Софус Ли

ТЕОРИЯ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Часть 1

THEORIE

DER

TRANSFORMATIONSGRUPPEN

ERSTER ABSCHNITT

UNTER MITWIRKUNG VON Dr. FRIEDRICH ENGEL

BEARBEITET

VON

SOPHUS LIE,

PROFESSOR DER GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG



LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1888

Софус Ли

ТЕОРИЯ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Часть 1

При содействии Фридриха Энгеля

Перевод с немецкого
Л. А. Фрай

Под редакцией
А. В. Болсинова



Москва ♦ Ижевск

2011

УДК 512.64
ББК 22.143
Л55



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 09-01-07076

Интернет-магазин



http://shop.rcd.ru

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Ли С.

Теория групп преобразований: В 3-х частях: Часть 1. — М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. — 712 с.

В предлагаемой классической работе выдающийся норвежский математик Софус Ли систематизировал свои обширные исследования в области непрерывных групп преобразований, проводимых им с 1873 года. Монография, написанная при содействии немецкого математика Фридриха Энгеля, позволяет ознакомиться со всеми основными направлениями научного творчества С. Ли: непрерывными группами и их приложениями, контактными преобразованиями, дифференциальными уравнениями, а также его малоизвестными геометрическими исследованиями. Созданная С. Ли теория непрерывных групп, ныне называемая теорией групп Ли, оказала глубокое влияние на развитие оснований геометрии, топологии, теоретической физики.

ISBN 978-5-4344-0009-1 **ББК 22.143**

© Перевод на русский язык:
Институт компьютерных исследований, 2011

http://shop.rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Предисловие к переводу vii

Предисловие xiii

Введение 1

ГЛАВА 1. **Определение конечных непрерывных групп преобразований** 11

ГЛАВА 2. **Вывод основных дифференциальных уравнений** 29

ГЛАВА 3. **Однопараметрические группы и инфинитезимальные преобразования** 49

ГЛАВА 4. **Порождение r-параметрических групп при помощи однопараметрических** 73

ГЛАВА 5. **Полные системы** 91

ГЛАВА 6. **Новое понимание решений полной системы** 106

ГЛАВА 7. **Описание всех систем уравнений, допускающих данные инфиинитезимальные преобразования** 120

ГЛАВА 8. **Полные системы, допускающие все преобразования однопараметрической группы** 152

ГЛАВА 9. **Характеристические соотношения между инфинитезимальными преобразованиями группы** 163

ГЛАВА 10. **Системы дифференциальных уравнений в частных производных, общие решения которых зависят лишь от конечного числа произвольных констант** 192

ГЛАВА 11. **Определяющие уравнения для инфинитезимальных преобразований группы** 206

ГЛАВА 12. **Описание всех подгрупп r-параметрической группы** . 227

ГЛАВА 13. **Транзитивность, инварианты, примитивность** 236

ГЛАВА 14. **Описание всех систем уравнений, допускающих заданную r-параметрическую группу** 248

ГЛАВА 15. **Инвариантные семейства инфинитезимальных преобразований** 273

ГЛАВА 16. **Присоединенная группа** 300

ГЛАВА 17. **Структура и изоморфизм** 320

ГЛАВА 18. **Конечные группы, преобразования которых образуют дискретные непрерывные семейства** 344

ГЛАВА 19. **Теория подобия r-параметрических групп** 363

ГЛАВА 20. **Группы, преобразования которых перестановочны со всеми преобразованиями заданной группы** 406

ГЛАВА 21. **Группа параметров** 444

ГЛАВА 22. **Описание всех r-параметрических групп** 475

ГЛАВА 23. **Инвариантные семейства многообразий** 505

ГЛАВА 24. **Систатические и асистатические группы преобразований** 546

ГЛАВА 25. **Дифференциальные инварианты** 573

ГЛАВА 26. **Общая проективная группа** 608

ГЛАВА 27. **Линейные однородные группы** 634

ГЛАВА 28. **Подход к описанию всех конечных непрерывных групп n-мерного пространства** 656

ГЛАВА 29. **Характеристические свойства групп, подобных некоторым известным проективным группам** 678

Предисловие к переводу

Книга, которую Вы держите в руках, является уникальной. Wikipedia включает ее в список наиболее важных математических публикаций[1]. Трехтомный труд был написан Софусом Ли при содействии Фридриха Энгеля во второй половине XIX столетия, впервые издан на немецком языке в 1888–1893 годах в Лейпциге и с тех пор не переводился в полном объеме ни на один из языков мира.

В 90-х годах 20-го века Международный центр Софуса Ли начал большой издательский проект по переводу основных трудов С. Ли на русский язык. В частности, была переведена большая часть первого тома «Теории групп преобразований». К сожалению, этот перевод не был опубликован, а нам о его существовании стало известно, когда наша работа над первым томом была почти завершена. Мы хотели бы поблагодарить Б. П. Комракова за предоставленную нам рукопись перевода, выполненного А. Л. Онищиком, которая оказалась очень полезной для уточнения терминологии.

Предложенная Софусом Ли точка зрения на группы преобразований и полученные им результаты несомненно интересны и сегодня. Даже искушенный читатель почти наверняка найдет в книге много новых или малоизвестных фактов. Более того, после некоторой адаптации к современным обозначениям и терминологии этот трехтомник мог бы служить прекрасным учебником по теории групп и алгебр Ли, поскольку с концептуальной точки зрения изложение очень естественно, геометрически наглядно и практически не использует абстрактного языка, характерного для современной математической литературы. Суть происходящего не скрывается, автор подробно объясняет, что он делает и зачем.

Одним из вариантов адаптированного для современного читателя изложения теории Ли является, например, совсем недавно появившийся в arXiv'е перевод первой части на английский язык[2]:

Joël Merker, Theory of Transformation Groups
by Sophus Lie and Friedrich Engel (Vol. I, 1888)
Modern Presentation and English Translation

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_important_publications_in_mathematics
[2] arXiv:1003.3202v1 [math.DG] 16 Mar 2010

Желание переписать текст в более современных терминах возникало и у нас. Однако несмотря на легко предсказуемые трудности, с которыми может столкнуться читатель, мы решили строго следовать автору и переводить как можно ближе к оригиналу. Прежде всего потому, что книга исключительно интересна с исторической точки зрения, как своеобразный документ, показывающий зарождение одной из наиболее продуктивных математических теорий. Вызывает восхищение, насколько глубоко автору удалось понять и объяснить природу изучаемого объекта, не имея при этом того удобного аппарата, которым располагают математики сегодня.

Мы надеемся, что в ближайшие годы работа над переводом трехтомника на русский язык будет завершена, и он наконец увидит свет.

Комментарии к переводу терминов

Терминология, использованная Софусом Ли, существенно отличается от современной. Если читать книгу подряд с самого начала, то никакого дискомфорта это не вызывает, автор абсолютно последователен, его подход тщательно продуман и систематичен.

Однако чтобы и у читателя, открывшего книгу посередине на интересующей его главе, не возникало затруднений, мы позволим себе прокомментировать некоторые терминологические моменты.

- Конечные и бесконечные группы (endliche und unendliche Gruppen)

  Под *конечной* понимается конечномерная группа. Соответственно, говоря о *бесконечной* группе, С. Ли имеет в виду бесконечномерную группу, такую как, например, группа канонических или контактных преобразований. Отметим также, что очень часто С. Ли рассматривает все объекты локально, не интересуясь, в частности, глобальной топологией группы.

- r-параметрическая группа (r-gliedrige Gruppe)

  Хотя дословно *r-gliedrige* означает «r-членная», мы позволили себе перевести этот термин (более привычным образом) как «r-параметрическая». Сам С. Ли называет r числом (существенных) параметров. В современном контексте r — это размерность группы.

- Инфинитезимальные преобразования и конечные преобразования (infinitesimale Transformationen und endliche Transformationen)

В современном понимании инфинитезимальное, т. е. бесконечно малое, преобразование — это векторное поле, рассматриваемое как генератор однопараметрической группы, состоящей из «настоящих» преобразований, которые автор, чтобы подчеркнуть отличие от бесконечно малых, называет конечными. Другими словами, конечные преобразования — это элементы группы, а инфинитезимальные — элементы соответствующей алгебры Ли. При этом, разумеется, рассматриваются не абстрактные группы и алгебры Ли, а их действия на некотором гладком многообразии. Термин «конечный» часто используется автором как антоним к «бесконечно малому» и в других ситуациях.

- Структура (Zusammensetzung)

  Речь идет об алгебраической структуре алгебры Ли, т. е. по существу о наборе структурных констант c_{ijk}, задающих операцию в некотором фиксированном базисе: $[e_i, e_j] = \sum_k c_{ijk} e_k$.

- Равносоставленные группы (gleichzusammengesetze Gruppen)

  Термин «группа» Ли использует и для совокупности всех инфинитезимальных преобразований некоторой группы, т. е. в современной терминологии — для соответствующей алгебры Ли. «Равносоставленные» мы использовали вместо несколько хуже звучащего «равноструктурные». По смыслу наиболее адекватным было бы «имеющие одинаковые структуры». Это именно то, что имеется здесь в виду: равносоставленные — это имеющие одинаковую алгебраическую структуру, т. е. «изоморфные» на современном языке.
  Равносоставленные группы — это группы с изоморфными алгебрами Ли.

- Подобие групп, подобные группы (Ähnlichkeit [von Gruppen], ähnliche Gruppen)

  Поскольку Ли исследует не абстрактно заданные группы, а их действия на многообразиях, то основным отношением эквивалентности для него является изоморфизм действий. Две группы G_1 и G_2, с их заданными действиями $F_i : \mathbb{R}^n \times G_i \to \mathbb{R}^n$ на пространстве $\mathbb{R}^n$, называются подобными, если можно задать диффеоморфизмы $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\psi : G_1 \to G_2$ такие, что $\phi \circ F_1(x, g) = F_2(\phi(x), \psi(g))$. Другими словами, одно действие отличается от другого лишь некоторой заменой координат.

- Изоморфизм, голоэдрический и мероэдрический (holoedrischer und meroedrischer Isomorphismus)

Изоморфизмом автор называет линейное отображение «на» между алгебрами Ли, сохраняющее операцию, т. е. сюръективный гомоморфизм. Если $X_1, \ldots, X_r$ — базис в одной алгебре Ли векторных полей, а $Y_1, \ldots, Y_r$ — набор векторных полей, порождающий другую алгебру, то отображение, переводящее X_i в Y_i, называется изоморфизмом при условии, что

$$(X_i X_k) = \sum_{k=1}^{r} c_{iks} X_s \quad \text{и} \quad (Y_i\, Y_k) = \sum_{k=1}^{r} c_{iks} Y_s.$$

Здесь $(X_i X_j)$ обозначает скобку Ли векторных полей.

Если кроме того векторные поля $Y_1, \ldots, Y_r$ независимы, т. е. образуют базис в алгебре, то изоморфизм называется голоэдрическим, в противном случае — мероэдрическим. Другими словами, голоэдрический изоморфизм — это просто изоморфизм в современной терминологии, а мероэдрический — это сюръективный гомоморфизм с нетривиальным ядром.

- Равноправные подгруппы (gleichberechtigte Untergruppen)

  Речь идет о сопряженных подгруппах, т. е. подгруппах $H_1, H_2 \subset G$, связанных соотношением $H_2 = gH_1g^{-1}$ для некоторого $g \in G$.

- Инвариантные подгруппы (invariante Untergruppen)

  Инвариантной называется нормальная подгруппа. Такой термин является очень естественным в том подходе, который развивает автор. Эти подгруппы $H \subset G$ в случае групп преобразований характеризуются в точности тем свойством, что они остаются инвариантными при заменах переменных, задаваемых преобразованиями группы G.

- Группа параметров (Parametergruppe)

  По существу это и есть абстрактная группа Ли в современном понимании, рассматриваемая сама по себе без конкретного действия на многообразии, или, говоря точнее, действующая на самой себе левыми сдвигами.

- Система значений (Werthsystem)

  Системой значений называется упорядоченный набор чисел (координат) $(x_1, \ldots, x_n)$. Автор обычно делает различие между системой значений и ее геометрической реализацией как точки n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$. Много раз в книге он обращается к геометрической интерпре-

тации рассматриваемых аналитических конструкций, чтобы прокомментировать их более наглядно.

- Функциональный определитель (Funktionaldeterminante)

  Это определитель матрицы Якоби системы из n функций от n переменных:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

  Определитель матрицы с компонентами a_{ij} автор обычно записывает в виде $\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$.

- Выделенные преобразования (ausgezeichnete Transformationen)

  Речь идет об элементах группы или алгебры Ли, которые коммутируют со всеми остальными элементами, т. е. об элементах центра в современной терминологии.

- ∞^m

  Обозначение ∞^m используется в книге для m-параметрического семейства каких-либо объектов. Автор использует его как обычное числительное, что на самом деле очень удобно. Например, «∞^m многообразий» означает «m-параметрическое семейство многообразий».

- Скобка Ли векторных полей X и Y обозначается $(X\,Y)$. Автор часто называет ее комбинацией инфинитезимальных преобразований.

Несколько замечаний следует сделать и по поводу набора формул. Мы старались по возможности придерживаться авторского стиля, который немного отличается от общепринятого сейчас. Иногда это может выглядеть как опечатка. Например, вместо общепринятого $x_1, \ldots, x_r$ автор всюду использует $x_1 \cdots x_r$, или $x_1 + \varepsilon_1, \cdots x_r + \varepsilon_r$ вместо $x_1 + \varepsilon_1, \ldots, x_r + \varepsilon_r$. Мы позволили себе немного отойти от авторского варианта лишь дважды. Для обозначения логарифма Ли использует просто букву l, мы взяли обычное ln во избежание неправильного понимания формулы. Кроме этого, при суммировании Ли часто использует $\sum_1^r k$ или $\sum_k^{1\cdots r}$ вместо $\sum_{k=1}^r$, мы использовали последнее.

Полный алфавитный указатель терминов появится в конце 3-го тома.

Благодарности

Мы хотели бы поблагодарить А. В. Борисова, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» и издательство «Институт компьютерных исследований» за организацию и поддержку программы перевода на русский язык классических работ по математике и механике, одной из которых является эта книга, а также всех сотрудников издательства за помощь и оперативность в решении возникавших вопросов.

Работа над переводом была непростой, поскольку математические конструкции, терминология и речевые обороты, используемые автором, весьма своеобразны и порой существенно отличаются от принятых сегодня. В процессе работы мы неоднократно обращались за помощью к нашим коллегам. Прежде всего мы хотели бы выразить признательность за исключительно полезные комментарии Алексу Штромайеру, Евгению Ферапонтову и Борису Дуброву. Материалы, предоставленные издательству Б. П. Комраковым, оказались также очень полезными для нас.

Отдельное спасибо L & L, без которых мы бы за это дело никогда не взялись.

А. Болсинов и Л. Фрай
4 июня 2011 г.

Предисловие

В наше время в математике приобретает все большее значение и выходит на передний план понятие *группы*.

Из различных, известных ныне категорий групп в круг математических исследований попали прежде всего группы из теории подстановок, также называемые *конечными разрывными группами*. С тех пор как *Галуа* сделал свои открытия, понятие «группы подстановок» стало важнейшим в теории алгебраических уравнений; стоит лишь вспомнить изыскания последователей *Галуа*, в особенности г-на *К. Жордана*. В последнее время рассмотрению подвергаются также *бесконечные разрывные группы*. С другой стороны, начиная с 1876 г. различные математики, а именно *Ф. Клейн*, *Пуанкаре* и *Пикар*, с большим успехом применяли теорию конечных и бесконечных разрывных групп в теории функций.

От разрывных групп существенно отличаются группы, которые в предлагаемом читателю произведении называются *конечными непрерывными группами*. Последние характерны тем, что их аналитические выражения содержат определенные произвольные параметры. В качестве известных примеров подобных групп можно назвать совокупность всех движений, а также совокупность всех проективных преобразований пространства. Другими, также общеизвестными примерами являются: совокупность всех вращений вокруг точки и совокупность всех проективных преобразований, переводящих поверхность второго порядка в себя.

Только что упомянутые и многие другие конечные непрерывные группы, которые можно определить подобным образом, уже давно рассматривались в геометрии, однако при этом аспекты теории групп не были определяющими. Если не ошибаюсь, первыми работами, в которых понятие группы играет важную роль, являются исследования г-на *К. Жордана* о группах отображений. Но даже эти исследования носят совершенно особый характер, т. к. они касаются только одной определенной группы. Первые общие изыскания о конечных непрерывных группах по моим сведениям принадлежат моему перу.

Произведение, первую часть которого я здесь представляю, и при написании которого мне оказал надежную поддержку доктор *Энгель*, систематизирует обширные исследования в области конечных непрерывных групп,

проводимые мной с 1873 года; оно обобщает и дополняет многие труды, опубликованные большей частью в Христиании[3], в которых я изложил суть (а в некоторых — лишь результаты) своих изысканий. Поскольку эти исследования теперь имеют непосредственное отношение ко многим другим областям математики, и желательно разъяснить эти отношения, то будет уместным вкратце упомянуть о том, что изначально привело меня к созданию общей теории конечных непрерывных групп.

Исследования в области геометрии 1869–1871 гг. заставили меня обратить внимание на конечные непрерывные группы. Правда, сперва я ограничился тем, что перевел определенные важные непрерывные группы при помощи подходящих аналитических преобразований — алгебраических или трансцендентных контактных преобразований — в другие известные группы; в этом смысле данные работы носили специальный характер. Но мне хотелось бы отметить, что общее и очень похожее определение понятия «группа», относящееся как к непрерывным, так и к разрывным группам преобразований, я дал еще в 1871 г. Тогда же я поставил конкретную задачу описать все разрывные и все непрерывные группы, преобразования которых определяются при помощи *линейных* уравнений. Позже, как известно, многие математики успешно классифицировали все *разрывные* линейные группы от двух или трех однородных переменных, а я выявил все *непрерывные* линейные группы от двух, трех, а также, по существу, и от четырех однородных переменных.

Начатые мною в 1869 г. изыскания в области дифференциальных уравнений, допускающих непрерывную группу преобразований, также носили общий характер.

Я заметил, *что большинство обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрирование которых осуществляется старыми методами, остаются инвариантными относительно некоторых легко определяемых семейств преобразований, и что эти методы интегрирования состоят в использовании этого свойства*. Другими словами, я увидел, что понятие дифференциального инварианта конечной непрерывной группы встречается, хотя бы *неявно* и *в специальном виде*, в любом учебнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям. После того как я обобщил ряд старых методов интегрирования, я, естественно, поставил перед собой задачу разработать общую теорию интегрирования для всех обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих известные конечные или инфинитезимальные преобразования. При этом с самого начала было ясно, что соответствующие преобразования в каждом отдельном случае должны порождать группу.

[3] До 1924 г. название города Осло. — *Прим. перев.*

Вышеописанную задачу я самостоятельно поставил и решил. Пока я этим занимался, я вел оживленную переписку со своим другом, профессором *Феликсом Клейном*. Тот в свою очередь поставил перед собой задачу, хотя и отличную от моих, но во многом им аналогичную. А именно: он рассматривал с общей точки зрения геометрические и аналитические структуры, допускающие *разрывную* группу, и хотел в первую очередь использовать теорию разрывных групп *линейных* преобразований для теории уравнений. Насколько сейчас ясно, что наши обстоятельные устные и письменные дискусии на заботящие нас родственные темы оказали влияние на нас обоих, настолько же трудно для меня теперь определить степень этого взаимного влияния; так как в нашем общении речь шла в основном об общих аспектах, а не о конкретных утверждениях.

В 1872 и 1873 гг. я занимался дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка. Причем я заметил, что теорию интегрирования этих уравнений, развитую *Лагранжем*, *Пфаффом*, *Коши* и *Якоби*, можно толковать как теорию преобразований. Задача интегрирования подобного уравнения сводится к задаче нахождения всех инфинитезимальных контактных преобразований, при которых данное уравнение остается инвариантным. Это основано на том, что скобку *Пуассона* можно прямо интерпретировать как символ инфинитезимального контактного преобразования. Так я пришел к общим исследованиям об инфинитезимальных преобразованиях и обнаружил, что многие основные формулы в теории уравнений в частных производных первого порядка при взятии за основу понятия инфинитезимального преобразования допускают замечательную концептуальную трактовку. *Далее мне удалось при помощи символа скобки исключительно просто охарактеризовать инфинитезимальные преобразования, которые порождают конечную непрерывную группу.*

От моего внимания не могло также ускользнуть, что все конечные непрерывные группы от одной переменной могут быть преобразованы в проективные группы путем надлежащего выбора системы координат, а еще, что *для n переменных можно заведомо определить все непрерывные группы, содержащие заданное число параметров, при помощи интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Этими открытиями, сделанными в 1873 и 1874 гг., было, на мой взгляд, положено начало совершенно новой теории, теории конечных непрерывных групп преобразований. С тех пор я почти непрерывно занимаюсь дальнейшим развитием этой теории и ее применением в интегральном исчислении и геометрии.

Теория конечных непрерывных групп преобразований очень близка к теории подстановок, но, несмотря, на это должна рассматриваться как

самостоятельная область. Только частично понятия и утверждения теории подстановок могут быть перенесены на мою теорию преобразований, но даже в тех случаях, когда это удается сделать, такой перенос далеко не всегда очевиден, чтобы можно было его назвать само собой разумеющимся. Конечно, понятия, с которыми имеет дело теория подстановок, более элементарны, чем те, что используются в теории преобразований, но лично мне правила композиции данных понятий в теории преобразований кажутся более простыми и наглядными, чем в теории подстановок.

Здесь невозможно проследить все связи между моей теорией преобразований и смежными областями. Но по крайней мере следует упомянуть, что теории, представленные в данной работе, имеют разнообразные точки соприкосновения с общей теорией инвариантов, которая была развита *Кэли*, *Сильвестром*, *Аронхольдом* и *Эрмитом*, *Клебшем* и *Горданом* и их последователями. Несомненно, совершенные методы теории инвариантов прекрасно подходят для решения многих важных задач моей теории преобразований; с другой стороны, последняя также открывает новые аспекты для теории инвариантов.

Публикуемая здесь первая часть моего труда о группах преобразований представляет собой законченное целое. Она содержит первую часть теории и развивает общие свойства конечных непрерывных групп. Вторая часть, которая выйдет в свет позже, будет содержать еще два раздела: в первом из них будет изложена общая теория конечных групп контактных преобразований, а во втором — полная теория конечных непрерывных групп от одной, двух и трех переменных. К этому добавятся еще различные общие исследования о группах от n переменных, в частности, теоретико-групповое исследование задачи из основ геометрии, которой занимались *Риман* и *ф. Гельмгольц*.

Я уже давно собирался опубликовать подробную работу о конечных непрерывных группах, но реализация этого намерения затруднялась тем, что я не владею в совершенстве ни одним из известных культурных языков. Поэтому я был очень рад, когда осенью 1884 г. получил поддержку доктора *Энгеля*, который еще до этого ознакомился с моими изысканиями по группам преобразований. Г-н *Энгель* не ограничился тем, что самым широким образом неустанно помогал мне в решении языковых и стилистических проблем; он также оказал мне действенную помощь в процессе переработки и упрощения аналитических и синтетических методов, необходимых для обоснования моих результатов. Более того, он самостоятельно провел многие важные исследования о непрерывных группах; они будут в дальнейшем неоднократно использоваться, что соответствующим образом помечено в тексте.

Введенные в данной работе понятия и представленные здесь новые теории за редкими исключениями, которые всегда оговариваются, принадлежат мне. Теория полных систем, у истоков которой стоят *Якоби* и *Клебш*, связь между *интегрируемыми* системами уравнений в частных производных и в полных дифференциалах, замеченная *Дарбу* для важного частного и развитая *А. Майером* для общего случая, и, наконец, редукция *Коши* системы линейных дифференциальных уравнений к канонической форме — вот те немногие теории других ученых, которые будут здесь в дальнейшем полностью воспроизведены. Зато г-н *Энгель*, как уже было сказано выше, внес существенный вклад в ту форму, в которую мои теории здесь облечены, даже если собственная терминология в этой работе почти без исключения принадлежит мне.

В некоторых работах я уже пытался объяснить значение моей теории преобразований для *интегрального исчисления*. Надеюсь, что мне в скором будущем удастся также опубликовать и эти результаты, систематически изложенные.

Прежде чем закончить общие предварительные замечания, я не могу не выразить своей радости по поводу того, что господа *Пуанкаре* и *Пикар*, чьи исследования в области разрывных групп так способствовали развитию теории функций, в течение последних лет использовали также и мою теорию конечных разрывных групп в теории функций. Я радуюсь потому, что всегда трудно привлечь внимание математиков к новому направлению в науке. Моя надежда, что теория групп преобразований пробьет себе путь, основана в большей степени на том, что она предлагает новые аспекты и методы, которые будут полезны во многих областях математики.

Еще несколько полезных советов читателю первой части данной книги.

Для строгого обоснования теории необходим ряд дополнительных рассуждений (они изложены более мелким шрифтом), которые при первом прочтении желательно пропустить. То же самое касается многих других результатов, которые также хотя сами по себе и важны, но для общего понимания особого значения не имеют и могут сперва быть пропущены при чтении. Но поскольку не во всех таких случаях используется более мелкий шрифт, то я хочу отметить, что объяснения на страницах 138–148, 192–204 (глава 10 полностью), 343–362 (глава 18), 401–405, 436–443 можно опустить, что никак не скажется на понимании нижеследующего.

Лейпциг, май 1888 г.

Софус Ли

Введение

Если переменные $x'_1 \cdots x'_n$ заданы как функции от $x_1 \cdots x_n$ при помощи n уравнений, разрешимых относительно $x_1 \cdots x_n$,

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

то говорят, что эти уравнения представляют преобразование между переменными x и x'. С такими преобразованиями мы будем в дальнейшем иметь дело; там, где четко не оговорено противное, мы ограничимся случаем, когда f_i являются *аналитическими функциями* своих аргументов. Однако поскольку немало наших результатов не зависит от этого условия, мы будем иногда пояснять, каким образом различные результаты переносятся на случай функций более общего вида.

Если функции $f_i(x_1 \cdots x_n)$ являются аналитическими и определены внутри некоторой общей области, то согласно известным результатам Коши, Вейерштрасса, Брио и Буке можно всегда выделить такую область (x) в многообразии всех действительных и комплексных систем значений $x_1 \cdots x_n$, что все функции f_i на всем протяжении этой области будут однозначны, а поведение их в окрестности любой системы значений $x_1^0 \cdots x_n^0$, принадлежащей области (x), — регулярно, т. е. их можно разложить в обычные степенные ряды от $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$, содержащие лишь целые положительные степени.

Единственное необходимое и достаточное условие для разрешения уравнений $x'_i = f_i(x)$ таково, что функциональный определитель

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

не должен тождественно обращаться в нуль. Если это условие выполняется, то ранее определенная область (x) может быть специально выбрана такой, что функциональный определитель для любой системы значений будет отличен от нуля. Если при этом условии x будет последовательно принимать все значения в области (x), то уравнения $x'_i = f_i(x)$ задают во множестве переменных x' некоторую область, такую, что $x_1 \cdots x_n$ как функции от $x'_1 \cdots x'_n$ в окрестности любой системы значений $x_1'^0 \cdots x_n'^0$ этой новой области будут вести себя регулярно и, следовательно, могут быть разложены в обычные степенные ряды от $x'_1 - x_1'^0, \cdots x'_n - x_n'^0$. Из этого, как известно, не следует, что x_i на всем протяжении новой области являются однозначными функциями от $x'_1 \cdots x'_n$; однако можно при необходимости так сузить

определенную выше область (x), чтобы две различные системы значений $x_1 \cdots x_n$ из области (x) всегда давали две различные системы значений $x'_1 = f_1(x), \cdots x'_n = f_n(x)$. В этом случае $x_1 \cdots x_n$ также являются однозначными функциями от $x'_1 \cdots x'_n$ во всей соответствующей области переменных x'.

Тогда уравнения $x'_i = f_i(x)$ задают взаимно однозначное соответствие между областями переменных x и x'. Каждой системе значений из одной области они ставят в соответствие одну и только одну систему значений из другой, и наоборот.

Если уравнения $x'_i = f_i(x)$ разрешаются относительно x, то уравнения

$$x_k = F_k(x'_1 \cdots x'_n) \quad (k = 1 \cdots n)$$

снова представляют преобразование. Связь между этим преобразованием и исходным, очевидно, взаимна, в таких случаях говорят: эти преобразования являются *обратными* друг другу.

Из этого определения сразу вытекает следующее:

Если сперва выполнить преобразование

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

а затем обратное к нему преобразование

$$x''_i = F_i(x'_1 \cdots x'_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

то получится тождественное преобразование

$$x''_i = x_i \quad (i = 1 \cdots n).$$

В этом, собственно, и заключается определение понятия двух обратных друг другу преобразований.

Если выполнить вообще любые два преобразования

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n), \quad x''_i = g_i(x'_1 \cdots x'_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

одно за другим, то получается новое преобразование, а именно:

$$x''_i = g_i\big(f_1(x) \cdots f_n(x)\big) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Конечно, это новое преобразование, вообще говоря, изменится, если изменить порядок двух исходных преобразований, но может оказаться, что последовательность выполнения этих преобразований не имеет значения. Этот особый случай возникает, если выполняется тождество:

$$g_i\big(f_1(x) \cdots f_n(x)\big) \equiv f_i\big(g_1(x) \cdots g_n(x)\big) \quad (i = 1 \cdots n);$$

тогда мы говорим в контексте теории подстановок: *преобразования*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

и

$$x_i' = g_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

перестановочны.

Конечное или бесконечное семейство преобразований между x и x' называется группой преобразований, если два преобразования этого семейства, выполненные одно за другим, дают преобразование, которое, в свою очередь, принадлежит этому семейству[4].

Группа преобразований называется *разрывной*, если она состоит из дискретного множества преобразований, причем это множество может быть конечным или бесконечным. Два преобразования такой группы конечным образом[5] отличаются друг от друга. Разрывные группы являются объектом *теории подстановок*, поэтому ниже они не рассматриваются.

Разрывным группам противопоставляются *непрерывные* группы преобразований, которые всегда содержат бесконечно много преобразований. Группа преобразований называется *непрерывной*, если каждому преобразованию этой группы можно сопоставить некоторые другие преобразования, которые бесконечно мало отличаются от данного преобразования, и наоборот, если невозможно разложить всю совокупность преобразований, содержащихся в группе, на отдельные дискретные семейства.

Среди непрерывных групп преобразований мы, в свою очередь, будем различать две категории, которые назовем *конечными непрерывными* и *бесконечными непрерывными* группами. Для обеих категорий мы пока можем дать только предварительные определения, которые позже будут сформулированы точнее.

Конечная непрерывная группа преобразований задается *системой* из n уравнений:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

где f_i — аналитические функции переменных $x_1 \cdots x_n$ и произвольных параметров $a_1 \cdots a_r$. Поскольку мы имеем дело с группой, то два преобразования этой группы,

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r),$$

[4]Софус Ли, Научное общество Христиании, 1871 г., стр. 243. Клейн, Сравнительное обозрение новейших геометрических методов, Эрланген, 1872 г. Ли, Göttinger Nachrichten, 1874 г., 3 декабря.

[5]Не бесконечно мало. — *Прим. ред.*

$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r),$$

выполненные последовательно, должны давать преобразование, принадлежащее этой группе, т. е. имеющее вид

$$x_i'' = f_i\big(f_1(x,a) \cdots f_n(x,a), b_1 \cdots b_r\big) = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r).$$

Параметры c_k здесь, конечно, не зависят от x, а являются функциями от a и b.

Примеры. Известной группой этого вида является следующая:

$$x' = \frac{x + a}{a_2 x + a_3},$$

содержащая три параметра a_1, a_2, a_3. Если выполнить преобразования

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}, \quad x'' = \frac{x' + b_1}{b_2 x + b_3}$$

одно за другим, то получится

$$x'' = \frac{x + c_1}{c_2 x + c_3},$$

где c_1, c_2, c_3 как функции от a и b определены соотношениями

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1 a_3}{1 + b_1 a_2}, \quad c_2 = \frac{b_2 + a_2 b_3}{1 + b_1 a_2}, \quad c_3 = \frac{b_2 a_1 + b_3 a_3}{1 + b_1 a_2}.$$

Не менее известна группа

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad (i = 1 \cdots n)$$

с n^2 параметрами a_{ik}. Если при этом положить

$$x_\nu'' = \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} x_i' \quad (\nu = 1 \cdots n),$$

то получится

$$x_\nu'' = \sum_{i,k=1}^{n} b_{\nu i} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{n} c_{\nu k} x_k,$$

где $c_{\nu k}$ определяются уравнениями

$$c_{\nu k} = \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} a_{ik} \quad (\nu, k = 1 \cdots n).$$

Чтобы прийти к разумному определению бесконечной непрерывной группы, мы сперва несколько изменим определение конечной непрерывной группы. При этом мы используем одно утверждение из теории дифференциальных уравнений, которое мы, кстати, позднее рассмотрим более подробно (ср. гл. 10).

Пусть уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

представляют какую-то конечную непрерывную группу. Тогда, следуя этому утверждению, f_i, рассматриваемые как функции от x, можно определить при помощи системы дифференциальных уравнений. Для этого надо лишь достаточное число раз продифференцировать уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ по $x_1 \cdots x_n$, а затем выписать все уравнения, которые получаются путем исключения $a_1 \cdots a_r$. Если пойти при дифференцировании достаточно далеко, то после исключения a получается система дифференциальных уравнений для $x_1' \cdots x_n'$, общая система решений которой представляет собой исходные уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ с произвольными константами $a_1 \cdots a_r$. Так как уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ по условию определяют группу, то получается, что данная система дифференциальных уравнений обладает следующим замечательным свойством: если $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, b_1 \cdots b_r)$ — одна система ее решений, а $x_i' = f_i(x, a)$ — другая, то

$$x_i' = f_i\big(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r\big) \quad (i = 1 \cdots n)$$

также является системой решений.

Итак, мы видим, что уравнения каждой такой конечной непрерывной группы преобразований можно определить при помощи системы дифференциальных уравнений, которая обладает некими особыми свойствами. Во-первых, из двух систем решений данных дифференциальных уравнений всегда можно получить описанным ранее способом третью систему решений: это означает, что мы имеем дело с группой. Во-вторых, самая общая система решений данных дифференциальных уравнений зависит лишь от конечного числа произвольных констант: это говорит о том, что наша группа конечна.

Предположим теперь, что семейство преобразований $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ определено системой дифференциальных уравнений вида

$$W_k\left(x_1' \cdots x_n', \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \cdots, \frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2} \cdots\right) \quad (k = 1, 2 \cdots).$$

Далее предположим, что эта система дифференциальных уравнений обладает первым из двух упомянутых свойств, но не обладает вторым, то есть что эти дифференциальные уравнения вместе с решениями $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ и $x_i' = g_i(x_1 \cdots x_n)$ также всегда допускают систему решений вида $x_i' = g_i\big(f_1(x) \cdots f_n(x)\big)$, однако общая система этих решений зависит не просто от конечного числа произвольных констант, а от произвольных элементов более общего вида, например произвольных функций. Тогда совокупность всех преобразований, удовлетворяющих данным дифференциальным уравнениям, в свою очередь, очевидно, образует группу, причем, как правило, непрерывную, но уже не конечную, а такую, которую мы называем *бесконечной непрерывной*.

Теперь приведем несколько простых примеров бесконечных непрерывных групп преобразований.

Если дифференциальные уравнения, определяющие данную бесконечную группу, сводятся к тождеству $0 = 0$, то преобразования этой группы таковы:

$$x_i' = \Pi_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

где Π_i означают произвольные аналитические функции своих аргументов.

Уравнения

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = 0 \quad (i \neq k;\ i, k = 1 \cdots n)$$

также определяют бесконечную группу, а именно

$$x_i' = \Pi_i(x_i) \quad (i = 1 \cdots n),$$

где Π_i опять-таки совершенно произвольны.

Необходимо, впрочем, отметить, что можно дать еще более общее определение понятия бесконечной непрерывной группы. Вообще любую непрерывную группу, которая не является конечной, можно назвать бесконечной непрерывной. Это определение, однако, не совпадает с данным выше.

Так, например, уравнения

$$x' = F(x), \quad y' = F(y),$$

где F в обоих случаях означает одну и ту же произвольную функцию своего аргумента, представляют группу. Эта группа непрерывна, поскольку все ее преобразования представляются при помощи одной единственной системы уравнений; очевидно, кроме того, что она не является конечной. Следовательно, это была бы бесконечная непрерывная группа, если бы мы сформулировали это понятие в данном ранее более широком смысле. С другой стороны, семейство преобразований

$$x' = F(x), \quad y' = F(y)$$

невозможно определить при помощи дифференциальных уравнений, не содержащих произвольных элементов. Стало быть, сформулированное прежде определение бесконечной непрерывной группы для этого случая не годится. Так что мы находим целесообразным рассматривать лишь такие бесконечные непрерывные группы, которые определяются при помощи дифференциальных уравнений, и потому всегда берем за основу наше первое, более узкое определение.

Мы хотим непременно подчеркнуть, что понятие «группа преобразований» далеко не исчерпывается выделением разрывных и непрерывных групп. Существует много других групп, не относящихся ни к одному из этих двух классов, но все же имеющих нечто общее с каждым из них. С подобными группами нам придется в последующем хотя бы иногда иметь дело. А пока ограничимся двумя примерами.

Совокупность всех преобразований координат на плоскости, при которой происходит переход от одной обычной прямоугольной системы координат к другой, образует группу, которая не является ни непрерывной, ни разрывной. Данная группа содержит две отдельные категории преобразований, между которыми непрерывный переход невозможен: во-первых, такие преобразования, при которых старая и новая системы координат одинаково ориентированы, и во-вторых, такие, при которых эти системы ориентированы различно.

Первые имеют вид

$$x' - a = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' - b = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

аналитическое выражение других таково:

$$x' - a = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' - b' = x\sin\alpha - y\cos\alpha.$$

Каждая из этих систем уравнений представляет собой непрерывное семейство преобразований, так что эта группа не является разрывной; но она не является и непрерывной, поскольку только обе вместе взятые системы дают все преобразования группы; последние распадаются таким образом на два дискретных семейства. Если представить себе плоскость x, y в обычном

пространстве и добавить третью прямоугольную координату z, то совокупность таких преобразований координат на плоскости $z = 0$ можно рассматривать как совокупность определенных движений пространства, а именно таких, при которых плоскость $z = 0$ сохраняет свое положение. Эти движения делятся соответственно на два класса: такие, при которых плоскость скользит сама по себе, и такие, при которых она переворачивается.

В качестве второго примера подобных групп приведем здесь совокупность всех проективных и дуальных преобразований плоскости.

После этих общих замечаний о понятии группы преобразований вообще обратимся к рассмотрению конечных непрерывных групп преобразований, составляющих предмет нижеследующих исследований. Эти исследования делятся на три части. В *первой* части речь пойдет о конечных непрерывных группах вообще. Во *второй* — о таких конечных непрерывных группах, преобразованиями которых являются так называемые *контактные преобразования*. И, наконец, в *третьей* части будут подробно рассмотрены некоторые общие задачи теории групп для малого числа переменных.

Часть первая. Общие свойства конечных непрерывных групп преобразований

Глава 1

Определение конечных непрерывных групп преобразований

Теперь наша первая задача — дать более четкое определение понятия конечных непрерывных групп, о котором шла речь во введении.

