [S^*(A \times B \times C), X] \end{array}$$

В силу отождествлений (26) левый вертикальный гомоморфизм $(S^*(\text{id} \wedge j))^X$ этой диаграммы совпадает с гомоморфизмом $(\text{id} \wedge S^*j)^X$, индуцированным отображением

$$\text{id} \wedge S^*j: A \wedge S^*(B \times C) \rightarrow A \wedge S^*(B \wedge C).$$

С другой стороны, умножив на A коточную расщепляющуюся последовательность

$$\text{pt} \rightarrow S^*(B \vee C) \xrightarrow{S^*i} S^*(B \times C) \xrightarrow{S^*j} S^*(B \wedge C) \rightarrow \text{pt}$$

(см. лемму 2), мы получим, — очевидно, также расщепляющуюся — последовательность Н-когрупп

$$\text{pt} \rightarrow A \wedge S^*(B \vee C) \xrightarrow{\text{id} \wedge S^*i} A \wedge S^*(B \times C) \xrightarrow{\text{id} \wedge S^*j} A \wedge S^*(B \wedge C) \rightarrow \text{pt}.$$

Поэтому, в частности, гомоморфизм $(\text{id} \wedge S^*j)^X$, а следовательно, и гомоморфизм $(S^*(\text{id} \wedge j))^X$, будет мономорфизмом.

Поскольку, согласно следствию 1 леммы 2, горизонтальные гомоморфизмы диаграммы (27) также являются мономорфизмами, мы получаем, таким образом, что эта диаграмма состоит только из мономорфизмов. Поэтому все группы этой диаграммы — и, в частности, группу $[S^*(A \wedge B \wedge C), X]$ — мы можем считать подгруппами группы $[S^*(A \times B \times C), X]$.

Пусть теперь $\alpha \in [S^*A, X]$, $\beta \in [S^*B, X]$, $\gamma = [S^*C, X]$. Тогда в группе $[S^*(A \wedge B), X]$ определен элемент $[\alpha, \beta]'$, а значит, в $[S^*(A \wedge B \wedge C), X]$ — элемент $[[\alpha, \beta]', \gamma]'$.

Очевидное вычисление показывает, что рассматриваемый как элемент группы $[S^*(A \times B \times C), X]$ элемент $[[\alpha, \beta]', \gamma]'$ будет не чем иным, как двойным коммутатором $((\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \bar{\gamma})$ элементов

$$(28) \quad \bar{\alpha} = \alpha \circ [S^* \text{pr}_A], \quad \bar{\beta} = \beta \circ [S^* \text{pr}_B], \quad \bar{\gamma} = \gamma \circ [S^* \text{pr}_C],$$

где $\text{pr}_A, \text{pr}_B, \text{pr}_C$ — канонические проекции пространства $A \times B \times C$ на пространства A, B, C соответственно.

Аналогично, в группе $[S^*(B \wedge C \wedge A), X]^*$ определен элемент $[[\beta, \gamma]', \alpha]'$, а в группе $[S^*(C \wedge A \wedge B), X]^*$ — элемент $[[\gamma, \alpha]', \beta]'$, причем в группах $[S^*(B \times C \times A), X]^*$ и $[S^*(C \times A \times B), X]^*$ будут иметь место равенства

$$[[\beta, \gamma]', \alpha]' = ((\bar{\beta}, \bar{\gamma}), \bar{\alpha}) \quad \text{и} \quad [[\gamma, \alpha]', \beta]' = ((\bar{\gamma}, \bar{\alpha}), \bar{\beta}),$$

где элементы $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ определены теми же формулами (28) с тем лишь отличием, что, скажем, под pr_A в них понимается соответственно проекция $B \times C \times A \rightarrow A$ или проекция $C \times A \times B \rightarrow A$. Для ясности эти элементы в группе $[S^*(B \times C \times A), X]^*$ мы обозначим символами $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1$, а в группе $[S^*(C \times A \times B), X]^*$ — символами $\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \bar{\gamma}_2$.

Если

$$(29) \quad \begin{aligned} T_1: A \times B \times C &\rightarrow B \times C \times A, & (a, b, c) &\mapsto (b, c, a), \\ T_2: A \times B \times C &\rightarrow C \times A \times B, & (a, b, c) &\mapsto (c, a, b), \end{aligned}$$

— гомеоморфизмы перестановки множителей, то соответствующие изоморфизмы групп

$$\begin{aligned} (S^*T_1)^X: [S^*(B \times C \times A), X]^* &\rightarrow [S^*(A \times B \times C), X]^*, \\ (S^*T_2)^X: [S^*(C \times A \times B), X]^* &\rightarrow [S^*(A \times B \times C), X]^* \end{aligned}$$

будут переводить элементы $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i, i = 1, 2$, в элементы $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ и, значит, коммутаторы $((\bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1), \bar{\alpha}_1)$ и $((\bar{\gamma}_2, \bar{\alpha}_2), \bar{\beta}_2)$ в коммутаторы $((\bar{\beta}, \bar{\gamma}), \bar{\alpha})$ и $((\bar{\gamma}, \bar{\alpha}), \bar{\beta})$. Поэтому, если в группе $[S^*(A \times B \times C), X]^*$ имеет место равенство

$$(30) \quad ((\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \bar{\gamma}) + ((\bar{\beta}, \bar{\gamma}), \bar{\alpha}) + ((\bar{\gamma}, \bar{\alpha}), \bar{\beta}) = 0,$$

то будет иметь место и равенство

$$((\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \bar{\gamma}) + (S^*T_1)^X((\bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1), \bar{\alpha}_1) + (S^*T_2)^X((\bar{\gamma}_2, \bar{\alpha}_2), \bar{\beta}_2) = 0,$$

которое мы можем переписать — как равенство в подгруппе $[S^*(A \wedge B \wedge C), X]^*$ — в следующем виде:

$$(31) \quad [[\alpha, \beta]', \gamma]' + (S^*T_1)^X[[\beta, \gamma]', \alpha]' + (S^*T_2)^X[[\gamma, \alpha]', \beta]' = 0,$$

где теперь T_1 и T_2 — гомеоморфизмы $A \wedge B \wedge C \rightarrow B \wedge C \wedge A$ и $A \wedge B \wedge C \rightarrow C \wedge A \wedge B$, индуцированные гомеоморфизмами (29). С другой стороны, из тождества (22) следует, что, для того чтобы в группе $[S^*(A \times B \times C), X]^*$ имело место равенство (30), достаточно, чтобы в этой группе имели место равенства

$$(32) \quad ((\bar{\alpha}, \bar{\beta}), (\bar{\alpha}, \bar{\gamma})) = 0, \quad ((\bar{\gamma}, \bar{\alpha}), (\bar{\gamma}, \bar{\beta})) = 0, \\ ((\bar{\beta}, \bar{\gamma}), (\bar{\beta}, \bar{\alpha})) = 0.$$

Имея это в виду, мы заметим, что формулы $a \wedge (b, c) \mapsto a \wedge b$, $a \wedge (b, c) \mapsto a \wedge c$ корректно определяют непрерывные отображения

$$\text{pr}_{A \wedge B}: A \wedge (B \times C) \rightarrow A \wedge B, \quad \text{pr}_{A \wedge C}: A \wedge (B \times C) \rightarrow A \wedge C,$$

замыкающие коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A \times B & \xleftarrow{\text{pr}_{A \times B}} & A \times B \times C & \xrightarrow{\text{pr}_{A \times C}} & A \times C \\ \downarrow j_1 & \text{pr}_{A \wedge B} & \downarrow j_2 & \text{pr}_{A \wedge C} & \downarrow j_3 \\ A \wedge B & \xleftarrow{\text{pr}_{A \wedge B}} & A \wedge (B \times C) & \xrightarrow{\text{pr}_{A \wedge C}} & A \wedge C, \end{array}$$

где j_1, j_2, j_3 — канонические отображения факторизации. В соответствующей коммутативной диаграмме групп

$$(33) \quad \begin{array}{ccccc} [S^*(A \times B), X]^* & \xrightarrow{(S^* \text{pr}_{A \times B})^X} & [S^*(A \times B \times C), X]^* & \xleftarrow{(S^* \text{pr}_{A \times C})^X} & \\ \uparrow (S/j_1)^X & (S^* \text{pr}_{A \wedge B})^X & \uparrow (S/j_2)^X & (S^* \text{pr}_{A \wedge C})^X & \\ [S^*(A \wedge B), X]^* & \xrightarrow{(S^* \text{pr}_{A \wedge B})^X} & [S^*(A \wedge (B \times C)), X]^* & \xleftarrow{(S^* \text{pr}_{A \wedge C})^X} & \\ & & & \longleftarrow [S^*(A \times C), X]^* & \\ & & & \uparrow (S/j_3)^X & \\ & & & \longleftarrow [S^*(A \wedge C), X]^* & \end{array}$$

все вертикальные стрелки являются, согласно следствию 1 леммы 2, мономорфизмами. Пусть $[\alpha, \beta] = (S^* \text{pr}_{A \wedge B})^X [\alpha, \beta]'$, $[\alpha, \gamma] = (S^* \text{pr}_{A \wedge C})^X [\alpha, \gamma]'$. Тогда в силу коммутативности диаграммы (33)

$$(S^* j_2)^X [\alpha, \beta] = ((S^* j_2)^X \circ (S^* \text{pr}_{A \wedge B})^X) [\alpha, \beta]' = \\ = ((S^* \text{pr}_{A \times B})^X \circ (S^* j_1)^X) [\alpha, \beta]' = (S^* \text{pr}_{A \times B})^X (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

и аналогично $(S^* j_2)^X [\alpha, \gamma] = (\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$. Поэтому коммутаторы $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ и $(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ тогда и только тогда перестановочны, когда перестановочны элементы $[\alpha, \beta]$ и $[\alpha, \gamma]$ группы $[S^*(A \wedge (B \times C)), X]^*$. В частности, эти коммутаторы перестановочны, если группа $[S^*(A \wedge (B \times C)), X]^*$ абелева,

Но в силу экспоненциального закона для пунктированных отображений (применимого ввиду предположенной локальной компактности и хаусдорфовости пространства A) группа $[S^*(A \wedge (B \times C)), X]^* = [S^*A \wedge (B \times C), X]^*$ изоморфна группе $[S^*A, X^{B \times C}]^*$. Называя H -когруппу K абелевой, если для любого пространства X группа $[K, X]^*$ абелева, мы получаем, следовательно, что для выполнения первого из равенств (32) достаточно, чтобы H -когруппа S^*A была абелева. По симметрии для выполнения всех равенств (32) достаточно, чтобы были абелевы все три H -когруппы S^*A , S^*B и S^*C .

Поскольку из равенств (32) вытекает равенство (30), а значит и равенство (31), этим доказано, что если H -когруппы S^*A , S^*B и S^*C абелевы, то для любого пунктированного пространства X в группе $[S^*(A \wedge B \wedge C), X]^*$ имеет место тождество Якоби (31).

Условие абелевости, конечно, выполнено для двойных надстроек S^2A' , S^2B' , S^2C' и, в частности, для сфер S^l , S^m и S^n при $l, m, n \geq 2$. Так как в последнем случае в силу отождествлений

$$\begin{aligned} S^{l-1} \wedge S^{m-1} \wedge S^{n-1} &= S^{m-1} \wedge S^{n-1} \wedge S^{l-1} = \\ &= S^{n-1} \wedge S^{l-1} \wedge S^{m-1} = S^{l+m+n-3} \end{aligned}$$

действие операторов $(S^*T_1)^X$ и $(S^*T_2)^X$ сводится к умножению соответственно на $(-1)^{(l-1)(m+n-2)} = (-1)^{(l-1)(m+n)}$ и на $(-1)^{(n-1)(l+m)}$; этим доказано, что для любых элементов $\alpha \in \pi_l X$, $\beta \in \pi_m X$ и $\gamma \in \pi_n X$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{(l-1)(m+n)} [[\beta, \gamma], \alpha] + \\ + (-1)^{(n-1)(l+m)} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0, \end{aligned}$$

равносильное формуле (16) лекции 4.

Тем самым теорема 1 лекции 4 наконец-то полностью доказана. $\square$

Замечание 3. Легко доказывается, что в нильпотентной группе G с $\text{nil } G < n$ равны единице не только правосторонние, но и любые n -кратные коммутаторы. Поэтому для доказательства равенств (32) достаточно доказать, что $\text{nil}[S^*(A \times B \times C), X] < 4$. Для случая, когда пространства A , B и C являются надстройками (а пространство X гладко пунктировано), это может быть доказано уже известным нам образом с помощью результатов Дополнения к лекции 1.4. (Ср. с доказательством формул (25).)

Вопрос: достаточно ли для билинейности умножения Уайтхеда условия абелевости H -когрупп S^*A , S^*B и S^*C ?

Замечание 4. Существуют пространства A , не являющиеся надстройками и даже H -коуинитоидами, для которых H -когруппа S^*A абелева. Примером является пространство $A = E^{l+m+n-1} \cup_{\alpha} (S^l \vee S^m \vee S^n)$, где $\alpha = [[\iota_l, \iota_m], \iota_n]$, для которого $S^*A \sim S^{l+1} \vee S^{m+1} \vee S^{n+1} \vee S^{l+m+n}$.

ДОПОЛНЕНИЕ

- Пространство ΩSX . — Пространство $\Omega(A \wedge SY)$. — Пространство $\Omega(SX \vee SY)$. — Группы $\pi_n(SX \vee SY)$. — Теорема Хилтона — Милнора.

В этом Дополнении мы докажем замечательную теорему Хилтона — Милнора о группах $\pi_n S^*(X_1 \vee \dots \vee X_s)$. Идейно простое доказательство этой теоремы с технической стороны довольно сложно и громоздко. К несчастью, напрашивающийся переход к пространству $J(X_1 \vee \dots \vee X_s)$ почти совсем не помогает, и потому пользоваться им мы не будем.

Для упрощения формул мы будем в этом Дополнении обозначать обобщенное произведение Уайтхеда $[\alpha, \beta]$ символом $[\alpha, \beta]$. Кроме того, в случае, когда нам заданы отображения f и g классов α и β , мы позволим себе обозначать произвольное отображение класса $[\alpha, \beta]$ символом $[f, g]$. (Таким образом, в отличие от нашей общей практики, символ $[f, g]$ будет обозначать не конкретное, индивидуальное отображение, а отображение, заданное с точностью до гомотопии.)

Наконец, вместо S^*X и C^*X мы будем писать просто SX и CX .

Теорема Хилтона — Милнора доказывается индуктивным процессом, на каждом шаге которого от пространства $\Omega S(X_1 \vee \dots \vee X_s)$ отщепляются слагаемые, асферичные во все больших и больших размерностях. Для описания этого процесса нам нужно в первую очередь описать аналогичное отщепление для пространства ΩSX .

Предложение 1. Для любого гладко пунктированного связного пространства X пространство ΩSX гомотопи-

чески эквивалентно букету

$$(1) \quad SX \vee S(X \wedge \Omega SX) \sim SX \vee (X \wedge \Omega\Omega SX).$$

Доказательство. Мы докажем предложение 1, построив цепочку гомотопических эквивалентностей, связывающую пространство $\Omega\Omega SX$ с букетом (1).

Шаг 1. Пусть $C_{(-)}X$ и $C_{(+)}X$ — подмножества надстройки SX , состоящие из точек $[x, t]^S \in SX$, для которых $0 \leq t \leq 1/2$ и $1/2 \leq t \leq 1$ соответственно. Тогда $C_{(-)}X \cup C_{(+)}X = SX$, $C_{(-)}X \cap C_{(+)}X = X$ и формулы

$$\rho_{(-)}[x, t]^C = \left[x, \frac{1-t}{2} \right]^S, \quad \rho_{(+)}[x, t]^C = \left[x, \frac{1+t}{2} \right]^S, \quad x \in X, t \in I,$$

определяют естественные гомеоморфизмы $\rho_{(+)}: CX \rightarrow C_{(+)}X$ и $\rho_{(-)}: CX \rightarrow C_{(-)}X$.

Как правило, мы будем отождествлять $C_{(+)}X$ с CX посредством гомеоморфизма $\rho_{(+)}$, и потому вместо $C_{(+)}X$ будем писать просто CX .

Заметим, что поскольку $CX \cong pt$, пара $(SX, CX) = (SX, C_{(+)}X)$ гомотопически эквивалентна паре (SX, x_0) . Гомотопическую эквивалентность

$$\rho: (SX, CX) \rightarrow (SX, x_0)$$

можно задать, например, формулой

$$\rho[x, t] = \begin{cases} [x, 2t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ x_0, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad x \in X, t \in I.$$

(Напомним, что символом x_0 мы обозначаем отмеченную точку как в X , так и в SX . Отображение ρ является не чем иным, как суммой $\text{id} + \text{const}$ тождественного и постоянного отображений $SX \rightarrow SX$ по отношению к стандартному коумножению в SX .)

В отличие от лекции I.1, мы будем теперь символом P обозначать функтор из TOP_2^* в TOP^* , сопоставляющий произвольной пунктированной паре (X, A, x_0) пространство $P(X, A)$ всех путей в X , начинающихся в точке x_0 и кончающихся в подпространстве A (так что, в частности, $P(X, X) = PX$ и $P(X, x_0) = \Omega X$). Ясно, что подобно функтору $S: \text{TOP}^* \rightarrow \text{TOP}^*$ этот функтор переводит гомотопии в гомотопии и, значит, сохраняет гомотопические эквивалентности. Поэтому тем же свойством обладает и составной функтор

$$SP: \text{TOP}_2^* \rightarrow \text{TOP}^*.$$

В частности, мы получаем, что отображение

$$q_1 = SP_p: SP(SX, CX) \rightarrow SP(SX, x_0) = \Omega SX$$

является гомотопической эквивалентностью.

Шаг 2. Пусть $i: P(SX, CX) \rightarrow PSX$ — естественное вложение, и пусть

$$Ci = CP(SX, CX) \cup PSX$$

— его конус. Так как пространство PSX стягиваемо, а пара (Ci, PSX) является парой Борсука, то отображение факторизации

$$q_2: Ci \rightarrow Ci/PSX = SP(SX, CX)$$

является гомотопической эквивалентностью.

Шаг 3. Пусть

$$Cj = CP(SX, X) \cup P(SX, C_{(-)}X)$$

— конус естественного вложения $j: P(SX, X) \rightarrow P(SX, C_{(-)}X)$. Ясно, что $Cj \subset Ci$ и $CP(SX, X) \subset CP(SX, CX)$. Поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Cj & \rightarrow & Cj/CP(SX, X) \\ q_2 \downarrow & & \downarrow \bar{q}_2 \\ Ci & \rightarrow & Ci/CP(SX, CX) \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой являются отображениями факторизации, вертикальная стрелка q_2 — вложением, а вертикальная стрелка $\bar{q}_2$ индуцирована стрелкой q_2 .

Так как $CP(SX, X) \cong pt$ и $CP(SX, CX) \cong pt$, а пары $(Cj, CP(SX, X))$ и $(Ci, CP(SX, CX))$ являются парами Борсука (почему?), то горизонтальные стрелки этой диаграммы являются гомотопическими эквивалентностями, и, значит, отображение q_2 будет гомотопической эквивалентностью одновременно с отображением $\bar{q}_2$.

С другой стороны, в силу естественных отождествлений

$$Cj/CP(SX, X) = P(SX, C_{(-)}X)/P(SX, X)$$

и

$$Ci/CP(SX, CX) = PSX/P(SX, CX)$$

отображение $\bar{q}_2$ является не чем иным, как отображением

$$P(SX, C_{(-)}X)/P(SX, X) \rightarrow PSX/P(SX, CX),$$

индуцированным вложением $P(SX, C_{(-)}X) \subset PSX$, и поэтому в силу равенств

$$PSX = P(SX, CX) \cup P(SX, C_{(-)}X)$$

и

$$P(SX, X) = P(SX, CX) \cap P(SX, C_{(-)}X)$$

представляет собой гомеоморфизм (а значит, и гомотопическую эквивалентность).

Этим доказано, что *вложение*

$$q_3: Cj \rightarrow Ci$$

является гомотопической эквивалентностью.

Шаг 4. Обозначив для каждой точки $[x, t]^C \in CX$ символом $\xi[x, t]$ путь в SX , заданный формулой

$$\xi[x, t](s) = [x, (1-t)s/2]^S, \quad 0 \leq s \leq 1$$

(этот путь соединяет, очевидно, точку $x_0 \in SX$ с точкой $\rho_{(-)}[x, t]$), определим отображения

$$\alpha: \Omega SX \times CX \rightarrow P(SX, C_{(-)}X),$$

$$\beta = \beta_1 \times \beta_2: P(SX, C_{(-)}X) \rightarrow \Omega SX \times CX,$$

положив для любых точек $u \in \Omega SX$, $[x, t] \in CX$ и $v \in P(SX, C_{(-)}X)$

$$\alpha(u, [x, t]) = u \cdot \xi[x, t],$$

$$\beta_1 v = v \cdot \xi(\beta_2 v)^{-1}, \quad \beta_2 v = \rho_{(-)}^{-1}(v(1)),$$

где $\cdot$ обозначает умножение путей в SX . Так как

$$(\beta \circ \alpha)(u, [x, t]) = (u \cdot \xi[x, t] \cdot \xi[x, t]^{-1}, [x, t]),$$

$$(\alpha \circ \beta)v = v \cdot \xi(\beta_2 v)^{-1} \cdot \xi(\beta_2 v),$$

то $\beta \circ \alpha \sim \text{id}$ и $\alpha \circ \beta \sim \text{id}$, т. е. отображения α и β являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями.

Эти гомотопические эквивалентности согласованы с вложениями $X \subset CX$ и $P(SX, X) \subset P(SX, C_{(-)}X)$ и потому индуцируют взаимно обратные гомотопические эквивалентности

$$\alpha_0: \Omega SX \times X \rightarrow P(SX, X) \text{ и } \beta_0: P(SX, X) \rightarrow \Omega SX \times X.$$

(Например, эквивалентность α_0 определяется формулой $\alpha_0(u, x) = u \cdot \xi x$, где ξx — путь $s \mapsto [x, s/2]$ в SX .)

Пусть теперь

$$Ck = C(\Omega SX \times X) \cup (\Omega SX \times CX)$$

— конус вложения $k: \Omega SX \times X \rightarrow \Omega SX \times CX$, и пусть $q_4: Ck \rightarrow Cj$ — отображение, совпадающее на $\Omega SX \times CX$ с отображением α , а на $C(\Omega SX \times X)$ — с отображением $C\alpha_0$. Из того, что отображения α и α_0 представляют собой гомотопические эквивалентности, непосредственно вытекает, что *отображение*

$$q_4: Ck \rightarrow Cj$$

является гомотопической эквивалентностью.

Шаг 5. Вспомнив, что джойн $X * \Omega SX$ пространств X и ΩSX состоит из точек вида $\langle x, t, u \rangle$, где $x \in X$, $t \in I$, $u \in \Omega SX$, мы определим отображение

$$q_5: SX \vee (X * \Omega SX) \rightarrow Ck$$

формулами

$$\begin{aligned} q_5[x, t]_I &= \\ &= \begin{cases} (0_{x_0}, [x, 1-2t]^C), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ [(0_{x_0}, x), 2t-1]^C, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad [x, t] \in SX, \\ q_5\langle x, t, u \rangle_{II} &= \\ &= \begin{cases} [(u, x), 1-2t]^C, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (u, [x, 2t-1]^C), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad \langle x, t, u \rangle \in X * \Omega SX. \end{aligned}$$

Легко видеть, что отображение q_5 определено корректно и, значит, является непрерывным отображением.

Для исследования отображения q_5 удобно ввести в рассмотрение каноническую проекцию $\text{pr}_1: \Omega SX \times X \rightarrow \Omega SX$ и ее конус

$$C \text{pr}_1 = C(\Omega SX \times X) \cup_{\text{pr}_1} \Omega SX.$$

Ясно, что проекция $\Omega SX \times CX \rightarrow \Omega SX$ и тождественное отображение $\Omega SX \times X \rightarrow \Omega SX \times X$ индуцируют непрерывное отображение $\gamma: Ck \rightarrow C \text{pr}_1$. С другой стороны, отображение

$$C(\Omega SX \times X) \sqcup \Omega SX \rightarrow SX \vee (X * \Omega SX),$$

определенное формулами

$$[(u, x), t] \mapsto \begin{cases} \langle x, 1-3t, u \rangle_{II}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ \langle x, 3t-1, 0_{a_0} \rangle_{II}, & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ [x, 3t-2]_I, & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и

$$u \mapsto \langle x_0, 1, u \rangle_{II},$$

где $u \in \Omega SX$, $x \in A$, $t \in I$, согласовано, очевидно, с отображением отождествления $C(\Omega SX \times X) \sqcup \Omega SX \rightarrow Cpr_1$, и потому индуцирует некоторое отображение

$$Cpr_1 \rightarrow SX \vee (X * \Omega SX).$$

Пусть

$$\zeta: Ck \rightarrow SX \vee (X * \Omega SX)$$

— его композиция с отображением γ . Непосредственное вычисление показывает, что

$$(q_s \circ \zeta)[(u, x), t] = \begin{cases} (u, [x, 1-6t]), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/6, \\ [(u, x), 6t-1], & \text{если } 1/6 \leq t \leq 1/3, \\ [(0_{x_0}, x), 3-6t], & \text{если } 1/3 \leq t \leq 1/2, \\ (0_{a_0}, [x, 6t-3]), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 2/3, \\ (0_{a_0}, [x, 5-6t]), & \text{если } 2/3 \leq t \leq 5/6, \\ [(0_{a_0}, x), 6t-5], & \text{если } 5/6 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и

$$(q_s \circ \zeta)(u, [x, t]) = (u, x_0), \quad x_0 \in CX,$$

для любых $u \in \Omega SX$, $x \in A$, $t \in I$. Поэтому гомотопия $f_s: Ck \rightarrow Ck$, $0 \leq s \leq 1$, определенная формулами

$$f_s[(u, x), t] = \begin{cases} (u, [x, 1-6/(1+2s)]), & \text{если } 0 \leq t \leq (1+2s)/6, \\ [(u, x), 6t/(1+2s)-1], & \text{если } (1+2s)/6 \leq t \leq (1+2s)/3, \\ [(0_{x_0}, x), 3-6t+4s], & \text{если } (1+2s)/3 \leq t \leq (3+4s)/6 \text{ и } 0 \leq s \leq 1/2, \\ (0_{x_0}, [x, 6t-4s-3]), & \text{если } (3+4s)/6 \leq t \leq (2+s)/6 \text{ и } 0 \leq s \leq 1/2, \\ (0_{x_0}, [x, 5-6t]), & \text{если } (2+s)/6 \leq t \leq 5/6 \text{ и } 0 \leq s \leq 1/2, \\ [(0_{x_0}, x), 6t-5], & \text{если } 5/6 \leq t \leq 1 \text{ и } 0 \leq s \leq 1/2, \\ [(0_{x_0}, x), 3-6t+4s], & \text{если } (1+2s)/3 \leq t \leq (2+s)/3 \text{ и } 1/2 \leq s \leq 1, \\ [(0_{x_0}, x), (6st-7s+1)/(1-s)], & \text{если } (2+s)/3 \leq t \leq 1 \text{ и } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

и

$$f_s(u, [x, t]) = (u, x_0),$$

связывает отображение $f_0 = g_s \circ \zeta$ с отображением f_1 , определенным формулами

$$f_1[(u, x), t] = \begin{cases} (u, [x, 1-2t]), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ [(u, x), 2t-1], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и

$$f_1(u, [x, t]) = (u, x_0).$$

В свою очередь гомотопия $g_s: Ck \rightarrow Ck$, $0 \leq s \leq 1$, определенная формулами

$$g_s[(u, x), t] = \begin{cases} (u, [x, s-2t]), & \text{если } 0 \leq t \leq s/2, \\ [(u, x), (2t-s)(2-s)], & \text{если } s/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

связывает отображение $g_0 = \text{id}$ с отображением $g_1 = f_1$. Следовательно, $q_0 \circ \zeta \sim \text{id}$.

Аналогично

$$(\zeta \circ q_0)[x, t]_I = \begin{cases} x_0 = \langle x_0, 1, 0_{x_0} \rangle_{II}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \langle x, 4-6t, 0_{x_0} \rangle_{II}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 2/3, \\ \langle x, 6t-4, 0_{x_0} \rangle_{II}, & \text{если } 2/3 \leq t \leq 5/6, \\ [x, 6t-5]_I, & \text{если } 5/6 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и

$$(\zeta \circ q_0)\langle x, t, u \rangle_{II} = \begin{cases} [x, 1-6t]_I, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/6, \\ \langle x, 2-6t, 0_{x_0} \rangle_{II}, & \text{если } 1/6 \leq t \leq 1/3, \\ \langle x, 6t-2, u \rangle_{II}, & \text{если } 1/3 \leq t \leq 1/2, \\ \langle x, 1, u \rangle_{II}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

для любых $x \in X$, $t \in I$ и $u \in \Omega SX$. Поэтому гомотопия

$$h_s: SX \vee (X * \Omega SX) \rightarrow SX \vee (X * \Omega SX), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

определенная формулами

$$h_s[x, t]_I = \begin{cases} x_0 = \langle x_0, 1, 0_{x_0} \rangle_{II}, & \text{если } 0 \leq t \leq s/2, \\ \langle x, 1-6t+3s, 0_{x_0} \rangle_{II}, & \text{если } s/2 \leq t \leq 2s/3, \\ \langle x, 1+6t-5s, 0_{x_0} \rangle_{II}, & \text{если } 2s/3 \leq t \leq 5s/6, \\ [a, (6t-5s)/(6-5s)]_I, & \text{если } 5s/6 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

II

$$h_s \langle x, t, u \rangle_{II} = \begin{cases} [x, 2s - 6t - 1]_I, & \text{если } 0 \leq t \leq (2s - 1)/6 \\ & (\text{и } 1/2 \leq s \leq 1), \\ \langle x, 2s - 6t, 0_{x_0} \rangle_{II}, & \text{если } (2s - 1)/6 \leq t \leq s/3 \\ & (\text{и, значит, } 0 \leq t \leq s/2 \text{ при } 0 \leq s \leq 1/2), \\ \langle x, (6t - 2s)/(6 - 5s), u \rangle_{II}, & \text{если } s/3 \leq t \leq (2 - s)/2, \\ \langle x, 1, u \rangle_{II}, & \text{если } (2 - s)/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

связывает тождественное отображение $h_0 = \text{id}$ с отображением $h_1 = \zeta \circ q_5$. Следовательно, $\zeta \circ q_5 \sim \text{id}$.

Этим доказано, что отображение q_5 является гомотопической эквивалентностью (с обратной гомотопической эквивалентностью ζ).

Таким образом, пространство $S\Omega SX$ связано с пространством $SX \vee (X * \Omega SX)$ цепочкой гомотопических эквивалентностей. Значит, эти пространства гомотопически эквивалентны.

Для завершения доказательства предложения 1 остается вспомнить, что, согласно лемме 2 лекции 5, пространство $X * \Omega SX$ гомотопически эквивалентно пространству $S(X \wedge \Omega SX)$. $\square$

Факт, утверждаемый предложением 1, впервые заметил, по-видимому, Т. Ганя.

Заметим, что в процессе доказательства предложения 1 мы в явном виде построили некоторую гомотопическую эквивалентность

$$SX \vee S(X \wedge \Omega SX) \rightarrow S\Omega SX$$

или, точнее, гомотопическую эквивалентность

$$q' = q_1 \circ q_2 \circ q_3 \circ q_4 \circ q_5: SX \vee (X * \Omega SX) \rightarrow Ck \rightarrow Cj \rightarrow \\ \rightarrow Ci \rightarrow SP(SX, CX) \rightarrow S\Omega SX.$$

При этом автоматическое вычисление показывает, что на слагаемом SX отображение q' задается формулой

$$q'[x, t]_I = \begin{cases} pt, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ [0_{x_0} \cdot i(x), 2t - 1], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $i: X \rightarrow \Omega SX$ — меридианное отображение $i(x)(t) = [x, t]$ (см. лекцию I.10). Эта формула означает, что на SX отображение q' является (по отношению к стандартному

коумножению в SX) суммой $\text{const} + Si'$ постоянного отображения const и надстройки над отображением $i': X \rightarrow \Omega SX$, $x \mapsto 0_{x_0} \cdot i(x)$. Поскольку $\text{const} + Si' \sim Si'$ и $i' \sim i$ (а значит, и $Si' \sim Si$), отсюда следует, что на SX отображение q' гомотопно отображению

$$Si: SX \rightarrow S\Omega SX.$$

Аналогично, на слагаемом $X * \Omega SX$ отображение q' задается формулой

$$q' \langle x, t, u \rangle_{II} = \begin{cases} [\eta(x, \rho \circ u), 1-2t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ pt, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где η — отображение $X \times \Omega SX \rightarrow \Omega SX$, определенное формулой

$$\eta(x, u) = u \cdot i(x), \quad x \in X, \quad u \in \Omega SX.$$

Поэтому на $X * \Omega SX$ отображение q' гомотопно отображению $\langle x, t, u \rangle \mapsto [\eta(x, u), 1-t]$, т. е. отображению $(-S\eta) \circ \mathcal{H}(\text{id})$, где $\mathcal{H}(\text{id})$ — отображение $X * \Omega SX \rightarrow S(X \times \Omega SX)$, $\langle x, t, u \rangle \mapsto [(x, u), t]$ (см. лекцию 5), а $-S\eta$ — отображение

$$S(X \times \Omega SX) \rightarrow S\Omega SX, \quad [(x, u), t] \mapsto [\eta(x, u), 1-t].$$

Этим доказано, что за гомотопическую эквивалентность

$$SX \vee (X * \Omega SX) \rightarrow S\Omega SX$$

можно принять отображение $q = Si \vee (-S\eta) \circ \mathcal{H}(\text{id})$.

Чтобы перейти к пространству $SX \vee S(X \wedge \Omega SX)$, мы введем в рассмотрение отображение $\bar{h}: S(X \times \Omega SX) \rightarrow S\Omega SX$, определенное формулой

$$(2) \quad \bar{h}[(x, u), t] = \begin{cases} [i(x), 3t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ [\eta(x, u), 2-3t], & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ [u, 3t-2], & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

т. е. отображение

$$\bar{h} = S(i \circ \text{pr}_A) - S\eta + S(\text{pr}_{\Omega SA}): S(X \times \Omega SX) \rightarrow S\Omega SX,$$

и гомотопию $f_s: X * \Omega SX \rightarrow S\Omega SX$, $0 \leq s \leq 1$, определенную (очевидно, корректно) формулой

$$f_s \langle x, t, u \rangle = \begin{cases} [i(x), 3t - s + 1], & \text{если } 0 \leq t \leq s/3, \\ [\eta(x, u), (3 - 3t - s)/(3 - 2s)], & \text{если } s/3 \leq t \leq (3 - s)/3, \\ [u, 3t + s - 3], & \text{если } (3 - s)/3 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и связывающую отображение $f_0 = (-S\eta) \circ \mathcal{H}(\text{id})$ с отображением $f_1 = \bar{h} \circ \mathcal{H}(\text{id})$. Легко видеть, что на $S(X \vee \Omega SX) \subset S(X \times \Omega SX)$ отображение $\bar{h}$ гомотопно нулю, и потому существует такое отображение

$$(3) \quad h: S(X \wedge \Omega SX) \rightarrow S\Omega SX,$$

что $h \circ Sj \sim \bar{h}$, где j — отображение факторизации $X \times \Omega SX \rightarrow X \wedge \Omega SX$. Следовательно,

$$(-S\eta) \circ \mathcal{H}(\text{id}) \sim \bar{h} \circ \mathcal{H}(\text{id}) \sim h \circ Sj \circ \mathcal{H}(\text{id}) = h \circ \mathcal{H}(j).$$

Поскольку отображение $\mathcal{H}(j): X * \Omega SX \rightarrow S(X \wedge \Omega SX)$ является (см. лемму 1 лекции 5) гомотопической эквивалентностью, этим доказано следующее предложение, уточняющее предложение 1:

Предложение 2. Для любого гладко пунктированного связного пространства X за гомотопическую эквивалентность

$$SX \vee S(X \wedge \Omega SX) \rightarrow S\Omega SX$$

можно принять отображение $S! \vee h$. $\square$

Рассмотрим теперь пространство $\Omega S(X \vee Y) = \Omega(SX \vee SY)$, где X и Y — произвольные гладко пунктированные пространства. Впрочем, нам будет удобно рассмотреть сначала более общее пространство вида $\Omega(A \vee SY)$, где A — произвольное гладко пунктированное пространство, не обязательно являющееся надстройкой.

Предложение 3. Для любых двух гладко пунктированных связных пространств A и Y пространство $\Omega(A \vee SY)$ гомотопически эквивалентно произведению

$$\Omega A \times \Omega S((Y \wedge \Omega A) \vee Y) \sim \Omega A \times \Omega(S(Y \wedge \Omega A) \vee SY).$$

Доказательству этого предложения мы предпошлем одну общую лемму о H -когруппах.

Пусть K — произвольная H -когруппа с коумножением m и коединицей e_0 . Мы знаем (см. Дополнение к лекции I.4), что для любого пунктированного пространства $C = (C, c_0)$ пространство $K \wedge C$ является H -когруппой с коумножением $m \wedge \text{id}$. Легко видеть, что аналогичный факт имеет место и для пространства $K \dot{\times} C = K \times C / e_0 \times C$ (но не для пространства $K \times C$, ибо отображение $((\mu \times \text{id}) \vee \vee (\text{id} \times \text{id})) \circ (m \times \text{id}): K \times C \rightarrow K \times C$ гомотопно отображению $\text{const} \times \text{id}: (x, c) \mapsto (e_0, c)$, $x \in K$, $c \in C$, а не отображению $\text{const}: (x, c) \mapsto (e_0, c_0)$) и что последовательность канонических отображений

$$(4) \quad \text{pt} \rightarrow K \rightarrow K \dot{\times} C \rightarrow K \wedge C \rightarrow \text{pt}$$

является кочотной расщепляющейся последовательностью H -когрупп с расщепляющим отображением $K \dot{\times} C \rightarrow K$.

Другой способ получить H -когруппу состоит в том, чтобы, вложив пространство C в стягиваемое пространство Z , перейти к пространству

$$(5) \quad F = (K \times C) \cup (e_0 \times Z)$$

(второй компоненте пары $(K, e_0) \times (Z, C)$). В случае, когда H -когруппа K гладко пунктирована (ее коединица e_0 невырождена) пара $(F, e_0 \times Z)$ будет парой Борсука, и, следовательно, согласно лемме 6 лекции I.4, каноническое отображение факторизации

$$\alpha: F \rightarrow F / (e_0 \times Z) = K \dot{\times} C$$

будет гомотопической эквивалентностью. Перенеся с помощью этой гомотопической эквивалентности (и обратной гомотопической эквивалентности β) коумножение из $K \dot{\times} C$ в F , мы получим в F коумножение, относительно которого пространство F будет H -когруппой, гомотопически изоморфной H -когруппе $K \dot{\times} C$.

Поэтому в последовательности (4) можно, не теряя кочотности и расщепленности, заменить пространство $K \dot{\times} C$ пространством F . Применив затем к полученной последовательности результаты Дополнения к лекции I.5, мы немедленно получим следующую лемму:

Лемма 1. Если для пунктированной пары (Z, C) пространство Z стягиваемо, то для произвольной гладко

пунктированной H -когруппы K с коединицей e_0 пространство $F = (K \times C) \cup (e_0 \times Z)$ гомотопически эквивалентно букету $(K \wedge C) \vee K$. $\square$

При этом (см. Дополнение к лекции I.5) гомотопической эквивалентностью $F \rightarrow (K \wedge C) \vee K$ будет сумма (по отношению к коумножению в F) проекций

$$F \rightarrow K \wedge C, \quad (x, c) \mapsto x \wedge c, \quad (e_0, z) \mapsto e_0 \wedge c_0,$$

и

$$F \rightarrow K, \quad (x, c) \mapsto x, \quad (e_0, z) \mapsto e_0;$$

рассматриваемых как отображения в $(K \wedge C) \vee K$.

Теперь мы можем приступить непосредственно к доказательству предложения 3.

Доказательство предложения 3. Пусть F — гомотопический слой $F(\text{pr}_A)$ канонической проекции $\text{pr}_A: A \vee SY \rightarrow A$, $a_I \mapsto a$, $b_{II} \mapsto a_0$, $a \in A$, $b \in SY$. Так как проекция pr_A обладает сечением $\text{in}_A: A \rightarrow A \vee SY$, $a \mapsto a_I$, $a \in A$, то, согласно замечанию 4 из Дополнения к лекции I.5, ее последовательность Пуппе рассыпается в короткую точную последовательность

$$\text{pt} \rightarrow F \rightarrow A \vee SY \rightarrow A \rightarrow \text{pt}$$

и в короткие точные последовательности, получающиеся из этой последовательности применением функтора Ω . В частности, мы видим, что последовательность H -групп

$$\text{pt} \rightarrow \Omega F \rightarrow \Omega(A \vee SY) \rightarrow \Omega A \rightarrow \text{pt}$$

точна, а так как эта последовательность, очевидно, расщепляется (посредством отображения $\Omega(\text{in}_A)$), то (см. Дополнение к лекции I.5) пространство $\Omega(A \vee SY)$ гомотопически эквивалентно произведению $\Omega A \times \Omega F$.

Поэтому для доказательства предложения 3 нам достаточно доказать, что слой F гомотопически эквивалентен букету

$$(SY \wedge \Omega A) \vee SY \sim S(Y \wedge \Omega A) \vee SY.$$

Но, по определению, слой F состоит из таких пар (x, u) , $x \in A \vee SY$, $u \in PA$, что $\text{pr}_A(x) = u(1)$. При $x = a_I$, $a \in A$, это означает, что $a = u(1)$, а при $x = b_{II}$, $b \in SY$, — что $u(1) = a_0$, т. е. что $u \in \Omega A$. Поэтому этот слой естественным образом отождествляется с пространством $(SY \times \Omega A) \cup (y_0 \times PA)$, т. е. с пространством (5), получающимся при $K = SY$ и $(Z, C) = (PA, \Omega A)$. Поэтому, согласно лемме 1, $F \sim (SY \wedge \Omega A) \vee SY$. $\square$

Чтобы найти гомотопическую эквивалентность

$$(6) \quad \Omega A \times \Omega S((Y \wedge \Omega A) \vee Y) \rightarrow \Omega(A \vee SY)$$

в явном виде, нам нужно в первую очередь описать гомотопическую эквивалентность

$$\beta: SY \times \Omega A \rightarrow F,$$

обратную к отображению факторизации $\alpha: F \rightarrow SY \times \Omega A$. Так как пара (SY, y_0) является парой Борсука, то (см. лемму 4 и предложение 3 лекции I.2) существует такая функция $\varphi: SY \rightarrow I$, что $\varphi(b) = 0$ тогда и только тогда, когда $b = y_0$, и такая гомотопия $G: SY \times I \rightarrow SY$, что $G(b, 0) = b$ для любой точки $b \in SY$ и $G(b, t) = y_0$ при $t > \varphi(b)$. Вспомнив явные конструкции из доказательств леммы 6 лекции I.4 и предложения 3 лекции I.2, мы немедленно получим, что гомотопическая эквивалентность β может быть задана формулой

$$\beta(b \times u) = \begin{cases} (g_1(b), u), & \text{если } \varphi(b) = 1, \\ (y_0, u_{\varphi(b)}), & \text{если } \varphi(b) < 1, \end{cases} \quad b \in SY, u \in \Omega A,$$

где, как всегда, $g_1(b) = G(b, 1)$, а u_s , $0 \leq s \leq 1$, — путь $t \mapsto u(st)$, $t \in I$.