§ 1

Начнем с одного вспомогательного замечания о непрерывных семействах преобразований вообще. Пусть уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

представляют собой произвольное семейство преобразований, т. е. вовсе не обязательно группу. И пусть f_i — аналитические функции как переменных $x_1 \cdots x_n$, так и параметров $a_1 \cdots a_r$; само собой разумеется, что функциональный определитель

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

не должен тождественно обращаться в нуль.

Если мы придадим параметрам $a_1 \cdots a_r$ одно за другим все возможные значения внутри некоторой области, то получим все преобразования, представленные уравнениями выше. Итак, в целом имеется ∞^r[1] различных систем значений $a_1 \cdots a_r$; сколько же различных преобразований $x_i' = f_i(x, a)$ соответствует этим ∞^r системам значений?

Теоретически ответить на этот вопрос совсем несложно. Давайте просто разложим f_i по степеням $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$, понимая под $x_1^0 \cdots x_n^0$ какую-либо систему значений x, в окрестности которой все f_i ведут себя регулярно. Затем запишем по порядку коэффициенты в этих разложениях

$$\mathfrak{A}_k(a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1, 2 \cdots),$$

[1] Здесь и ниже ∞^r понимается как r-параметрическое семейство. — *Прим. ред.*

где $\mathfrak{A}$, разумеется, — аналитические функции параметров $a_1 \cdots a_r$. Теперь остается лишь выяснить, сколько функций $\mathfrak{A}_k$ из всех имеющихся не зависят друг от друга.

Другими словами, если среди всех $\mathfrak{A}_k$ найдется ровно r независимых друг от друга функций, то ∞^r различным системам значений $a_1 \cdots a_r$, очевидно, соответствуют в точности ∞^r различных систем значений $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots$, а значит, и в точности ∞^r различных преобразований $x_i' = f_i(x, a)$.

Если же среди $\mathfrak{A}_k$ имеется не r, а меньше независимых друг от друга функций, например, лишь $r - m$, то картина будет иной. В этом случае можно выразить все $\mathfrak{A}_k$ через $r - m$ из них, скажем, $\mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'$, которые, разумеется, должны быть независимы друг от друга; если $a_1 \cdots a_r$ пробегают при этом ∞^r различных значений, то это равносильно тому, как если бы $\mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'$ пробегали ровно ∞^{r-m} различных систем значений. Итак, ∞^r системам значений $a_1 \cdots a_r$ соответствуют в точности ∞^{r-m} различных систем значений $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \cdots$, а значит, и в точности ∞^{r-m} различных преобразований $x_i' = f_i(x, a)$. Отчетливее всего это видно, если учесть, что функции f_i также содержат параметры $a_1 \cdots a_r$ лишь в выражениях $\mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'$, то есть что они имеют вид

$$f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) = \overline{f}_i(x_1 \cdots x_n, \mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}') \quad (i = 1 \cdots n).$$

Из этого следует, что мы просто можем ввести в качестве новых параметров $\mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'$ вместо $a_1 \cdots a_r$, так что число произвольных параметров, встречающихся в уравнениях $x_i' = f_i(x, a)$, уменьшится с r до $r - m$. Но тогда ясно, что уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ представляют не ∞^r, а только ∞^{r-m} различных преобразований.

Теперь мы хотим ввести следующую терминологию:

В уравнениях

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

все r параметров $a_1 \cdots a_r$ являются существенными, если эти уравнения представляют ∞^r различных преобразований между x и x', или, что то же самое, если невозможно ввести такие независимые друг от друга функции от $a_1 \cdots a_r$ в качестве новых параметров, чтобы после этого уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ содержали не r, а меньшее число произвольных параметров.

Если параметры $a_1 \cdots a_r$ в уравнениях $x_i' = f_i(x, a)$ не являются существенными, то f_i могут быть, как показано выше, приведены к виду $\overline{f}_i\big(x_1 \cdots x_n, \mathfrak{A}_1'(a) \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'(a)\big)$, где число m как минимум равно единице.

Заметим, что тогда при любых условиях имеется хотя бы одно дифференциальное уравнение в частных производных специального вида:

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0,$$

которому функции $\mathfrak{A}'_1 \cdots \mathfrak{A}'_{r-m}$, а также $f_1 \cdots f_n$ удовлетворяют тождественно. Это свойство является характеристическим для обсуждаемого случая. Наоборот, предположим, что все функции $f_1 \cdots f_n$ удовлетворяют одному линейному дифференциальному уравнению в частных производных только что рассмотренного вида. Известно, что это уравнение имеет $r - 1$ независимых решений $\psi_1(a) \cdots \psi_{r-1}(a)$, которые зависят только от $a_1 \cdots a_r$, и что любое другое решение, если оно зависит от a, само является функцией от $\psi_1 \cdots \psi_{r-1}$. Следовательно, любое f_i можно привести к виду $f_i\big(x_1 \cdots x_n, \psi_1(a) \cdots \psi_{r-1}(a)\big)$, а это доказывает, что параметры $a_1 \cdots a_r$ в уравнениях $x'_i = f_i(x, a)$ не являются существенными.

Поэтому мы можем сформулировать

Утверждение 1. *В уравнениях преобразований*

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

r параметров $a_1 \cdots a_r$ являются существенными тогда и только тогда, когда не существует ни одного линейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0,$$

не содержащего $x_1 \cdots x_n$, которому удовлетворяли бы все n функций $f_1 \ldots f_n$.

Критерий, высказанный в предыдущем утверждении, имеет, впрочем, не только теоретическое значение; он может также практически использоваться, если надо выяснить, являются ли параметры $a_1 \cdots a_r$ заданных уравнений преобразований $x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ существенными или нет. Мы хотим вкратце пояснить, как можно провести это исследование.

Сначала рассмотрим n уравнений

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a_1 \cdots a_r) \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a) = 0 \quad (i = 1 \cdots n) \tag{1}$$

и придадим в них величинам x какие-нибудь определенные, но общие значения $x'_1 \cdots x'_n$. Таким образом, получаются n линейных однородных уравнений для нахождения $\chi_1 \cdots \chi_r$, из которых, скажем, $r' \leqslant r$ будут независимы друг от друга.

Если $r' = r$, то $\chi_1 \cdots \chi_r$ должны тождественно обращаться в нуль, и r параметров $a_1 \cdots a_r$ являются существенными. Если же $r' < r$, то мы придадим x некоторые другие общие, отличные от x' значения $x_1'' \cdots x_n''$ и получим таким образом новые уравнения для нахождения χ. Некоторые из этих новых уравнений, скажем r'', будут независимы друг от друга и от вышеуказанных r'; тогда, конечно, $r' + r'' \leqslant r$. Если $r' + r'' = r$, то все χ обращаются в нуль, и параметры $a_1 \cdots a_r$ являются существенными; если $r' + r'' < r$, то нам придется снова придавать x определенные общие значения $x_1''' \cdots x_n'''$, выводить новые уравнения для определения χ и т. д.

Можно считать, что мы найдем указанным способом одно за другим $r' + r'' + \cdots + r^{(q-1)} \leqslant r$ независимых друг от друга уравнений для определения χ, и что ни одно из $q-1$ чисел $r', r'' \cdots r^{(q-1)}$ не обращается в нуль. Напротив, пусть $r^{(q)}$ равно нулю, так что уравнения (1) при совершенно произвольном выборе x всегда являются следствием найденных $r' + r'' + \cdots + r^{(q-1)} \leqslant r$ уравнений. В этом случае обращаются в нуль также все числа $r^{(q+1)}, r^{(q+2)} \cdots$, поэтому для определения χ мы получим как раз лишь эти $r' + r'' + \cdots + r^{(q-1)}$ уравнений. Если теперь $r' + \cdots + r^{(q-1)} = r$, то все $\chi \equiv 0$, и параметры $a_1 \cdots a_r$ являются существенными; если же $r' + \cdots + r^{(q-1)} < r$, то χ можно задать как функции от $a_1 \cdots a_r$, и r параметров $a_1 \cdots a_r$ не являются существенными.

Этим показано, что в каждом отдельном случае ответ на вопрос, являются параметры $a_1 \cdots a_r$ существенными или нет, может быть получен при помощи конечного числа выполнимых операций.

§ 2

Пусть теперь в уравнениях преобразований

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

все параметры $a_1 \cdots a_r$ являются существенными.

Поскольку f_i являются аналитическими функциями своих аргументов, то во множестве всех систем значений $x_1 \cdots x_n$ и всех систем значений $a_1 \cdots a_r$ мы можем выбрать такие области (x) и (a) соответственно, что имеет место следующее:

Первое. $f_i(x, a)$ являются всюду в областях (x) и (a) однозначными функциями от $n + r$ переменных $x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r$.

Второе. Функции $f_i(x, a)$ ведут себя регулярно в окрестности каждой системы значений $x_1^0 \cdots x_n^0, a_1^0 \cdots a_r^0$, то есть могут быть разложены в обычные степенные ряды по $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0, a_1 - a_1^0, \cdots a_r - a_r^0$, коль скоро $x_1^0 \cdots x_n^0$ произвольны во множестве (x), а $a_1^0 \cdots a_r^0$ — во множестве (a).

Третье. Функциональный определитель

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

не обращается в нуль ни для какой комбинации систем значений x_i и a_k из областей (x) и (a) соответственно.

Четвертое. Если придать параметрам a_k в уравнениях $x_i' = f_i(x, a)$ какие-либо значения a_k^0 из множества (a), то уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

для двух различных систем значений $x_1 \cdots x_n$ из множества (x) также всегда дадут две различные системы значений $x_1' \cdots x_n'$.

Предположим, что множества (x) и (a) выбраны такими, что все эти четыре условия выполнены. Если теперь придать переменным x_i в уравнениях $x_i' = f_i(x, a)$ все возможные значения из (x), а параметрам a_k — все возможные значения из (a), то x_i' будут пробегать в своем множестве значений некоторую область, которую мы можем символически обозначить через $x' = f\big((x)(a)\big)$. Эта новая область имеет следующие свойства:

Первое. Если $a_1^0 \cdots a_r^0$ — какая-либо система значений из (a), а $x_1'^0 \cdots x_n'^0$ — какая-либо система значений из области $x' = f\big((x)a^0\big)$, то $x_1 \cdots x_n$ разлагаются в окрестности системы значений $x_i'^0, a_k^0$ в обычные степенные ряды от $x_1' - x_1'^0, \cdots x_n' - x_n'^0, a_1 - a_1^0, \cdots a_r - a_r^0$.

Второе. Если придать a_k постоянные значения a_k^0 из области (a), то величины $x_1 \cdots x_n$ в уравнениях

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

будут однозначными функциями от $x_1' \cdots x_n'$, поведение которых регулярно всюду в области $x' = f\big((x)a^0\big)$.

Теперь мы хотим добавить специальное условие, что ∞^r различных преобразований, представленных уравнениями $x_i' = f_i(x, a)$, образуют группу преобразований. Эта группа, очевидно, будет непрерывной и конечной. Чтобы кратко указать количество преобразований в ней, мы скажем, что уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ представляют *r-параметрическую группу преобразований* с r существенными параметрами $a_1 \cdots a_r$.

Согласно данному нами во введении определению конечной непрерывной группы, уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r),$$
$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r)$$

должны после исключения x' давать систему уравнений такого же вида, а именно:

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r),$$

где c зависят только от a и b.

Здесь необходимо отметить, что мы наложили ограничения на поведение функций $f_i(x, a)$ только внутри областей (x) и (a).

Следовательно, нам только тогда разрешается подставлять выражения $x'_\nu = f_\nu(x, a)$ в уравнения $x''_i = f_i(x', b)$, когда система значений $x'_1 \cdots x'_n$ находится в области (x). Поэтому мы вынуждены добавить к до этого сформулированным условиям для областей (x) и (a) следующее предположение: внутри областей (x) и (a) можно задать подобласти $((x))$ и $((a))$, такие, что x'_i всегда остаются в области (x), если x_i произвольны в $((x))$, а a_k произвольны в $((a))$; выражаясь кратко: область $x' = f\big(((x))((a))\big)$ должна полностью попадать в область (x).

Если мы согласно этим положениям выберем $x_1 \cdots x_n$ в области $((x))$ и $a_1 \cdots a_r$ в области $((a))$, то в выражении $f_i(x'_1 \cdots x'_n, b_1 \cdots b_r)$ мы действительно можем произвести подстановку $x'_k = f_k(x, a)$; то есть если $x_1^0 \cdots x_n^0$ означает какую-нибудь систему значений в области $((x))$, то выражение

$$f_i\big(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r\big)$$

можно разложить в обычный степенной ряд от $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ в окрестности системы значений x_k^0. Коэффициентами этого степенного ряда являются функции от $a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r$, и они ведут себя регулярно, если a_k выбраны произвольно в $((a))$, а b_k — в (a).

Теперь можно показать, что величины $c_1 \cdots c_r$ являются вполне определенными и даже *аналитическими* функциями от $a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r$. Чтобы это доказать, рассмотрим уравнения

$$f_i\big(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r\big) = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r),$$

которые для заданных a и b при подходящем выборе c должны выполняться тождественно. Разложим обе части по степеням от $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ и сравним коэффициенты. Тогда мы получим в общем случае бесконечный ряд уравнений для определения $c_1 \cdots c_r$:

$$\mathfrak{A}_k(c_1 \cdots c_r) = \Psi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1, 2 \cdots).$$

Прежде всего, ясно, что эти уравнения не могут иметь следствием никакие соотношения только между a и b, из которых c были бы исключены: ведь системы a, так же как и b, совершенно произвольны внутри определенных областей. Далее ясно, что найденные уравнения между a, b, c совместны друг с другом, так как по условию для любых систем значений $a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r$ можно задать соответствующие значения c. Наконец, легко видеть, что найденных уравнений достаточно для определения всех c. По условию все параметры $a_1 \cdots a_r$ в уравнениях $x'_i = f_i(x, a)$ являются существенными; мы заключаем отсюда с учетом результатов предыдущего параграфа, что среди функций $\mathfrak{A}_1(c), \mathfrak{A}_2(c) \cdots$ имеется ровно r независимых друг от друга. Следовательно, разрешение относительно $c_1 \cdots c_r$ возможно, и для c_k получаются вполне определенные аналитические функции

от a и b:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r).$$

Если подставить эти выражения для $c_1 \cdots c_r$ в уравнения

$$f_i\big(f_1(x,a) \cdots f_n(x,a), b_1 \cdots b_r\big) = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r) \quad (i = 1 \cdots n), \tag{2}$$

то получатся одни лишь тождества, т. к. величины x_i, a_k, b_k независимы друг от друга.

Мы можем предположить и предполагаем, что область $((a))$ выбрана так, что все $\varphi_k(a,b)$ ведут себя регулярно, если как a, так и b совершенно произвольны в $((a))$. Кроме того, мы должны еще учесть, что параметры c в уравнениях

$$x_i'' = f_i(x', b) = f_i(x, c)$$

не должны выходить за пределы области (a). Поэтому мы наложим еще одно специальное условие: система значений $c_k = \varphi_k(a,b)$ должна всегда попадать в область (a), если a и b находятся в области $((a))$.

Если эти условия выполнены, то поведение функций

$$f_i\big(x_1 \cdots x_n, \varphi_1(a,b) \cdots \varphi_r(a,b)\big)$$

для всех систем значений x_i, a_k, b_k из областей $((x))$ и $((a))$ соответственно является регулярным. И если мы в соотношение (2) подставим $\varphi_k(a,b)$ вместо c_k, то возникающие тождества будут справедливы для всех оговоренных систем значений x_i, a_k, b_k.

Из системы уравнений (2) мы хотим теперь вывести две другие похожие системы, которые помогут нам лучше разъяснить природу функций $\varphi_k(a,b)$.

Сначала предположим, что $x_1 \cdots x_n$ определены из уравнений $x_i' = f_i(x,a)$ как функции от x' и a, и что полученные значения $x_i = F_i(x',a)$ подставлены в (2). Таким образом, мы найдем одну из двух обещанных систем, а именно следующую:

$$f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r) = f_i\big(F_1(x',a) \cdots F_n(x',a), c_1 \cdots c_r\big) \quad (i = 1 \cdots n). \tag{3}$$

Вторая система получается просто разрешением уравнений (2) относительно $f_1(x,a) \cdots f_n(x,a)$. Она будет такой:

$$f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) = F_i\big(f_1(x,c) \cdots f_n(x,c), b_1 \cdots b_r\big) \quad (i = 1 \cdots n). \tag{4}$$

Новые уравнения (3) и (4) будут, конечно, точно так же, как и (2), из которых они выведены, при подстановке $c_k = \varphi_k(a, b)$ превращаться в тождества, поскольку величины x_i', a_k, b_k, так же как и x_i, a_k, b_k, не связаны друг с другом никакими соотношениями.

Теперь мы поступим с уравнениями (3) и (4), как прежде с уравнениями (2). Сначала разложим обе части уравнения (3) в окрестности подходящей системы значений $x_\nu'^0$ в обычный степенной ряд по $x_\nu - x_\nu'^0$ и сравним коэффициенты; тогда мы получаем уравнения следующего вида:

$$\mathfrak{A}_k(b_1 \cdots b_r) = Y_k(a_1 \cdots a_r, c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1, 2 \cdots). \tag{5}$$

Затем разложим обе части уравнения (4) в окрестности x_ν^0 в обычный степенной ряд по $x_\nu - x_\nu^0$ и вновь сравним коэффициенты. Таким образом мы получим новые уравнения вида

$$\mathfrak{A}_k(a_1 \cdots a_r) = \Omega_k(b_1 \cdots b_r, c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1, 2 \cdots). \tag{6}$$

Функции $\mathfrak{A}_k(a_1 \cdots a_r)$, а также $\mathfrak{A}_k(b_1 \cdots b_r)$ здесь согласно вышесказанному таковы, что среди них имеется ровно r независимых друг от друга. Поскольку по построению уравнения (5), как и (6), обращаются в тождества при подстановке $c_1 = \varphi_1(a, b), \cdots c_r = \varphi_r(a, b)$, то получается, что каждая из этих систем эквивалентна системе $c_k = \varphi_k(a, b)$. По виду уравнений (5) и (6) ясно, однако, что они разрешаются относительно b_k и a_k соответственно; следовательно, и уравнения $c_k = \varphi_k(a, b)$ могут разрешаться относительно как b_k, так и a_k:

$$b_k = \psi_k(a_1 \cdots a_r, c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$
$$a_k = \chi_k(b_1 \cdots b_r, c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1 \cdots r).$$

Итак, имеет место

Теорема 1. *Если уравнения*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

с r существенными параметрами $a_1 \cdots a_r$ представляют собой r-параметрическую группу, т. е. результатом двух преобразований

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r),$$
$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

выполненных последовательно, является преобразование

$$x_i'' = f_i\big(f_i(x,a)\cdots f_n(x,a), b_1\cdots b_r\big) = f_i(x_1\cdots x_n, c_1\cdots c_r),$$

где c_k выражаются следующим образом через a и b:

$$c_k = \varphi_k(a_1\cdots a_r, b_1\cdots b_r) \quad (k = 1\cdots r),$$

то эти уравнения разрешаются как относительно $a_1\cdots a_r$, так и относительно $b_1\cdots b_r$. Иначе говоря, ни один из функциональных определителей

$$\sum \pm \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_1}\cdots\frac{\partial\varphi_r}{\partial a_r}, \quad \sum \pm \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_1}\cdots\frac{\partial\varphi_r}{\partial b_r}$$

не обращается в нуль тождественно[2].

Мы полагаем, что область $((a))$ выбрана такой, что упомянутые выше функциональные определители всегда отличны от нуля для произвольных a и b из $((a))$.

Если ∞^r преобразований

$$x_i' = f_i(x_1\cdots x_n, a_1\cdots a_r) \quad (i = 1\cdots n)$$

образуют r-параметрическую группу, то и ∞^r преобразований

$$x_i = F_i(x_1'\cdots x_n', a_1\cdots a_r) \quad (i = 1\cdots n),$$

возникающих в результате разрешения относительно $x_1\cdots x_n$, образуют r-параметрическую группу.

Действительно, при наложенном условии имеют место соотношения вида

$$x_i' = f_i(x,a), \quad x_i'' = f_i(x',b), \quad x_i'' = f_i(x,c),$$

где $c_k = \varphi_k(a,b)$. В результате разрешения получаются следующие уравнения:

$$x_i = F_i(x',a), \quad x_i' = F_i(x'',b), \quad x_i = F_i(x'',c),$$

причем снова $c_k = \varphi_k(a,b)$. Если теперь выполнить последовательно преобразования

$$\begin{aligned} x_i' &= F_i(x_1''\cdots x_n'', b_1\cdots b_r),\\ x_i &= F_i(x_1'\cdots x_n', a_1\cdots a_r), \end{aligned}$$

[2] Ли, Archiv for Mathematik og Naturv., том 1, Христиания, 1876 г.

то получим преобразование

$$x_i = F_i\big(F_1(x'', b) \cdots F_n(x'', b), a_1 \cdots a_r\big) = \\ = F_i(x_1'' \cdots x_n'', c_1 \cdots c_r),$$

которое, в свою очередь, принадлежит семейству $x_i = F_i(x', a)$.

Тем самым сформулированное утверждение доказано. Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть уравнения*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

с r существенными параметрами $a_1 \cdots a_r$ представляют r-параметрическую группу преобразований. Тогда то же самое верно и для разрешенных уравнений

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Из этой теоремы можно, кроме того, заключить, что разрешимость уравнений $c_k = \varphi_k(a, b)$ относительно a очевидна, если известно, что они разрешимы относительно b.

Теорема 2 в дальнейшем не используется, т. к. условия на области, предъявленные нами к группе $x_i' = f_i(x, a)$, не обязательно должны таким же образом выполняться для группы $x_i = F_i(x', a)$. В то же время теорема интересна тем, что она открывает различные взаимосвязи.

§ 3

До сих пор мы всегда предполагали, что f_i в уравнениях $x_i' = f_i(x, a)$ r-параметрической группы являются аналитическими функциями от $x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r$. Теперь можно было бы заменить это предположение другим, менее общим. Например, предположить, что функции f_i, зависящие как от x, так и от a, рациональны, и наоборот, что $x_1 \cdots x_n$ определяются как рациональные функции от $x_1' \cdots x_n'$ и $a_1 \cdots a_r$ из уравнений $x_i' = f_i(x, a)$. Группа $x_i' = f_i(x, a)$ состояла бы тогда из однозначных и взаимнооднозначных преобразований, или, как их обычно называют, преобразований Кремоны.

В наши планы совершенно не входит подробное рассмотрение этого особого случая; но видится нелишним коротко остановить на нем свое внимание. Так, мы можем сделать несколько важных выводов, которые хотя

и не могут быть непосредственно перенесены на общий случай, но все же дают различные указания для его рассмотрения.

Допустим, что нам дана группа преобразований Кремоны:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

где согласно предположению, высказанному выше, параметры $a_1 \cdots a_r$ входят рационально как в сами уравнения преобразований, так и в их разрешения относительно $x_1 \cdots x_n$.

Тогда результаты § 2 значительно упрощаются. Прежде всего отпадает необходимость ограничивать переменные x_i, a_k, b_k определенными областями, так как возникающие функции определены во всей области *всех* систем значений x_i, a_k, b_k. Следующим немедленным результатом является то, что $c_k = \varphi_k(a, b)$ становятся алгебраическими функциями от $a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r$.

Более того, в уравнениях

$$a_k = \chi_k(b_1 \cdots b_r, c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

получающихся из $c_k = \varphi_k(a, b)$ путем разрешения относительно $a_1 \cdots a_r$, мы можем просто произвести подстановку $c_k = b_k$. Если при этом $\chi_k(b_1 \cdots b_r, b_1 \cdots b_r) = a_k^0$, то преобразования

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0), \\ x_i'' &= f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r), \end{aligned}$$

выполненные последовательно, дают следующее преобразование:

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n, b_1 \cdots b_r).$$

Уравнения $x_i'' = f_i(x, b)$ определяют теперь при наложенных условиях переменные $x_1 \cdots x_n$ как рациональные функции от $x_1'' \cdots x_n'', b_1 \cdots b_r$, а уравнения $x'' = f_i(x', b)$ дают для $x_1' \cdots x_n'$ те же самые рациональные функции от x_i'', b_k. Таким образом, из уравнений

$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, b_1 \cdots b_r)$$

немедленно следует $x_1' = x_1, \cdots x_n' = x_n$, что является доказательством того, что значениям параметров $a_1^0 \cdots a_r^0$ соответствует тождественное преобразование. Другими словами, *каждая из обсуждаемых групп преобразований Кремоны содержит тождественное преобразование.* Параметры a_k^0, разумеется, не зависят от b.

Из уравнений $c_k = \varphi_k(a, b)$ мы можем, однако, вывести также следующие равенства:

$$b_k = \psi_k(a_1 \cdots a_r, c_1 \cdots c_r),$$

и произвести здесь подстановку $c_k = a_k^0$, откуда следует —

$$\psi_k(a_1 \cdots a_r, a_1^0 \cdots a_r^0) = \overline{a}_k.$$

Поэтому каждой системе значений $a_1 \cdots a_r$ соответствует система значений $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ с таким свойством, что два последовательно выполненных преобразования

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r), \\ x_i'' &= f_i(x_1' \cdots x_n', \overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r) \end{aligned}$$

дают в результате

$$x_i'' = f_i(x_i \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0) \equiv x_i,$$

то есть тождественное преобразование. *Таким образом, преобразования рассматриваемых групп преобразований Кремоны упорядочиваются в пары взаимно обратных*[3].

Пример. Одна из таких групп преобразований Кремоны — упомянутая во введении трехпараметрическая группа

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3},$$

состоящая из всех проективных преобразований простого многообразия[4].

Уравнения $c_k = \varphi_k(a, b)$ для этой группы, как мы знаем, имеют следующий вид:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1 a_3}{1 + b_1 a_2}, \quad c_2 = \frac{b_2 + a_2 b_3}{1 + b_1 a_2}, \quad c_3 = \frac{b_2 a_1 + b_3 a_3}{1 + b_1 a_2}.$$

Если разрешить их относительно a_1, a_2, a_3, а затем положить $c_k = b_k$, то мы получим $a_1^0 = 0, a_2^0 = 0, a_3^0 = 1$. Это значения параметров, соответствующих тождественному преобразованию. С другой стороны, если разрешить уравнения выше относительно b_1, b_2, b_3 и затем положить $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$, то в качестве параметров обратного к a_1, a_2, a_3 преобразования мы найдем следующие: $\frac{-a_1}{a_3}, \frac{-a_2}{a_3}, \frac{1}{a_3}$.

[3] Другими словами, с каждым преобразованием группа содержит обратное к нему. — *Прим. ред.*

[4] Под простым многообразием понимается прямая. — *Прим. ред.*

Это то, что касается групп преобразований Кремоны. Теперь снова обратимся к рассмотрению общего случая, когда $f_i(x, a)$ являются аналитическими функциями своих аргументов.

Из теоремы 1 мы знаем, что уравнения $c_k = \varphi_k(a, b)$ можно разрешить как относительно $a_1 \cdots a_r$, так и относительно $b_1 \cdots b_r$. Но одних лишь наложенных ранее условий недостаточно, чтобы решить, можно ли удовлетворить требованию $c_k = b_k$. О функциях φ_k мы знаем только, что они регулярны для систем значений a_k, b_k, лежащих в области $((a))$, и что при этом система значений $c_k = \varphi_k(a, b)$ всегда попадает в область (a). Но мы ничего не знаем о том, существуют ли системы значений c_k, лежащие в области $((a))$, и тем более о том, можно ли для такой системы значений считать, что $c_k = b_k$.

Но даже если равенство $c_k = b_k$ возможно, т. е. если тождественное преобразование соответствует определенным значениям параметров a_k^0 в области $((a))$, то все же остается открытым вопрос, может ли c_k принимать значение a_k^0, то есть удовлетворять уравнениям $a_k^0 = \varphi_k(a, b)$.

Нельзя утверждать a priori, что каждая конечная непрерывная группа содержит тождественное преобразование. Но даже если тождественное преобразование встречается в данной группе, то это еще не означает, что преобразования этой группы упорядочиваются в пары взаимно обратных.

§ 4

Пусть некоторая r-параметрическая группа задана уравнениями от n переменных $x_1 \cdots x_n$:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r).$$

Тогда существуют различные средства для того, чтобы вывести из этих уравнений другие, которые, в свою очередь, тоже будут представлять r-параметрическую группу.

Первое: вместо a мы можем ввести в качестве новых параметров какие-либо r независимых функций:

$$\overline{a}_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1 \cdots r).$$

Пусть при разрешении этих уравнений относительно $a_1 \cdots a_r$ получаются функции

$$a_k = \gamma_k(\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

а при подстановке этих значений мы имеем

$$f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) = \mathfrak{f}_i(x_1 \cdots x_n, \overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r).$$

Если, кроме того, положить

$$\beta_k(b_1 \cdots b_r) = \overline{b}_k, \quad \beta_k(c_1 \cdots c_r) = \overline{c}_k \quad (k = 1 \cdots r),$$

то уравнение

$$f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r),$$

задающее групповое условие, сразу принимает такой вид:

$$\mathfrak{f}_i\big(\mathfrak{f}_1(x, \overline{a}) \cdots \mathfrak{f}_n(x, \overline{a}), \overline{b}_1 \cdots \overline{b}_r\big) = \mathfrak{f}_i(x_1 \cdots x_n, \overline{c}_1 \cdots \overline{c}_r),$$

откуда следует, что уравнения

$$x_i' = \mathfrak{f}_i(x_1 \cdots x_n, \overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

с r существенными параметрами $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ также представляют r-параметрическую группу.

Конечно, уравнения этой новой группы отличаются от уравнений исходной группы, однако эти уравнения представляют те же самые преобразования, что и исходные уравнения $x_i' = f_i(x, a)$. Следовательно, новая группа, по существу, идентична старой.

Второе: мы можем ввести вместо x новые независимые переменные $y_1 \cdots y_n$:

$$y_i = \omega_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

или после разрешения:

$$x_i = w_i(y_1 \cdots y_n) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Тогда мы положим

$$x_i' = w_i(y_1' \cdots y_n') = w_i', \quad x_i'' = w_i(y_1'' \cdots y_n'') = w_i''$$

и получим отсюда вместо уравнений преобразований

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$$

следующие уравнения:

$$w_i(y_1' \cdots y_n') = f_i(w_1 \cdots w_n, a_1 \cdots a_r),$$

или в результате разрешения:

$$y_i' = \omega_i\big(f_1(w,a)\cdots f_n(w,a)\big) = \mathfrak{F}_i(y_1\cdots y_n, a_1\cdots a_r).$$

Можно легко доказать, что уравнения

$$y_i' = \mathfrak{F}_i(y_1\cdots y_n, a_1\cdots a_r) \quad (i = 1\cdots n)$$

с r существенными параметрами $a_1\cdots a_r$ опять же представляют r-параметрическую группу. Действительно, уже знакомое нам уравнение

$$f_i\big(f_1(x,a)\cdots f_n(x,a), b_1\cdots b_r\big) = f_i(x_1\cdots x_n, c_1\cdots c_r)$$

переходит при вводе новых переменных в следующее:

$$f_i\big(f(w,a), b\big) = f_i(w_1\cdots w_n, c_1\cdots c_r),$$

что также можно записать как

$$f_i(w_1'\cdots w_n', b_1\cdots b_r) = f_i(w_1\cdots w_n, c_1\cdots c_r) = w_i'';$$

а отсюда в результате разрешения относительно $y_1''\cdots y_n''$ получаем

$$y_\nu'' = \omega_\nu\big(f_1(w',b)\cdots f_n(w',b)\big) = \omega_\nu\big(f_1(w,c)\cdots f_n(w,c)\big)$$

или, что то же самое,

$$y_\nu'' = \mathfrak{F}_\nu(y_1'\cdots y_n', b_1\cdots b_r) = \mathfrak{F}_\nu(y_1\cdots y_n, c_1\cdots c_r);$$

то есть имеется уравнение

$$\mathfrak{F}_\nu\big(\mathfrak{F}_1(y,a)\cdots\mathfrak{F}_n(y,a), b_1\cdots b_r\big) = \mathfrak{F}_\nu(y_1\cdots y_n, c_1\cdots c_r),$$

что как раз и доказывает, что уравнения $y_i' = \mathfrak{F}_i(y,a)$ представляют группу.

И наконец, мы можем одновременно ввести новые параметры и переменные в данную группу; ясно, что таким образом мы также получим из исходной новую группу.

Теперь дадим следующее

Определение. *Две r-параметрические группы*

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1\cdots x_n, a_1\cdots a_r) \quad (i = 1\cdots n), \\ y_i' &= \mathfrak{f}_i(y_1\cdots y_n, b_1\cdots b_r) \quad (i = 1\cdots n) \end{aligned}$$

от одного и того же числа переменных подобны[5], *если при введении подходящих новых переменных и параметров одна из них превращается в другую.*

Очевидно, что существует бесконечно много групп, подобных заданной, но все группы из этого бесконечного множества нам сразу же известны одновременно с заданной. Поэтому, как в дальнейшем и будет происходить, мы можем рассматривать две подобные группы как несущественно отличающиеся друг от друга.

Выше мы говорили о введении новых параметров и переменных, не останавливаясь на предположениях, при которых можно утверждать, что все существенные для нас свойства системы уравнений $x_i' = f_i(x, a)$ при этом сохраняются. Теперь еще несколько слов по этому поводу.

Если в группе $x_i = f_i(x_1 \cdots x_n)$ разрешается ввести новые параметры $\overline{a}_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r)$ вместо a, то $\overline{a}_k$ должны быть однозначными функциями от a во всей ранее определенной области (a), а также всюду вести себя регулярно; функциональный определитель $\sum \pm \frac{\partial \beta_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial \beta_r}{\partial a_r}$ не должен нигде в области (a) обращаться в нуль, и наконец, двум различным системам значений $a_1 \cdots a_r$ из этого множества должны всегда соответствовать две различные системы значений $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$. Другими словами, во множестве величин $\overline{a}_k$ должна выделяться такая область $(\overline{a})$, на системы значений которой однозначно отображаются системы значений из области (a) при помощи уравнений $\overline{a}_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r)$.

Если, с другой стороны, допускается введение новых переменных $y_i = \omega_i(x_1 \cdots x_n)$, то y должны быть однозначными и регулярными функциями для всех систем значений $x_1 \cdots x_n$, которые учитываются при формулировке группового свойства уравнений $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$; функциональный определитель $\sum \pm \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n}$ внутри этого множества не должен нигде обращаться в нуль, и наконец, двум различным системам значений $x_1 \cdots x_n$ из этого множества должны всегда соответствовать две различные системы значений $y_1 \cdots y_n$. Таким образом, соответствующая область систем значений x должна однозначно отображаться на некоторую область систем значений y.

Если бы в группу $x_i' = f_i(x, a)$ были введены новые параметры или переменные, и при этом только что изложенные требования не были выполнены, то вполне могло бы произойти так, что важные свойства группы и даже само групповое свойство оказались бы утрачены; группа с тождественным преобразованием могла бы превратиться в такую, которая не содержит тождественного преобразования, и т. п.

Иногда, однако, требуется просто исследовать семейство преобразований $x_i' = f_i(x, a)$ в окрестности одной отдельной точки $a_1 \cdots a_r$ или $x_1 \cdots x_n$. Это исследование часто упрощается за счет того, что вводятся новые переменные или па-

[5] В современной математике используется термин «изоморфны». – *Прим. ред.*

раметры, которые в *окрестности данной точки* удовлетворяют сформулированным выше требованиям.

И поэтому в таком случае вовсе не нужно останавливаться на вопросе, выполнены ли данные требования на всей области (x) или (a) соответственно.

§ 5

До сих пор понятия преобразования и группы преобразований носили для нас чисто аналитический характер. Их можно, однако, представить наглядно, если ввести понятие n-мерного пространства.

Если мы примем $x_1 \cdots x_n$ за координаты точек такого пространства, то преобразование $x_i' = f_i(x_i \cdots x_n)$ становится *точечным преобразованием*; оно же может пониматься как *операция*, состоящая в том, что все точки x_i одновременно переводятся в новое положение x_i'. Можно это выразить еще и так: данное преобразование — это операция, которая переставляет точки пространства $x_1 \cdots x_n$ между собой.

Если мы теперь имеем семейство, состоящее из ∞^r преобразований

$$x_1' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r),$$

образующих r-параметрическую группу, то этому семейству соответствует семейство из ∞^r операций, переставляющих точки пространства $x_1 \cdots x_n$ между собой. Очевидно, что результатом любых двух таких операций, выполненных одна за другой, всегда будет операция, снова принадлежащая этому семейству.

Поэтому если мы назовем вообще любое подобное множество операций группой операций или еще короче — группой, то можно сказать, что *каждая заданная r-параметрическая группа преобразований может рассматриваться как аналитическое представление некоторой группы, содержащей ∞^r перестановок*[6] *точек $x_1 \cdots x_n$.*

Если, наоборот, задана группа, содержащая ∞^r перестановок точек $x_1 \cdots x_n$, и эти перестановки можно представить при помощи аналитических уравнений преобразований, то соответствующие ∞^r преобразований естественным образом создают группу.

Если теперь предположить, что нам дана определенная группа операций, а также ее аналитическое представление, т. е. группа преобразований, то это представление имеет две очевидных неопределенности.

[6] Автор использует термин Vertauschung (перестановка), понимая при этом биективное отображение пространства на себя. Сегодня мы бы просто сказали «преобразование», но автору важно различать между собой аналитический и геометрический подходы, термин «преобразование» он использует в аналитическом контексте. — *Прим. ред.*

Первая неопределенность — это выбор параметров $a_1 \cdots a_r$. Становится ясно, что на группу операций как таковую не окажет никакого влияния, если мы вместо a введем новые параметры $\bar{a}_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r)$. Иным при этом будет лишь аналитическое выражение для группы операций; поэтому это выражение, как и прежде, будет представлять некоторую группу преобразований.

Вторая неопределенность в аналитическом представлении нашей группы операций — это выбор системы координат в пространстве $x_1 \cdots x_n$. Любая перестановка точек $x_1 \cdots x_n$ совершенно не зависит от выбора системы координат, с которой эти точки соотнесены; с изменением соответствующей системы координат меняется лишь аналитическое представление перестановки. То же самое верно, конечно, для любой группы перестановок. Отсюда следует, что из группы преобразований при введении новых переменных, то есть при замене системы координат, снова получается группа преобразований, так как уравнения преобразований, получающиеся при введении новых переменных, представляют собой в точности ту же группу операций, что и исходная группа преобразований; а потому они, в свою очередь, тоже образуют группу преобразований.

Это объясняет абстрактные аналитические соображения предыдущего параграфа. Именно теперь становится понятно, почему две подобные группы преобразований не могут считаться существенно различными: потому, что обе они аналитически представляют собой одну и ту же группу операций.

Глава 2

Вывод основных дифференциальных уравнений

Из данного ранее определения конечной непрерывной группы $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ мы хотим теперь вывести некоторые дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции f_i.

§ 6

В результате объединения уравнений

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r), \\ x_i'' &= f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r) \end{aligned} \quad (i = 1 \cdots n)$$

получается, как мы знаем, третья система уравнений аналогичного вида:

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

где c_k — определенные и даже аналитические функции, зависящие лишь от переменных a и b. Аналитически это выражается при помощи n уравнений, задающих групповое условие,

$$f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r) \quad (i = 1 \cdots n). \tag{1}$$

Если положить в этих равенствах $x_i' = f_i(x, a)$, $c_k = \varphi_k(a, b)$, то мы получим одни лишь тождества, так как $n + 2r$ переменных x_i, a_k и b_k независимы друг от друга.

Подобное относится, конечно, к любому соотношению между шестью системами переменных $x_i, x_i', x_i'', a_k, b_k, c_k$; если в таком соотношении выразить все через три независимые друг от друга системы переменных, то всегда получается тождество.