Следовательно, коумножение $(\beta \vee \beta) \circ (m \times \text{id}) \circ \alpha: F \rightarrow F \vee F$ в F , где $m: SY \rightarrow SY \vee SY$ — стандартное коумножение в SY , будет задаваться формулой

$$([y, t], u) \mapsto \begin{cases} (g_1[y, 2t], u)_I, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2 \\ & \text{и } \varphi[y, 2t] = 1, \\ (y_0, u_{\varphi[y, 2t]})_I, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2 \\ & \text{и } \varphi[y, 2t] < 1, \\ (g_1[y, 2t-1], u)_{II}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1 \\ & \text{и } \varphi[y, 2t-1] = 1, \\ (y_0, u_{\varphi[y, 2t-1]})_{II}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1 \\ & \text{и } \varphi[y, 2t-1] < 1, \end{cases} \quad y \in Y, t \in I, u \in PA,$$

и, значит, сумма $v': F \rightarrow W'$, $W' = (SY \wedge \Omega A) \vee SY$, отображений $(b, u) \mapsto (b \wedge u)_I$ и $(b, u) \mapsto b_{II}$, $b \in SY$, $u \in PA$, — формулой

$$v'([y, t], u) = \begin{cases} (g_1[y, 2t] \wedge u)_I, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g_1[y, 2t-1]_{II}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad y \in Y, t \in I, u \in PA$$

(напомним, что $g_1[y, s] = y_0$, если $\varphi[y, s] < 1$). Но, так как $g_1 \sim g_0 = \text{id}$, то отображение v' гомотопно отображению $v: F \rightarrow W'$, определенному формулой

$$(7) \quad v([y, t], u) = \begin{cases} ([y, 2t] \wedge u)_I, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ [y, 2t - 1]_{II}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \\ y \in Y, t \in I, u \in PA.$$

Поскольку, согласно сказанному выше (см. абзац, следующий за леммой 1), отображение v' является гомотопической эквивалентностью, этим доказано, что формула (7) определяет гомотопическую эквивалентность

$$v: F \rightarrow W', \text{ где } W' = (SY \wedge \Omega A) \vee SY.$$

Пусть $\mu': W' \rightarrow F$ — обратная гомотопическая эквивалентность, и пусть

$$\mu = \mu' \circ (\theta \vee \text{id}_{SY}): W \rightarrow F,$$

где

$$W = S(Y \wedge \Omega A) \vee SY,$$

а θ — каноническое отображение

$$S(Y \wedge \Omega A) \rightarrow SY \wedge \Omega A,$$

$$[y \wedge u, t] \mapsto [y, t] \wedge u, \quad y \in Y, u \in \Omega A, t \in I.$$

Хотя отображение θ не является, вообще говоря, гомеоморфизмом, но ввиду того, что пространства Y и ΩA гладко пунктированы, оно во всяком случае будет гомотопической эквивалентностью (см. замечание 1 из лекции 5). Поэтому отображение $\mu: W \rightarrow F$ является гомотопической эквивалентностью.

Если теперь p — отображение $F \rightarrow A \vee SY$, определенное формулой

$$p(b, u) = \begin{cases} u(1)_I, & \text{если } b = b_0, \\ b_{II}, & \text{если } u \in \Omega A, \end{cases} \quad b \in SY, u \in PA,$$

то в соответствии с общей конструкцией из Дополнения к лекции I.5 гомотопической эквивалентностью (6) будет произведение $\Omega(\text{in}_A) \cdot \Omega(p \circ \mu)$ (по отношению к умножению в $\Omega(A \vee SY)$) отображений

$$\Omega(\text{in}_A): \Omega A \rightarrow \Omega(A \vee SY), \quad \Omega(p \circ \mu): \Omega W \rightarrow \Omega(A \vee SY),$$

рассматриваемых как отображения $\Omega A \times \Omega W \rightarrow \Omega(A \vee SY)$ (т. е. скомпонированных с каноническими проекциями $\text{pr}_{\Omega A}: \Omega A \times \Omega W \rightarrow \Omega A$ и $\text{pr}_{\Omega W}: \Omega A \times \Omega W \rightarrow \Omega W$)).

Чтобы вычислить это произведение, мы введем в рассмотрение отображение

$$\Phi: S(Y \times \Omega A) \rightarrow F,$$

определенное формулой

$$\Phi([(y, u), t]) = \begin{cases} (y_0, u_{4t}), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ ([y, 4t - 1], u), & \text{если } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ (y_0, u_{3-4t}), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ ([y, 4 - 4t], 0_0), & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(где, как и выше, u_s , $0 \leq s \leq 1$, — путь $t \mapsto u(st)$, $t \in I$). Автоматическое вычисление показывает, что отображение $v \circ \Phi: S(Y \times \Omega A) \rightarrow W$ выражается формулой

$$(v \circ \Phi)[(y, u), t] = \begin{cases} pt, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4; \\ ([y, 8t - 2] \wedge u)_I, & \text{если } 1/4 \leq t \leq 3/8, \\ [y, 8t - 3]_{II}, & \text{если } 3/8 \leq t \leq 1/2, \\ pt, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ [y, 7 - 8t]_{III}, & \text{если } 3/4 \leq t \leq 7/8, \\ pt, & \text{если } 7/8 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и, значит, по отношению к коумножению в $S(Y \times \Omega A)$ будет суммой

$$\text{const} + f + g + \text{const} - g + \text{const},$$

где g — отображение $[(y, u), t] \mapsto [y, t]_{II}$, а f — отображение $[(y, u), t] \mapsto ([y, t] \wedge u)_I$, т. е. композиция $\text{in} \circ \theta \circ S j$ надстройки $S j$ над отображением факторизации

$$j: Y \times \Omega A \rightarrow Y \wedge \Omega A, (y, u) \mapsto y \wedge u,$$

естественного отображения

$$\theta: S(Y \wedge \Omega A) \rightarrow SY \wedge \Omega A, [y \wedge u, t] \mapsto [y, t] \wedge u,$$

и канонического вложения

$$\text{in}: SY \wedge \Omega A \rightarrow W, [y, t] \wedge u \mapsto ([y, t] \wedge u)_I.$$

Следовательно, отображение $v \circ \Phi$ гомотопно отображению $f = \text{in} \circ \theta \circ S j$.

Аналогично

$$(p \circ \Phi)[(y, u), t] = \begin{cases} u(4t)_I, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ [y, 4t - 1]_{II}, & \text{если } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ u(3 - 4t)_I, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ [y, 4 - 4t]_{III}, & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$y \in Y, u \in \Omega A, t \in I,$

т. е.

$$p \circ \Phi = \bar{f} + \bar{g} - \bar{f} - \bar{g} = (\bar{f}, \bar{g}),$$

где $\bar{f}$ и $\bar{g}$ — отображения, определенные формулами

$$\bar{f}[(y, u), t] = u(t)_I, \quad \bar{g}[(y, u), t] = [y, t]_{II}.$$

Но, положив для сокращения обозначений $X = A \vee SY$ и сравнив определения, мы немедленно получим, что

$$\bar{f} = (S \operatorname{pr}_{\Omega A})^X f = f \circ S \operatorname{pr}_{\Omega A} \text{ и } \bar{g} = (S \operatorname{pr}_Y)^X g = g \circ S \operatorname{pr}_Y,$$

где g — каноническое вложение

$$\operatorname{in}_{SY}: SY \rightarrow A \vee SY, [y, t] \mapsto [y, t]_{II},$$

$f = \operatorname{in}_A \circ e$ — композиция отображения вычисления

$$e: S\Omega A \rightarrow A, [u, t] \mapsto u(t),$$

и канонического вложения

$$\operatorname{in}_A: A \rightarrow A \vee SY, a \mapsto a_I,$$

а $\operatorname{pr}_{\Omega A}$ и pr_Y — канонические проекции

$$\operatorname{pr}_{\Omega A}: Y \times \Omega A \rightarrow \Omega A, \operatorname{pr}_Y: Y \times \Omega A \rightarrow Y,$$

т. е. в обозначениях лекции 5

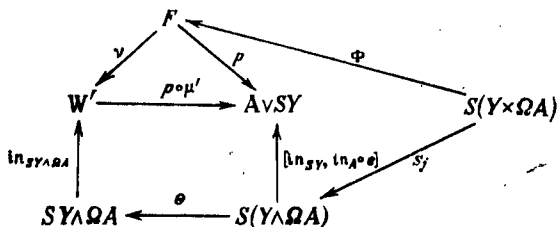
$$\bar{f} = \overline{\operatorname{in}_{SY}}, \quad \bar{g} = \overline{\operatorname{in}_{SA} \circ e}.$$

Поэтому (см. формулу (18) лекции 5)

$$p \circ \Phi = (Sj)^X [\operatorname{in}_{SY}, \operatorname{in}_A \circ e],$$

где в соответствии с принятыми в начале лекции соглашениями равенство нужно понимать как гомотопность соответствующих отображений.

Таким образом, мы видим, что в диаграмме



все многоугольники, кроме нижнего левого квадрата, гомотопически коммутативны. Поэтому гомотопически комму-

тативен и этот квадрат. Следовательно, для отображения $p \circ \mu = p \circ \mu' \circ (\theta \wedge \text{id})$ имеет место гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{p \circ \mu} & A \vee SY \\ \text{in}_{S(Y \wedge \Omega A)} \swarrow & & \nearrow [\text{in}_{SY}, \text{in}_A \circ e] \\ & S(Y \wedge \Omega A) & \end{array}$$

означающая, что на слагаемом $S(Y \wedge \Omega A)$ букета $W = S(Y \wedge \Omega A) \vee SY$ отображение $p \circ \mu$ гомотопно произведению Уайтхеда $[\text{in}_{SY}, \text{in}_A \circ e]$.

Чтобы вычислить отображение $p \circ \mu$ на слагаемом SY , мы введем в рассмотрение отображение

$$l: SY \rightarrow F, \quad [y, t] \mapsto ([y, t], 0_{a_0}).$$

Автоматическое вычисление показывает, что в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} SY & \xrightarrow{\text{in}_{SY}} & W' \\ \downarrow \text{in}_{SY} & \searrow l & \uparrow \nu \\ A \vee SY & \xleftarrow{p} & F \end{array}$$

оба треугольника гомотопически коммутативны. Поэтому гомотопически коммутативен состоящий из них квадрат, а следовательно, гомотопически коммутативна и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} SY & \xrightarrow{\text{in}_{SY}} & W \\ \text{in}_{SY} \downarrow & & \downarrow \mu \\ A \vee SY & \xleftarrow{p} & F \end{array}$$

Таким образом, на слагаемом SY букета $W = S(Y \wedge \Omega A) \vee \vee SY$ отображение $p \circ \mu$ гомотопно каноническому вложению in_{SY} .

Обозначив через $[\text{in}_{SY}, \text{in}_A \circ e] \vee \text{in}_{SY}$ отображение $W \rightarrow A \vee SY$, совпадающее на $S(Y \wedge \Omega A)$ с отображением $[\text{in}_{SY}, \text{in}_A \circ e]$, а на SY — с отображением in_{SY} , мы получим, следовательно, что отображение $\Omega(p \circ \mu)$ гомотопно отображению $\Omega([\text{in}_{SY}, \text{in}_A \circ e] \vee \text{in}_{SY})$.

Тем самым нами доказано следующее предложение:

Предложение 4. Для любых гладко пунктированных связных пространств A и Y за гомотопическую экви-

валентность

$$\Omega A \times \Omega(S(Y \wedge \Omega A) \vee SA) \rightarrow \Omega(A \vee SA)$$

может быть принято отображение $\Omega(\text{in}_A) \cdot \Omega([\text{in}_{SY}, \text{in}_A \circ e] \vee \text{in}_{SY})$. □

В частности, мы получаем следующее утверждение:

Следствие 1. Для любых гладко пунктированных связных пространств X и Y имеет место гомотопическая эквивалентность

$$\Omega(\text{in}_{SX}) \cdot \Omega([\text{in}_{SY}, \text{in}_{SX} \circ e] \vee \text{in}_{SY}): \\ \Omega SX \times \Omega(S(Y \wedge \Omega SX) \vee SX) \rightarrow \Omega(SX \vee SY). \quad \square$$

Согласно этому следствию и предложению 1 (а также замечанию 1 из лекции 5) имеет место следующая цепочка гомотопических эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \Omega(SX \vee SY) &\sim \Omega SX \times \Omega(S(Y \wedge \Omega SX) \vee SY) \sim \\ &\sim \Omega SX \times \Omega(SY \vee (Y \wedge S\Omega SX)) \sim \\ &\sim \Omega SX \times \Omega(SY \vee (Y \wedge (SX \vee S(X \wedge \Omega SX)))) \sim \\ &\sim \Omega SX \times \Omega(SY \vee (Y \wedge SX) \vee (Y \wedge X \wedge S\Omega SX)). \end{aligned}$$

Последнее пространство мы снова можем преобразовать, заменив подчеркнутое пространство $S\Omega SX$ пространством $SX \vee S(X \wedge \Omega SX)$ и т. д. ad infinitum.

Здесь явно нужны удобные и краткие обозначения. Мы положим

$$\begin{aligned} Y_0 &= Y, & \omega_0 &= \text{in}_{SY}: SY_0 \rightarrow SX \vee SY, \\ Y_1 &= Y_0 \wedge X, & \omega_1 &= [\text{in}_{SY}, \text{in}_{SX}]: SY_1 \rightarrow SX \vee SY, \\ &\dots & & \dots \\ Y_m &= Y_{m-1} \wedge X, & \omega_m &= [\omega_{m-1}, \text{in}_{SX}]: SY_m \rightarrow SX \vee SY, \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_m &= Y_0 \vee Y_1 \vee \dots \vee Y_m, \\ \tilde{\omega}_m &= \omega_0 \vee \omega_1 \vee \dots \vee \omega_m: S\tilde{Y}_m \rightarrow SX \vee SY. \end{aligned}$$

Предложение 5. Для любого $m \geq 0$ отображение

$$\Omega(\text{in}_{SX}) \cdot \Omega(\tilde{\omega}_m \vee [\omega_m, \text{in}_{SX} \circ e]): \\ \Omega SX \times \Omega(S\tilde{Y}_m \vee S(Y_m \wedge \Omega SX)) \rightarrow \Omega(SX \vee SY)$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Проведем индукцию по m , учитывая, что при $m=0$ предложение 5 сводится (с точностью до перестановки слагаемых букета) к следствию 1 предложения 4.

Пусть для некоторого $m > 0$ уже доказано, что отображение $\Omega(\text{in}_{SX}) \cdot \Omega(\tilde{w}_{m-1} \vee [w_{m-1}, \text{in}_{SX} \circ e])$ является гомотопической эквивалентностью. Тогда, согласно предложению 2, гомотопической эквивалентностью будет и отображение

$$\Omega(\text{in}_{SX}) \cdot \Omega(\tilde{w}_{m-1} \vee G): \\ \Omega SX \times \Omega(S\tilde{Y}_m \vee S(Y_m \wedge \Omega SX)) \rightarrow \Omega(SX \vee SY),$$

где, отождествляя $S\tilde{Y}_m$ с $S\tilde{Y}_{m-1} \vee SY_m$, мы через $G: S\tilde{Y}_m \vee S(Y_m \wedge \Omega SX) \rightarrow S(Y_m \wedge \Omega SX)$ обозначаем композицию

$$[w_{m-1}, \text{in}_{SX} \circ e] \circ \theta'_2 \circ (\text{id}_{Y_{m-1}} \wedge (Si \wedge h)) \circ \theta_1,$$

1) гомотопической эквивалентности

$$\theta_1: SY_m \vee S(Y_m \wedge \Omega SX) \rightarrow Y_{m-1} \wedge (SX \vee S(X \wedge \Omega SX)), \\ [y_m, t]_I \mapsto y_{m-1} \wedge [x, t]_I, \\ [y_m \wedge u, t]_{II} \mapsto y_{m-1} \wedge [x \wedge u, t]_{II}$$

(где $y_{m-1} \in Y_{m-1}$, $x \in X$, $y_m = y_{m-1} \wedge x \in Y_m$, $t \in I$, $u \in \Omega SX$);

2) отображения

$$\text{id}_{Y_{m-1}} \wedge (Si \vee h): \\ Y_{m-1} \wedge (SX \vee S(X \wedge \Omega SX)) \rightarrow Y_{m-1} \vee S\Omega SX, \\ y_{m-1} \wedge [x, t]_I \mapsto y_{m-1} \wedge [ix, t]_I, \\ y_{m-1} \wedge [x \wedge u, t]_{II} \mapsto y_{m-1} \wedge h[x \wedge u, t]_{II}$$

(где $y_{m-1} \in Y_{m-1}$, $x \in X$, $t \in I$, $u \in \Omega SX$, а h — отображение (3));

3) гомотопической эквивалентности

$$\theta'_2: Y_{m-1} \wedge S\Omega SX \rightarrow S(Y_{m-1} \wedge \Omega SX),$$

обратной к гомотопической эквивалентности

$$\theta_2: S(Y_{m-1} \wedge \Omega SX) \rightarrow Y_{m-1} \wedge S\Omega SX, \\ [y_{m-1} \wedge u, t] \mapsto y_{m-1} \wedge [u, t],$$

где $y_{m-1} \in Y_{m-1}$, $u \in \Omega SX$, $t \in I$;

4) произведения Уайтхеда

$$[w_{m-1}, \text{in}_{SX} \circ e]: S(Y_{m-1} \wedge \Omega SX) \rightarrow SX \vee SY.$$

Для доказательства предложения 5 достаточно, следовательно, доказать, что отображение G на слагаемом SY_m гомотопно отображению w_m , а на слагаемом $S(Y_m \wedge \Omega SX)$ — отображению $[w_m, \text{in}_{SX} \circ e]$.

Пусть α и β — ограничения отображения

$$\theta_2 \circ (\text{id}_{Y_{m-1}} \wedge (Si \vee h)) \circ \theta_1$$

на $SY_m = S(Y_{m-1} \wedge X)$ и $S(Y_m \wedge \Omega SX)$ соответственно.

Так как $(\text{id} \wedge (Si \wedge h) \circ \theta_1)|_{SY_m} = \theta_2 \circ S(\text{id} \wedge i)$, то $\alpha \sim S(\text{id} \wedge i)$. Поэтому имеет место гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S(Y_{m-1} \times X) & \xrightarrow{S(\text{id} \times i)} & S(Y_{m-1} \times \Omega SX) \\ S j' \downarrow & & \downarrow S j \\ S(Y_{m-1} \wedge X) & \xrightarrow{\alpha} & S(Y_{m-1} \wedge \Omega SX) \end{array}$$

где $j': Y_{m-1} \times X \rightarrow Y_{m-1} \wedge X$ и $j: Y_{m-1} \times \Omega SX \rightarrow Y_{m-1} \wedge \Omega SX$ — канонические отображения факторизации. Кроме того, по определению, гомотопически коммутативна и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S(Y_{m-1} \times \Omega SX) & & \\ \downarrow S j & \searrow (\bar{f}, \bar{g}) & \\ S(Y_{m-1} \wedge \Omega SX) & \xrightarrow{[w_{m-1}, \text{in}_{SX} \circ e]} & SX \vee SY \end{array}$$

где $(\bar{f}, \bar{g})$ — коммутатор $\bar{f} \# \bar{g} - \bar{f} - \bar{g}$ отображений

$$\bar{f} = \overline{w_{m-1}} = w_{m-1} \circ S \text{pr}_{Y_{m-1}}: S(Y_{m-1} \times \Omega SX) \rightarrow SX \vee SY,$$

$$\bar{g} = \overline{\text{in}_{SX}} \circ e =$$

$$= \text{in}_{SX} \circ e \circ S \text{pr}_{\Omega SX}: S(Y_{m-1} \times \Omega SX) \rightarrow SX \vee SY.$$

Поэтому

$$(G|_{SY_m}) \circ S j' = [w_{m-1}, \text{in}_{SA} \circ e] \circ \alpha \circ S j' \sim (\bar{f}, \bar{g}) \circ S(\text{id} \times i).$$

Но, как показывает непосредственное вычисление,

$$\begin{aligned} ((\bar{f}, \bar{g}) \circ S(\text{id} \times i))[(y, x), t] &= \\ &= \begin{cases} w_{m-1}[y, 4t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ [x, 4t-1]_1, & \text{если } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ w_{m-1}[y, 3-4t], & \text{если } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ [x, 4-4t]_1, & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

т. е.

$$(\bar{f}, \bar{g}) \circ S(\text{id} \times i) = \bar{w}_{m-1} + \bar{\text{in}}_{SX} - \bar{w}_{m-1} - \bar{\text{in}}_{SX} = (\bar{w}_{m-1}, \bar{\text{in}}_{SX}),$$

где

$$\bar{w}_{m-1} = w_{m-1} \circ S \text{ pr } \gamma_{m-1}: S(Y_{m-1} \times X) \rightarrow SX \vee SY,$$

$$\bar{\text{in}}_{SX} = \text{in}_{SX} \circ S \text{ pr }_X: S(Y_{m-1} \times X) \rightarrow SX \vee SY.$$

Значит,

$$(G|_{SY_m}) \circ S j' \sim (\bar{f}, \bar{g}) \circ S(\text{id} \times i) \sim [w_{m-1}, \text{in}_{SA}] \circ S j' = w_m \circ S j',$$

т. е. $(S j')^Z [G|_{SY_m}] = (S j')^Z [w_m]$, где $Z = SX \vee SY$.

Поскольку гомоморфизм $(S j)^Z$ является, как мы знаем, мономорфизмом, этим доказано, что

$$G|_{SY_m} \sim w_m.$$

Чтобы вычислить отображение G на $S(Y_m \wedge \Omega SX) = S((Y_{m-1} \wedge X) \wedge \Omega SX)$, мы рассмотрим отображение

$$\gamma = S((\text{id}_{Y_{m-1}} \times i) \circ \text{pr}_{Y_{m-1} \times X}) - S(\text{id}_{Y_{m-1}} \times \eta) + S(\text{pr}_{Y_{m-1} \times \Omega SX})$$

пространства $S(Y_{m-1} \times X \times \Omega SX)$ в пространство $S(Y_{m-1} \times \Omega SX)$, задаваемое формулой

$$\gamma[(y, x, u), t] = \begin{cases} [(y, ix), 3t], & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ [(y, u \cdot ix), 2 - 3t], & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ [(y, u), 3t - 2], & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$y \in Y_{m-1}, x \in X, t \in I.$

Автоматическое вычисление показывает, во-первых, что имеет место гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S(Y_{m-1} \times X \times \Omega SX) & \xrightarrow{\gamma} & S(Y_{m-1} \times \Omega SX) \\ S j'' \downarrow & & \downarrow S j \\ S(\underbrace{(Y_{m-1} \wedge X)}_{Y_m} \wedge \Omega SX) & \xrightarrow{\beta} & S(Y_{m-1} \wedge \Omega SX) \end{array}$$

где $j'': Y_{m-1} \times X \times \Omega SX \rightarrow (Y_{m-1} \wedge X) \wedge \Omega SX$ — каноническое отображение факторизации (и, следовательно, что $G|_{S(Y_m \wedge \Omega SX)} \circ S j'' \sim (\bar{f}, \bar{g}) \circ \gamma$) и, во-вторых, что отображение $(\bar{f}, \bar{g}) \circ \gamma$ является по отношению к коумножению в $S(Y_m \times \Omega SX)$ суммой четырнадцати отображений:

$$(\bar{f}, \bar{g}) \circ \gamma = a + b - a - b + c + b + a - b - c - a + a + c - a - c,$$

где

$$a = \bar{\omega}_{m-1}, \quad b = \bar{\text{in}}_{SX}, \quad c = \overline{\text{in}_{SX} \circ e},$$

т. е.

$$a = \omega_{m-1} \circ S \text{pr}_{Y_{m-1}}: [(y, x, u), t] \mapsto \omega_{m-1}[y, t],$$

$$b = \text{in}_{SX} \circ S \text{pr}_X: [(y, x, u), t] \mapsto [x, t]_1,$$

$$c = \text{in}_{SX} \circ e \circ S \text{pr}_{\Omega SX}: [(y, x, u), t] \mapsto u(t)_1,$$

$$y \in Y_{m-1}, \quad x \in X, \quad u \in \Omega SX, \quad t \in I.$$

Но в произвольной группе правая часть последней формулы равна, как непосредственно проверяется, двойному коммутатору $((a, b), c)$. Поэтому (см. в лекции 5 аналогичные вычисления при доказательстве тождества Якоби) отображение $(\bar{f}, \bar{g}) \circ \gamma$ гомотопно отображению $[[\omega_{m-1}, \text{in}_{SX}], \text{in}_{SX} \circ e] \circ S j'' = [\omega_m, \text{in}_{SX} \circ e] \circ S j''$ и, значит, отображение $G|_{Y_m \wedge \Omega SX}$ — отображению $[\omega_m, \text{in}_{SX} \circ e]$. $\square$

Теперь мы можем вычислить гомотопические группы $\pi_n(SX \vee SY)$ букета $SX \vee SY$.

Лемма 2. Если пространство X n -связно, а пространство Y m -связно, то пространство $X \wedge Y$ $(m+n+1)$ -связно.

Доказательство. Следуя нашим общим установкам, мы докажем эту лемму в дополнительном предположении, что пространства X и Y являются клеточными пространствами, причем либо одно из них локально конечно, либо оба счетны (и, значит, их произведение $X \times Y$ также является клеточным пространством). Общий случай мы оставим читателю.

Но если пространства X и Y клеточны, то без ограничения общности (см. лекцию 2) мы можем считать, что пространство X клеточно n -связно, а пространство Y клеточно m -связно, и, следовательно, пара $(X \times Y, X \vee Y)$ клеточно $(n+m+1)$ -связна. Поэтому ее кослой $X \wedge Y$ также клеточно $(n+m+1)$ -связен, а потому и $(n+m+1)$ -связен. $\square$

Следствие 1. Для любого n -связного пространства X пространство $SX = S^1 \wedge X$ $(n+1)$ -связно. $\square$

Следствие 2. Для любых связных пространств X и Y пространство $Y_m = Y \wedge X \wedge \dots \wedge X$ m -связно, пространство SY_m $(m+1)$ -связно, а пространство $S(Y_m \wedge \Omega SX)$ $(m+2)$ -связно. $\square$

Лемма 3. Если пространство Y m -связно, то для любого пространства X

$$\pi_r(X \vee Y) = \pi_r X \quad \text{при} \quad r \leq m$$

(т. е., точнее, мономорфизм $(\text{in}_X)_*: \pi_r X \rightarrow \pi_r(X \vee Y)$ является изоморфизмом).

Доказательство. Для клеточных пространств X и Y эта лемма является частным случаем следствия 1 предложения 2 лекции 4. Общий случай мы оставим читателю. $\square$

Из предложения 5 вытекает, что для любых гладко пунктированных связных пространств X и Y группа $\pi_{n-1}(\Omega(SX \vee SY)) \approx \pi_n(SX \vee SY)$ изоморфна группе

$$\begin{aligned} \pi_{n-1}(\Omega SX \times \Omega(S\tilde{Y}_m \vee S(Y_m \wedge \Omega SX))) &\approx \\ &\approx \pi_{n-1}\Omega SX \oplus \pi_{n-1}\Omega(S\tilde{Y}_m \vee S(Y_m \wedge \Omega SX)) \approx \\ &\approx \pi_n SX \oplus \pi_n(S\tilde{Y}_m \vee S(Y_m \wedge \Omega SX)), \end{aligned}$$

а из леммы 3 и следствия 2 леммы 2, — что при $n \leq m+2$ группа $\pi_n(S\tilde{Y}_m \vee S(Y_m \wedge \Omega SX))$ изоморфна группе $\pi_n S\tilde{Y}_m$. Таким образом, при $n \leq m+2$ группа $\pi_n(SX \vee SY)$ изоморфна группе $\pi_n SX \oplus \pi_n S\tilde{Y}_m$.

Здесь явно стоит ввести в рассмотрение бесконечный букет

$$\tilde{Y}_\infty = Y_0 \vee Y_1 \vee \dots \vee Y_m \vee \dots$$

Пространства $\tilde{Y}_m$ составляют его фильтрацию, причем для любого m

$$\tilde{Y}_\infty = \tilde{Y}_m \vee \tilde{T}_m,$$

где пространство $\tilde{T}_m = Y_{m+1} \vee Y_{m+2} \vee \dots$ в силу леммы 3 и следствия 1 из леммы 2 $(m+1)$ -связно. Поэтому — снова в силу леммы 3 — группы $\pi_n S\tilde{Y}_\infty$ и $\pi_n S\tilde{Y}_m$ при $n \leq m+1$ изоморфны. Этим доказано следующее предложение:

Предложение 6. Для любого $n > 0$ имеет место разложение в прямую сумму

$$\pi_n(SX \vee SY) = \pi_n SX \oplus \pi_n S\tilde{Y}_\infty. \quad \square$$

При этом ясно, что соответствующими инъекциями

$$\pi_n SX \rightarrow \pi_n(SX \vee SY), \quad \pi_n S\tilde{Y}_\infty \rightarrow \pi_n(SX \vee SY)$$

являются гомоморфизмы $(\text{in}_{SX})_*$ и $(\tilde{\omega}_\infty)_*$, где

$$\tilde{\omega}_\infty = \omega_0 \vee \omega_1 \vee \dots \vee \omega_m \vee \dots$$

— отображение $S\tilde{Y}_\infty \rightarrow SX \vee SY$, совпадающее на слагаемом $S\tilde{Y}_m$ с произведением Уайтхеда ω_m .

Замечание 1. Фактически мы доказали, что отображение

$$\Omega(\text{in}_{SX}) \cdot \Omega(\tilde{\omega}_\infty): \Omega SX \vee \Omega S\tilde{Y}_\infty \rightarrow \Omega(SX \vee SY)$$

является слабой гомотопической эквивалентностью.

Так как $\tilde{Y}_\infty = Y \vee \tilde{T}_0$, то, согласно предложению 6,

$$\pi_n S\tilde{Y}_\infty = \pi_n SY \oplus \pi_n S\tilde{Z}_\infty,$$

где $\tilde{Z}_\infty$ — пространство $\tilde{Y}_\infty$, построенное для пространств Y и $\tilde{T}_0$. Следовательно,

$$\pi_n(SX \vee SY) = \pi_n SX \oplus \pi_n SY \oplus \pi_n S\tilde{Z}_\infty.$$

Группу $\pi_n S\tilde{Z}_\infty$ мы снова можем аналогичным образом разложить и т. д. *ad infinitum*. В отличие от аналогичной ситуации предложения 5, здесь требуется уже значительно более изощренная система обозначений. При этом случай букета любого (конечного) числа пространств оказывается ничуть не сложнее случая букета двух пространств (и даже в определенном отношении несколько проще).

Пусть $x_1, \dots, x_s$ — формальные переменные. Мы введем в рассмотрение неассоциативные одночлены от этих переменных, которые мы будем называть *мономами* от $x_1, \dots, x_s$. Для каждого монома m и любого $i = 1, \dots, s$ определено число $t_i(m)$ *вхождений* в m переменной x_i , и его *длина* $t(m) = t_1(m) + \dots + t_s(m)$ (общее число множителей). Мономами длины 1 являются переменные $x_1, \dots, x_s$ и только они, а каждый моном m длины $t > 1$ единственным образом представляется в виде произведения $m' m''$ мономов меньшей длины, причем $t(m) = t(m') + t(m'')$.

Среди всех мономов мы выделим некоторые специальные мономы, которые будем называть *базисными мономами*, и каждому базисному моному m мы отнесем его *ранг* $\rho(m)$ и *номер* $\#(m)$. При $t(m) = 1$ каждый элемент $x_1, \dots, x_s$ будем считать базисным мономом ранга 0. За номер монома x_i мы примем его индекс i . Пусть для некоторого $t > 1$ уже определены базисные мономы всех длин, меньших чем t , а также определены их ранги и

номера. Тогда моном $m = m' m''$ длины t мы будем считать базисным, если:

- а) мономы m' и m'' являются базисными мономами;
- б) имеют место неравенства

$$\rho(m') \leq \#(m'') < \#(m').$$

За ранг $\rho(m)$ монома m мы примем номер $\#(m'')$ монома m'' . Все базисные мономы длины t мы перенумеруем произвольным образом, начиная нумерацию с номера $N+1$, где N — наибольший номер базисных мономов длины, меньшей чем t . Тем самым базисные мономы длины t будут определены для любого t , и каждый из них будет иметь определенный номер и определенный ранг. При этом каждое натуральное число a будет номером одного и только одного базисного монома. Моном с номером a мы будем обозначать символом m_a .

Например, при $s=2$ (и $x_1=x$, $x_2=y$)

$$m_1 = x, m_2 = y, m_3 = yx, m_4 = (yx)x, m_5 = (yx)y, \dots$$

а при $s=3$ (и $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$)

$$m_1 = x, m_2 = y, m_3 = z, m_4 = yx, m_5 = zx, m_6 = zy, \dots$$

Поскольку на каждом этапе построения нумерация базисных мономов данной длины выбирается произвольным образом (лишь бы она продолжала нумерацию мономов меньших длин) и поскольку от этой нумерации зависит, какие мономы больших длин окажутся базисными, мы видим, что в понятии базисного монома имеется определенный элемент произвола. Однако все дальнейшие конструкции от этого произвола, по существу, не зависят.

Пусть теперь $X_1, \dots, X_s$ — произвольные гладко пунктированные связные пространства. Для любого монома m мы будем обозначать символом $m(X_1, \dots, X_s)$ пространство, получающееся, если в m вместо x_i подставить X_i и произвести все умножения (имеется в виду смеш-умножение $\wedge$).

Если пространства $X_1, \dots, X_s$ хаусдорфовы и локально компактны (и потому смеш-умножение ассоциативно и коммутативно), пространство $m(X_1, \dots, X_s)$ зависит с точностью до естественного гомеоморфизма только от чисел $t_1 = t_1(m), \dots, t_s = t_s(m)$ и определяется формулой

$$m(X_1, \dots, X_s) = X_1^{(t_1)} \wedge \dots \wedge X_s^{(t_s)},$$

где символом $X^{(t)}$ обозначено t -кратное смеш-произведение пространства X на себя:

$$X^{(t)} = X \wedge \underbrace{\dots \wedge X}_{t \text{ раз}}$$

В случае, когда m является базисным мономом m_a , пространство $m(X_1, \dots, X_s)$ мы будем обозначать также символом X_a . (Заметим, что при $1 \leq a \leq s$ мы получаем исходные пространства X_a .)

Аналогично, для любого пространства Z и любых отображений $f_1: SX_1 \rightarrow Z, \dots, f_s: SX_s \rightarrow Z$ мы будем обозначать символом $m(f_1, \dots, f_s)$ отображение $S m(X_1, \dots, X_s) \rightarrow Z$, которое получается подстановкой в моном m вместо $x_1, \dots, x_s$ отображений $f_1, \dots, f_s$ и выполнения всех умножений Уайтхеда в последовательности, предписанной расстановкой скобок в m .

Впрочем, эта конструкция нам пока понадобится только при $Z = S(X_1 \vee \dots \vee X_s)$, $f_1 = \text{ins}_{SX_1}, \dots, f_s = \text{ins}_{SX_s}$ и $m = m_a$. В этом случае отображение $m(f_1, \dots, f_s)$ мы будем обозначать символом v_a . Таким образом, для любого $a \geq 1$

$$v_a: SX_a \rightarrow SX, \quad \text{где } X = X_1 \vee \dots \vee X_s,$$

и $v_a = \text{ins}_{SX_a}$ при $a = 1, \dots, s$.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему этого Дополнения:

Теорема 1. Для любого $n > 1$ группа $\pi_n SX$, $X = X_1 \vee \dots \vee X_s$, является прямой суммой групп $\pi_n SX_a$:

$$(8) \quad \pi_n SX = \bigoplus_{a=1}^{\infty} \pi_n SX_a.$$

Соответствующими инъекциями $\pi_n SX_a \rightarrow \pi_n SX$ являются гомоморфизмы v_{a*} , индуцированные отображениями v_a .

Для частного случая, когда пространства $X_1, \dots, X_s$ являются сферами, эта теорема была впервые доказана Хилтоном (который основывался на идеях Серра), а в общем случае — Милнором. Поэтому эта теорема называется обычно теоремой Хилтона — Милнора.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$R_m = \bigvee_{\substack{a \geq m \\ \rho(a) < m}} X_a \quad \text{и} \quad R_m^* = \bigvee_{\substack{a > m \\ \rho(a) < m}} X_a, \quad \text{где } \rho(a) = \rho(m_a),$$

так что $R_m = X_m \vee R_m^*$. Имея в виду применить к букету $SR_m = SX_m \vee SR_m^*$ предложение 6, мы должны в первую очередь вычислить соответствующее пространство $\tilde{Y}_\infty$. Непосредственно очевидно, что это пространство имеет вид

$$R_m^* \vee \bigvee_m (X_1, \dots, X_s),$$

где суммирование распространено на все мономы m вида $(\dots((m_a x_m) x_m) \dots x_m)$ с $a > m$ и $\rho(a) < m$. Но очевидная индукция показывает, что мономы m — это в точности все базисные мономы ранга m , имеющие номера $\geq m+1$, так что

$$R_m^* \vee \bigvee_m (X_1, \dots, X_s) = \bigvee_{\substack{a \geq m+1 \\ \rho(a) \leq m}} X_a = R_{m+1}.$$

В силу предложения 6 этим доказано, что для любого $m \geq 1$

$$(9) \quad \pi_n SR_m = \pi_n SX_m \oplus \pi_n SR_{m+1}.$$

Поскольку $R_1 = X_1 \vee \dots \vee X_s$, отсюда по индукции следует, что

$$(10) \quad \pi_n SX = \bigoplus_{a=1}^m \pi_n SX_a \oplus \pi_n SR_{m+1}, \quad X = X_1 \vee \dots \vee X_s,$$

для любого $m \geq 1$.

С другой стороны, из леммы 2 непосредственно вытекает, что каждое пространство X_a по крайней мере $(t(m_a) - 1)$ -связно. Поскольку $t(m_a) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$, отсюда следует, что для любого $n \geq 1$ существует такое m , что разложение (8) имеет вид

$$(11) \quad \pi_n SX = \bigoplus_{a=1}^m \pi_n SX_a.$$

Так как по аналогичным соображениям разложение (10) для того же m также имеет вид (11), то формула (8) тем самым полностью доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось, таким образом, лишь вычислить инъекции $\pi_n SX_a \rightarrow \pi_n SX$, задающие прямое разложение (8). Но это теперь делается без всякого труда.

Действительно, возвратившись к доказательству разложения (9) и воспользовавшись соответствующим образом видоизмененными обозначениями из предложения 6, мы

немедленно получим, что инъекциями, задающими разложение (9), являются гомоморфизмы

$$\pi_n SX_m \rightarrow \pi_n SR_m \quad \text{и} \quad \pi_n SR_{m+1} \rightarrow \pi_n SR_m,$$

индуцированные соответственно инъекцией

$$\text{in}_{SX_m}: SX_m \rightarrow SR_m$$

и отображением

$$\tilde{\omega}_{\infty}^{(m)}: SR_{m+1} \rightarrow SR_m,$$

которое на слагаемом $SR_m^* \wedge X_m^{(i)}$ букета $SR_{m+1} = \bigvee_i (SR_m^* \wedge X_m^{(i)})$ равно $\omega_i^{(m)} = [\omega_{i-1}^{(m)}, \text{in}_{SX_m}']$, $\omega_0^{(m)} = \text{in}_{SR_m^*}$.

Поэтому для инъекций $j_a^{(m)}: \pi_n SX_a \rightarrow \pi_n SX$ и $k^{(m)}: \pi_n SR_{m+1} \rightarrow \pi_n SX$, задающих разложение (10), будут иметь место рекуррентные соотношения

$$j_a^{(m)} = j_a^{(m-1)}, \quad \text{если} \quad a < m,$$

$$j_m^{(m)} = k^{(m-1)} \circ (\text{in}_{SX_m})_*, \quad k^{(m)} = k^{(m-1)} \circ (\tilde{\omega}_{\infty}^{(m)})_*$$

с начальными условиями

$$j_1^{(1)} = (\text{in}_{SX_1})_*, \quad k^{(1)} = (\tilde{\omega}_{\infty}^{(1)})_*.$$

При этом отображение $\tilde{\omega}_{\infty}^{(m)}$ на слагаемом SX_a букета SR_{m+1} будет при $\rho(a) < m$ совпадать с инъекцией $\text{in}_{SX_a}: SX_a \rightarrow SR_m$, а при $\rho(a) = m$, т. е. при $X_a = \dots ((X_b \wedge X_m) \wedge X_m) \wedge \dots \wedge X_m$, где $\rho(b) < m$, будет иметь вид $[\dots [[\text{in}_{SX_b}', \text{in}_{SX_m}'], \text{in}_{SX_m}'], \dots, \text{in}_{SX_m}']$. Поэтому для отображения

$$\tilde{v}^{(m-1)} = \bigvee v_a: SR_m \rightarrow SX, \quad a \geq m, \quad \rho(a) < m,$$

являющегося на слагаемом SX_a букета SR_m произведением Уайтхеда v_a , составное отображение

$$\tilde{v}^{(m-1)} \circ \tilde{\omega}_{\infty}^{(m)}: SR_{m+1} \rightarrow SX$$

на слагаемом SX_a букета SR_{m+1} будет при $\rho(a) < m$ совпадать с отображением v_a (точнее, — с отображением $v_a \circ \text{in}_{SX_a}'$, но в наших сокращенных обозначениях это отображение также обозначается через v_a), а при $\rho(a) = m$ — с отображением $[\dots [[v_b, v_m], v_m], \dots, v_m]$, т. е. снова с отображением v_a . Это означает, что

$$\tilde{v}^{(m-1)} \circ \tilde{\omega}_{\infty}^{(m)} = \tilde{v}^{(m)}.$$

При $m=1$ мы, в частности, получаем, что $\tilde{w}_\infty^{(1)} = \tilde{v}^{(1)}$, т. е. что $k^{(1)} = \tilde{v}_*^{(1)}$.

Отсюда очевидной индукцией вытекает, что $k^{(m)} = \tilde{v}_*^{(m)}$ для любого $m \geq 1$ и, значит, что

$$j_m^{(m)} = (\tilde{v}^{(m-1)} \circ \text{in}_{SX_m})_* = (v_m)_*.$$

Поэтому $j_m^{(n)} = (v_m)_*$ для каждого $n \geq m$.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается заметить, что гомоморфизмы $j_m^{(n)}$ при $n \geq m$ и являются инъекциями, задающими прямое разложение (8). $\square$

Замечание 3. Фактически мы доказали, что отображение

$$\prod_{a=1}^{\infty} \Omega SX_a \rightarrow \Omega SX,$$

являющееся произведением (по отношению к умножению в ΩSX) отображений $\Omega v_a: \Omega SX_a \rightarrow \Omega SX$, представляет собой слабую гомотопическую эквивалентность.

Тип отображения произведения сфер.— Надстройка над произведением Уайтхеда.— Достаточное условие дистрибутивности слева композиционного умножения.— Инвариант Хопфа — Уайтхеда.— Инвариант Хопфа.— Простейшая аддиционная лемма.— Аддиционная лемма Дж. Уайтхеда.— Инвариант Хопфа конструкции Хопфа.— Существование отображений с инвариантом Хопфа, равным единице.— Обобщенный инвариант Хопфа — Уайтхеда.

Рассмотрим теперь простейшие геометрические свойства умножения Уайтхеда, ограничиваясь случаем гомотопических групп. Переход к рассмотренному в предыдущей лекции общему случаю групп вида $[S^*A, X]^*$ осуществляется, как правило, без особого труда, и мы оставим его читателю.

Каждое пунктированное отображение

$$f: S^n \times S^m \rightarrow X$$

определяет по формулам

$$f_1 = f \circ i_1, \quad f_2 = f \circ i_2$$

два отображения $f_1: S^n \rightarrow X$ и $f_2: S^m \rightarrow X$ и тем самым два элемента $\alpha = [f_1]^*$ и $\beta = [f_2]^*$ групп $\pi_n X$ и $\pi_m X$ соответственно. Здесь, как и выше, $i_1: S^n \rightarrow S^n \times S^m$ и $i_2: S^m \rightarrow S^n \times S^m$ — естественные вложения $x \mapsto x_1, y \mapsto x_2, x \in S^n, y \in S^m$.

Определение 1. Пара (α, β) называется *типом* отображения f .

Заметим, что $f_1 \times f_2 = f$ и $f_1 \vee f_2 = f|_{S^n \vee S^m}$.

Предложение 1. Для элементов $\alpha \in \pi_n X, \beta \in \pi_m X$ тогда и только тогда существует отображение $f: S^n \times S^m \rightarrow X$ типа (α, β) , когда $[\alpha, \beta] = 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha = [f_1: S^n \rightarrow X]^*$ и $\beta = [f_2: S^m \rightarrow X]^*$. Отображение f типа (α, β) с точностью до гомотопии является не чем иным, как распространением на $S^n \times S^m$ отображения $f_1 \vee f_2: S^n \vee S^m \rightarrow X$. Поскольку же пара $(S^n \times S^m, S^n \vee S^m)$ является относительной клеткой и соответствующее характеристическое отобра-

ражение $\chi: E^{n+m} \rightarrow S^n \times S^m$ представляет собой относительный гомеоморфизм $(E^{n+m}, S^{n+m-1}) \rightarrow (S^n \times S^m, S^n \vee S^m)$, это распространение возможно тогда и только тогда, когда возможно распространение отображения $(f_1 \vee f_2) \circ \rho$ с S^{n+m-1} на E^{n+m} , где $\rho = \chi|_{S^{n+m-1}}$, т. е. когда это отображение определяет нулевой элемент группы $\pi_{n+m-1}X$. Для завершения доказательства остается заметить, что $[\rho]^* = [\iota', \iota'']$, и потому

$$\begin{aligned} [(f_1 \vee f_2) \circ \rho]^* &= (f_1 \vee f_2)_* [\rho]^* = (f_1 \vee f_2)_* [\iota', \iota''] = \\ &= [(f_1 \vee f_2)_* \iota', (f_1 \vee f_2)_* \iota''] = [f_{1*} \iota_n, f_{2*} \iota_m] = [\alpha, \beta]. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 1. Если X является H -пространством, то $[\alpha, \beta] = 0$ для любых элементов $\alpha \in \pi_n X$, $\beta \in \pi_m X$.

Доказательство. Отображение $f = t \circ (f_1 \times f_2)$, где t — умножение в X , имеет тип (α, β) . $\square$

Предложение 2. Для любых элементов $\alpha \in \pi_n X$ и $\beta \in \pi_m X$ в группе $\pi_{n+m} SX$ имеет место равенство

$$(1) \quad E[\alpha, \beta] = 0.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что в группе $\pi_{n+m}(S^*(S^n \vee S^m)) = \pi_{n+m}(S^{n+1} \vee S^{m+1})$ имеет место равенство $E[\iota', \iota''] = 0$, т. е. что отображение

$$S^*(\rho \circ \tilde{\omega}_{n,m}): S^{n+m} = S^* S^{n+m-1} \rightarrow S^*(S^n \vee S^m) = S^{n+1} \vee S^{m+1},$$

где, как и выше, $\rho = (\chi^{(n)} \times \chi^{(m)})|_{(E^n \times E^m)}$, может быть распространено на $E^{n+m+1} \approx S^* E^{n+m}$. Но это действительно так, поскольку

$$S^*(\rho \circ \tilde{\omega}_{n,m}) = (r \circ S^*((\chi^{(n)} \times \chi^{(m)}) \circ \tilde{\omega}_{n,m}))|_{S^* S^{n+m-1}},$$

где $\tilde{\omega}_{n,m}$ — гомеоморфизм $E^{n+m} \rightarrow E^n \times E^m$, совпадающий на S^{n+m-1} с гомеоморфизмом $\tilde{\omega}_{n,m}$, а r — ретракция $S^*(S^n \times S^m) \rightarrow S^{n+1} \vee S^{m+1}$, предусмотренная леммой 2 лекции 5 (при $A = S^n$ и $B = S^m$). $\square$

Произведения Уайтхеда играют основную роль в вопросах, связанных с выполнением для композиционного умножения левого закона дистрибутивности.

Предложение 3. Если $[\beta_1, \beta_2] = 0$, где $\beta_1, \beta_2 \in \pi_n X$, то

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha$$

для любого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$.

Доказательство. Пусть $\beta_1 = [g_1: S^n \rightarrow X]^*$, $\beta_2 = [g_2: S^n \rightarrow X]^*$ и $\alpha = [f: S^r \rightarrow S^n]$. Тогда, по определению, $(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = [(g_1 \vee g_2) \circ m \circ f]$, где $m: S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ — стандартное коумножение, задаваемое (в силу отождествления $S^n = S \cdot S^{n-1}$) формулой

$$m[x, t] = \begin{cases} [x, 2t]_{II}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ [x, 2t-1]_{II}, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(ср. формулу (15) лекции I.3), а $\beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha = [(g_1 \circ f + g_2 \circ f) \circ \bar{m}]$, где $\bar{m}$ — аналогичное коумножение $S^r \rightarrow S^r \vee S^r$. Но так как $[\beta_1, \beta_2] = 0$, то, согласно предложению 1, существует такое отображение $g: S^n \times S^n \rightarrow X$, что $g|_{S^n \vee S^n} = g_1 \vee g_2$, т. е. $g_1 \vee g_2 = g \circ i$, где i — вложение $S^n \vee S^n \rightarrow S^n \times S^n$. С другой стороны, легко видеть, что отображение $i \circ m: S^n \rightarrow S^n \times S^n$ пунктировано гомотопно диагональному отображению $\Delta: S^n \rightarrow S^n \times S^n$, $x \mapsto (x, x)$ (соответствующую гомотопию $h_\tau: S^n \rightarrow S^n \times S^n$, $\tau \in I$, можно задать формулой

$$h_\tau[x, t] = \begin{cases} ([x, (1+\tau)t], [x, (1-\tau)t]), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ ([x, (1-t)\tau + t], [x, t - (1-\tau)t]), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $x \in S^{n-1}$, а $t, \tau \in I$. Поэтому $(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = [g \circ \Delta \circ f]^*$. Аналогично, $\bar{i} \circ \bar{m} \sim \bar{\Delta}$, где $\bar{i}$ — вложение $S^r \vee S^r \rightarrow S^r \times S^r$, а $\bar{\Delta}$ — диагональное отображение $S^r \rightarrow S^r \times S^r$, и потому

$$\begin{aligned} (g_1 \circ f + g_2 \circ f) \circ \bar{m} &= (g \circ i) \circ (f \vee f) \circ \bar{m} = \\ &= g \circ (f \times f) \circ (\bar{i} \circ \bar{m}) \sim g \circ (f \times f) \circ \bar{\Delta} = g \circ \Delta \circ f. \end{aligned}$$

Следовательно, $(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha$. $\square$

Рассмотрим, что происходит при $[\beta_1, \beta_2] \neq 0$.

Как мы знаем, для любого $n \geq 1$ пара $(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ является относительной клеткой размерности $2n$. Пусть $\chi: (E^{2n}, S^{2n-1}) \rightarrow (S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ — соответствующее характеристическое отображение и

$$\chi_*: \pi_{r+1}(E^{2n}, S^{2n-1}) \rightarrow \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$$

— индуцированный этим отображением гомоморфизм гомотопических групп. [Заметим, что введенный в лекции 2 элемент $[e^{2n}]$ является не чем иным, как элементом $\chi_*[id]$, где $[id]$ — образующая группы $\pi_{2n}(E^{2n}, S^{2n-1}) = \pi_{2n-1}S^{2n-1} = \mathbb{Z}$.]

В лекции 7 (см. замечание 2 лекции 7) мы докажем следующее предложение.

Предложение 4. Гомоморфизм χ_* является изоморфизмом при $r \leq 3n-3$ и эпиморфизмом при $r = 3n-2$.

Пусть $\rho = \chi|_{S^{2n-1}}$ — отображение, приклеивающее клетку

$$e^{2n} = (S^n \times S^n) \setminus (S^n \vee S^n).$$

Поскольку в коммутативной диаграмме

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \pi_{r+1}(E^{2n}, S^{2n-1}) & \xrightarrow{\chi_*} & \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ \pi_r S^{2n-1} & \xrightarrow{\rho_*} & \pi_r(S^n \vee S^n) \end{array}$$

левый вертикальный гомоморфизм является изоморфизмом, а правый — мономорфизмом (см. предложение 2 лекции 4), из предложения 4 следует, что при $r < 3n-3$ любой элемент группы $\pi_r(S^n \vee S^n)$, имеющий вид $\partial\beta$, где $\beta \in \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$, единственным образом представляется в виде $\rho_*\gamma$, где $\gamma \in \pi_r S^{2n-1}$, т. е. что разложение (9) из лекции 4 произвольного элемента группы $\pi_r(S^n \vee S^n)$ при $r < 3n-3$ может быть записано в виде

$$i' \circ \alpha_1 + i'' \circ \alpha_2 + \rho_*\gamma,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_r S^n$ и $\gamma \in \pi_r S^{2n-1}$. Но, по определению, гомотопический класс отображения $\rho: S^{2n-1} \rightarrow S^n \vee S^n$ является не чем иным, как произведением Уайтхеда $[i', i'']$, и, значит, $\rho_*\gamma = [i', i''] \circ \gamma$ для любого элемента $\gamma \in \pi_r S^{2n-1}$. Следовательно, при $r < 3n-3$ любой элемент группы $\pi_r(S^n \vee S^n)$ единственным образом представляется в виде

$$i' \circ \alpha_1 + i'' \circ \alpha_2 + [i', i''] \circ \gamma,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_r S^n$ и $\gamma \in \pi_r S^{2n-1}$. [Иными словами, это означает, что

$$\pi_r(S^n \vee S^n) = \pi_r S^n \oplus \pi_r S^n \oplus \pi_r S^{2n-1} \quad \text{при } r < 3n-3,$$

где вложение прямых слагаемых в группу $\pi_r(S^n \vee S^n)$ осуществляется отображениями $\alpha \mapsto i' \circ \alpha$, $\alpha \mapsto i'' \circ \alpha$, $\gamma \mapsto [i', i''] \circ \gamma$. Это утверждение является частным случаем теоремы Хилтона — Милнора из Дополнения к лекции 5, но мы пока предпочитаем этой теореме не пользоваться; см. ниже Дополнение к этой лекции.]

В частности (см. формулу (10) лекции 4), мы видим, что при $r < 3n-3$ для любого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$ имеет

место равенство

$$(3) \quad (\iota' + \iota'') \circ \alpha = \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha + [\iota', \iota''] \circ H_0 \alpha,$$

где $H_0 \alpha$ — некоторый однозначно определенный элемент группы $\pi_r S^{2n-1}$, т. е. в силу универсальности элементов ι' и ι'' — равенство

$$(4) \quad (\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha + [\beta_1, \beta_2] \circ H_0 \alpha, \\ \beta_1, \beta_2 \in \pi_n X.$$

Определение 2. Элемент $H_0 \alpha$ называется *инвариантом Хопфа—Уайтхеда* (или *обобщенным инвариантом Хопфа*) элемента α , и соответственно этому отображение

$$H_0: \pi_r S^n \rightarrow \pi_r S^{2n-1}, \quad \alpha \mapsto H_0 \alpha$$

называется *отображением Хопфа—Уайтхеда*.

Подчеркнем, что отображение H_0 определено только при $r < 3n - 3$.

Так как композиционное умножение дистрибутивно справа, то

$$\begin{aligned} (\iota' + \iota'') \circ (\alpha + \beta) &= (\iota' + \iota'') \circ \alpha + (\iota' + \iota'') \circ \beta = \\ &= \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha + [\iota', \iota''] \circ H_0 \alpha + \\ &\quad + \iota' \circ \beta + \iota'' \circ \beta + [\iota', \iota''] \circ H_0 \beta = \\ &= \iota' \circ (\alpha + \beta) + \iota'' \circ (\alpha + \beta) + [\iota', \iota''] \circ (H_0 \alpha + H_0 \beta) \end{aligned}$$

для любых элементов $\alpha, \beta \in \pi_r S^n$, откуда непосредственно следует, что $H_0(\alpha + \beta) = H_0 \alpha + H_0 \beta$, т. е. что *отображение $H_0: \pi_r S^n \rightarrow \pi_r S^{2n-1}$ является гомоморфизмом*.

Применив формулу (4) к элементам $\beta_1 = \iota''$ и $\beta_2 = \iota'$, мы получим, что $(\iota'' + \iota') \circ \alpha = \iota'' \circ \alpha + \iota' \circ \alpha + [\iota'', \iota'] \circ H_0 \alpha$, и, значит, что $[\iota'', \iota'] \circ H_0 \alpha = [\iota', \iota''] \circ H_0 \alpha$. Но, как мы знаем, $[\iota'', \iota'] = (-1)^n [\iota', \iota'']$ (см. замечание 6 из лекции 4), а так как элемент $H_0 \alpha$ примитивен (ибо $r < 3n - 3$ и тем более $r < 2(2n - 1) - 1 = 4n - 3$), то, следовательно, $[\iota'', \iota'] \circ H_0 \alpha = [\iota', \iota''] \circ (-1)^n H_0 \alpha$. Поскольку отображение $\gamma \rightarrow [\iota', \iota''] \circ \gamma$ мономорфно, этим доказано, что для любого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$ имеет место равенство

$$H_0 \alpha = (-1)^n H_0 \alpha.$$

При n четном это равенство бессодержательно, а при n нечетном мы получаем, что

$$2H_0 \alpha = 0.$$

Так как отображение H_0 является гомоморфизмом, то

$$H_0(\alpha \circ k_{\iota_n}) = H_0(k\alpha) = kH_0 \alpha$$

для любого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$ и любого целого числа $k \in \mathbb{Z}$. Вместе с тем легко видеть, что

$$(5) \quad H_0(k\iota_r \circ \alpha) = k^2 H_0 \alpha, \quad \alpha \in \pi_r S^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, так как $\beta \circ (k\iota_r \circ \alpha) = (\beta \circ k\iota_r) \circ \alpha = k\beta \circ \alpha$ для любого $\beta \in \pi_n X$, то в силу примитивности элемента $H_0 \alpha$ и билинейности умножения Уайтхеда

$$\begin{aligned} [\beta_1, \beta_2] \circ H_0(k\iota_r \circ \alpha) &= \\ &= (\beta_1 + \beta_2) \circ (k\iota_r \circ \alpha) - \beta_1 \circ (k\iota_r \circ \alpha) - \beta_2 \circ (k\iota_r \circ \alpha) = \\ &= (k\beta_1 + k\beta_2) \circ \alpha - k\beta_1 \circ \alpha - k\beta_2 \circ \alpha = \\ &= [k\beta_1, k\beta_2] \circ H_0 \alpha = k^2 [\beta_1, \beta_2] \circ H_0 \alpha = [\beta_1, \beta_2] \circ k^2 H_0 \alpha, \end{aligned}$$

и, значит, $H_0(k\iota_r \circ \alpha) = k^2 H_0 \alpha$. $\square$

Особый интерес имеет случай $r = 2n - 1$, впервые рассмотренный Хопфом (на основании совершенно иных соображений). Поскольку $\pi_{2n-1} S^{2n-1} = \mathbb{Z}$, мы в этом случае можем отображение H_0 считать гомоморфизмом $\pi_{2n-1} S^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Обозначив этот гомоморфизм символом H , т. е. положив

$$H_0 \alpha = H\alpha \cdot \iota_{2n-1}, \quad \alpha \in \pi_{2n-1} S^n, \quad H\alpha \in \mathbb{Z},$$

мы можем формулу (3) переписать в следующем виде:

$$(6) \quad (\iota' + \iota'') \circ \alpha = \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha + H\alpha \cdot [\iota', \iota''], \quad \alpha \in \pi_{2n-1} S^n.$$

Число $H\alpha$ называется *инвариантом Хопфа* элемента $\alpha \in \pi_{2n-1} S^n$ (или соответствующего отображения $S^{2n-1} \rightarrow S^n$).

Поскольку при $k \in \mathbb{Z}$ из $2k = 0$ вытекает, что $k = 0$, мы видим, что при n нечетном $H\alpha = 0$ для любого элемента $\alpha \in \pi_{2n-1} S^n$, так что в этом случае гомоморфизм H интереса не представляет.

Иначе дело обстоит при n четном. Пусть, например, $\alpha \in [\iota_n, \iota_n] \in \pi_{2n-1} S^n$. Из естественности умножения Уайтхеда немедленно вытекает, что $\beta \circ [\alpha_1, \alpha_2] = [\beta \circ \alpha_1, \beta \circ \alpha_2]$ для любых элементов $\alpha_1 \in \pi_p S^n$, $\alpha_2 \in \pi_q S^n$ и $\beta \in \pi_n X$. Поэтому, в частности,

$$\begin{aligned} (\iota' + \iota'') \circ [\iota_n, \iota_n] &= [(\iota' + \iota'') \circ \iota_n, (\iota' + \iota'') \circ \iota_n] = \\ &= [\iota' + \iota'', \iota' + \iota''] \end{aligned}$$

и, аналогично, $\iota' \circ [\iota_n, \iota_n] = [\iota', \iota']$ и $\iota'' \circ [\iota_n, \iota_n] = [\iota'', \iota'']$. Следовательно,

$$\begin{aligned} H([\iota_n, \iota_n])[\iota', \iota''] &= (\iota' + \iota'') \circ [\iota_n, \iota_n] - \iota' \circ [\iota_n, \iota_n] - \\ &- \iota'' \circ [\iota_n, \iota_n] = [\iota' + \iota'', \iota' + \iota''] - [\iota', \iota'] - [\iota'', \iota''] = \\ &= [\iota', \iota''] + [\iota'', \iota'] = (1 + (-1)^n)[\iota', \iota''] \end{aligned}$$

(см. замечание 6 лекции 4) и, значит, $H([v_n, v_n]) = 1 + (-1)^n$. Этим доказано, что при n четном имеет место равенство

$$(7) \quad H_0([v_n, v_n]) = 2.$$

Поэтому, в частности, $[v_n, v_n] \neq 0$ и, значит (см. следствие 1 предложения 1), при n четном сфера S^n не является H -пространством.

При n нечетном из ксокоммутативности умножения Уайтхеда следует, что $2[v_n, v_n] = 0$. Кроме того, так как сферы S^1 , S^3 и S^7 являются H -пространствами (как единичные сферы нормированных алгебр комплексных чисел, кватернионов и октав), то

$$(8) \quad [v_1, v_1] = 0, \quad [v_3, v_3] = 0, \quad [v_7, v_7] = 0.$$

Можно показать (это трудная теорема, впервые доказанная Адамсом), что при всех остальных нечетных n элемент $[v_n, v_n]$ отличен от нуля (и потому сфера S^n не является H -пространством). Таким образом, размерности 1, 3, 7 играют в гомотопической теории сфер совершенно особую роль. На этом основании они называются *исключительными размерностями*.

Из равенства (7) следует даже, что элемент $[v_n, v_n]$ является элементом бесконечного порядка. Следовательно, при n четном группа $\pi_{2n-1}S^n$ бесконечна (что при $n=2$ нам уже известно из других соображений). Что же касается группы $\pi_{2n-1}S^n$ при нечетном n , то, как можно показать, эта группа нетривиальна (при неисклнчительном n это следует из результата Адамса, а для трех исключительных n вытекает из явных формул для соответствующих групп; в частности, при $n=1$ мы знаем, что $\pi_1S^1 = \mathbb{Z}$, а при $n=3$ мы в лекции 8 покажем, что $\pi_5S^3 = \mathbb{Z}_2$).

Из формулы (7) и гомоморфности отображения H вытекает также, что при n четном в группе $\pi_{2n-1}S^n$ существуют элементы с любым четным инвариантом Хопфа. Возникает вопрос: существуют ли, хотя бы для некоторых n , элементы с нечетным — или, что равносильно, с равным единице — инвариантом Хопфа? Это — знаменитая проблема инварианта Хопфа. Для ее решения мы научимся вычислять инвариант Хопфа (или, более общим образом, инвариант Хопфа — Уайтхеда) любых элементов, получающихся применением конструкции Хопфа (см. предыдущую лекцию) к отображениям вида

$S^p \times S^q \rightarrow S^n$, и затем постараемся подобрать эти отображения так, чтобы получить (когда это возможно) элемент с нечетным инвариантом Хопфа.

Эта программа требует некоторых аддиционных лемм, с которых мы и начнем. Мы будем формулировать (и доказывать) эти леммы для пунктированного пространства (X, x_0) , игнорируя, как правило, отмеченные точки и оставляя более недантические формулировки читателю. Эта вольность оправдывается тем, что применять эти леммы мы будем к случаю, когда пространство X является сферой.

Пользуясь отождествлением $\mathbb{R}^{r+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$, мы будем точки единичной сферы $S^r \subset \mathbb{R}^{r+1}$ отождествлять с парами $(x, \mathbf{x})$, где $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ и $x^2 + |\mathbf{x}|^2 = 1$. Тогда точки вида $\mathbf{x} = (0, \mathbf{x})$ будут составлять экватор S^{r-1} сферы S^r , точки $(x, \mathbf{x})$ с $x \geq 0$ — ее северную полусферу $C_{(+)}^r$, а точки $(x, \mathbf{x})$ с $x \leq 0$ — ее южную полусферу $C_{(-)}^r$.

Отображение $f: S^r \rightarrow X$ мы будем называть *стянутым на юге* (или *на севере*), если $f(C_{(-)}^r) = x_0$ (соответственно, если $f(C_{(+)}^r) = x_0$). Для каждого такого отображения f отображение $f': E^r \rightarrow X$, определенное формулой $f'(\mathbf{x}) = f(x, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in E^r$, где $x \geq 0$ (или соответственно $x \leq 0$), является отображением $(E^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, x_0)$ и потому задает некоторый элемент $[f']$ группы $\pi_r X$. Если отображение f' обычным образом рассматривать как отображение сферы $S^r = E^r/S^{r-1}$ в X , то f будет не чем иным, как суммой $f' + \text{const}$ отображения f' и постоянного отображения $\text{const}: S^r \rightarrow X$ (по отношению к стандартному коумножению $S^r \rightarrow S^r \vee S^r$, являющемуся композицией отображения $S^r \rightarrow S^r/S^{r-1}$ и канонического гомеоморфизма $S^r/S^{r-1} \approx S^r \vee S^r$). Поэтому определенный отображением f элемент $[f]$ группы $\pi_r X$ будет совпадать с элементом $[f']$:

$$[f] = [f'].$$

Если теперь отображение $f: S^r \rightarrow X$ стянуто на юге, а отображение $g: S^r \rightarrow X$ стянуто на севере, то формула

$$(9) \quad h(x, \mathbf{x}) = \begin{cases} f(x, \mathbf{x}), & \text{если } x \geq 0, \\ g(x, \mathbf{x}), & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

корректно определяет некоторое отображение $h: S^n \rightarrow X$, и ясно, что это отображение является не чем иным, как суммой $f' + \text{const} + \text{const} + g'$ постоянных отображений и

отображений f' и g' , отвечающих отображениям f и g . Следовательно,

$$(10) \quad [h] = [f] + [g].$$

Эта формула (которую можно рассматривать как простейшую аддитивную лемму) фактически дает еще одну явную конструкцию сложения в группе $\pi_n X$, поскольку любой гомотопический класс $\alpha \in \pi_n S^n$ содержит отображение, стянутое на юге (или на севере). (Для доказательства достаточно заметить, что каждая полусфера $C'_{(+)}$ или $C'_{(-)}$ стягивается в точку, и потому любое ее отображение в произвольное пространство X гомотопно нулю, и что пары $(S^r, C'_{(+)})$ и $(S^r, C'_{(-)})$ являются парами Борсука.)

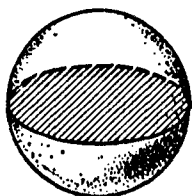


Рис. 11.

Отождествив точки $x \in E^r$ с точками $(0, x) \in \mathbb{R}^{r+1}$, мы можем ввести в рассмотрение «сферу с перегородкой»

$$Q^r = S^r \cup E^r = Q'_{(+)} \cup Q'_{(-)},$$

где $Q'_{(+)} = C'_{(+)} \cup E^r$, $Q'_{(-)} = C'_{(-)} \cup E^r$ (см. рис. 11). Ясно, что отображение $\varphi'_{(+)}: S^r \rightarrow Q'_{(+)}$ (отображение $\varphi'_{(-)}: S^r \rightarrow Q'_{(-)}$), тождественное на $C'_{(-)}$ (на $C'_{(-)}$) и являющееся проекцией $(x, x) \mapsto x$ на $C'_{(-)}$ (на $C'_{(+)}$), представляет собой гомеоморфизм. Поэтому каждое отображение $F: Q^r \rightarrow X$ определяет три отображения

$$F_{(+)} = (F|_{Q'_{(+)}}) \circ \varphi'_{(+)}, \quad F_{(-)} = (F|_{Q'_{(-)}}) \circ \varphi'_{(-)} \quad \text{и} \quad h = F|_{S^r}$$

сферы S^r в пространство X . Пусть $\alpha_{(+)}$, $\alpha_{(-)}$ и α — их гомотопические классы.

Лемма 1. Для любого отображения $F: Q^r \rightarrow X$ в группе $\pi_n X$ имеет место равенство

$$\alpha = \alpha_{(+)} + \alpha_{(-)}.$$

Доказательство. Шар E^r стягиваем, а пара (Q^r, E^r) является парой Борсука. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что $F(E^n) = x_0$. Но тогда отображение $F_{(+)}$ будет стянуто на юге, отображение $F_{(-)}$ будет стянуто на севере, а отображение h будет отображением (9), построенным для отображений $f = F_{(+)}$ и $g = F_{(-)}$. Поэтому, согласно формуле (10), будет иметь место равенство $\alpha = \alpha_{(+)} + \alpha_{(-)}$. $\square$

Более интересную аддиционную лемму мы получим, положив $r = p + q + 1$, где $p \geq 0$, $q \geq 0$, и отождествив сферу S^r с джойном

$$S^p * S^q = (E^{p+1} \times S^q) \cup (S^p \times E^{q+1}) = (E^{p+1} \times E^{q+1})$$

сфер S^p и S^q . По аналогии с предыдущим случаем мы назовем отображение $f: S^r \rightarrow X$ *стянутым слева (справа)*, если $f(E^p \times S^q) = x_0$ (соответственно, если $f(S^p \times E^{q+1}) = x_0$). Аналог формулы (9) имеет вид

$$(11) \quad h(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } y \in S^q, \\ g(x, y), & \text{если } x \in S^p, \end{cases}$$

где $x \in E^{p+1}$, $y \in E^{q+1}$, и корректно определяет непрерывное отображение $h: S^r \rightarrow X$ для любых отображений $f: S^r \rightarrow X$ и $g: S^r \rightarrow X$, стянутых соответственно справа и слева. Однако, вообще говоря, аналог формулы (10) теперь места не имеет и связь между гомотопическими классами отображений f , g и h оказывается более сложной.

Чтобы разобраться, в чем тут дело, мы все же попытаемся свести дело к формуле (10) с целью выяснить, что этому мешает.

Пусть $E_{(+)}^{q+1}$ — *северный полушар* шара E^{q+1} , состоящий из точек (x, x) , $x \in E^1$, $x \in E^q$, $x^2 + |x|^2 \leq 1$, для которых

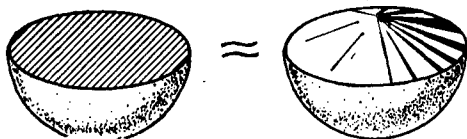


Рис. 12.

$x \geq 0$, а $E_{(-)}^{q+1}$ — *южный полушар*, состоящий из точек (x, x) , для которых $x \leq 0$. Ясно, что

$$E^{q+1} = E_{(-)}^{q+1} \cup E_{(+)}^{q+1} \quad \text{и} \quad E^q = E_{(-)}^{q+1} \cap E_{(+)}^{q+1},$$

причем граница каждого полушара $E_{(+)}^{q+1}$ или $E_{(-)}^{q+1}$ состоит из шара E^q и соответствующей полусферы $C_{(-)}^q$ или $C_{(+)}^q$ сферы $S^q = \dot{E}^{q+1}$.

Рассмотрим на границе $(E^{p+1} \times E^{q+1})$ произведения $E^{p+1} \times E^{q+1}$ подмножества

$$K_{(-)}^r = (E^{p+1} \times C_{(-)}^q) \cup (S^p \times E_{(-)}^{q+1})$$

и

$$K_{(+)}^r = (E^{p+1} \times C_{(+)}^q) \cup (S^p \times E_{(+)}^{q+1}).$$

Легко видеть, что существует гомеоморфизм $(E^{p+1} \times E^{q+1}) \rightarrow S^r$, переводящий эти подмножества в полусферы $C_{(-)}^r$ и $C_{(+)}^r$ соответственно. Действительно, поскольку полушар $E_{(-)}^{q+1}$ гомеоморфен, очевидно (см. рис. 12), конусу $CC_{(-)}^q$ над полусферой $C_{(-)}^q$, подмножество $K_{(-)}^r$ гомеоморфно шару $E^r \approx S^p * C_{(-)}^q \approx S^p * E^q$ и, значит, полусфере $C_{(-)}^r$. Аналогично, множество $K_{(+)}^r$ гомеоморфно полусфере $C_{(+)}^r$. Для завершения доказательства остается заметить, что на пересечении

$$(12) K_{(-)}^r \cap K_{(+)}^r = (E^{p+1} \times S^{q-1}) \cup (S^p \times E^q) = (E^{p+1} \times E^q)$$

эти гомеоморфизмы можно считать совпадающими. $\square$

В дальнейшем мы будем посредством построенного гомеоморфизма отождествлять границу $(E^{p+1} \times E^{q+1})$ со сферой S^r и в соответствии с этим подмножества $K_{(-)}^r$ и $K_{(+)}^r$ — с полусферами $C_{(-)}^r$ и $C_{(+)}^r$. (Читателю предлагается самостоятельно рассмотреть вопрос о том, как связано это отождествление со стандартным отождествлением $(E^{p+1} \times E^{q+1}) = S^r$, которым мы пользовались ранее.)

Рассмотрим теперь произвольное стянутое слева отображение $g: S^r \rightarrow X$. Хотя $g(E^{p+1} \times C_{(+)}^q) = x_0$, но, вообще говоря, $g(S^p \times E_{(+)}^{q+1}) \neq x_0$ и, значит, $g(K_{(+)}^r) \neq x_0$, т. е. отображение g не стянуто на севере сферы S^r . Однако на $S^p \times E_{(+)}^{q+1}$ это отображение можно в силу экспоненциального закона интерпретировать как отображение $E_{(+)}^{q+1} \rightarrow X^{S^p}$, обладающее тем свойством, что $f|_{C_{(+)}^q} = \text{const}$. Поскольку полушар $E_{(+)}^{q+1}$ естественным образом ретрагируется на полусферу $C_{(+)}^q$, отсюда следует, что отображение g на $S^p \times E_{(+)}^{q+1}$ гомотопно относительно $S^p \times C_{(+)}^q$ постоянному отображению.

Поскольку пара $(S^r, (S^p \times E_{(+)}^{q+1}) \cup (E^{p+1} \times S^q))$ является, очевидно, парой Борсука, эта гомотопия распространяется до неподвижной на $E^{p+1} \times S^q$ гомотопии отображения g на всей сфере S^r . Этим доказано, что любое стянутое слева отображение $g: S^r \rightarrow X$ гомотопно стянутому слева отображению, являющемуся одновременно отображением, стянутым на севере. Таким образом, рассматривая стянутые слева отображения $S^r \rightarrow X$, мы без ограничения общности можем считать, что они стянуты также и на севере.

Для отображений $f: S^r \rightarrow X$, стянутых справа, ситуация оказывается более сложной. Действительно, если отображение $f: S^r \rightarrow X$ стянуто справа, то $f(S^p \times E_{(-)}^{q+1}) = x_*$.

но $f(E^{p+1} \times C_{(-)}^q) \neq x_0$, и, вообще говоря, мы не можем добиться выполнения равенства $f(E^{p+1} \times C_{(-)}^q) = x_0$ никакой гомотопией. Чтобы понять, что этому мешает, мы заметим, что отображение f на $E^{p+1} \times C_{(-)}^q$ можно в силу экспоненциального закона рассматривать как отображение $C_{(-)}^q \rightarrow (X, x_0)^{(E^{p+1}, S^p)} = \Omega^{p+1}X$, а поскольку полушар $C_{(-)}^q$ стягивается к точке $s_0 = (1, 0, \dots, 0)$, это отображение гомотопно постоянному отображению $C_{(-)}^q \rightarrow \{a\}$, где $a: (E^{p+1}, S^p) \rightarrow (X, x_0)$ — точка пространства $\Omega^{p+1}X$, определенная формулой

$$(13) \quad a(x) = f(x, s_0), \quad x \in E^{p+1}.$$

Для исходного отображения f это означает, что на $E^{p+1} \times C_{(-)}^q$ оно гомотопно относительно $S^p \times C_{(-)}^q$ отображению $\hat{a}: E^{p+1} \times C_{(-)}^q \rightarrow X$, определенному формулой

$$\hat{a}(x, y) = a(x), \quad x \in E^{p+1}, \quad y \in C_{(-)}^q.$$

Поскольку пара $(S^r, (E^{p+1} \times C_{(-)}^q) \cup (S^p \times E^{q+1}))$ является, очевидно, парой Борсука, мы получаем, следовательно, что *любое стянутое справа отображение $f: S^r \rightarrow X$ гомотопно стянутому справа отображению, которое на $E^{p+1} \times C_{(-)}^q$ имеет вид $\hat{a}$ для некоторого отображения $a: (E^{p+1}, S^p) \rightarrow (X, x_0)$* . При этом ясно, что отображение a мы можем произвольно выбрать в его гомотопическом классе $\alpha \in \pi_{p+1}X$.

В частности, мы видим, что *если $\alpha = 0$, то отображение f гомотопно стянутому справа отображению, для которого $f(K_{(-)}^q) = x_0$, т. е. которое одновременно стянуто на юге сферы S^r* .

Таким образом, если $\alpha = 0$, то мы без ограничения общности можем считать, что отображение f стянуто на юге. Если при этом стянутое слева отображение g стянуто и на севере, то мы можем построить для отображений f и g отображение (9), которое мы теперь обозначим через h' . Формула (9) означает, что это отображение задается соотношениями

$$h' = \begin{cases} g & \text{на } E^{p+1} \times C_{(-)}^q, \text{ и на } S^p \times E_{(-)}^{q+1}, \\ f & \text{на } E^{p+1} \times C_{(+)}^q, \text{ и на } S^p \times E_{(+)}^{q+1}. \end{cases}$$

С другой стороны, интересующее нас сейчас отображение (11) задается соотношениями

$$h = \begin{cases} f & \text{на } E^{p+1} \times C_{(-)}^q, \text{ и на } E^{p+1} \times C_{(+)}^q, \\ g & \text{на } S^p \times E_{(-)}^{q+1} \text{ и на } S^p \times E_{(+)}^{q+1}. \end{cases}$$

Но по условию

$$g = f = \text{const на } S^p \times E_{(+)}^{q+1} \text{ и на } E^{p+1} \times C_{(+)}^q.$$

Поэтому $h = h'$, и, значит, согласно формуле (10)

$$(14) \quad [h] = [f] + [g].$$

Аналогично, любое стянутое слева отображение $g: S^r \rightarrow X$ определяет по формуле

$$(15) \quad b(y) = g(s_0, y), \quad y \in E^{q+1}$$

(где теперь s_0 — точка $(1, 0, \dots, 0) \in S^p$), некоторое отображение $b: (E^{q+1}, S^q) \rightarrow (X, x_0)$, и если гомотопический класс $\beta \in \pi_q X$ этого отображения равен нулю, то симметричное рассуждение покажет нам, что для любого стянутого справа отображения $f: S^r \rightarrow X$ также будет справедлива формула (14).

Таким образом, для справедливости формулы (14) достаточно, чтобы либо $\alpha = 0$, либо $\beta = 0$.

Чтобы свести общий случай к этому, мы снова рассмотрим множество $Q^r = (E^{p+1} \times E^{q+1})' \cup (E^{p+1} \times E^q)$, получающееся приклеиванием к сфере $S^r = (E^{p+1} \times E^{q+1})'$ ее экваториального шара $E^r = E^{p+1} \times E^q$ (см. формулу (12)), и отображение $F: Q^r \rightarrow X$, совпадающее на сфере S^r с отображением h , а на шаре $E^{p+1} \times E^q$ определенное формулой

$$F(x, y) = a(x), \quad x \in E^{p+1}, \quad y \in E^q$$

(поскольку $h(E^{p+1} \times E^q)' = x_0$, это отображение определено корректно). Согласно сказанному выше (см. текст перед леммой 1) отображение F определяет три отображения $F_{(-)}, F_{(+)}, h: S^r \rightarrow X$ (причем отображение h является очевидно, отображением h , гомотопический класс которого мы вычисляем). Поэтому, согласно лемме 1, имеет место равенство

$$[h] = [F_{(-)}] + [F_{(+)}].$$

Займемся сначала отображением $F_{(-)}$. По определению оно является композицией некоторого гомеоморфизма $\varphi_{(-)}: S^r \rightarrow K_{(-)}' \cup E^r$ (тождественного на полусфере $K_{(-)}'$ и являющегося естественной проекцией $K_{(+)}' \rightarrow E^r$ на полусфере $K_{(+)}' = C_{(+)}^r$) и ограничения отображения F на $K_{(-)}' \cup E^r$. При этом, ничего не теряя, мы можем заменить гомеоморфизм $\varphi_{(-)}$ любым другим гомотопным ему гомеоморфизмом $S^r \rightarrow K_{(-)}' \cup E^r$, например гомеоморфизмом $\text{id} * \varphi_{(-)}$, (здесь мы пользуемся тем очевидным фактом, что $K_{(-)}' \cup E^r =$

$= (E^{p+1} \times (C_{(-)}^q \cup E^q)) \cup (S^p \times E_{(-)}^{q+1}) = (E^{p-1} * E_{(-)}^{q+1})$. С другой стороны, так как любое отображение $(S^p \times E_{(+)}^{q+1}, S^p \times C_{(+)}^q) \rightarrow (X, x_0)$ гомотопно постоянному отображению (см. выше), то любые два таких отображения гомотопны друг другу. Конечно, то же самое верно и по отношению к отображениям $(S^p \times E_{(-)}^{q+1}, S^q \times C_{(-)}^q) \rightarrow (X, x_0)$. Поэтому мы, без ограничения общности, можем предполагать, что стянутое слева отображение $g: S^r \rightarrow X$ задается на $S^p \times E_{(-)}^{q+1}$ формулой

$$(16) \quad g(x, y) = b(y), \quad x \in S^p, \quad y \in E_{(-)}^{q+1}.$$

Кроме того, мы можем, очевидно, предполагать, что

$$(17) \quad b(y) = x_0, \quad \text{если } y \in E_{(+)}^{q+1}.$$

Но ясно, что если стянутое справа отображение f совпадает на $E^{p+1} \times C_{(-)}^q$ с отображением $\hat{a}$, а стянутое слева отображение g удовлетворяет условию (16), то отображение $F \circ (\text{id} * \varphi_{(-)}^q)$ будет произведением Уайтхеда отображений a и $b' = (b|_{E_{(-)}^{q+1}}) \circ \varphi$, где φ — гомеоморфизм $E^r \rightarrow E_{(-)}^r$.

Поскольку в силу условия (17) отображения b' и b определяют, очевидно, один и тот же элемент β группы $\pi_{q+1}X$, этим доказано, что

$$[F_{(-)}] = \pm [\alpha, \beta].$$

(Неопределенность в знаке возникла из-за того, что мы не позаботились проверить согласованность двух отождествлений сферы S^r с границей $(E^{p+1} \times E^{q+1})$ произведения $E^{p+1} \times E^{q+1}$.)

Что же касается отображения $F_{(+)}$, то по аналогичным соображениям можно считать, что на $E^{p+1} \times S^q$ оно совпадает с отображением f , а на $S^p \times E^{q+1}$ — со стянутым слева отображением g' , являющемся на $S^p \times E^{q+1}$ композицией естественного гомеоморфизма $S^p \times E^{q+1} \rightarrow S^p \times E_{(+)}^{q+1}$ и ограничения на $S^p \times E_{(+)}^{q+1}$ отображения g , т. е., иными словами, что оно является отображением (11), построенным для отображений f и g' . При этом ввиду условия (17) инвариант β для отображения g' будет равен нулю. Поэтому, согласно формуле (14), будет иметь место равенство

$$[F_{(+)}] = [f] + [g'].$$

Наконец, отображение g' , очевидно, гомотопно стянутому слева отображению g'' , совпадающему на $S^p \times E_{(+)}^{q+1}$ с отображением g и постоянному на $S^p \times E_{(-)}^{q+1}$. С другой

стороны, отображения g и g'' , отличаясь лишь на $S^p \times E_{(-)}^{q+1}$, в силу уже известных нам соображений также гомотопны. Следовательно, $[g'] = [g''] = [g]$.

Тем самым нами доказана следующая лемма:

Лемма 2. Для любых отображений $f, g: S^r \rightarrow X$ стянутых соответственно слева и справа, в группе $\pi_r X$ имеет место равенство

$$(18) \quad [h] = [f] + [g] \pm [\alpha, \beta],$$

где h — отображение (11), $\alpha \in \pi_{p+1} X$ и $\beta \in \pi_{q+1} X$ — гомотопические классы отображений (13) и (15). $\square$

Впервые эта лемма была доказана Дж. Уайтхедом.

Перейдем теперь к конструкции Хопфа. Согласно общему определению 2 лекции 4 и нашим обычным отождествлениям эта конструкция сопоставляет произвольному пунктированному отображению

$$(19) \quad F: S^p \times S^q \rightarrow S^{n-1}$$

отображение $c(F): S^{p+q+1} \rightarrow S^n$, определенное формулой

$$(20) \quad c(F) \left(\cos \frac{\pi}{2} t \cdot x, \sin \frac{\pi}{2} t \cdot y \right) = \\ = (\cos \pi t, \sin \pi t \cdot E(x, y)), \quad x \in S^p, y \in S^q, t \in I.$$

Впрочем, сейчас нам будет удобнее не отождествлять $S^p * S^q = (E^{p+1} \times E^{q+1}) \cdot c(S^{p+q+1})$ и, значит, считать $c(F)$ отображением $(E^{p+1} \times E^{q+1}) \cdot \rightarrow S^1$, заданным формулой

$$c(F)(x, y) = \begin{cases} \left(-\cos \frac{\pi |x|}{2}, \sin \frac{\pi |x|}{2} F\left(\frac{x}{|x|}, y\right) \right), & \text{если } x \in E^{p+1}, y \in S^q, \\ \left(\cos \frac{\pi |y|}{2}, \sin \frac{\pi |y|}{2} F\left(x, \frac{y}{|y|}\right) \right), & \text{если } x \in S^p, y \in E^{q+1}. \end{cases}$$

Ясно, что тогда

$$c(F)(E^{p+1} \times S^q) \subset C_{(-)}^n, \quad c(F)(S^p \times E^{q+1}) \subset C_{(+)}^n,$$

и $c(F)(S^p \times S^q) \subset S^{n-1}$. Поэтому отображение $h = m \circ c(F)$, где m — стандартное коумножение $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$, будет обладать тем свойством, что $h(S^p \times S^q) \subset x_0$ и, значит, будет отображением вида (11) (с $X = S^n \vee S^n$), построенным для отображений $f: S^r \rightarrow S^n \vee S^n$, $g: S^r \rightarrow S^n \vee S^n$,

$r = p + q + 1$, определенных равенствами

$$\begin{aligned} f &= h & \text{на } E^{p+1} \times S^q, & f = \text{const} & \text{на } S^p \times E^{q+1}, \\ g &= \text{const} & \text{на } E^{p+1} \times S^q, & g = h & \text{на } S^p \times E^{q+1}, \end{aligned}$$

т. е. равенствами

$$f = (\text{id} \vee \text{const}) \circ h, \quad g = (\text{const} \vee \text{id}) \circ h.$$

Следовательно, согласно лемме 2, для него будет иметь место формула (18).

Но, по определению, $m = i' + i''$, где i' и i'' — вложения $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$, и, значит $(\text{id} \vee \text{const}) \circ m = i' + \text{const} \sim i'$ и $(\text{const} \vee \text{id}) \circ m = \text{const} + i'' \sim i''$. Поэтому, обозначив через $\gamma = \gamma(F)$ гомотопический класс отображения $c(F)$ (являющийся элементом группы $\pi_r(S^n)$), мы в группе $\pi_r(S^n \vee S^n)$ будем иметь равенства

$$[h]^* = (i' + i'') \circ \gamma, \quad [f]^* = i' \circ \gamma, \quad [g]^* = i'' \circ \gamma.$$

Далее, в рассматриваемом случае элемент $\alpha \in \pi_{p+1}(S^n \vee S^n)$ будет гомотопическим классом отображения $a: (E^{p+1}, S^p) \rightarrow (S^n \vee S^n)$, определенного формулой

$$a(x) = f(x, s_0), \quad x \in E^{p+1},$$

т. е. формулой $a = m \circ a'$, где a' — отображение $(E^{p+1}, S^p) \rightarrow (S^n, S^{n-1})$ (или, точнее, $(E^{p+1}, S^p) \rightarrow (C_{n-}^n, S^{n-1})$), переводящее точку $x \in E^{p+1}$ в точку $c(F)(x, s_0) = \left(-\cos \frac{\pi |x|}{2}, \sin \frac{\pi |x|}{2} F\left(\frac{x}{|x|}, s_0\right) \right)$, $x \in E^{p+1}$. Поэтому $a = i' \circ \bar{a}$, где $\bar{a}$ — отображение $(E^{p+1}, S^p) \rightarrow (S^n, s_0)$, заданное формулой

$$\bar{a}(x) = \left(-\cos \pi |x|, \sin \pi |x| \cdot F\left(\frac{x}{|x|}, s_0\right) \right), \quad x \in E^{p+1}$$

(т. е. являющееся композицией отображения a' и относительного гомеоморфизма $(C_{n-}^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, s_0)$, растягивающего полусферу C_{n-}^n по меридианам на всю сферу S^n).