Согласно нашим предположениям, уравнения группового условия (1) выполняются, если x лежит в области $((x))$, a и b — в области $((a))$, в то время как x_i' и c_k согласно уравнениям

$$x_i' = f_i(x, a), \quad c_k = \varphi(a, b)$$

остаются внутри определенных частей множеств (x) и (a) соответственно.

Будем сначала исходить из уравнений (1). Мы рассматриваем в них $x_1 \cdots x_n$, $a_1 \cdots a_r$ и $c_1 \cdots c_r$ пока что как независимые переменные, а x' и b, в силу уравнений $x_i' = f_i(x, a)$, $c_k = \varphi_k(a, b)$, — как функции независимых переменных.

Приняв за основу такую точку зрения, мы хотим продифференцировать уравнения (1) по a_k; при этом мы для краткости запишем f_i' вместо $f_i(x', b)$ и получим

$$\frac{\partial f_i'}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial f_i'}{\partial x_n'}\frac{\partial x_n'}{\partial a_k} + \frac{\partial f_i'}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial f_i'}{\partial b_r}\frac{\partial b_r}{\partial a_k} = 0$$

$$(i = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r).$$

Поскольку функциональный определитель

$$\sum \pm \frac{\partial f_i'}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial f_n'}{\partial x_n'}$$

не обращается в нуль тождественно, то мы можем разрешить только что полученные уравнения относительно $\dfrac{\partial x_i'}{\partial a_k} \cdots \dfrac{\partial x_n'}{\partial a_k}$:

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial a_k} = \Phi_{1\nu}(x', b)\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \cdots + \Phi_{r\nu}(x', b)\frac{\partial b_r}{\partial a_k} \tag{2}$$

$$(\nu = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r),$$

где Φ не зависят от индекса k.

Что касается вида функций $\Phi(x', b)$, то они являются отношениями двух функциональных определителей, ведущих себя регулярно для всех систем значений x_i' и b_k внутри областей (x) и (a) соответственно. Поскольку, кроме того, общий для всех Φ знаменатель $\sum \pm \dfrac{\partial f_i'}{\partial x_1'} \cdots \dfrac{\partial f_n'}{\partial x_n'}$ нигде в данной области не обращается в нуль, то и $\Phi(x', b)$ ведут себя для любой из оговоренных систем значений x_i', b_k регулярно, более того, они однозначны во всей этой области.

Заметим, однако, что область, в которой определены функции $\Phi(x', b)$, не обязательно будет являться также областью справедливости уравнений (2). Последние

были выведены при условии, что $x_1 \cdots x_n$ лежат в $((x))$, $a_1 \cdots a_r$ и $b_1 \cdots b_r$ — в $((a))$ и соответственно $x'_1 \cdots x'_n$ — в области $x' = f(((x))((a)))$. Можно ли заменить эти условия другими, менее ограничительными, мы пока не знаем.

Входящие в (2) производные функций b по a можно представить как функции от $a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r$ при помощи уравнений $c_\mu = \varphi_\mu(a, b)$. Действительно, если мы продифференцируем эти уравнения по a_k, рассматривая при этом, как и прежде, a и c в качестве независимых переменных, а b — как функции от a и c, то получим

$$\sum_{\pi=1}^{r} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\pi} \frac{\partial b_\pi}{\partial a_k} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_k} = 0 \quad (\mu, k = 1 \cdots r),$$

то есть в результате разрешения имеем

$$\frac{\partial b_\pi}{\partial a_k} = -\frac{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial \varphi_{\pi-1}}{\partial b_{\pi-1}} \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial a_k} \frac{\partial \varphi_{\pi+1}}{\partial b_{\pi+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial b_r}}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial b_r}} = \Psi_{\pi k}(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r).$$

Если подставить эти значения в уравнения (2), то получится

$$\frac{\partial x'_\nu}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \Psi_{jk}(a, b) \cdot \Phi_{j\nu}(x', b) \quad (\nu = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r). \tag{2'}$$

Эти уравнения чрезвычайно важны, как мы позднее увидим.

Поведение функций $\Psi(a, b)$, согласно ранее сделанным предположениям, регулярно, если a_k и b_k произвольны в области $((a))$. Поэтому определитель

$$\sum \pm \frac{\partial b_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial b_r}{\partial a_r} = \sum \pm \Psi_{11} \cdots \Psi_{rr}$$

ни для одной из соответствующих систем значений a_k, b_k не будет бесконечным.

До сих пор мы рассматривали $a_1 \cdots a_r$ вместе с $x_1 \cdots x_n$ и $c_1 \cdots c_r$ как независимые переменные, но с тем же успехом можем выбрать в качестве таковых $b_1 \cdots b_r$ с $x_1 \cdots x_n$ и $c_1 \cdots c_r$. Исходя из последней точки зрения, мы должны рассматривать $a_1 \cdots a_r$ и $x'_1 \cdots x'_n$ как функции соответствующих независимых переменных в силу уравнений $c_k = \varphi_k(a, b), x'_i = f_i(x, a)$. Мы так сейчас и поступим, с тем чтобы сделать разрешение уравнений (2) относительно $\Phi_{j\nu}$ наглядным. Для этого перемножим только что упомянутые уравнения с $\frac{\partial a_k}{\partial b_\pi}$ и просуммируем по k от

1 до r, тогда получится:

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} = \sum_{\mu=1}^{r} \Phi_{\mu\nu}(x', b) \frac{\partial b_\mu}{\partial b_\pi} = \Phi_{\pi\nu}(x', b),$$

и мы можем записать

$$\Phi_{\pi\nu}(x', b) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial b_\pi} \quad (\pi = 1 \cdots r,\ \nu = 1 \cdots n). \tag{3}$$

Это и есть искомые решения уравнений (2). Впрочем, мы можем вывести уравнения $\frac{\partial x'_\nu}{\partial b_\pi} = \Phi_{\pi\nu}(x', b)$ также непосредственно из уравнений $f_i(x', b) = f_i(x, c)$, дифференцируя их по b_π, продолжая при этом рассматривать b_k, x_i, c_k как независимые переменные:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} f_i(x', b) \frac{\partial x'_\nu}{\partial b_\pi} + \frac{\partial}{\partial b_\pi} f_i(x', b) = 0,$$

и наконец разрешая полученные уравнения относительно $\frac{\partial x'_\nu}{\partial b_\pi}$.

Как прежде $\frac{\partial b_\pi}{\partial a_k}$, мы хотим теперь представить производные $\frac{\partial a_k}{\partial b_\pi}$ как функции от $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\pi} = 0 \quad (\mu, \pi = 1 \cdots r),$$

то получается

$$\frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} = -\frac{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_\pi} \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial a_{k+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial a_r}}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial a_r}} = A_{\pi k}(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r).$$

Если мы подставим эти значения в (3), то получим уравнения

$$\Phi_{\pi\nu}(x', b) = \sum_{k=1}^{r} A_{\pi k}(a, b) \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_k} \quad (\nu = 1 \cdots n, \quad \pi = 1 \cdots r), \tag{3'}$$

которые, разумеется, можем также получить непосредственно путем разрешения уравнений (2′).

Поведение функций $A(a,b)$, так же как и встречающихся выше $\Psi(a,b)$, регулярно для всех систем значений из области $((a))$. Следовательно, и определитель

$$\sum \pm \frac{\partial a_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial a_r}{\partial b_r} = \sum \pm A_{11} \cdots A_{rr}$$

ни для одной из этих систем значений a_k, b_k не будет бесконечным. Поэтому из известного соотношения

$$\sum \pm \frac{\partial a_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial a_r}{\partial b_r} \cdot \sum \pm \frac{\partial b_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial b_r}{\partial a_r} = 1$$

получается, что ни один из определителей $\sum \pm \Psi_{11} \cdots \Psi_{rr}$ и $\sum \pm A_{ii} \cdots A_{rr}$ не обращается в нуль ни для одной из рассматриваемых систем значений a_k, b_k.

§ 7

Уравнения

$$f_i(x'_1 \cdots x'_n, b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r), \tag{1}$$

из которых мы исходили, обращались в тождества, когда мы вводили для x'_1 и c_k выражения $f_i(x,a)$ и $\varphi_k(a,b)$ соответственно. То же самое справедливо, разумеется, для уравнений (2′) и (3′), т. к. переменные x_i, a_k, b_k друг от друга независимы.

Однако величины c_k не встречаются ни в одной из этих двух систем уравнений, так что (2′) и (3′) уже тогда обращаются в тождества, когда мы заменяем x'_i на $f_i(x,a)$. Другими словами, уравнения (2′) и (3′) — это некоторые дифференциальные уравнения для $x'_1 \cdots x'_n$, рассматриваемых как функции от $a_1 \cdots a_r, x_1 \cdots x_n$. При подстановке $x'_i = f_i(x,a)$ эти дифференциальные уравнения выполняются тождественно, т. е. независимо от значений величин $b_1 \cdots b_r$. Вследствие этого последние играют в дифференциальных уравнениях (2′) и (3′) лишь роль произвольных констант. Поэтому если мы придадим величинам $b_1 \cdots b_r$ в уравнениях (2′) и (3′) какие-либо произвольные допустимые, но фиксированные значения $\omega_1 \cdots \omega_r$, то эти уравнения по-прежнему будут представлять собой дифференциальные уравнения, которые при подстановке $x'_i = f_i(x,a)$ тождественно выполняются. Эти новые дифференциальные уравнения имеют, однако, то преимущество, что содержат лишь переменные $x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r$ и производные $\frac{\partial x'_\nu}{\partial a_k}$, а произвольных констант, напротив, не содержат.

Для удобства записи таких дифференциальных уравнений введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \Phi_{\pi\nu}(x'_1 \cdots x'_n, \omega_1 \cdots \omega_r) = \xi_{\pi\nu}(x'_1 \cdots x'_n), \\ \Psi_{jk}(a_1 \cdots a_r, \omega_1 \cdots \omega_r) = \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r), \\ A_{jk}(a_1 \cdots a_r, \omega_1 \cdots \omega_r) = \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r), \\ (\nu = 1 \cdots n;\ \pi, j, k = 1 \cdots r). \end{cases} \tag{4}$$

Тогда из (2′) при подстановке $b_k = \omega_k$ получится следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r), \tag{5}$$

а из (3′) — система, эквивалентная системе (5):

$$\xi_{ki}(x'_1 \cdots x'_n) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_j} \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r). \tag{6}$$

Входящие в эти уравнения функции $\psi_{jk}(a)$ и $\alpha_{kj}(a)$, очевидно, связаны соотношениями

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \cdot \psi_{\pi k}(a) = \varepsilon_{j\pi},$$

$$\sum_{k=1}^{r} \psi_{kj}(a) \cdot \alpha_{k\pi}(a) = \varepsilon_{j\pi},$$

$$\sum \pm \psi_{11} \cdots \psi_{rr} \cdot \sum \alpha_{11} \cdots \alpha_{rr} = 1,$$

где $\varepsilon_{j\pi}$ обращается в нуль, если π отлично от j, а ε_{jj} равны 1.

Само собой разумеется, что система значений $b_k = \omega_k$ должна находиться в области $((a))$.

Дифференциальные уравнения (5) и (6), в свою очередь, выведены сначала при условии, что x_i находятся в области $((x))$, а a_k — в области $((a))$, причем $x'_i = f_i(x, a)$ принимают тогда определенные значения внутри области (x). Ниже, однако, мы покажем, что функции, входящие в (5) и (6), могут быть определены на большей области, из чего сможем тогда заключить, что и область справедливости этих уравнений больше.

Впрочем, из сказанного выше можно сделать вывод, что функции $\xi_{ji}(x')$ заданы по крайней мере во всей области (x), а не только в ранее заданной меньшей

области. Кроме того, поведение $\xi_{ji}(x')$ для всех систем значений $x'_1 \cdots x'_n$ в области (x) регулярно, они даже однозначны во всей этой области по той простой причине, что все это справедливо для $\Phi_{ji}(x', b)$, из которых возникают $\xi_{ji}(x')$ при подстановке $b_k = \omega_k$. Однако ниже мы увидим, что $\xi_{ji}(x')$ могут быть определены путем аналитического продолжения в некоторой еще большей области.

Необходимо также отметить, что функции $\psi_{jk}(a)$ и $\alpha_{jk}(a)$ ведут себя для всех систем значений a_k в области $((a))$ регулярно, а также то, что ни один из определителей

$$\sum \pm \psi_{11} \cdots \psi_{rr}, \quad \sum \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{rr}$$

ни для какой из этих систем значений не обращается в нуль.

Из уравнений (6) можно получить еще одно следствие, которое позднее окажется важным: rn выражений $\xi_{ki}(x')$ не зависят друг от друга в том смысле, что невозможно удовлетворить n уравнениям

$$\sum_{k=1}^{r} e_k \, \xi_{ki}(x'_1 \cdots x'_n) = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

при помощи таких величин $e_1 \cdots e_r$, которые не обращаются одновременно в нуль и не содержат переменных $x'_1 \cdots x'_n$.

Действительно, если предположить, что $e_1 \cdots e_r$ — такие независимые от $x'_1 \cdots x'_n$ величины, которые удовлетворяют уравнениям выше, то в силу (6) мы получим следующие n уравнений:

$$\sum_{k,j=1}^{r} e_k \alpha_{kj}(a) \frac{\partial x'_i}{\partial a_j} = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

обращающиеся в тождества при подстановке $x'_i = f_i(x, a)$. Следовательно, все n функций $f_i(x, a)$ одновременно удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\sum_{k,j=1}^{r} e_k \alpha_{kj}(a) \frac{\partial f}{\partial a_j} = 0,$$

в котором коэффициенты при наложенных условиях зависят только от $a_1 \cdots a_r$, но не от $x_1 \cdots x_n$. Согласно утверждению 1, глава 1, это невозможно, т. к. параметры $a_1 \cdots a_r$ в уравнениях $x'_i = f_i(x, a)$ являются существенными. Итак, данное дифференциальное уравнение должно само по себе являться тождеством, т. е. для любого j должно выполняться

$$\sum_{k=1}^{r} e_k \, \alpha_{kj}(a) = 0 \quad (j = 1 \cdots r);$$

но поскольку определитель, составленный из $\alpha_{kj}(a)$, не обращается в нуль, то немедленно получается $e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 0$, что доказывает наше утверждение.

Подытожим основные из полученных до сих пор результатов следующим образом:

Теорема 3. *Если n уравнений*

$$x_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

представляют конечную непрерывную группу, все параметры которой $a_1 \cdots a_r$ являются существенными, то $x'_1 \cdots x'_n$, рассматриваемые как функции от $a_1 \cdots a_r$, $x_1 \cdots x_n$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r), \tag{5}$$

которые можно записать и так:

$$\xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \quad (i = 1 \cdots n, \quad j = 1 \cdots r). \tag{6}$$

Здесь тождественно не обращаются в нуль ни определитель из $\psi_{jk}(a)$, ни определитель из $\alpha_{jk}(a)$; кроме того, невозможно задать r таких не зависящих от $x'_1 \cdots x'_n$ и не равных одновременно нулю величин $e_1 \cdots e_r$, чтобы n выражений

$$e_1\xi_{1i}(x') + \cdots + e_r\xi_{ri}(x') \quad (i = 1 \cdots n)$$

одновременно обращались в нуль[1].

Эта теорема является основой для последующих результатов. То же самое справедливо, как уже было сказано, для всех конечных непрерывных групп. А именно: нужно подчеркнуть, что при доказательстве этой теоремы совершенно не берется во внимание, содержит ли данная группа тождественное и обратные преобразования. Другими словами, мы не использовали в доказательстве никаких других предположений, кроме сделанных в § 2.

[1] Ли, Archiv for Math. og Naturv., том 1, Христиания, 1876 г.

Пример. Рассмотрим снова группу

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}.$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_1} = \frac{1}{a_2 x + a_3}, \quad \frac{\partial x'_i}{\partial a_2} = -\frac{x(x + a_1)}{(a_2 x + a_3)^2},$$

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_3} = -\frac{x + a_1}{(a_2 x + a_3)^2},$$

поэтому, как легко убедиться:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_1} = \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x',$$

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_2} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} x' - \frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} x'^2,$$

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_3} = -\frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x' + \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x'^2.$$

Итак, для выполнения утверждений теоремы 3 нам достаточно положить

$$\xi_{11}(x') = 1, \quad \xi_{21}(x') = x', \quad \xi_{31}(x') = x'^2.$$

§ 8

Теперь мы переходим к обещанному доказательству того, что область, в которой определены функции ξ_{ji} и ψ_{jk}, может быть расширена. Необходимо при этом, однако, отметить, что эти рассуждения в дальнейшем, строго говоря, необязательны.

О функциях $\xi_{ji}(x)$ и $\psi_{jk}(a)$ было пока известно следующее: поведение функций $\xi_{ji}(x)$ регулярно во всей области (x), а для $\psi_{jk}(a)$ верно то же самое в области $((a))$. Сейчас мы покажем, что можно аналитически продолжить как $\xi(x)$, так и $\psi(a)$ за пределы данных областей. Одновременно будет видно, что уравнения (5),

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x'),$$

верны также в бóльшей области, чем мы до сих пор знаем; пока же справедливость этих уравнений обеспечена только тогда, когда x_i принимают значения в $((x))$, a_k — в $((a))$, а x'_i соответственно определяются из соотношений $x'_i = f_i(x, a)$.

Уравнения (5) представляют производные $\dfrac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ как функции независимых друг от друга переменных $x_1' \cdots x_n'$, $a_1 \cdots a_r$. Другое представление $\dfrac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ через x' и a находится следующим образом: в уравнении

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a)$$

выражение в правой части корректно определено и ведет себя регулярно, если x произвольны во всей области (x), а a — во всей области (a). Тогда по условию можно разрешить уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ относительно $x_1 \cdots x_n$: $x_\nu = F_\nu(x', a)$, где F_ν ведут себя регулярно в окрестности любой системы значений $\overline{x}_i'$, $\overline{a}_k$ при условии, что $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ лежит в области (a) и что $\overline{x}_i' = f_i(\overline{x}, \overline{a})$, где $\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n$ принадлежит области (x). Поэтому если произвести в выражениях $\dfrac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a)$ подстановку $x_\nu = F_\nu(x', a)$, то мы получим

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a) = \Omega_{ki}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r),$$

где Ω_{ki}, в свою очередь, ведут себя регулярно в окрестности любой системы значений $\overline{x}_i'$, $\overline{a}_k$ с заданным выше свойством.

В дальнейшем будет важным замечание, что не существует независимых от переменных $x_i' \cdots x_n'$ функций $\chi_1(a) \cdots \chi_r(a)$ от $a_1 \cdots a_r$, удовлетворяющих n уравнениям

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a_1 \cdots a_r) \cdot \Omega_{ki}(x', a) = 0 \quad (i = 1 \cdots n);$$

это исключено просто потому, что не существует линейного дифференциального уравнения в частных производных вида

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0,$$

которому удовлетворяли бы все n функций $f_1(x, a) \cdots f_n(x, a)$. Напротив, вполне возможно, что для отдельных специальных систем значений, например для некоторых $a_1 \cdots a_r$, имеют место соотношения вида

$$\sum_{k=1}^{r} l_k \, \Omega_{ki}(x', a^0) = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

в которых величины $l_1 \cdots l_r$ не зависят от индекса i и от переменных $x_1' \cdots x_n'$.

Естественно, что в общей области определения оба наши представления $\dfrac{\partial x'_i}{\partial a_k}$ должны совпадать. Следовательно, имеют место тождества

$$\Omega_{ki}(x', a) = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r), \tag{7}$$

если a_k лежат в $((a))$ и $x'_\nu = f_\nu(x, a)$, где x принадлежит области $((x))$. Эти тождества нам вскоре очень пригодятся.

Сначала расширим область, в которой определены $\xi(x')$. Для этого положим

$$\Xi_i = \sum_{k=1}^{r} C_k\, \Omega_{ki}(x', a) \quad (i = 1 \cdots n), \tag{8}$$

где под C_k понимаются произвольные, независимые от x' величины. Применим к уравнениям (8) утверждение из теории дифференциальных уравнений, которое мы уже однажды упоминали (ср. введение, стр. 5, см. также гл. 10). Согласно этому утверждению можно задать некоторые дифференциальные уравнения, не содержащие $C_1 \cdots C_r$, которым $\Xi_i \cdots \Xi_n$ удовлетворяют как функции от $x'_1 \cdots x'_n$, и общие решения которых представляют собой в точности вышеназванные значения для Ξ, если рассматривать $C_1 \cdots C_r$ как константы интегрирования. Мы получим эти дифференциальные уравнения, если вычислим все производные функций Ξ по $x'_1 \cdots x'_n$ до некоторого порядка, скажем m, и затем выпишем все уравнения, получающиеся путем исключения величин C_k. Число m при этом выбирается таким, чтобы полученная система дифференциальных уравнений была разрешима относительно всех производных от $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ порядка m, но не всех производных порядка $(m-1)$.

Таким образом, мы получаем систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных, определяющую выражения $\Xi_1 \cdots \Xi_n$. Будем считать, что эта система разрешена относительно стольких производных функций Ξ, сколько уравнений она содержит. Тогда очевидно, что коэффициенты в разрешенных дифференциальных уравнениях — это рациональные функции от $\Omega_{ki}(x', a)$ и их производных по $x'_1 \cdots x'_n$ порядка от 1 до m. Каждый из этих коэффициентов является поэтому отношением двух функций от $x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r$, поведение которых регулярно, если a_k принимают любые значения из (a), а x'_i удовлетворяют уравнениям $x'_i = f_i(x, a)$, где x принимает любые значения из (x). Отсюда мы заключаем, что каждый такой коэффициент по крайней мере в общем случае ведет себя для соответствующих систем значений a_k, x'_i регулярно и может быть аналитически продолжен на все множество этих систем значений.

Вернемся теперь к тождествам (7). Они показывают, что уравнения (8) можно также записать в виде

$$\Xi_i = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{r} C_k\, \psi_{jk}(a) \right) \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \cdots n), \tag{8'}$$

по крайней мере пока a_k находятся в $((a))$ и $x'_i = f_i(x, a)$, причем x_ν находятся в $((x))$. Следовательно, если мы ограничимся этими системами значений x'_i, a_k, то для вывода обсуждаемых дифференциальных уравнений для $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ мы можем использовать как уравнения $(8')$, так и уравнения (8); полученные в обоих случаях дифференциальные уравнения будут идентичны.

Теперь легко видеть, что дифференциальные уравнения для $\Xi_1 \cdots \Xi_n$, выведенные из $(8')$, не содержат $a_1 \cdots a_r$. А именно: уравнения $(8')$ представляют собой в известной нам области x'_i, a_k наиболее общую систему решений этих дифференциальных уравнений, если рассматривать $C_1 \cdots C_r$ как константы интегрирования. Если же положить

$$\sum_{k=1}^{r} C_k \psi_{jk}(a) = C'_j \quad (j = 1 \cdots r)$$

и учесть, что определитель, составленный из $\psi_{jk}(a)$, не обращается тождественно в нуль, то очевидно, что и уравнения

$$\Xi_i = \sum_{j=1}^{r} C'_j \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \cdots n) \tag{8''}$$

с r константами интегрирования $C'_1 \cdots C'_r$ будут представлять наиболее общую систему решений наших дифференциальных уравнений. Поэтому из уравнений $(8'')$ мы можем с тем же успехом, что и из $(8')$, вывести дифференциальные уравнения для $\Xi_i \cdots \Xi_n$. Но если мы это сделаем, т. е. продифференцируем уравнения $(8'')$ и исключим C', то получим дифференциальные уравнения, коэффициенты которых не содержат $a_1 \cdots a_r$ и зависят только от $x'_1 \cdots x'_n$. То же самое, разумеется, должно иметь место и для дифференциальных уравнений, полученных из $(8')$ и (8) соответственно, по крайней мере для всех x'_i из области $x' = f\big(((x))((a))\big)$.

Рассмотрим теперь в разрешенных дифференциальных уравнениях, выведенных из (8), какой-нибудь коэффициент $E(x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r)$. Его можно, как мы знаем, аналитически продолжить на всю область (a), $x' = f\big((x)(a)\big)$. Но только что мы видели, что этот коэффициент не зависит от $a_1 \cdots a_r$, пока a_k находятся в $((a))$, а x'_i — в $x' = f\big(((x))((a))\big)$. Значит, r производных $\dfrac{\partial E}{\partial a_1} \cdots \dfrac{\partial E}{\partial a_r}$ в этой последней области тождественно обращаются в нуль. Поскольку эти производные, так же как и E, можно аналитически продолжить на всю область (a), $x' = f\big((x)(a)\big)$, то во всей этой области они тождественно обращаются в нуль; то есть E и вообще все коэффициенты разрешенных дифференциальных уравнений, выведенных из (8), во всей области (a), $x' = f\big((x)(a)\big)$ не содержат a_k и являются, таким образом, функциями лишь от $x'_1 \cdots x'_n$. Разумеется, эти коэффициенты можно аналитически продолжить на всю область $x' = f\big((x)(a)\big)$, и они всегда ведут себя в этой области регулярно.

Мы знаем, что самая общая система решений дифференциальных уравнений для $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ содержит ровно r произвольных констант. Эту общую систему ре-

шений можно линейно получить[2] из r частных систем решений $\Xi_{k1} \cdots \Xi_{kn}$ $(k = 1 \cdots r)$, если они образуют так называемую фундаментальную систему, т. е. если нельзя задать r не зависящих от $x'_1 \cdots x'_n$ величин $h_1 \cdots h_r$, которые бы тождественно удовлетворяли n уравнениям

$$\sum_{k=1}^{r} h_k \, \Xi_{ki} = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

не обращаясь одновременно в нуль.

Таким образом, мы можем задать для любой системы значений x'_i из области $x' = f\big((x)(a)\big)$ такую фундаментальную систему решений, все функции которой в окрестности данной системы значений x'_i ведут себя регулярно. Действительно, если $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ — система значений общего положения в (a), то выражения $\Omega_{k1} \cdots \Omega_{kn}$ $(k = 1 \cdots r)$ представляют собой такую фундаментальную систему. Поэтому равенства

$$\Xi_i = \sum_{k=1}^{r} C_k \, \Omega_{ki}(x', \overline{a}) \quad (i = 1 \cdots n)$$

с произвольными константами $C_1 \cdots C_r$ задают самую общую систему решений. Причем все $\Omega_{ki}(x', \overline{a})$ в окрестности любой системы значений $x'_i = f_i(x, \overline{a})$ ведут себя регулярно, если выбрать $x_1 \cdots x_n$ где-то в области (x). Если добавить к этому, что коэффициенты наших дифференциальных уравнений аналитически продолжаются на всю область $x = f\big((x)(a)\big)$, то мы поймем, что можно исходить из некоторой определенной фундаментальной системы систем решений, например, из вышеописанной, и аналитически продолжить ее на всю область $x' = f\big((x)(a)\big)$. Само собой разумеется, что эти аналитические продолжения в любом месте этой области ведут себя регулярно и, кроме того, всегда представляют собой фундаментальную систему. Выбрав конкретную систему значений $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ в области $\big((a)\big)$, мы можем использовать тождества (7), чтобы увидеть, что $\xi_{ji}(x')$ могут быть продолжены на всю область $x' = f\big((x)(a)\big)$. Итак, мы получаем

$$\sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(\overline{a}) \cdot \xi_{ji}(x') = \Omega_{ki}(x', \bar{a}) \quad (i = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r),$$

а поскольку определитель $\sum \pm \psi_{ii}(\overline{a}) \cdots \psi_{rr}(\overline{a})$ при наложенных условиях заведомо отличен от нуля, то мы получим $\xi_{ji}(x')$, выраженные в виде линейных однородных функций от $\Omega_{ki}(x', \overline{a})$ с постоянными коэффициентами. Эти выражения для $\xi_{ji}(x')$ можно аналитически продолжить на всю область $x' = f\big((x)(a)\big)$ (поскольку это верно для $\Omega_{ki}(x', \overline{a})$), и они ведут себя при этом регулярно в любом месте этой области и представляют собой фундаментальную систему решений.

Тем самым первая часть нашей задачи выполнена — область, в которой определены $\xi_{ji}(x')$, расширена. Остается лишь проделать то же самое для $\psi_{jk}(a)$.

[2] Получить как линейную комбинацию. — *Прим. ред.*

Для этого используем следующее соображение.

Функции $\xi_{ji}(x')$ образуют в любом месте x'_i систему из r решений, более того, фундаментальную систему. Функции $\Omega_{ki}(x', a)$ представляют собой r частных систем решений для любой системы значений $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$, но для некоторых специальных $a_1^0 \cdots a_r^0$ эта система может оказаться не фундаментальной. Однако каждая система решений $\Omega_{k1}(x', \overline{a}) \cdots \Omega_{kn}(x', \overline{a})$ может быть линейно получена из фундаментальной системы $\xi_{ji}(x')$:

$$\Omega_{ki}(x', \overline{a}) = \sum_{j=1}^{r} h_{jk}\, \xi_{ji}(x') \quad (k = 1 \cdots r, \quad i = 1 \cdots n),$$

причем h_{jk} — совершенно определенные константы, если $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ фиксированы. Поэтому если величины h'_{jk}, так же как и h_{jk}, удовлетворяют только что записанным уравнениям, то получается

$$\sum_{j=1}^{r} (h'_{jk} - h_{jk}) \cdot \xi_{ji}(x') = 0 \quad (k = 1 \cdots r, \quad i = 1 \cdots n),$$

т. е. $h'_{jk} = h_{jk}$ согласно известным свойствам $\xi_{ji}(x')$.

Конечно, данные значения h_{jk} зависят от $\overline{a}_k$, или, если мы запишем a_k вместо $\overline{a}_k$, h_{jk} будут некоторыми функциями от a_k. Чтобы определить эти функции, разложим в уравнениях

$$\Omega_{ki}(x', a) = \sum_{j=1}^{r} h_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x')$$

обе части по степеням $x'_\nu - x'^0_\nu$, где $x'^0_\nu = f_\nu(x^0, \overline{a})$ и x_i^0 лежит в области (x), а $\overline{a}_k$ — в области (a). Затем сравним коэффициенты обеих частей и получим систему линейных уравнений

$$\omega_{ki\mu}(a) = \sum_{j=1}^{r} l_{ji\mu} \cdot h_{jk}(a) \quad (k = 1 \cdots r, \quad i = 1 \cdots n, \quad \mu = 1, 2 \cdots)$$

для нахождения $h_{jk}(a)$. Эти уравнения должны, согласно вышесказанному, полностью определять $h_{jk}(a)$, однако не могут их переопределить, т. к. любой системе значений a_k заведомо соответствует система значений h_{jk}. Поскольку $l_{ji\mu}$ являются числовыми константами, а $\omega_{ki\mu}(a)$ — обычными степенными рядами от $a_k - \overline{a}_k$, то и h_{jk} будут обычными степенными рядами от $a_k - \overline{a}_k$, причем в окрестности любой из систем значений a_k в области (a).

Это означает, что $h_{jk}(a)$ аналитически продолжаются и ведут себя регулярно на всей области (a). Так как очевидно, что $h_{jk}(a)$ внутри области $((a))$ совпадают с $\psi_{jk}(a)$ [ср. (7)], то и $\psi_{jk}(a)$ тогда определены на всей области (a). При этом, впрочем, не исключено, что определитель $\sum \pm \psi_{11} \cdots \psi_{rr}$ обращается в нуль для отдельных систем значений области (a); отсюда будет следовать, что функции $\alpha_{kj}(a)$,

о которых шла речь выше, не для всех систем значений области (a) ведут себя регулярно.

Итак, задача, которую мы поставили себе в начале настоящего параграфа, решена. Области, в которых определены функции $\xi_{ji}(x')$ и $\psi_{jk}(a)$, мы расширили. Тем самым одновременно расширена область справедливости уравнений (5); и мы можем утверждать следующее:

Уравнения $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ *нашей r-параметрической группы удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (5):

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r),$$

если $x_1 \cdots x_n$ означает любую систему значений из области (x), а $a_1 \cdots a_r$ — любую систему значений из области (a).

§ 9

К найденным до этого дифференциальным уравнениям мы хотим теперь добавить еще некоторые новые.

При этом мы используем полученные в § 6 уравнения (3):

$$\frac{\partial x_i'}{\partial b_\pi} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} = \Phi_{\pi i}(x', b) \quad (i = 1 \cdots n, \quad \pi = 1 \cdots r), \tag{3}$$

при выведении которых мы предполагали, что $b_1 \cdots b_r, x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r$ — независимые переменные, рассматривая при этом a_k и x_i', в силу уравнений $c_k = \varphi_k(a, b), x_i' = f_i(x, a)$, как функции от $b_1 \cdots b_r, x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r$.

В уравнения (3) мы сначала подставим вместо $\dfrac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ их значения из (5), а вместо производных $\dfrac{\partial a_k}{\partial b_\pi}$ — найденные на стр. 32 выражения $A_{\pi k}(a, b)$, тогда получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial b_\pi} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x') \sum_{k=1}^{r} A_{\pi k}(a, b) \cdot \psi_{jk}(a)$$

или, если мы положим

$$\sum_{k=1}^{r} A_{\pi k}(a, b) \cdot \psi_{jk}(a) = \vartheta_{j\pi}(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r),$$

то нижеследующие:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial b_\pi} = \sum_{j=1}^{r} \vartheta_{j\pi}(a,b) \cdot \xi_{ji}(x').$$

Кроме того, уравнения (3) дали второе выражение для $\dfrac{\partial x'_i}{\partial b_\pi}$, а именно $\Phi_{\pi i}(x', b)$; значит, имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{r} \vartheta_{j\pi}(a,b) \cdot \xi_{ji}(x') = \Phi_{\pi i}(x', b).$$

Поскольку $n + 2r$ переменных x'_i, a_k, b_k не зависят друг от друга, то эти уравнения могут иметь место, только если они тождественны по x'_i, a_k и b_k. Поэтому если $a_1 \cdots a_r$ и $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ означают две произвольные системы значений a, то соотношение

$$\sum_{j=1}^{r} \big(\vartheta_{j\pi}(\overline{a}, b) - \vartheta_{j\pi}(a,b)\big) \cdot \xi_{ji}(x') = 0$$

является тождеством. Из этого, однако, немедленно следует, что $\vartheta_{j\pi}(\overline{a}, b) \equiv \vartheta_{j\pi}(a,b)$, т. е. $\vartheta_{j\pi}(a,b)$ не содержат a и зависят лишь от b.

Вследствие этого наши дифференциальные уравнения для $x'_1 \cdots x'_n$ имеют вид:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial b_\pi} = \sum_{j=1}^{r} \vartheta_{j\pi}(b) \cdot \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \cdots n, \pi = 1 \cdots r). \tag{9}$$

Само собой разумеется, что определитель, составленный из $\vartheta_{j\pi}$, здесь не обращается тождественно в нуль.

В соответствии с тем, как они были выведены, уравнения (9) заведомо выполняются, если x_i находятся в области $((x))$, a_k и b_k — в области $((a))$, и наконец, x'_i — в области $x' = f\big(((x))((a))\big)$, т. е. в определенной части области (x). Однако можно показать, что функции, появляющиеся в (9), определены в большей области; тем самым расширяется также и область справедливости уравнений (9).

Чтобы доказать выдвинутое утверждение, мы исходим из тождеств

$$\sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x') \cdot \vartheta_{j\pi}(b) = \Phi_{\pi i}(x', b) \quad (i = 1 \cdots n, \quad \pi = 1 \cdots r), \tag{10}$$

которые уже использовались выше. Эти тождества справедливы, впрочем, только в указанной выше области; однако мы знаем, что функции $\xi_{ji}(x')$, $\Phi_{\pi i}(x', b)$ для всех комбинаций систем значений x'_i из (x), b_k из (a) не только определены, но и ведут себя регулярно, и даже однозначны во всей этой области. Если мы примем это во внимание, то из тождеств выше можно вывести некоторое выражение для $\vartheta_{j\pi}(b)$, которое действует не только в $((a))$, но и во всей области (a).

Итак, предположим, что обе части тождества выше мы разложили по степеням $x'_1 - x'^0_1, \cdots x'_n - x'^0_n$, понимая под x'^0_i систему значений в области $x' = f\big(((x))((a))\big)$. Сравним теперь коэффициенты разложения в обеих частях и получим, вообще говоря, бесконечную последовательность линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} l_{j\mu}\vartheta_{j\pi}(b) = \chi_{\pi\mu}(b) \quad (\pi = 1 \cdots r, \quad \mu = 1, 2 \cdots), \tag{11}$$

для нахождения $\vartheta_{j\pi}$. Величины $l_{j\mu}$ при этом — числовые константы, а $\chi_{\pi\mu}(b)$ — некоторые функции, ведущие себя всюду в области (a) регулярно.

Прежде всего, ясно, что только что полученные уравнения не могут противоречить друг другу, т. к. если $b_1 \cdots b_r$ произвольны в области $((a))$, то имеют место тождества (10), а из этого следует, что данные функции $\vartheta_{j\pi}(b)$ удовлетворяют также уравнениям (11) тождественно, то есть что эти уравнения совместны.

Далее можно показать, что уравнения (11) полностью определяют величины $\vartheta_{j\pi}(b)$. В противном случае пришлось бы допустить существование двух различных систем функций, $\vartheta_{j\pi}(b)$ и $\overline{\vartheta}_{j\pi}(b)$, которые тождественно удовлетворяли бы (11), а значит, и (10). Тогда отсюда следовало бы

$$\sum_{j=1}^{r} \big(\overline{\vartheta}_{j\pi}(b) - \vartheta_{j\pi}(b)\big) \cdot \xi_{ji}(x') \equiv 0 \quad (i = 1 \cdots n, \quad \pi = 1 \cdots r),$$

и согласно теореме 3, стр. 36, все выражения $\overline{\vartheta}_{j\pi} - \vartheta_{j\pi}$ должны были бы обращаться в нуль. Но это приводит к противоречию.

Следовательно, уравнения (11) задают $\vartheta_{j\pi}$ однозначным образом как линейные однородные функции от $\chi_{\pi\mu}$ с постоянными коэффициентами, и тем самым доказано, что $\vartheta_{j\pi}(b)$ аналитически продолжаемы на всю область (a) и ведут себя в окрестности любой системы значений $b_1 \cdots b_r$ из этой области регулярно. Поэтому, согласно известному утверждению из теории функций, тождества (10) справедливы для всех систем значений x'_i из (x) и b_k из (a). Но тогда дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial x'_i}{\partial b_\pi} = \Phi_{\pi i}(x', b) \quad (i = 1 \cdots n, \quad \pi = 1 \cdots r)$$

имеют место для всех таких систем значений x'_i, b_k, о чем свидетельствует их вывод на стр. 32. Таким образом, получается, что и дифференциальные уравнения (9) верны, если x'_i произвольно изменяются в (x), а b_k — в (a).

Вновь подытоживая результаты § 9, мы находим удобным подставить в уравнения (9) x_i вместо x_i' и a_k вместо b_k. Тогда мы можем высказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Если рассмотреть в уравнениях*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

группы с r существенными параметрами $a_1 \cdots a_r$ величины x_i как функции от $a_1 \cdots a_r$ и $x_1' \cdots x_n'$, то имеют место дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \vartheta_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r). \qquad (9')$$

Теорему 4 можно было бы проще вывести на основе связи между теоремами 2 и 3. Используемый здесь метод доказательства предпочтителен по многим причинам, в том числе потому, что он показывает, что упомянутые в теореме 4 функции $\xi_{ji}(x)$ тождественно совпадают с функциями $\xi_{ji}(x')$ из теоремы 3.