Вспомним теперь (см. лекцию I.5), что отображения вида $(E^m, S^{m-1}) \rightarrow (X, x_0)$ мы условились отождествлять с отображениями $(S^m, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ посредством относительного гомеоморфизма

$$\chi: (E^m, S^{m-1}) \rightarrow (S^m, s_0), \quad x \mapsto \left(\cos \pi |x|, \frac{\sin \pi |x|}{|x|} x \right).$$

Следовательно, отображение $\bar{a}$, рассматриваемое в силу этого отождествления (при $m = p + 1$) как отображение

$S^{p+1} \rightarrow S^n$, будет задаваться формулой

$$\bar{a}(x, x) = \left(-x, |x| \cdot F\left(\frac{x}{|x|}, s_0\right) \right), \\ (x, x) \in S^{p+1} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p+1},$$

т. е. с точностью до симметрии $x \mapsto -x$ будет надстройкой над отображением $x \mapsto F(x, s_0)$, $x \in S^p$, сферы S^p в сферу S^{n-1} . Обозначая гомотопический класс последнего отображения символом $\bar{\alpha}$, мы получаем, следовательно, что $\alpha = -\iota' \circ E\bar{\alpha}$.

Аналогично показывается, что $\beta = -\iota'' \circ E\bar{\beta}$, где $\bar{\beta}$ — гомотопический класс отображения $y \mapsto F(s_0, y)$, $y \in S^q$ (так что пара $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ является не чем иным, как типом отображения F в смысле определения 1). Следовательно, $[\alpha, \beta] = [\iota' \circ E\bar{\alpha}, \iota'' \circ E\bar{\beta}]$, и потому (см. предложение 1 лекции 5)

$$[\alpha, \beta] = [\iota', \iota''] \circ (\bar{\alpha} * \bar{\beta}).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае равенство (18) приобретает вид

$$(21) \quad (\iota' + \iota'') \circ \gamma = \iota' \circ \gamma + \iota'' \circ \gamma \pm [\iota', \iota''] \circ (\bar{\alpha} * \bar{\beta}).$$

При $r < 3n - 3$ эта формула, по определению, означает, что $H \circ \gamma = \pm \bar{\alpha} * \bar{\beta}$. Тем самым доказана следующая теорема Дж. Уайтхеда (мы несколько меняем обозначения):

Теорема 1. При $p + q < 3n - 1$ для любого отображения

$$f: S^p \times S^q \rightarrow S^n$$

типа (α, β) , $\alpha \in \pi_p S^n$, $\beta \in \pi_q S^n$, имеет место формула

$$H_0 \gamma = \pm \alpha * \beta,$$

где $\gamma = \gamma(f)$ — гомотопический класс отображения $s(f): S^{p+q+1} \rightarrow S^{n+1}$, получающегося из отображения f применением конструкции Хопфа. $\square$

Заметим, что, согласно предложению 1, обязательно $[\alpha, \beta] = 0$.

Для случая $p = q = n$ тип отображения f имеет вид (k, l) , где $k, l \in \mathbb{Z}$, и потому его можно считать парой (k, l) целых чисел. Поскольку $\iota_p * \iota_q = \iota_{p+q+1}$, мы получаем тем самым, что для любого отображения $f: S^n \times S^n \rightarrow S^n$

типа (k, l) инвариант Хопфа $Hc(f)$ отображения $c(f): S^{2n+1} \rightarrow S^{n+1}$ равен $\pm kl$. В частности, если $(k, l) = (1, 1)$, то $Hc(f) = \pm 1$.

С другой стороны, сравнив определения, мы немедленно получим, что отображения $f: S^n \times S^n \rightarrow S^n$ типа $(1, 1)$ — это в точности умножения на сфере S^n , по отношению к которым точка s_0 является гомотопической единицей, т. е. умножения, задающие на S^n структуру H -пространства. Этим доказано

Следствие 1. Если сфера S^n является H -пространством, то существует отображение $S^{2n+1} \rightarrow S^{n+1}$, инвариант Хопфа которого равен единице.

Условия этого следствия выполнены при $n = 1$ (окружность S^1 является H -пространством — даже топологической группой — по отношению к умножению комплексных чисел), при $n = 3$ (сфера S^3 является топологической группой по отношению к умножению кватернионов) и при $n = 7$ (сфера S^7 является топологической лупой, т. е. «неассоциативной группой», по отношению к умножению октав). Поэтому имеет место

Следствие 2. При $n = 2, 4$ и 8 существуют отображения $S^{2n-1} \rightarrow S^n$, инвариант Хопфа которых равен единице, т. е., иными словами, гомоморфизмы

$$H: \pi_3 S^2 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad H: \pi_7 S^4 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad H: \pi_{15} S^8 \rightarrow \mathbb{Z}$$

являются эпиморфизмами.

Адамс показал, что, напротив, при $n \neq 2, 4, 8$ гомоморфизм $H: \pi_{2n-1} S^n \rightarrow \mathbb{Z}$ эпиморфизмом не является (и, значит, его образ состоит из всех четных чисел). Утверждение (см. стр. 241), что $[i_n, i_n] \neq 0$ при $n \neq 1, 3, 7$ является непосредственным следствием этого результата, поскольку, как мы знаем, при $[i_n, i_n] = 0$ сфера S^n является H -пространством (и потому, согласно следствию 1, гомоморфизм H представляет собой эпиморфизм). Мы докажем теорему Адамса в следующем году, после того как разовьем необходимую для этого технику.

Группа $\pi_3 S^2$ (случай $n = 2$) является, как мы знаем (см. лекцию 1) бесконечной циклической группой с образующей $\eta_3 = [h]^* = h_*(i_3)$, где $h: S^3 \rightarrow S^2$ — отображение Хопфа $(z_0, z_1) \mapsto z_1/z_0$. Поскольку любой эпиморфизм $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ necessarily является изоморфизмом, мы получаем, следовательно, что гомоморфизм $H: \pi_3 S^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ является изоморфизмом.

Это означает, что $H\eta_3 = \pm 1$, т. е. что для любого элемента $\alpha \in \pi_3 S^2$ имеет место равенство

$$\alpha = \pm (H\alpha) \eta_3.$$

(На самом деле здесь всюду имеет место знак $+$, что проще всего показать, установив прямым геометрическим построением равенство $h = c(f)$, где $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ — отображение $(\xi, \eta) \mapsto \xi\eta$, $\xi, \eta \in S^1$.)

В частности, мы видим, что в группе $\pi_3 S^2$ имеет место равенство

$$[\iota_2, \iota_2] = \pm 2\eta_3.$$

Заметим, что, как мы докажем в следующем семестре, вычислив группы $\pi_7 S^4$ и $\pi_{15} S^8$, эпиморфизмы $H: \pi_7 S^4 \rightarrow \mathbb{Z}$ и $H: \pi_{15} S^8 \rightarrow \mathbb{Z}$ изоморфизмами не являются.

Рассмотрим в заключение вопрос о возможных сообщениях инварианта H_0 на случай, когда $r > 3n - 3$.

Для любого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$, где пока r и n произвольны, мы положим

$$Q\alpha = (\iota' + \iota'') \circ \alpha - \iota' \circ \alpha - \iota'' \circ \alpha.$$

Это — элемент группы $\pi_r (S^n \vee S^n)$, принадлежащий образу мономорфизма $d: \pi_{r+1} (S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \rightarrow \pi_r (S^n \vee S^n)$ и, значит, единственным образом представляющийся в виде $dQ'\alpha$, где $Q'\alpha \in \pi_{r+1} (S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$. По определению инвариант $H_0\alpha$ связан с элементом $Q\alpha$ формулой

$$(22) \quad \rho_* H_0 \alpha = Q\alpha,$$

где $\rho_*: \pi_r S^{2n+1} \rightarrow \pi_r (S^n \vee S^n)$ — гомоморфизм из диаграммы (2). При $r \leq 3n - 3$ эта формула корректно определяет элемент $H_0\alpha$, поскольку для этих значений r гомоморфизм ρ_* является мономорфизмом на прямое слагаемое $\text{Im } d$ группы $\pi_r (S^n \vee S^n)$. Не будет ли гомоморфизм ρ_* мономорфизмом и для больших r ?

Мы начнем с одного общего замечания, касающегося надстроечного гомоморфизма $E: \pi_r X \rightarrow \pi_{r+1} S^*X$. Так как для любого пунктированного пространства X конус C^*X стягиваем, то при каждом $r \geq 0$ связывающий гомоморфизм $d: \pi_{r+1} (C^*X, X) \rightarrow \pi_r X$ является изоморфизмом. Поскольку кослой C^*X/X пары (C^*X, X) естественным образом отождествляется с надстройкой S^*X , отсюда следует, что для любого $r \geq 0$ определен гомоморфизм

$$\chi_* \circ d^{-1}: \pi_r X \rightarrow \pi_{r+1} S^*X, \quad .$$

где $\chi_*: \pi_{r+1}(C^*X, X) \rightarrow \pi_{r+1}S^*X$ — гомоморфизм, индуцированный отображением факторизации $\chi: (CX, X) \rightarrow (S^*X, x_0)$. Оказывается, что гомоморфизм $\chi_* \circ \partial^{-1}$ совпадает с надстроечным гомоморфизмом E :

$$(23) \quad E = \chi_* \circ \partial^{-1},$$

т. е. что диаграмма

$$(24) \quad \begin{array}{ccc} \pi_r X & \xrightarrow{E} & \pi_{r+1} S^*X \\ & \searrow \partial & \nearrow \chi_* \\ & \pi_{r+1}(C^*X, X) \end{array}$$

коммутативна. Действительно, для любого пунктированного отображения $f: S^r \rightarrow X$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (C^*S^r, S^r) & \xrightarrow{C^*f} & (C^*X, X) \\ \chi_* \downarrow & & \downarrow \chi \\ (S^{r+1}, s_0) & \xrightarrow{S^*f} & (S^*X, x_0) \end{array}$$

а в силу отождествления относительной гомотопической группы $\pi_{r+1}(S^*X, x_0)$ с абсолютной гомотопической группой $\pi_{r+1}S^*X$ отображение $S^*f \circ \chi$ задает тот же элемент $E[f]$ группы $\pi_{r+1}S^*X$, что и отображение S^*f . Поэтому

$$E[f] = [S^*f \circ \chi] = [\chi \circ C^*f] = \chi_*[C^*f] = (\chi_* \circ \partial^{-1})[f],$$

ибо $\partial[C^*f] = [f]$. $\square$

При $X = S^n$ отображение χ является не чем иным, как характеристическим отображением для клетки $e^{n+1} = S^{n+1} \setminus s_0$.

Мы воспользуемся диаграммой (24) при $X = S^{2n-1}$, обозначив в этом случае отображение χ через χ' . Объединив эту диаграмму с диаграммой (2) и добавив гомоморфизм $\varphi_*: \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \rightarrow \pi_{r+1}S^{2n}$, индуцированный отображением факторизации $\varphi: (S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \rightarrow (S^{2n}, s_0)$ (связанным с характеристическими отображениями $\chi': E^{2n} \rightarrow S^{2n}$ и $\chi: E^{2n} \rightarrow S^n \times S^n$ формулой $\chi' = \varphi \circ \chi$), мы получим коммутативную диаграмму

$$(25) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{r+1}(E^{2n}, S^{2n-1}) & \xrightarrow{\chi_*} & \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) & & \\ & \searrow \chi'_* & \nwarrow \varphi_* & & \\ & & \pi_{r+1}S^{2n} & & \\ \partial \downarrow & \nearrow E & & \downarrow \partial & \\ \pi_r S^{2n-1} & \xrightarrow{\beta_*} & \pi_r(S^n \vee S^n) & & \end{array}$$

правый вертикальный гомоморфизм ∂ которой является мономорфизмом, а левый — изоморфизмом.

Предположим теперь, что отображение $E: \pi_r S^{2n-1} \rightarrow \pi_{r+1} S^{2n}$ является мономорфизмом (в этом случае мы будем называть размерность r *регулярной* по отношению к n). Тогда мономорфизмом будет и отображение χ_* , а потому и отображение χ_* . Следовательно, мономорфизмом будет и отображение ρ_* , а значит, формула (22) будет корректно определять элемент $H_0 \alpha$ при условии, что этот элемент существует, т. е. что $Q\alpha \in \text{Im } \rho_*$.

Обозначив подгруппу группы $\pi_r S^n$, состоящую из таких элементов $\alpha \in \pi_r S^n$, что $Q\alpha \in \text{Im } \rho_*$, символом $\pi_r^H S^n$, мы, таким образом, можем утверждать, что для любой регулярной по отношению к n размерности r формула (22) определяет некоторый гомоморфизм

$$(26) \quad H_0: \pi_r^H S^n \rightarrow \pi_r S^{2n-1}.$$

Гомоморфизм (26) мы будем называть *обобщенным гомоморфизмом Хопфа — Уайтхеда*. Для него, конечно, также имеет место формула (3) (а потому и формула (4)). Кроме того, поскольку формула (21) была нами доказана для любых r и n , теорема 1 остается в силе и для обобщенного гомоморфизма H_0 (конечно, если размерность $r = p + q + 1$ регулярна по отношению к n).

Ясно, что для любого примитивного элемента $\beta \in \pi_m S^r$ имеет место формула $Q(\alpha \circ \beta) = Q\alpha \circ \beta$. Поэтому, если элемент $H_0 \alpha$ определен и если размерность t регулярна по отношению к n , то элемент $H_0(\alpha \circ \beta)$ также определен и

$$(27) \quad H_0(\alpha \circ \beta) = H_0 \alpha \circ \beta.$$

Подчеркнем, что в этой формуле элемент $\beta \in \pi_m S^r$ предполагается примитивным.

Так как в силу теоремы Фрейденталья каждая размерность $r \leq 4n - 4 = 2(2n - 1) - 2$ регулярна по отношению к n , то, в частности, обобщенный гомоморфизм Хопфа — Уайтхеда H_0 определен при $r \leq 4n - 4$.

Таким образом, гомоморфизм H_0 нам удалось обобщить на случай $r \leq 4n - 4$ с сохранением всех свойств. Однако обобщенный гомоморфизм определен, вообще говоря, лишь на некоторой подгруппе группы $\pi_r S^n$.

Чтобы распространить гомоморфизм H_0 на всю группу $\pi_r S^n$, мы заметим, что в силу коммутативности диаграммы (25) из равенства (22) следует равенство

$$(28) \quad EH_0 \alpha = \varphi_* Q' \alpha,$$

которое для любого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$ корректно определяет элемент $H_0 \alpha \in \pi_r S^{2n-1}$ каждый раз, когда отображение E является мономорфизмом (и, значит, в частности, при $r \leq 4n-4$). Однако из формулы (28) следует лишь, что $\rho_* H_0 \alpha = Q\alpha + \partial\beta$, где β — такой элемент группы $\pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$, что $\varphi_* \beta = 0$, и потому для элемента $H_0 \alpha$, определенного формулой (28), основная формула (3) места иметь, вообще говоря, не будет (для этого необходимо и достаточно, чтобы $\beta = 0$, т. е. чтобы $\alpha \in \pi_r^H S^n$).

Таким образом, гомоморфизм H_0 может быть определен при $r \leq 4n-4$ (или, более общо, для любой регулярной по отношению к n размерности r) на всей группе $\pi_r S^n$, но свойство (3) будет иметь место только при $\alpha \in \pi_r^H S^n$.

Аналогично, хотя формула (27) имеет теперь смысл для любых $\alpha \in \pi_r S^n$ и $\beta \in \pi_m S^r$ (конечно, в предположении, что размерности r и m регулярны по отношению к n), но, вообще говоря, она будет верна только при $\alpha \in \pi_r^H S^n$.

ДОПОЛНЕНИЕ

Теорема Хилтона. — Инварианты Хопфа — Хилтона. — Инвариант h_0 . — Инварианты h_1 и h_2 . — Формула для $(k\beta) \circ \alpha$.

Значение умножения Уайтхеда — и наше внимание к нему — определяется тем, что любая гомотопическая операция сводится к одноместным операциям (т. е. к операциям вида $\theta_\alpha: \beta \mapsto \beta \circ \alpha$) и к итерированным произведениям Уайтхеда.

Действительно, согласно теореме 1 из Дополнения к лекции 5 группа $\pi_n(S^{m_1} \vee \dots \vee S^{m_s})$ является прямой суммой групп $\pi_n S^N X_a$, где X_a — смеш-произведение нескольких экземпляров каждой из сфер $S^{m_1-1}, \dots, S^{m_s-1}$, т. е. сфера S^{N_a} , где $N_a = (m_1-1)t_1 + \dots + (m_s-1)t_s$ и $t_1 = t_1(m_a), \dots, t_s = t_s(m_a)$. При этом соответствующая инъекция $\pi_n S^N X_a = \pi_n S^{N_a} \rightarrow \pi_n(S^{m_1} \vee \dots \vee S^{m_s})$ будет индуцироваться отвечающим базисному моному $\mathfrak{w}_a$ итерированным произведением Уайтхеда v_a канонических вложений $\text{in}_k: S^{m_k} \rightarrow S^{m_1} \vee \dots \vee S^{m_s}$, $k=1, \dots, s$. Другими словами, если

$$\iota^{(1)} \in \pi_{m_1}(S^{m_1} \vee \dots \vee S^{m_s}), \dots, \iota^{(s)} \in \pi_{m_s}(S^{m_1} \vee \dots \vee S^{m_s})$$

— гомотопические классы отображений $in_1, \dots, in_s$, а $\pi_a(\iota^{(1)}, \dots, \iota^{(s)})$ — элемент группы

$$\pi_{N_a+1}(S^{m_1} \vee \dots \vee S^{m_s}), \quad N_a = (m_1 - 1)t_1 + \dots + (m_s - 1)t_s,$$

получающийся подстановкой в моном π_a вместо формальных переменных $x_1, \dots, x_s$ элементов $\iota^{(1)}, \dots, \iota^{(s)}$ и выполнением всех умножений Уайтхеда в последовательности, предписанной расстановкой скобок в π_a , то каждый элемент группы $\pi_n(S^{m_1} \vee \dots \vee S^{m_s})$ единственным образом представляется в виде суммы

$$(1) \quad \sum_{a=1}^{\infty} \pi_a(\iota^{(1)}, \dots, \iota^{(s)}) \circ \beta_a, \quad \text{где } \beta_a \in \pi_n S^{N_a+1},$$

и, значит, любая гомотопическая операция типа $(m_1, \dots, m_s; n)$ — в виде суммы операций вида $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \mapsto \pi_a(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \circ \beta_a$. Конечно, в сумме (1) отличны от нуля лишь члены, для которых $N_a + 1 \leq n$.

Как уже говорилось, эта теорема принадлежит Хилтону.

При $s = 2$ мы, несколько меняя обозначения, получаем, что каждый элемент группы $\pi_r(S^m \vee S^n)$, $m, n, r \geq 2$, единственным образом представляется в виде суммы

$$(2) \quad \sum \pi_a(\iota', \iota'') \circ \beta_a,$$

где суммирование распространено на все a , для которых число

$$N_a = (m-1)t_1 + (n-1)t_2$$

не превосходит $r-1$, и где $\beta_a \in \pi_r S^{N_a+1}$, а ι' и ι'' — гомотопические классы естественных вложений $S^m \rightarrow S^m \vee S^n$ и $S^n \rightarrow S^m \vee S^n$. Конечно, здесь интересны лишь слагаемые с $a \geq 3$, поскольку при $a=1$ и $a=2$ получаются тривиальные вложения групп $\pi_r S^m$ и $\pi_r S^n$ в группу $\pi_r(S^m \vee S^n)$.

В частности, при $m=n$ мы получаем, что для каждого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$ имеет место разложение вида (ср. с формулой (9) лекции 4)

$$(3) \quad (\iota' + \iota'') \circ \alpha = \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha + \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{j+s}(\iota', \iota'') \circ h_j(\alpha),$$

где $h_j(\alpha) \in \pi_r S^{n'}$, $n_j = (n-1)t + (m_{j+s}) + 1$ для любого $j \geq 0$. (Поскольку $n_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, сумма в формуле (3) для любого r конечна.) Элементы $h_j(\alpha)$ называются инвариантами Хопфа — Хилтона элемента $\alpha \in \pi_r S^n$, и со-

ответственно этому отображения

$$h_j: \pi_r S^n \rightarrow \pi_r S^{n_j}, \quad \alpha \mapsto h_j(\alpha), \quad j \geq 0,$$

называются *отображениями Хопфа—Хилтона*.

Так как (см. Дополнение к лекции 5)

$$\pi_3 = x_2 x_1, \quad \pi_4 = (x_2 x_1) x_1, \quad \pi_5 = (x_2 x_1) x_2, \dots,$$

то в раскрытом виде формула (3) имеет вид

$$\begin{aligned} (\iota' + \iota'') \circ \alpha = & \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha + [\iota'', \iota'] \circ h_0(\alpha) + \\ & + [[\iota'', \iota'], \iota'] \circ h_1(\alpha) + [[\iota'', \iota'], \iota''] \circ h_2(\alpha) + \dots, \end{aligned}$$

где

$$h_0: \pi_r S^n \rightarrow \pi_r S^{2n-1}, \quad h_1, h_2: \pi_r S^n \rightarrow \pi_r S^{3n-2}, \dots$$

Из дистрибутивности справа композиционного умножения непосредственно следует, что *все отображения Хопфа—Хилтона являются гомоморфизмами*, а из свойства универсальности элементов ι' и ι'' , — что для любых элементов $\beta_1, \beta_2 \in \pi_r X$ имеет место формула

$$(4) \quad (\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha + \sum_{j=0}^{\infty} m_{j+2}(\beta_1, \beta_2) \circ h_j(\alpha),$$

т. е. формула

$$\begin{aligned} (\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = & \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha + [\beta_2, \beta_1] \circ h_0(\alpha) + \\ & + [[\beta_2, \beta_1], \beta_1] \circ h_1(\alpha) + [[\beta_2, \beta_1], \beta_2] \circ h_2(\alpha) + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, можно сказать, что инварианты Хопфа—Хилтона измеряют отклонение операции $\theta_\alpha: \beta \mapsto \beta \circ \alpha$ от аддитивности.

Поэтому, если элемент α примитивен — например, если $\alpha = E\beta$, — то $h_j(\alpha) = 0$ для любого $j \geq 0$.

В силу теоремы Фрейден탈ля отсюда, в частности, следует, что если $r \leq 2n-2$, то $h_j(\alpha) = 0$ для любого $j \geq 0$ (что, впрочем, немедленно вытекает также из того, что $n_j \geq 2n-1$).

Так как $n_j \geq 3n-2$ при $j \geq 1$, то $h_j(\alpha) = 0$, если $r \leq 3n-3$ и $j \geq 1$. Следовательно, при $r \leq 3n-3$ для любого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$ имеет место формула

$$(5) \quad (\iota' + \iota'') \circ \alpha = \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha + [\iota'', \iota'] \circ h_0(\alpha).$$

Это означает, что с точностью до знака гомоморфизм h_0 при $r \leq 3n-3$ совпадает с гомоморфизмом Хопфа—Уайт-

хеда H_0 , так что этот гомоморфизм можно рассматривать как сужение гомоморфизма H_0 на любые значения r . Подчеркнем, что при этом сужении, как и при обобщении гомоморфизма H_0 , описанном в конце лекции 5, свойство гомоморфизма H_0 , выражаемое формулой (3) лекции 5, вообще говоря, не сохраняется (для этого необходимо и достаточно, чтобы $h_j(\alpha) = 0$ при любом $j \geq 1$). Вместе с тем формула (5) лекции 5 для гомоморфизма h_0 сохраняется (вместе с доказательством). Точно так же сохраняется и равенство $2h_0(\alpha) = 0$ при n нечетном, если только выполнено неравенство $r \leq 4n - 3$, обеспечивающее справедливость тождества $-i_{2n-1} \circ h_0(\alpha) = -h_0(\alpha)$.

Рассмотрим более внимательно инварианты $h_1(\alpha)$ и $h_2(\alpha)$.

По определению отображения h_1 и h_2 являются гомоморфизмами $\pi_r S^n \rightarrow \pi_r S^{3n-2}$ и, следовательно, могут быть отличны от нуля только при $r \geq 3n - 2$.

В разложении (3) гомоморфизмам h_1 и h_2 отвечают члены $[[i'', i'], i'] \circ h_1(\alpha)$ и $[[i'', i'], i''] \circ h_2(\alpha)$. Поэтому, переставив i' и i'' , мы уже известным нам образом получим соотношения

$$(6) \quad h_1(\alpha) = (-1)^n i_{3n-2} \circ h_2(\alpha), \quad h_2(\alpha) = (-1)^n i_{3n-2} \circ h_1(\alpha)$$

С другой стороны, в группе $\pi_r(S^n \vee S^n \vee S^n)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} (i' + i'' + i''') \circ \alpha &= ((i' + i'') + i''') \circ \alpha = \\ &= (i' + i'') \circ \alpha + i''' \circ \alpha + [i''', i' + i''] \circ h_0(\alpha) + \\ &+ [[i''', i' + i''], i' + i''] \circ h_1(\alpha) + [[i''', i' + i''], i'''] \circ h_2(\alpha) + \dots = (i' + i'') \circ \alpha + i''' \circ \alpha + ([i''', i'] + \\ &+ [i''', i'']) \circ h_0(\alpha) + ([i''', i'], i') + [i''', i''] \circ h_1(\alpha) + ([i''', i'], i''') + \\ &+ [i''', i''], i''') \circ h_2(\alpha) + \dots = i' \circ \alpha + i'' \circ \alpha + [i'', i'] \circ h_0(\alpha) + \\ &+ [[i'', i'], i'] \circ h_1(\alpha) + [[i'', i'], i''] \circ h_2(\alpha) + \dots + i''' \circ \alpha + \\ &+ [i''', i'] \circ h_0(\alpha) + [i''', i''] \circ h_0(\alpha) + \dots \\ &\dots + [[i''', i'], i'] \circ h_1(\alpha) + [[i''', i'], i''] \circ h_1(\alpha) + \\ &+ [[i''', i''], i'] \circ h_1(\alpha) + [[i''', i''], i''] \circ h_1(\alpha) + \dots \\ &+ [[i''', i'], i'''] \circ h_2(\alpha) + [[i''', i''], i'''] \circ h_2(\alpha) + \dots, \end{aligned}$$

а также равенство

$$\begin{aligned}
 (\iota' + \iota'' + \iota''') \circ \alpha &= (\iota' + (\iota'' + \iota''')) \circ \alpha = \\
 &= \iota' \circ \alpha + (\iota'' + \iota''') \circ \alpha + [\iota'' + \iota''', \iota'] \circ h_0(\alpha) + \\
 &+ [[\iota'' + \iota''', \iota'], \iota'] \circ h_1(\alpha) + [[\iota'' + \iota''', \iota'], \\
 &\iota'' + \iota'''] \circ h_2(\alpha) + \dots = \iota' \circ \alpha + \iota'' \circ \alpha + \iota''' \circ \alpha + \\
 &+ [\iota''', \iota''] \circ h_0(\alpha) + [[\iota''', \iota''], \iota'] \circ h_1(\alpha) + \\
 &+ [[\iota''', \iota''], \iota''] \circ h_2(\alpha) + \dots + [\iota'', \iota'] \circ h_0(\alpha) + \\
 &+ [\iota''', \iota'] \circ h_0(\alpha) + [[\iota'', \iota'], \iota'] \circ h_1(\alpha) + \\
 &+ [[\iota''', \iota'], \iota'] \circ h_1(\alpha) + \dots + [[\iota'', \iota'], \iota''] \circ h_2(\alpha) + \\
 &+ [[\iota'', \iota'], \iota'''] \circ h_2(\alpha) + [[\iota''', \iota'], \iota''] \circ h_2(\alpha) + \\
 &+ [[\iota''', \iota'], \iota'''] \circ h_2(\alpha) + \dots,
 \end{aligned}$$

где многоточия обозначают члены, содержащие произведения Уайтхеда кратности большей трех.

В первом из этих равенств подчеркнутое тройное произведение Уайтхеда отвечает не базисному моному и потому должно быть представлено в виде

$$[[\iota''', \iota''], \iota'] = -[[\iota'', \iota'], \iota'''] + (-1)^{n-1}[[\iota''', \iota'], \iota''],$$

и, значит, член $[[\iota''', \iota''], \iota'] \circ h_1(\alpha)$ должен быть разложен по формуле

$$\begin{aligned}
 [[\iota''', \iota''], \iota'] \circ h_1(\alpha) &= -[[\iota'', \iota'], \iota'''] \circ h_1(\alpha) + \\
 &+ (-1)^{n-1}[[\iota''', \iota'], \iota''] \circ h_1(\alpha) + \dots
 \end{aligned}$$

После этого, сравнив соответствующие члены, мы получим (в силу единственности разложения (3)) соотношения

$$\begin{aligned}
 -\iota_{3n-2} \circ h_1(\alpha) &= h_2(\alpha), \\
 (-1)^{n-1} \iota_{3n-3} \circ h_1(\alpha) + h_1(\alpha) &= h_2(\alpha).
 \end{aligned}$$

Сравнив эти соотношения с соотношениями (6), мы немедленно получим, что для любого элемента $\alpha \in \pi_r S^n$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}
 h_2(\alpha) &= h_1(\alpha) = 0, \quad \text{если } n \text{ четно,} \\
 h_2(\alpha) &= 2h_1(\alpha) = -\iota_{3n-2} \circ h_1(\alpha), \quad \text{если } n \text{ нечетно.}
 \end{aligned}$$

В частности, если элемент $h_1(\alpha)$ примитивен (что заведомо выполнено при $r < 2(3n-2)-1 = 6n-5$) и потому $-\iota_{2n-2} \circ h_1(\alpha) = -h_1(\alpha)$, отсюда следует, что $3h_1(\alpha) = 0$ и $h_2(\alpha) = -h_1(\alpha)$.

Так как $\pi_{3n-2}S^{3n-2} = \mathbb{Z}$, то при $r = 3n - 2$ равенство $3h_1(\alpha) = 0$ возможно только при $h_1(\alpha) = 0$. Поэтому, если $r = 3n - 2$, то $h_1(\alpha) = h_2(\alpha) = 0$ при любом $n \geq 2$.

В лекции 8 мы покажем, что $\pi_{n+1}S^n = \pi_{n+2}S^n = \mathbb{Z}/2$. Поэтому последний вывод остается в силе и при $r = 3n - 1$ и $r = 3n$.

Аналогичные результаты можно получить и для следующих инвариантов Хопфа—Хилтона $h_j(\alpha)$. Однако с ростом j вычисления стремительно усложняются. В общем виде их, по-видимому, до сих пор еще никто не произвел.

Зная формулу для $(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha$, мы можем без особого труда написать общую формулу для $(\beta_1 + \dots + \beta_s) \circ \alpha$. Однако эта формула настолько сложна, что на практике ею пользоваться нельзя. Конечно, не исключено, что ее можно—за счет сокращения подобных членов—существенно упростить и сделать работоспособной, но для этого надо подробнее, чем это пока сделано, разбраться с соотношениями между инвариантами Хопфа—Хилтона. Тем не менее оказывается, что в частном случае одинаковых слагаемых $\beta_1, \dots, \beta_s$ такого рода сокращение сделать удается.

Лемма 1. Для каждого элемента $\beta \in \pi_n X$ и любого $s \geq 3$ все s -кратные произведения Уайтхеда элемента β самого на себя равны нулю. Если n нечетно, то это верно и при $s = 2$.

Кроме того, $3[\beta, [\beta, \beta]] = 0$, а если n нечетно, то $2[\beta, \beta] = 0$.

Доказательство. Равенство $3[\beta, [\beta, \beta]] = 0$ непосредственно следует из тождества Якоби (см. замечание 6 в лекции 4), а равенство $2[\beta, \beta] = 0$ при n нечетном—из тождества косокоммутативности. Поэтому при n нечетном $[\beta, [\beta, \beta]] = 0$. Этим доказаны все утверждения леммы, кроме первого (заметим, что $[\beta, [\beta, \beta]]$ является единственным двукратным произведением Уайтхеда элемента β на себя).

Что же касается первого (единственно нетривиального) утверждения леммы, то при n нечетном оно также доказывается без особого труда. Действительно, при $s \geq 3$ любое s -кратное произведение Уайтхеда элемента β на себя содержит, очевидно, множитель $\beta_3 = [\beta, [\beta, \beta]]$, по доказанному равный нулю, когда n нечетно, либо множитель $\gamma_4 = [[\beta, \beta], [\beta, \beta]]$, который, согласно тождеству Якоби, примененному к элементам β, β и $\beta_2 = [\beta, \beta]$, равен

$\pm[\beta, \beta_3] \pm[\beta, \beta_3] = 0$. Поэтому это произведение Уайтхеда равно нулю.

Случай n четного более кропотлив. По уже доказанному $3\beta_3 = 0$ и, значит, $3\beta_4 = 0$, где $\beta_4 = [\beta, \beta_3]$. С другой стороны, как мы уже видели, $\gamma_4 = \pm\beta_4 \pm\beta_4$, причем, как показывает более внимательное вычисление знаков, на самом деле $\gamma_4 = -2\beta_4$. Поэтому $3\gamma_4 = -6\beta_4 = 0$. Но так как $[\beta, \beta] \in \pi_{2n-1}S^n$ и $2n-1$ нечетно, то по уже доказанному $2\gamma_4 = 2[[\beta, \beta], [\beta, \beta]] = 0$. Следовательно, $\gamma_4 = 0$, и потому $2\beta_4 = 0$. Значит, $\beta_4 = 0$. Этим первое утверждение леммы доказано при $s=3$.

При $s=4$, кроме произведений, содержащих β_4 и γ_4 и потому равных нулю, имеется еще произведение $[\beta_2, \beta_3]$, которое в силу тождества Якоби, примененного к элементам β_3 , β и β , равно $\pm\beta_5 \pm\beta_5$, где $\beta_5 = [\beta, \beta_4] = 0$, и значит, также равно нулю. Поэтому первое утверждение леммы справедливо и при $s=4$.

При $s=5$ полученные результаты не дают непосредственного ответа только для произведения $[\beta_3, \beta_3]$. Но согласно тождеству Якоби, примененному к элементам β_1 , β_2 и β_3 , это произведение равно $\pm[\beta, [\beta_2, \beta_3]] \pm[\beta_2, \beta_4]$ и потому также равно нулю.

Наконец, при $s \geq 6$ достаточно заметить, что любое s -кратное произведение элемента β на себя получается умножением некоторого s_1 -кратного произведения на некоторое s_2 -кратное произведение, где либо $s_1 \geq 3$, либо $s_2 \geq 3$. $\square$

Из этой леммы и формулы (1) следует, что для любых элементов $\alpha \in \pi_r S^n$ и $\beta \in \pi_n X$ справедлива формула

$$(7) \quad (2\beta) \circ \alpha = 2(\beta \circ \alpha) + [\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) + \\ + [[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha) + [[\beta, \beta], \beta] \circ h_2(\alpha).$$

В частности, применив эту формулу к произвольному элементу $\gamma \in \pi_r S^{2n-1}$ и к элементу $[\beta, \beta] \in \pi_{2n-1} X$, мы получим (снова воспользовавшись леммой 1), что

$$(2[\beta, \beta]) \circ \gamma = 2([\beta, \beta] \circ \gamma).$$

Очевидная индукция показывает теперь, что

$$(8) \quad (k[\beta, \beta]) \circ \gamma = k([\beta, \beta] \circ \gamma)$$

для любого целого $k \geq 1$. Более того, так как по тем же соображениям

$$0 = (k[\beta, \beta] - k[\beta, \beta]) \circ \gamma = (k[\beta, \beta]) \circ \gamma + (-k[\beta, \beta]) \circ \gamma,$$

то формула (8) справедлива для любого целого $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, в выражении $k[\beta, \beta] \circ \gamma$ мы, не боясь двусмысленности, можем скобок не писать.

Аналогично доказывается, что

$$(k[\beta, [\beta, \beta]]) \circ \delta = k([\beta, [\beta, \beta]]) \circ \delta$$

для любого элемента $\delta \in \pi, S^{3n-2}$. Поэтому скобок здесь также можно не писать.

Имея это в виду, мы можем теперь вычислить $(k\beta) \circ \alpha$ для любого k .

При $k=3$ мы получаем в силу леммы 1

$$\begin{aligned} (3\beta) \circ \alpha &= (2\beta + \beta) \circ \alpha = (2\beta) \circ \alpha + \beta \circ \alpha + [\beta, 2\beta] \circ h_0(\alpha) + \\ &+ [[\beta, 2\beta], 2\beta] \circ h_1(\alpha) + [[\beta, 2\beta], \beta] \circ h_2(\alpha) = \\ &= 2(\beta \circ \alpha) + [\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) + [[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha) + \\ &+ [[\beta, \beta], \beta] \circ h_2(\alpha) + \beta \circ \alpha + 2[\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) + \\ &+ 4[[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha) + 2[[\beta, \beta], \beta] \circ h_2(\alpha) = \\ &= 3(\beta \circ \alpha) + 3[\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) + 5[[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha) + \\ &+ 3[[\beta, \beta], \beta] \circ h_2(\alpha) = \\ &= 3(\beta \circ \alpha) + 3[\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) - [[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha). \end{aligned}$$

Если вместо разложения $3\beta = 2\beta + \beta$ мы воспользуемся разложением $3\beta = \beta + 2\beta$, то аналогичная выкладка даст нам формулу

$$(3\beta) \circ \alpha = 3(\beta \circ \alpha) + 3[\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) - [[\beta, \beta], \beta] \circ h_2(\alpha),$$

откуда следует, что

$$[[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha) = [[\beta, \beta], \beta] \circ h_2(\alpha).$$

Поэтому формулу (7) мы можем теперь записать в следующем виде:

$$(2\beta) \circ \alpha = 2(\beta \circ \alpha) + [\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) + 2[[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha).$$

Покажем теперь, что для любого целого k

$$(9) \quad (k\beta) \circ \alpha = k(\beta \circ \alpha) + \binom{k}{2} [\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) - \binom{k+1}{3} [[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha),$$

где биномиальные коэффициенты $\binom{a}{b}$ при $0 \leq a < b$ считаются равными нулю, а для отрицательных a определены формулой

$$\binom{a}{b} = (-1)^b \binom{-a+b-1}{b},$$

так что, в частности,

$$\binom{-k}{2} = \binom{k+1}{2}, \quad \binom{-k+1}{3} = -\binom{k+1}{3}, \quad k > 0.$$

После всего сказанного доказательство этой формулы для положительных k проводится очевидной индукцией: если (9) верно, то

$$\begin{aligned} ((k+1)\beta) \circ \alpha &= (k\beta + \beta) \circ \alpha = \\ &= (k\beta) \circ \alpha + \beta \circ \alpha + k[\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) + \\ &+ k^2[[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha) + k[[\beta, \beta], \beta] \circ h_2(\alpha) = \\ &= (k+1)(\beta \circ \alpha) + \left(\binom{k}{2} + k\right)[\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) + \\ &+ \left(-\binom{k+1}{3} + k^2 + k\right)[[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha), \end{aligned}$$

что все и доказывает, поскольку

$$\left(\binom{k}{2} + k\right) = \binom{k+1}{2} \quad \text{и} \quad -\binom{k+1}{3} + k^2 + k \equiv -\binom{k+2}{3} \pmod{3}.$$

Для отрицательных k формула (9) имеет вид

$$\begin{aligned} [-k\beta] \circ \alpha &= -k(\beta \circ \alpha) + \binom{k+1}{2}[\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) + \\ &+ \binom{k+1}{3}[[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha) \end{aligned}$$

и доказывается аналогичной индукцией. Начальный шаг индукции, т. е. формула

$$(-\beta) \circ \alpha = -(\beta \circ \alpha) + [\beta, \beta] \circ h_0(\alpha),$$

доказывается при этом отдельной выкладкой:

$$\begin{aligned} 0 &= (\beta - \beta) \circ \alpha = \beta \circ \alpha + (-\beta) \circ \alpha + [-\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) + \\ &+ [[-\beta, \beta], -\beta] \circ h_1(\alpha) + [[-\beta, \beta], \beta] \circ h_2(\alpha) = \\ &= \beta \circ \alpha + (-\beta) \circ \alpha - [\beta, \beta] \circ h_0(\alpha). \quad \square \end{aligned}$$

В частности, мы видим, что если n нечетно или n четно и $k = 9l$, $9l \pm 1$, то

$$(k\beta) \circ \alpha = k(\beta \circ \alpha) + \binom{k}{2}[\beta, \beta] \circ h_0(\alpha),$$

а если n нечетно и $k = 4l$, $4l + 1$, то

$$(k\beta) \circ \alpha = k(\beta \circ \alpha).$$

Кроме того,

$$(-\beta) \circ \alpha = -(\beta \circ \alpha) + [\beta, \beta] \circ h_0(\alpha)$$

и, в частности,

$$(10) \quad (-\iota_n) \circ \alpha = -\alpha + [\iota_n, \iota_n] \circ h_0(\alpha)$$

для любого элемента $\alpha \in \pi, S^2$.

Теорема вырезания для гомотопических групп.— Редукция теоремы вырезания к теореме Блейккера—Масси.— Доказательство теоремы Блейккера—Масси.— Окончательное упрощение надстрочной последовательности.

Вернемся теперь к общей теории клеточных пространств (с целью, в частности, доказать предложение 4 лекции 6, у нас пока ещё не доказанное).

Определение 1. Пунктированное отображение

$$f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

называется n -связным, если индуцированный им гомоморфизм $f_*: \pi_r(X, A) \rightarrow \pi_r(Y, B)$ гомотопических групп является при $r < n$ изоморфизмом, а при $r = n$ эпиморфизмом. Отображение, n -связное для всех n , называется ∞ -связным.

При $A = \{x_0\}$ и $B = \{y_0\}$ n -связные отображения — это в точности n -эквивалентности в смысле определения 5 лекции 3. Ясно, что отображение $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является n -эквивалентностью, когда пара $(\text{Cyl } f, X)$ n -связна. Аналогичное утверждение имеет место и для n -связных отображений пар; нужно только ввести для них понятие цилиндра. Мы оставим это читателю.

Основной целью этой лекции является доказательство следующей теоремы вырезания для гомотопических групп:

Теорема 1. Для любой n -связной ($n \geq 1$) клеточной пары (X, A) с m -связным ($m \geq 0$) подпространством A отображение факторизации $\varphi: (X, A) \rightarrow (X/A, pt)$ является $(m + n + 1)$ -связным отображением.

Чтобы продемонстрировать силу этой теоремы, мы применим ее к паре (C^*X, X) , где X — произвольное $(n-1)$ -связное клеточное пространство. Эта пара, как легко видеть, n -связна (без ограничения общности мы можем считать пространство X клеточно $(n-1)$ -связным, а тогда пара (C^*X, X) будет даже клеточно n -связна), и потому, согласно теореме 1, отображение $\varphi: (C^*X, X) \rightarrow (S^*X, x_0)$ $2n$ -связно. Значит, отображение $E = \varphi_* \circ \partial^{-1}$ (см. формулу (23) лекции 6) является при $r < 2n-1$ изоморфизмом, а при $r = 2n-1$ эпиморфизмом.

Это утверждение составляет содержание теоремы Фрейдентала (теорема 2 лекции 2), обобщенной на произвольные клеточные пространства (см. замечание 2 лекции 2). Таким образом, теорема Фрейдентала является тривиальным следствием теоремы 1.

Замечание 1. Теорема Фрейдентала справедлива и без предположения клеточности. Проще всего это увидеть, доказав, что для любой слабой гомотопической эквивалентности $f: Y \rightarrow X$ отображение $Sf: SY \rightarrow SX$ также является слабой гомотопической эквивалентностью (и, значит, надстройка $S\hat{X}$ над клеточным эквивалентом $\hat{X}$ пространства X является клеточным эквивалентом надстройки SX над пространством X). Мы оставим это читателю.

Условие m -связности подпространства A равносильно, очевидно, условию $(m+1)$ -связности отображения $A \rightarrow pt$. Поэтому теорема 1 является частным случаем следующей более общей теоремы:

Теорема 2. *Относительный гомеоморфизм*

$$f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

n -связных ($n \geq 1$) относительно клеточных пространств, для которого отображение

$$f|_A: A \rightarrow B$$

m -связно, является $(n+m)$ -связным отображением.

Замечание 2. Непосредственным следствием теоремы 2 является также предложение 4 лекции 6, поскольку для относительного гомеоморфизма $\chi: (E^{2n}, S^{2n-1}) \rightarrow (S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ пары (E^{2n}, S^{2n-1}) и $(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ $(2n-1)$ -связны, а его ограничение $\rho: S^{2n-1} \rightarrow S^n \vee S^n$ на S^{2n-1} является, очевидно, $(n-1)$ -связным отображением.

Мы выведем теорему 2 из следующего предложения:

Предложение 1. Если (X, C) , (A, C) и (B, C) — такие относительные клеточные пространства, что

$$X = A \cup B, C = A \cap B,$$

и если пара (A, C) n -связна ($n \geq 1$), а $nc\,pt\,(B, C)$ m -связна ($m \geq 1$), то вложение

$$j: (A, C) \rightarrow (X, B)$$

$(n+m)$ -связно.