Добавим к этому следующее:

В дифференциальных уравнениях (9') *x_i могут принимать произвольные значения в области (x), а a_k — в области (a).*

Пример. Для группы

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}$$

получается:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_1} = -\frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_2} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} x + \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x^2,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_3} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x.$$

Это согласуется со сказанным ранее:

$$\xi_{11}(x) = 1, \quad \xi_{21}(x) = x, \quad \xi_{31}(x) = x^2.$$

§ 10

В заключение мы хотим из уравнений (5) и (9′) вместе взятых вывести некоторые новые уравнения.

Продифференцируем уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ по a_k, рассматривая x в силу этих уравнений как функции от a и x'. Получаем

$$0 = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial a_k} + \frac{\partial f_i}{\partial a_k},$$

и подставляя значения $\frac{\partial x_\nu}{\partial a_k}$ из (9′) и $\frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ из (5), имеем

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{r} \vartheta_{jk}(a)\, \xi_{j\nu}(x) \right\} \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} + \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \xi_{ji}(f).$$

Очевидно, что последние уравнения выполняются тождественно, т. к. $x_1 \cdots x_n$ и $a_1 \cdots a_r$ независимы друг от друга. Поэтому мы можем также сказать, что $x_1' \cdots x_n'$, рассматриваемые как функции от $x_1 \cdots x_n$ и $a_1 \cdots a_r$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{r} \vartheta_{jk}(a)\, \xi_{j\nu}(x) \right\} \frac{\partial x_i'}{\partial x_\nu} + \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') = 0$$

$$(i = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r).$$

Эти дифференциальные уравнения можно записать симметрично по переменным x и x'. Для этого мы рассмотрим $F(x_1' \cdots x_n')$ как произвольную функцию от $x_1' \cdots x_n'$, умножим вышестоящее уравнение на $\frac{\partial F}{\partial x_i'}$ и просуммируем по i от 1 до n; тогда, используя очевидное соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F}{\partial x_\nu},$$

мы получим r уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} \vartheta_{jk}(a) \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(x) \frac{\partial F}{\partial x_\nu} + \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x_\nu'} = 0 \qquad (12)$$

$$(k = 1 \cdots r).$$

Итак, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5. *Если уравнения*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

представляют r-параметрическую группу преобразований с r существенными параметрами $a_1 \cdots a_r$, *а* $F(x_1' \cdots x_n')$ *является произвольной функцией от* $x_1' \cdots x_n'$, *если, наконец,* ξ_{jk}, $\psi_{jk}(a)$, $\vartheta_{jk}(a)$ — *функции своих аргументов, как в теоремах* 3 *и* 4, *то r соотношений*

$$\sum_{j=1}^{r} \vartheta_{jk}(a) \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(x) \frac{\partial F}{\partial x_\nu} + \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x_\nu'} = 0 \qquad (12)$$

$$(k = 1 \cdots r)$$

при подстановке $x_1' = f_1(x, a), \cdots x_n' = f_n(x, a)$ *обращаются в тождества.*

Что касается области справедливости уравнений (12), то необходимо отметить следующее:

Уравнения $x_i' = f_i(x, a)$, благодаря которым (12) тождественно выполняются, справедливы, если x_i лежат в (x), а a_k — в (a), откуда тогда находятся соответствующие значения для x_i'. Поскольку теперь коэффициенты уравнений (12) также определены и ведут себя регулярно, если x_i лежат в (x), a_k — в (a), а x_i' — в области $x' = f\big((x)(a)\big)$, то мы заключаем, что и сами уравнения (12) справедливы для всех этих систем значений x_i, a_k, x_i'.

Глава 3

Однопараметрические группы и инфинитезимальные преобразования

Общие рассуждения предыдущей главы мы применим сперва к самому простому случаю $r = 1$, т. е. к однопараметрическим группам. При этом нам предоставится возможность ввести понятие инфинитезимального преобразования[1].

§ 11

Пусть

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a) \quad (i = 1 \cdots n)$$

суть уравнения однопараметрической группы. Согласно теореме 3, стр. 36, $x_1' \cdots x_n'$, рассматриваемые как функции от a, удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i'}{da} = \psi(a) \cdot \xi_i(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n). \tag{1}$$

Что касается области справедливости этих дифференциальных уравнений, то мы ссылаемся на сказанное в § 8. Отметим особо только то обстоятельство, что функция $\psi(a)$ во всей ранее оговоренной области ведет себя регулярно и что по крайней мере в области $((a))$ нигде не обращается в нуль.

Если мы рассматриваем $x_1 \cdots x_n$ как произвольные константы, то уравнения $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ представляют собой систему интегральных уравнений системы (1), а именно полную систему интегральных уравнений, поскольку она разрешима относительно констант интегрирования $x_1 \cdots x_n$. Полных систем интегральных уравнений существует бесконечно много, но если известна одна из них, например

$$x_i' = V_i(C_1 \cdots C_n, a^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

[1] Ли, Научное общество Христиании 1872, 1873 г., Archiv for Mathematik og Naturv., Христиания, 1876 г.

с n константами интегрирования $C_1 \cdots C_n$, то всегда можно подставить вместо $C_1 \cdots C_n$ такие функции от $x_1 \cdots x_n$, что $V_i(C, a) \equiv f_i(x, a)$. Чтобы задать константы C требуемым образом, необходимо лишь знать вид функций $f_i(x, a)$ для какого-либо определенного значения $a = a^0$, а затем разрешить уравнения

$$V_i(C_1 \cdots C_n, a^0) = f_i(x_1 \cdots x_n, a^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

относительно $C_1 \cdots C_n$.

Отсюда явствует, что дифференциальные уравнения (1), взятые сами по себе, еще не полностью задают нашу группу. Однако если мы имеем дифференциальные уравнения (1), и если, кроме того, нам известно преобразование нашей группы $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a^0)$, соответствующее заданному значению $a = a^0$, то можно найти уравнения однопараметрической группы, полностью проинтегрировав систему (1).

Мы можем использовать это обстоятельство для получения различных форм представления нашей однопараметрической группы, применяя различные формы полной системы интегральных уравнений. Для простоты мы сначала наложим условие, что среди преобразований нашей группы, принадлежащих области $(\!(a)\!)$, имеется тождественное преобразование. Итак, пусть $f_i(x_1 \cdots x_n, a^0) \equiv x_i$, где a^0 означает определенное место в области $(\!(a)\!)$.

Предположим, что любую полную систему интегральных уравнений (1) можно привести к виду

$$\begin{cases} \Omega_i(x_1' \cdots x_n') = C_i \quad (i = 1 \cdots n-1), \\ \Omega_n(x_1' \cdots x_n') - \displaystyle\int_{a^0}^{a} \psi(a)\, da = C_n, \end{cases} \tag{2}$$

где функции $\Omega_1 \cdots \Omega_n$ не зависят друг от друга, и $C_1 \cdots C_n$ означают константы интегрирования. Чтобы теперь получить уравнения нашей группы, нам надо лишь таким образом задать $C_1 \cdots C_n$ как функции от $x_1 \cdots x_n$, чтобы значению $a = a^0$ соответствовало тождественное преобразование $x_i' = x_i$, т. е. положить $C_1 = \Omega_1(x), \cdots C_n = \Omega_n(x)$. Таким образом мы найдем уравнения

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n-1),$$
$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n') - \int_{a^0}^{a} \psi(a)\, da = \Omega_n(x_1 \cdots x_n),$$

которые представляют собой лишь иную форму уравнений $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$.

Теперь уместно ввести вместо a новый параметр

$$t = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\, da.$$

Согласно изложенному в начале этого параграфа, здесь не только t как функция от a в окрестности a^0 ведет себя регулярно, но также и a как функция от t в окрестности $t = 0$. Поэтому соответствие между a и t в некоторой окрестности $a = a^0$ $(t = 0)$ взаимно однозначно. *В этой окрестности уравнения*

$$\begin{cases} \Omega_i(x'_1 \cdots x'_n) = \Omega_i(x_1 \cdots x_n) & (i = 1 \cdots n-1), \\ \Omega_n(x'_1 \cdots x'_n) - t = \Omega_n(x_1 \cdots x_n) \end{cases} \tag{3}$$

представляют нашу однопараметрическую группу с тождественным преобразованием.

Впрочем, последние уравнения можно также непосредственно вывести из системы уравнений

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1 \cdots x'_n) \quad (i = 1 \cdots n). \tag{4}$$

Надо лишь так задать $x'_1 \cdots x'_n$ в качестве функций от t, чтобы при подстановке $t = 0$ получилось $x'_i = x_1, \cdots x'_n = x_n$, и тогда мы имеем систему уравнений, эквивалентную (3). Конечно, можно и наоборот: вывести из (3) при помощи дифференцирования систему (4).

Теперь рассмотрим уравнения (3) сами по себе, без учета того, что они выведены из уравнений $x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$. Итак, предположим, что функции $\Omega_1 \cdots \Omega_n$ в (3) — *произвольно заданные функции* своих аргументов, на которые наложено единственное ограничение: они должны быть независимы друг от друга.

Пусть величина t принимает все возможные значения, тогда уравнения (3) представляют собой семейство из ∞^1 преобразований. Если последовательно выполнить два преобразования этой группы, то мы, очевидно, всегда получим преобразование, также принадлежащее этому семейству. Следовательно, ∞^1 преобразований (3) всегда образуют группу.

Об этой группе можно сказать следующее: если выполнить последовательно два ее преобразования с параметрами t_1 и t_2 соответственно, то получится преобразование с параметром $t_1 + t_2$. Таким образом, любые два преобразования этой группы *перестановочны*. Тождественное преобразование соответствует параметру $t = 0$; поэтому если параметры t_1 и t_2 двух

преобразований группы удовлетворяют условию $t_1 + t_2 = 0$, то данные преобразования обратны друг другу. Тем самым ясно, что преобразования группы (3) упорядочиваются в пары *взаимно обратных*.

Далее заметим, что каждая система вида (4) дает систему уравнений вида (3), какими бы функциями от $x_1' \cdots x_n'$ ни были ξ_i. Следовательно, мы можем сказать, что *каждая система вида* (4) *дает совершенно определенную однопараметрическую группу, содержащую тождественное преобразование*. Позже, когда мы введем понятие инфинитезимального преобразования, мы сможем этот факт выразить лаконичнее.

Теперь же вернемся к группе $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ с тождественным преобразованием $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a^0) \equiv x_i$. На нее сразу можно перенести все то, что было сказано о группе (3), с единственным условием, что мы ограничимся некоторой окрестностью $t = 0$ или, что то же самое, $a = a^0$. В данной окрестности $t = 0$ мы всегда можем выбрать t_1 и t_2 такими, чтобы как $t_1 + t_2$, так и $-t_1$ лежали в этой окрестности. Следовательно, и для группы $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ будет справедливо, что ее преобразования, по крайней мере в некоторой определенной окрестности тождественного преобразования, перестановочны и упорядочиваются в пары взаимно обратных.

Вид (3), к которому могут быть приведены преобразования $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ в окрестности a, наводит на мысль ввести вместо x следующие новые переменные:

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = y_1, \cdots \Omega_n(x_1 \cdots x_n) = y_n.$$

Тогда в этих новых переменных $y_1 \cdots y_n$ мы получаем однопараметрическую группу

$$y_1' = y_1, \cdots y_{n-1}' = y_{n-1}, \quad y_n' = y_n + t,$$

которая согласно введенному в § 4 определению подобна группе $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$. Если при этом рассматривать $y_1 \cdots y_n$ как обычные декартовы координаты n-мерного пространства и использовать терминологию, применительную к трехмерному пространству, то можно сказать, что однопараметрическая группа, записанная в переменных $y_1 \cdots y_n$, состоит из *параллельных переносов* данного n-мерного пространства.

Теперь еще раз подытожим полученные до сих пор результаты, прежде чем двинуться дальше.

Теорема 6. *Если однопараметрическая группа*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a) \quad (i = 1 \cdots n)$$

содержит тождественное преобразование, то ее преобразования перестановочны и упорядочиваются в пары взаимно обратных. Каждая однопараметрическая группа такого рода подобна группе переносов

$$y_1' = y_1, \ \cdots \ y_{n-1}' = y_{n-1}, \quad y_n' = y_n + t.$$

Пример. Уравнения

$$x_1' = ax_1, \quad x_2' = a^2 x_2$$

с параметром a представляют однопараметрическую группу, содержащую тождественное преобразование, а именно для $a = 1$. Дифференциальные уравнения (1) имеют здесь вид

$$\frac{dx_1'}{da} = \frac{1}{a}x_i', \quad \frac{dx_2'}{da} = \frac{1}{a}2x_2'.$$

Поэтому если мы хотим перевести данную однопараметрическую группу в группу параллельных переносов согласно вышеизложенным правилам, то нам надо сначала положить a^0 равным 1, тогда имеем

$$t = \int_1^a \frac{da}{a} = \ln a;^2$$

затем необходимо проинтегрировать систему

$$\frac{dx_1'}{x_i'} = \frac{dx_2'}{2x_2'} = dt$$

с учетом начального условия $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$ при $t = 0$. В результате мы получаем уравнения группы в виде

$$\frac{x_2'}{x_1'^2} = \frac{x_2}{x_1^2}, \quad \ln x_1' = \ln x_1 + t.$$

Если в качестве новых переменных выбрать следующие:

$$y_1 = \frac{x_2}{x_1^2}, \quad y_2 = \ln x_1,$$

то группа приобретает желаемый канонический вид:

$$y_1' = y_1, \quad y_2' = y_2 + t$$

или, если предпочтительнее оставить исходный параметр a

$$y_1' = y_1, \quad y_2' = y_2 + \ln a.$$

---

[2] Для $\ln x$ Ли использует обозначение lx. – *Прим. ред.*

До сих пор мы предполагали, что наша группа содержит тождественное преобразование в области $((a))$. Теперь же пусть будет неважно, есть там тождественное преобразование или нет. Тогда многое будет происходить несколько иначе.

Если $\overline{a}$ — некоторая точка в области $((a))$, то уравнения $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ нашей группы могут быть представлены в следующем виде:

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i\big(f_1(x_1 \cdots x_n, \overline{a}) \cdots f_n(x_1 \cdots x_n, \overline{a})\big) \quad (i = 1 \cdots n-1),$$

$$\Omega_n(x_1' \cdots x_n') - \int_{\overline{a}}^{a} \psi(a)\, da = \Omega_n\big(f_1(x_1 \cdots x_n, \overline{a}) \cdots f_n(x_1 \cdots x_n, \overline{a})\big).$$

Положим теперь

$$\int_{\overline{a}}^{a} \psi(a)\, da = \tau$$

и ограничимся некоторой окрестностью точки $\overline{a}$. Тогда можно полагать, что каждое преобразование нашей группы в окрестности $\overline{a}$ получается, если выполнить сначала преобразование

$$\overline{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \overline{a}) \quad (i = 1 \cdots n),$$

а затем — преобразование вида

$$\begin{cases} \Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n) & (i = 1 \cdots n-1), \\ \Omega_i(x_1' \cdots x_n') - \tau = \Omega_n(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n), \end{cases} \tag{5}$$

то есть сперва преобразование самой группы $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$, а затем преобразование однопараметрической группы, заведомо содержащей тождественное преобразование.

Этот результат мы также сможем выразить более кратко и четко, когда введем понятие инфинитезимального преобразования. К этому понятию нас подведет более обстоятельное рассмотрение тех однопараметрических групп, которые содержат тождественное преобразование.

§ 12

Выше мы видели, что уравнения любой однопараметрической группы с тождественным преобразованием могут быть получены путем интегрирования вполне определенной системы

$$\frac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n). \tag{4}$$

Если эта система интегрируется при начальном условии $x_1' = x_1, \cdots x_n' = x_n$, то получающиеся уравнения

$$\begin{cases} \Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i(x_1 \cdots x_n) & (i = 1 \cdots n-1), \\ \Omega_n(x_1' \cdots x_n') = \Omega_n(x_1 \cdots x_n) + t \end{cases} \tag{3}$$

являются другой формой записи нашей группы. С другой стороны, мы также видели, что любая система вида (4) связана только что описанным образом с совершенно определенной однопараметрической группой.

Это обстоятельство мы хотим использовать, чтобы вывести новое представление любой однопараметрической группы с тождественным преобразованием.

Мы можем осуществить интегрирование системы (4) также при помощи степенных рядов, т. е. разложить $x_1' \cdots x_n'$ в такие обычные степенные ряды по t, чтобы тождественно выполнялись как система (4), так и начальное условие $x_i' = x_i$ при $t = 0$. Соответствующие разложения таковы:

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\xi_i(x_1 \cdots x_n) + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n). \tag{6}$$

Следовательно, это и есть общий вид однопараметрической группы с тождественным преобразованием.

Чтобы отчетливее выделить правило построения вышеназванных рядов, введем сокращенное обозначение, а именно положим

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1 \cdots x_n) = X(f)$$

понимая под f совершенно произвольную функцию от $x_1 \cdots x_n$. Тогда уравнения (6) можно записать в виде

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\xi_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2}X(\xi_i) + \frac{t^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}X\big(X(\xi_i)\big) + \cdots \tag{6'}$$

или, если угодно, еще и так:

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}X(x_i) + \frac{t^2}{1 \cdot 2}X\big(X(x_i)\big) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n), \tag{6''}$$

где теперь правило построения совершенно легко прослеживается.

Систему из n уравнений (6″) можно свести к одному единственному уравнению. А именно: вместо того чтобы задавать разложение в ряд по степеням t для каждой переменной $x'_1 \cdots x'_n$ в отдельности, можно просто задать общее разложение в ряд для произвольной функции от $x'_1 \cdots x'_n$; если затем придать этой функции одно за другим значения $x'_1, x'_2 \cdots x'_n$, то мы снова получим все n уравнений (6″).

Таким образом, речь идет о том, чтобы разложить выражение $f(x'_1 \cdots x'_n)$ по степеням от t, причем $x'_1 \cdots x'_n$ определяются уравнениями (6″) и поэтому удовлетворяют системе (4).

Требуемое разложение в ряд имеет вид

$$f(x'_1 \cdots x'_n) = f' = (f')_{t=0} + \frac{t}{1}\left(\frac{df'}{dt}\right)_{t=0} + \cdots;$$

поэтому сначала вычислим производные $\dfrac{df'}{dt}, \dfrac{d^2f'}{dt^2} \cdots$:

$$\frac{df'}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f'}{\partial x'_i}\frac{dx'_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x'_1 \cdots x'_n)\frac{\partial f'}{\partial x'_i}.$$

Если записать здесь ξ'_i вместо $\xi_i(x')$ и $X'(f)$ вместо $\sum \xi'_i \dfrac{\partial f'}{\partial x'_i}$, то получаем

$$\begin{aligned} \frac{df'}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \frac{\partial f'}{\partial x'_i} = X'(f'), \\ \frac{d^2f'}{dt^2} &= X'\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \xi'_i \dfrac{\partial f'}{\partial x'_i}\right) = X'\big(X'(f')\big) \end{aligned}$$

и так далее. При подстановке $t = 0$ величины $x'_1 \cdots x'_n$ превращаются соответственно в $x_1 \cdots x_n$, затем f' — в f, $X'(f)$ — в $X(f)$ и так далее, короче говоря, мы получаем следующее разложение в ряд:

$$f(x'_1 \cdots x'_n) = f(x_1 \cdots x_n) + \frac{t}{1} \cdot X(f) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \cdot X\big(X(f)\big) + \cdots. \qquad (7)$$

В этом одном уравнении, очевидно, содержатся все n уравнений (6′). *Следовательно, и одно это уравнение* (7) *может рассматриваться как общее выражение однопараметрической группы с тождественным преобразованием.*

Иногда бывает желательно выразить функцию от $x_1 \cdots x_n$ через $x'_1 \cdots x'_n$ и через t. Здесь также можно выписать общую формулу. При рассмотрении уравнений (3), являющихся разновидностью нашей однопараметрической группы (6″) или (7), мы видели, что преобразование с параметром $-t$ обратно преобразованию с параметром $+t$. Поэтому если мы в уравнениях (6″) заменим переменные $x_1 \cdots x_n$ соответственно на $x'_1 \cdots x'_n$ и, кроме этого, t на $-t$, то получим разрешение этих уравнений относительно $x_1 \cdots x_n$. Это разрешение мы можем, очевидно, также свести к одному единственному уравнению: надо просто применить данную процедуру к уравнению (7). Тогда мы получим уравнение:

$$f(x_1 \cdots x_n) = f(x'_1 \cdots x'_n) - \frac{t}{1} \cdot X'(f') + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \cdot X'\big(X'(f')\big) - \cdots, \quad (7a)$$

выражающее произвольную функцию от x_i через x'_i и t.

§ 13

Среди ∞^1 преобразований однопараметрической группы (6) или (7) исключительную роль играет такое, параметр которого t имеет бесконечно малое значение, например значение δt. Это *«бесконечно малое»*, или *«инфинитезимальное»*, преобразование группы мы рассмотрим теперь поближе.

Если учитывать только первую степень δt, а всеми более высокими, напротив, пренебречь, то из (6′) мы получим искомое инфинитезимальное преобразование в виде

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1 \cdots x_n)\delta t \quad (i = 1 \cdots n); \qquad (8)$$

если же, наоборот, использовать уравнение (7), то мы получим последние n уравнений сведенными в одно:

$$f' = f + X(f) \cdot \delta t,$$

или, более подробно:

$$f(x'_1 \cdots x'_n) = f(x_1 \cdots x_n) + \delta t \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Удобно ввести для разности $x'_i - x_i$, т. е. для выражения $\xi_i \delta t$, специальный термин. Иногда мы будем называть $\xi_i \delta t$ *«приращением»* или *«инкрементом»*, а также *«вариацией»* x_i и обозначать через δx_i. Тогда можно представить инфинитезимальное преобразование также в виде

$$\delta x_1 = \xi_1 \delta t, \cdots \delta x_n = \xi_n \delta t.$$

Естественным образом мы соответственно назовем разность $f' - f$ или выражение $X(f)\delta t$ приращением или вариацией функции $f(x_1 \cdots x_n)$ и запишем

$$f' - f = X(f) \cdot \delta t = \delta f.$$

Очевидно, что выражение

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

уже само по себе полностью определяет преобразование $\delta x_i = \xi_i \delta t$, если понимать под $f(x_1 \cdots x_n)$ неопределенную функцию своих аргументов. В то же время $X(f)$ задает все n функций $\xi_1 \cdots \xi_n$ по отдельности.

Поэтому введем в качестве символа инфинитезимального преобразования выражение $X(f) = \dfrac{\delta f}{\delta t}$, и даже будем прямо говорить об *«инфинитезимальном преобразовании* $X(f)$*»*. Однако, сразу же хотим обратить внимание читателя на то, что символ инфинитезимального преобразования (8), вообще говоря, определен только с точностью до произвольного постоянного множителя. А именно: если умножить выражение $X(f)$ на какую-либо конечную константу c, то получающееся выражение $cX(f)$ также можно рассматривать как символ инфинитезимального преобразования (8). В соответствии с определением понятия бесконечно малой величины замена δt на $c\delta t$ ничего не меняет в уравнениях (8).

Введение символа $X(f)$ для инфинитезимального преобразования (8) дает много преимуществ. *Во-первых*, очень удобно, что уравнения $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$ этого преобразования заменяются одним выражением $X(f)$. *Во-вторых*, удобно, что при помощи символа $X(f)$ мы имеем дело лишь с одним набором переменных, а не с обоими: $x_1 \cdots x_n$ и $x_1' \cdots x_n'$. И наконец, *в-третьих*, символ $X(f)$ отражает связь между инфинитезимальными преобразованиями и линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, поскольку в теории последних такие выражения как $X(f)$, играют большую роль. Эту связь мы подробно рассмотрим ниже (ср. гл. 6).

Вышеизложенные рассуждения показывают, что однопараметрическая группа с тождественным преобразованием всегда содержит одно совершенно определенное инфинитезимальное преобразование $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$, или кратко, $X(f)$. Также ясно, однако, что такая однопараметрическая группа полностью определена, если известно ее инфинитезимальное преобразование. Преобразование $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$ — это, так сказать, лишь по-другому

записанная система (4), из которой выведены уравнения (6) однопараметрической группы.

Итак, поскольку каждая однопараметрическая группа с тождественным преобразованием полностью определена своим инфинитезимальным преобразованием, то мы введем для удобства следующую терминологию:

Каждое преобразование однопараметрической группы

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\xi_i + \frac{t^2}{1\cdot 2}X(\xi_i) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

получается путем бесконечного числа повторений инфинитезимального преобразования

$$x_i' = x_i + \xi_i \delta t, \quad \textit{или} \quad X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Или еще короче:

Однопараметрическая группа порождается своим инфинитезимальным преобразованием.

В отличие от инфинитезимального преобразования $X(f)$, мы называем уравнения

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\xi_i + \frac{t^2}{1\cdot 2}X(\xi_i) + \cdots$$

конечными уравнениями данной однопараметрической группы.

Теперь мы можем кратко выразить обнаруженную выше связь между системой уравнений (4) и однопараметрической группой (6″) следующим образом.

Утверждение 1. *Каждая однопараметрическая группа, содержащая тождественное преобразование, порождается некоторым вполне определенным инфинитезимальным преобразованием.*

И наоборот:

Утверждение 2. *Каждое инфинитезимальное преобразование порождает некоторую вполне определенную однопараметрическую группу.*

То, что было сказано в конце § 11 о произвольных однопараметрических группах с тождественным преобразованием или без него, можно теперь сформулировать следующим образом.

Теорема 7. *Каждой однопараметрической группе*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a) \quad (i = 1 \cdots n)$$

соответствует некоторое вполне определенное инфинитезимальное преобразование

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \cdots x_n)\delta t \quad (i = 1 \cdots n), \quad \text{или} \quad X(f) = \sum_{i=1}^{\pi} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

со следующим свойством: если $\overline{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \overline{a})$ *— какое-либо преобразование однопараметрической группы, то каждое преобразование* $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$*, параметр которого* a *лежит в некоторой окрестности точки* $\overline{a}$*, можно получить, выполнив сначала преобразование*

$$\overline{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \overline{a}) \quad (i = 1 \cdots n),$$

а затем подходящее преобразование

$$x_i' = \overline{x}_i + \frac{t}{1} \cdot \xi_i(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы, порожденной $X(f)$.

§ 14

Мы знаем, что каждая однопараметрическая группа с тождественным преобразованием полностью определяется инфинитезимальным преобразованием

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \cdots x_n)\delta t \quad (i = 1 \cdots n),$$

а также символом

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Но сохраняется ли связь между символом $X(f)$ и соответствующей однопараметрической группой, если ввести вместо x новые независимые переменные

$$y_i = \varphi_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)?$$

При такой замене переменных $X(f)$ принимает вид

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}$$

или

$$X(f) = \sum_{\nu=1}^{n} X(y_\nu) \frac{\partial f}{\partial y_\nu}.$$

Если мы предположим, что коэффициенты

$$X(y_\nu) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}$$

здесь выражены через $y_1 \cdots y_n$: $X(y_\nu) = \eta_\nu(y_1 \cdots y_n)$, и положим

$$\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_\nu} = Y(f),$$

то получим

$$X(f) = Y(f),$$

где f в правой части обозначает функцию от $y_1 \cdots y_n$, в которую переходит $f(x_1 \cdots x_n)$ при введении y.

Таким образом, мы видим, что выражение $X(f)$ превращается при введении новых переменных в символ нового инфинитезимального преобразования, а именно следующего:

$$y'_\nu = y_\nu + \eta_\nu(y_1 \cdots y_n)\delta t \quad (\nu = 1 \cdots n).$$

С другой стороны, однопараметрическая группа (7), порожденная преобразованием $X(f)$:

$$f(x'_1 \cdots x'_n) = f(x_1 \cdots x_n) + \frac{t}{1} \cdot X(f) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X\big(X(f)\big) + \cdots,$$

превращается в некоторую однопараметрическую группу от переменных $y_1 \cdots y_n$, аналитическое выражение которой мы можем непосредственно выписать. Если функция $f(x_1 \cdots x_n)$ при введении новых переменных $y_i = \varphi_i(x_1 \cdots x_n)$ принимает вид

$$f(x_1 \cdots x_n) = F(y_1 \cdots y_n),$$

а функция $f(x'_1 \cdots x'_n)$ при введении $y'_i = \varphi_i(x'_1 \cdots x'_n)$ — соответственно

$$f(x'_1 \cdots x'_n) = F(y'_1 \cdots y'_n),$$

то мы получим

$$X(f) = Y(F), \quad X\big(X(f)\big) = Y\big(Y(F)\big) \cdots ;$$

т. е. (7) переходит в

$$F(y_1' \cdots y_n') = F(y_1 \cdots y_n) + \frac{t}{1} \cdot Y(F) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} Y\big(Y(F)\big) + \cdots ,$$

где F обозначает теперь, как прежде f, произвольную функцию своих аргументов. Это последнее уравнение, однако, есть не что иное, как аналитическое выражение той однопараметрической группы, которая порождается инфинитезимальным преобразованием $Y(f)$.

Следовательно, связь между однопараметрической группой и символом ее инфинитезимального преобразования не зависит от выбора переменных. Другими словами, наш символ инфинитезимального преобразования однопараметрической группы переходит при введении новых переменных в символ инфинитезимального преобразования преобразованной однопараметрической группы.

Этим показано, что символ $X(f)$ инфинитезимального преобразования однопараметрической группы и при замене переменных полностью заменяет конечные уравнения этой группы, то есть что нам надо при введении новых переменных просто рассматривать символ $X(f)$, а не конечные уравнения группы.

Более того, проведенные выше вычисления показывают, что верно следующее утверждение:

Утверждение 3. *Если символ*

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

инфинитезимального преобразования

$$x_i' = x_i + \xi_i \delta t \quad (i = 1 \cdots n)$$

принимает при введении новых независимых переменных

$$y_i = \varphi_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

вид

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X(y_\nu) \frac{\partial f}{\partial y_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_\nu} = Y(f),$$

то конечное преобразование

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \cdot \xi_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X(\xi_i) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

порожденное $X(f)$, в новых переменных выглядит так:

$$y_i' = y_i + \frac{t}{1} \cdot \eta_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2} Y(\eta_i) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

причем параметр t в обоих случаях имеет одно и то же числовое значение.

§ 15

Понятия инфинитезимального преобразования, а также однопараметрической группы приобретают наглядность, если воспользоваться некоторыми геометрическими и механическими представлениями.

В инфинитезимальном прсобразовании

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \cdots x_n)\delta t \quad (i = 1 \cdots n),$$

или

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

рассмотрим переменные x как декартовы координаты n-мерного пространства. Тогда это преобразование, очевидно, можно толковать как такое, при котором каждая точка с координатами $x_1 \cdots x_n$ переводится в бесконечно близкую точку с координатами $x_1' \cdots x_n'$. *Следовательно, данное преобразование ставит в соответствие каждой точке, для которой не все ξ_i обращаются в нуль, некоторое направление движения и вдоль этого направление движения — некоторый бесконечно малый отрезок*; это направление движения задано отношением $\xi_1(x) : \xi_2(x) : \cdots : \xi_n(x)$, а бесконечно малый отрезок имеет длину, $\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \cdot \delta t$. Если в точке $x_1 \cdots x_n$ все ξ равны нулю, то инфинитезимальное преобразование не ставит ей в соответствие никакого направления движения.

Представим себе, что все пространство заполнено сжимаемой жидкостью, тогда можно толковать инфинитезимальное преобразование $X(f)$ просто как бесконечно малое движение этой жидкости, а δt — как бесконечно малый отрезок времени, в течение которого это движение происходит. Величины $\xi_1(x) \cdots \xi_n(x)$ являются тогда, очевидно, компонентами скорости той частицы жидкости, которая находится как раз в точке $x_1 \cdots x_n$.

Конечные преобразования однопараметрической группы $X(f)$ возникают, как мы выше уже отмечали, за счет бесконечного повторения инфинитезимального преобразования $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$. Таким образом, чтобы прийти к конечному преобразованию, нам надо представить себе бесконечно малое движение, представляемое инфинитезимальным преобразованием, повторяющееся в течение бесконечно многих отрезков времени δt; другими словами, мы должны проследить за движением частиц жидкости в течение конечного отрезка времени. Для этого необходимо проинтегрировать дифференциальные уравнения этого движения, т. е. систему уравнений

$$\frac{dx_1'}{\xi_1(x')} = \cdots = \frac{dx_n'}{\xi_n(x')} = dt.$$

Частица жидкости, находящаяся в момент времени $t = 0$ в точке $x_1 \cdots x_n$, достигает по прошествии времени t точки $x_1' \cdots x_n'$; следовательно, интегрирование должно быть произведено так, чтобы при $t = 0$ мы имели $x_i' = x_i$. Действительно, именно таким способом мы ранее нашли общий вид конечного преобразования нашей группы. Движение нашей жидкости — это так называемое стационарное движение, так как компоненты скорости $\frac{dx_i'}{dt}$ не зависят от t. Отсюда следует, что процесс движения в одной и той же точке в любое время одинаков, т. е. что весь процесс движения всегда протекает одинаково, независимо от того, в какое время начать его наблюдать. По сути, в этом уже заключается доказательство того, что конечные преобразования, порожденные инфинитезимальным преобразованием $X(f)$, образуют группу.

Если мы рассмотрим конкретную частицу жидкости — ту, что находится в момент времени $t = 0$ в точке $x_1^0 \cdots x_n^0$, — то мы увидим, что эта частица движется по кривой, проходящей через точку $x_1^0 \cdots x_n^0$. Таким образом, все пространство распадается на множество кривых с таким свойством, что каждая частица остается на кривой, на которой она и находилась вначале. Мы назовем эти кривые *траекториями инфинитезимальных преобразований* $X(f)$. Таких кривых имеется, очевидно, ∞^{n-1} различных.

Можно легко записать уравнения траектории, проходящей через заданную точку $x_1^0 \cdots x_n^0$. Эта *траектория есть не что иное, как геометрическое место всех точек, в которые переходит точка* $x_1^0 \cdots x_n^0$, *если к ней применить* ∞^1 *преобразований*

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\xi_i(x^0) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы. Итак, уравнения

$$x_i' = x_i^0 + \frac{t}{1}\xi_i(x) + \frac{t^2}{1\cdot 2}\big(X(\xi_i)\big)_{x=x^0} + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

представляют данную траекторию, если рассматривать t как независимую переменную.

Чтобы представить эту траекторию при помощи соотношений только между $x_1' \cdots x_n'$, надо лишь исключить t из полученных уравнений. Однако, удобнее исходить из вида (3), к которому можно привести однопараметрическую группу $X(f)$. Тогда уравнения траектории, проходящей через $x_1^0 \cdots x_n^0$, очевидно, будут такими:

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i(x_1^0 \cdots x_n^0) \quad (i = 1 \cdots n-1).$$

Отсюда следует, что семейство всех ∞^{n-1} траекторий может быть представлено уравнениями

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n') = C_1, \cdots \Omega_{n-1}(x_1' \cdots x_n') = C_{n-1}$$

с $n-1$ произвольными параметрами $C_1 \cdots C_{n-1}$.

§ 16

Пусть заданы r инфинитезимальных преобразований от переменных $x_1 \cdots x_n$:

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Умножим каждое из выражений $X_k(f)$ на произвольно выбранную, не зависящую от $x_1 \cdots x_n$ величину λ_k, просуммируем все и получим выражение вида

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f),$$

опять же представляющее собой инфинитезимальное преобразование. Этот метод получения новых инфинитезимальных преобразований из имеющихся будет в последующем так часто использоваться, что видится целесообразным ввести для него собственное название. Поэтому впредь мы будем говорить, что *инфинитезимальное преобразование* $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ *линейно получено из* r *инфинитезимальных преобразований* $X_1(f) \cdots X_r(f)$.

Может так случиться, что среди инфинитезимальных преобразований $X_1(f) \cdots X_r(f)$ имеются несколько таких, которые могут быть получены линейно из остальных. Это происходит, очевидно, тогда и только тогда, когда среди линейно полученных из $X_1(f) \cdots X_r(f)$ инфинитезимальных преобразований имеются такие, которые тождественно обращаются в нуль, иначе говоря, если существуют r констант $e_1 \cdots e_r$, которые удовлетворяют уравнению

$$e_1 X_1(f) + \cdots + e_r X_r(f) = 0,$$

не будучи одновременно равными нулю.

Чтобы упростить изложение, введем следующую терминологию:

r инфинитезимальных преобразований

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

называются независимыми друг от друга, если уравнение

$$e_1 X_1(f) + \cdots + e_r X_r(f) = 0,$$

в котором $e_1 \cdots e_r$ обозначают независимые от x величины, только тогда может быть удовлетворено, когда все $e_1 \cdots e_r$ положены равными нулю.

Или несколько короче:

r инфинитезимальных преобразований $X_1(f) \cdots X_r(f)$ называются независимыми друг от друга, если ни одно из них нельзя линейно получить из остальных.

Если, напротив, соотношение

$$e_1 X_1(f) + \cdots + e_r X_r(f) = 0$$

может выполняться при постоянных, не всех обращающихся в нуль значениях величин e_k, то инфинитезимальные преобразования $X_1(f) \cdots X_r(f)$ не будут независимыми друг от друга, но среди них будет иметься некоторое число независимых преобразований, например $X_1(f) \cdots X_m(f)$ $(m < r)$, в то время как $X_{m+1}(f) \cdots X_r(f)$ можно линейно получить из $X_1(f) \cdots X_m(f)$. Очевидно, что совокупность всех инфинитезимальных преобразований $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ можно тогда линейно получить уже из одних $X_1(f) \cdots X_m(f)$.

Всякое инфинитезимальное преобразование

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f) = C(f)$$

порождает, как мы знаем, группу $C(f)$ — однопараметрическую группу, конечные преобразования которой имеют вид

$$\overline{x} = x_i + \frac{t}{1}C(x_i) + \frac{t^2}{1\cdot 2}C\big(C(x_i)\big) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n).$$

Рассматривая здесь величины $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ как произвольные параметры и придавая этим параметрам всевозможные значения, мы получим целое *семейство однопараметрических групп*. Конечные преобразования этого семейства однопараметрических групп представляются выписанными выше уравнениями с $r+1$ параметрами $\lambda_1 \cdots \lambda_r, t$; но поскольку эти $r+1$ параметров встречаются только в r комбинациях $\lambda_1 t \cdots \lambda_r t$, то мы можем без ограничения общности положить t равным 1 и получим тогда в качестве аналитического представления соответствующих преобразований следующие уравнения:

$$\overline{x}_i = x_i + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k\xi_{ki} + \sum_{k,j=1}^{r}\frac{\lambda_k\lambda_j}{1\cdot 2}X_k(\xi_{ji}) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n), \tag{9}$$

с r параметрами $\lambda_1 \cdots \lambda_r$.

Так сколько же различных преобразований представлены этими уравнениями? Или, что то же самое, сколько из r параметров $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ являются существенными?

Если эти r инфинитезимальных преобразований $X_1(f) \cdots X_r(f)$ не являются независимыми друг от друга, то и не все r параметров $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ в уравнениях (9) являются существенными. А именно: пусть, например, лишь $X_1(f) \cdots X_m(f)$ $(m < r)$ друг от друга независимы, в то время как $X_{m+1}(f) \cdots X_r(f)$ можно линейно получить из $X_1(f) \cdots X_m(f)$:

$$X_{m+j}(f) = \sum_{\mu=1}^{m} e_{j\mu}X_\mu(f) \quad (j = 1 \cdots r-m).$$

Тогда мы имеем

$$C(f) = \sum_{k=1}^{r}\lambda_k X_k(f) = \sum_{\mu=1}^{m}\left\{\lambda_\mu + \sum_{j=1}^{r-m}\lambda_{m+j}\cdot e_{j\mu}\right\}\cdot X_\mu(f),$$

т. е. число произвольных параметров в выражении $C(f)$ сокращается до m, а тем самым и число произвольных параметров в (9).