Доказательство теоремы 2. Пусть $C = \text{Cyl}^*(f|_A)$ и $Z = \text{Cyl}^*f$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B) \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ (X \cup C, C) & \xrightarrow{k} & (Z, C) \end{array}$$

все стрелки которой, кроме верхней, являются вложениями. Так как f является относительным гомеоморфизмом, то отображение факторизации

$$(X \times I, \tilde{A}) \xrightarrow{j} (Z, X \cup C), \quad \tilde{A} = (X \times 0) \cup (A \times I)$$

также будет относительным гомеоморфизмом. Поскольку, согласно предложению 1 лекции 1, пространство $X \times I$ ретрагируется на подпространство $\tilde{A}$, отсюда следует, что пространство Z ретрагируется, в свою очередь, на подпространство $X \cup C$. Поэтому вложение $k: (X \cup C, C) \rightarrow (Z, C)$ индуцирует во всех размерностях изоморфизм гомотопических групп, т. е. является ∞ -связным отображением. Аналогично, так как пространства Z и $B = Y \cap C$ ретрагируются соответственно на Y и C , то (см. предложение 3 из Дополнения к лекции 1.8) вложение $j: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ также ∞ -связно. С другой стороны, так как пара $(X, X \cap C) = (X, A)$ по условию n -связна, а пара $(C, X \cap C) = (C, A)$ m -связна, то, согласно предложению 2, вложение $i: (X, A) \rightarrow (X \cup C, C)$ является $(n+m)$ -связным отображением. Следовательно, $(n+m)$ -связным будет и отображение f . $\square$

Таким образом, нам остается лишь доказать предложение 1. Ввиду точности гомотопической последовательности триады $(X; A, B)$ (см. Дополнение к лекции 1.8) это предложение равносильно утверждению об $(n+m)$ -связности этой триады, т. е. тому, что

$$(1) \quad \pi_r(X; A, B) = 0 \quad \text{при} \quad r \leq n+m.$$

В этой форме мы его и будем доказывать. (Эта форма предложения 1 известна как теорема Блейкера — Масси; впрочем, это имя часто присваивают и самому предложению 1).

Мы докажем равенство $\pi_r(X; A, B) = 0$ последовательно для все более общих ситуаций.

Случай 1. Пространства A и B являются элементарными клеточными расширениями пространства C размерностей $n+1$ и $m+1$ соответственно.

Рассмотрим произвольную клетку $e^{n+1} \in A \setminus C$. Так как эта клетка открыта в X , то для каждого отображения $f: E^r \rightarrow X$ множество $G = f^{-1}(e^{n+1})$ открыто в E^r . На этом множестве определено отображение $\hat{f} := \chi^{-1} \circ f: G \rightarrow E^{n+1}$, где $\chi: E^{n+1} \rightarrow X$ — характеристическое для клетки e^{n+1} отображение. Пусть:

а) существует открытое в E^r множество G_1 , замыкание $K_1 = \overline{G_1}$ которого содержится в G и на котором отображение $\hat{f}|_{G_1}$ полиномиально;

б) образ $\hat{f}(G_1)$ множества G_1 при отображении $\hat{f}$ покрывает подшар $E_{1/2}^{n+1}$ радиуса $1/2$ шара E^{n+1} ;

в) прообраз $\hat{f}^{-1}(E_{1/2}^{n+1})$ при отображении $\hat{f}$ концентрического подшара $E_{1/4}^{n+1}$ радиуса $1/4$ содержится в G_1 .

Тогда, согласно теореме Сарда, в шаре $E_{1/4}^{n+1}$ будет существовать точка x_0 , являющаяся регулярным значением отображения $\hat{f}|_{G_1}$, причем, согласно общей теореме о прообразах регулярных значений (см. утверждение 2 в лекции I.7), прообраз этой точки при отображении $\hat{f}|_{G_1}$, совпадающий в силу свойства в) с ее прообразом $\hat{f}^{-1}(x_0)$ при отображении $\hat{f}$, будет $(r-n-1)$ -мерным гладким подмногообразием шара E^r (с краем, лежащим в S^{r-1}).

Кроме того, для любого гладкого подмногообразия $P \subset E^r$ пересечение $\hat{f}(P) \cap E_{1/4}^{n+1}$ будет образом $\hat{f}(P \cap G_1)$ гладкого подмногообразия $P \cap G_1$ при гладком отображении $\hat{f}|_{G_1}$, и потому при $\dim P \leq n$ не будет покрывать шар $E_{1/4}^{n+1}$.

Полагая $x_0 = \chi(e_{1/4}^{n+1})$, $e_{1/4}^{n+1} = \chi(E_{1/4}^{n+1})$ и замечая, что $f^{-1}(x_0) = \hat{f}^{-1}(x_0)$ и $f(P) \cap e_{1/4}^{n+1} = \chi(\hat{f}(P) \cap E_{1/4}^{n+1})$, мы получаем, следовательно, что:

1°. Существует точка $x_0 \in e_{1/4}^{n+1}$, прообраз $f^{-1}(x_0)$ которой при отображении f является гладким $(r-n-1)$ -мерным подмногообразием шара E^r .

2°. Для любого гладкого подмногообразия $P \subset E^r$ размерности $\leq n$ существуют точки $x \in e_{1/4}^{n+1}$, не принадлежащие множеству $f(P)$.

Вспомним теперь, что, согласно замечанию 1 к Вспомогательной теореме из лекции 3 (примененному к отно-

сительной клетке $(X, X \setminus e^{n+1})$, каждое отображение $f: E^r \rightarrow X$ гомотопно относительно $f^{-1}(X \setminus e^{n+1}) := E^r \setminus G$ отображению, обладающему свойствами а), б), в), а значит, и свойствами 1° и 2°. При этом, поскольку для различных клеток $e^{n+1} \in A \setminus C$ соответствующие множества G не пересекаются, мы можем такого рода гомотопии произвести по отношению ко всем клеткам $e^{n+1} \in A \setminus C$ одновременно. Этим доказано, что *любое отображение $f: E^{r+1} \rightarrow X$ гомотопно относительно $f^{-1}(X \setminus (A \setminus C))$ отображению, обладающему по отношению к каждой клетке $e^{n+1} \in A \setminus C$ свойствами 1° и 2°.* (Впрочем, нам понадобится только свойство 2°.)

По симметрии аналогичное утверждение имеет место и для элементарного клеточного расширения (B, C) только, конечно, свойства 1° и 2° должны быть соответствующим образом переформулированы (причем нам понадобится только свойство 1°). Более того, по тем же соображениям, что и выше, мы можем соответствующие гомотопии осуществить одновременно (получив гомотопию относительно $f^{-1}C$). При этом, если исходное отображение $f: E^r \rightarrow X$ было отображением пунктированных триад $(E^r; E_{(+)}^{r-1}, E_{(-)}^{r-1}) \rightarrow (X; A, B)$, то эта гомотопия будет, очевидно, гомотопией категории $\text{TOP}_{[3]}$, и потому ее конечное отображение будет определять тот же элемент группы $\pi_r(X; A, B)$. Этим доказано, что *произвольный элемент группы $\pi_r(X; A, B)$ может быть задан таким отображением*

$$(2) \quad f: (E^r; E_{(+)}^{r-1}, E_{(-)}^{r-1}) \rightarrow (X; A, B),$$

что:

(i) *в каждой клетке $e_\beta^{n+1} \in B \setminus C$ существует точка $x_\beta \in e_\beta^{n+1}$, прообраз $f^{-1}(x_\beta)$ которой при отображении f является $(r-m-1)$ -мерным гладким подмногообразием шара E^r ;*

(ii) *для любого гладкого подмногообразия $P \subset E^r$ размерности $\leq n$ (или, более общо, для любого подмножества $P \subset E^r$, являющегося объединением конечного числа гладких подмногообразий размерности $\leq n$) в каждой клетке $e_\alpha^{n+1} \in A \setminus C$ существует такая точка $x_\alpha \in e_\alpha^{n+1}$, что $x_\alpha \notin f(P)$.*

Впрочем, нам удобнее задавать элементы группы $\pi_r(X; A, B)$ не отображениями вида (2), а отображениями вида

$$(I^{r-1} \times I, \dot{I}^{r-1} \times I, I^{r-1} \times 1, \{\bar{0}\}) \rightarrow (X; A, B, x_0),$$

где $\{\bar{0}\} = (I^{r-1} \times 0) \cup (0 \times I)$ (см. Дополнение к лекции I.8). Ясно, что для таких отображений доказанное утверждение полностью сохраняется (конечно, с заменой шара E^r на куб $I^r = I^{r-1} \times I$).

Пусть pr — проекция $I^{r-1} \times I \rightarrow I^{r-1}$. Из свойства (i) немедленно следует, что для любой клетки $e_\beta^{n+1} \in B \setminus C$ множество $P_\beta = \text{pr}^{-1}(\text{pr}(f^{-1}(x_\beta)))$ является гладким $(r-m)$ -мерным подмногообразием куба $I^r = I^{r-1} \times I$. При этом, поскольку компактное множество $f(I^r)$ задевает лишь конечное число клеток из B , только конечное число подмногообразий P_β не пусто. Поэтому, согласно свойству (ii), если $r-m \leq n$, то в каждой клетке $e_\alpha^{n+1} \in A \setminus C$ существует такая точка $x_\alpha \in e_\alpha^{n+1}$, что $f^{-1}(x_\alpha) \cap P_\beta = \emptyset$ для всех β .

Пусть K — множество всех точек x_α , а L — множество всех точек x_β . По определению топологии в X эти множества замкнуты. Поэтому замкнуты (и, значит, компактны) подмножества $f^{-1}K$ и $f^{-1}L$ куба I^r и их проекции $\text{pr} f^{-1}K$ и $\text{pr} f^{-1}L$ в кубе I^{r-1} . Кроме того, по построению последние множества не пересекаются и лежат внутри куба I^{r-1} . Следовательно, существует такая непрерывная функция $\rho: I^{r-1} \rightarrow I$, что $\rho = 1$ на $\text{pr} f^{-1}L$ и $\rho = 0$ на $\text{pr} f^{-1}K$ и на I^{r-1} . Пользуясь этой функцией, определим гомотопию $h_\tau: I^r \rightarrow I^r$ формулой

$$h_\tau(t, t) = (t, t(1 - \tau\rho(t))), \quad t \in I^{r-1}, \quad t \in I.$$

Эта гомотопия обладает следующими свойствами:

- а) $h_0 = \text{id}$ и $\text{pr} \circ h_\tau = \text{pr}$ для любого $\tau \in I$;
- б) если $t \in \text{pr} f^{-1}L$, то $h_1(t, t) = (t, 0)$ для любого $t \in I$;
- в) если $t \in (\text{pr} f^{-1}K) \cup I^{r-1}$, то $h_\tau(t, t) = (t, t)$ для любых $t, \tau \in I$.

Свойство в) означает, что гомотопия h_τ неподвижна на $\text{pr}^{-1}((\text{pr} f^{-1}K) \cup I^{r-1})$ и, значит, в частности, на $\text{pr}^{-1}I^{r-1} = I^{r-1} \times I$. Поскольку множество $f^{-1}L$ лежит внутри куба I^r (и, в частности, не пересекается с его гранью $t=0$) из свойства б) следует, что $h_1(I^r) \subset I^r \setminus f^{-1}L$. По аналогичным соображениям из свойства в) следует, что $h_\tau(I^{r-1} \times 1) \subset I^r \setminus f^{-1}K$ для любого $\tau \in I$.

Рассмотрим теперь гомотопию $f \circ h_\tau: E^r \rightarrow X$. Эта гомотопия будет гомотопией из $(I^{r-1} \times I; I^{r-1} \times I, I^{r-1} \times 1, \{\bar{0}\})$ не в $(X; A, B, x_0)$, а лишь в $(X; A, X \setminus K, x_0)$ (так что, строго говоря, мы должны эту гомотопию записывать в виде $j' \circ f \circ h_\tau$, где $j': (X; A, B, x_0) \rightarrow (X; A, X \setminus K, x_0)$ —

вложение). Этим доказано, что в группе $\pi_r(X; A, X \setminus K)$ имеет место равенство $[j' \circ f] = [g']$, где $g' = j' \circ f \circ h_1$.

Но ясно, что $g'(I^r) \subset f(I^r \setminus f^{-1}L) \subset X \setminus L$, т. е. $g' = j'' \circ g$, где g — отображение

$$(I^{r-1} \times I; I^{r-1} \times I, I^{r-1} \times 1, \{\bar{0}\}) \rightarrow (X \setminus L; A, X \setminus (K \cup L), x_0),$$

а

$$j'': (X \setminus L; A, X \setminus (K \cup L), x_0) \rightarrow (X; A, X \setminus K, x_0)$$

— вложение. Следовательно, в группе $\pi_r(X; A, X \setminus K)$ имеет место равенство $[j' \circ f] = [j'' \circ g]$, т. е. равенство

$$j'_*[f] = j''*[g],$$

где

$$j'_*: \pi_r(X; A, B) \rightarrow \pi_r(X; A, X \setminus K)$$

и

$$j''*: \pi_r(X \setminus L; A, X \setminus (K \cup L)) \rightarrow \pi_r(X; A, X \setminus K)$$

— гомоморфизмы, индуцированные отображениями j' и j'' соответственно.

Вспомним теперь, что, согласно лемме 1 лекции 2, каждое подпространство $X \setminus e_{\beta}^{n+1}$ является деформационным ретрактом пространства $X \setminus \{x_{\beta}\}$. Поэтому пространство $X \setminus (B \setminus C) = A$ — деформационный ретракт пространства $X \setminus L$, и, более того, пара $(A, A \setminus K)$ — деформационный ретракт пары $(X \setminus L, X \setminus (K \cup L))$. Следовательно,

$$\pi_r(X \setminus L; A, X \setminus (K \cup L)) = \pi_r(A; A, A \setminus K) = \pi_r(A, A) = 0.$$

В частности, $[g] = 0$, и потому $j''*[f] = 0$.

Но по аналогичным соображениям пара $(X \setminus K, A \setminus K)$ деформационно ретрагируется на пару (B, C) и, значит, гомоморфизм j'_* является изоморфизмом. Поэтому $[f] = 0$ в группе $\pi_r(X; A, B)$, т. е. $\pi_r(X; A, B) = 0$.

Тем самым предложение 1 в случае 1 полностью доказано. $\square$

Случай 2. Пара (A, C) является клеточно n -связным относительным клеточным пространством, а пара (B, C) — по-прежнему элементарным клеточным расширением размерности $m+1$.

Пусть A^p — остовы пространства (A, C) , и пусть $X^p = A^p \cup B$. Таким образом, $A^0 = \dots = A^n = C$ и для любого $p \geq n$ пространства A^{p+1} и X^p являются элементарными клеточными расширениями пространства A^p соответственно размерностей $p+1$ и $m+1$. Поэтому, согласно уже дока-

занному случаю 1, триада $(X^{p+1}; A^{p+1}, X^p)$ для каждого $p \geq n$ является $(p+m)$ -связной, а значит, и $(n+m)$ -связной триадой. Рассмотрим 4-аду $(X^{p+1}; A^{p+1}, B, X^p)$. Поскольку $X^p \supset B$, гомотопическая последовательность этой 4-ады (см. Дополнение к лекции I.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{r+1}(X^{p+1}; A^{p+1}, X^p) \rightarrow \pi_r(X^p; A^p, B) \rightarrow \\ \rightarrow \pi_r(X^{p+1}; A^{p+1}, B) \rightarrow \pi_r(X^{p+1}, A^{p+1}, X^p) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

В силу точности этой последовательности из $(n+m)$ -связности триады $(X^{p+1}; A^{p+1}, X^p)$ следует, что для любого $r \leq n+m$ группа $\pi_r(X^{p+1}; A^{p+1}, B)$ является эпиморфным (при $r < n+m$ даже изоморфным) образом группы $\pi_r(X^p; A^p, B)$. Поэтому для любого $p \geq n$ группа $\pi_r(X^p; A^p, B)$ будет эпиморфным образом группы

$$\pi_r(X^n; A^n, B) = \pi_r(B; C, B) = \pi_r(B; B, C) = \pi_r(B, B) = 0$$

и, следовательно, будет равна нулю. Поскольку в силу компактности шара E^r для каждого элемента группы $\pi_r(X; A, B)$ существует такое $p \geq n$, что этот элемент принадлежит образу группы $\pi_r(X^p; A^p, B)$ при гомоморфизме $\pi_r(X^p; A^p, B) \rightarrow \pi_r(X; A, B)$, индуцированном вложением $(X^p; A^p, B) \rightarrow (X; A, B)$, этим предложение 1 доказано и в случае 2. $\square$

Случай 3. Пара (A, C) является клеточно n -связным, а пара (B, C) — клеточно m -связным относительным клеточным пространством.

Пусть B^q — остовы пространства (B, C) , и пусть $X^q = A \cup B^q$. Таким образом, $B^0 = \dots = B^m = C$ и для любого $q \geq m$ пространство B^{q+1} является элементарным клеточным расширением размерности $q+1$ пространства B^q , а пара (X^q, B^q) — клеточно n -связным относительным клеточным пространством. Поэтому, согласно уже доказанному случаю 2, триада $(X^{q+1}; X^q, B^{q+1})$ для любого $q \geq m$ будет $(n+q)$ -связной, а значит, и $(n+m)$ -связной триадой. Следовательно, $(n+m)$ -связной триадой будет и триада $(X^{q+1}; B^{q+1}, X^q)$. Рассмотрим 4-аду $(X^{q+1}; B^{q+1}, A, X^q)$. Поскольку $X^q \supset A$, гомотопическая последовательность этой 4-ады имеет вид

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{r+1}(X^{q+1}; B^{q+1}, X^q) \rightarrow \pi_r(X^q; B^q, A) \rightarrow \\ \rightarrow \pi_r(X^{q+1}; B^{q+1}, A) \rightarrow \pi_r(X^{q+1}; B^{q+1}, X^q) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

В силу точности этой последовательности из $(n+m)$ -связности триады $(X^{q+1}; B^{q+1}, X^q)$ следует, что для любого

$r \leq n + m$ группа $\pi_r(X^{q+1}; B^{q+1}, A) \approx \pi_r(X^{q+1}; A, B^{q+1})$ является эпиморфным образом группы $\pi_r(X^q; B^q, A) \approx \pi_r(X^q; A, B^q)$, откуда, так же как в предыдущем случае, непосредственно следует, что $\pi_r(X; A, B) = 0$.

Случай 4 (общий). Пара (A, C) является n -связным, а пара (B, C) m -связным относительно клеточными пространствами.

Согласно предложению 3 лекции 2 существует такое клеточно m -связное относительно клеточное пространство $(B', C') \supset (B, C)$, что $B' \cong B$ и $C' \cong C$. Пусть $A' = A \cup C'$. Ясно, что $A' \cong A$, и потому пара (A', C') также n -связна. Пусть (A'', C'') — такое клеточно n -связное относительно клеточное пространство, что $A'' \cong A'$ и $C'' \cong C'$. Положим $B'' = B' \cup C''$ и $X'' = A'' \cup B' = A'' \cup B''$. Ясно, что $B'' \cong B'$ и $X'' \cong A' \cup B' \cong A' \cup B \cong A \cup B = X$, и потому согласно предложению 3 из Дополнения к лекции I.8

$$\pi_r(X; A, B) \approx \pi_r(X''; A'', B'').$$

Для завершения доказательства остается заметить, что, в силу уже доказанного, $\pi_r(X''; A'', B'') = 0$ при $r \leq m + n$.

Тем самым предложение 1 полностью доказано. Вместе с ним доказаны теоремы 1 и 2 (а также предложение 4 лекции 6). $\square$

Теоремы 1 и 2 позволяют доказать не только теорему Фрейдентала, но много других важных теорем. Например, с их помощью можно существенно упростить надстроечную последовательность произвольного счетного $(n-1)$ -связного ($n \geq 2$) клеточного пространства X (которое в силу результатов лекции 2 мы, не ограничивая общности, можем считать клеточно $(n-1)$ -связным).

С этой целью мы рассмотрим отображение факторизации

$$\varphi: (J_2 X, X) \rightarrow (X \wedge X, \text{pt}).$$

Автоматическая проверка показывает, что, сопоставив каждому приведенному слову $x_1, \dots, x_m \in JX$ слово над $X \wedge X$ длины $m(m-1)/2$, состоящее из всех элементов вида $\varphi(x_i x_j)$, $1 \leq i < j \leq m$, и получающееся выписыванием сначала всех элементов $\varphi(x_1 x_j)$, $j = 2, \dots, m$, затем элементов $\varphi(x_2 x_j)$, $j = 3, \dots, m$, и т. д., мы корректно определим некоторое отображение

$$\bar{\varphi}: (JX, X)_! \rightarrow (J_! (X \wedge X), \text{pt}),$$

совпадающее на J_2X с отображением φ , т. е. замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (J_2X, X) & \xrightarrow{\quad} & (JX, X) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \bar{\varphi} \\ (X \wedge X, \text{pt}) & \rightarrow & (J(X \wedge X), \text{pt}) \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой являются вложениями.

Но так как пара (JX, J_2X) клеточно $(3n-1)$ -связна (напомним, что пространство X мы предполагаем клеточно $(n-1)$ -связным) и, следовательно, $(3n-1)$ -связна, то (в силу точности гомотопической последовательности тройки (JX, J_2X, X)) вложение $(J_2X, X) \rightarrow (JX, X)$ $(3n-1)$ -связно. Аналогично, так как пространство $X \wedge X$ клеточно $(2n-1)$ -связно и, значит, пара $(J(X \wedge X), X \wedge X)$ клеточно $(4n-1)$ -связна, то вложение $X \wedge X \rightarrow J(X \wedge X)$ $(4n-1)$ -связно. Наконец, так как пара (J_2X, X) клеточно $(2n-1)$ -связна, то, согласно предложению 2, отображение факторизации φ $(3n-1)$ -связно. Следовательно, отображение

$$\bar{\varphi}: (JX, X) \rightarrow (J(X \wedge X), \text{pt})$$

$(3n-1)$ -связно.

Поэтому в надстроечной последовательности пространства X (см. последовательность (8) лекции I.10) мы можем при $r < 3n-1$ заменить группы $\pi_r(JX, X)$ группами

$$\pi_r(J(X \wedge X)) \approx \pi_{r+1}(S^*(X \wedge X)) \approx \pi_{r+1}(X * X).$$

Этим доказано следующее предложение.

Предложение 2. Для любого счетного $(n-1)$ -связного $(n \geq 2)$ клеточного пространства X имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} (3) \quad \pi_{3n-2}X &\xrightarrow{E} \pi_{3n-1}S^*X \xrightarrow{H} \pi_{3n-1}(X * X) \xrightarrow{P} \pi_{3n-3}X \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \pi_rX &\xrightarrow{E} \pi_{r+1}S^*X \xrightarrow{H} \pi_{r+1}(X * X) \xrightarrow{P} \pi_{r-1}X \rightarrow \dots \quad \square \end{aligned}$$

Поскольку в силу теоремы Фрейденшталя (примененной к $(2n-1)$ -связному пространству $X \wedge X$) группа $\pi_{r+1}(X * X) = \pi_{r+1}(S^*(X \wedge X))$ при $r < 4n-2$ изоморфна группе $\pi_r(X \wedge X)$, равной нулю при $r < 2n$, эта последовательность кончается членами

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{2n}X &\xrightarrow{E} \pi_{2n+1}S^*X \xrightarrow{H} \pi_{2n+1}(X * X) \xrightarrow{P} \\ &\xrightarrow{P} \pi_{2n-1}X \xrightarrow{E} \pi_{2n}S^*X \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(точнее, за этими членами следуют еще отдельные отрезки вида $0 \rightarrow \pi_r X \xrightarrow{E} \pi_{r+1} S^* X \rightarrow 0$, но они не дают нам ничего нового).

Гомоморфизм H из последовательности (3) является композицией гомоморфизма $H: \pi_{r+1} S^* X \rightarrow \pi_r (JX, X)$ из последовательности (8) лекции I.10 и гомоморфизма

$$(4) \quad \pi_r (JX, X) \xrightarrow{\bar{\varphi}^*} \pi_r J(X \wedge X) \xrightarrow{\sim} \pi_{r+1} S^*(X \wedge X) \xrightarrow{\sim} \pi_{r+1} (X * X),$$

и, значит, подобно гомоморфизму E гомоморфизм H определен для всех $r \geq 0$. Тем не менее удлинить с сохранением точности последовательность (3) в область $r > 3n-2$ нельзя, поскольку при $r > 3n-2$ гомоморфизм (4), вообще говоря, изоморфизмом не является.

В следующей лекции мы воспользуемся последовательностью (3) при $X = S^n$ для вычисления групп $\pi_{n+1} S^n$ и $\pi_{n+2} S^n$.

Вычисление гомоморфизма P . — «Трудная часть» теоремы Фрейденшталя. — Вычисление групп $\pi_1 S$ и $\pi_2 S$. — Преобразование формулы, определяющей инвариант Хопфа — Уайтхеда. — Явное вычисление отображений классов $Q'\alpha$ и $AQ'\alpha$. — Доказательство теоремы Дж. Уайтхеда.

При $X = S^n$ точная последовательность (3) предыдущей лекции имеет вид

$$(1) \quad \begin{aligned} \pi_{3n-2} S^n &\xrightarrow{E} \pi_{3n-1} S^{n+1} \xrightarrow{H} \pi_{3n-1} S^{2n+1} \xrightarrow{P} \\ &\rightarrow \pi_{3n-3} S^n \rightarrow \dots \rightarrow \pi_r S^n \xrightarrow{E} \pi_{r+1} S^{n+1} \xrightarrow{H} \pi_{r+1} S^{2n+1} \xrightarrow{P} \\ &\rightarrow \pi_{r-1} S^n \rightarrow \dots \rightarrow \pi_{2n-1} S^n \xrightarrow{E} \pi_{2n} S^{n+1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Гомоморфизм $H: \pi_{r+1} S^{n+1} \rightarrow \pi_{r+1} S^{2n+1}$ из этой последовательности (напомним — имеющий смысл для любого r) называется гомоморфизмом Хопфа — Джеймса. Можно показать, что при $r < 3n-1$ он совпадает с гомоморфизмом Хопфа — Уайтхеда $H_0: \pi_{r+1} S^{n+1} \rightarrow \pi_{r+1} S^{2n+1}$ (по крайней мере с точностью до знака), но я не знаю прямого и достаточно простого доказательства этого факта. Пользоваться им мы не будем.

Поскольку $r+1 \leq 3n-1 < 2(2n+1)-1$, каждый элемент группы $\pi_{r+1} S^{2n+1}$ единственным образом представляется в виде $E^2 \alpha$, где $\alpha \in \pi_{r-1} S^{2n-1}$. Имея это в виду, мы рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_r(E^{2n}, S^{2n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{r-1} S^{2n-1} \\ & \nwarrow \phi_n & \downarrow x_n & & \downarrow p_n \\ \pi_r S^{2n} & \xleftarrow{\varphi_n} & \pi_r(J_2 S^n, S^n) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{r-1} S^n \\ \downarrow i_n & & \downarrow j_n & & \downarrow = \\ \pi_r J S^{2n} & \xleftarrow{\bar{q}_n} & \pi_r(J S^n, S^n) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{r-1} S^n \\ \downarrow i_n & & \downarrow \partial & & \downarrow = \\ \pi_{r+1} S^{2n+1} & \xrightarrow{P} & \pi_{r-1} S^n & \xleftarrow{=} & \end{array}$$

в которой:

∂ — связывающие гомоморфизмы соответствующих гомотопических последовательностей;

χ — характеристическое отображение для клетки $e^n \times e^n \in J_2 S^n$;

ρ — соответствующее приклеивающее отображение;

φ и $\bar{\varphi}$ — отображения, введенные в конце предыдущей лекции;

ψ — отображение факторизации $E^{2n} \rightarrow E^{2n}/S^{2n-1} = S^{2n}$;

i и j — вложения,

i_* — композиция гомоморфизма гомотопических групп, индуцированного меридианным отображением $i: JS^{2n} \rightarrow \Omega S^* S^{2n} = \Omega S^{2n+1}$, и изоморфизма $\pi_r \Omega S^{2n+1} \approx \pi_{r+1} S^{2n+1}$.

Эта диаграмма, очевидно, коммутативна (верхний левый треугольник — ввиду тождества $\psi = \varphi \circ \chi$, оба правых квадрата — ввиду естественности гомоморфизма ∂ , средний левый квадрат — по определению отображения φ , нижний левый квадрат — по определению гомоморфизма P и нижний правый треугольник ввиду одинаковости его катетов). Кроме того, как мы знаем, $\varphi_* \circ \partial^{-1} = E$ и $i_* \circ i_* = E$, так что при движении по верхней и левой сторонам этой диаграммы из правого верхнего угла в левый нижний угол мы получаем гомоморфизм E^2 , и потому при движении из правого верхнего угла в правый нижний угол — гомоморфизм $P \circ E^2$. В силу коммутативности диаграммы этим доказано, что $P \circ E^2 = \rho_*$.

С другой стороны, по определению умножения Уайтхеда, гомотопический класс $[\rho]$ отображения ρ является не чем иным, как элементом $[\iota_n, \iota_n]$ группы $\pi_{2n-1} S^n$, и, значит, для любого элемента α группы $\pi_{r-1} S^{2n-1}$ имеет место равенство

$$\rho_* \alpha = [\rho] \circ \alpha = [\iota_n, \iota_n] \circ \alpha.$$

Этим доказано, что

$$(2) \quad (P \circ E^2) \alpha = [\iota_n, \iota_n] \circ \alpha$$

для любого элемента $\alpha \in \pi_{r-1} S^{2n-1}$.

Ввиду того, что E^2 является изоморфизмом, это полностью описывает гомоморфизм P .

При $\alpha = E^n \beta$, где $\beta \in \pi_{r-n-1} S^{n-1}$, мы в силу формул (27) и (11) лекции 5 получаем, в частности, что

$$\begin{aligned} (P \circ E^{n+2}) \beta &= [\iota_n, \iota_n] \circ E^n \beta = [\iota_n, \iota_n] \circ E (\iota_{n-1} \wedge \beta) = \\ &= [\iota_n, \iota_n] \circ (\iota_{n-1} * \beta) = [\iota_n \circ E \iota_{n-1}, \iota_n \circ E \beta] = [\iota_n, E \beta]. \end{aligned}$$

Так как $r < 3n - 1$, и, значит, согласно теореме Фрейденталя отображение $E^{n+2}: \pi_{r-n-1} S^{n-1} \rightarrow \pi_{r+1} S^{2n+1}$ явля-

ется эпиморфизмом. Отсюда следует, что *каждый элемент подгруппы* $\text{Im } P = \text{Ker } E$ *группы* $\pi_{r-1}S^n$, $r < 3n-1$, *имеет вид* $[\iota_n, \gamma]$, *где* $\gamma \in \pi_{r-n}S^n$.

Поскольку, согласно следствию 1 предложения 2 лекции 6, все элементы вида $[\alpha, \beta]$, где $\alpha \in \pi_p S^n$, $\beta \in \pi_q S^n$, $p+q = r+1$, лежат в ядре $\text{Ker } E$ гомоморфизма

$$E: \pi_r S^n \rightarrow \pi_{r+n} S^{n+1},$$

этим доказано, что *при* $r < 3n-2$ *ядро надстрочного гомоморфизма* $E: \pi_r S^n \rightarrow \pi_{r+n} S^{n+1}$ *совпадает с множеством всех произведений Уайтхеда* $[\alpha, \beta]$, *где* $\alpha \in \pi_p S^n$, $\beta \in \pi_q S^n$, $p+q = r+1$.

В частности, мы видим, что *ядро эпиморфизма*

$$E: \pi_{2n-1} S^n \rightarrow \pi_{2n} S^{n+1}$$

порождается элементом $[\iota_n, \iota_n]$, $\iota_n \in \pi_n S^n$.

По определению (см. определение 1 лекции 2) группа $\pi_{2n} S^{n+1}$ является $(n-1)$ -й стационарной гомотопической группой сфер $\pi_{n-1} S$, а группа $\pi_{2n-1} S^n$ — соответствующей метастационарной группой. С другой стороны, из лекции 6 мы знаем, что элемент $[\iota_n, \iota_n]$ при n четном имеет бесконечный порядок, а при n нечетном — порядок 2, причем для исключительных значений $n=1, 3, 7$ (и только для них!) элемент $[\iota_n, \iota_n]$ равен нулю. Таким образом, мы получаем (переходя от $n-1$ к n), следующую окончательную теорему:

Теорема 1. *При* $n=2m-1$ *нечетном* n -*я метастационарная группа* $\pi_{2n+1} S^{2n+1} = \pi_{4m-1} S^{2m}$ *содержит бесконечную циклическую подгруппу (с образующей* $[\iota_{2n}, \iota_{2n}]$ *), факторгруппа по которой изоморфна стационарной группе* $\pi_n S = \pi_{4m} S^{2m+1}$.

При $n=2m$ *четном и отличном от* 2, 4, 8 *группа* $\pi_n S = \pi_{4m+2} S^{2m+2}$ *изоморфна факторгруппе группы* $\pi_{2n+1} S^{n+1} = \pi_{4m+1} S^{2m+1}$ *по подгруппе второго порядка с образующей* $[\iota_{2m+1}, \iota_{2m+1}]$.

Наконец, *при* $n=2, 4, 8$ *имеют место изоморфизмы*

$$\pi_2 S \approx \pi_6 S^3, \quad \pi_4 S \approx \pi_8 S^5, \quad \pi_8 S \approx \pi_{17} S^9. \quad \square$$

По традиции эта теорема (дополненная утверждением, что $\text{Im } E = \text{Ker } H$ в группе $\pi_{2n+1} S^{n+1}$) называется «трудной частью» теоремы Фрейденталья.

Подчеркнем, что в формулировке теоремы 1 при $n=2m$ и $n \neq 2, 4, 8$ мы воспользовались теоремой Адамса, у нас пока не доказанной. Без этой теоремы можно лишь

утверждать, что ядро эпиморфизма $\pi_{4m+1} S^{2m+1} \rightarrow \pi_{4m+2} S^{2m+2}$ либо тривиально, либо является группой второго порядка. Однако это замечание релевантно лишь при $n \geq 6$, тогда как мы пока не знаем групп $\pi_n S$ даже при $n=1$.

Впрочем, группа $\pi_1 S = \pi_4 S^3$ вычисляется теперь без всякого труда:

Следствие 1. *Группа $\pi_1 S$ является группой второго порядка:*

$$\pi_1 S = \mathbb{Z}/2.$$

Доказательство. Как было установлено в конце лекции 6, в группе $\pi_3 S^3$, являющейся бесконечной циклической группой с образующей η_3 , имеет место равенство $[\iota_2, \iota_2] = \pm 2\eta_3$. Следовательно, факторгруппа $\pi_4 S^3 = \pi_1 S$ группы $\pi_3 S^3$ по подгруппе, порожденной элементом $[\iota_2, \iota_2]$, является группой второго порядка. $\square$

Тем самым все группы $\pi_{n+1} S^n$, $n \geq 1$, нами теперь вычислены:

$$\pi_2 S^1 = 0, \quad \pi_3 S^3 = \mathbb{Z}, \quad \pi_{n+1} S^n = \mathbb{Z}/2 \quad \text{при } n > 2.$$

При этом образующей группы $\pi_3 S^3$ является элемент $\eta_3 = [h]$, а образующей (единственным нетривиальным элементом) группы $\pi_{n+1} S^n$, $n > 2$, — элемент $\eta_n = E^{n-2}\eta_2$.

Элемент η_n , рассматриваемый в силу отождествления $\pi_{n+1} S^n = \pi_1 S$, $n > 1$, как элемент группы $\pi_1 S$, мы будем обозначать символом η .

Поскольку, как мы знаем (см. лекцию I.5), отображение $\alpha \mapsto h_*(\alpha) = \eta_2 \circ \alpha$ группы $\pi_n S^3$ в группу $\pi_n S^3$ является при $n \geq 3$ изоморфизмом, из следствия 1 вытекает, что группа $\pi_4 S^3$ является группой второго порядка

$$\pi_4 S^3 = \mathbb{Z}/2$$

с образующей $\eta_2 \circ \eta_3 = \eta_2 \circ E\eta_2$.

Поэтому для вычисления группы $\pi_2 S = \pi_5 S^3$ (и, значит, всех групп $\pi_{n+2} S^n$, $n \geq 1$) нам осталось лишь исследовать переход от группы $\pi_4 S^3$ к группе $\pi_5 S^3$.

Рассмотрим с этой целью отрезок

$$\dots \rightarrow \pi_4 S^3 \xrightarrow{E} \pi_5 S^3 \xrightarrow{H} \pi_6 S^5 \xrightarrow{P} \pi_7 S^3 \rightarrow \dots$$

точной последовательности (1) для сферы S^3 .

Согласно формуле (2) гомоморфизм $P: \pi_5 S^5 \rightarrow \pi_3 S^3$ действует на образующей ι_5 группы $\pi_5 S^5$ по формуле

$$P\iota_5 = [\iota_2, \iota_2] \circ \iota_3 = [\iota_2, \iota_2] = \pm 2\eta_2 \neq 0$$

и потому является мономорфизмом. Значит — в силу точности, — гомоморфизм $E: \pi_4 S^2 \rightarrow \pi_5 S^3$ является эпиморфизмом, и потому для вычисления группы $\pi_5 S^3$ нам нужно лишь вычислить его ядро.

Предложение 1. Элемент $\eta_3 \circ \eta_4$ группы $\pi_5 S^3$ отличен от нуля:

$$\eta_3 \circ \eta_4 \neq 0.$$

Поскольку $E(\eta_3 \circ \eta_4) = E\eta_3 \circ E\eta_4 = \eta_3 \circ \eta_4$, отсюда вытекает, что $\text{Ker } E = 0$, т. е. что отображение $E: \pi_4 S^2 \rightarrow \pi_5 S^3$ является изоморфизмом.

Следствие 1. Группа $\pi_2 S$ является группой второго порядка:

$$\pi_2 S = \mathbb{Z}/2. \quad \square$$

Таким образом, при $n > 1$ все группы $\pi_{n+2} S^n$ являются группами второго порядка:

$$\pi_{n+2} S^n = \mathbb{Z}/2, \quad n > 1$$

(тогда как $\pi_3 S^1 = 0$). При этом образующей группы $\pi_{n+2} S^n$ является элемент

$$\eta_n \circ \eta_{n+1} = E^{n-2} \eta_2 \circ E^{n-1} \eta_2.$$

Для группы $\pi_2 S$ это означает, что ее образующей является элемент η^2 . Тем самым нами полностью определено как аддитивное, так и мультипликативное строение кольца $\pi_* S$ в размерностях ≤ 2 .

Правда, предложение 1 нами еще не доказано. Мы выведем его из следующей общей теоремы Дж. Уайтхеда:

Теорема 2. Если элемент $\alpha \in \pi_r^H S^n$, $r < 3n-1$, обладает тем свойством, что $E\alpha = 0$, то

$$H_0 \alpha \in 2\pi_r S^{2n-1}.$$

Здесь $2\pi_r S^{2n-1}$ — подгруппа группы $\pi_r S^{2n-1}$, состоящая из всех элементов вида 2β , $\beta \in \pi_r S^{2n-1}$, а $\pi_r^H S^n$ — подгруппа группы $\pi_r S^n$, состоящая из элементов $\alpha \in \pi_r S^n$, для которых определен инвариант $H_0 \alpha$ (см. лекцию 6).

Заметим, что в теореме 2 мы имеем дело (при $r=3n-3$, $3n-2$) с обобщенным инвариантом Хопфа—Уайтхеда.

Доказательство предложения 1. Так как элемент $\eta_3 = E\eta_2 \in \pi_4 S^3$ примитивен, то к элементу $\eta_2 \circ \eta_3 \in \pi_4 S^2$ применима формула (27) лекции 6, согласно которой инвариант $H_0(\eta_2 \circ \eta_3)$ определен и выражается формулой

$$H_0(\eta_2 \circ \eta_3) = H_0\eta_2 \circ \eta_3 = \eta_3.$$

Поэтому, если $\eta_3 \circ \eta_4 = 0$, т. е. $E(\eta_2 \circ \eta_3) = 0$, то, согласно теореме 2 (при $r=4$, $n=2$ условие $r < 3n-1$ выполнено, хотя и «на пределе»), будет иметь место включение $\eta_3 = H_0(\eta_2 \circ \eta_3) \in \pi_4 S^3$, что невозможно, ибо элемент η_3 является образующей группы $\pi_4 S^3 = \mathbb{Z}/2$. Следовательно, $\eta_3 \circ \eta_4 \neq 0$. $\square$

Для доказательства теоремы 2 нам предварительно нужно будет более внимательно рассмотреть определение инварианта $H_0\alpha$. При этом, в отличие от лекции 6, нам теперь будет удобнее в основной диаграмме (2) лекции 6 заменить пару (E^{2n}, S^{2n-1}) гомеоморфной парой $(I^{2n}, \dot{I}^{2n})$ и в соответствии с этим считать характеристическое отображение χ произведением

$$\chi_n \times \chi_n: (I^{2n}, \dot{I}^{2n}) \rightarrow (S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$$

стандартных характеристических отображений

$$\chi_n: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (S^n, s_0)$$

(см. формулу (4) лекции I.5). Кроме того, мы предпочтем теперь иметь дело не с элементом

$$Q\alpha = (i' + i'') \circ \alpha - i' \circ \alpha - i'' \circ \alpha \in \pi_r(S^n \vee S^n),$$

а с его прообразом

$$Q'\alpha \in \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$$

при мономорфизме

$$\partial: \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \rightarrow \pi_r(S^n \vee S^n).$$

Элемент $Q'\alpha$ связан с элементом $H_0\alpha \in \pi_r S^{2n-1}$ формулой

$$(3) \quad MH_0\alpha = Q'\alpha,$$

где M — гомоморфизм

$$\pi_r S^{2n-1} = \pi_r \dot{I}^{2n} \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_{r+1}(I^{2n}, \dot{I}^{2n}) \xrightarrow{(\chi_n \times \chi_n)_*} \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n).$$

(Напомним, что, согласно результатам лекции 6, гомоморфизм M является при $r \leq 4n-4$ мономорфизмом, и

потому соотношение (3) однозначно характеризует элемент $H_0\alpha$. Включение $\alpha \in \pi_r^H S^n$ равносильно включению $Q'\alpha \in \text{Im } M$.

Предусмотренное в конструкции гомоморфизма M отождествление границы I^{2n} куба I^{2n} со сферой S^{2n-1} проще всего построить, совместив центр куба I^{N+1} при $N = 2n - 1$ с центром O сферы S^N и спроектировав из этого центра границу куба на сферу S^N . Это означает, что точку $t \in I^{N+1}$ мы отождествляем с точкой $|2t - e|^{-1}(2t - e) \in S^N$, где $e = (1, 1, \dots, 1)$.

Если теперь:

f — произвольное отображение $(I^{r+1}, I^{r+1}) \rightarrow (I^{N+1}, I^{N+1})$,

f' — его ограничение $I^{r+1} \rightarrow I^{N+1}$,

$\text{id} \times f$ — отображение $(I^{r+2}, I^{r+2}) \rightarrow (I^{N+2}, I^{N+2})$, переводящее точку $(t, t) \in I \times I^{r+1} = I^{r+2}$ в точку $(t, f(t)) \in I \times I^{N+1} = I^{N+2}$,

$(\text{id} \times f)'$ — его ограничение $I^{r+2} \rightarrow I^{N+2}$,
то рассматриваемое как отображение

$$S^{r+1} \rightarrow S^{N+1}$$

отображение $(\text{id} \times f)'$ будет отображать южную полусферу сферы S^{r+1} в южную полусферу сферы S^{N+1} , северную полусферу сферы S^{r+1} в северную полусферу сферы S^{N+1} , а на экваторе S^r сферы S^{r+1} оно будет совпадать с отображением f' , рассматриваемым как отображение $S^r \rightarrow S^N$. Поскольку эти свойства однозначно с точностью до гомотопии характеризуют надстройку над отображением f' , мы получаем, следовательно, что отображение гомотопических классов, индуцированное соответствием $f' \mapsto (\text{id} \times f)'$, совпадает с надстроечным гомоморфизмом E . Обозначив символом $\iota \times$ отображение $\pi_{r+1}(I^{N+1}, I^{N+1}) \rightarrow \pi_{r+2}(I^{N+2}, I^{N+2})$, индуцированное соответствием $f \mapsto \text{id} \times f$, мы видим, таким образом, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_{r+1}(I^{N+1}, I^{N+1}) & \xrightarrow{\iota \times} & \pi_{r+2}(I^{N+2}, I^{N+2}) \\ \partial \downarrow \approx & & \approx \downarrow \partial \\ \pi_r I^{N+1} = \pi_r S^N & \xrightarrow{E} & \pi_{r+1} S^{N+1} = \pi_{r+1} I^{N+2}. \end{array}$$

При желании это утверждение можно рассматривать как еще одно определение гомоморфизма E .

Дважды применив доказанное утверждение (при $N = 2n - 1$ и $N = 2n$), мы получим коммутативную

диаграмму

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \pi_{r+1}(I^{2n}, i^{2n}) & \xrightarrow{(1 \times) \circ (1 \times)} & \pi_{r+3}(I^{2n+2}, i^{2n+2}) \\ \partial \downarrow \approx & & \approx \downarrow \partial \\ \pi_r i^{2n} = \pi_r S^{2n-1} & \xrightarrow{E \circ E} & \pi_{r+2} S^{2n+1} = \pi_{r+2} i^{2n+2} \end{array}$$

Произвольному отображению $g: (I^{r+1}, i^{r+1}) \rightarrow (S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$, мы отнесем отображение

$$Ag: (I^{r+3}, i^{r+3}) \rightarrow (S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1}),$$

определенное формулой

$$(Ag)(t_1, t_2, t) = ([g_1(t), t_1], [g_2(t), t_2]), \\ (t_1, t_2, t) \in I \times I \times I^{r+1} = I^{r+3},$$

где g_1 и g_2 — композиции отображения g с каноническими проекциями $S^n \times S^n \rightarrow S^n$ (так что $g = g_1 \times g_2$). Ясно, что гомотопический класс отображения Ag зависит только от гомотопического класса $\beta \in \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ отображения g . Мы будем обозначать его символом $A\beta$. Получающееся отображение

$$A: \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \rightarrow \pi_{r+3}(S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1})$$

является, очевидно, гомоморфизмом.

Напомним, что по построению (см. лекцию I.5) характеристическое отображение χ_n обладает тем свойством, что

$$[\chi_n(t), t] = \chi_{n+1}(t, t)$$

для любой точки $(t, t) \in I \times I^n = I^{n+1}$. Поэтому, если

$$g = (\chi_n \times \chi_n) \circ f = (\chi_n \circ f_1) \times (\chi_n \circ f_2),$$

где $f = f_1 \times f_2$ — произвольное отображение

$$(I^{r+1}, i^{r+1}) \rightarrow (I^n \times I^n, (I^n \times I^n)) = (I^{2n}, i^{2n}),$$

то

$$(Ag)(t_1, t_2, t) = ([(\chi_n \circ f_1)(t), t_1], [(\chi_n \circ f_2)(t), t_2]) = \\ = (\chi_{n+1}(t_1, f_1(t)), \chi_{n+1}(t_2, f_2(t))) = \\ = (\chi_{n+1} \times \chi_{n+1})(t_1, f_1(t), t_2, f_2(t)),$$

в то время как

$$(\text{id} \times (\text{id} \times f))(t_1, t_2, t) = (t_1, t_2, f_1(t), f_2(t)).$$

Поскольку перестановка координат

$$(t_1, t_2, f_1(t), f_2(t)) \mapsto (t_1, f_1(t), t_2, f_2(t))$$

является отображением степени $(-1)^n$, этим доказано, что для гомоморфизма A имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_{r+1}(I^{2n}, I^{2n}) & \xrightarrow{(-1)^n \iota \circ (\iota \times) \circ (\iota \times)} & \pi_{r+3}(I^{2n+2}, I^{2n+2}) \\ (\chi_n \times \chi_n)_* \downarrow & & \downarrow (\chi_{n+1} \times \chi_{n+1})_* \\ \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) & \xrightarrow{A} & \pi_{r+3}(S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1}) \end{array}$$

Комбинируя эту диаграмму с диаграммой (4), учитывая что при $r \leq 4n-4$ операция $(-1)^n \iota \circ$ сводится к умножению на $(-1)^n$ и вспоминая определение гомоморфизма M , мы окончательно получаем, что при $r \leq 4n-4$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_r S^{2n-1} & \xrightarrow{(-1)^n E \circ E} & \pi_{r+2} S^{2n+1} \\ M \downarrow & & \downarrow M \\ \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) & \xrightarrow{A} & \pi_{r+3}(S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1}) \end{array}$$

Поэтому, применив к формуле (3) гомоморфизм A , мы получим, что при $r \leq 4n-4$ имеет место равенство

$$(5) \quad M_!(E \circ E) H_0 \alpha = (-1)^n A Q' \alpha.$$

Поскольку при $r \leq 4n-4$ отображение $E \circ E$ заведомо является изоморфизмом, равенство (5) однозначно характеризует элемент $H_0 \alpha$.

В силу этого равенства теорема 2 равносильна утверждению, что если для элемента $\alpha \in \pi_r S^n$, где $r < 3n-1$, имеет место равенство $E\alpha = 0$, то

$$(6) \quad A Q' \alpha \in 2\pi_{r+3}(S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1}).$$

В этой форме мы ее и будем доказывать.

Доказательство включения (6) мы проведем «в лоб», в явном виде выписывая все необходимые гомотопии и отображения. В первую очередь мы сделаем это для элемента $Q' \alpha$.

Отождествив куб I^{r+1} с произведением $I \times I^{r-1} \times I$, а куб I^r — с произведением $I^{r-1} \times I$, мы определим два вспомогательных отображения

$$(7) \quad \zeta_1, \zeta_2: I^{r+1} \rightarrow I^r,$$

положив для любой точки $(t, t, s) \in I^{r+1}$

$$\zeta_1(t, t, s) = \begin{cases} (t, 1 - 3t(1-s)), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ (t, 1 + (3t-2)(1-s)), & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ (t, 1), & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\zeta_2(t, t, s) = \begin{cases} (t, 0), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ (t, (3t-1)(1-s)), & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ (t, 3(1-t)(1-s)), & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Напомним (см. лекцию I.10), что один из способов построения надстроечного гомоморфизма E состоит в том, что каждому отображению $f: (I^r, I^r) \rightarrow (X, x_0)$ сопоставляется отображение $Ef: (I^{r+1}, I^{r+1}) \rightarrow (S^*X, x_0)$, определенное формулой

$$(Ef)(t, t) = [f(t), t], \quad (t, t) \in I \times I^r = I^{r+1}.$$

При этом, как показывает непосредственное вычисление, для каждого отображения $f: (I^r, I^r) \rightarrow (X, x_0)$ будут иметь место формулы

$$(8) \quad E(f \circ \zeta_1) = Ef \circ \zeta_1 \circ T, \quad E(f \circ \zeta_2) = Ef \circ \zeta_2 \circ T,$$

где T — отображение $I^{r+1} \rightarrow I^{r+1}$, состоящее в перестановке первых двух координат (конечно, в правых частях этих формул под ζ_1, ζ_2 понимаются отображения (7), построенные при r , увеличенном на единицу; аналогичную рольность мы будем допускать и впредь).

Кроме того, при $X = S^n \vee S^n$ в силу стандартного отождествления $S^*(S^n \vee S^n) = S^{n+1} \vee S^{n+1}$ для любого отображения $f = f_1 \times f_2: I^r \rightarrow S^n \vee S^n$ будет иметь место равенство

$$(9) \quad Ef = Ef_1 \times Ef_2.$$

Произвольному отображению $g = g_1 \times g_2: I^r \rightarrow S^n \vee S^n$ мы сопоставим отображение

$$R'g: I^{r+1} \rightarrow S^n \times S^n,$$

определенное формулой

$$R'g = (g_1 \circ \zeta_1) \times (g_2 \circ \zeta_2).$$

Из соотношений (8) и (9) немедленно вытекает, что для этого отображения имеет место формула

$$(10) \quad ER'g = R'Eg \circ T,$$

Кроме того, непосредственное вычисление показывает, что если $g: (I^r, I^r) \rightarrow (S^n \vee S^n, s_0)$, то

$$R'g: (I^{r+1}, I^{r+1}, J^r) \rightarrow (S^n \times S^n, S^n \vee S^n, s_0),$$

и что ограничение

$$Rg: (I^r, I^r) \rightarrow (S^n \vee S^n, s_0)$$

отображения $R'g$ на грани I^r куба I^{r+1} (определяемой условием $s=0$) задается формулами

$$(Rg)(t, t) =$$

$$= \begin{cases} (g_1(t, 1-3t), s_0), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/3, \\ (g_1(t, 3t-1), g_2(t, 3t-1)), & \text{если } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ (s_0, g_2(t, 3-3t)), & \text{если } 2/3 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

т. е. что

$$Rg = -i_1 \circ g_1 + g - i_2 \circ g_2,$$

где $i_1, i_2: S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ — канонические вложения $x \mapsto x_1$ и $x \mapsto x_2$.

Для гомотопических классов $\beta_1, \beta_2 \in \pi_r S^n$ и $\beta, R\beta \in \pi_r(S^n \vee S^n)$ отображений $g_1, g_2: (I^r, I^r) \rightarrow (S^n, s_0)$ и $g, Rg: (I^r, I^r) \rightarrow (S^n \vee S^n, s_0)$ [последнее равенство означает, что

$$(11) \quad \beta = i_{1*}\beta_1 + i_{2*}\beta_2 + R\beta.$$

При этом $R\beta = \partial(R'\beta)$, где $R'\beta \in \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ — гомотопический класс отображения $R'g$. Но из лекции 4 мы знаем, что гомоморфизмы

$$i_{1*}, i_{2*}: \pi_r S^n \rightarrow \pi_r(S^n \vee S^n)$$

и

$$\partial: \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \rightarrow \pi_r(S^n \vee S^n)$$

задают представление группы $\pi_r(S^n \vee S^n)$ в виде прямой суммы, т. е. что каждый элемент $\beta \in \pi_r(S^n \vee S^n)$ допускает единственное представление вида $\beta = i_{1*}\beta'_1 + i_{2*}\beta'_2 + \partial\gamma$, где $\beta'_1, \beta'_2 \in \pi_r S^n$ и $\gamma \in \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$. Сравнив это представление с разложением (11), мы немедленно получим, что $\beta'_1 = \beta_1$, $\beta'_2 = \beta_2$ и $\partial\gamma = R\beta$ (а $\gamma = R'\beta$).

В частности, если $g = m \circ f$, где $f: (I^r, I^r) \rightarrow (S^n, s_0)$, а m — коумножение в Н-когруппе S^n , и, значит, $\beta = (i' + i'') \circ \alpha$ и $\beta_1 = i' \circ \alpha$, $\beta_2 = i'' \circ \alpha$, где $\alpha = [f] \in \pi_r S^n$, то

$$R\beta = (i' + i'') \circ \alpha - i' \circ \alpha - i'' \circ \alpha = Q\alpha$$

и, следовательно, $R'\beta = Q'\alpha$.

Положив

$$(12) \quad !Qf = R(m \circ f) \quad \text{и} \quad Q'f = R'(m \circ f),$$

мы [тем самым получаем, что если элемент $\alpha \in \pi_r S^n$ задается отображением $f: (I^r, \dot{I}^r) \rightarrow (S^n, s_0)$, то элемент $Q\alpha \in \pi_r(S^n \vee S^n)$ будет задаваться отображением

$$Qf: (I^r, \dot{I}^r) \rightarrow (S^n \vee S^n, s_0),$$

а элемент $Q'\alpha \in \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ — отображением

$$Q'f: (I^{r+1}, \dot{I}^{r+1}) \rightarrow (S^n \times S^n, S^n \vee S^n).$$

Конечно, в формулах (12) под m можно понимать не только стандартное коумножение $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$, описанное в лекции I.5, но и любое гомотопное ему отображение $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$. Стандартное коумножение m_0 стягивает экватор S^{n-1} сферы S^n (состоящий из точек $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^{n+1}$, для которых $x_{n+1} = 0$) в точку $s_0 = (s_0, s_0) \in S^n \vee S^n \subset S^n \times S^n$ и на каждой полусфере $C_{(-)}^n$ или $C_{(+)}^n$ (состоящей соответственно из точек $x \in S^{n+1}$, для которых $x_{n+1} \leq 0$ и $x_{n+1} \geq 0$) является гомеоморфизмом степени 1 ее внутренности на проколотую сферу $(S^n \times s_0) \setminus (s_0, s_0)$ или соответственно $(s_0 \times S^n) \setminus (s_0, s_0)$. Ясно, что каждое отображение, обладающее этим свойством, гомотопно коумножению m_0 и потому может быть принято за отображение m . Более того, так как любой большой круг сферы S^{n+1} можно непрерывным вращением перевести в экватор S^n , то (при $n \geq 1$) коумножению m_0 будет гомотопно каждое отображение $m: S^n \rightarrow S^n \vee S^n$, обладающее аналогичными свойствами по отношению к полусферам $D_{(-)}^n$ и $D_{(+)}^n$, на которые сфера S^n пересекается гиперплоскостью $x_2 = 0$.

Имея это в виду, мы рассмотрим отображение $m_2: S^n \rightarrow S^n$, определенное формулой

$$m_2(x, y, z) = \begin{cases} (2x-1, \sqrt{2(x^2-1)}(1-x), \sqrt{2}z), & \text{если } \lambda \geq 1, \\ (1-2\lambda^2(1-x), -\sqrt{2(1-x^2)}\lambda(1-x), \sqrt{2}\lambda z), & \text{если } 0 \leq \lambda \leq 1, \\ s_0, & \text{если } \lambda \leq 0 \text{ (т. е. } y \leq 0), \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^{n-1}, (x, y, z) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (так что $x^2 + y^2 + |z|^2 = 1$) и $\lambda = y/(1-x)$. Автоматическая

проверка показывает, что это отображение является относительным гомеоморфизмом $(S^n, D_{(-)}^n) \rightarrow (S^n, s_0)$ степени 1. Поэтому отображение $m_1 = m_2 \circ \rho$, где

$$(13) \quad \rho: (x, y, z, u) \mapsto (x, -y, -z, u), \\ x, y, z \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^{n-2}, x^2 + y^2 + z^2 + |u|^2 = 1,$$

— отражение в плоскости $y=0, z=0$, будет относительным гомеоморфизмом $(S^n, D_{(+)}^n) \rightarrow (S^n, s_0)$ степени 1, и, значит, отображение $m = m_1 \times m_2$ будет отображением $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$, гомеоморфно отображающим внутренности полусфер $D_{(-)}^n$ и $D_{(+)}^n$ на клетки $(S^n \times s_0) \setminus (s_0, s_0)$ и $(s_0 \times S^n) \setminus (s_0, s_0)$ соответственно и, значит, гомотопным коумножению m_0 .

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что отображения Qf и $Q'f$ построены именно с помощью этого отображения m .

Как показывает непосредственное вычисление, коумножение m перестановочно с отождествлением $S^* S^{n-1} = S^n$, т. е. для любой точки $[x, t] \in S^n$, $x \in S^{n-1}$, $t \in I$, имеет место равенство

$$m[x, t] = [m(x), t],$$

где справа под $[m(x), t]$ понимается, естественно, точка $([m_1(x), t], [m_2(x), t])$ букета $S^n \vee S^n = S^*(S^{n-1} \vee S^{n-1})$. Поэтому для любого отображения $f: (I^r, I^r) \rightarrow (S^n, s_0)$ будет иметь место соотношение

$$(14) \quad m \circ Ef = E(m \circ f).$$

Построив в явном виде отображение $Q'f$ класса $Q'\alpha$, мы немедленно получим и отображение интересующего нас в первую очередь класса $AQ'\alpha$ — им будет отображение $AQ'f$. Однако оказывается, что последнее отображение целесообразно несколько видоизменить.

Для любого отображения $g = g_1 \times g_2: (I^{r+1}, I^{r+1}) \rightarrow (S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ мы символом $A'g$ обозначим отображение $(I^{r+3}, I^{r+3}) \rightarrow (S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1})$, определенное формулой

$$(A'g)(t_1, t_2, t) = \\ = \begin{cases} ([g_1(t), 2t_1 t_2], [g_2(t), 1 - 2t_1(1 - t_2)]), & \text{если } 0 \leq t_1 \leq 1/2, \\ ([g_1(t), 1 - 2(1 - t_1)(1 - t_2)], [g_2(t), 2(1 - t_1)t_2]), & \text{если } 1/2 \leq t_1 \leq 1, \end{cases}$$

где $(t_1, t_2, t) \in I \times I \times I^{r+1} = I^{r+3}$. В частности,

$$(15) \quad (A'Q'f)(t_1, t_2, t) = \begin{cases} ([(m_1 \circ f \circ \xi_1)(t), 2t_1 t_2], [(m_2 \circ f \circ \xi_2)(t), 1 - 2t_1(1 - t_2)]), & \text{если } 0 \leq t_1 \leq 1/2, \\ ([(m_1 \circ f \circ \xi_1)(t), 1 - 2(1 - t_1)(1 - t_2)], [(m_2 \circ f \circ \xi_2)(t), 2(1 - t_1)t_2]), & \text{если } 1/2 \leq t_1 \leq 1, \end{cases}$$

для каждого отображения $f: (I^r, I^r) \rightarrow (S^n, s_0)$.

С отображением Ag отображение $A'g$ связано формулой

$$A'g = Ag \circ (a \times \text{id}),$$

где a — отображение $I \times I \rightarrow I \times I$, определенное формулой $a(t_1, t_2) =$

$$= \begin{cases} (2t_1 t_2, 1 - 2t_1(1 - t_2)), & \text{если } 0 \leq t_1 \leq 1/2, \\ (1 - 2(1 - t_1)(1 - t_2), 2(1 - t_1)t_2), & \text{если } 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Непосредственное вычисление показывает, что отображение a является относительным гомеоморфизмом $(I^2, I^2) \rightarrow (I^2, I^2)$ [степени 1]. Поэтому отображения $A'g$ и Ag задают один и тот же элемент $A\beta$ группы $\pi_{r+3}(S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1})$. В частности, отображение $A'Q'f$ задает элемент $AQ'\alpha$.

Для исследования последнего отображения нам понадобится следующая общая аддиционная лемма:

Лемма 1. Если элементы $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_{r+1}X$ являются гомотопическими классами таких отображений $f, g, h: (I^{r+1}, I^{r+1}) \rightarrow (X, x_0)$, что

$$f(t, t) = g(t, t), \text{ если } 1/2 \leq t \leq 1,$$

и

$$h(t, t) = \begin{cases} f(t, t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(1 - t, t), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

то $\gamma = \alpha - \beta$.

Доказательство. Формула

$$F_\tau(t, t) = \begin{cases} f\left(\frac{2t}{2-\tau}, t\right), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{2-\tau}{4}, \\ f\left(\frac{\tau+4t-1}{2}, t\right), & \text{если } \frac{2-\tau}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g\left(\frac{\tau-4t+3}{2}, t\right), & \text{если } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2+\tau}{4}, \\ g\left(\frac{2-2t}{2-\tau}, t\right), & \text{если } \frac{2+\tau}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

задает гомотопию из (I^{r+1}, I^{r+1}) в (X, x_0) , связывающую отображение h с отображением $f - g$. $\square$

Теперь у нас все готово для доказательства теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть элемент $\alpha \in \pi_r S^n$ обладает тем свойством, что $E\alpha = 0$, и пусть $f: (I^r, I^r) \rightarrow (S^n, s_0)$ — произвольное отображение класса α . Тогда существует такая гомотопия

$$(16) \quad g_\tau: (I^{r+1}, I^{r+1}) \rightarrow (S^{n+1}, s_0), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

что $g_0 = Ef$ и $g_1 = \text{const}$. Рассмотрим отображения

$$Q'g_\tau: (I^{r+2}, I^{r+2}) \rightarrow (S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1}).$$

Так как (см. формулы (14) и (10))

$$\begin{aligned} Q'g_0 &= R'(m \circ g_0) = R'(m \circ Ef) = R'E(m \circ f) = \\ &= ER'(m \circ f) \circ T = EQ'f \circ T \end{aligned}$$

и так как, по определению, $Q'f = (m_1 \circ f \circ \zeta_1) \times (m_2 \circ f \circ \zeta_2)$, то формулы

$$\begin{aligned} h(t_1, t_2, t_3, t, s) &= \\ &= \begin{cases} [(m_1 \circ f \circ \zeta_1)(t_3, t, s), 2t_1 t_2], \\ \quad [(m_2 \circ f \circ \zeta_2)(t_3, t, s), 1 - 2t_1(1 - t_2)], \\ \quad \text{если } 0 \leq t_1 \leq 1/2, \\ Q'g_{2t_1-1}(t_3, t_2, t, s), \\ \quad \text{если } 1/2 \leq t_1 \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(t_1, t_2, t_3, t, s) &= \\ &= \begin{cases} [(m_1 \circ f \circ \zeta_1)(t_3, t, s), 1 - 2t_1(1 - t_2)], \\ \quad [(m_2 \circ f \circ \zeta_2)(t_3, t, s), 2t_1 t_2], \\ \quad \text{если } 0 \leq t_1 \leq 1/2, \\ Q'g_{2t_1-1}(t_3, t_2, t, s), \\ \quad \text{если } 1/2 \leq t_1 \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

корректно определяют отображения h и h' куба $I^{r+3} = I^3 \times I^{r-1} \times I$ в произведение $S^{n+1} \times S^{n+1}$. Автоматическая проверка показывает, что эти отображения переводят границу I^{r+3} куба I^{r+3} в букет $S^{n+1} \vee S^{n+1}$ и потому корректно определяют некоторые элементы γ и γ' группы $\pi_{r+3}(S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1})$.

Сравнив формулы (17) с формулами (15), мы немедленно обнаружим, что отображения h , h' и $A'Q'f$ удовлетворяют условиям леммы 1 и, следовательно, согласно этой лемме, для их гомотопических классов γ , γ' и $AQ'\alpha$

будет иметь место равенство

$$AQ'\alpha = \gamma - \gamma'.$$

Поэтому для доказательства включения (6) (и, следовательно, теоремы 2) достаточно доказать, что

$$(18) \quad \gamma' = \pm \gamma.$$

Конечно, элементы γ и γ' зависят от выбора гомотопии (16). Однако ясно, что если мы, интерпретируя гомотопию (16) как отображение $(I^{r+2}, J^{r+1}) \rightarrow (S^{n+1}, s_0)$, $(\tau, t) \mapsto g_\tau(t)$, $(\tau, t) \in I \times I^{r+1} = I^{r+2}$, перейдем к гомотопному rel J^{r+1} отображению $(I^{r+2}, J^{r+1}) \rightarrow (S^{r+1}, s_0)$, то элементы γ и γ' не изменятся.

Имея это в виду и обозначив через $\theta_{ij} = \theta'_{ij}$, $1 \leq i < j \leq r$, относительный гомеоморфизм $(I^r, I^r) \rightarrow (I^r, I^r)$, заменяющий i -ю и j -ю координаты t_i и t_j на числа $1 - t_i$ и $1 - t_j$ соответственно и оставляющий все остальные координаты точки $t = (t_1, \dots, t_r) \in I^r$ неизменными, мы рассмотрим отображение

$$\Gamma \quad \bar{f} = \rho \circ f \circ \theta_{1r}: (I^r, I^r) \rightarrow (S^n, s_0),$$

где $\Gamma\rho$ — отражение (13). Легко видеть, что $E'(f \circ \theta_{ij}) = Ef \circ \theta_{i+1, j+1}$ и $\Gamma\rho[x, t] = [\rho x, t]$ для любых точек $x \in S^{n-1}$, $t \in I^r$ (как всегда, в последней формуле имеется в виду отождествление, произведенное с помощью отображения (4) лекции I.5). Поэтому $E\bar{f} = \rho \circ Ef \circ \theta_{2, r+1}$ и, значит, отображения

$$(19) \quad \bar{g}_\tau = \rho \circ g_\tau \circ \theta_{2, r+1}, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

составляют гомотопию (16) для отображения $\bar{f}$. Пусть $\bar{h}$ и $\bar{h}'$ — соответствующие отображения (17), а $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}' \in \pi_{r+3}(S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1})$ — их гомотопические классы.

Непосредственное вычисление показывает, что $\zeta_1 \circ \theta_{12} = \theta_{1r} \circ \zeta_2$ и $\zeta_2 \circ \theta_{12} = \theta_{1r} \circ \zeta_1$. Кроме того, по определению, $m_1 = m_2 \circ \rho$ и, значит, $m_2 = m_1 \circ \rho$. Поэтому $m_1 \circ \bar{f} \circ \zeta_1 = m_2 \circ \bar{f} \circ \zeta_2 \circ \theta_{12}$, $m_2 \circ \bar{f} \circ \zeta_2 = m_1 \circ \bar{f} \circ \zeta_1 \circ \theta_{12}$ и $Q'g_\tau = \sigma \circ Q'g_\tau \circ \theta_{23}$, где $\sigma: S^{n+1} \times S^{n+1} \rightarrow S^{n+1} \times S^{n+1}$ — отображение $(x, y) \mapsto (y, x)$ перестановки множителей. Следовательно, $\bar{h}' = \sigma \circ \bar{h} \circ \theta_{34}$.

С другой стороны, легко видеть (подсчитывая степени или элементарно-геометрически конструируя требуемые гомотопии), что и отражение ρ и каждое из отображе-

ний θ_{ij} гомотопны (в соответствующих категориях) тождественному отображению. Поэтому гомотопия (19), рассматриваемая как отображение $(I^{r+2}, J^{r+1}) \rightarrow (S^{n+1}, s_0)$, гомотопна гомотопии (16) и, значит, $\bar{\gamma} = \gamma$ и $\bar{\gamma}' = \gamma'$. Кроме того, $\bar{h}' \sim \sigma \circ h$, т. е. $\bar{\gamma} = \sigma_* \gamma$. Следовательно,

$$\gamma' = \sigma_* \gamma.$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I^{n+1} \times I^{n+1} & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & I^{n+1} \times I^{n+1} \\ \chi_{n+1} \times \chi_{n+1} \downarrow & & \downarrow \chi_{n+1} \times \chi_{n+1} \\ S^{n+1} \times S^{n+1} & \xrightarrow{\sigma} & S^{n+1} \times S^{n+1} \end{array}$$

где $\chi_{n+1}: I^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ — характеристическое отображение (для клетки $e^{n+1} = S^{n+1} \setminus s_0$), а $\bar{\sigma}$ — отображение $(t, s) \mapsto (s, t)$, $t \in I^{n+1}$, $s \in I^{n+1}$, перестановки сомножителей. Эта диаграмма, очевидно, коммутативна и потому индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_{r+3}(I^{2n+2}, j^{2n+2}) & \xrightarrow{\bar{\sigma}_*} & \pi_{r+3}(I^{2n+2}, j^{2n+2}) \\ (\chi_{n+1} \times \chi_{n+1})_* \downarrow & & \downarrow (\chi_{n+1} \times \chi_{n+1})_* \\ \pi_{r+3}(S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1}) & \xrightarrow{\sigma_*} & \pi_{r+3}(S^{n+1} \times S^{n+1}, S^{n+1} \vee S^{n+1}) \end{array}$$

Но отображение $\bar{\sigma}$ имеет, очевидно, степень $(-1)^{n+1}$, и потому при $r+3 \leq 2(2n+1)-1$, т. е. при $r < 4n-1$, гомоморфизм $\bar{\sigma}_*$ является умножением на $(-1)^{n+1}$. С другой стороны, в силу предложения 4 лекции 6 гомоморфизм $(\chi_n \times \chi_n)_*$ является при $r+3 \leq 3(n+1)-2$, т. е. при $r < 3n-1$, изоморфизмом. Поэтому при $r < 3n-1$ гомоморфизм σ_* также является умножением на $(-1)^{n+1}$.

Тем самым равенство (18) (в уточненном виде $\gamma' = (-1)^{n+1} \gamma$) полностью доказано. Вместе с ним полностью доказана и теорема 2. $\square$

Замечание 1. Уточненный вид равенства (18) показывает, что если n нечетно, то $H_0 \alpha = 0$ (конечно, в прежнем предположении, что $E \alpha = 0$ и $r < 3n-1$; впрочем, легко видеть, что условие $r < 3n-1$ можно заменить условием $r \leq 4n-4$, обеспечивающим мономорфность отображений $E \circ E$ и $(\chi_n \times \chi_n)_*$.)

Только теперь окончательно обосновано наше вычисление группы $\pi_{n+2} S^n$. Ясно, что вычисление групп $\pi_{n+k} S^n$ при $k > 2$ должно быть еще сложнее, и здесь явно необходимы новые методы. Такие методы мы разовьем в следующем семестре на базе теории гомологий.

Заклеивание гомотопических групп и убивающие пространства.— Пространства типа (Π, n) .— Вычисление фундаментальной группы произвольного клеточного пространства.— Теорема Зейферта—ван Кампена для клеточных пространств.— Группа $\pi_{n+1}(X, A)$ при односвязном A .— Операторное свойство универсальных накрытий.— Накрытия клеточных пространств.— Группа $\pi_{n+1}(X, A)$ в общем случае.

В этой заключительной лекции мы вернемся к общим клеточным пространствам и рассмотрим для них ряд естественно возникающих вопросов, на которые мы могли бы ответить уже давно, если бы не отвлеклись изучением гомотопических групп сфер. Результаты этой лекции интересны не только сами по себе, но и в связи с основополагающей ролью, которую они будут играть в конструкциях следующего семестра.

Пример вычисления гомотопических групп сфер показывает, что, по-видимому, — и это на самом деле так — общая задача вычисления гомотопических групп произвольных (хотя бы клеточных) пространств очень трудна. Естественный путь решения этой задачи состоит в индукции по остовам, но, как мы увидим, в этой индукции едва-едва удастся сделать лишь первый шаг. Тем не менее безусловно интересно подробнее проанализировать эту идею, чтобы хотя бы уяснить себе характер возникающих трудностей.

Движение вверх по остовам совершается посредством элементарных клеточных расширений. Поэтому нашей первой задачей должно быть выяснение того, что происходит с гомотопическими группами при таких расширениях.

Пусть X — элементарное клеточное расширение размерности $n+1 \geq 2$ пунктированного пространства A , которое мы без ограничения общности можем предполагать связным, и пусть

$$(1) \quad i_*: \pi_r A \rightarrow \pi_r X$$

— гомоморфизм гомотопических групп, индуцированный вложением $i: A \rightarrow X$. Поскольку пара (X, A) , как мы

знаем, n -связна, гомоморфизм (1) при $r < n$ является изоморфизмом, а при $r = n$ — эпиморфизмом. Поэтому первым делом нам следует изучить ядро гомоморфизма (1) при $r = n$.

По определению X получается из A приклеиванием семейства $(n+1)$ -мерных шаров посредством некоторых приклеивающих отображений $\rho_\alpha: S^n \rightarrow A$. Каждое такое отображение определяет элемент $[\rho_\alpha]^*$ группы $\pi_n(A, x_\alpha)$, где $x_\alpha = \rho_\alpha(s_0)$. Выбрав путь u_α , соединяющий отмеченную точку $x_0 \in A$ с точкой x_α , мы получим элемент $u_\alpha^*[\rho_\alpha]^*$ группы $\pi_n A = \pi_n(A, x_0)$. Допуская определенную вольность, мы будем обозначать этот элемент символом $[\dot{e}_\alpha]$, где e_α — клетка из X с приклеивающим отображением ρ_α .

Согласно общим результатам лекции 1.5 группа $\pi_n A$ (при $n > 1$) является $\pi_1 A$ -модулем. Пусть K — подмодуль $\pi_1 A$ -модуля $\pi_n A$ (а при $n = 1$ — инвариантная подгруппа группы $\pi_1 A$), порожденный (-ая) всеми элементами вида $[\dot{e}_\alpha]$, т. е. совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов вида $\xi[\dot{e}_\alpha]$, где $\xi \in \pi_1 A$ (при $n = 1$ — произведений элементов вида $\xi^{-1}[\dot{e}_\alpha]\xi$). Заметим, что K не зависит от произвола в построении элементов $[\dot{e}_\alpha]$ (выбора путей u_α).

Ясно, что в X отображение ρ_α гомотопно постоянному отображению, т. е. $i_*[\rho_\alpha]^* = 0$. Поэтому $i_*[\dot{e}_\alpha] = 0$ и, следовательно, $i_*K = 0$, т. е. $K \subset \text{Ker } i_*$. Для удобства ссылок мы сформулируем этот результат в виде самостоятельного предложения:

Предложение 1. *Имеет место включение*

$$(2) \quad K \subset \text{Ker } i_* \quad \square$$

(Ниже мы увидим, что на самом деле $K = \text{Ker } i_*$, но пока нам будет достаточно тривиального включения (2).)

Следствие 1. *Для любого пространства X и любого $n \geq 1$ существует такое $(n+1)$ -мерное элементарное клеточное расширение X' пространства X , что $\pi_n X' = 0$ (и, конечно, $\pi_r X' \approx \pi_r X$ при $r < n$).*

Доказательство. Выбрав в $\pi_n X$ произвольную систему образующих $[\rho_\alpha: S^n \rightarrow X]^*$, построим элементарное клеточное расширение X' пространства X с приклеивающими отображениями ρ_α . Тогда $K = \pi_n X$, и потому $\text{Ker } i_* = \pi_n X$. Следовательно, $\pi_n X' = 0$. $\square$

О пространстве X' говорят, что оно получено из пространства X заклеиванием группы $\pi_n X$.

Следствие 2. Для любого пространства X и любого $n \geq 1$ существует такое относительное клеточное пространство (X', X) , что

$$(3) \quad \pi_r X' = \begin{cases} \pi_r X, & \text{если } r < n, \\ 0, & \text{если } r \geq n. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно следствию 1 существует такая начинающаяся с X последовательность элементарных клеточных расширений $X = X_{n-1} \subset \dots \subset X_m \subset \dots$ возрастающих размерностей, что $\pi_m X_m = 0$ и $\pi_r X_m \approx \pi_r X_{m-1}$ при $r < m$. Из компактности сферы S^r непосредственно следует, что объединение X' пространств X_m обладает свойством (3). $\square$

Следствие 3. Для любого пространства X и любого $n \geq 1$ существует такое расслоение $p: X^* \rightarrow X$, что

$$\pi_r X^* = \begin{cases} 0, & \text{если } r < n, \\ \pi_r X, & \text{если } r \geq n. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно следствию 2 существует относительное клеточное пространство (X', X) , обладающее свойством (3). Пусть $X^* = P(X', X)$ — пространство всех путей в X' , начинающихся в отмеченной точке x_0 и кончающихся в X , и пусть $p = \omega_1: X^* \rightarrow X$ — расслоение, сопоставляющее каждому пути $u \in X^*$ его конечную точку $u(1)$. Так как слоем расслоения p является, очевидно, пространство $\Omega X'$ и так как $\pi_r \Omega X' \approx \pi_{r+1} X'$, то гомотопическую последовательность этого расслоения мы можем переписать в следующем виде:

$$\dots \rightarrow \pi_{r+1} X' \rightarrow \pi_r X^* \xrightarrow{p_*} \pi_r X \rightarrow \pi_{r-1} X' \rightarrow \dots$$

Следовательно, если $r \geq n$ и потому $\pi_{r+1} X' = \pi_r X' = 0$, то $\pi_r X^* \approx \pi_r X$, а если $r < n$ и потому $\pi_r X' \approx \pi_r X$, то $\pi_r X^* = 0$ (при $r = n - 1$ следует еще учесть равенство $\pi_n X' = 0$). $\square$

Заметим, что X^* является не чем иным, как гомотопическим слоем вложения $X \rightarrow X'$.

Пространство X^* принято обозначать символом (X, n) . О расслоении $p: (X, n) \rightarrow X$ говорят, что оно убивает гомотопические группы до размерности $n - 1$ включительно. В соответствии с этим пространство (X, n) называется иногда *убивающим пространством*.

Пространство $(X, 1)$ является не чем иным, как компонентой пространства X , содержащей отмеченную точку. Пространство $(X, 2)$ можно рассматривать как аналог универсального накрытия. В отличие от последнего, оно определено без каких-либо условий на пространство X .

Замечание 1. В следующем семестре мы разовьем технику, позволяющую эффективно вычислять первую нетривиальную гомотопическую группу $\pi_n X$ любого $(n-1)$ -связного пространства X . В частности, это даст нам общий способ вычисления групп $\pi_n X = \pi_n(X, n)$ для произвольного пространства X (к сожалению, не всегда приводящий к цели).

Как выше уже было отмечено, в формуле (2) на самом деле имеет место равенство. При этом пару (X, A) можно считать произвольным клеточно n -связным ($n \geq 1$) относительно клеточным пространством, поскольку для любой такой пары — в силу теоремы о клеточной аппроксимации — имеет место изоморфизм $\pi_n(X, A) \approx \pi_n(X^{n+1}, A)$, а пространство X^{n+1} является элементарным клеточным расширением пространства A .

Предложение 2. Для любого клеточно n -связного ($n \geq 1$) относительного клеточного пространства (X, A) имеет место равенство

$$K = \text{Ker } i_*.$$

Напомним, что здесь $\text{Ker } i_*$ — ядро гомоморфизма $i_*: \pi_n A \rightarrow \pi_n X$, индуцированного вложением $i: A \rightarrow X$, а K — подмодуль $\pi_1 A$ -модуля $\pi_n A$ (при $n=1$ инвариантная подгруппа группы $\pi_1 A$), порожденный (-ая) всеми элементами вида $[e_\alpha]$, $e_\alpha \in X^{n+1} \setminus A$.

Сразу же отметим важное следствие этого предложения:

Следствие 1. Для любого пространства X и любого $\pi_1 X$ -подмодуля K модуля $\pi_n X$ (при $n=1$ для любой инвариантной подгруппы группы $\pi_1 X$) существует такое пространство, X' , что

$$\pi_r X' = \begin{cases} \pi_r X, & \text{если } r < n, \\ (\pi_n X)/K, & \text{если } r = n. \end{cases}$$

Доказательство. Выбрав в K произвольную систему образующих $[\rho_\alpha: S^n \rightarrow X]$, примем за X' элементарное клеточное расширение пространства X с приклеи-

вающими отображениями ρ_α и воспользуемся предложением 2. $\square$

Это следствие обобщает следствие 1 предложения 1.

Мы будем говорить, что пространство X' *заклеивает* подгруппу K группы $\pi_n X$.

Определение 1. Топологическое пространство X называется *пространством типа (Π, n)* , где $n \geq 1$, а Π — группа (абелева при $n > 1$), если

$$\pi_r X = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq n, \\ \Pi & \text{при } r = n. \end{cases}$$

Мы будем обозначать пространство типа (Π, n) символом $H(\Pi, n)$.

Замечание 2. Обозначение $H(\Pi, n)$ предложено Свитцером (см. [11]). Пространства типа (Π, n) впервые были рассмотрены Эйленбергом и Маклейном, и поэтому в литературе они часто называются *пространствами Эйленберга — Маклейна*. Эйленберг и Маклейн обозначали их символом $K(\Pi, n)$, и с тех пор это обозначение сделалось общепринятым. Однако в последнее время оно вошло в столкновение с другими общепринятыми обозначениями, что и послужило Свитцеру основанием для его новации.

Предложение 3. Для любого $n \geq 1$ и любой группы Π (абелевой при $n > 1$) существует клеточное пространство типа (Π, n) .

Доказательство. Группа Π является факторгруппой некоторой свободной (при $n > 1$ свободной абелевой) группы F , т. е. имеет вид F/K , где K — некоторая (инвариантная при $n = 1$) подгруппа группы F .

С другой стороны, мы знаем, что, сопоставив каждой свободной образующей группы F сферу размерности n и построив букет этих сфер, мы получим клеточное пространство X для которого

$$\pi_r X = \begin{cases} 0, & \text{если } r < n, \\ F, & \text{если } r = n. \end{cases}$$

Применив теперь к этому пространству следствие 1 предложения 2 и заклеив у полученного пространства все группы π_r с $r > n$ (следствие 2 предложения 1), мы и получим клеточное пространство типа (Π, n) . $\square$

Замечание 3. В следующем семестре мы покажем, что любые два клеточных пространства типа (Π, n)

гомотопически эквивалентны и, следовательно, что любые два пространства типа (Π, n) слабо гомотопически эквивалентны (это, в частности, оправдывает обозначение этих пространств единым символом $H(\Pi, n)$; см. выше). Поскольку, кроме того, для любого пространства $H(\Pi, n+1)$ пространство $\Omega H(\Pi, n+1)$ является, очевидно, пространством $H(\Pi, n)$, отсюда следует, что для каждого клеточного пространства X и любой абелевой группы Π множество $H^n(X; \Pi) = [X, H(\Pi, n)]$ при каждом $n \geq 1$ является группой, которая не зависит от выбора пространства $H(\Pi, n)$ и определяется исключительно группой Π и числом n . Эта группа называется n -мерной группой когомологий пространства X с коэффициентами в группе Π .

Группы когомологий являются одним из важнейших функторов алгебраической топологии, и мы их подробно изучим в следующем семестре.

Заметим, что предложение 2 мы пока еще не доказали.

В отличие от тривиального предложения 1, это предложение выражает весьма глубокий геометрический факт, но, к счастью, всю необходимую для его доказательства геометрическую работу мы уже произвели в лекции 7 (и в Дополнении к лекции I.6), так что сейчас нам остается лишь воспользоваться ее плодами.

Сначала мы рассмотрим случай, когда $n = 1$.

Доказательство предложения 2 при $n = 1$. Как уже было сказано, мы можем предполагать, что X является элементарным клеточным расширением размерности 2 пространства A и, следовательно, что все (двумерные) клетки $e_\alpha \in X \setminus A$ открыты в X .

Пусть сначала клетка e_α только одна, т. е. пусть пара (X, A) является относительной двумерной клеткой. Выбрав в клетке $e^2 = X \setminus A$ две различные точки x_0 и x_1 , рассмотрим покрытие пространства X , состоящее из множеств

$$e^2, \quad X \setminus x_1 \quad \text{и} \quad e^2 \cap (X \setminus x_1) = e^2 \setminus x_1.$$

Эти множества открыты, связны, содержат точку x_0 и составляют насыщенное покрытие пространства X . Поэтому, согласно теореме Зейферта — ван Кампена (теорема 1 Дополнения к лекции I.6), группа $\pi_1 X$ является пределом диаграммы

$$\pi_1(X \setminus x_1) \leftarrow \pi_1(e^2 \setminus x_1) \rightarrow \pi_1(e^2),$$

т. е. — ввиду стягиваемости клетки e^2 — пределом диаграммы

$$\pi_1(X \setminus x_1) \xleftarrow{j_*} \pi_1(e^2 \setminus x_1) \rightarrow 1,$$

где j_* — гомоморфизм, индуцированный вложением $j: e^2 \setminus x_1 \rightarrow X \setminus x_1$. Это означает (см. в Дополнении к лекции I.6 пример 3), что группа $\pi_1 X$ является образом группы $\pi_1(X \setminus x_1)$ при гомоморфизме $i'_*: \pi_1(X \setminus x_1) \rightarrow \pi_1 X$, индуцированном вложением $i': X \setminus x_1 \rightarrow X$, причем ядром этого гомоморфизма служит инвариантная подгруппа $[\text{Im } j_*]$, порожденная образом $\text{Im } j_*$ гомоморфизма j_* .

С другой стороны, пространство $X \setminus x_1$ деформационно ретрагируется на A (лемма 1 лекции 3), а проколотый диск $e^2 \setminus x_1$ — на свою среднюю окружность. При этом легко видеть, что для «естественного» монеоморфизма $k: S^1 \rightarrow e^2 \setminus x_1$ единичной окружности S^1 на среднюю окружность диска $e^2 \setminus x_1$ имеет место гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\rho} & A \\ k \downarrow & & \downarrow i'' \\ e^2 \setminus x_1 & \xrightarrow{j} & X \setminus x_1 \end{array}$$

где ρ — отображение, приклеивающее клетку e^2 , а i'' — вложение. Поскольку $i = i' \circ i''$, этим доказано, что

$$\begin{aligned} i'_*(\text{Ker } i_*) &= \text{Ker } i'_* = [\text{Im } j_*] = [\text{Im } (j \circ k)_*] = \\ &= [\text{Im } (i'' \circ \rho)_*] = i''_*[\text{Im } \rho_*], \end{aligned}$$

т. е. — так как отображение i''_* является изоморфизмом — что $\text{Ker } i_* = [\text{Im } \rho_*]$. (Здесь мы намеренно несколько не точны, поскольку ретракция $X \setminus x_1 \rightarrow A$ двигает точку x_0 . Учет этого обстоятельства принципиальных трудностей не вызывает и оставляется читателю.)

Поскольку $\text{Im } \rho_*$ является циклической подгруппой, порожденной элементом $\rho_* i_1 = [\rho]^*$, и поскольку элемент $[\dot{e}^2]$, получающийся из элемента $[\rho]^*$ некоторым внутренним автоморфизмом группы $\pi_1 A$, порождает в $\pi_1 A$ ту же инвариантную подгруппу, что и элемент $[\rho]^*$, тем самым при $n = 1$ предложение 2 для относительной клетки (X, A) полностью доказано (правда, лишь при указанном выборе отмеченной точки x_0 ; но ясно, что если это предложение верно при одном выборе этой точки, то оно верно и при любом другом).