Если, таким образом, среди r инфинитезимальных преобразований имеется только m друг от друга независимых, то в уравнениях (9) из r параметров $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ самое большее m являются существенными.

Поэтому отныне мы предполагаем, что инфинитезимальные преобразования $X_1(f) \cdots X_r(f)$ не зависят друг от друга.

При этом условии параметры $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ в уравнениях преобразований (9) действительно являются существенными; мы сейчас это докажем.

Целесообразно, однако, будет разобраться с некоторым простым случаем, а именно со случаем, когда число r не больше n, и при этом не все определители порядка r матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{rn} \end{vmatrix} \tag{10}$$

тождественно обращаются в нуль. В этом специальном случае заведомо не все определители порядка r матрицы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \overline{x}_1}{\partial \lambda_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial \overline{x}_n}{\partial \lambda_1} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \dfrac{\partial \overline{x}_1}{\partial \lambda_r} & \cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial \overline{x}_n}{\partial \lambda_r} \end{vmatrix}$$

тождественно обращаются в нуль, так как для специальной системы значений $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ эта матрица переходит в записанную выше, у которой по условию не все определители порядка r тождественно равны нулю.

Поэтому, исключив параметры $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ из уравнений (9), мы получим в точности $n - r$ и не более независимых друг от друга соотношений, только между x и $\overline{x}$. Но из этого следует, что параметры $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ при наложенных специальных условиях действительно являются существенными; т. к. если бы они таковыми не являлись, то есть если бы их число можно было сократить за счет введения подходящих новых параметров, то тогда из уравнений (9) можно было бы вывести заведомо больше чем $n - r$ не зависящих от параметров уравнений, что исключено.

Теперь перейдем к рассмотрению общего случая, который можно свести к только что разобранному специальному.

Для этого r раз запишем преобразования (9) разными способами, а именно при помощи r различных систем переменных:

$$x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)} \quad (\mu = 1 \cdots r),$$

т. е. мы рассматриваем семейство преобразований

$$\overline{x}_i^{\mu} = x_i^{(\mu)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot \xi_{ki}^{(\mu)} + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} \cdot X_k^{(\mu)}(\xi_{ji}^{(\mu)}) + \cdots \qquad (11)$$

$$(i = 1 \cdots n, \quad \mu = 1 \cdots r),$$

в которых положено

$$\xi_{ki}(x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)}) = \xi_{ki}^{(\mu)}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{k\nu}^{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial x_\nu^{(\mu)}} = X_k^{(\mu)}(f).$$

Семейство преобразований (11) содержит, очевидно, столько же существенных параметров, сколько и семейство (9).

Если нам теперь удастся доказать, что не все определители порядка r матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi'_{11} & \cdots & \xi'_{1n} & \xi''_{11} & \cdots & \xi''_{1n} & \cdots & \xi_{11}^{(r)} & \cdots & \xi_{1n}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi'_{r1} & \cdots & \xi'_{rn} & \xi''_{r1} & \cdots & \xi''_{rn} & \cdots & \xi_{r1}^{(r)} & \cdots & \xi_{rn}^{(r)} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

тождественно обращаются в нуль, то тем самым будет показано, что семейство преобразований (11) подпадает под ранее обсуждавшийся специальный случай, и что все r его параметров $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ являются существенными. Тогда отсюда немедленно будет следовать, что r параметров $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ и в уравнениях (9) также являются существенными.

Мы можем, очевидно, ограничиться случаем, когда все определители порядка r матрицы (10) тождественно равны нулю. Если бы теперь и все определители порядка r матрицы (12) обратились тождественно в нуль, то nr линейных уравнений

$$\vartheta_1 \cdot \xi_{1i}^{(\mu)} + \cdots + \vartheta_r \cdot \xi_{ri}^{(\mu)} = 0 \quad (i = 1 \cdots n, \quad \mu = 1 \cdots r) \qquad (13)$$

могли бы быть выполнены при помощи r не одновременно равных нулю функций $\vartheta_1 \cdots \vartheta_r$ от nr переменных $x_i^{(\mu)}$. Легко показать, что это невозможно.

Выберем $\mu = 1$ и получим, таким образом, из (13) для $\vartheta_1 \cdots \vartheta_r$ следующие n уравнений:

$$\vartheta_1 \cdot \xi_{1i}^{(1)} + \cdots + \vartheta_r \cdot \xi_{ri}^{(1)} = 0 \quad (i = 1 \cdots n), \qquad (14)$$

которые заведомо не все выполняются тождественно. Тогда прежде всего понятно, что не каждое из n аналогичных уравнений

$$\vartheta_1 \cdot \xi_{1i}^{(2)} + \cdots + \vartheta_r \cdot \xi_{ri}^{(2)} = 0 \quad (i = 1 \cdots n) \tag{15}$$

может быть следствием из (14), иначе функции $\vartheta_1 \cdots \vartheta_r$, не зависящие от $x_1^{(2)} \cdots x_n^{(2)}$, удовлетворяли бы уравнениям (15), а r инфинитезимальных преобразований $X_1^{(2)}(f) \cdots X_r^{(2)}(f)$ не были бы независимы друг от друга. Следовательно, (14) и (15) вместе взятые дают по крайней мере два независимых уравнения для $\vartheta_1 \cdots \vartheta_r$. Можно таким образом продолжить это рассуждение и в конце концов увидеть, что среди nr уравнений (13) имеется в точности r друг от друга независимых, т. е. что из (13) следует: $\vartheta_1 = 0, \cdots \vartheta_r = 0$.

Тем самым доказано, что не все определители порядка r матрицы (12) тождественно равны нулю. Поэтому мы можем непосредственно сформулировать следующую теорему.

Теорема 8. *Если r инфинитезимальных преобразований*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

являются независимыми друг от друга, а $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ — произвольные параметры, то совокупность всех однопараметрических групп $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ образует семейство преобразований

$$\overline{x}_i = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki} + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} X_k(\xi_{ji}) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

в котором все r параметров $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ являются существенными, т. е. семейство из ∞^r различных преобразований.

По сути, однако, мы доказали больше, чем утверждается в этой теореме. Правда, мы предположили, что уравнения (9) представляют конечные преобразования семейства однопараметрических групп, но использовали это предположение лишь в той мере, в какой из него следует, что это семейство групп однозначно определяет в (9) члены первого порядка по $\lambda_1 \cdots \lambda_r$. Какой вид имеют члены второго порядка и выше — это в нашем исследовании семейства преобразований (9) вообще не использовалось. Поэтому наш результат, что параметры $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ в уравнениях (9)

являются существенными, также остается в силе, если не налагать никаких условий на поведение членов второго порядка и выше. Теорема 8 может быть в соответствии с этим обобщена следующим образом:

Утверждение 4. *Если семейство преобразований содержит r произвольных параметров $e_1 \cdots e_r$, и уравнения этих преобразований, разложенные по степеням $e_1 \cdots e_r$, имеют вид*

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} e_k \xi_{ki}(x_1 \cdots x_r) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

где многоточие обозначает члены порядка 2 и выше по $e_1 \cdots e_r$, наконец, если функции $\xi_{ki}(x)$ обладают тем свойством, что r полученных из них инфинитезимальных преобразований

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

независимы друг от друга, то эти уравнения преобразований представляют собой ∞^r различных преобразований или, что то же самое, r параметров $e_1 \cdots e_r$ являются существенными.

Для последующих приложений сформулируем здесь еще одно утверждение; оно следует непосредственно из того, что в матрице (12) не все определители порядка r обращаются в нуль.

Утверждение 5. *Если r инфинитезимальных преобразований*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

являются независимыми друг от друга, и если, кроме того,

$$x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)} \quad (\mu = 1 \cdots r)$$

суть r различных систем по n переменных в каждой, наконец, если для краткости положить

$$X_k^{(\mu)}(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}},$$

то r инфинитезимальных преобразований

$$W_k(f) = \sum_{\mu=1}^{r} X_k^{(\mu)}(f) \quad (k = 1 \cdots r)$$

от nr переменных $x_i^{(\mu)}$ не удовлетворяют никаким соотношениям вида

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(x_1' \cdots x_n' \cdots x_1^{(r)} \cdots x_n^{(r)}) \cdot W_k(f) \equiv 0.$$

Глава 4

Порождение r-параметрических групп при помощи однопараметрических

Если уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{1}$$

представляют r-параметрическую группу, то согласно теореме 3, стр. 36, имеют место некоторые дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r), \tag{2}$$

которые при подстановке $x_1' = f_1(x, a), \cdots x_n' = f_n(x, a)$ становятся тождествами. При этом функции $\psi_{jk}(a)$ обладают тем свойством, что составленный из них определитель не обращается тождественно в нуль. В свою очередь, $\xi_{ji}(x')$ таковы, что не существует не зависящих от $x_1' \cdots x_n'$ величин $e_1 \cdots e_r$, которые удовлетворяют следующим n уравнениям:

$$\sum_{j=1}^{r} e_j \, \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

не обращаясь при этом одновременно в нуль. Это свойство мы можем согласно введенной на стр. 66 терминологии выразить короче: *r инфинитезимальных преобразований*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

независимы друг от друга. Поэтому и теорему 3 на стр. 36 можно кратко сформулировать так:

Утверждение 1. *r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

связаны с любой r-параметрической группой $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ таким образом, что имеют место соотношения вида

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n'), \tag{2}$$

которые могут быть разрешены относительно ξ_{ji}:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}.$$

Точно так же, как ранее с однопараметрическими, мы можем теперь поступить и с r-параметрическими группами. Мы можем использовать дифференциальные уравнения (2), чтобы при помощи интегрирования вывести из них другое представление r-параметрической группы и таким образом найти общие свойства r-параметрических групп.

Рекомендуется, однако, сперва рассмотреть все это с более общей точки зрения, поскольку свойствами, которые мы найдем указанным путем, обладают также некоторые системы уравнений вида (1), не представляющие никаких групп.

§ 17

Пока что мы не будем учитывать того требования, чтобы уравнения $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ представляли r-параметрическую группу. Напротив, мы лишь предполагаем, что уравнения (1), *во-первых*, представляют семейство из ∞^r различных преобразований, т. е. что все r параметров $a_1 \cdots a_r$ являются существенными, и *во-вторых*, что они удовлетворяют дифференциальным уравнениям специального вида (2).

Сначала покажем, что и при теперешних, более общих условиях функции $\psi_{jk}(a)$ и $\xi_{ji}(x')$ также обладают вышеуказанными свойствами.

Если бы определитель, составленный из функций $\psi_{jk}(a)$, тождественно обращался в нуль, то можно было бы исключить $\xi_{ji}(x')$ из уравнений (2),

и мы получили бы n уравнений вида

$$\sum_1^r \chi_k(a_1 \cdots a_r)\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

где χ_k не зависят от индекса i. Но согласно утверждению 1, стр. 13, это невозможно, т. к. все параметры $a_1 \cdots a_r$ в уравнениях (1) являются существенными. Следовательно, определитель, составленный из $\psi_{jk}(a)$, не равен тождественно нулю, так что уравнения (2) разрешимы относительно $\xi_{ji}(x')$, и мы получаем

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_{k=1}^r \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r)\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \quad (j = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n). \tag{3}$$

Если функции $\psi_{jk}(a)$ ведут себя в окрестности некоторой системы значений $a_1^0 \cdots a_r^0$ регулярно, а определитель $\sum \pm\psi_{11} \cdots \psi_{rr}$ отличен от нуля и при $a_k = a_k^0$, то $\alpha_{jk}(a)$ тоже ведут себя в окрестности $a_1^0 \cdots a_r^0$ регулярно, и составленный из них определитель также не обращается в нуль при $a_k = a_k^0$. В последующем мы будем полагать, что система значений $a_k = a_k^0$ выбрана так, что функции $\psi_{jk}(a)$, а следовательно, и $\alpha_{jk}(a)$ обладают оговоренными свойствами.

Следовало бы еще лишь доказать, что r независимых от x' величин $e_1 \cdots e_r$, не все из которых равны нулю, не могут удовлетворять n уравнениям

$$\sum_{j=1}^r e_j \xi_{ji}(x') = 0 \quad (i = 1 \cdots n).$$

Но это доказательство явилось бы повторением того, о чем говорилось в гл. 2, стр. 36, поэтому мы не будем на нем останавливаться.

Во всяком случае является несомненным, что $\psi_{jk}(a)$ и $\xi_{ji}(x')$ по-прежнему обладают вышеуказанными свойствами.

Теперь мы докажем, что семейство $x_i' = f_i(x, a)$ полностью определено, если, во-первых, заданы дифференциальные уравнения (2), которым это семейство удовлетворяет, и если, кроме того, известно то преобразование этого семейства, которое соответствует значениям $a_1^0 \cdots a_r^0$ параметров a_k.

Большим преимуществом этого подхода является то, что нам вообще не требуется никаких рассуждений относительно интегрируемости дифференциальных уравнений (2) или (3), так как мы уже знаем одну систему решений этих дифференциальных уравнений, а именно $x_i' = f_i(x, a)$.

Интегрируя дифференциальные уравнения (2) с учетом начального условия $x'_i = f_i(x, a^0)$ при помощи некоторого специального метода, мы получим для x'_i *вполне определенные* функции от x_i и a_k. Тогда само собой разумеется, что эти функции будут идентичны функциям $f_i(x, a)$.

Более того, при выполнении этих операций мы обнаружим, что семейство преобразований $x'_i = f_i(x, a)$ посредством введения новых параметров вместо a_k можно привести к замечательному виду, который позволяет сделать важные выводы относительно свойств этого семейства.

Для выполнения требуемого интегрирования мы прибегнем к одному искусственному приему: умножим (3) на λ_j, просуммируем по j от 1 до r и получим уравнения

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, \alpha_{jk}(a) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \cdots n). \tag{4}$$

Теперь определим $a_1 \cdots a_r$ из системы

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, \alpha_{jk}(a) \quad (k = 1 \cdots r) \tag{5}$$

как функции вспомогательной переменной t и величин $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, добавив начальное условие $a_k = a_k^0$ для $t = 0$. При этом мы получим некоторые разложения в ряд

$$a_k = a_k^0 + \frac{t}{1} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, \alpha_{jk}(a^0) + \cdots \quad (k = 1 \cdots r), \tag{6}$$

в простой закон построения которого нам не обязательно вникать подробнее. Все же хочется отметить, что λ_j встречаются в них только в следующей комбинации: $w_1 = \lambda_1 t, \cdots w_r = \lambda_r t$. А отсюда следует, что a_k можно рассматривать как функции новых переменных $w_1 \cdots w_r$. Поскольку определитель $\Sigma \pm \alpha_{11}(a^0) \cdots \alpha_{rr}(a^0)$ при наложенных условиях не обращается тождественно в нуль, то a_k — независимые функции от w_k, и наоборот, $w_1 \cdots w_r$ можно представить как функции от $a_1 \cdots a_r$, и как таковые они ведут себя в окрестности $a_1^0 \cdots a_r^0$ регулярно. Таким образом, между $a_1 \cdots a_r$ и $w_1 \cdots w_r$ в некоторых окрестностях $a_1^0 \cdots a_r^0$ и $w_1 = 0 \cdots w_r = 0$ имеет место взаимно однозначное соответствие. Поэтому если мы ограничимся такими преобразованиями $x'_i = f_i(x, a)$, параметры которых лежат в некоторой окрестности a_k^0, то мы можем непосредственно ввести w_k вместо a_k в качестве параметров.

Впрочем, в последующем мы будем в большинстве случаев рассматривать a_k как функции вспомогательной переменной t и величин $\lambda_1 \cdots \lambda_r$. Подставив эти значения для величин $a_1 \cdots a_r$ в уравнения $x_i' = f_i(x, a)$, мы получим также $x_1' \cdots x_n'$ в виде функций от t и от $\lambda_1 \cdots \lambda_r$. Теперь очень легко вывести некоторые дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют $x_1' \cdots x_n'$ как функции от t. Действительно, мы имеем

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt},$$

а если использовать систему (5), которой удовлетворяют a_k, то получим

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \cdot \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \alpha_{jk}(a).$$

С помощью уравнений (4) мы можем теперь полностью исключить $a_1 \cdots a_r$ и получить

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \cdots n). \tag{7}$$

Итак, если известным образом выразить в уравнениях $x_i' = f_i(x, a)$ величины $a_1 \cdots a_r$ через t и $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, то мы получим $x_1' \cdots x_n'$ в виде функций от t, удовлетворяющих системе обыкновенных дифференциальных уравнений (7). Помимо этих дифференциальных уравнений, x_i' удовлетворяют также некоторым начальным условиям; $f_i(x, a)$ обращается в $f_i(x, a^0)$ для a_k^0, и поскольку a_k теперь принимают значения a_k^0 при $t = 0$, то эти начальные условия получаются следующими: $x_i' = f_i(x, a^0)$ при $t = 0$.

Вместе с заданными начальными условиями дифференциальные уравнения (7), очевидно, полностью определяют x_i'. Чтобы задать соответствующие выражения для x_i', нам нужна лишь какая-нибудь полная система интегральных уравнений системы (7). Если

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n', \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) = C_i \quad (i = 1 \cdots n)$$

— такая система, то начальное условие $x_i' = f_i(x, a)$ немедленно задает значения констант C_i, т. е. для нахождения x_i' мы получаем уравнения

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n', \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) = \Omega_i\big(f_1(x, a^0) \cdots f_n(x, a^0), 0 \cdots 0\big) \quad (i = 1 \cdots n). \tag{8}$$

Решая эти уравнения, мы получаем отсюда в качестве $x'_1 \cdots x'_n$ *вполне определенные функции* от $x_1 \cdots x_n$, $\lambda_1 t = w_1, \cdots \lambda_r t = w_r$:

$$x'_i = V_i(x_1 \cdots x_n, \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) \quad (i = 1 \cdots n). \tag{8'}$$

Стало быть, V_i — это те функции, в которые превращаются $f_i(x, a)$, когда мы выражаем $a_1 \cdots a_r$ известным образом через $\lambda_1 t, \cdots \lambda_r t$. Если мы, наоборот, заменим $\lambda_k t = w_k$ в V_i их значениями как функции от $a_1 \cdots a_r$, то уравнения $x'_i = V_i$ превратятся в первоначальные уравнения $x'_1 = f_i(x, a)$.

Таким образом, уравнения (8') представляют собой другую форму уравнений (1), а так как соответствие между $a_1 \cdots a_r$ и $w_1 = \lambda_1 t, \cdots w_r = \lambda_r t$ взаимно однозначно в некоторой окрестности точки $a_1^0 \cdots a_r^0$ и $t = 0$ соответственно, то уравнения (8') в некоторой окрестности $t = 0$ полностью эквивалентны уравнениям (1). Иначе говоря: уравнения (8') представляют все преобразования (1), параметры которых $a_1 \cdots a_r$ лежат в некоторой окрестности $a_1^0 \cdots a_r^0$.

Теперь, как следует из уравнений (8), эквивалентных (8'), каждое преобразование (8') может быть получено, если выполнить последовательно два преобразования: *первое* преобразование

$$\overline{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

— это преобразование из семейства (1), имеющее параметры $a_1^0 \cdots a_r^0$; и *второе* преобразование:

$$\Omega_i(x'_1 \cdots x'_n, \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) = \Omega_i(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n, 0 \cdots 0) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Если мы еще учтем, что эти последние уравнения удовлетворяют системе (7) и, кроме того, начальным условиям $x'_i = \overline{x}_i$ при $t = 0$, то мы увидим, что уравнения

$$\Omega_i(x', \lambda t) = \Omega_i(\overline{x}, 0)$$

представляют собой не что иное, как преобразования некоторой однопараметрической группы, а именно такой, которая определяется системой (7). Инфинитезимальное преобразование, порождающее данную однопараметрическую группу, очевидно, выглядит так:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \xi_{ji}(x) \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{9}$$

Тем самым найдено универсальное свойство, являющееся общим для всех семейств ∞^r преобразований $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям вида (2). Мы можем сформулировать это свойство следующим образом:

Теорема 9. *Если все r параметров $a_1 \cdots a_r$ в уравнениях преобразований*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

являются существенными и, кроме того, имеют место дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

превращающиеся при подстановке $x_1' = f_1(x, a), \cdots x_n' = f_n(x, a)$ в тождества, то каждое преобразование $x_i' = f_i(x, a)$, параметры которого $a_1 \cdots a_r$ лежат в некоторой окрестности точки $a_1^0 \cdots a_r^0$, может быть получено в результате выполнения сначала преобразования

$$\overline{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1^0 \cdots a_r^0) \quad (i = 1 \cdots n),$$

а затем некоторого преобразования

$$x_i' = \omega_i(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n)$$

однопараметрической группы, инфинитезимальное преобразование которой имеет вид

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

где $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ — некоторые константы.

В этой теореме $a_1^0 \cdots a_r^0$ обозначает произвольную систему значений, в которой функции ψ_{jk} ведут себя регулярно, и при этом составленный из них определитель не обращается в нуль.

Пример. Весьма полезно показать на примере, что уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ с r существенными параметрами $a_1 \cdots a_r$ вполне могут удовлетворять дифференциальным уравнениям вида (2), не образуя при этом группы.

Так, ∞^2 преобразований

$$x_1' = x_1 + x_2 + a_1, \quad x_2' = x_1 - x_2 + a_2,$$

очевидно, не образуют никакой двухпараметрической группы; однако мы находим:

$$\frac{\partial x_1'}{\partial a_1} = 1, \quad \frac{\partial x_1'}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial x_2'}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial x_2'}{\partial a_2} = 1,$$

то есть наши ∞^2 преобразований все же будут удовлетворять дифференциальным уравнениям вида (2), если придать функциям $\xi_{ji}(x'), \psi_{jk}(a)$ следующие значения:

$$\xi_{11} = 1, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{21} = 0, \quad \xi_{22} = 1,$$
$$\psi_{11} = 1, \quad \psi_{21} = 0, \quad \psi_{12} = 0, \quad \psi_{22} = 1.$$

§ 18

Применим теперь вышестоящие общие рассуждения к специальному случаю, когда ∞^r преобразований $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ образуют r-параметрическую группу.

Если уравнения (1) представляют r-параметрическую группу, то согласно теореме 3 всегда имеют место дифференциальные уравнения вида (2); то есть это требование особо оговаривать не надо.

Далее заметим, что все инфинитезимальные преобразования вида (9) могут быть линейно получены из r следующих r преобразований:

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

т. к. в выражении

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k(f)$$

содержатся все инфинитезимальные преобразования (9). При этом инфинитезимальные преобразования $X_1(f) \cdots X_r(f)$ не зависят друг от друга, как мы уже подчеркивали во введении к этой главе.

В соответствии с этим мы можем сформулировать следующую теорему о произвольных r-параметрических группах.

Теорема 10. *Каждой r-параметрической группе*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

соответствует r независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

которые находятся в следующей связи с конечными преобразованиями этой группы: если $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0)$ — какое-либо преобразование данной группы, то любое преобразование $x_i' = f_i(x, a)$, параметры которого лежат в некоторой окрестности $a_1^0 \cdots a_r^0$, может быть получено путем выполнения сначала преобразования $x_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0)$, а затем — некоторого преобразования $x_i' = \omega_i(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n)$ однопараметрической группы, инфинитезимальное преобразование которой имеет вид $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$, где $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ — некоторые подходящим образом выбранные константы.

Если мы знаем не только то, что уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ представляют r-параметрическую группу, но и то, что эта группа содержит тождественное преобразование, а также то, что параметры a_k^0 тождественного преобразования представляют собой систему значений в области $((a))$, то можно сказать еще больше. А именно: если мы в качестве преобразования $\overline{x}_i = f_i(x, a^0)$ специально выберем тождественное преобразование, то сразу увидим, что преобразования нашей группы — не что иное, как преобразования однопараметрических групп, порожденных инфинитезимальными преобразованиями

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r (X_r)(f).$$

Значит, если положить для краткости

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k(f) = C(f),$$

то уравнения

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} C(x_i) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} C\big(C(x_i)\big) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

представляют ∞^r преобразований этой группы. То обстоятельство, что число входящих параметров $\lambda_1 \cdots \lambda_r, t$ равно $r+1$, является только кажущимся, поскольку они встречаются лишь в r комбинациях $\lambda_1 t, \cdots \lambda_r t$. Поэтому мы можем спокойно положить t равным 1. Если к тому же вспомнить представление однопараметрической группы при помощи одного единственного

уравнения, данное в главе 3, стр. 56, ур.(7), то мы увидим, что уравнения нашей r-параметрической группы можно свести к единственному уравнению

$$f(x_1' \cdots x_n') = f(x_1 \cdots x_n) + C(f) + \frac{1}{1 \cdot 2} C\big(C(f)\big) + \cdots .$$

О том, что можно преобразования этой группы упорядочить в пары взаимно обратных, вряд ли надо упоминать.

Вышеуказанные результаты относительно r-параметрических групп с тождественным преобразованием мы можем кратко сформулировать следующим образом.

Теорема 11. *Если r-параметрическая группа*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

содержит тождественное преобразование, то ∞^r ее преобразований можно так разбить на ∞^{r-1} семейств из ∞^1 преобразований, что каждое из этих ∞^{r-1} семейств будет состоять из всех преобразований некоторой однопараметрической группы с тождественным преобразованием. Чтобы найти эти однопараметрические группы, составим известные уравнения

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

которые выполняются тождественно при подстановке $x_i' = f_i(x, a)$, а затем положим

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = X_k(f) \quad (k = 1 \cdots r),$$

тогда выражение

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k(f)$$

с r произвольными параметрами $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ представляет инфинитезимальные преобразования этих ∞^{r-1} однопараметрических групп, а их конечные преобразования имеют вид

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(x) + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} X_k(\xi_{ji}) + \ldots \quad (i = 1 \cdots n).$$

Совокупность всех этих конечных преобразований идентична совокупности всех преобразований группы $x_i' = f_i(x, a)$. Преобразования этой группы можно, кроме того, упорядочить в пары взаимно обратных.

§ 19

Если вообще какая-либо r-параметрическая группа содержит все преобразования однопараметрической группы, и эта однопараметрическая группа порождена инфинитезимальным преобразованием $X(f)$ в ранее оговоренном смысле, то мы говорим, что *r-параметрическая группа содержит инфинитезимальное преобразование $X(f)$*. Мы только что видели, что каждая r-параметрическая группа с тождественным преобразованием может быть приведена к виду

$$f(x_1' \cdots x_n') = f(x_1 \cdots x_n) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k(f) +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_{k,j=1}^{r} \lambda_k \lambda_j \cdot X_k\big(X_j(f)\big) + \cdots,$$

где $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ — произвольные константы, а $X_1(f) \cdots X_r(f)$ обозначают независимые друг от друга инфинитезимальные преобразования. Итак, мы можем сказать, *что каждая такая r-параметрическая группа содержит r независимых инфинитезимальных преобразований.*

Напрашивается предположение, что r-параметрическая группа не может содержать больше чем r независимых инфинитезимальных преобразований.

Чтобы прояснить этот момент, мы поставим вопрос прямо: когда инфинитезимальное преобразование

$$Y(f) = \sum_{i=1}^{r} \eta_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

содержится в r-параметрической группе с r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1(f) \cdots X_r(f)$?

Если $Y(f)$ принадлежит данной r-параметрической группе, то это справедливо также для всех преобразований

$$x_i' = x_i + \frac{\tau}{1} \eta_i(x) + \frac{\tau^2}{1 \cdot 2} Y(\eta_i) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы, порожденной $Y(f)$. Если мы сперва выполним произвольное преобразование этой однопараметрической группы, а потом произвольное преобразование

$$x_i'' = x_i' + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}' + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} X_j'(\xi_{ki}') + \cdots$$

r-параметрической группы, то должны будем получить преобразование, которое также принадлежит этой r-параметрической группе. Путем вычислений мы находим, что это новое преобразование имеет вид

$$x_i'' = x_i + \tau \eta_i(x) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(x) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

где все опущенные члены — второго порядка и выше по $\lambda_1 \cdots \lambda_r, \tau$. Стало быть, и при произвольных $\lambda_1 \cdots \lambda_r, \tau$ это преобразование должно принадлежать этой r-параметрической группе. Если бы $r+1$ инфинитезимальных преобразований $X_1(f) \cdots X_r(f), Y(f)$ были независимы друг от друга, то согласно утверждению 4 в гл. 3, стр. 71 последние из записанных уравнений представляли бы ∞^{r+1} различных преобразований; но это невозможно, т. к. r-параметрическая группа содержит всего лишь ∞^r преобразований. Следовательно, $X_1(f) \cdots X_r(f), Y(f)$ не являются независимыми друг от друга, но поскольку $X_1(f) \ldots X_r(f)$ независимы, то $Y(f)$ должно получаться линейно из $X_1(f) \cdots X_r(f)$, то есть иметь вид

$$Y(f) = \sum_{k=1}^{r} l_k X_k(f),$$

где $l_1 \cdots l_r$ означают подходящие константы. А это значит, что справедливо

Утверждение 2. *Если r-параметрическая группа содержит тождественное преобразование, то она содержит r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1(f) \cdots X_r(f)$, и каждое из содержащихся в ней инфинитезимальных преобразований имеет вид $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$, где $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ — константы.*

Выше мы также видели, что *каждое* инфинитезимальное преобразование вида $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ принадлежит этой группе; поэтому в дальнейшем мы будем называть выражение $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ *с r произвольными константами $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ общим инфинитезимальным преобразованием данной r-параметрической группы.*

Результатом вышеизложенного является также следующее, хотя и специальное, но все же важное

Утверждение 3. *Если r-параметрическая группа содержит $m \leqslant r$ независимых друг от друга инфинитезимальных преобразований $X_1(f) \cdots X_m(f)$, то она содержит также всякое инфинитезимальное преобразование следующего вида: $\lambda_1 X_1(f) + \cdots \lambda_m X_m(f)$, где $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ — совершенно произвольные константы.*

Проведенные до этого исследования дают, конечно, средства для нахождения инфинитезимальных преобразований r-параметрической группы $x_i' = f_i(x, a)$ с тождественным преобразованием. Но можно прийти к этой цели и быстрее.

Пусть тождественное преобразование нашей группы соответствует параметрам $a_1^0 \cdots a_r^0$, и при этом пусть $a_1^0 \cdots a_r^0$ лежат в области $((a))$, так чтобы определитель $\sum \pm \psi_{11}(a^0) \cdots \psi_{rr}(a^0)$ был заведомо отличен от нуля. Тогда мы имеем

$$\sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}\big(f_1(x,a) \cdots f_n(x,a)\big) = \frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x,a).$$

Значит, если положить $a_k = a_k^0$, то

$$\sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a^0) \cdot \xi_{ji}(x_1 \cdots x_n) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x,a)\right]_{a=a^0}.$$

Это уравнение мы умножим на $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ и просуммируем по i от 1 до n, тогда получится

$$\sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a^0) \cdot X_j(f) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x,a)\right]_{a=a^0} \qquad (k = 1 \cdots r).$$

Так как $X_1(f) \cdots X_r(f)$ — независимые инфинитезимальные преобразования, а определитель, составленный из $\psi_{jk}(a^0)$, кроме того, отличен от нуля, то правые части последних уравнений представляют собой r независимых инфинитезимальных преобразований нашей группы.

Следующий способ еще немного проще.

Положим $a_k = a_k^0 + \delta t_k$, понимая под $\delta t_1 \cdots \delta t_r$ произвольные бесконечно малые величины. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 + \delta t_1, \cdots a_r^0 + \delta t_r) = \\ &= x_i + \sum_{k=1}^{r} \left[\frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x,a)\right]_{a=a^0} \cdot \delta t_k + \cdots, \end{aligned}$$

где опущенные члены имеют по δt_k порядок два и выше. Этим непосредственно показано, что наша группа содержит r инфинитезимальных преобразований

$$x_i' = x_i + \left[\frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a)\right]_{a=a^0} \cdot \delta t_k \quad (i = 1 \cdots n), \quad (k = 1 \cdots r).$$

Правда, являются ли эти r инфинитезимальных преобразований друг от друга независимыми, требует в каждом отдельном случае специальной проверки, если с самого начала неизвестно, что определитель величин ψ в точке $a_k = a_k^0$ не обращается в нуль.

Пример. Рассмотрим снова общую проективную группу

$$x' = \frac{x + a}{a_2 x + a_3}$$

одномерного многообразия[1].

Инфинитезимальные преобразования этой группы получаются очень просто согласно только что разработанному методу. Поскольку здесь $a_1^0 = 0$, $a_2^0 = 0$, $a_3^0 = 1$, то мы имеем

$$x' = \frac{x + \delta t_1}{x \cdot \delta t_2 + 1 + \delta t_3} = x + \delta t_1 - x \cdot \delta t_3 - x^2 \cdot \delta t_2 + \cdots,$$

и значит, наша группа содержит три независимых друг от друга инфинитезимальных преобразования:

$$X_1(f) = \frac{df}{dx}, \quad X_2(f) = x\frac{df}{dx}, \quad X_3(f) = x^2\frac{df}{dx}.$$

Общее инфинитезимальное преобразование нашей группы имеет вид

$$(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\frac{df}{dx},$$

поэтому ее конечные преобразования мы получаем путем интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx'}{\lambda_1 + \lambda_2 x' + \lambda_3 x'^2} = dt$$

при добавлении начального условия $x' = x$ для $t = 0$.

[1] Ли использует термин «einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit». – *Прим. ред.*

Чтобы провести это интегрирование, приведем дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{dx'}{x'-\alpha} - \frac{dx'}{x'-\beta} = \gamma \cdot dt,$$

полагая

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha-\beta}, \quad \lambda_2 = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\cdot\gamma, \quad \lambda_3 = \frac{\gamma}{\alpha-\beta},$$

то есть

$$2\alpha = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{\lambda_3}, \quad 2\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{\sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{\lambda_3},$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}.$$

В результате интегрирования находим

$$\ln(x'-\alpha) - \ln(x'-\beta) = \gamma t + \ln(x-\alpha) - \ln(x-\beta),$$

или

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta} = e^{\gamma t}\cdot\frac{x-\alpha}{x-\beta}.$$

Теперь не представляет труда выразить α, β, γ через λ_1, λ_2, λ_3, с тем чтобы таким образом получить разбиение ∞^3 преобразований нашей трехпараметрической группы на ∞^2 однопараметрических групп, как это утверждается в теореме 11.

Известный простой вид нашей группы получается, кстати, если оставить оба параметра α и β прежними, а вместо $e^{\gamma t}$ ввести новый параметр $\overline{\gamma}$; тогда наша группа запишется в виде

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta} = \overline{\gamma}\cdot\frac{x-\alpha}{x-\beta}.$$

§ 20

Если $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ — произвольная r-параметрическая группа, то согласно теореме 5, гл. 2, стр. 48, для любой функции $f(x_1 \cdots x_n)$ имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{r}\vartheta_{jk}(a)\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_{ji}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{r}\psi_{jk}(a)\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_{ji}(x')\frac{\partial f}{\partial x_i'} = 0 \quad (k=1\cdots r), \tag{10}$$

которые при подстановке $x_i' = f_i(x,a)$ превращаются в тождества.

Используя сокращения

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$
$$X'_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i},$$

мы можем записать вышестоящие соотношения так:

$$\sum_{j=1}^{r} \vartheta_{jk}(a) \cdot X_j(f) + \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \cdot X'_j(f) = 0 \quad (k = 1 \cdots r). \tag{10'}$$

Если мы вспомним далее, что определитель, составленный из $\vartheta_{jk}(a)$, так же как и из $\psi_{jk}(a)$, не обращается тождественно в нуль, то мы увидим, что $X'_1(f) \cdots X'_r(f)$ можно линейно выразить через $X_1(f) \cdots X_r(f)$, и наоборот. Поэтому имеет место соотношение вида

$$\sum_{k=1}^{r} e_k \cdot X_k(f) = \sum_{k=1}^{r} e'_k(a) \cdot X'_k(f);$$

при этом либо e_k могут быть выбраны произвольно, и тогда e'_k будут функциями от e_k и a, либо e'_k могут быть выбраны произвольно, а e_k будут функциями от e'_k и a.

Чтобы найти в явном виде соотношения между e'_k и e_k, умножим (10') на λ_k и просуммируем по k от 1 до r:

$$\sum_{j=1}^{r} \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \vartheta_{jk}(a) \right\} \cdot X_j(f) + \sum_{j=1}^{r} \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \psi_{jk}(a) \right\} \cdot X'_j(f) = 0.$$

Коэффициенты $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ мы, очевидно, можем выбрать так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \vartheta_{jk}(a) = e_j, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \psi_{jk}(a) = -e'_j.$$

Из второй группы этих равенств мы совсем легко можем найти $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, используя определенные в гл. 2, стр. 34, функции $\alpha_{kj}(a)$. А именно:

$$\lambda_k = -\sum_{j=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \cdot e'_j,$$

из чего следует:

$$e_j = -\sum_{\pi=1}^{r}\left\{\sum_{k=1}^{r}\vartheta_{jk}(a)\cdot\alpha_{\pi k}(a)\right\}\cdot e'_\pi \quad (j=1\cdots r).$$

Эти уравнения можно, конечно, разрешить и относительно $e'_1\cdots e'_r$.

Согласно этому мы имеем следующее

Утверждение 4. *Если уравнения* $x'_i = f_i(x_1\cdots x_n, a_1\cdots a_r)$ *представляют* r*-параметрическую группу, и эта группа содержит* r *независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n}\xi_{ki}(x_1\cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1\cdots r),$$

то общее инфинитезимальное преобразование

$$e_1X_1(f)+\cdots+e_rX_r(f)$$

сохраняет свой вид при введении новых переменных $x'_i = f_i(x,a)$*, если для любой системы значений* $e_1\cdots e_r$ *имеет место соотношение вида*

$$\sum_{k=1}^{r}e_k\cdot X_k(f) = \sum_{k=1}^{r}e'_k\cdot X'_k(f),$$

где $e'_1\cdots e'_r$ *— независимые линейные однородные функции от* $e_1\cdots e_r$ *с коэффициентами, являющимися функциями от* $a_1\cdots a_r$.

В заключение — еще одно общее замечание, касающееся понятия однопараметрической группы.

Понятия и утверждения теории непрерывных групп преобразований зачастую имеют аналоги в *теории подстановок*[2], т. е. в теории разрывных групп. В ходе наших исследований мы не будем всякий раз особо подчеркивать эти аналогии, но все же будем часто напоминать о них, перенося обозначения из теории подстановок в теорию групп преобразований, что вполне возможно.

Здесь мы хотим обратить внимание на то, что *однопараметрические группы* играют, по существу, ту же роль в теории групп преобразований,

[2] C. Jordan, Traité des substitutions, Paris, 1870.

что и *группы, порожденные одной отдельной подстановкой*, — в теории подстановок.

Мы будем рассматривать однопараметрические группы или их инфинитезимальные преобразования в известной степени как элементы r-параметрических групп. При исследованиях r-параметрических групп почти всегда полезно сперва обратиться к инфинитезимальным преобразованиям этих групп и выбрать их в качестве предмета изучения.

Глава 5

Полные системы

Мы исходим из того, что нам известна теория интегрирования одного линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

или эквивалентной ему системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n},$$

но все же сформулируем без доказательства в качестве введения некоторые связанные с этим утверждения. Опираясь на эти утверждения, мы вскоре построим теорию интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Эту теорию, восходящую, по существу, к Якоби и Клебшу, мы представим в следующей главе в новом свете, рассмотрев подробнее взаимосвязь между понятиями «линейное дифференциальное уравнение в частных производных» и «инфинитезимальное преобразование», о которой мы уже ранее упоминали (гл. 3, стр. 58).