Пусть теперь X получается из A приклеиванием конечного семейства $\{e_1^2, \dots, e_n^2\}$ двумерных клеток. Рассуждая по индукции, предположим, что для $n-1$ клеток наше утверждение уже доказано и, значит, ядром эпиморфизма $\pi_1 A \rightarrow \pi_1 A'$, где $A' = A \cup e_1^2 \cup \dots \cup e_{n-1}^2$, является инвариантная подгруппа K' группы $\pi_1 A$, порожденная элементами $[\dot{e}_1^2], \dots, [\dot{e}_{n-1}^2]$. С другой стороны, согласно уже доказанному частному случаю (примененному к относительной клетке (X, A')), ядром эпиморфизма $\pi_1 A' \rightarrow \pi_n X$ является инвариантная подгруппа группы $\pi_1 A'$, порожденная образом элемента $[\dot{e}_n^2] \in \pi_1 A$ в группе $\pi_1 A'$. Но тогда ядром составного эпиморфизма $\pi_1 A \rightarrow \pi_1 A' \rightarrow \pi_n X$ будет, очевидно, инвариантная подгруппа группы $\pi_1 A$, порожденная подгруппой K' и элементом $[\dot{e}_n^2]$, т. е. подгруппа K .

Пусть, наконец, число двумерных клеток относительного клеточного пространства (X, A) бесконечно. Рассмотрим произвольный элемент ξ ядра $\text{Ker } i_*$ эпиморфизма $i_*: \pi_1 A \rightarrow \pi_1 X$. Так как при каждом непрерывном отображении двумерного диска E^2 в пространство X его образ — ввиду компактности — задевает лишь конечное число клеток из $X \setminus A$, то существует такое конечное семейство клеток $e_1^2, \dots, e_n^2 \in X \setminus A$, что ξ принадлежит ядру гомоморфизма $\pi_1 A \rightarrow \pi_1 X'$, где $X' = A \cup e_1^2 \cup \dots \cup e_n^2$. Следовательно, по уже доказанному ξ принадлежит инвариантной подгруппе группы $\pi_1 A$, порожденной элементами $[\dot{e}_1^2], \dots, [\dot{e}_n^2]$, и, значит, тем более, подгруппе K . Этим доказано, что $\text{Ker } i_* \subset K$ и, значит, что $\text{Ker } i_* = K$.

Тем самым при $n = 1$ предложение 2 полностью доказано. $\square$

Рассмотрим частный случай, когда A представляет собой одномерное клеточное пространство (граф), т. е. является остовом X^1 клеточного пространства X . Согласно теореме 2 Дополнения к лекции 1.6 группа $\pi_1 A = \pi_1 X^1$ является в этом случае свободной группой со свободными образующими $[\dot{e}^1]$, где e^1 пробегает все ребра графа X^1 , не принадлежащие фиксированному максимальному дереву $T \subset X^1$. Поэтому для любой двумерной клетки $e^2 \in X$ элемент $[\dot{e}^2] \in \pi_1 X^1$ представляет собой групповое слово от образующих $[\dot{e}^1]$, $e^1 \in X^1 \setminus T$, и, согласно предложению 2, группа $\pi_1 X$ будет изоморфна факторгруппе свободной группы $\pi_1 X^1$ по инвариантной подгруппе, порожденной словами $[\dot{e}^2]$. По определению это означает, что имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Фундаментальная группа $\pi_1 X$ произвольного связного клеточного пространства X имеет копредставление вида*

$$(4) \quad \pi_1 X = \langle [e^1], e^1 \in X^1 \setminus T; [\dot{e}^2] = 1, e^2 \in X^2 \setminus X^1 \rangle,$$

где T — некоторое максимальное дерево в X^1 . $\square$

Теоретически это полностью описывает группу $\pi_1 X$, но, конечно, на практике полезность этого результата ограничена клеточными пространствами, устройство которых достаточно просто, чтобы не только позволить выписать в явном виде все слова $[\dot{e}^2]$, но и получить копредставление (12), с которым можно эффективно работать.

Пример 1. Тор $X = S^1 \times S^1$ получается из квадрата $I \times I$ отождествлением противоположных сторон. Следовательно, он допускает клеточное разбиение, состоящее из одной вершины e^0 , двух ребер e_1^1, e_2^1 и одной двумерной клетки e^2 (см. рис. 13). Таким образом, его одномерный остов является букетом двух окружностей, и, значит, группа $\pi_1 X^1$ — свободной группой $F(a, b)$ с двумя образующими $a = [e_1^1]$ и $b = [e_2^1]$.

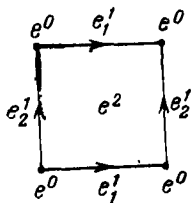


Рис. 13.

Кроме того, как непосредственно ясно из рисунка, приклеивающее отображение $\rho: S^1 \rightarrow X$ задает (при соответствующих ориентациях ребер e_1^1 и e_2^1) элемент $[e_1^1][e_2^1][e_1^1]^{-1}[e_2^1]^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ группы $F(a, b)$. Следовательно,

$$\pi_1 X = \langle a, b; aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle,$$

т. е. группа $\pi_1 X$ является свободной абелевой группой с двумя образующими (что полностью согласуется со следствием 2 леммы 1 лекции 4 при $X = Y = S^1$).

Пример 2. Проективное n -мерное пространство $\mathbb{R}P^n$ допускает клеточное разбиение $\{e^0, e^1, \dots, e^n\}$, имеющее в каждой размерности точно одну клетку. При этом для любого $m \leq n$ его m -мерный остов является пространством $\mathbb{R}P^m$, а отображение $\rho: S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$, приклеивающее следующую клетку e^{m+1} , представляет собой естественное двулистное накрытие, склеивающее антиподальные точки. Таким образом, в частности, одномерный остов $\mathbb{R}P^1$ является окружностью S^1 , а двумерный остов $\mathbb{R}P^2$ получается из S^1 приклеиванием диска E^2 по отображению $S^1 \rightarrow S^1$

степени 2. Поэтому группа $\pi_1 RP^n = \pi_1 RP^2$ является (при $n \geq 2$) группой с одной образующей $a = [e^1]$, подчиненной соотношению $2a = 1$, т. е. является циклической группой второго порядка:

$$\pi_1 RP = \mathbb{Z}/2, \quad n \geq 2.$$

Ср. с примером 1 лекции I.7.

Более интересные примеры мы рассмотрим в Дополнении к этой лекции.

Теорема 1 позволяет также доказать следующий «клеточный вариант» теоремы Зейферта — ван Кампена:

Предложение 4. Для любого пунктированного связного клеточного пространства X и любого его насыщенного покрытия $\{X_\alpha\}$, состоящего из связных клеточных подпространств, содержащих отмеченную точку, фундаментальная группа $\pi_1 X$ пространства X является пределом диаграммы $\{\pi_1 X_\alpha\}$:

$$\pi_1 X = \varinjlim \{\pi_1 X_\alpha\}.$$

Доказательство. Мы докажем это предложение при дополнительном предположении, что в X существует такое максимальное дерево T , что каждое пересечение $X_\alpha \cap T$ связно (и потому является максимальным деревом в X_α). Общее доказательство существования такого дерева основывается на малопрятных — и малопоучительных — комбинаторных рассуждениях, и вместе с тем в каждой конкретной ситуации это дерево, как правило, находится без всякого труда.

Если такое дерево T выбрано, то, согласно теореме 2,

$$\pi_1 X_\alpha = \langle E_\alpha; R_\alpha \rangle,$$

где E_α — множество символов вида $[e^1]$, $e^1 \in X_\alpha \setminus T$ (которые мы теперь для ясности обозначим через $[e^1]_\alpha$), а R_α — множество слов $[e^2]$, $e^2 \in X_\alpha^2 \setminus X_\alpha^1$. Поэтому, согласно предложению 2 из Дополнения к лекции I.6,

$$\varinjlim \{\pi_1 X_\alpha\} = \langle E; R \rangle,$$

где

$$E = \bigsqcup_\alpha E_\alpha, \quad R = \bigsqcup_\alpha R_\alpha \sqcup \bigsqcup_\alpha R_\alpha,$$

а R_α — для каждой стрелки $\alpha: a \rightarrow b$ — множество слов

вида $x_a^{-1}\xi(x_a, \alpha)$, где $x_a \in E_a$ и $\xi(x_a, \alpha)$ — слово над E_b , выражающее через образующие элемент $d(\alpha)x_a$ группы $G_a \cdots \pi_1 X_a$. Но в рассматриваемом случае стрелки $\alpha: a \rightarrow b$ — это пары индексов (a, b) , для которых $X_a \subset X_b$, а гомоморфизмы $d(\alpha)$ — соответствующие гомоморфизмы $\pi_1 X_a \rightarrow \pi_1 X_b$. Поэтому, если $x_a = [e^1]_a$, то $\xi(x_a, \alpha) = [e^1]_b$ и, значит, соответствующее соотношение из R_α имеет вид $[e^1]_a = [e^1]_b$. Таким образом, действие соотношений из $\sqcup R_\alpha$ состоит в том, что для каждого ребра $e^1 \in X^1 \setminus T$ они отождествляют в E все символы вида $[e^1]_a$, где a — произвольный индекс, для которого $e^1 \in X_a^1 \setminus T$, т. е., другими словами, заменяют E множеством всех символов $[e^1]$, $e^1 \in X^1 \setminus T$. При этом множество R превращается в множество всех соотношений вида $[e^2] = 1$, где $e^2 \in X^2 \setminus X^1$. Следовательно,

$$\lim_{\leftarrow} \{\pi_1 X_a\} = \langle [e^1], e^1 \in X^1 \setminus T; [e^2] = 1, e^2 \in X^2 \setminus X^1 \rangle.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что, согласно теореме 2, это в точности копредставление группы $\pi_1 X$. $\square$

Замечание 4. Предложение 4 можно доказать иначе — более геометрическим способом, если воспользоваться замечанием 3 из Дополнения к лекции 1.3. Однако построение соответствующих окрестностей U_a является довольно деликатной задачей. Действительно, пользуясь конструкциями из доказательства предложения 2 Дополнения к лекции 1, можно без особого труда построить для клеточных подпространств X_a окрестности U_a , деформационно ретрагирующиеся на X_a , но обеспечить насыщенность получающегося покрытия $\{U_a\}$ столь просто не удастся. Читателю будет очень полезно тщательно продумать этот вопрос.

Вернемся теперь к предложению 2 при $n > 1$.

Для каждой $(n+1)$ -мерной клетки $e_\alpha \in X^{n+1} \setminus A$ характеристическое отображение $\chi_\alpha: E^{n+1} \rightarrow X$, предполагаемое раз навсегда выбранным и зафиксированным, мы можем считать отображением

$$(E^{n+1}, S^n, s_0) \rightarrow (X, A, x_\alpha), \quad x_\alpha = \chi_\alpha(s_0),$$

задающим поэтому элемент $[\chi_\alpha]^*$ группы $\pi_{n+1}(X, A, x_\alpha)$. Предполагая, как и выше, что для любой точки x_α в A выбран путь u_α , соединяющий с этой точкой отмеченную

точку $x_0 \in A$, мы можем построить элемент $u_\alpha^\# [\chi_\alpha] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0) = \pi_{n+1}(X, A)$. Мы будем обозначать этот элемент символом $[e_\alpha]$, опуская указание на его зависимость от пути u_α (и выбора характеристического отображения χ_α).

Как мы знаем из лекции I.8, группа $\pi_{n+1}(X, A)$, подобно группе $\pi_n A$, является $\pi_1 A$ -модулем (при $n=1$, вообще говоря, скрещенным), а гомоморфизм $\partial: \pi_{n+1}(X, A) \rightarrow \pi_n A$ — гомоморфизмом модулей. Поскольку ядро $\text{Ker } i_*$ гомоморфизма (1) совпадает с образом $\text{Im } \partial$ гомоморфизма ∂ , а построенные выше элементы $[e_\alpha] \in \pi_n A$ являются, очевидно, не чем иным, как образами элементов $[e_\alpha]$ при гомоморфизме ∂ , предложение 2 непосредственно вытекает (даже при $n=1$) из следующего, чуть более общего, предложения.

Предложение 5. Для любого клеточно n -связного ($n \geq 1$) относительного клеточного пространства (X, A) группа $\pi_{n+1}(X, A)$ порождается как $\pi_1 A$ -модуль элементами $[e_\alpha]$, $e_\alpha \in X^{n+1} \setminus A$.

При этом в случае, когда X является элементарным клеточным расширением размерности $n+1$ пространства A , можно доказать и большее:

Предложение 6. Для любого элементарного $(n+1)$ -мерного ($n \geq 1$) клеточного расширения X связного пространства A группа $\pi_{n+1}(X, A)$ является свободным $\pi_1 A$ -модулем (при $n=1$ — свободным скрещенным $\pi_1 A$ -модулем) со свободными образующими $[e_\alpha]$, $e_\alpha \in X \setminus A$.

Отметим важный для следующего семестра частный случай:

Следствие 1. Для любого клеточного пространства X и любого $n \geq 2$ группа $\pi_n(X^n, X^{n-1})$ является свободным $\pi_1 X$ -модулем (при $n=2$ — свободным скрещенным $\pi_1 X^1$ -модулем) со свободными образующими $[e^n]$, $e^n \in X^n \setminus X^{n-1}$.

При $n=0$ или $n=1$ «группы» $\pi_0(X^0, X^{-1}) = \pi_0(X^0)$ и $\pi_1(X^1, X^0)$ будут лишь пунктированными множествами.

Как мы уже знаем, предложение 5 (а значит, и предложение 2) является тривиальным следствием предложения 6, которое поэтому нам и нужно только доказать. Мы сделаем это сначала в дополнительном предположении, что пространство A односвязно и, следовательно, $\pi_1 A$ -модули являются обыкновенными абелевыми группами.

Предложение 7. Для любого элементарного $(n+1)$ -мерного ($n \geq 1$) клеточного расширения X связного и

односвязного пространства A группа $\pi_{n+1}(X, A)$ является свободной абелевой группой со свободными образующими $[e_\alpha]$, $e_\alpha \in X \setminus A$.

Доказательство. Пусть сначала A состоит только из одной точки, и, значит, X является букетом $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{n+1}$ сфер S_{α}^{n+1} размерности $n+1$. Согласно следствию 1 из предложения 2 лекции 4, обобщенному на любое число слагаемых и примененного к случаю, когда все слагаемые являются сферами, для любого $r \leq 2n+1$ имеет место равенство

$$\pi_r \left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{n+1} \right) = \bigoplus_{\alpha} \pi_r S_{\alpha}^{n+1},$$

и, в частности,

$$\pi_{n+1} \left(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{n+1} \right) = \bigoplus_{\alpha} \pi_{n+1} S_{\alpha}^{n+1}.$$

Поскольку группа $\pi_{n+1} S_{\alpha}^{n+1}$ является свободной циклической группой с образующей $[e_\alpha]$, это доказывает предложение 7 при $A = \text{pt}$.

В общем случае мы рассмотрим отображение факторизации $\varphi: (X, A) \rightarrow (X/A, \text{pt})$. По уже доказанному группа $\pi_{n+1}(X/A)$ является свободной абелевой группой со свободными образующими $[\varphi \circ \chi_\alpha] = \varphi_*[e_\alpha]$. С другой стороны, в условиях предложения 7, согласно теореме 1 лекции 7, индуцированный отображением φ гомоморфизм

$$\varphi_*: \pi_{n+1}(X, A) \rightarrow \pi_{n+1}(X/A)$$

является изоморфизмом. Поэтому группа $\pi_{n+1}(X, A)$ также будет свободной абелевой группой, а элементы $[e_\alpha]$ будут ее свободными образующими. $\square$

Следствие 1. Для любого связного и односвязного клеточного пространства X группа $\pi_n(X^n, X^{n-1})$, $n \geq 3$, является свободной абелевой группой со свободными образующими $[e_\alpha]$, $e_\alpha \in X^n \setminus X^{n-1}$. $\square$

В частности, группа $\pi_{2n}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ является свободной циклической группой с образующей $[e^{2n}]$. Этот факт нам уже известен из лекции 6. На нем основывается определение инварианта Хопфа для элементов группы $\pi_{2n-1} S^n$.

Чтобы доказать предложение 6 в общем случае (для неодносвязного A), нам нужны будут некоторые дополнительные замечания о накрытиях (см. лекцию 1.6).

Как мы знаем из лекции I.5, для любого $n \geq 2$ каждое накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм

$$(5) \quad p_*: \pi_n \tilde{X} \rightarrow \pi_n X.$$

Предполагая пространство X накрываемым, мы рассмотрим случай, когда $p: \tilde{X} \rightarrow X$ является универсальным (= односвязным) накрытием пространства X . Поскольку в этом случае пространство $\tilde{X}$ односвязно, мы можем элементы группы $\pi_n \tilde{X}$ интерпретировать как классы свободно гомотопных непунктированных отображений $f: S^n \rightarrow \tilde{X}$, и потому каждый автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } \tilde{X}$ накрытия p будет определять (по формуле $\varphi_*[f] = [\varphi \circ f]$) некоторый автоморфизм φ_* группы $\pi_n \tilde{X}$. С другой стороны, из лекции I.6 мы знаем, что группа $\text{Aut } \tilde{X}$ автоморфизмов накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1 X$ пространства X . Следовательно, обозначив автоморфизм $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, соответствующий элементу $\xi \in \pi_1 X$, символом φ_ξ и положив $\xi\alpha = (\varphi_\xi)_*\alpha$, $\alpha \in \pi_n \tilde{X}$, мы определим действие $(\xi, \alpha) \mapsto \xi\alpha$ группы $\pi_1 X$ на группе $\pi_n \tilde{X}$. По общей же теории гомотопических групп группа $\pi_1 X$ действует на группе $\pi_n \tilde{X}$. Возникает вопрос, является ли по отношению к этим действиям изоморфизм (5) $\pi_1 X$ -изоморфизмом? Покажем, что ответ на этот вопрос утвердительный, т. е. что для любых элементов $\xi \in \pi_1 X$, $\alpha \in \pi_n \tilde{X}$ имеет место формула

$$(6) \quad p_*(\xi\alpha) = \xi p_*(\alpha).$$

Действительно, выбрав отмеченную точку $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, мы можем группу $\pi_n \tilde{X}$ отождествить с группой $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, а p_* — с изоморфизмом $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$, индуцированным пунктированным отображением p . Автоморфизм φ_ξ будет тогда пунктированным отображением $(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, где $\tilde{x}_1 = \varphi_\xi^{-1}(\tilde{x}_0)$, и потому будет индуцировать изоморфизм $(\varphi_\xi)_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \rightarrow \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Чтобы получить отсюда действие $(\xi, \alpha) \mapsto \xi\alpha$ группы $\pi_1 X$ на группе $\pi_n \tilde{X} = \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, следует выбрать путь $\tilde{u}$, соединяющий точку $\tilde{x}_0$ с точкой $\tilde{x}_1$, и посредством изоморфизма $\tilde{u}^*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ (в силу односвязности пространства $\tilde{X}$, не зависящего от пути $\tilde{u}$) отождествить группу $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ с группой

$\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Таким образом, $\xi\alpha = ((\varphi_\xi)_* \circ \tilde{u}^*)(\alpha)$, и потому

$$p_*(\xi\alpha) = (p \circ \varphi_\xi)_*(\tilde{u}^*(\alpha)) = p_*(\tilde{u}^*(\alpha)) = u^*(p_*\alpha),$$

где $u = p \circ \tilde{u}$ — образ пути $\tilde{u}$ в X . С другой стороны, тот факт, что путь $\tilde{u}$ соединяет точку $\tilde{x}_0$ с точкой $\tilde{x}_1 = \varphi_\xi^{-1}(\tilde{x}_0)$, означает, по определению, что этот путь накрывает петлю класса ξ , т. е. что $\xi = [u]^*$. Следовательно, $u^*(p_*\alpha) = \xi(p_*\alpha)$. Это, очевидно, доказывает формулу (6). $\square$

Чтобы релятивизировать этот результат, рассмотрим в пространстве X произвольное подпространство A (содержащее отмеченную точку $x_0 \in X$) и его прообраз $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ при накрытии $p: \tilde{X} \rightarrow X$. Согласно предложению 1 из Дополнения к лекции 1.8 для любого $n \geq 1$ (впрочем, нам интересен сейчас лишь случай $n \geq 2$) накрытие p , являясь расслоением, индуцирует изоморфизм

$$(7) \quad p_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow \pi_n(X, A),$$

и можно снова спросить, будет ли этот изоморфизм операторным. Однако здесь мы сталкиваемся с той трудностью, что в группе $\pi_n(X, A)$ действует группа $\pi_1 A$, а не группа $\pi_1 X$. Мы избежим обсуждения связанных с этим проблем, предположив, что подпространство A связно и что индуцированный вложением гомоморфизм $\pi_1 A \rightarrow \pi_1 X$ является изоморфизмом. Тогда подпространство $\tilde{A}$ будет, как легко видеть, связно и односвязно, и потому каждый автоморфизм $\varphi_\xi \in \text{Aut } \tilde{X}$, $\xi \in \pi_1 X$, будет отображением $(\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{A})$, и, значит, будет индуцировать некоторый автоморфизм группы $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{A})$ (в конструкции которой мы можем игнорировать отмеченные точки). Тем самым группа $\pi_1 X \approx \pi_1 A$ будет действовать в обеих группах $\pi_n(X, A)$ и $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{A})$, и то же самое рассуждение, что и выше, покажет нам, что равенство (6) остается в силе и в этом случае, т. е. что изоморфизм (7) является $\pi_1 X$ -изоморфизмом.

Чтобы применить эти результаты к клеточным пространствам, нам следует доказать, что *любое пространство, накрывающее клеточное пространство, также является клеточным пространством и что для любого клеточного пространства существует его односвязное накрытие*, т. е. что каждое клеточное пространство накрываемо. Впрочем, последнее утверждение немедленно вытекает из уже из-

вестных нам фактов, поскольку любое локально стягиваемое пространство — и, значит, в частности, любое клеточное пространство — очевидным образом локально связно и полулокально односвязно (даже локально односвязно) и потому (см. конец лекции I.6) накрываемо. Поэтому в доказательстве нуждается лишь первое утверждение.

Пусть A — связное хаусдорфово пространство, X — его элементарное клеточное расширение размерности $n \geq 1$ и $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — произвольное накрытие пространства X . Для любой клетки $e_\alpha \in X \setminus A$ мы, выбрав характеристическое для этой клетки отображение $\chi_\alpha: E^n \rightarrow X$, положим $x_\alpha = \chi_\alpha(s_0)$, где, как всегда, $s_0 = (1, 0, \dots, 0) \in E^{n-1} \subset E^n$. Пусть $p^{-1}(x_\alpha) = \{\tilde{x}_{\alpha\beta}\}$. Поскольку шар E^n односвязен, для любой точки $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ существует единственное отображение $\chi_{\alpha\beta}: E^n \rightarrow \tilde{X}$, накрывающее отображение χ_α и обладающее тем свойством, что $\chi_{\alpha\beta}(s_0) = \tilde{x}_{\alpha\beta}$.

Лемма 1. *Множество $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ тогда и только тогда открыто (в $\tilde{X}$), когда открыто (в $\tilde{A} = p^{-1}A$) пересечение $\tilde{U} \cap \tilde{A}$ и для любых α и β открыто (в E^n) множество $\chi_{\alpha\beta}^{-1}(\tilde{U})$.*

Доказательство. Поскольку пространство $\tilde{X}$ обладает базой $\{\tilde{V}\}$, состоящей из открытых множеств $\tilde{V}$, которые посредством p гомеоморфно отображаются на открытые множества пространства X , и поскольку множество $\tilde{U}$ тогда и только тогда открыто, когда для любого элемента $\tilde{V}$ этой базы открыто пересечение $\tilde{U} \cap \tilde{V}$, мы без ограничения общности можем предполагать, что $\tilde{U}$ содержится в некотором элементе $\tilde{V}$ базы $\{\tilde{V}\}$. Поскольку такое множество $\tilde{U}$ открыто тогда и только тогда, когда открыто (в X) множество $U = p(\tilde{U})$, причем $U \cap A = p(\tilde{U} \cap \tilde{A})$ и $\chi_\alpha^{-1}(U) = \bigcup_\beta \chi_{\alpha\beta}^{-1}(\tilde{U})$, для завершения доказательства остается заметить, что, по определению топологии в X , множество $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда открыты множества $U \cap A$ и $\chi_\alpha^{-1}(U)$. $\square$

Ясно, что множества $e_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}(E^n)$ попарно не пересекаются (когда индексы α различны, это вытекает из того, что не пересекаются соответствующие клетки e_α , а когда индексы α совпадают, — из единственности накрывающего отображения в категории TOP^* ; см. след-

ствие 1 теоремы 1 лекции I.6) и вместе с $\tilde{A}$ их замыкания $\bar{e}_{\alpha\beta}$ покрывают $\tilde{X}$ (в силу леммы 1 множество $\tilde{A} \cup \bigcup_{\alpha, \beta} \bar{e}_{\alpha\beta}$ одновременно открыто и замкнуто, и потому — ввиду связности пространства $\tilde{X}$ — совпадает с $\tilde{X}$). Отображение p на $\bar{e}_{\alpha\beta}$, будучи непрерывным отображением компактного пространства на хаусдорфово пространство $\bar{e}_{\alpha}$, представляет собой эпиоморфизм, в силу равенства $p \circ \chi_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha}$ биективно отображающий открытое множество $e_{\alpha\beta}$ на открытое множество e_{α} , т. е. являющийся относительным гомеоморфизмом $(\bar{e}_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta}) \rightarrow (\bar{e}_{\alpha}, e_{\alpha})$. Следовательно, отображение $\chi_{\alpha\beta}$ будет относительным гомеоморфизмом $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (\bar{e}_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta})$, т. е. множество $e_{\alpha\beta}$ будет клеткой. Поскольку, очевидно, $\bar{e}_{\alpha\beta} \subset \tilde{A}$, этим доказано, что пространство $\tilde{X}$ является элементарным клеточным расширением пространства $\tilde{A}$ с клетками $e_{\alpha\beta}$.

Теперь мы уже можем доказать анонсированное выше утверждение:

Предложение 8. Для любого накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ клеточного пространства X пространство $\tilde{X}$ обладает структурой клеточного пространства, по отношению к которой отображение p клеточно и, более того, гомеоморфно отображает каждую клетку пространства $\tilde{X}$ на некоторую клетку пространства X .

В частности, $p^{-1}(X^n) = \tilde{X}^n$ для каждого $n \geq 0$.

Доказательство. Согласно только что доказанному утверждению каждое подпространство $p^{-1}(X^n)$ является элементарным клеточным расширением размерности n подпространства $p^{-1}(X^{n-1})$. Поэтому нам нужно только доказать, что эти подпространства составляют фильтрацию пространства $\tilde{X}$, т. е. что множество $\bar{U} \subset \tilde{X}$ тогда и только тогда открыто в $\tilde{X}$, когда открыто (в $p^{-1}(X^n)$) каждое пересечение $\bar{U} \cap p^{-1}(X^n)$. При этом по тем же соображениям, что и выше, мы можем считать, что $\bar{U}$ содержится в открытом множестве V , гомеоморфно отображающемся посредством p на открытое множество пространства X , и потому открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $U = p(\bar{U})$. Но $p(\bar{U} \cap p^{-1}(X^n)) = U \cap X^n$, а так как отображение p , будучи накрытием, открыто, то пересечения $U \cap X^n$ тогда и только тогда

открыты, когда открыты пересечения $\bar{U} \cap p^{-1}(X^n)$. Для завершения доказательства остается вспомнить, что, по определению, множество $U \subset X$ тогда и только тогда открыто, когда открыты все пересечения $U \cap X^n$. $\square$

Теперь у нас все готово для доказательства предложения 6 в общем случае. В этом доказательстве мы — в соответствии с нашими общими установками — будем предполагать, что пространство A (а потому и пространство X) накрываемо. Кроме того, мы предположим, что $n > 1$ (случай $n = 1$ мы предоставим инициативе читателя; в принципе он нам не нужен, поскольку предложение 2 при $n = 1$ мы выше уже доказали).

Доказательство предложения 6 (при $n > 1$). Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — универсальное накрытие пространства X . Поскольку $n > 1$, пространство $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ связно и односвязно, причем согласно предложению 8 пространство $\tilde{X}$ будет элементарным клеточным расширением размерности $n+1$ пространства $\tilde{A}$ с клетками $e_{\alpha\beta}$, характеристические отображения $\chi_{\alpha\beta}$ которых являются поднятиями в $\tilde{X}$ характеристических отображений χ_α клеток $e_\alpha \in X \setminus A$, причем каждое такое поднятие однозначно определяется точкой $x_{\alpha\beta} \in p^{-1}(x_\alpha)$, $x_\alpha = \chi_\alpha(s_0)$. Следовательно, согласно предложению 7 группа $\pi_{n+1}(\tilde{X}, \tilde{A})$ является свободной абелевой группой со свободными образующими $[e_{\alpha\beta}] = [\chi_{\alpha\beta}]$.

Пусть x_α — та из точек $x_{\alpha\beta}$, которая является концом пути $\tilde{u}_\alpha$, накрывающего путь u_α , и пусть $\tilde{\chi}_\alpha$ — соответствующее характеристическое отображение. Тогда любая другая точка $x_{\alpha\beta} \in p^{-1}(x_\alpha)$ единственным образом представляется в виде $\varphi_\xi(\tilde{x}_\alpha)$ (и, значит, характеристическое отображение $\chi_{\alpha\beta}$ — в виде $\varphi_\xi \circ \tilde{\chi}_\alpha$), где $\xi \in \pi_1 X$, а φ_ξ , как и выше, — соответствующий автоморфизм накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$. По определению это означает, что в группе $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{A})$ имеет место равенство $[\chi_{\alpha\beta}] = \xi[\tilde{\chi}_\alpha]$.

С другой стороны, так как $n > 1$, то гомоморфизм $i_*: \pi_1 A \rightarrow \pi_1 X$ является изоморфизмом, и потому, согласно сделанным выше замечаниям, изоморфизм $p_*: \pi_{n+1}(\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow \pi_{n+1}(X, A)$ будет $\pi_1 X$ -изоморфизмом. В частности,

$$p_*([\xi[\tilde{\chi}_\alpha]]) = \xi p_*[\tilde{\chi}_\alpha] = \xi[p \circ \tilde{\chi}_\alpha] = \xi[\chi_\alpha] = \xi[e_\alpha].$$

Таким образом, как группа $\pi_1 A$ -модуль $\pi_{n+1}(X, A)$ является свободной абелевой группой со свободными образующими вида $\xi[e_\alpha]$, где ξ — произвольный элемент группы $\pi_1 A$, и, значит, как $\pi_1 A$ -модуль — свободным модулем со свободными образующими $[e_\alpha]$. [1]

Доказав предложение 6 (а значит, и предложение 2) мы, в частности, полностью описали гомоморфизм (1) при $r = n$. Аналогичное — но более сложное и потому практически бесполезное — описание этого гомоморфизма можно получить и при $r = n + 1$. Но уже при $r = n + 2$ никаких общих теорем о гомоморфизме (1) не известно. Таким образом, предложенный в начале лекции метод вычисления гомотопических групп индукцией по остовам останавливается уже на первом (или, если хотите, — втором) шаге.

ДОПОЛНЕНИЕ

Двумерные поверхности. — Эйлерова характеристика и трехмерные многообразия. — Вычисление фундаментальных групп некоторых трехмерных многообразий. — Перестройки многообразий. — Фундаментальные группы многообразий размерности $n \geq 4$. — Поведение фундаментальной группы при перестройках трехмерных многообразий. — Топические узлы и их группы. — Многообразие Дена.

В этом Дополнении мы рассмотрим несколько примеров вычисления фундаментальной группы. При этом для описания строения и свойств соответствующих пространств мы будем широко пользоваться геометрически наглядными соображениями, строгое обоснование которых увело бы нас слишком далеко в сторону.

Наглядно очевидно (и без труда строго доказывается), что любая *поверхность* (связное компактное триангулируемое двумерное многообразие) получается из некоторого многоугольника T с четным числом сторон попарным отождествлением его сторон. (Интересно, что при $n = 2$ требование триангулируемости излишне: как показал еще в 1925 г. венгерский математик Радо, любое связное компактное двумерное топологическое многообразие триангулируемо. Доказательство Радо опирается на теорему Жордана и в высшей степени кропотливо.)

Чтобы задать отождествления сторон многоугольника T , следует выписать его стороны друг за другом, обозначая отождествляемые стороны одним и тем же символом, если они отождествляются с сохранением ориентации, и символами вида a и a^{-1} , если они отождествляются с обращением ориентации. Получается слово от p символов $a_1, \dots, a_p$ и их формальных обратных $a_1^{-1}, \dots, a_p^{-1}$ (где $2p$ — число сторон многоугольника T), обладающее тем свойством, что при каждом $k = 1, \dots, p$ символы a_k и a_k^{-1} входят в него в совокупности ровно два раза. Каждое такое слово однозначно задает порядок отождествления сторон многоугольника T и, следовательно, некоторую поверхность X . Однако разные слова могут задавать одну и ту же поверхность. Посредством довольно простых преобразований слов, не меняющих соответствующую поверхность X (и описанных, например, в [2] и [4]), каждое слово можно привести к одному из следующих трех нормальных форм:

$$(0) \quad aa^{-1},$$

$$(p) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1},$$

$$[p] \quad a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_p a_p,$$

где $p \geq 1$.

В случае $[p]$ многоугольник T имеет $2p$ сторон, а соответствующая поверхность X является связной суммой p проективных плоскостей (сферой с p дырами, заклеенными листами Мёбиуса), в случае же (p) многоугольник T имеет $4p$ сторон, а поверхность X является связной суммой p торов (сферой с p ручками). В случае (0) многоугольник T следует представлять себе в виде окружности, разбитой на две полуокружности (эту фигуру можно назвать *двуугольником*), в результате склеивания которых получается дирижаблеподобная поверхность, гомеоморфная сфере.

Клеточное разбиение многоугольника T , состоящее из его вершин, сторон и внутренности, порождает клеточное разбиение поверхности X , имеющее одну двумерную клетку и вдвое меньшее число одномерных клеток. В частности, клеточное разбиение поверхности X , отвечающее нормальной форме (p) или $[p]$, $p \geq 1$, одновершинно и имеет соответственно $2p$ или p одномерных клеток, находящихся в биективном соответствии с символами $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ или $a_1, \dots, a_p$. Поэтому группу $\pi_1 X^{-1}$ можно отождествить со свободной группой с образующими $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ или соответственно $a_1, \dots, a_p$, причем групповым словом

$[c^2]$, отвечающим единственной двумерной клетке, будет как раз слово (p) или $[p]$. Следовательно, согласно теореме 1 лекции 9, *фундаментальная группа поверхности X в случае (p) имеет копредставление вида*

$$(1) \quad \pi_1 X = \langle a_1, b_1, \dots, a_p, b_p; \\ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} - 1 \rangle,$$

а в случае $[p]$ — копредставление вида

$$(2) \quad \pi_1 X = \langle a_1, \dots, a_p; a_1^2 \dots a_p^2 = 1 \rangle.$$

Ср. с примерами 1 и 2 в лекции 9.

Поскольку группы (1) и (2) попарно неизоморфны (почему?), мы получаем, в частности, что все поверхности (p) и $[p]$ различны. Таким образом, *поверхности (p) при $p \geq 0$ и $[p]$ при $p \geq 1$ без повторений исчерпывают все (компактные и связные) поверхности.*

Это утверждение известно как теорема классификации поверхностей. По существу, она была известна еще в XIX веке (Риману?), но аккуратные доказательства были впервые опубликованы, по-видимому, Левн (1929 г.) и Рейдемейстером (1932 г.).

Более интересная ситуация возникает при $n = 3$, т. е. для трехмерных (связных и компактных) многообразий (которые, кстати сказать, как показал в 1952 г. посредством весьма сложных конструкций американский математик Мойс, также необходимо триангулируемы; более простые доказательства — но основывающиеся на трудной предварительной технике — были впоследствии предложены Бингом и Кёрби с Зибенманном). Из триангулируемости непосредственно вытекает, что каждое такое многообразие получается из некоторого трехмерного многогранного тела T с четным числом граней попарным отождествлением граней. Вообще говоря, если мы возьмем произвольное многогранное тело T и попарно отождествим его грани, то получающееся пространство X (которое мы — за отсутствием лучшего термина — будем называть *трехмерным специальным псевдомногообразием*) может не быть многообразием: нетрудные примеры показывают, что окрестности некоторых его точек (получающихся из вершин тела T) могут быть гомеоморфны конусу над произвольной двумерной поверхностью. Удивительно, что, тем не менее, можно указать очень простое комбинаторное условие, необходимое и достаточное для того, чтобы

трехмерное специальное псевдомногообразие было многообразием (при $n > 3$ ничего подобного сделать нельзя).

Пусть p_k , $k = 0, 1, 2, 3$, — число k -мерных клеток псевдомногообразия X (так что $p_3 = 1$, а $2p_2$ равно числу граней тела T). Тогда оказывается, что *трехмерное специальное псевдомногообразие X тогда и только тогда является многообразием, когда*

$$(3) \quad p_0 - p_1 + p_2 = 1.$$

Хотя это утверждение и не относится, собственно говоря, к алгебраической топологии, его доказательство настолько элегантно и поучительно, что мы все же изложим его здесь (по модулю некоторых утверждений общего характера, которые будут доказаны нами в следующем семестре).

Для любого конечного (=компактного) клеточного пространства X альтернированная сумма

$$\chi(X) = p_0 - p_1 + \dots + (-1)^k p_k + \dots + (-1)^n p_n,$$

(где p_k — число k -мерных клеток пространства X , а n — его размерность) называется его *эйлеровой характеристикой* (а также *характеристикой Эйлера — Пуанкаре*).

Нам будут нужны следующие факты:

1°. *Эйлерова характеристика гомотопически инвариантна*, т. е. гомотопически эквивалентные клеточные пространства имеют одинаковые эйлеровы характеристики. (Этот глубокий факт мы докажем в следующем семестре, отождествив эйлерову характеристику χ с другим числом $\bar{\chi}$, которое гомотопически инвариантно по определению.)

Поскольку $\chi(pt) = 1$, из 1° следует, что *эйлерова характеристика любого стягиваемого пространства (в частности, любого конуса SX) равна единице*.

2°. *Эйлерова характеристика каждого нечетномерного замкнутого многообразия равна нулю*. (Это вытекает из так называемой теоремы двойственности Пуанкаре, которую мы также докажем в следующем семестре; точнее, из этой теоремы вытекает равенство нулю упомянутого в 1° числа $\bar{\chi}$.)

3°. *Эйлерова характеристика произвольной двумерной поверхности не превосходит двух и равна двум тогда и только тогда, когда эта поверхность гомеоморфна сфере*. (Это непосредственно вытекает из сформулированной выше

теоремы классификации двумерных поверхностей, поскольку для поверхностей (p) эйлерова характеристика равна, очевидно, $2 - 2p$, а для поверхностей $[p]$ она равна $2 - p$.)

4°. Для любой клеточной триады $(X; A, B)$ с $X = A \cup B$ имеет место равенство

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(C), \quad \text{где } C = A \cap B.$$

(Эго немедленно вытекает из определения.)

Рассмотрим теперь условие (3). Так как для специального псевдомногообразия X имеет место равенство $p_3 = 1$, то это условие означает, что $\chi(X) = 0$. Следовательно, ввиду утверждения 2° условие (3) необходимо, и потому в доказательстве нуждается лишь его достаточность.

Ясно, что любая точка единственной трехмерной клетки специального псевдомногообразия X обладает окрестностью, гомеоморфной открытому трехмерному шару. Более того, так как каждая двумерная клетка псевдомногообразия X получается из двух двумерных граней тела T , то для произвольной точки этой клетки любая достаточно малая ее окрестность будет получаться склеиванием двух полушаров в T , примыкающих к этим граням, и потому также будет гомеоморфна шару.

Одномерные клетки (ребра) специального псевдомногообразия X получаются, вообще говоря, из любого числа ребер тела T . Однако если ребро склеилось из m ребер тела T , то для произвольной точки этого ребра любая достаточно малая ее окрестность будет склеиваться из m «апельсиновых долек» и потому снова будет гомеоморфна шару. Следовательно, в трехмерном специальном псевдомногообразии X окрестности, не гомеоморфные шару, могут иметь только его вершины. При этом оказывается, что

5°. Каждая вершина e_i^0 , $i = 1, \dots, p_0$, клеточного пространства X обладает такой окрестностью U_i , что:

1) граница $\bar{U}_i - U_i$ окрестности U_i является двумерной поверхностью, а замыкание $\bar{U}_i$ окрестности U_i — конусом над этой поверхностью;

2) замыкания $\bar{U}_i$ окрестностей U_i не пересекаются, и существует клеточное разбиение пространства X (даже триангуляция), по отношению к которому замыкания $\bar{U}_i$ и границы $\bar{U}_i - U_i$ окрестностей U_i являются клеточными подпространствами.

(Наглядно это свойство, по существу, очевидно, но его аккуратное доказательство требует определенной техники, выходящей за рамки нашего изложения.)

В силу свойства 5° утверждение, что X является многообразием, равносильно утверждению, что для любого $i = 1, \dots, p_0$ поверхность $\dot{U}_i$ представляет собой сферу (поскольку только над сферой конус является шаром), т. е. (см. утверждение 3°), что $\chi(\dot{U}_i) = 2$. Таким образом, все свелось к доказательству того, что из $\chi(X) = 0$ следует $\chi(\dot{U}_i) = 2$ для любого $i = 1, \dots, p_0$.

С этой целью мы рассмотрим клеточное пространство

$$Y = X \setminus U, \quad \text{где } U = U_1 \cup \dots \cup U_{p_0},$$

получающееся удалением из псевдомногообразия X всех окрестностей U_i . Так как триада $(X; Y, \bar{U})$ клеточна и $X = Y \cup \bar{U}$, то, согласно свойству 4°,

$$\chi(X) = \chi(Y) + \chi(\bar{U}) - \chi(\dot{U}),$$

где $\dot{U} = \bar{U} \cap Y = \dot{U}_1 \cup \dots \cup \dot{U}_{p_0}$, а так как каждое пространство $\bar{U}_i$ является конусом, то $\chi(\bar{U}_i) = 1$ и, значит, $\chi(\bar{U}) = p_0$. Поэтому, если $\chi(X) = 0$, то $\chi(\dot{U}) = \chi(Y) + p_0$.

С другой стороны, ясно, что Y является многообразием с краем $\dot{U}$ и, следовательно, если мы возьмем два экземпляра многообразия Y и склеим их по общему краю, то получится замкнутое многообразие $2Y$ (называемое *дублем* многообразия Y). При этом, согласно тому же свойству 4°,

$$\chi(2Y) = 2\chi(Y) - \chi(\dot{U}),$$

а ввиду свойства 2° $\chi(2Y) = 0$. Следовательно, $\chi(\dot{U}) = 2\chi(Y)$ и, значит, $\chi(Y) = p_0$, т. е.

$$\chi(\dot{U}) = \chi(\dot{U}_1) + \dots + \chi(\dot{U}_{p_0}) = 2p_0,$$

что ввиду неравенств $\chi(\dot{U}_i) \leq 2$ возможно только тогда, когда $\chi(\dot{U}_i) = 2$ для любого $i = 1, \dots, p_0$.

Тем самым достаточность условия (1) полностью доказана. $\square$

Вернемся теперь к собственно алгебраической топологии.

Эффективность структуры трехмерного специального псевдомногообразия столь высока, что методы лекции 9

позволяют для каждого такого пространства немедленно выписать некоторое копредставление его фундаментальной группы. Таким образом, в частности, мы обладаем эффективным алгоритмом вычисления фундаментальной группы любого трехмерного многообразия (представленного в виде специального псевдомногообразия).

При разборе соответствующих примеров многогранник T удобно представлять себе спроектированным на сферу S^2 , т. е. считать его гранями многоугольные области на сфере, ограниченные отрезками больших кругов.

Пример 1. Простейшим многогранником на сфере является *двугранник*, гранями которого являются две полусферы сферы S^2 . Разбив соответствующий экватор на h равных дуг, мы можем считать эти грани h -угольниками. Отождествление граней мы зададим ортогональным преобразованием, являющимся композицией отражения в плоскости экватора и поворота вокруг перпендикулярной оси на угол $2\pi p/h$, где p — некоторое число, взаимно простое с h . Получающееся специальное псевдомногообразие X имеет, как легко видеть, в каждой размерности $k=0, 1, 2, 3$ по одной клетке e^k . Следовательно, условие (3) для него выполнено, и оно является многообразием. (Нетрудное рассуждение — которое мы предоставим читателю — показывает, что на самом деле это пространство является линзовым пространством $L[p, h]$ из примера 2 лекции 1.7.) Двумерная клетка e^2 получается при этом из полусферы сферы S^2 , а одномерная клетка e^1 — из каждой дуги, на которые разбит экватор. Поскольку эти дуги отождествляются с сохранением ориентации, отсюда следует, что элемент $[e^2]$ группы $\pi_1 X^1$ равен a^h , где $a = [e^1]$ — образующая группы $\pi_1 X^1$, отвечающая клетке e^1 , т. е. что фундаментальная группа $\pi_1 X$ пространства X имеет копредставление вида $\langle a; a^h = 1 \rangle$ и, значит, является циклической группой $\mathbb{Z}/h$ порядка h . (Ср. с примером 2 лекции 1.7.)

Пример 2. Более сложный пример мы получим, приняв за T октаэдр и отождествив в нем противоположные грани, повернутые на $\pi/3$. В стереографической проекции на плоскость этот многогранник изображен на рис. 14. (Отождествляемые элементы обозначены на этом рисунке одинаковыми символами.) Получающееся специальное клеточное пространство X имеет одну вершину, четыре одномерных клетки (изображенные на рис. 14 символами a, b, c и d) и четыре двумерные клетки (изображенные на рис. 14

римскими цифрами). Поэтому это пространство также является многообразием. Элементы a, b, c, d порождают группу $\pi_1 X$, а соответствующие определяющие соотношения, как непосредственно видно из рис. 14, имеют вид

$$abc = 1, \quad adb = 1, \quad acd = 1, \quad bdc = 1.$$

Из второго и третьего соотношения следует, что $d = a^{-1}b^{-1}$ и $c = a^{-1}ba$. Подставив эти значения d и c в первое и четвертое соотношения, мы для образующих $s = a$ и $t = b^{-1}$ получим соотношения

$$(4) \quad \begin{aligned} st^{-1}s^{-1}t^{-1}s &= 1, \\ t^{-1}s^{-1}ts^{-1}t^{-1}s &= 1. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (st^{-1}s^{-1}t^{-1}s)(t^{-1}s^{-1}ts^{-1}t^{-1}s)^{-1} &= \\ &= st^{-2}st, \end{aligned}$$

из соотношений (4) следует, что $st^{-2}st = 1$, т. е. что $st = t^2s^{-1}$ и $t^{-1}s^{-1} = st^{-2}$. Поэтому в силу первого из соотношений (4) $s \cdot st^{-2} \cdot t^{-1}s = 1$, т. е. $s^2t^{-3}s = 1$, и значит, $t^3 = s^3$. Следовательно, $tst = t^3s^{-1} = s^2$, и потому $(st)^2 = stst = s^3$. Обратно, если $s^3 = t^3 = (st)^2$, то

$$\begin{aligned} st^{-1}s^{-1}t^{-1}s &= s \cdot (tst)^{-1} \cdot s = \\ &= s \cdot (s^{-1} \cdot (st)^2)^{-1} \cdot s = s \cdot (s^{-1} \cdot s^3)^{-1} \cdot s = 1, \end{aligned}$$

и $st^{-2}st = s \cdot (t^3 \cdot t^{-1})^{-1} \cdot st = s \cdot (sts)^{-1} \cdot st = 1$, а значит, и $t^{-1}s^{-1}ts^{-1}t^{-1}s = 1$.

Тем самым доказано, что

$$\pi_1 X = \langle s, t; s^3 = t^3 = (st)^2 \rangle.$$

Это известная в алгебре бинарная группа тетраэдра. Прямыми, хотя и довольно долгими вычислениями можно показать, что эта группа конечна и ее порядок равен 24.

З а м е ч а н и е 1. Существует простой почти автоматический прием вычисления порядка конечной группы G по ее копредставлению, заключающийся в систематической нумерации всех элементов группы G . Номера элементов группы располагаются при этом в таблицы, взаимно однозначно соответствующие соотношениям, причем единице группы дается номер 1. Первый и последний столбец каждой таблицы состоит из всех номеров от 1 до n , где n — порядок группы. (Заполнять эти столбцы надо не сразу, а одновре-

менно с заполнением других столбцов.) Линии, разделяющие столбцы таблицы, отвечающей соотношению $t_{i_1}^{\varepsilon_1} t_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \dots t_{i_k}^{\varepsilon_k} = 1$, где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k = \pm 1$, отмечаются последовательно символами $t_{i_1}^{\varepsilon_1}, t_{i_2}^{\varepsilon_2}, \dots, t_{i_k}^{\varepsilon_k}$. Таблицы обладают тем свойством, что соседние элементы a_1 и a_2 одной строчки тогда и только тогда разделены линией с отметкой $t_{i_i}^{\varepsilon_i}$, когда в группе G имеет место равенство $a_2 = a_1 t_{i_i}^{\varepsilon_i}$ (мы отождествляем элементы с их номерами). Таблицы последовательно заполняются с соблюдением этого свойства, причем на каждом этапе сначала заполняются все места, какие только возможно, а затем новый номер помещается на любое свободное место справа от уже заполненного. Если процедура не останавливается, это означает, что группа бесконечна.

Таким образом, начальный шаг алгоритма состоит в том, что в верхнюю клетку первого и последнего столбца каждой таблицы помещается элемент 1. Если перед некоторым шагом в таблицах уже содержатся элементы $1, \dots, m$, то на этом шаге ищется свободная клетка, находящаяся рядом (слева или справа) от уже заполненной и которую с соблюдением указанного выше свойства таблиц можно заполнить некоторым (очевидно, единственным) из элементов $1, \dots, m$. Найдя такую клетку и заполнив ее соответствующим элементом, мы переходим к следующему шагу. В случае, когда такой свободной клетки нет, мы выбираем произвольную свободную клетку справа от уже заполненной и помещаем в нее число $m+1$ (одновременно записывая его на свое место в первый и последний столбец каждой таблицы). На этом шаг считается законченным. Алгоритм останавливается, когда свободных клеток не остается.

Например, для бинарной группы тетраэдра таблицы после начального этапа имеют вид

	s	s	s	t^{-1}	t^{-1}	t^{-1}			s	s	t^{-1}	s^{-1}	t^{-1}	
(I)							1		1					1
(II)														

Первая таблица отвечает соотношению $s^3 t^{-3} = 1$, а вторая — соотношению $s^2 t^{-1} s^{-1} t^{-1} = 1$.

Этап 2 начинается с того, что в таблице I справа от 1 мы пишем 2 и то же делаем в таблице II. Затем пишем 2 в начале и в конце второй строчки каждой таблицы. На этом этап 2 кончается. Затем справа от 2 мы всюду пишем 3. Кроме того, мы пишем 3 в начале и конце третьей строчки каждой таблицы (в дальнейшем мы не будем упоминать об этом обязательном шаге). На следующем этапе мы пишем 4 справа от 3 во всех строчках таблицы I и во второй и третьей строчках таблицы II. Затем мы пишем 5 справа от 4 в первой строчке таблицы I и во второй строчке таблицы II. Это вынуждает нас написать 4 слева от 5 в пятой строчке обеих таблиц. На следующем этапе мы завершаем заполнение первой строчки таблицы I числом 6, которое помещаем также перед числом 1 в первой строчке таблицы II. Кроме того, слева от 6 в шестой строке обеих таблиц мы пишем 5, а в первой таблице еще левее — 4. Наконец, в оставшемся месте первой строчки таблицы II мы пишем 7, что вынуждает нас написать 7 также в начале шестой строки, 3 в конце седьмой строки обеих таблиц и 4 слева от 3 в седьмой строке таблицы II. Тем самым мы получаем таблицы с заполненными первыми строками:

	s	s	s	t^{-1}	t^{-1}	t^{-1}			s	s	t^{-1}	s^{-1}	t^{-1}	
(I)	1	2	3	4	5	6	1		1	2	3	7	6	1
	2	3	4				2		2	3	4	5		2
	3	4					3		3	4				3
	4						4		(II)	4				4
	5					4	5			5			4	5
	6	7			4	5	6			6	7		5	6
	7					3	7			7		4	3	7

Дальнейшее заполнение идет точно так же, причем после заполнения 24-й строчки никаких пустот не остается. Тем самым построение обрывается, и порядок рассматриваемой группы оказывается равным 24.

В процессе вычислений можно ошибиться и обозначить новым числом элемент уже занумерованный. В этом никакой беды нет, поскольку рано или поздно ошибка сама собой вскроется. Например, для бинарной группы тетраэдра тот факт, что четвертый элемент четвертой строки таблицы I равен 1, выясняется только в конце вычислений.

Пример 3. Замечательное трехмерное многообразие получится, когда за T мы примем додекаэдр и отождествим его противоположные грани, повернутые на $\pi/5$. См. стереографическую проекцию на рис. 15.

В этом случае имеется пять вершин (обозначенные на рис. 15 символами O, P, Q, R, S), десять ребер (0—9 на рис. 15) и шесть двумерных клеток (I—VI на рис. 15). Одномерный остов имеет вид, изображенный на рис. 16.

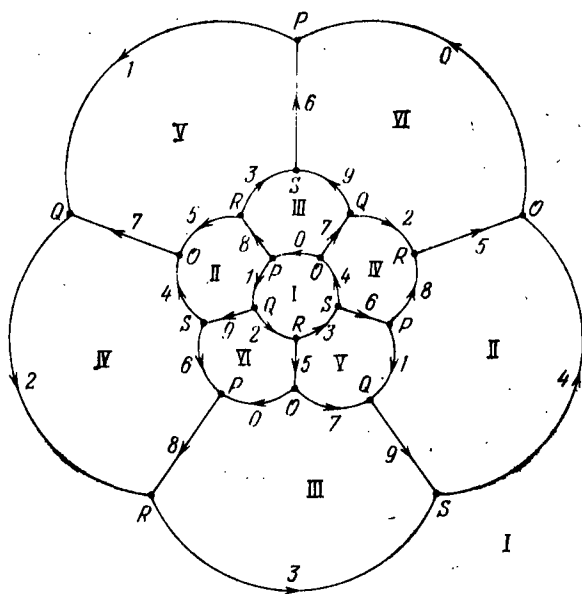


Рис. 15.

Приняв за максимальное дерево подграф, состоящий из ребер 0, 7, 5 и 3 (он изображен на рис. 16 утолщенными линиями), мы получим для группы $\pi_1 X$ шесть образующих 1, 2, 4, 6, 8 и 9, которые должны быть подчинены шести соотношениям. Чтобы найти эти соотношения, надо для каждой грани додекаэдра выписать последовательность ее ребер и заменить в полученном слове светлые цифры темными, выбросив цифры, входящие в дерево. Сделав это, мы получим соотношения

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 124 &= 1, & \text{(III)} \quad 89^{-1} &= 1, & \text{(V)} \quad 16 &= 1, \\ \text{(II)} \quad 1948^{-1} &= 1, & \text{(IV)} \quad 28^{-1}6^{-1}4 &= 1, & \text{(VI)} \quad 6^{-1}9^{-1}2 &= 1. \end{aligned}$$

В частности, $9 = 8 = 26$, $6 = 1^{-1}$ и $4 = 2^{-1}1^{-1}$. Исключив с помощью этих соотношений образующие 9, 8, 6 и 4 и положив $a = 1$ и $b = 2$, мы получим для группы $\pi_1 X$

копредставление

$$\pi_1 X = \langle a, b; abab^{-1}a^{-2}b^{-1} = 1, ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1} = 1 \rangle.$$

Из первого соотношения этого копредставления следует, что $ba^{-1}b^{-1}a = ab$, а из второго — что $b^2a^{-1}b^{-1}a = ab$. По-

этому $a^2 = abab^{-1} \cdot ba^{-1}b^{-1}a = = ba^2 \cdot ab = ba^3b$. Для $c = ab^{-1}$ отсюда немедленно получаются соотношения $a^4 = cac$ и $c^2 = aca$, и, значит, соотношения $a^5 = (ac)^2 = c^3$. Поскольку эти выкладки полностью обратимы, тем самым доказано, что

$$(5) \pi_1 X = \langle a, c; a^5 = (ac)^2 = c^3 \rangle.$$

Это — известная бинарная группа икосаэдра. Она конечна и ее порядок равен 120.

В прокоммутированной группе $\pi_1 X$, т. е. в ее факторгруппе по коммутанту, для образующих a и c имеют место соотношения $a^5 = a^2c^2 = c^3$, из которых следует, что $a = c = 1$. Следовательно, эта группа тривиальна. Отсюда вытекает (см. следующий семестр), что пространство X является так называемой гомологической сферой. Любопытно, что разнообразные попытки построить трехмерную гомологическую сферу с конечной фундаментальной группой все приводят к пространству X . (См. по этому поводу обзор Кёрби Р., Шарлеман М. Восемь ликов гомологической трехмерной сферы Пуанкаре. — УМН, 1982, 37, № 5 (227), с. 139—159). Можно поэтому думать, что роль этого пространства в топологии трехмерных многообразий должна быть весьма значительной.

Чтобы получить гомологическую сферу X хотя бы одним другим способом, нам придется начать довольно издалека.

Узлом в n -мерном ($n \geq 3$) замкнутом многообразии M называется произвольная простая замкнутая линия l , лежащая в M . Если маленький открытый шарик заставить скользить своим центром по узлу l , то он заметет некоторое множество, называемое *трубкой* вдоль узла. Если для любого достаточно маленького шарика замыкание соответствующей трубки гомеоморфно произведению $S^1 \times E^{n-1}$ окрестности на $(n-1)$ -мерный шар, то узел называется *руч-*

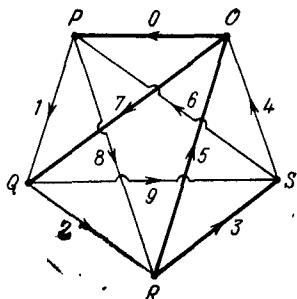


Рис. 16.

ным узлом. В гладком многообразии любой гладкий узел является ручным, а в триангулируемом многообразии ручным будет любой полигональный узел.

Пусть l — ручной узел в многообразии M и U — некоторая трубка вдоль l , замыкание $\bar{U}$ которой гомеоморфно произведению $S^1 \times E^{n-1}$. Тогда множество $\bar{M} = M \setminus U$ будет многообразием с краем $\dot{U} = \bar{U} \setminus U$, гомеоморфным произведению $S^1 \times S^{n-2}$. Говорят, что многообразие $\bar{M}$ получено из многообразия M *высверливанием трубки* вдоль узла l .

Пусть $\bar{V}$ — произведение $E^2 \times S^{n-2}$ двумерного диска E^2 на сферу S^{n-2} . Край $\dot{V}$ этого произведения, являясь произведением $S^1 \times S^{n-2}$, гомеоморфен краю $\dot{U}$ многообразия $\bar{M}$. Выбрав произвольный гомеоморфизм $\dot{U} \rightarrow \dot{V}$ и отождествив соответствующие точки, мы, очевидно, получим новое замкнутое многообразие M' . Говорят, что многообразие M' получено из многообразия M *перестройкой* (или *хирургией*) вдоль узла l . (Наглядно, M' получается из M вырезанием произведения $S^1 \times E^{n-1}$ с последующей вклейкой на его место произведения $E^2 \times S^{n-2}$.)

Проследим изменение фундаментальной группы при переходе от M к M' .

С этой целью мы рассмотрим разложение $M = \bar{U} \cup \bar{M}$ многообразия M в объединение многообразий с краем $\bar{U}$ и $\bar{M}$ и применим к нему теорему Зейферта — ван Кампена. (Конечно, строго говоря, как мы уже объясняли в своем месте, здесь нужно перейти к открытым окрестностям подпространств $\bar{U}$, $\bar{M}$ и $\bar{U} \cap \bar{M} = \dot{U}$, деформационно на них ретрагирующимся; кроме того, нужен специальный разговор по поводу отмеченных точек, но всю эту технику мы предоставим читателю, который уже безусловно должен ею владеть.) Поскольку замкнутая трубка $\bar{U}$ гомеоморфна произведению $S^1 \times E^{n-1}$, ее фундаментальная группа $\pi_1 \bar{U}$ является бесконечной циклической группой, образующей которой служит гомотопический класс петли $\bar{a}$, однократно оббегающей центральную линию этой трубки. Поэтому при гомоморфизме $\pi_1 \bar{U} \rightarrow \pi_1 M$, индуцированном вложением, класс $\bar{a}$ переходит в класс петли l (который мы также будем обозначать через l).

Пусть сначала $n \geq 4$. Тогда группа $\pi_1 \dot{U}$ также будет бесконечной циклической группой, причем гомоморфизм

$\pi_1 \bar{U} \rightarrow \pi_1 \bar{U}$, индуцированный вложением, будет переводить образующую в образующую. Поэтому в силу теоремы Зейферта—ван Кампена группа $\pi_1 \bar{M}$ будет изоморфна группе $\pi_1 M$.

Применив теперь теорему Зейферта—ван Кампена к разложению $M' = \bar{V} \cup \bar{M}$ и заметив, что $\pi_1 \bar{V} = 1$ (при $n \geq 4$), мы немедленно найдем, что при $n \geq 4$ группа $\pi_1 M'$ получается из группы $\pi_1 \bar{M} \approx \pi_1 M$ наложением соотношения $1 = 1$.

Поскольку любой элемент фундаментальной группы $\pi_1 M'$ многообразия M размерности ≥ 3 может быть реализован ручным узлом (наглядно очевидный факт) и поскольку процедуру перестройки можно повторять любое число раз, этим, в частности, доказано, что для любого многообразия M размерности ≥ 4 и любой конечно порожденной инвариантной подгруппы R группы $\pi_1 M$ существует многообразие M , получающееся из многообразия M некоторой последовательностью перестроек, фундаментальная группа которого изоморфна факторгруппе $\pi_1 M/R$.

С другой стороны, если мы возьмем два многообразия M_1 и M_2 одной и той же размерности $n \geq 2$, высверлим в каждом из них по шару (который можно считать сколь угодно малым) и склеим получившиеся многообразия с краем по некоторому гомеоморфизму их краев, то в результате получится новое многообразие M , которое называется *связной суммой* многообразий M_1 и M_2 . (Мы не будем сейчас обсуждать вопрос о зависимости многообразия M от имеющегося в его построении произвола.) Автоматическое применение теоремы Зейферта—ван Кампена показывает при этом, что при $n \geq 3$ фундаментальная группа $\pi_1 M$ многообразия M является свободным произведением фундаментальных групп $\pi_1 M_1$ и $\pi_1 M_2$ многообразий M_1 и M_2 .

В частности, отсюда следует, что фундаментальная группа связной суммы m экземпляров произведения $S^1 \times \dots \times S^{n-1}$ (имеющего фундаментальную группу $\mathbb{Z}$) будет свободной группой с m образующими. В соединении с полученным выше результатом это дает нам, что при $n \geq 4$ для любой конечно представимой группы G существует n -мерное многообразие с фундаментальной группой G .

Замечание 2. Напротив, отнюдь не любая группа может быть фундаментальной группой трехмерного мно-

гообразия. Эффективная характеристика этих групп пока получена лишь при тех или иных алгебраических ограничениях. Например, в следующем семестре мы покажем, что среди отличных от нуля абелевых групп фундаментальными группами трехмерных многообразий могут быть, кроме циклических групп $\mathbb{Z}/h$ и $\mathbb{Z}$, лишь две группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ и $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (и эти группы действительно реализуются: $\pi_1 L[p, h] = \mathbb{Z}/h$, $\pi_1(S^1 \times S^2) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ и $\pi_1(S^1 \times S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$).

Пусть теперь $n = 3$. Тогда край $\dot{U}$ трубки U является тором $S^1 \times S^1$, и потому группа $\pi_1 \dot{U}$ представляет собой свободную абелеву группу с двумя образующими a и b . Выбор этих образующих зависит от выбора гомеоморфизма $S^1 \times S^1 \rightarrow \dot{U}$, и если — что естественно предполагать — этот гомеоморфизм является ограничением гомеоморфизма $S^1 \times E^2 \rightarrow \bar{U}$, то при гомоморфизме вложения $\pi_1 \dot{U} \rightarrow \pi_1 \bar{U}$ образующая a будет переходить в образующую $\bar{a}$, а образующая b — в единицу. Поэтому, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — образы элементов a и b при гомоморфизме вложения $\pi_1 \dot{U} \rightarrow \pi_1 \bar{U}$, то гомоморфизм вложения $\pi_1 \tilde{M} \rightarrow \pi_1 M$ будет переводить элемент $\bar{a}$ в элемент l , а элемент $\bar{b}$ — в единицу. Отсюда следует, что группа $\pi_1 M$ получается из группы $\pi_1 \tilde{M}$ наложением соотношения $\bar{b} = 1$.

Аналогично, для разложения $M' = \bar{V} \cup \tilde{M}$ группа $\pi_1 \bar{V}$ при $n = 3$ является бесконечной циклической группой с образующей $\bar{c}$, отвечающей центральной линии полнотория $\bar{V} \approx E^2 \times S^1$, причем в группе $\pi_1 \bar{V} = \pi_1 \dot{U}$ теперь естественно выбрать образующие c и d , обладающие тем свойством, что при гомоморфизме вложения $\pi_1 \dot{U} \rightarrow \pi_1 \bar{V}$ образующая c переходит в образующую $\bar{c}$, а образующая d — в единицу. Поэтому, если $\bar{c}$ и $\bar{d}$ — образы элементов c и d в группе $\pi_1 \tilde{M}$ при гомоморфизме вложения $\pi_1 \dot{U} \rightarrow \pi_1 \tilde{M}$, то группа $\pi_1 M'$ будет получаться из группы $\pi_1 \tilde{M}$ наложением соотношения $\bar{d} = 1$.

Тем самым доказано следующее предложение:

Предложение 1. При $n = 3$ обе группы $\pi_1 M$ и $\pi_1 M'$ являются факторгруппами одной и той же группы $\pi_1 \tilde{M}$, получающимися наложением соотношений $\bar{b} = 1$ и $\bar{d} = 1$ соответственно. $\square$

Так как образующие a, b и c, d свободной абелевой группы $\pi_1 U$ связаны соотношениями вида

$$c = a^p b^q, \quad d = a^r b^s,$$

где p, q, r, s — такие целые числа, что

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = 1,$$

то аналогичными соотношениями будут связаны и элементы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ группы $\pi_1 \tilde{M}$. Кроме того, $\bar{a} \mapsto l$ при гомоморфизме вложения $\pi_1 \tilde{M} \rightarrow \pi_1 M$. К сожалению, этой информации, вообще говоря, недостаточно, чтобы вычислить группу $\pi_1 M'$. Нужна еще дополнительная информация о расположении в M узла l .

Мы рассмотрим этот вопрос в наиболее важном частном случае $M = S^3$. В этом случае, многообразие $\tilde{M} = S^3 \setminus U$ называется *дополнительным пространством узла l* , а его фундаментальная группа — *группой узла*. (Ясно, впрочем, что $\tilde{M}$ является деформационным ретрактом дополнения $S^3 \setminus l$, так что группой узла l можно считать фундаментальную группу $\pi_1(S^3 \setminus l)$ этого дополнения.)

В теории узлов (см., например, [3]) разработаны эффективные, но в общем виде описываемые довольно сложно, алгоритмы вычисления группы произвольного (ручного) узла. В конечном счете все они основываются на теореме Зейферта—ван Кампена, и мы ограничимся здесь тем, что непосредственно с помощью этой теоремы вычислим группы нескольких простейших узлов (см. также [4], гл. IV, п. 6).

Мы будем пользоваться тем замечательным фактом, что сфера S^3 является объединением двух полноториев с общим краем, т. е., другими словами, в сфере S^3 можно найти тор T^2 , разбивающий сферу на две области, замыкания каждой из которых являются полноториями. Проще всего этот факт усматривается, если сферу S^3 трактовать как единичную сферу двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, т. е. как множество всех пар (z_1, z_2) комплексных чисел, для которых $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Действительно, тогда точки (z_1, z_2) , для которых $|z_1| = |z_2| = 1/\sqrt{2}$, будут, очевидно, составлять тор $T^2 \subset S^3$. Этот тор разбивает сферу S^3 на две области, замыкания $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$, которых характеризуются соответственно неравенст-

вами $|z_1| \leq |z_2|$ и $|z_1| \geq |z_2|$. Но если, например, $|z_1| \leq |z_2|$, то заведомо $z_2 \neq 0$, и потому определено комплексное число $z = z_1/z_2$, принадлежащее единичному кругу E^2 , $|z| \leq 1$, плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного. При этом соответствие $(z_1, z_2) \mapsto (z, e^{i\varphi})$, где $e^{i\varphi} = z_2/|z_2|$, будет, очевидно, гомеоморфизмом $\bar{D}_1 \rightarrow E^2 \times S^1$. Аналогично, гомеоморфизм $\bar{D}_2 \rightarrow E^2 \times S^1$ задается соответствием $(z_1, z_2) \mapsto (z_2/z_1, z_1/|z_1|)$.

Конечно, разбивать сферу S^3 на два полнотория будет не только построенный тор, но и любой тор, являющийся образом тора T^2 при произвольном гомеоморфизме $S^3 \rightarrow S^3$. (О таком торе мы будем говорить, что он *стандартно расположен* в S^3 .)

Для геометрической наглядности сферу S^3 можно (посредством, скажем, стереографической проекции) отождествить с пространством $\mathbb{R}^3 \cup \infty$, получающимся из пространства $\mathbb{R}^3$ присоединением бесконечно удаленной точки ∞ . При этом T^2 совпадет с тором в $\mathbb{R}^3$, получающимся при вращении окружности $(x - \sqrt{2})^2 + z^2 = 1$ в плоскости xz вокруг оси z .

Говорят, что два узла в S^3 (или в $\mathbb{R}^3$) *эквивалентны*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $S^3 \rightarrow S^3$ (или соответственно $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$), переводящий первый узел во второй. Узел называется *тривиальным узлом*, если он эквивалентен центральной линии $z=0$ полнотория $\bar{D}_1$. Так как дополнительным пространством узла $z=0$ является полноторие $\bar{D}_2$, то группой тривиального узла является бесконечная циклическая группа.

При естественном отождествлении тора T^2 с факторпространством $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ каждая прямая $y=kx$, $0 < k < \infty$, в $\mathbb{R}^2$ определяет некоторую линию в T^2 . При k иррациональном эта линия всюду плотна в T^2 (это — так называемая *иррациональная обмотка тора*), а при $k=m/n$ рациональном, она представляет собой замкнутую простую линию, т. е. узел в S^3 , который m раз обегает тор по меридиану и n раз по параллели. См. на рис. 17 случай $m=2$, $n=3$. (На рис. 17 дан вид сверху. Наглядно этот узел

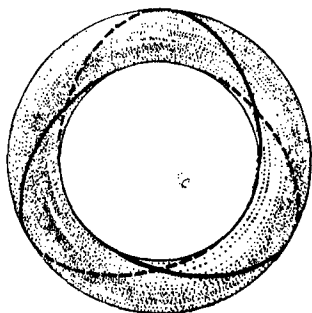


Рис. 17.

изображен на рис. 18, выполненном как и следующий рис. 19 по эскизу А. В. Хохлова.) Такой узел (а также любой узел, ему эквивалентный) называется *торическим узлом типа (m, n)* . Здесь m и n — любые взаимно простые натуральные числа, подчиненные условию $m < n$. (При $m > n$ получаются, очевидно, те же узлы.)

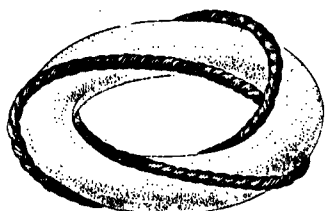


Рис. 18.

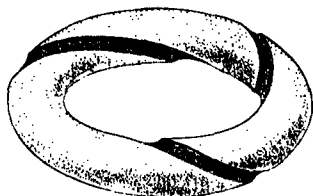


Рис. 19.

Чтобы вычислить группу торического узла $l = l_{m, n}$, мы, высверлив вдоль него трубку U , разложим дополнение $S^3 \setminus U$ в объединение двух множеств $D'_1 = D_1 \setminus U$ и $D'_2 = D_2 \setminus U$, каждое из которых является полноторием, на границе которого выдолблен узкий желобок (см. рис. 19). Ясно, что этот желобок не влияет на фундаментальную группу, так что каждая из групп $\pi_1 D'_1$ и $\pi_1 D'_2$ будет бесконечной циклической группой, образующая которой представляется центральной линией соответствующего полнотория. Что же касается пересечения $D_0 = D'_1 \cap D'_2$, то оно состоит из всех точек тора T^2 , не принадлежащих трубке U , и представляет собой ленту, обвивающую этот тор m раз по меридиану и n раз по параллели. Поэтому, во-первых, группа $\pi_1 D_0$ будет бесконечной циклической группой, образующая a которой представляется центральной линией ленты D_0 . Во-вторых, рассматриваемая как кривая на желобчатом полнотории D'_1 линия a будет гомотопна m раз взятой центральной линии этого полнотория, так что гомоморфизм вложения $\pi_1 D_0 \rightarrow \pi_1 D'_1$ будет переводить образующую a в m -ю степень x^m образующей x группы $\pi_1 D'_1$. Аналогично, гомоморфизм вложения $\pi_1 D_0 \rightarrow \pi_1 D'_2$ будет переводить образующую a в n -ю степень y^n образующей y группы $\pi_1 D'_2$. Поэтому предел диаграммы

$$\pi_1 D'_1 \leftarrow \pi_1 D_0 \rightarrow \pi_1 D'_2,$$

т. е. по теореме Зейферта—ван Кампена группа $\pi_1(S^3 \setminus U) = \pi_1(S^3 \setminus l)$ узла l , будет свободным произведением бесконечных циклических групп $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$ с объединенными

подгруппами (x^m) и (y^n) . Это означает, что группа $\pi_1(S^3 \setminus l)$ торического узла $l = l_{m,n}$ имеет представление вида

$$(6) \quad \pi_1(S^3 \setminus l) = \langle x, y; x^m = y^n \rangle.$$

Легкое алгебраическое рассуждение (использующее полученное в Дополнении к лекции I.6 описание структуры свободных произведений) показывает, что для различных пар (m, n) , $1 < m < n$, группы (6) не изоморфны (и не изоморфны группе $\mathbb{Z}$). Следовательно, все торические узлы $l_{m,n}$, $1 < m < n$, не тривиальны и не эквивалентны друг другу.

Полученной информации о торических узлах уже достаточно, чтобы вычислять фундаментальные группы многообразий, получающихся из сферы S^3 перестройками вдоль таких узлов.

Пример 4. Рассмотрим перестройку вдоль простейшего нетривиального торического узла $l = l_{2,3}$ типа $(2, 3)$ (так называемого *трилистника*). Согласно только что произведенному исследованию фундаментальная группа $\pi_1 \tilde{M}$ многообразия $\tilde{M} = S^3 \setminus U$ имеет две образующие x и y , подчиненные соотношению $x^2 = y^3$. При этом элементы x и y задаются центральными линиями полноторий, на которые содержащий узел l тор T^2 разбивает сферу S^3 , т. е., наглядно говоря, линиями, однократно обегаящими тор T^2 снаружи и внутри. Что же касается фундаментальной группы $\pi_1 \tilde{U}$ края $\tilde{U}$ трубки U , то одна из ее образующих будет задаваться центральной линией a ленты D_0 (сдвинутой на край этой ленты), а другая — линией b , однократно обегаящей трубку U . При этом, как уже было сказано выше при разборе общего случая, петля a будет задавать в группе $\pi_1 \tilde{M}$ элемент $x^2 = y^3$. Что же касается петли b , то, как легко видеть — например, непосредственно из чертежа, — эта петля будет задавать в группе $\pi_1 \tilde{M}$ элемент yx^{-1} . В введенных выше обозначениях это означает, что элементы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ группы $\pi_1 \tilde{M}$ выражаются формулами

$$\tilde{a} = x^2, \quad \tilde{b} = yx^{-1}.$$

(Заметим, что, как и должно быть по общей теории, при наложении соотношения $\tilde{b} = 1$ группа $\pi_1 \tilde{M}$ делается тривиальной группой $\pi_1 S^3 = 1$). Чтобы задать перестройку,

нам нужно задать гомеоморфизм $\dot{U} \rightarrow \dot{V}$, т. е. задать в группе $\pi_1 \dot{U}$ новый базис $\{c, d\}$ (легко видеть, что любой выбор базиса может быть реализован некоторым гомеоморфизмом). Мы определим этот базис формулами

$$c = ab^6, \quad d = a^{-1}b^{-5}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1.$$

Тогда, согласно предложению 1, фундаментальная группа $\pi_1 M'$ получающегося в результате перестройки многообразия M' будет факторгруппой группы $\pi_1 \dot{M}$ по соотношению $\tilde{d} = 1$, где $\tilde{d} = \tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-5} = x^{-2}(yx^{-1})^{-5} = x^{-2}(xy^{-1})^5$, т. е. будет иметь копредставление

$$\pi_1 M' = \langle x, y; x^2 = y^5 = (xy^{-1})^5 \rangle,$$

переходящее при подстановке $a = xy^{-1}$, $c = y$ в копредставление (5) бинарной группы икосаэдра. Этим доказано, что многообразие M' имеет ту же фундаментальную группу, что и гомологическая сфера из примера 3. (Можно доказать, что на самом деле многообразие M' гомеоморфно этой гомологической сфере, но это требует методов, выходящих за рамки нашего изложения.) Впервые многообразие M' построил, по-видимому, Ден.

Список содержит только книги. Из литературы на иностранных языках указаны лишь две книги, существенно использованные в настоящих «Лекциях».

1. Введение в топологию (коллектив авторов). — М.: Высшая школа, 1980.

Элементарный учебник, предназначенный для студентов 1–3 курсов университетов. В гл. 3 кратко рассмотрены гомотопические группы вообще и фундаментальная группа в частности.

2. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — М.; Л.: ГОНТИ, 1938.

В основном книга посвящена теории гомотий, но рассмотрены также фундаментальная группа и накрывающие пространства. В общетеоретической части книга безнадежно устарела, но содержащийся в ней обширный геометрический материал делает ее все еще интересной. Часть этого материала использована нами в Дополнении к лекции 9.

3. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. — М.: Мир, 1967.

Книга отличается исключительной аккуратностью и подробностью изложения. Кроме собственно теории узлов, изложены алгебраическая теория представлений групп, фундаментальная группа и теорема Зейферта — ван Кампена (называемая авторами теоремой ван Кампена).

4. Масси У., Столлингс Д. Алгебраическая топология. Введение. — М.: Мир, 1977.

Книга написана выдающимся американским топологом Масси (имя Столлингса попало на титул из-за того, что к русскому переводу книги Масси приложен перевод небольшого сочинения Столлингса по теории трехмерных многообразий). Является превосходным, рассчитанным на начинающих, элементарным введением в теорию фундаментальных групп и накрывающих пространств (а также двумерных поверхностей).

5. Милнор Дж. Топология с дифференциальной точки зрения. — В кн. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.

Изложены простейшие применения гладкой топологии к алгебраическим задачам. См. лекцию 1.7.

6. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд-во МГУ, 1980.

Изложены топологические вопросы ориентировано в сторону гладких многообразий. Доказана теорема классификации двумерных поверхностей. Приведено на стр. 351 «доказательство» триангулируемости двумерных поверхностей нуждается в обосновании.

7. Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. — М.: Наука, 1985.

Детальное изложение знаменитых результатов Л. С. Понтрягина о связи гомотопических групп сфер с группами классов оснащенных подмногообразий.

8. Постников М. М. Введение в теорию Морса. — М.: Наука, 1971.
В гл. 2 изложены основные факты, связанные с понятием гомотопической эквивалентности, а гл. 3 посвящена теории клеточных пространств.
9. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1981.
В лекции 8 дано альтернативное изложение теории накрывающих пространств без ссылок на теорию гомотопий.
10. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
Обстоятельное изложение начальных понятий и теорем, касающихся клеточных пространств, гладких многообразий, расселений и гомотопических групп. Более глубокие теоремы специального характера в книге не рассматриваются. Для первоначального изучения топологии книга мало пригодна, но как бесценный источник разнообразной (и, как правило, точной) информации должна быть под рукой у каждого тополога. Указания на стр. 48, 49, 55 и 57 «очевидные канонические гомеоморфизмы» являются, вообще говоря, лишь гомотопическими эквивалентностями (см. Дополнение к лекции 1.4 и лекцию 5).
11. Свистецер Р. Алгебраическая топология. Гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1984.
Посвященная в основном обобщенным теориям когомологий книга открывается главами, в которых разъясняются понятия H -группы и H -когруппы, вводятся гомотопические группы и клеточные пространства и доказываются основные теоремы гомотопической теории клеточных пространств. Отсюда заимствованы доказательства предложений 3 и 4 в лекции 3, симплициального варианта Вспомогательной теоремы в Дополнении к лекции 2 и теоремы Блейккера — Массе в лекции 7.
12. Стирод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. — М.: Физматгиз, 1958.
Классическое — и до сих пор остающееся, по существу, непревзойденным — изложение аксиоматической теории гомологий. С материалом настоящих «Лекций» пересекается фактически не связанная с предыдущими главами заключительная гл. XI «Приложения к евклидовым пространствам», в которой излагаются разнообразные следствия теоремы о барабане (см. Дополнение к лекции 1.7).
13. Спенсер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.
Фактически единственный на русском языке учебник по алгебраической топологии, охватывающий все ее основные разделы. В нем подытожены результаты «классического периода» в развитии алгебраической топологии, и потому, несмотря на почти двадцать лет, прошедшие со дня выхода в свет английского оригинала, эта книга сохранила определенную свежесть до сего времени. Гл. 1 посвящена гомотопиям вообще и фундаментальной группе в частности, а гл. 2 — накрывающим пространствам и расслоениям. Высшие гомотопические группы и клеточные пространства рассматриваются в гл. 7 после теории гомологий.
14. Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию. — М.: Мир, 1966.
С настоящими «Лекциями» пересекается гл. 6 «Фундаментальная группа и накрывающие пространства» и Введение к части II (в котором вкратце изложены абсолютные и относительные гомотопические группы, пространства петель, расслоения и т. п.).
15. Хирш М. Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1979.
Превосходное, очень наглядное и вместе с тем вполне аккуратное изложение начальных сведений по теории гладких многообразий. В гл. 5 содержится теория степени (см. лекцию 1.7). Это — единственное на русском языке изложение этой теории, отличающееся как полнотой, так и аккуратностью.
16. Ху Сы-цзян. Теория гомотопий. — М.: Мир, 1964.
В первых главах (основные задачи и их частные случаи, расслоенные пространства и гомотопические группы) теории гомологий не используется. Изложение очень обстоятельное и подробное.
17. Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутеимахер В. Л. Гомотопическая топология. — М.: Изд-во МГУ, 1970.
Запись лекционного курса Д. В. Фукса. Гл. 1 посвящена теории гомотопий.

18. tom Dieck T., Kamps K. H., Puppe D., Homotopietheorie.—Lect. Notes Math., 157.—Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1970.

Основные понятия теории гомотопий изложены с общекатегорной точки зрения и с особым вниманием к двойственности. Дополнения к лекциям 1.1, 1.2, 1.3, 1.9 и 1.10 полностью заимствованы из этой книги.

19. Whitehead G. W. Elements of homotopy theory.—Grad. Texts Math., 61.—Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1978.

Обстоятельное изложение почти всех вопросов классической теории гомотопий. Владение теорией гомологий предполагается. Из этой книги заимствован материал Дополнений к лекциям 1.4 и 6. (Результаты лекций 6 и 8, хотя и принадлежат в основном Дж. Уайтхеду, но в его книге доказываются иначе — с использованием гомологических методов.)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиома А 113
-- Б 112
-- B_{fin} 138
-- ДО 152
-- ЛН 127
-- МВ 113
-- МВ_f 127
-- MV_{fin} 138
Амальгама гомотопическая 110
-- слабая 109
- Барцентрические координаты 58
Барцентрическое измельчение симплициальной схемы 63
-- триангуляции 67
- Вдавливание 95
Вершина клеточного пространства 24
-- симплициальной схемы 61
Вложение клеточное 23
Внутренность симплекса 60
- Геометрическая реализация симплициальной схемы 62
Гомоморфизм Хопфа -- Джеймса 276
-- Хопфа -- Уайтхеда 239
-- Хопфа -- Уайтхеда обобщенный 255
Градуированная алгебра Ли 172
Грань 61
Группа нкосаэдра бинарная 322
-- когомологий 298
-- коэффициентов 156
-- тетраэдра бинарная 318
-- узла 326
- Джойн 186
- Звезда 75
- Изоморфизм клеточный 23
Инвариант Хопфа 240
-- -- обобщенный 239
-- Хопфа -- Уайтхеда 239
-- Хопфа -- Хилтона 257
- Категория двойственная 102
-- замкнутая 106
-- козамкнутая 106
-- кополиная 106
-- полная 106
-- слабо козамкнутая 110
- Категория CELI 23
-- CW 23
Клетка 11
-- относительная 27
Клеточный эквивалент 86
-- -- пунктированный 91
Композиционное умножение 160
Конструкция Хопфа 191
- Лемма Йонеды 134
-- Уайтхеда аддитивная 249
- Мелкость триангуляции 67
Метастационарная гомотопическая группа сфер 53
Многообразие Дега 329
Множество предупорядоченное 106
-- -- направленное 141
- Наращивание 95
Независимая система точек 58
- Обмотка тора иррациональная 327
Операция гомотопическая 160
-- -- аддитивная 167
Остов 10
Отображение актиподальное 55
-- клеточное 23
-- полиномиальное 44
-- приклеивающее 11
-- симплициальное 74
-- сферы стянутое на севере 242
-- -- -- юге 242
-- характеристическое 11
-- л-связное 265
Отображения клеточно гомотопные 50
-- слабо гомотопные 131
-- финитно гомотопные 131
- Пара классифицирующая 103
-- клеточная 16
-- симплициальная 70
-- универсальная 115
-- финитно классифицирующая 126
Перестройка 323
Поверхность 311
Подпространство клеточное 16
Полнэдр 62
Предел обратный 105, 107
-- слабый 110
-- функтора 106
Примитивный элемент 167
Принцип индукции по фильтрации 18
Простой гомотопический тип 95

Пространство гомотопически полиоценное 39
 --- клеточное 15
 --- --- клеточно n -связное 24
 --- --- конечное 26
 --- --- конечномерное 25
 --- --- локально конечное 27
 --- --- одиовершинное 24
 --- --- относительное 10
 --- --- пунктированное 33
 --- --- счетное 26
 --- паракомпактное 37
 --- симплициальное 62
 --- счетно компактное 26
 --- типа (Π, n) 297
 --- убивающее 295
 --- Эйленберга — Маклейна 297

Разбиение клеточное 21
 --- --- минимальное 22
 Размерность клетки 11
 --- клеточного пространства 25
 --- --- расширения 10
 --- симплекса 58, 61
 --- симплициальной пары 72
 Расширение клеточное 10
 --- --- элементарное 10

Связная сумма 324
 Симплекс линейный 58
 --- симплициальной схемы 61
 Симплициальная аппроксимация 75, 77
 --- сфера 62
 --- схема 61
 --- --- полная 62
 --- --- упорядоченная 78
 Симплициальный цилиндр 80
 Система обратная 107
 Слабая гомотопическая эквивалентность 85, 90
 --- --- пунктированная 91
 Смеш-умножение внешнее 180
 --- внутреннее 182
 Стационарная гомотопическая группа сфер 53
 Стационарное гомотопическое кольцо сфер 178
 Степень отображения 54
 Супералгебра Ли 172
 Схема двойственная 107

Теорема Адамса 139
 --- Бернштейна 41
 --- Блейккера — Масси 267
 --- Борсука 15
 --- Брауна 112
 --- Вейерштрасса 41
 --- классификации поверхностей 313
 --- Уайтхеда 100
 --- Урысона 156
 --- Фрейденшталя 159
 --- ---, трудная часть 278
 --- Хилтона 257
 --- Хилтона — Милнора 231
 Тип отображения произведения сфер 235
 Тождество Баррата — Хилтона 182
 Триангуляция 67
 --- конечная 67
 --- локально конечная 67
 Трилистник 329

Узел 322
 --- винтовой 328
 --- ручной 323
 --- торический 328
 --- тривиальный 327
 Узлы эквивалентные 327
 Умножение Самельсона 198
 --- Уайтхеда 170, 190

Фильтрация клеточная 17
 Финитная гомотопическая эквивалентность 134
 Фуиктор непрерывный 101, 107
 --- полуточный 111, 138, 154
 --- представимый 102, 126, 139, 153, 154
 --- финитно гомотопически инвариантный 128

Характеристика Эйлера — Пуанкаре 314
 Хирургия 323

Эйлерова характеристика 314

N -эквивалентность 101
 ∞ -эквивалентность 98

Михаил Михайлович Постников
ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ
Теория гомотопий клеточных пространств

Редактор *Ф. И. Кизнер*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ 12541

Сдано в набор 22.05.84. Подписано к печати 16.01.85.
Формат 84×108^{1/32}. Вумага для глубокой печати. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 17,64.
Усл. кр.-отт. 17,64. Уч.-изд. л. 18,21. Тираж 5000 экз.
Заказ № 3049. Цена 2 р. 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054 Москва, Валовая, 28

Отпечатано в типографии № 2 издательства «Наука»
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6. Зяк. 1045