§ 21

Пусть $\xi_1 \cdots \xi_n$ ведут себя регулярно в окрестности некоторой заданной системы значений $x_1^0 \cdots x_n^0$, и пусть, кроме того, $\xi_n(x_1^0 \cdots x_n^0)$ отлично от нуля. При этих условиях можно определить $x_1 \cdots x_{n-1}$ как аналитические функции от x_n таким образом, что при подстановке этих функций соотношения

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{\xi_1}{\xi_n}, \quad \cdots \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}$$

тождественно выполняются, и что, помимо этого, $x_1 \cdots x_{n-1}$ принимают при $x_n = x_n^0$ некоторые предписанные *начальные значения* $x_1' \cdots x_{n-1}'$. Эти начальные значения понимаются как константы интегрирования.

Уравнения, представляющие $x_1 \cdots x_{n-1}$ описанным способом как функции от x_n, называются *полными интегральными уравнениями системы*; они могут быть записаны в виде

$$x_k = x_k' + (x_n^0 - x_n) \cdot \mathfrak{P}_k(x_1' - x_1^0, \cdots x_{n-1}' - x_{n-1}^0, x_n^0 - x_n) \quad (k = 1 \cdots n-1),$$

где $\mathfrak{P}_k$ — обычные степенные ряды своих аргументов. Если поменять местами $x_1 \cdots x_{n-1}, x_n$ и $x_1' \cdots x_{n-1}', x_n^0$, то снова получатся интегральные уравнения, разрешенные на сей раз относительно начальных значений $x_1' \cdots x_{n-1}'$:

$$x_k' = x_k + (x_n - x_n^0) \cdot \mathfrak{P}_k(x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0) = \omega_k(x_1 \cdots x_n) \quad (k = 1 \cdots n-1).$$

Здесь функции ω_k — это так называемые *интегральные функции* системы, поскольку все дифференциалы этих функций:

$$d\omega_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i}\, dx_i \quad (k = 1 \cdots n-1),$$

в силу системы обращаются в нуль тождественно, а всякая функция, обладающая таким свойством, называется интегральной функцией системы. Каждая такая интегральная функция является в то же время решением линейного дифференциального уравнения в частных производных $X(f) = 0$. Стало быть, $\omega_1 \cdots \omega_{n-1}$ — это решения уравнения $X(f) = 0$, причем, очевидно, независимые. В некоторой окрестности точки $x_1^0 \cdots x_n^0$ эти решения ведут себя регулярно, кроме того, при $x_n = x_n^0$ они сводятся к $x_1 \cdots x_{n-1}$ соответственно; поэтому они называются *главными решениями уравнения* $X(f) = 0$ *относительно* $x_n = x_n^0$.

Если вообще известно $n-1$ независимых решений

$$\psi_1(x_1 \cdots x_n) \cdots \psi_{n-1}(x_1 \cdots x_n)$$

уравнения $X(f) = 0$, то самое общее его решение имеет вид $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-1})$, где Ω обозначает произвольную аналитическую функцию своих аргументов.

§ 22

Если функция $\psi(x_1 \cdots x_n)$ удовлетворяет двум уравнениям

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0,$$

то она, разумеется, также удовлетворяет следующим двум дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$X_1\big(X_2(f)\big) = 0, \quad X_2\big(X_1(f)\big) = 0,$$

и вследствие этого — также уравнению

$$X_1\big(X_2(f)\big) - X_2\big(X_1(f)\big) = 0,$$

которое получается из двух последних путем вычитания.

Если теперь

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

то получается

$$X_1\big(X_2(f)\big) - X_2\big(X_1(f)\big) = \sum_{i=1}^{n} \{X_1(\xi_{2i}) - X_2(\xi_{1i})\} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

поскольку все члены, содержащие производные второго порядка, сокращаются. Итак, справедливо следующее

Утверждение 1. *Если функция $\psi(x_1 \cdots x_n)$ удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям первого порядка:*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

то она также удовлетворяет уравнению

$$X_1\big(X_2(f)\big) - X_2\big(X_1(f)\big) = \sum_{i=1}^{n} \{X_1(\xi_{2i}) - X_2(\xi_{1i})\} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

тоже являющемуся уравнением первого порядка.

Очень важно знать, как ведет себя выражение $X_1\big(X_2(f)\big) - X_2\big(X_1(f)\big)$, если вместо $x_1 \cdots x_n$ ввести новые независимые переменные $y_1 \cdots y_n$.

Предположим, что при введении y получается:

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} X_k(y_i)\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n} \eta_{ki}(y_1 \cdots y_n)\frac{\partial f}{\partial y_i} = Y_k(f) \quad (k = 1, 2).$$

Поскольку f означает здесь совершенно произвольную функцию от $x_1 \cdots x_n$, то мы можем подставить $X_1(f)$ или $X_2(f)$ вместо f, отсюда имеем

$$X_1\big(X_2(f)\big) = Y_1\big(X_2(f)\big) = Y_1\big(Y_2(f)\big),$$
$$X_2\big(X_1(f)\big) = Y_2\big(X_1(f)\big) = Y_2\big(Y_1(f)\big),$$

следовательно,

$$X_1\big(X_2(f)\big) - X_2\big(X_1(f)\big) = Y_1\big(Y_2(f)\big) - Y_2\big(Y_1(f)\big).$$

Таким образом, мы имеем

Утверждение 2. *Если выражения $X_1(f)$ и $X_2(f)$ при введении новых независимых переменных переходят в $Y_1(f)$ и $Y_2(f)$ соответственно, то выражение $X_1\big(X_2(f)\big) - X_2\big(X_1(f)\big)$ переходит в $Y_1\big(Y_2(f)\big) - Y_2\big(Y_1(f)\big)$.*

Это свойство выражения $X_1\big(X_2(f)\big) - X_2\big(X_1(f)\big)$ будет часто использоваться в ходе наших исследований. Более кратко его можно сформулировать так: *выражение $X_1\big(X_2(f)\big) - X_2\big(X_1(f)\big)$ ведет себя при введении новых переменных инвариантно.*

Рассмотрим теперь q уравнений

$$X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0 \tag{1}$$

и спросим, какие у них могут быть общие решения.

Можно предположить, что между выражениями $X_k(f)$ имеют место соотношения вида

$$\sum_{k=1}^{q} \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k(f) \equiv 0. \tag{2}$$

В таком случае некоторые из наших уравнений были бы следствием остальных и могли бы при решении поставленной задачи быть попросту опущены. Поэтому будет вполне правомерно наложить условие, что соотношений вида (2) не существует, то есть что уравнения (1) разрешимы относительно q из производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Именно это подразумевается, когда мы для краткости будем говорить, что *уравнения* (1) *независимы* друг от друга.

После того что выше было сказано об уравнениях $X_1(f) = 0$ и $X_2(f) = 0$, ясно, что возможные общие решения наших q уравнений удовлетворяют также всем уравнениям вида

$$X_i\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_i(f)\big) = 0.$$

Здесь возможны два случая.

Во-первых, все таким образом полученные уравнения могут быть следствием предыдущих, так что для любых i и $k \leqslant q$ имеет место соотношение следующего вида:

$$X_i\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_i(f)\big) = \\ = \chi_{ik1}(x_1 \cdots x_n)X_1(f) + \cdots + \chi_{ikq}(x_1 \cdots x_n)X_q(f).$$

Следуя Клебшу, мы тогда скажем, *что q друг от друга независимых уравнений $X_1(f) = 0 \cdots X_q(f) = 0$ образуют q-параметрическую полную систему.*

В общем случае, однако, появляется вторая возможность; среди вновь образованных уравнений

$$X_i\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_i(f)\big) = 0$$

найдется несколько таких, которые не зависят друг от друга и от q заданных уравнений. Мы добавляем их, например

$$X_{q+1}(f) = 0, \cdots X_{q+s}(f) = 0,$$

к q исходным и обращаемся с полученными $q + s$ уравнениями точно так же, как ранее с q заданными. Поскольку мы можем получить не больше чем n независимых друг от друга уравнений $X_i(f) = 0$, то, продолжая таким образом, мы должны в конце концов прийти к полной системе, состоящей не более чем из n независимых уравнений.

Утверждение 3. *Нахождение общих решений q линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ всегда можно свести путем дифференцирований и исключений к интегрированию полной системы.*

Предположим теперь, что $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ образуют q-параметрическую полную систему. Очевидно, что эти уравнения могут быть заменены q другими уравнениями:

$$Y_k(f) = \sum_{j=1}^{q} \psi_{kj}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j(f) = 0 \quad (k = 1 \cdots q).$$

При этом необходимо лишь, чтобы определитель, составленный из ψ_{kj}, не обращался тождественно в нуль, с тем чтобы $X_j(f)$ также выражались линейно через $Y_k(f)$. Очевидно, что тогда имеют место соотношения вида

$$Y_i\big(Y_k(f)\big) - Y_k\big(Y_i(f)\big) = \sum_{j=1}^{q} \omega_{ikj}(x_1 \cdots x_n) \cdot Y_j(f); \tag{3}$$

таким образом, уравнения $Y_k(f) = 0$ образуют q-параметрическую полную систему и потому целиком эквивалентны уравнениям $X_k(f) = 0$.

Как было впервые отмечено Клебшем, можно всегда найти такие ψ_{kj}, чтобы все ω_{ikj} обращались в нуль. Проще всего этого достичь, если, следуя Майеру, выбрать ψ_{kj} такими, чтобы $Y_k(f) = 0$ оказались разрешенными относительно q производных, например $\dfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q+1}}$:

$$Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q). \tag{4}$$

В таком случае выражения $Y_i\big(Y_k(f)\big) - Y_k\big(Y_i(f)\big)$ не будут содержать $\dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q+1}} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$; следовательно, они могут иметь вид $\sum_j \omega_{ikj} Y_j(f)$ лишь тогда, когда все ω_{ikj} равны нулю. Итак.

Утверждение 4. *Если разрешить q-параметрическую полную систему*

$$X_1(f) = 0 \cdots X_q(f) = 0$$

относительно q производных, то получающиеся в результате уравнения

$$Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q) \tag{4}$$

попарно удовлетворяют соотношениям

$$Y_i\big(Y_k(f)\big) - Y_k\big(Y_i(f)\big) = 0. \tag{5}$$

§ 23

Предположим, что задана q-параметрическая полная система, приведенная к вышеупомянутому виду:

$$Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q). \tag{4}$$

Мы увидим, что эта система имеет $n-q$ независимых решений, для нахождения которых достаточно проинтегрировать одно за другим по отдельности q линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Сначала проинтегрируем дифференциальное уравнение

$$Y_q(f) = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{qi} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

из $n-1$ независимых решений которого $x'_1 \cdots x'_{n-1}$ следующие $q-1$, а именно:

$$x'_{n-q+1} = x_{n-q+1}, \cdots x'_{n-1} = x_{n-1},$$

сразу известны. Если ввести $n-1$ выражений $x'_1 \cdots x'_{n-1}$, наряду с независимой от них величиной x_n, в качестве новых переменных, то наша полная система примет вид

$$Y_q(f) = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x'_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta'_{ki} \frac{\partial f}{\partial x'_i} = 0$$
$$(k = 1 \cdots q-1).$$

Поскольку выражения $Y_i\big(Y_k(f)\big) - Y_k\big(Y_i(f)\big)$ инвариантны относительно введения новых переменных (ср. утверждение 2 из данной главы), то они должны теперь снова обратиться в нуль, из чего следует, что все η'_{ki} являются функциями только от $x'_1 \cdots x'_{n-1}$ и не зависят от x_n. Исходная задача интегрирования сводится тем самым к тому, чтобы найти общие решения $q-1$ уравнений

$$Y'_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x'_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta'_{ki}(x'_1 \cdots x'_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial x'_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q-1),$$

причем эти уравнения, содержащие лишь $n-1$ независимых переменных, а именно $x'_1 \cdots x'_{n-1}$, опять же попарно удовлетворяют соотношениям $Y'_i\big(Y'_k(f)\big) - Y'_k\big(Y'_i(f)\big)$.

Этот результат мы сформулируем следующим образом.

Утверждение 5. *Общие решения уравнений q-параметрической полной системы от n переменных можно определить также как общие решения уравнений $(q-1)$-параметрической полной системы от $n-1$ переменных. Чтобы составить эту новую полную систему, надо проинтегрировать одно единственное линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка от $n-q+1$ переменных.*

Новая полная система опять появляется в разрешенном виде; мы можем немедленно снова воспользоваться вышеизложенным методом и получим в результате его $(q-1)$-кратного применения следующее

Утверждение 6. *Общие решения уравнений q-параметрической полной системы от n переменных можно определить также как решения одного единственного линейного дифференциального уравнение в частных производных первого порядка от $n-q+1$ переменных. Чтобы получить это уравнение, достаточно проинтегрировать одно за другим $q-1$ отдельных уравнений этого типа.*

Отсюда непосредственно следует

Утверждение 7. *q-параметрическая полная система от n независимых переменных всегда имеет $n-q$ независимых решений.*

Также верно и обратное

Утверждение 8. *Если q независимых линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка от n независимых переменных*

$$X_1(f)=0,\cdots X_q(f)=0$$

имеют в точности $n-q$ независимых общих решений, то они образуют q-параметрическую полную систему.

Для доказательства заметим, что уравнения

$$X_1(f)=0,\cdots X_q(f)=0,$$

согласно изложенному ранее, задают полную систему с q или более параметрами; если бы эта система содержала более чем q независимых уравнений, то она имела бы не $n-q$, а строго меньше независимых решений; следовательно, по условию утверждения она является q-параметрической, т. е. образуется исходными уравнениями $X_1(f)=0,\cdots X_q(f)=0$.

Если даны какие-либо $n-q$ независимых функций $\omega_1\cdots\omega_{n-q}$ от $x_1\cdots x_n$, то всегда можно выписать q независимых линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которым все ω удовлетворяют тождественно. И если предположить, что определитель

$$\sum\pm\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\omega_{n-q}}{\partial x_{n-q}}$$

не обращается тождественно в нуль, что мы без ограничения общности можем сделать, то q уравнений

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdot & \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} \\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \cdot & \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_{n-q}} & \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_{n-q+k}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \omega_{n-q}}{\partial x_1} & \cdot & \dfrac{\partial \omega_{n-q}}{\partial x_{n-q}} & \dfrac{\partial \omega_{n-q}}{\partial x_{n-q+k}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (k = 1 \cdots q)$$

являются дифференциальными уравнениями требуемого типа, т. к. при подстановке $f = \omega_j$ они обращаются в тождества. Судя по их виду, они также являются независимыми друг от друга. Согласно последнему утверждению эти уравнения образуют q-параметрическую полную систему. Итак, мы имеем.

Утверждение 9. *Если даны $n - q$ независимых функций от n переменных, то всегда существует некоторая q-параметрическая полная система от $x_1 \cdots x_n$, для которой эти функции являются решениями.*

§ 24

Для наших целей, однако, недостаточно доказать существование решений полной системы, необходимо, кроме того, также подробнее рассмотреть их аналитические свойства.

Для этого предположим, что в заданной q-параметрической полной системе

$$Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

аналитические функции η_{ki} ведут себя в окрестности точки

$$x_1 = \cdots = x_n = 0$$

регулярно. В качестве величин $x_1' \cdots x_{n-1}'$ выберем теперь среди решений уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{qi} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

ранее определенные главные решения этого уравнения относительно $x_n = 0$. Мы знаем, что эти главные решения $x'_1 \cdots x'_{n-1}$ являются в некоторой окрестности точки $x_1 = \cdots = x_n = 0$ обычными степенными рядами от $x_1 \cdots x_n$, и что они сводятся при $x_n = 0$ к $x_1 \cdots x_{n-1}$ соответственно. Упомянутые выше решения

$$x'_{n-1+1} = x_{n-q+1}, \cdots x'_{n-1} = x_{n-1}$$

являются поэтому главными решениями.

Наоборот, согласно замечаниям, сделанным в § 21, $x_1 \cdots x_{n-1}$ также являются аналитическими функциями от $x'_1 \cdots x'_{n-1}, x_n$ и ведут себя в окрестности системы значений $x'_1 = \cdots = x'_{n-1} = x_n = 0$ регулярно. Поскольку коэффициенты η_{ki} в новой полной системе $Y'_k(f) = 0$ ведут себя в некоторой окрестности $x_1 = \cdots = x_n = 0$ регулярно как функции от $x_1 \cdots x_n$, то они также будут обычными степенными рядами от $x'_1 \cdots x'_{n-1}, x_n$ в некоторой окрестности точки $x'_1 = 0, \cdots x'_{n-1} = 0, x_n = 0$, причем, как мы знаем, независимыми от x_n.

Теперь найдем главные решения уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x'_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta'_{q-1,i} \frac{\partial f}{\partial x'_i} = 0$$

относительно $x'_{n-1} = 0$. Они, назовем их $x''_1 \cdots x''_{n-2}$, ведут себя как функции от $x'_1 \cdots x'_{n-1}$ регулярно в окрестности $x'_1 = \cdots = x'_{n-1} = 0$ и поэтому будут регулярными в окрестности $x_1 = \cdots = x_n = 0$ также как функции от $x_1 \cdots x_n$. При подстановке $x'_{n-1} = 0$ решения $x''_1 \cdots x''_{n-2}$ сводятся к $x'_1 \cdots x'_{n-2}$, следовательно, при подстановке $x_{n-1} = x_n = 0$ они сводятся к $x_1 \cdots x_{n-2}$. Коэффициенты следующей $(q-2)$-параметрической полной системы будут, разумеется, обычными степенными рядами от $x''_1 \cdots x''_{n-2}$.

После q-кратного повторения этих рассуждений мы наконец получим $n-q$ независимых решений $x_1^{(q)} \cdots x_{n-q}^{(q)}$ нашей полной системы. Они являются обычными степенными рядами от $x_i^{(q-1)}$ в некоторой окрестности $x_1^{(q-1)} = \cdots = x_{n-q+1}^{(q-1)} = 0$ и такими же рядами от x_i в некоторой окрестности $x_1 = \cdots = x_n = 0$. При $x_{n-q+1}^{(q-1)} = 0$ функции $x_1^{(q)} \cdots x_{n-q}^{(q)}$ сводятся соответственно к $x_1^{(q-1)} \cdots x_{n-q}^{(q-1)}$, а значит, при $x_{n-q+1} = \cdots = x_n = 0$ они сводятся к $x_1 \cdots x_{n-q}$. Таким образом,

$$x_i^{(q)} = x_i + \mathfrak{P}_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n-q),$$

где все $\mathfrak{P}_i$ при $x_{n-q+1} = \cdots = x_n = 0$ обращаются в нуль.

Мы называем решения $x_1^{(q)} \cdots x_{n-q}^{(q)}$ нашей полной системы ее *главными решениями относительно* $x_{n-q+1} = 0, \cdots x_n = 0$.

Сформулируем полученный результат в несколько более общем виде, введя вместо специальной системы значений

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

общую $x_1^0 \cdots x_n^0$. Тогда имеет место

Теорема 12. *Каждая q-параметрическая полная система*

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q),$$

коэффициенты которой η_{ki} *ведут себя в окрестности точки* $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ *регулярно, имеет* $n - q$ *независимых решений* $x_1^{(q)} \cdots x_{n-q}^{(q)}$, *которые ведут себя регулярно в некоторой окрестности точки* $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ *и, кроме того, сводятся при подстановке* $x_{n-q+1} = x_{n-q+1}^0, \cdots x_n = x_n^0$ *к* $x_1 \cdots x_{n-q}$ *соответственно.*

В такой точной формулировке это основное утверждение из теории полных систем не было записано ни Якоби, ни Клебшем. В то же время оно содержалось в неявном виде в известных исследованиях, начало которым было положено Коши, Вейерштрассом, Брио и Буке, Ковалевской и Дарбу, где рассматривался вопрос о существовании решений данных дифференциальных уравнений.

§ 25

Теория одного отдельного взятого линейного дифференциального уравнения в частных производных

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

тесно связана, как уже было сказано, с теорией системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}.$$

Нечто аналогичное имеет место также в системах линейных дифференциальных уравнений в частных производных[1], Math. Ann., том V.

Пусть даны q независимых линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которые не обязательно образуют полную систему. Ради простоты мы представим себе, что эти уравнения разрешены относительно q производных:

$$Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q). \qquad (4')$$

Если $\omega(x_1 \cdots x_n)$ — общее решение этих уравнений, то

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_{n-q+k}} \equiv -\sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki}\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q);$$

то есть

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n-q} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\left\{dx_i - \sum_{k=1}^{q} \eta_{ki}dx_{n-q+k}\right\}.$$

Дифференциал $d\omega$ обращается тем самым тождественно в нуль в силу $n-q$ уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i - \sum_{k=1}^{q} \eta_{ki}dx_{n-q+k} = 0 \quad (i = 1 \cdots n-q). \qquad (6)$$

Каждая функция с таким свойством называется интегральной функцией этой системы уравнений в полных дифференциалах. Следовательно, можно сказать:

Каждое общее решение q линейных дифференциальных уравнений в частных производных $(4')$ *является интегральной функцией системы $n-q$ уравнений в полных дифференциалах* (6).

И наоборот, каждая интегральная функция системы (6) *является общим решением уравнений* $(4')$.

Действительно, если $w(x_1 \cdots x_n)$ — интегральная функция системы (6), то выражение

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx_i$$

[1]Эту взаимосвязь впервые обнаружил Буль. Ср. также А. Майер, О дифференциальных уравнениях, интегрируемых без ограничений (A. Mayer, Über unbeschränkt integrable Differentialgleichungen).

в силу (6) тождественно обращается в нуль, т. е.

$$\sum_{k=1}^{q}\left\{\frac{\partial w}{\partial x_{n-q+k}}+\sum_{i=1}^{n-q}\eta_{ki}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\}dx_{n-q+k}\equiv 0,$$

откуда следует, что w тождественно удовлетворяет уравнениям (4).

Но интегрирование системы (6) равнозначно нахождению всех ее интегральных функций. Ведь как известно, интегрирование системы (6) означает не что иное, как нахождение всех возможных функций $\varrho_1\cdots\varrho_{n-q}$ от $x_1\cdots x_n$, которые превращают выражение

$$\sum_{i=1}^{n-q}\varrho_i(x_1\cdots x_n)\left\{dx_i-\sum_{k=1}^{q}\eta_{ki}\,dx_{n-q+k}\right\}$$

в полный дифференциал, то есть в дифференциал некоторой интегральной функции.

Другими словами:

Интегрирование системы q линейных дифференциальных уравнений в частных производных (4′) *выполнено, если проинтегрирована система $n-q$ уравнений в полных дифференциалах* (6), *и наоборот.*

Эта связь между системами (4′) и (6) предполагает, конечно, что первая из них имеет решения, а вторая — интегральные функции; но определенная взаимосвязь имеет место даже и в том случае, когда (4′) не имеет никаких общих решений, а (6) не имеет интегральных функций. К этому мы еще вернемся (гл. 6, стр. 116).

Поскольку уравнения (4′) имеют максимум $n-q$ независимых общих решений, то система (6) имеет самое большее $n-q$ независимых интегральных функций. Если имеется в точности $n-q$ независимых интегральных функций, то система (6) называется *интегрируемой без ограничений*, следовательно, этот случай наступает лишь тогда, когда q уравнений (4′) образуют q-параметрическую полную систему.

Предположим, что система (6) интегрируема без ограничений, или, что то же самое, все выражения $Y_k\big(Y_j(f)\big)-Y_j\big(Y_k(f)\big)$ тождественно обращаются в нуль. Далее предположим, что заданы все $n-q$ главных решений

$$\omega_1(x_1\cdots x_n)\cdots\omega_{n-q}(x_1\cdots x_n)$$

полной системы (4′) относительно

$$x_{n-q+1}=x^0_{n-q+1},\cdots x_n=x^0_n.$$

Тогда уравнения

$$\omega_1(x_1 \cdots x_n) = a_1, \cdots \omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = a_{n-q}$$

с $n-q$ произвольными константами $a_1 \cdots a_{n-q}$ называются полными интегральными уравнениями системы (6). Эти интегральные уравнения явно разрешимы относительно $x_1 \cdots x_{n-q}$, т. к. $\omega_1 \cdots \omega_{n-q}$ при

$$x_{n-q+1} = x^0_{n-q+1}, \cdots x_n = x^0_n$$

сводятся к $x_1 \cdots x_{n-q}$ соответственно. Поэтому мы получаем

$$x_i = \psi_i(x_{n-q+1} \cdots x_n, a_1 \cdots a_{n-q}) \quad (i = 1 \cdots n-q).$$

Легко видеть, что уравнения (6) при подстановке $x_1 = \psi_1, \cdots x_{n-q} = \psi_{n-q}$ обращаются в тождества. Так, мы сначала имеем

$$x_i - \psi_i(x_{n-q+1} \cdots x_n, \omega_1 \cdots \omega_{n-q}) \equiv 0 \quad (i = 1 \cdots n-q);$$

поэтому, подставив $x_i - \psi_i$ вместо f в $Y_k(f)$, мы, разумеется, снова получим выражение, тождественно обращающееся в нуль, а поскольку все $Y_k(\omega_1) \cdots Y_k(\omega_{n-q})$ тождественно равны нулю, то мы имеем

$$\eta_{ki}(x_1 \cdots x_n) - \frac{\partial}{\partial x_{n-q+k}} \psi_i(x_{n-q+1} \cdots x_n, \omega_1 \cdots \omega_{n-q}) \equiv 0$$
$$(k = 1 \cdots q, \quad i = 1 \cdots n-q).$$

Если мы сделаем здесь подстановку $x_1 = \psi_1, \cdots x_{n-q} = \psi_{n-q}$, то получится:

$$\eta_{ki}(\psi_1 \cdots \psi_{n-q}, x_{n-q+1} \cdots x_n) - \frac{\partial}{\partial x_{n-q+k}} \psi_i(x_{n-q+1} \cdots x_n, a_1 \cdots a_{n-q}) \equiv 0.$$

Умножив это выражение на dx_{n-q+k} и просуммировав по k от 1 до q, мы увидим, что выражение

$$dx_i - \sum_{k=1}^{q} \eta_{ki}(x_1 \cdots x_n)\, dx_{n-q+k}$$

действительно тождественно обращается в нуль при подстановке $x_1 = \psi_1, \cdots x_{n-q} = \psi_{n-q}$. Кроме того, предположим, что a_i из уравнений $\omega_i = a_i$ можно всегда задать такими, что переменные $x_1 \cdots x_{n-q}$ принимают при $x_{n-q+1} = x^0_{n-q+1}, \cdots x_n = x^0_n$ предписанные начальные значения $\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_{n-q}$; тогда мы можем сказать:

Если система уравнений в полных дифференциалах (6) *интегрируема без ограничений, то всегда можно задать* $x_1 \cdots x_{n-q}$ *как аналитические функции от* $x_{n-q+1} \cdots x_n$, *таким образом, что система* (6) *удовлетворяется тождественно, а* $x_1 \cdots x_{n-q}$ *принимают предписанные начальные значения при* $x_{n-q+1} = x^0_{n-q+1}, \cdots x_n = x^0_n$.

§ 26

Для удобства в будущем мы введем некоторые сокращения.

Прежде всего, начиная с этого момента будут часто опускаться скобки вокруг f в выражении $X(f)$.

Поскольку в дальнейшем все чаще будут встречаться выражения вида $X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big)$, то мы будем писать

$$X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) = XYf - YXf = (XY);$$

а также будем нередко пользоваться речевым оборотом: выражение или инфинитезимальное преобразование (XY) получается как *«композиция»* или *«комбинация»* Xf и Yf.

Теперь можно также привести здесь следующее замечание.

Для трех произвольных выражений Xf, Yf, Zf всегда имеет место следующее тождество:

$$\big((XY)Z\big) + \big((YZ)X\big) + \big((ZX)Y\big) \equiv 0. \tag{7}$$

Оно является специальным случаем так называемого тождества Якоби, с которым мы позднее познакомимся. Здесь мы удовольствуемся тем, что проверим правильность специального тождества (7); далее, в соответствующем месте (ср. часть 2) будет также разъяснен смысл тождества Якоби.

Очевидно, что

$$\big((XY)Z\big) \equiv XYZf - YXZf - ZXYf + ZYXf;$$

если здесь циклически переставить Xf, Yf, Zf и сложить три получившихся соотношения, то в правой части все сократится, и сразу получится указанное тождество.

Это специальное тождество Якоби[2] оказывается исключительно важным при всех исследованиях групп преобразований.

---

[2]Приведенная выше простая проверка *специального* тождества Якоби была впервые предложена *Энгелем*.

Глава 6

Новое понимание решений полной системы

Если мы в рассуждениях предыдущей главы рассмотрим выражения $X(f)$ как символы инфинитезимальных преобразований или, что то же самое, как символы однопараметрических групп, то все сказанное там приобретает новый смысл. С другой стороны, если мы истолкуем переменные $x_1 \cdots x_n$ как координаты точек в n-мерном пространстве, то прежние результаты получат также некоторую наглядность.

Показать и то, и другое по отдельности, а затем во взаимосвязи — вот задача настоящей главы; однако для этого необходимо ввести различные новые понятия[1].

§ 27

Пусть $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ — преобразование переменных $x_1 \cdots x_n$, а $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ — какая-либо функция; если эта функция случайно обладает таким свойством, что имеет место тождественное соотношение

$$\Phi\big(f_1(x) \cdots f_n(x)\big) = \Phi(x_1 \cdots x_n),$$

то мы говорим: *функция $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ допускает или разрешает, преобразование $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$*; мы можем выразиться еще и так: *функция $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ остается при данном преобразовании инвариантной, или она ведет себя по отношению к нему как инвариант*.

Если функция $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ допускает все ∞^r преобразований $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ r-параметрической группы, то мы скажем, что *она остается инвариантной относительно этой группы*, или что *она эту группу допускает*; при этом мы называем *Φ абсолютным инвариантом* или просто *инвариантом* этой группы.

[1] Новые понятия этой главы были развиты Ли в трудах Научного общества Христиании в 1872, 1873, 1874 гг. и 19 февраля 1875 г. Ср. также Math. Ann., т. VIII, IX и XI.

Здесь мы ограничимся однопараметрическими группами. Итак, пусть дана однопараметрическая группа

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

конечные преобразования которой имеют вид

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\xi_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X(\xi_i) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Нас интересует, сколько у этой группы всего инвариантов.

Если $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ — такой инвариант, то для любого t должно выполняться тождество

$$\Phi(x_1 + t\xi_1 + \cdots, \cdots x_n + t\xi_n + \cdots) = \Phi(x_1 \cdots x_n).$$

Если разложить его левую часть согласно общей формуле (7) из главы 3, стр. 56, в ряд по степеням от t, то мы получим условие

$$\Phi(x_1 \cdots x_n) + \frac{t}{1} \cdot X(\Phi) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X\big(X(\Phi)\big) + \cdots \equiv \Phi(x_1 \cdots x_n)$$

для любого t. Отсюда немедленно следует, что выражение $X(\Phi)$ должно тождественно обращаться в нуль, если Φ допускает нашу однопараметрическую группу; тем самым мы имеем *необходимый* критерий инвариантности этой функции относительно однопараметрической группы $X(f)$.

Выражение $X(\Phi)$ задает, как мы уже ранее видели (ср. стр. 58), приращение, которое получает функция Φ при инфинитезимальном преобразовании $X(f)$. Но поскольку это приращение $\delta\Phi = X(\Phi)\delta t$ вместе с $X(\Phi)$ обращается в нуль, то вполне естественно ввести следующую терминологию: *если выражение $X(\Phi)$ тождественно обращается в нуль, то мы говорим, что функция Φ допускает инфинитезимальное преобразование $X(f)$.*

Поэтому полученный выше результат можно сформулировать еще и так: *для того чтобы функция Φ от $x_1 \cdots x_n$ допускала все преобразования однопараметрической группы $X(f)$, необходимо, чтобы она допускала инфинитезимальное преобразование $X(f)$ данной группы.*

Однако легко видеть, что это необходимое условие одновременно является и достаточным. Ведь вместе с $X(\Phi)$ тождественно обращаются в нуль и все выражения $X\big(X(\Phi)\big)$, $X\big(X(X(\Phi))\big)$ и т. д., то есть уравнение

$$\Phi(x_1' \cdots x_n') = \Phi(x_1 \cdots x_n) + \frac{t}{1} X(\Phi) + \cdots$$

для любого значения t сводится к равенству $\Phi(x') = \Phi(x)$, а это доказывает, что функция $\Phi(x)$ допускает все преобразования однопараметрической группы $X(f)$. И поскольку функции $\Phi(x_1 \cdots x_n)$, для которых выражение $X(\Phi)$ тождественно обращается в нуль, суть ничто иное, как решения линейного дифференциального уравнения в частных производных $X(f) = 0$, то мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 13. *Решения линейного дифференциального уравнения в частных производных*

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

являются инвариантами и притом единственными инвариантами однопараметрической группы $X(f)$.

Конечно, нельзя забывать, что инварианты однопараметрической группы $X(f)$ одновременно являются инвариантами всякой однопараметрической группы вида

$$\varrho(x_1 \cdots x_n) \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \varrho X(f),$$

какой бы функцией своих аргументов ϱ при этом ни была. Это следует попросту из того, что уравнение $X(f) = 0$, определяющее соответствующие инварианты, можно умножить на произвольную функцию ϱ от $x_1 \cdots x_n$. Это обстоятельство можно выразить еще так: если функция от $x_1 \cdots x_n$ допускает инфинитезимальное преобразование $X(f)$, то она также допускает всякое инфинитезимальное преобразование вида $\varrho(x_1 \cdots x_n) \cdot X(f)$.

Мы видим, что понятия «однопараметрическая группа $X(f)$» и «инфинитезимальное преобразование $X(f)$» — более специальные, чем понятие «линейное дифференциальное уравнение в частных производных $X(f) = 0$».

Наше прежнее замечание о том, что общие решения двух уравнений $X_i(f) = 0$ и $X_k(f) = 0$ удовлетворяют одновременно и третьему уравнению $X_i\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_i(f)\big) = 0$, мы можем теперь на основании вышеизложенного сформулировать следующим образом.

Утверждение 1. *Если функция от $x_1 \cdots x_n$ допускает инфинитезимальные преобразования $X_i(f)$ и $X_k(f)$ от этих переменных, то она допускает также инфинитезимальное преобразование $X_i\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_i(f)\big)$.*

Иначе говоря, имеет место

Утверждение 2. *Если функция от $x_1 \cdots x_n$ допускает однопараметрические группы $X_i(f)$ и $X_k(f)$, то она допускает также однопараметрическую группу $X_i\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_i(f)\big)$.*

Если $\psi_1 \cdots \psi_{n-q}$ — это система независимых решений q-параметрической полной системы $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$, а значит, $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-q})$ — общий вид решения этой полной системы, то $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-q})$ допускает вообще любое инфинитезимальное преобразование вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1(f) + \cdots + \chi_q(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q(f), \tag{1}$$

какими бы ни были выбраны функции $\chi_1 \cdots \chi_q$. Более того, ясно, что, кроме только что записанных, нет других инфинитезимальных преобразований, при которых все функции вида $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-q})$ остаются инвариантными, поскольку мы знаем, что q-параметрическая полная система $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ определяется своими решениями $\psi_1 \cdots \psi_{n-q}$.

Функции Ω допускают также, конечно, все преобразования однопараметрических групп (1). Можно, впрочем, указать все конечные преобразования, при которых все функции $\psi_1 \cdots \psi_{n-q}$ одновременно остаются инвариантными. Эти преобразования имеют вид

$$\psi_k(x'_1 \cdots x'_n) = \psi_k(x_1 \cdots x_n) \quad (k = 1 \cdots n-q),$$
$$\mathfrak{U}_j(x'_1 \cdots x'_n, x_1 \cdots x_n) = 0 \quad (j = 1 \cdots q),$$

где $\mathfrak{U}_j$ подчиняются тому условию, что получается настоящее преобразование. Кроме того, как x_k, так и x'_k должны оставаться внутри определенных областей.

Мы скажем, что *система уравнений*

$$\pi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \pi_m(x_1 \cdots x_n) = 0$$

допускает преобразование $x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n)$, если система уравнений

$$\pi_1(x'_1 \cdots x'_n) = 0, \cdots \pi_m(x'_1 \cdots x'_n) = 0$$

при подстановке $x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n)$ эквивалентна системе $\pi_1(x) = 0, \cdots \pi_m(x) = 0$, т. е. если любая система значений $x_1 \cdots x_n$, удовлетворяющая m уравнениям $\pi_\mu(x) = 0$, удовлетворяет также m уравнениям

$$\pi_1\big(f_1(x) \cdots f_n(x)\big) = 0, \ \cdots \pi_m\big(f_1(x) \cdots f_n(x)\big) = 0.$$

При введении этого определения совсем не обязательно предполагать, что m уравнений $\pi_1 = 0, \cdots \pi_m = 0$ независимы друг от друга, но в дальнейшем мы это условие будем всегда налагать, если четко не оговорено противное. Из вышеизложенного немедленно следует

Утверждение 3. *Если $W_1, W_2 \cdots W_m (m \leqslant n - q)$ — произвольные независимые решения q-параметрической полной системы $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ от n независимых переменных $x_1 \cdots x_n$, если, кроме того, $a_1 \cdots a_m$ — некоторые произвольно выбранные константы, то система уравнений*

$$W_1 = a_1, \cdots W_m = a_m$$

допускает любую однопараметрическую группу вида

$$\sum_1^q \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k(f),$$

где под $\chi_1 \cdots \chi_q$ понимаются произвольные функции своих аргументов.

§ 28

В предыдущем параграфе мы представили теорию интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных в новом свете, связав с ней инфинитезимальные преобразования и однопараметрические группы. Теперь мы хотим пойти другим путем и попытаться сделать эту теорию интегрирования и все, что с ней связано, доступными для наглядного понимания при помощи рассмотрения многообразий.

Если мы посмотрим на $x_1 \cdots x_n$ как на координаты в n-мерном пространстве R_n, то система

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

получает некий наглядный смысл; а именно: она ставит в соответствие каждой точке $x_1 \cdots x_n$ из R_n определенное направление.

Интегральные уравнения этой системы задают $n - 1$ из переменных $x_1 \cdots x_n$, например $x_1 \cdots x_{n-1}$, как функции от n-ой переменной x_n и начальных значений $\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n$; следовательно, эти интегральные уравнения при заданных определенным образом начальных значениях представляют некоторое одномерное многообразие, которое мы назовем *интегральной*

кривой этой системы. *Каждая такая интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего этой точке направления.*

Для нашей системы имеется в целом ∞^{n-1} различных интегральных кривых, причем через каждую точку пространства R_n проходит в общем случае одна из них.

Если $\psi_1 \cdots \psi_{n-1}$ — независимые интегральные функции рассматриваемой системы, то всевозможные интегральные кривые также могут быть представлены $n-1$ уравнениями

$$\psi_k(x_1 \cdots x_n) = C_k \quad (k = 1 \cdots n-1)$$

с $n-1$ произвольными константами $C_1 \cdots C_{n-1}$. Если приравнять любую интегральную функцию $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-1})$ произвольной константе:

$$\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-1}) = A,$$

то мы получим уравнение, задающее ∞^1 многообразий размерности $n-1$, порожденных интегральными кривыми, а именно: каждое в отдельности порождено ∞^{n-2} различными интегральными кривыми. Наконец, если вообще приравнять $m \leqslant n-1$ независимых интегральных функций $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ произвольным константам:

$$\Omega_\mu(\psi_1 \cdots \psi_{n-1}) = A_\mu \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

то получится аналитическое выражение семейства ∞^m многообразий размерности $n-m$, каждое из которых состоит из ∞^{n-m-1} интегральных кривых.

Интегральные функции нашей системы в то же время являются решениями линейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f) = 0.$$

Иногда мы называем интегральные кривые нашей системы также *характеристиками линейного дифференциального уравнения в частных производных* $X(f) = 0$, возвращаясь к термину, введенному Монжем для $n = 3$. Используя эту терминологию, мы можем также сказать: каждое решение линейного дифференциального уравнения в частных производных $X(f) = 0$, будучи приравнено константе, задает однопараметрическое семейство многообразий, каждое из которых состоит из ∞^{n-2} характеристик уравнения $X(f) = 0$.

Предположим теперь, что нам даны два линейных дифференциальных уравнения в частных производных, например $X_1(f) = 0$ и $X_2(f) = 0$.

Может случиться, что эти уравнения имеют общие характеристики. Это происходит, если имеет место тождество вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1(f) + \chi_2(x_1 \cdots x_n) \cdot X_2(f) \equiv 0,$$

где ни χ_1, ни χ_2 не обращаются в нуль. Естественно, в этом случае каждое решение уравнения $X_1(f) = 0$ также удовлетворяет $X_2(f) = 0$, и наоборот.

Если уравнения $X_1(f) = 0$ и $X_2(f) = 0$ имеют различные характеристики, то не все их решения являются общими; спрашивается тогда, есть ли у них вообще какие-либо общие решения, или, как мы теперь можем это выразить, можно ли из характеристик уравнения $X_1(f) = 0$ составить многообразия, которые состоят из характеристик уравнения $X_2(f) = 0$.

На этот вопрос можно непосредственно ответить, если известны характеристики обоих уравнений, но мы на этом задерживаться не будем. В дальнейшем мы ограничимся тем, что выразим ранее полученные аналитическими методами результаты языком теории многообразий.

Пусть q независимых друг от друга уравнений

$$X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$$

образуют q-параметрическую полную систему, а $\psi_1 \cdots \psi_{n-q}$ являются ее независимыми решениями. Тогда уравнения

$$\psi_1(x_1 \cdots x_n) = C_1, \cdots \psi_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = C_{n-q}$$

с $n - q$ произвольными константами C_k задают $(n - q)$-параметрическое семейство q-мерных многообразий, каждое из которых состоит из ∞^{q-1} характеристик каждого из q уравнений $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$. Эти ∞^{n-q} многообразий мы назовем *характеристическими многообразиями полной системы*.

Если мы приравняем какие-либо $n - q - m$ независимых функций от $\psi_1 \cdots \psi_{n-q}$ произвольным константам

$$\Omega_1(\psi_1 \cdots \psi_{n-q}) = A_1, \cdots \Omega_{n-q-m}(\psi_1 \cdots \psi_{n-q}) = A_{n-q-m},$$

то получим аналитическое выражение семейства из ∞^{n-q-m} многообразий размерности $q + m$, каждое из которых состоит из ∞^m характеристических многообразий.

Уравнения ∞^{n-q} характеристических многообразий показывают, что каждая точка пространства R_n соответствует одному и только одному характеристическому многообразию. Таким образом, мы можем сказать, что

все пространство R_n разбито на ∞^{n-q} многообразий размерности q, т. е. что наша полная система задает разбиение пространства.

И наоборот, любое разбиение R_n на ∞^{n-q} q-мерных многообразий,

$$\varphi_1(x_1 \cdots x_n) = A_1, \cdots \varphi_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = A_{n-q}$$

можно определить при помощи q-параметрической полной системы; поскольку $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}$ необходимо являются независимыми функциями, то согласно утверждению 9, стр. 99, существует q-параметрическая полная система, самым общим решением которой является произвольная функция от $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}$, эта полная система и определяет данное разбиение.

Отдельно взятое линейное дифференциальное уравнение в частных производных $X(f) = 0$ ставило в соответствие каждой точке пространства R_n некоторое направление. Если теперь у нас таких уравнений несколько, например следующие (они могут выбираться совершенно произвольно):

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q),$$

то каждое из них ставит в соответствие каждой точке пространства одно направление движения. Например, q направлений, соответствующих точке $x_1^0 \cdots x_n^0$, заданы уравнениями

$$\delta x_1^0 : \delta x_2^0 : \cdots : \delta x_n^0 = \xi_{k1}(x^0) : \xi_{k2}(x^0) : \cdots : \xi_{kn}(x^0) \quad (k = 1 \cdots q).$$

Мы называем эти q *направлений в выбранной точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ независимыми друг от друга*, если ни одно из них нельзя получить линейно из остальных, т. е. если невозможно найти q чисел $\lambda_1 \cdots \lambda_q$, не обращающихся одновременно в нуль, но в то же время удовлетворяющих n уравнениям

$$\lambda_1 \xi_{1i}^0 + \cdots + \lambda_q \xi_{qi}^0 = 0 \quad (i = 1 \cdots n).$$

Отсюда следует, что q уравнений $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ *каждой точке* общего положения ставят в соответствие q независимых направлений, если они сами независимы друг от друга, т. е. если уравнение

$$\sum_{k=1}^{q} \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k(f) = 0$$

может быть тождественно удовлетворено лишь при $\chi_1 = 0, \cdots \chi_q = 0$.

Чтобы наглядно показать с геометрической точки зрения, что понимается под «независимыми направлениями», надо начинать с обычного трехмерного пространства R_3; в этом случае ответ лежит на ладони. Два направления в точке пространства R_3 называются друг от друга независимыми, если они вообще различны; три направления независимы друг от друга, если не лежат в одной плоскости, проходящей через данную точку; более трех независимых друг от друга направлений в пространстве R_3 вообще не бывает.

Соответственно этому q направлений в точке пространства R_n независимы друг от друга тогда и только тогда, когда они, взятые вместе, не содержатся ни в одном плоском многообразии, проходящем через эту точку и имеющем менее q измерений.

Всякое возможное общее решение q уравнений

$$X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$$

удовлетворяет также всем уравнениям вида

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k(f) = 0. \tag{2}$$

Таким образом, совокупность всех этих уравнений ставит каждой точке пространства R_n в соответствие целое семейство направлений. Если мы предположим, что уравнения $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ независимы друг от друга, то мы не ограничим при этом общность исследования; при помощи уравнений (2) мы тогда получим семейство из ∞^{q-1} различных направлений для каждой точки $x_1 \cdots x_n$. Легко заметить, что эти ∞^{q-1} направлений образуют в каждой точке плоский пучок и тем самым задают плоское q-мерное многообразие[2], проходящее через эту точку, а именно наименьшее плоское многообразие, содержащее q независимых направлений, соответствующих q уравнениям $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$.

Каждое возможное общее решение уравнений

$$X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$$

удовлетворяет также всем уравнениям вида

$$X_k\big(X_j(f)\big) - X_j\big(X_k(f)\big) = 0.$$

Эти уравнения также ставят в соответствие каждой точке $x_1 \cdots x_n$ определенные направления, но в общем случае эти направления будут принадле-

[2]Имеется в виду q-мерное линейное подпространство. — *Прим. ред.*

жать ранее указанному пучку из ∞^{q-1} направлений только в виде исключения. Каждое из направлений, заданных уравнениями

$$X_k\big(X_j(f)\big) - X_j\big(X_k(f)\big) = 0,$$

входит в этот пучок в каждой точке пространства только в одном случае, а именно тогда, когда для любых k и j имеет место соотношение вида

$$X_k\big(X_j(f)\big) - X_j\big(X_k(f)\big) = \sum_{s=1}^{q} \omega_{kjs}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_s(f),$$

т. е. когда уравнения $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ «случайно» образуют q-параметрическую полную систему.

Пучок направлений, который определяется уравнениями $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ в каждой точке $x_1 \cdots x_n$, мы можем также задать с помощью равенства

$$\delta x_1 : \cdots : \delta x_n = \sum_{k=1}^{q} \chi_k(x) \cdot \xi_{k1}(x) : \cdots : \sum_{k=1}^{q} \chi_k(x) \cdot \xi_{kn}(x).$$

Если мы исключим отсюда произвольные функции $\chi_1 \cdots \chi_q$ или, что то же самое, если все определители порядка $q+1$ матрицы

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \cdot & \cdot & dx_n \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \cdot & \cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

положим равными нулю, то получим систему из $n-q$ независимых уравнений в полных дифференциалах. Эта система ставит в соответствие каждой точке $x_1 \cdots x_n$ тот же самый плоский пучок из ∞^{q-1} направлений, что и уравнения (2). Следовательно, и наоборот: совокупность линейных дифференциальных уравнений в частных производных (2) полностью определяется указанной системой уравнений в полных дифференциалах.

Этими формулами будет особенно удобно пользоваться, если заменить q уравнений $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ другими q уравнениями, разрешенными относительно q из производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, например следующими:

$$Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q).$$

Совокупность всех уравнений (2) эквивалентна совокупности всех уравнений

$$\sum_{k=1}^{q} \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot Y_k(f) = 0;$$

так что все направления, сопоставленные точке $x_1 \cdots x_n$, могут также быть выражены уравнениями

$$dx_1 : \cdots : dx_{n-q} : dx_{n-q+1} : \cdots : dx_n =$$
$$= \sum_{k=1}^{q} \chi_k \eta_{k1} : \cdots : \sum_{k=1}^{q} \chi_k \eta_{k,n-q} : \chi_1 : \cdots : \chi_q.$$

Поэтому если мы исключим отсюда $\chi_1 \cdots \chi_q$, то получим следующую систему уравнений в полных дифференциалах:

$$dx_i - \sum_{k=1}^{q} \eta_{ki}(x) \cdot dx_{n-q+k} = 0 \quad (i = 1 \cdots n-q). \tag{3}$$

Еще в предыдущей главе, стр. 101–103, мы видели, что между системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных $Y_1(f) = 0, \cdots Y_q(f) = 0$ и указанной выше системой уравнений в полных дифференциалах существует взаимосвязь. Но тогда мы ограничились тем специальным случаем, когда q уравнений

$$Y_1(f) = 0, \cdots Y_q(f) = 0$$

имеют общие решения, и доказали, что нахождение этих общих решений сводится к интегрированию уравнений в полных дифференциалах, приведенных выше, и наоборот.

В последних же рассуждениях речь об интегрировании этих систем дифференциальных уравнений вообще не шла. Таким образом, связь между системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных $Y_1(f) = 0, \cdots Y_q(f) = 0$ и системой уравнений в полных дифференциалах (3) совершенно не зависит от интегрируемости обеих систем; эта связь основана, скорее, на том, что обе системы ставят одной и той же точке в соответствие один и тот же плоский пучок из ∞^{q-1} направлений.

В заключение — еще одно замечание, которое хоть и кажется само собой разумеющимся, но все же должно быть сделано: если q уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ образуют q-параметрическую полную систему, то характеристическое многообразие этой полной системы касается в каждой

точке $x_1 \cdots x_n$, через которую оно проходит, каждого отдельного из ∞^{q-1} направлений, поставленных в соответствие этой точке всеми уравнениями вида (2).

§ 29

Наконец, целесообразно связать рассуждения о многообразиях из предыдущего параграфа с рассуждениями § 27. Мы ограничимся здесь, однако, лишь некоторыми замечаниями.

Каждое преобразование $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ можно понимать как операцию, которая переставляет между собой точки пространства R_n, переводя при этом каждую точку $x_1 \cdots x_n$ в новое положение $x_1' = f_1(x), \cdots x_n' = f_n(x)$ (гл. 1, стр. 27).

Система m независимых уравнений

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_m(x_1 \cdots x_n) = 0$$

представляет $(n-m)$-мерное многообразие в R_n. Мы говорим, что это многообразие допускает преобразование $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$, если это верно для системы уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_m = 0$. Согласно § 27 это условие выполняется в том случае, когда любая система значений $x_1 \cdots x_n$, удовлетворяющая уравнениям $\Omega_1(x) = 0, \cdots \Omega_m(x) = 0$, в то же время удовлетворяет уравнениям

$$\Omega_1\big(f_1(x) \cdots f_n(x)\big) = 0, \cdots \Omega_m\big(f_1(x) \cdots f_n(x)\big) = 0.$$

Поэтому мы можем выразить свою мысль еще и так:

Многообразие

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_m(x_1 \cdots x_n) = 0$$

допускает преобразование

$$x_1' = f_1(x_1 \cdots x_n), \cdots x_n' = f_n(x_1 \cdots x_n),$$

если каждая точка $x_1 \cdots x_n$ многообразия переходит при этом преобразовании в точку $x_1' \cdots x_n'$, также принадлежащую этому многообразию.

В главе 3, стр. 64 и 65, мы видели, что через каждую точку $x_1 \cdots x_n$ общего положения в R_n проходит траектория инфинитезимального преобразования

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Мы определяли эту траекторию как совокупность всех положений, которые принимает точка $x_1 \cdots x_n$ при всех ∞^1 преобразованиях однопараметрической группы $X(f)$; причем точка $x_1 \cdots x_n$ может быть выбрана

на этой траектории совершенно произвольно. Отсюда следует, что любая точка $x_1 \cdots x_n$ при любом преобразовании однопараметрической группы $X(f)$ остается на проходящей через нее траектории, так что *всякая траектория инфинитезимального преобразования $X(f)$ остается инвариантной относительно ∞^1 преобразований однопараметрической группы $X(f)$. То же самое касается, конечно, любого многообразия, состоящего из траекторий.*

Траектории инфинитезимального преобразования $X(f)$, однако, суть не что иное, как интегральные кривые системы

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n},$$

а отсюда опять же следует, что рассмотренные выше характеристики линейных дифференциальных уравнений в частных производных $X(f) = 0$ совпадают с траекториями инфинитезимального преобразования $X(f)$.

Ранее (гл. 3, стр. 62) мы уже подчеркивали, что инфинитезимальное преобразование $X(f)$ ставит в соответствие каждой точке $x_1 \cdots x_n$ общего положения определенное направление движения, а именно такое, которое касается проходящей через нее траектории. Очевидно, это направление движения совпадает с направлением, которое уравнение $Xf = 0$ сопоставляет данной точке.

Несколько, скажем q, инфинитезимальных преобразований

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q)$$

задают в каждой точке $x_1 \cdots x_n$ общего положения q различных направлений; в соответствии с вышесказанным мы называем последние независимыми друг от друга, если уравнения $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ независимы друг от друга.

Отсюда немедленно следует, что q инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_q f$ ставят в соответствие каждой точке общего положения ровно $h \leqslant q$ независимых направлений, если все определители порядка $h+1$, но не все определители порядка h матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdot & \cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

тождественно обращаются в нуль.

Все, что мы еще должны здесь добавить, можно выразить одним утверждением.

Утверждение 4. *Если q инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_q f$ n-мерного пространства $x_1 \cdots x_n$ таковы, что q уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ друг от друга независимы, то $X_1 f \ldots X_q f$ ставят в соответствие каждой точке $x_1 \cdots x_n$ общего положения q независимых направлений; если, кроме того, уравнения $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ образуют q-параметрическую полную систему, то $X_1 f \cdots X_q f$ задают разбиение пространства на ∞^{n-q} q-мерных многообразий — характеристических многообразий полной системы. Каждое из этих многообразий касается в каждой своей точке направлений, сопоставленных этой точке преобразованиями $X_1 f \cdots X_q f$. Каждое из них может быть порождено ∞^{q-1} траекториями инфинитезимального преобразования вида*

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_q(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q f,$$

где под $\chi_1 \cdots \chi_q$ понимаются совершенно произвольные функции своих аргументов; и наконец, каждое из указанных многообразий допускает все преобразования всякой однопараметрической группы вида

$$\chi_1 \cdot X_1 f + \cdots + \chi_q \cdot X_q f.$$

Глава 7

Описание всех систем уравнений, допускающих данные инфинитезимальные преобразования

Прежде всего, мы определим, что должно означать выражение: система уравнений

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

допускает инфинитезимальное преобразование $X(f)$. Затем мы решим крайне важную задачу — найдем все системы уравнений, допускающие заданное инфинитезимальное преобразование[1].

Но сначала отметим следующее: мы рассматриваем, разумеется, только такие системы уравнений

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0,$$

которым действительно удовлетворяют некоторые системы значений $x_1 \cdots x_n$; при этом мы *всегда* ограничиваемся такими системами значений $x_1 \cdots x_n$, в окрестности которых функции $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-m}$ ведут себя регулярно. Кроме того, мы хотим *раз и навсегда* установить: если четко не оговорено противное, то всякая рассматриваемая нами система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ должна быть такой, что не все определители порядка $n - m$ матрицы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{1}$$

обращаются в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$. Такое условие налагать разрешено, поскольку система уравнений, которая еще не обладает требуемым свойством, всегда может быть приведена к такому виду, чтобы удовлетворять поставленному требованию.

[1] Ср. Ли, Gesellsch. der Wiss. zu Christiania (Научное общество Христиании. — Прим. перев.) 1872–1874 гг., а также Math. Ann. том XI, том XXIV, стр. 542–544.

§ 30

Пусть дано инфинитезимальное преобразование

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

в переменных $x_1 \cdots x_n$. При исследованиях, имеющих к нему отношение, *мы всегда будем ограничиваться такими системами значений, для которых ξ_i ведут себя регулярно.*

Если система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ допускает все конечные преобразования

$$x_i' = x_i + e \cdot Xx_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы Xf, то система уравнений

$$\Omega_k(x_1 + e \cdot Xx_1 + \cdots, \cdots x_n + e \cdot Xx_n + \cdots) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

или, что то же самое, система

$$\Omega_k + e \cdot X\Omega_k + \cdots = 0 \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

должна быть эквивалентна системе уравнений

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$$

для всех значений e. Для этого, очевидно, *необходимо*, чтобы все $X\Omega_k$ для систем значений, удовлетворяющих $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, обращались в нуль, т. е. чтобы приращение $X\Omega_k\,\delta t$, которое получает Ω_k при инфинитезимальном преобразовании $x_i' = x_i + \xi_i\,\delta t$, обращалось в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$.

Эти рассуждения приводят нас к следующему определению:

Система уравнений

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

допускает инфинитезимальное преобразование Xf, если все $n - m$ выражений $X\Omega_k$ в силу этой системы уравнений обращаются в нуль.

Тогда на основании этого определения, очевидно, справедливо

Утверждение 1. *Если система уравнений допускает все преобразования однопараметрической группы Xf, то она должна во всяком случае допускать инфинитезимальное преобразование Xf.*

Кроме того, мы сразу видим, *что система уравнений, допускающая инфинитезимальное преобразование Xf, в то же время допускает любое инфинитезимальное преобразование вида $\chi(x_1 \cdots x_n) \cdot Xf$, разумеется, при условии, что функция χ ведет себя регулярно для рассматриваемых систем значений этой системы уравнений.*

Нетрудно понять, что данное выше определение не зависит от выбора переменных, т. е. что всякая система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, допускающая инфинитезимальное преобразование Xf в вышеуказанном смысле, по-прежнему его допускает, если ввести вместо x новые независимые переменные $y_1 \cdots y_n$. То, что это действительно так, следует непосредственно из поведения символа Xf при введении новых переменных. При этом, как всегда, предполагается, что y будут обычными степенными рядами от x, а x — обычными степенными рядами от y для всех рассматриваемых систем значений $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$.

Остается еще доказать, что записанное выше определение также не зависит от вида системы уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$. Только после того, как мы это докажем, введение этого определения будет по-настоящему оправдано.

Чтобы провести это доказательство, мы сначала приведем некоторые общие рассуждения, которые важны также и сами по себе и найдут позднее неоднократное применение.

Пусть система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование Xf. Поскольку не все определители порядка $n-m$ матрицы (1) в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ обращаются в нуль то мы можем предположить, что определитель

$$\sum \pm \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_{n-m}}$$

в нуль не обращается. Тогда можно разрешить уравнения $\Omega_k = 0$ относительно $x_1 \cdots x_{n-m}$, что естественным образом дает систему уравнений

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n), \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1} \cdots x_n),$$

аналитически эквивалентную системе $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$. Поэтому если мы обозначим подстановку $x_1 = \varphi_1, \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}$ через [ ], то получим:

$$[\Omega_1] \equiv 0, \cdots [\Omega_{n-m}] \equiv 0;$$

тогда тот факт, что система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование Xf, выразится тождествами

$$[X\Omega_1] \equiv 0, \cdots [X\Omega_{n-m}] \equiv 0.$$

Пусть теперь $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ — произвольная функция, ведущая себя для рассматриваемых систем значений $x_1 \cdots x_n$ регулярно. Тогда имеем

$$[X\Phi] = \sum_{i=1}^{n} [Xx_i] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right],$$

с другой стороны,

$$[X[\Phi]] = \sum_{k=1}^{n-m} [X\varphi_k] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right] + \sum_{\mu=1}^{m} [Xx_{n-m+\mu}] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-m+\mu}}\right],$$

то есть

$$[X\Phi] = [X[\Phi]] + \sum_{k=1}^{n-m} [X(x_k - \varphi_k)] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right]. \tag{2}$$

Если мы подставим сюда по порядку функции $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-m}$ вместо Φ, учитывая, что как $[\Omega_j]$, так и $X[\Omega_j]$, а также $[X[\Omega_j]]$ тождественно обращаются в нуль, то получим

$$[X\Omega_j] = \sum_{k=1}^{n-m} [X(x_k - \varphi_k)] \left[\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_k}\right] \qquad (j = 1 \cdots n-m).$$

Поскольку $[X\Omega_j]$ также тождественно обращается в нуль, а определитель

$$\sum \pm \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right] \cdots \left[\frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_{n-m}}\right]$$

не обращается в нуль, то отсюда следует:

$$[X(x_k - \varphi_k)] \equiv 0 \quad (k = 1 \cdots n-m),$$

т. е. уравнение (2) принимает вид

$$[X\Phi] \equiv [X[\Phi]]. \tag{3}$$

Эта формула, справедливая для любой функции $\Phi(x_1 \cdots x_n)$, нам в дальнейшем очень пригодится. Здесь она нужна нам только для специального случая, когда Φ обращается в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$; тогда $[\Phi]$, а также $[X[\Phi]]$ тождественно равны нулю. Таким образом, наша формула показывает, что $[X\Phi]$ также обращается в нуль тождественно. Словами мы этот результат можем выразить так.

Утверждение 2. *Если система уравнений*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

допускает инфинитезимальное преобразование

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

а $V(x_1 \cdots x_n)$ — это функция, обращающаяся в нуль в силу этой системы уравнений, то функция XV также обращается в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$.

Если теперь $V_1 = 0, \cdots V_{n-m} = 0$ — произвольная система уравнений, аналитически эквивалентная системе

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0,$$

то все $n - m$ выражений XV_k, согласно только что сформулированному утверждению, обращаются в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, а также в силу $V_1 = 0, \cdots V_{n-m} = 0$; другими словами, система уравнений $V_1 = 0, \cdots V_{n-m} = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование Xf.

Этим окончательно доказано, что наше данное выше определение инвариантности системы уравнений относительно инфинитезимального преобразования от вида этой системы уравнений также не зависит. Введение этого определения, следовательно, совершенно естественно.

Мы знаем, что система уравнений только тогда может допускать все преобразования однопараметрической группы Xf, когда она допускает инфинитезимальное преобразование Xf. Это необходимое условие в то же время является и достаточным, а именно: можно доказать, что всякая система уравнений, допускающая инфинитезимальное преобразование Xf, допускает вообще все преобразования однопараметрической группы Xf.

Действительно, пусть система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование Xf; кроме того, пусть $x_1 = \varphi_1, \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}$ — система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ в разрешенном виде; наконец, снова обозначим подстановку $x_\mu = \varphi_\mu$ через [ ].

При этих условиях сначала мы имеем $[\Omega_k] \equiv 0$, затем $[X\Omega_k] \equiv 0$, и из только что записанного утверждения 2 далее следует:

$$[XX\Omega_k] \equiv 0, \quad [XXX\Omega_k] \equiv 0 \cdots .$$

Следовательно, бесконечный ряд

$$\Omega_k + \frac{e}{1} X\Omega_k + \frac{e^2}{1\cdot 2} XX\Omega_k + \cdots$$

при подстановке $x_\mu = \varphi_\mu$ тождественно обращается в нуль, какое бы значение ни принимал параметр e. Таким образом, системы значений, для которых $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, удовлетворяют системе уравнений

$$\Omega_k + e \cdot X\Omega_k + \cdots = 0 \quad (k = 1 \cdots n-m)$$

при любом e, что согласно вышесказанному означает не что иное, как то, что система уравнений

$$\Omega_1 = 0, \ \cdots \ \Omega_{n-m} = 0$$

допускает все преобразования

$$x_i' = x_i + e \cdot Xx_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы Xf.

Тем самым высказанное выше утверждение доказано; следовательно, имеет место

Теорема 14. *Система уравнений*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \ \cdots \ \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

допускает все преобразования однопараметрической группы Xf тогда и только тогда, когда она допускает инфинитезимальное преобразование Xf, т. е. когда все $n-m$ выражений $X\Omega_k$ обращаются в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$.

Эта теорема доказана при условии, которое мы всегда налагаем, если явно не указано ничего другого, а именно при условии, что не все определители порядка $n-m$ матрицы (1) обращаются в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$. Кроме того, как уже было сказано, как Ω_k, так и ξ_i должны для рассматриваемых систем значений $x_1 \cdots x_n$ вести себя регулярно.

Легко видеть, что теорема 14 уже не справедлива, если налагаемое выше условие относительно определителей матрицы (1) не выполняется. Рассмотрим, например, систему уравнений

$$\Omega_1 = x_1^2 = 0, \ \cdots \ \Omega_{n-m} = x_{n-m}^2 = 0,$$

в силу которой все определители порядка $n-m$ матрицы (1) обращаются в нуль. Мы находим для нее: $Xf\Omega_k = 2x_k \cdot Xx_k$, т. е. все $Xf\Omega_k$ здесь обращаются в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, какой бы вид Xf ни принимало. Если бы согласно этому теорема 14 была по-прежнему верна, то система уравнений

$$x_1^2 = 0, \cdots x_{n-m}^2 = 0$$

должна была бы допускать любую однопараметрическую группу Xf, что, разумеется, неверно.

Отсюда мы заключаем следующее: если система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ обращает все определители порядка $n-m$ матрицы (1) в нуль, то обращение в нуль всех $Xf\Omega_k$ в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ хотя и является необходимым для того, чтобы эта система уравнений допускала однопараметрическую группу Xf, но все же будет недостаточным.

Часто общие рассуждения приводят к системам уравнений, для которых нельзя непосредственно решить, выполнено ли это много раз упомянутое требование. Как же тогда понять, допускает рассматриваемая система уравнений данную однопараметрическую группу или нет?

В подобных случаях хорошую службу часто может сослужить критерий, который мы сейчас изложим.

Пусть

$$\Delta_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Delta_s(x_1 \cdots x_n) = 0$$

— некоторая система уравнений. Мы предполагаем, что функции $\Delta_1 \cdots \Delta_s$ ведут себя внутри некоторой области B из окрестности системы значений $x_1 \cdots x_n$, удовлетворяющей этой системе уравнений, регулярно. Относительно поведения функциональных определителей системы Δ мы, напротив, ничего не предполагаем; мы даже не требуем, чтобы наши s уравнений были независимы друг от друга, то есть при известных условиях число s может быть и больше n.

Далее, пусть

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

— инфинитезимальное преобразование, и пусть среди систем значений $x_1 \cdots x_n$, для которых $\xi_1 \cdots \xi_n$ ведут себя регулярно, имеются такие, которые удовлетворяют уравнениям $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ и, кроме того, принадлежат области B.

Если теперь при этих условиях s выражений $X\Delta_\sigma$ можно представить следующим образом:

$$X\Delta_\sigma \equiv \sum_{\tau=1}^{s} \varrho_{\sigma\tau}(x_1 \cdots x_n) \cdot \Delta_\tau(x_1 \cdots x_n) \quad (\sigma = 1 \cdots s),$$

и если при этом все $\varrho_{\sigma\tau}$ ведут себя для рассматриваемых систем значений при

$$\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$$

регулярно, то наша система уравнений допускает любое преобразование

$$x_i' = x_i + \frac{e}{1} \cdot Xx_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы Xf.

Доказать это очень просто. Мы имеем:

$$\Delta_\sigma(x_1' \cdots x_n') = \Delta_\sigma(x_1 \cdots x_n) + \frac{e}{1} \cdot X\Delta_\sigma + \cdots;$$

но отсюда вытекает:

$$XX\Delta_\sigma \equiv \sum_{\tau=1}^{s} \left\{ X\varrho_{\sigma\tau} + \sum_{\pi=1}^{s} \varrho_{\sigma\pi}\varrho_{\pi\tau} \right\} \cdot \Delta_\tau,$$

где коэффициенты при Δ в правой части снова ведут себя для систем значений, удовлетворяющих уравнениям $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$, регулярно. Аналогичным образом функции $XXX\Delta_\sigma$ линейно выражаются через $\Delta_1 \cdots \Delta_s$ и так далее. Короче говоря, мы находим

$$\Delta_\sigma(x_1' \cdots x_n') = \sum_{\tau=1}^{s} \psi_{\sigma\tau}(x_1 \cdots x_n, e) \cdot \Delta_\tau(x) \qquad (\sigma = 1 \cdots s),$$

где $\psi_{\sigma\tau}$ — обычные степенные ряды от e, которые к тому же ведут себя для систем значений из $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ регулярно. Отсюда следует, что любая система значений $x_1 \cdots x_n$, удовлетворяющая уравнениям $\Delta_1(x) = 0, \cdots \Delta_s(x) = 0$, удовлетворяет также уравнениям

$$\Delta_\sigma\left(x_1 + \frac{e}{1} \cdot Xx_1 \cdots, \cdots x_n + \frac{e}{1} \cdot Xx_n + \cdots\right) = 0 \qquad (\sigma = 1 \cdots s),$$

то есть что система уравнений $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ действительно допускает однопараметрическую группу Xf.

Согласно этому мы имеем

Утверждение 3. *Если задана система уравнений*

$$\Delta_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \ \cdots \ \Delta_s(x_1 \cdots x_n) = 0$$

от переменных $x_1 \cdots x_n$, для которой неясно, являются ли ее уравнения друг от друга независимыми, и более того — обращаются ли все определители порядка s матрицы

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Delta_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Delta_s}{\partial x_n} \end{matrix}\right|$$

в нуль в силу $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$, то эта система уравнений заведомо допускает все преобразования однопараметрической группы Xf, если s выражений $X\Delta_\sigma$ могут быть представлены в виде

$$X\Delta_\sigma \equiv \sum_{\tau=1}^{s} \varrho_{\sigma\tau}(x_1 \cdots x_n) \cdot \Delta_\tau \quad (\sigma = 1 \cdots s),$$

и при этом $\varrho_{\sigma\tau}$ ведут себя регулярно для тех систем значений $x_1 \cdots x_n$, которые удовлетворяют системе уравнений $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$.

§ 31

В предыдущих параграфах мы показали, что описание всех систем уравнений, допускающих однопараметрическую группу Xf, сводится к описанию всех систем уравнений, допускающих инфинитезимальное преобразование Xf. Поэтому возникает вопрос относительно всех систем уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ $(m \leqslant n)$, допускающих инфинитезимальное преобразование

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Этот вопрос должен найти свой ответ в настоящем параграфе.

Надо различать два случая, а именно: либо не все n функций $\xi_1 \cdots \xi_n$ обращаются в нуль при условии

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0,$$

либо уравнения $\xi_1 = 0, \cdots \xi_n = 0$ являются следствием соотношений

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0.$$

Рассмотрим сначала первый случай.

Пусть, например, ξ_n не обращается в нуль при условии $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$. Тогда данная система уравнений допускает также инфинитезимальное преобразование

$$Yf = \frac{1}{\xi_n} Xf = \frac{\xi_1}{\xi_n} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Если теперь $x_1^0 \cdots x_n^0$ — система значений, удовлетворяющая уравнениям $\Omega_k = 0$ и не обращающая ξ_n в нуль, то мы полагаем, что главные решения уравнения $Xf = 0$ или, что то же самое, $Yf = 0$, заданы относительно $x_n = x_n^0$; эти главные решения, которые можно обозначить через $y_1 \cdots y_{n-1}$, ведут себя в окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$ регулярно и не зависят от x_n и друг от друга. Поэтому если мы вместо x введем новые независимые переменные $y_1 \cdots y_{n-1}, y_n = x_n$, то это будет допустимым преобразованием. При этом Yf примет вид $\dfrac{\partial f}{\partial y_n}$, а система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ перейдет в новую:

$$\overline{\Omega}_1(y_1 \cdots y_n) = 0, \cdots \overline{\Omega}_{n-m}(y_1 \cdots y_n) = 0,$$

допускающую инфинитезимальное преобразование $\dfrac{\partial f}{\partial y_n}$.

Отсюда следует, что система уравнений $\overline{\Omega}_k = 0$ не разрешима относительно y_n. Так как если бы она была разрешима относительно y_n и в результате получалось бы, например, $y_n - \psi(y_1 \cdots y_{n-1}) = 0$, то выражение

$$Y(y_n - \psi) = \frac{\partial}{\partial y_n}(y_n - \psi) = 1$$

должно было бы обращаться в нуль при условии $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, что является противоречием. Следовательно, y_n может входить в уравнения $\Omega_k = 0$ разве что формально, то есть мы можем в любом случае привести эти уравнения к такому виду, что они будут представлять собой соотношения только между $y_1 \cdots y_{n-1}$. При этом на вид этих соотношений никаких дальнейших ограничений не накладывается.

Если мы теперь вернемся к исходным переменным, то немедленно увидим, что систему уравнений $\Omega_k = 0$ можно выразить посредством соотношений между $n-1$ независимыми решениями $y_1 \cdots y_{n-1}$ уравнения $Xf = 0$. Этот результат, очевидно, не зависит от условия, что именно ξ_n не обращается в нуль в силу $\Omega_k = 0$; мы также видим, что каждая система уравнений, допускающая инфинитезимальное преобразование Xf и не обращающая $\xi_1 \cdots \xi_n$ в нуль, представляет собой соотношения между решениями

уравнения $Xf = 0$. С другой стороны, мы знаем, что совершенно произвольные соотношения между решениями уравнения $Xf = 0$ представляют собой систему уравнений, допускающую не только инфинитезимальное преобразование Xf, но и все преобразования однопараметрической группы Xf (гл. 6, утверждение 3, стр. 110). Тем самым подтверждается ранее полученный результат, что наша система уравнений $\Omega_k = 0$ допускает однопараметрическую группу Xf.

Теперь перейдем ко второму из вышеупомянутых случаев; разумеется, он может возникнуть лишь при условии, что системы значений $x_1 \cdots x_n$, для которых все n функций ξ_i обращаются в нуль, вообще существуют.

Если $x_1^0 \cdots x_n^0$ — какая-либо система значений, для которой все ξ_i обращаются в нуль, то преобразование

$$x_i' = x_i + \frac{e}{1}\xi_i + \frac{e^2}{1 \cdot 2} X\xi_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

нашей однопараметрической группы при подстановке $x_i = x_i^0$ сводится к

$$x_1' = x_1^0, \cdots x_n' = x_n^0,$$

что можно выразить так: система значений $x_1^0 \cdots x_n^0$ остается инвариантной при всех преобразованиях однопараметрической группы Xf. Это означает, что л ю б а я система уравнений вида

$$\xi_1 = 0, \cdots \xi_n = 0, \quad \psi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad \psi_2(x_1 \cdots x_n) = 0 \cdots,$$

которой вообще удовлетворяют какие-нибудь системы значений $x_1 \cdots x_n$, допускает все преобразования однопараметрической группы Xf. Но к этому виду относятся все системы уравнений, обращающие в нуль $\xi_1 \cdots \xi_n$; таким образом, мы разобрались и со вторым из ранее выделенных случаев.

Полученные результаты мы обобщим следующим образом.

Теорема 15. *Имеется два типа таких систем уравнений, которые допускают инфинитезимальное преобразование*

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

а значит, и все преобразования однопараметрической группы Xf. Системы уравнений первого типа представляются совершенно произвольными соотношениями между решениями линейного дифференциального уравнения в частных производных $Xf = 0$. Системы уравнений второго типа

имеют вид

$$\xi_1 = 0, \cdots \xi_n = 0, \quad \psi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad \psi_2(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots,$$

где ψ — совершенно произвольны, но, разумеется, при условии, что системы значений $x_1 \cdots x_n$, удовлетворяющие данным уравнениям, существуют.

Добавим к этому еще одно краткое замечание.

Пусть $C_1 \cdots C_{n-m}$ — произвольные константы, а $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-m}$ — функции от x, не зависящие от C; наконец, пусть любая система уравнений вида

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = C_1, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = C_{n-m}$$

допускает инфинитезимальное преобразование Xf, не зависящее от C. При этих условиях $n - m$ выражений $X\Omega_k$ должны обращаться в нуль в силу

$$\Omega_1 = C_1, \cdots \Omega_{n-m} = C_{n-m},$$

причем для всех значений C. Но поскольку все они независимы от C, то это возможно только тогда, когда $X\Omega_k$ обращаются в нуль тождественно, т. е. когда Ω_k являются решениями уравнения $Xf = 0$. Таким образом, верно

Утверждение 4. *Если уравнения*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = C_1, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = C_{n-m}$$

с произвольными константами $C_1 \cdots C_{n-m}$ представляют собой систему уравнений, допускающую инфинитезимальное преобразование Xf, то $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-m}$ являются решениями дифференциального уравнения $Xf = 0$, не содержащего C.

§ 32

Пусть теперь даны q произвольных инфинитезимальных преобразований

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q),$$

и мы хотим найти систему уравнений $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = 0 \cdots$, допускающую все эти инфинитезимальные преобразования. При этом мы как всегда ограничиваемся системами значений $x_1 \cdots x_n$, для которых все ξ_{ki} ведут себя регулярно.

Прежде всего, ясно, что каждая искомая система уравнений допускает также все инфинитезимальные преобразования вида

$$\sum_{k=1}^{q} \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k f$$

при условии, что $\chi_1 \cdots \chi_q$ ведут себя регулярно для систем значений $x_1 \cdots x_n$, удовлетворяющих данной системе. Более того, из предыдущего параграфа мы видим, что каждая такая система уравнений допускает также все конечные преобразования тех однопараметрических групп, которые порождаются соответствующими инфинитезимальными преобразованиями.

Вспомним далее гл. 6, утверждение 1, стр. 108. Там мы видели, что всякая функция от $x_1 \cdots x_n$, допускающая оба инфинитезимальных преобразования $X_1 f$ и $X_2 f$, допускает также преобразование $X_1 X_2 f - X_2 X_1 f$. То же самое верно для каждой системы уравнений, допускающей оба инфинитезимальных преобразования $X_1 f$ и $X_2 f$.

Действительно, пусть система уравнений

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

допускает инфинитезимальные преобразования $X_1 f$ и $X_2 f$, т. е. все выражения $X_1 \Omega_j$ и $X_2 \Omega_j$ обращаются в нуль в силу системы $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$. Тогда согласно утверждению 2, стр. 124, то же самое справедливо для всех выражений $X_1 X_2 \Omega_j$ и $X_2 X_1 \Omega_j$, следовательно, любая функция $X_1 X_2 \Omega_j - X_2 X_1 \Omega_j$ также обращается в нуль в силу системы уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$. Отсюда мы имеем следующее

Утверждение 5. *Если система уравнений*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

допускает два инфинитезимальных преобразования $X_1 f$ и $X_2 f$, то она также допускает инфинитезимальное преобразование $X_1 X_2 f - X_2 X_1 f$.

Этим утверждением мы теперь воспользуемся подобно тому, как это в свое время было сделано в утверждении 1, стр. 93, где речь шла о нахождении общих решений для q заданных уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$. Там мы сводили поставленную задачу к нахождению решений некоторой полной системы. Теперь мы будем действовать следующим образом.

Образуем все инфинитезимальные преобразования

$$X_k X_j f - X_j X_k f = (X_k X_j)$$

и выясним, являются ли линейные дифференциальные уравнения в частных производных $(X_kX_j) = 0$ следствием уравнений $X_1f = 0, \cdots X_qf = 0$. Если нет, то добавим к инфинитезимальным преобразованиям $X_1f \cdots X_qf$ все преобразования (X_kX_j)[2], что разрешено, поскольку каждая система, допускающая $X_1f \cdots X_qf$, допускает также (X_kX_j). С инфинитезимальными преобразованиями

$$X_1f \cdots X_qf, (X_kX_j) \quad (k, j = 1 \cdots q),$$

взятыми вместе, мы теперь поступим так же, как ранее с $X_1f \cdots X_qf$, т. е. образуем все инфинитезимальные преобразования

$$\big((X_kX_j)X_l\big), \quad \big((X_kX_j)(X_hX_l)\big)$$

и выясним, получаются ли в результате приравнивания этих выражений к нулю уравнения, являющиеся следствием уравнений $X_kf = 0, (X_kX_j) = 0 \quad (k, j = 1 \cdots q)$. Если нет, то мы добавим все найденные инфинитезимальные преобразования к $X_kf, (X_kX_j)\,(k, j = 1 \cdots q)$.

Продолжая подобным образом, мы должны в конце концов получить ряд инфинитезимальных преобразований:

$$X_1f \cdots X_qf, X_{q+1}f \cdots X_{q'}f \quad (q' \geqslant q),$$

таких, что любое уравнение

$$(X_kX_j) = 0 \quad (k, j = 1 \cdots q')$$

является следствием $X_1f = 0, \cdots X_{q'}f = 0$. Тогда уравнения

$$X_1f = 0, \cdots X_{q'}f = 0$$

задают полную систему с q' или менее параметрами. Таким образом, имеет место

Теорема 16. *Задачу описания всех систем уравнений, допускающих q заданных инфинитезимальных преобразований $X_1f \cdots X_qf$, всегда можно свести к нахождению всех систем уравнений, допускающих, помимо $X_1f \cdots X_qf$ еще некоторые другие инфинитезимальные преобразования:*

$$X_{q+1}f \cdots X_{q'}f \quad (q' \geqslant q),$$

[2]На практике добавляются, вообще говоря, не все инфинитезимальные преобразования, а только некоторые из них.

при этом уравнения

$$X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0, \quad X_{q+1} f = 0, \cdots X_{q'} f = 0$$

задают теперь полную систему, имеющую столько же параметров, сколько среди этих уравнений имеется независимых.

Согласно этому мы можем отныне ограничиться следующей, более специальной задачей.

Заданы q инфинитезимальных преобразований от переменных $x_1 \cdots x_n$:

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q),$$

такие, что из q уравнений

$$X_1 f = 0 \cdots X_q f = 0$$

имеется в точности $p \leqslant q$ друг от друга независимых, и при этом некоторые p независимых из этих q уравнений образуют p-параметрическую полную систему, которой принадлежат все уравнения $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$. Требуется найти все системы уравнений от $x_1 \cdots x_n$, допускающие инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f$.

Ясно, что мы можем без ограничения общности полагать, что $X_1 f \cdots X_q f$ как *инфинитезимальные преобразования* друг от друга не зависят. Далее заметим, что по условиям задачи *все* определители порядка $p+1$ матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdots & \xi_{qn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

обращаются в нуль *тождественно*, а порядка p — не все.

Первым шагом к решению нашей задачи послужит разделение систем уравнений, допускающих q инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_q f$ на два отдельных класса; за основу такого разделения примем поведение определителей порядка p матрицы (4).

К первому классу отнесем все системы уравнений, в силу которых обращаются в нуль не все определители порядка p матрицы (4).

Ко второму классу причислим все системы уравнений, в силу которых все упомянутые определители порядка p обращаются в нуль.

Исследуем оба эти класса по порядку.

§ 33

Среди q уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ выберем некоторые p, независимые друг от друга; пусть это будут $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$, так что не все определители порядка p матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{p1} & \cdots & \xi_{pn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

обращаются в нуль тождественно. Найдем те из систем уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ первого вида, при выполнении которых не нарушается независимость уравнений $X_1 f = 0 \cdots X_p f = 0$, т. е. не все определители порядка p матрицы (5) обращаются в нуль. При этом мы хотим сначала наложить специальное условие, что некий заданный определитель порядка p матрицы (5), а именно

$$D = \begin{vmatrix} \xi_{1,n-p+1} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{p,n-p+1} & \cdots & \xi_{pn} \end{vmatrix},$$

не обращается в нуль ни тождественно, ни в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$.

При наложенных условиях имеют место тождества вида

$$X_{p+j} f \equiv \sum_{\pi=1}^{p} \chi_{j\pi}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_\pi f \quad (j = 1 \cdots q-p).$$

Для определения функций $\chi_{j\pi}$ мы тогда имеем уравнения

$$\sum_{\pi=1}^{p} \xi_{\pi\nu} \cdot \chi_{j\pi} = \xi_{p+j,\nu} \quad (\nu = 1 \cdots n, \quad j = 1 \cdots q-p);$$

а поскольку определитель D не обращается в нуль при условии $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, то мы видим, что функции $\chi_{j\pi}$ ведут себя для систем значений, удовлетворяющих $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, регулярно, так что мы можем при наложенных условиях отбросить инфинитезимальные преобразования $X_{p+1} f \cdots X_q f$, так как если система уравнений допускает преобразование $X_1 f \cdots X_p f$, то она немедленно допускает и $X_{p+1} f \cdots X_q f$.

Инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_p f$ мы теперь заменим на другие p преобразований специального вида:

$$Y_\pi f = \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+\pi}} + \sum_{i=1}^{n-p} \eta_{\pi i}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\pi = 1 \cdots p).$$

Мы вправе это сделать, т. к. для нахождения $Y_1 f \cdots Y_p f$ получаем уравнения

$$\sum_{\pi=1}^{p} \xi_{j,n-p+\pi} \cdot Y_\pi f = X_j f \quad (j = 1 \cdots p),$$

являющиеся разрешимыми и дающие для $Y_\pi f$ выражения вида

$$Y_\pi f = \sum_{j=1}^{p} \varrho_{\pi j}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j f \quad (\pi = 1 \cdots p),$$

коэффициенты которых $\varrho_{\pi j}$ ведут себя для систем значений, удовлетворяющих

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0,$$

регулярно. Поэтому если система уравнений $\Omega_k = 0$ допускает инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_p f$, то она также допускает $Y_1 f \cdots Y_p f$, и наоборот.

Пусть $x_1^0 \cdots x_n^0$ — какая-либо система значений, удовлетворяющая уравнениям $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m}$ и не обращающая определитель D в нуль. В таком случае $\eta_{\pi i}$ ведут себя в окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$ регулярно. Тогда уравнения $Y_1 f = 0, \cdots Y_p f = 0$, также как и уравнения $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$, образуют p-параметрическую полную систему и имеют согласно теореме 12, стр. 101, $n - p$ главных решений $y_1 \cdots y_{n-p}$, ведущих себя в окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$ регулярно и сводящихся при $x_{n-p+1} = x_{n-p+1}^0, \cdots x_n = x_n^0$ к $x_1 \cdots x_{n-p}$ соответственно.

Поэтому если положить еще $y_{n-p+1} = x_{n-p+1}, \cdots y_n = x_n$, то можно ввести $y_1 \cdots y_n$ в качестве новых переменных вместо x. При этом инфинитезимальные преобразования $Y_n f$ принимают вид

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_{n-p+1}}, \cdots Y_p f = \frac{\partial f}{\partial y_n};$$

а система уравнений $\Omega_k = 0$ переходит в

$$\overline{\Omega}_1(y_1 \cdots y_n) = 0, \cdots \overline{\Omega}_{n-m}(y_1 \cdots y_n) = 0,$$

и эта новая система уравнений должна допускать инфинитезимальные преобразования $\frac{\partial f}{\partial y_{n-p+1}}, \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n}$. Отсюда следует, что уравнения $\overline{\Omega}_k = 0$ нельзя разрешить относительно ни одной из переменных $y_{n-p+1} \cdots y_n$, т. е. что они содержат эти переменные разве что формально и могут быть всегда

преобразованы так, что будут представлять собой соотношения лишь между $y_1 \cdots y_{n-p}$.

Если мы теперь вернемся к исходным переменным $x_1 \cdots x_n$, то увидим, что уравнения $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ являются не чем иным, как соотношениями между решениями полной системы $Y_1 f = 0, \cdots Y_p f = 0$ или, что то же самое, полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$. Этот результат, кроме того, не зависит от условия, чтобы именно определитель D не обращался в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$. Он имеет место всегда, когда не все определители порядка p матрицы (5) обращаются в нуль в силу $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$.

Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 17. *Если q инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_q f$ от переменных $x_1 \cdots x_n$, положенных равными нулю, дают в точности $p \leqslant q$ независимых уравнений, например $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$, и если эти последние образуют p-параметрическую полную систему, то всякая система уравнений*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \ \cdots \ \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0,$$

допускающая q инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_q f$, но не нарушающая независимости уравнений

$$X_1 f = 0, \ \cdots \ X_p f = 0,$$

представляется соотношениями между решениями p-параметрической полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$.

При помощи этой теоремы описание всех систем уравнений, принадлежащих нашему первому классу, выполнено. Вместо $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$ нам теперь надо лишь последовательно подставить все подсистемы из p независимых уравнений, входящих в систему $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$.

§ 34

Перейдем теперь ко второму классу систем уравнений, допускающих инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f$, а именно к таким системам уравнений, которые обращают все определители порядка p матрицы (4) в нуль.

Здесь необходимо различить сразу несколько подслучаев. А именно: система уравнений

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0,$$

помимо определителей порядка p матрицы (4), может также обращать в нуль все определители порядка $p-1$ и даже $p-2$ и т. д.

Таким образом, мы видим, что каждой из искомых систем уравнений соответствует определенное целое число $h < p$, такое, что данная система обращает в нуль все определители порядка $p, p-1, \cdots, h+1$ матрицы (4), но не все порядка h. Поэтому нам надо поочередно перебрать возможные различные значения h, т. е. $1, 2 \cdots p-1$, и выписать для каждого из этих значений соответствующие системы уравнений, допускающие $X_1 f \cdots X_q f$.

Пусть h — одно из чисел $1, 2 \cdots p-1$. Система уравнений, обращающая все определители порядка $h+1$, но не все определители порядка h матрицы (4) в нуль, непременно содержит все уравнения, получающиеся в результате приравнивания нулю всех определителей $\Delta_1 \cdots \Delta_s$ порядка $h+1$ матрицы (4). Если же такие системы значений $x_1 \cdots x_n$, для которых $\xi_{ki}(x)$ ведут себя регулярно, вовсе не удовлетворяют уравнениям $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$, или если уравнения $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ обращают в нуль также все определители порядка h матрицы (4), то это было бы знаком того, что для выбранного числа h не существует никакой системы уравнений с требуемым свойством. Поэтому мы полагаем, что ни один из этих двух случаев не имеет места.

Сначала выясним, приводима ли система уравнений $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$. Если да, то надо рассматривать каждую неприводимую систему уравнений, получающуюся из $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ и не обращающую все определители порядка h матрицы (4) в нуль, в отдельности.

Пусть $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ — одна из найденных неприводимых систем уравнений, и пусть она уже приведена к такому виду, что не все определители порядка l матрицы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial W_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial W_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{\partial W_l}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial W_l}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

в силу $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ обращаются в нуль. Тогда мы должны попытаться найти все системы уравнений, допускающие $X_1 f \cdots X_q f$, содержащие уравнения $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ и при этом не обращающие все определители порядка h матрицы (4) в нуль. Если проделать это для каждой неприводимой системы уравнений, полученной из $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$, то мы найдем все системы, допускающие $X_1 f \cdots X_q f$ и соответствующие числу h.

Вообще говоря, система уравнений $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ сама по себе не будет допускать инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f$. Поэто-

му к системе уравнений, содержащей $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ и допускающей, кроме того, $X_1 f \cdots X_q f$, непременно относятся также все уравнения

$$X_k W_\lambda = 0, \quad X_j X_k W_\lambda = 0 \quad (k, j = 1 \cdots q, \quad \lambda = 1 \cdots l)$$

и так далее. Составим эти уравнения и посмотрим, 1) противоречат ли они друг другу или уравнению $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$, и 2) не приводят ли они к обращению всех определителей порядка h матрицы (4) в нуль. Если один из этих двух случаев имеет место, то систем с таким свойством не существует, а если ни один из них не имеет места, то независимые уравнения из системы

$$W_\lambda = 0, \quad X_k W_\lambda = 0, \quad X_j X_k W_\lambda = 0, \cdots (\lambda = 1 \cdots l; \quad j, k = 1 \cdots q)$$

являются системой уравнений, допускающей $X_1 f \cdots X_q f$. В эту систему уравнений, которая, естественно, может быть приводимой, входят все системы уравнений, допускающие $X_1 f \cdots X_q f$ и содержащие уравнения $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$, но при этом она не содержит никакой меньшей системы, обладающей теми же свойствами.

Эти системы уравнений очевидно являются *наименьшими* из тех, что допускают $X_1 f \cdots X_q f$ и при этом обращают в нуль все определители матрицы (4) порядка $h + 1$, но не все порядка h.

Пусть теперь

$$W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0 \quad (n - m \geqslant l) \tag{6}$$

— это одна из найденных неприводимых систем уравнений; тогда речь пойдет еще и о том, чтобы добавить к ней самым общим образом такие новые уравнения, чтобы получить систему, допускающую $X_1 f \cdots X_q f$, но не обращающую все определители порядка h матрицы (4) в нуль.

Поскольку не все определители порядка h матрицы (4) в силу

$$W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0 \tag{6}$$

обращаются в нуль, то мы можем предположить, что, например, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{1,n-h+1} & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{h,n-h+1} & \cdot & \xi_{hn} \end{vmatrix}$$

относится к необращающимся в нуль, и можем поставить себе задачу найти все системы уравнений, допускающие $X_1 f \cdots X_q f$ и при этом не обращающие Δ в нуль. Если мы проделаем это для каждого отдельного определителя порядка h матрицы (4), не обращающегося в нуль уже в силу (6),

то получим, очевидно, все искомые системы уравнений, содержащие $W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0$.

Независимость уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_h f = 0$ не нарушается при наложенных условиях относительно $W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0$, зато для систем значений из (6) имеют место некоторые соотношения вида

$$X_{h+j} f = \sum_{k=1}^{h} \psi_{jk}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k f \quad (j = 1 \cdots q - h),$$

где ψ_{jk} находятся из уравнений

$$\xi_{h+j,\nu} = \sum_{k=1}^{h} \psi_{jk} \xi_{k\nu} \quad (j = 1 \cdots q - h;\ \nu = 1 \cdots n).$$

Поскольку все определители порядка $h+1$ матрицы (4) обращаются в нуль в силу (6), тогда как Δ — нет, то функции ψ_{jk} полностью определены и ведут себя регулярно для всех систем значений из (6). Поэтому мы можем без ограничения общности опустить инфинитезимальные преобразования $X_{h+1} f \cdots X_q f$. Дело в том, что каждая система уравнений, содержащая уравнения (6), не обращающая при этом определитель Δ в нуль и, наконец, допускающая $X_1 f \cdots X_h f$, обязательно допускает также $X_{h+1} f \cdots X_q f$.

Легко видеть, что из уравнений (6) нельзя вывести никаких соотношений только между $x_{n-h+1} \cdots x_n$. Если бы можно было это сделать, например

$$x_n - \omega(x_{n-h+1} \cdots x_{n-1}) = 0,$$

то выражения

$$X_k(x_n - \omega) = \xi_{kn} - \sum_{j=1}^{h-1} \frac{\partial \omega}{\partial x_{n-h+j}} \cdot \xi_{k,n-h+j} \quad (k = 1 \cdots h)$$

должны были бы обратиться в нуль в силу (6); но это невозможно, т. к. Δ в силу (6) в нуль не обращается. Отсюда мы делаем вывод, что число $n - m$ во всяком случае не больше, чем $n - h$, и что уравнения (6) можно разрешить относительно $n - m$ переменных из $x_1 \cdots x_{n-h}$, например, относительно $x_1 \cdots x_{n-m}$:

$$x_k = \varphi_k(x_{n-m+1} \cdots x_n) \quad (k = 1 \cdots n - m) \quad (n - m \leqslant n - h). \tag{7}$$

Этими уравнениями мы, таким образом, можем заменить систему (6).

Очевидно, что всякая система уравнений, содержащая уравнения (6) или (7), может быть приведена к такому виду, что будет содержать, помимо уравнений (7), только некоторые соотношения

$$V_j(x_{n-m+1} \cdots x_n) = 0 \quad (j = 1, 2 \cdots)$$

лишь между $x_{n-m+1} \cdots x_n$. Если такая система допускает инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_h f$, то все выражения $X_k V_j$ должны обращаться в нуль в силу (7) и $V_1 = 0, \cdots$; или, если мы вновь обозначим подстановку $x_1 = \varphi_1, \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}$ знаком [ ], выражения

$$[X_k V_j] = \sum_{\mu=1}^{m} [\xi_{k,n-m+\mu}] \frac{\partial V_j}{\partial x_{n-m+\mu}}$$

должны обращаться в нуль в силу $V_1 = 0, \cdots$. Это можно, однако, выразить еще и так: система уравнений $V_1 = 0, \cdots$ в переменных $x_{n-m+1} \cdots x_n$ должна допускать h укороченных инфинитезимальных преобразований

$$\overline{X}_k f = \sum_{\mu=1}^{m} [\xi_{k,n-m+\mu}] \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \quad (k = 1 \cdots h)$$

в этих переменных. Кроме того, система уравнений $V_1 = 0, \cdots$ не должна, разумеется, обращать в нуль определитель $[\Delta]$.

Напротив, всякая система уравнений $V_1 = 0, \cdots$, обладающая оговоренными свойствами, вместе с (7) дает систему уравнений, не обращающую Δ в нуль и, кроме того, допускающую $X_1 f \cdots X_h f$, а также $X_{h+1} f \cdots X_q f$.

Тем самым наша исходная задача сводится к более простой — нахождению всех систем уравнений от $m < n$ переменных, допускающих $h \leqslant m$ инфинитезимальных преобразований $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_h f$ и не обращающих при этом определитель

$$\sum \pm [\xi_{1,n-h+1}] \cdots [\xi_{h,n-h+h}]$$

в нуль.

Обобщим все вышесказанное.

Теорема 18. *Если q инфинитезимальных преобразований*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q)$$

таковы, что все определители порядка $p+1$, но не все определители порядка p матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdots & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль тождественно, и что некоторые p независимых уравнений из $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ образуют p-параметрическую полную систему, то все системы уравнений от $x_1 \cdots x_n$, допускающие $X_1 f \cdots X_q f$ и обращающие при этом все определители порядка $h+1$, но не все порядка h вышеуказанной матрицы в нуль, можно найти следующим образом: сначала с помощью составления определителей находятся наименьшие системы уравнений, для которых все определители порядка $h+1$, но не все определители порядка h данной матрицы обращаются в нуль. Если такие системы существуют, и $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ — одна из них, то надо составить уравнения $X_k W_i = 0, \cdots X_j X_k W_i = 0$ и найти, таким образом, наименьшие системы уравнений (если таковые имеются), содержащие $W_1 = 0, \cdots W_i = 0$, допускающие $X_1 f \cdots X_q f$ и не обращающие в нуль все определители порядка h этой матрицы; если $W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0 \quad (n - m \geqslant l)$ — такая система уравнений, которая не обращает в нуль определитель

$$\Delta = \sum \pm \xi_{1,n-h+1} \cdots \xi_{h,n-h+h},$$

то $h \leqslant m$, и уравнения $W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0$ могут быть разрешены относительно $n-m$ переменных из $x_1 \cdots x_{n-h}$, например, следующим образом:

$$x_k = \varphi_k(x_{n-m+1} \cdots x_n) \quad (k = 1 \cdots n-m).$$

Наконец, найдем все системы уравнений от m переменных $x_{n-m+1} \cdots x_n$, допускающие h укороченных инфинитезимальных преобразований

$$\begin{aligned} \overline{X}_k f &= \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{k,n-m+\mu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-m}, x_{n-m+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} [\xi_{k,n-m+\mu}] \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \quad (k = 1 \cdots h) \end{aligned}$$

и не обращающие в нуль определитель

$$[\Delta] = \sum \pm [\xi_{1,n-h+1}] \cdots [\xi_{h,n-h+h}].$$

Каждая из этих систем представляет при добавлении $x_1 = \varphi_1 \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}$ *систему уравнений с требуемым свойством. Если указанные выше рассуждения провести для всех возможных случаев, то мы получим все системы уравнений с требуемым свойством.*

Часто бывает, что система уравнений $U_1 = 0, U_2 = 0 \cdots U_{n-s} = 0$, допускающая инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f$ и обращающая все определители порядка $h+1$, но не обращающая, например, определитель Δ из определителей порядка h матрицы (4) в нуль, уже известна. Тогда можно поставить вопрос об описании всех систем, содержащих уравнения $U_1 = 0 \cdots U_{n-s} = 0$, допускающих $X_1 f \cdots X_q f$, а также не обращающих Δ в нуль.

Нахождение всех этих систем уравнений проводится так же, как в специальном случае выше, где наименьшая система с заданным свойством $W_1 = 0 \cdots W_{n-m} = 0$ была известна, и требовалось найти все системы уравнений, допускающие $X_1 f \cdots X_q f$, содержащие систему $W_1 = 0 \cdots W_{n-m} = 0$ и не обращающие Δ в нуль.

Точно так же, как выше, сначала доказывается, что $h \leqslant s$, и что уравнения $U_1 = 0, \cdots U_{n-s} = 0$ разрешимы относительно $n-s$ переменных из $x_1 \cdots x_{n-h}$, например, так:

$$x_k = \psi_k(x_{n-s+1} \cdots x_n) \quad (k = 1 \cdots n-s).$$

Чтобы теперь найти искомые системы уравнений, возьмем h укороченных инфинитезимальных преобразований

$$\widehat{X}_k f = \sum_{\sigma=1}^{s} \xi_{k,n-s+\sigma}(\psi_1 \cdots \psi_{n-s}, x_{n-s+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-s+\sigma}}$$
$$= \sum_{\sigma=1}^{s} \widehat{\xi}_{k,n-s+\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_{n-s+\sigma}} \quad (k = 1 \cdots h)$$

и найдем все системы уравнений с s переменными $x_{n-s+1} \cdots x_n$, допускающие $\widehat{X}_1 f \cdots \widehat{X}_h f$ и не обращающие в нуль определитель

$$\widehat{\Delta} = \sum \pm \widehat{\xi}_{1,n-h+1} \cdots \widehat{\xi}_{h,n-h+h}.$$

Если их последовательно добавить к уравнениям $x_1 - \psi_1 = 0, \cdots x_{n-s} - \psi_{n-s} = 0$, то мы получим все системы уравнений с требуемым свойством.

В более подробном обосновании сказанного нет необходимости.

§ 35

Поставленная в начале § 32 задача теперь, по сути дела, решена. Она сводится согласно последней теореме к тому, чтобы найти все системы уравнений от m переменных $x_{n-m+1} \cdots x_n$, допускающие h инфинитезимальных преобразований $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_h f$. Но эта задача того же рода, что и первоначальная, только упрощенная за счет того, что число переменных m меньше n.

К этой упрощенной задаче применим теперь те же самые рассуждения. А именно: если уравнения $\overline{X}_f = 0, \cdots \overline{X}_h f$ сами по себе не образуют h-параметрической полной системы, то необходимо составить для $k, j = 1 \cdots h$ инфинитезимальные преобразования $(\overline{X}_k \overline{X}_j)$ и выяснить, образуют ли независимые из уравнений $\overline{X}_k f = 0$, $(\overline{X}_k \overline{X}_j) = 0$ полную систему и т. д., короче говоря, точно так же, как в исходной задаче. Разница лишь в том, что мы с самого начала ищем только такие системы уравнений, которые не нарушают независимости уравнений

$$\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0,$$

и, в частности, не обращают определитель $[\Delta]$ в нуль.

Точно так же, как и в первом случае, упрощенную задачу можно частично решить, а частично — свести к подобной задаче с еще меньшим числом переменных и т. д. Итак, мы видим, что полное решение исходной задачи достигается путем конечного числа шагов.

Мы не будем вдаваться в детали, но все же рассмотрим поближе один особенно важный частный случай.

Пусть система уравнений

$$x_1 - \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n) = 0, \ \cdots \ x_{n-m} - \varphi_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0, \qquad (7')$$

как и прежде, такова, что допускает инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f$ и все определители порядка $h+1$ матрицы (4) обращает в нуль, в то время как определитель Δ нулю не равен. Однако под системой уравнений (7′) мы будем понимать *не наименьшую*, а *совершенно произвольную* систему с упомянутым свойством.

Некоторые p независимых друг от друга уравнений из $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$, к примеру $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$, образовывали p-параметрическую полную систему; во всяком случае имели место соотношения вида

$$(X_k X_j) = \sum_{\sigma=1}^{q} \omega_{kj\sigma}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_\sigma f \quad (k, j = 1 \cdots q).$$

Для систем значений, удовлетворяющих (7′), лишь h уравнений

$$X_1 f = 0, \cdots X_h f = 0$$

остаются друг от друга независимыми, а $X_{h+1} f \cdots X_q f$ могут быть представлены в виде

$$X_{h+j} f = \sum_{\tau=1}^{h} \psi_{j\tau}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_\tau f \quad (j = 1 \cdots q-h),$$

где ψ_{jk} ведут себя для рассматриваемых систем значений регулярно.

Мы хотим теперь наложить особое условие, что все коэффициенты ω_{kjs} также ведут себя регулярно для всех систем значений, удовлетворяющих (7). Тогда для упомянутых систем значений, очевидно, будут иметь место уравнения вида

$$(X_k X_j) = \sum_{\sigma=1}^{h} \{\omega_{kj\sigma} + \sum_{\tau=1}^{q-h} \omega_{kjh+\tau} \cdot \psi_{\tau\sigma}\} \cdot X_\sigma f.$$

В этом частном случае можно задать сразу все системы уравнений, содержащие уравнения (7′), допускающие $X_1 f \cdots X_q f$ и не обращающие Δ в нуль. Мы сейчас это покажем.

Для всех систем значений $x_1 \cdots x_n$, удовлетворяющих уравнениям (7′), имеют место соотношения вида

$$(X_k X_j) = \sum_{\sigma=1}^{h} w_{kj\sigma}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_\sigma f \quad (k, j = 1 \cdots h).$$

При этом функции $w_{kj\sigma}$, а также $[w_{kjs}]$ ведут себя регулярно, если использовать знак [ ], как и прежде, для подстановки

$$x_1 = \varphi_1, \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}.$$

Запишем данные выше соотношения следующим образом:

$$X_k \xi_{j\nu} - X_j \xi_{k\nu} = \sum_{s=1}^{h} w_{kjs}(x_1 \cdots x_n) \cdot \xi_{s\nu} \quad (k, j = 1 \cdots h; \quad \nu = 1 \cdots n).$$

Разумеется, при подстановке [ ] они остаются тождествами, так что мы имеем

$$[X_k \xi_{j\nu}] - [X_j \xi_{k\nu}] \equiv \sum_{s=1}^{h} [w_{kjs}] \cdot [\xi_{s\nu}]. \tag{8}$$

Однако система уравнений $x_k - \varphi_k = 0$ допускает инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_h f$, то есть выполняется соотношение (3), выведанное на стр. 123:

$$[X_k \Phi] \equiv \big[X_k[\Phi]\big],$$

в котором $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ означает совершенно произвольную функцию своих аргументов. Это соотношение мы можем также записать несколько иначе, если вспомним об инфинитезимальных преобразованиях

$$\overline{X}_k f = \sum_{\mu=1}^{m} [\xi_{k,n-m+\mu}] \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \quad (k = 1 \cdots h).$$

Очевидно, что

$$\big[X_k[\Phi]\big] \equiv \overline{X}_k[\Phi],$$

следовательно, мы имеем

$$[X_k \Phi] \equiv \overline{X}_k[\Phi].$$

Отсюда следует, что тождества (8) могут быть заменены следующими:

$$\overline{X}_k[\xi_{j\nu}] - \overline{X}_j[\xi_{k\nu}] \equiv \sum_{s=1}^{h} [w_{kjs}] \cdot [\xi_{s\nu}].$$

Другими словами, имеют место тождества вида

$$(\overline{X}_k \overline{X}_j) = \overline{X}_k \overline{X}_j f - \overline{X}_j \overline{X}_k f \equiv \sum_{s=1}^{h} [w_{jks}] \cdot \overline{X}_s f,$$

то есть уравнения $\overline{X}_1 = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$ образуют h-параметрическую полную систему от m независимых переменных $x_{n-m+1} \cdots x_n$.

Вспомним теперь замечания, сделанные нами в заключение теоремы 18. Они показывают, что наша поставленная выше задача сводится к тому, чтобы найти все системы уравнений от $x_{n-m+1} \cdots x_n$, допускающие $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_h f$ и не нарушающие независимости уравнений $\overline{X}_1 = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$. Поскольку в нашем случае уравнения $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$ образуют h-параметрическую полную систему, то мы можем непосредственно применить теорему 17. Из нее видно, что искомые системы уравнений от $x_{n-m+1} \cdots x_n$ представляются соотношениями между решениями полной системы $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$.

Поэтому если добавить к уравнениям $x_k = \varphi_k$ произвольные соотношения между решениями этой h-параметрической полной системы, то мы получим общий вид системы уравнений, допускающей инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f$, содержащей уравнения $x_k = \varphi_k$ и не обращающей Δ в нуль.

Формулировка полученного здесь результата в его полной общности в виде утверждения видится излишней. Напротив, следующая теорема, соответствующая особому случаю $q = p = h$, четко сформулированная, будет далее полезна.

Теорема 19. *Если система из $n - m$ независимых уравнений в переменных $x_1 \cdots x_n$ допускает h инфинитезимальных преобразований*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots h),$$

и при этом определитель

$$\Delta = \sum \pm \xi_{1,n-h+1} \cdots \xi_{h,n-h+h}$$

не обращается в нуль ни тождественно, ни в силу этой системы уравнений, то $h \leqslant m$, и данную систему можно разрешить относительно $n - m$ переменных из $x_1 \cdots x_{n-h}$, например, следующим образом:

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n), \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1} \cdots x_n).$$

Если же все выражения $(X_k X_j)$ для систем значений $x_1 \cdots x_n$ этой системы уравнений можно представить в виде

$$(X_k X_j) = \sum_{s=1}^{h} w_{kjs}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_s f \quad (k, j = 1 \cdots h),$$

где w_{kjs} ведут себя для упомянутых систем значений регулярно, то все системы уравнений, содержащие уравнения

$$x_1 - \varphi_1 = 0, \cdots x_{n-m} - \varphi_{n-m} = 0,$$

допускающие инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_h f$ и не обращающие определитель Δ в нуль, находятся следующим образом: составим h укороченных инфинитезимальных преобразований:

$$\overline{X}_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{k,n-m+\mu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-m}, x_{n-m+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \quad (k = 1 \cdots h);$$

тогда h независимых друг от друга уравнений $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$ образуют h-параметрическую полную систему от независимых переменных $x_{n-m+1} \cdots x_n$. Если

$$u_1(x_{n-m+1} \cdots x_n) \cdots u_{m-h}(x_{n-m+1} \cdots x_n)$$

— независимые решения этой полной системы, то

$$x_1 - \varphi_1 = 0, \cdots x_{n-m} - \varphi_{n-m} = 0, \quad \Phi_i(u_1 \cdots u_{n-m}) = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots)$$

— общий вид требуемой системы уравнений; под Φ_i понимаются при этом произвольные функции своих аргументов.

§ 36

Аналитические разработки настоящей главы также приобретают некоторую наглядность и бóльшую «прозрачность», если применить к ним идеи и понятия из теории многообразий. Это мы и хотим теперь сделать. Последующее соотносится с §§ 30–35 в той же мере, что и глава 6 с главой 5.

Всякая система уравнений в переменных $x_1 \cdots x_n$ представляет собой многообразие в n-мерном пространстве R_n. Если эта система допускает однопараметрическую группу Xf, то и соответствующее многообразие согласно ранее введенной терминологии тоже ее допускает; то есть если точка $x_1 \cdots x_n$ принадлежит этому многообразию, то в нем лежат также все точки, в которые переходит $x_1 \cdots x_n$ при всех преобразованиях однопараметрической группы Xf.

Если теперь $x_1^0 \cdots x_n^0$ — какая-либо точка этого пространства, то возможны два случая: либо $\xi_1 \cdots \xi_n$ не обращаются одновременно в нуль для $x_i = x_i^0$, либо все величины $\xi_1(x^0) \cdots \xi_n(x^0)$ равны нулю. В первом случае точка $x_1^0 \cdots x_n^0$ принимает при ∞^1 преобразованиях однопараметрической группы Xf бесконечно много положений, совокупность которых, как мы знаем, остается инвариантной относительно однопараметрической группы Xf и образует траекторию инфинитезимального преобразования Xf. Во втором случае $x_1^0 \cdots x_n^0$ сохраняет свое положение при всех преобразованиях однопараметрической группы Xf; таким образом, траектория, проходящая через $x_1^0 \cdots x_n^0$, сводится к самой этой точке.

Поэтому если многообразие допускает однопараметрическую группу Xf и состоит, вообще говоря, из таких точек, для которых не все $\xi_1 \cdots \xi_n$ одновременно обращаются в нуль, то оно порождено траекториями инфинитезимального преобразования Xf. Если же данное многообразие состоит из точек, для которых все $\xi_1 \cdots \xi_n$ обращаются в нуль, то каждая точка

этого многообразия сохраняет при всех преобразованиях однопараметрической группы Xf свое положение. Очевидно тогда, что и каждое меньшее многообразие, входящее в данное, также допускает однопараметрическую группу Xf.

Тем самым содержание теоремы 15 на понятийном уровне разъяснено, и, по сути дела, можно рассматривать предыдущие рассуждения просто как новое доказательство теоремы 15.

Еще мы должны объяснить, что понятийно означает тот факт, что система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование Xf.

Для этого напомним, что инфинитезимальное преобразование Xf ставит в соответствие каждой точке $x_1 \cdots x_n$, в которой не все ξ обращаются в нуль, совершенно определенное направление движения:

$$\delta x_1 : \cdots : \delta x_n = \xi_1 : \cdots : \xi_n,$$

в то время как точке, для которой $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$, никакого направления не сопоставляется. Поэтому мы можем сказать:

Система уравнений $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование Xf, если последнее каждой точке многообразия $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ либо не сопоставляет никакого направления движения, либо сопоставляет такое направление движения $\delta x_1 : \cdots : \delta x_n$, которое удовлетворяет $n - m$ уравнениям

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots + \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_n}\delta x_n = 0 \quad (k = 1 \cdots n - m),$$

то есть касается этого многообразия.

Это определение, очевидно, не зависит ни от выбора переменных, ни от вида системы уравнений

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0.$$

Теореме 14 можно теперь придать следующую наглядную формулировку:

Если инфинитезимальное преобразование Xf каждой точке многообразия либо не сопоставляет никакого направления движения, либо сопоставляет такое, которое касается этого многообразия, то многообразие допускает все преобразования однопараметрической группы Xf.

Наконец, если мы введем выражение: «*многообразие* $\Omega_1 = 0, \ldots \Omega_{n-m} = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование Xf», то теорему 14 можно сформулировать еще и так.

Многообразие допускает все преобразования однопараметрической группы Xf тогда и только тогда, когда оно допускает инфинитезимальное преобразование Xf.

В §§ 32 и 34 мы классифицировали все системы уравнений, допускающие инфинитезимальное преобразование Xf. При этом мы исходили из поведения определителей матрицы (4)

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdot & \cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}.$$

Мы предполагали, что все определители порядка $p+1$ этой матрицы обращаются в нуль тождественно, а определители порядка p — нет. К одному и тому же классу мы причисляли, таким образом, все системы уравнений, в силу которых все определители порядка $h+1$ этой матрицы, но не все определители порядка h обращались в нуль; число h при этом могло иметь $p+1$ различных значений: $p, p-1, \cdots 2, 1, 0$.

Еще в главе 6 мы замечали, что при изложенных выше условиях q инфинитезимальных преобразований

$$X_1 f \cdots X_q f$$

ставят в соответствие каждой точке $x_1 \cdots x_n$ общего положения ровно p независимых направлений движения. Становится ясно, что соответствующим образом каждой точке $x_1 \cdots x_n$ преобразованиями $X_1 f \cdots X_q f$ сопоставляются в точности h независимых направлений, если не все определители порядка h рассматриваемой выше матрицы обращаются в нуль в этой точке, в то время как все определители порядка $h+1$ принимают значение нуль. Поскольку всякая система уравнений, допускающая инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f$, представляет собой многообразие с тем же свойством, то наша прежняя классификация систем уравнений немедленно приводит к классификации многообразий. А именно: к одному классу многообразий, допускающих $X_1 f \cdots X_q f$, мы причисляем такие многообразия, точкам которых инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f$ ставят в соответствие одно и то же число $h \leqslant p$ независимых направлений движения.

Если многообразие допускает инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f$, то оно касается в любой своей точке направлений движения, ставящих $X_1 f \cdots X_q f$ в соответствие этой точке. А если $X_1 f \cdots X_q f$ в каждой точке многообразия задают в точности h независимых направлений, то это многообразие должно иметь по меньшей мере h измерений. Таким образом, мы можем сформулировать

Утверждение 6. *Если q инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_q f$ ставят в соответствие конкретной точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ в точности h независимых направлений движения, то заведомо не существует никакого многообразия размерности меньше h, содержащего точку $x_1^0 \cdots x_n^0$ и допускающего q инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_q f$.*

По сути дела, это утверждение — лишь другая формулировка прежнего результата. В § 34 мы рассматривали системы уравнений, допускающие $X_1 f \ldots X_q f$ и при этом оставляющие из q уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ лишь h независимых друг от друга. Причем мы видели, что такая система уравнений состоит не более чем из $n - h$ независимых уравнений, т. е. представляет многообразие размерности по меньшей мере h.

Глава 8

Полные системы, допускающие все преобразования однопараметрической группы

Если в q-параметрическую полную систему

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

ввести новые независимые переменные $x_1' = F_1(x_1 \cdots x_n), \cdots x_n' = F_n$, то мы снова получим, как уже ранее отмечалось (ср. гл. 5, стр. 96) q-параметрическую полную систему от $x_1' \cdots x_n'$. Вообще говоря, эта новая полная система, конечно, имеет другой вид, нежели исходная; но может случиться, что обе эти полные системы несущественно отличаются друг от друга, так что имеют место соотношения вида

$$X_k f = \sum_{j=1}^{q} \psi_{kj}(x_1' \cdots x_n') \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \quad (k = 1 \cdots q),$$

где определитель, составленный из ψ_{kj}, разумеется, не обращается в нуль тождественно. В этом случае мы говорим, что *полная система*

$$X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$$

допускает преобразование $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$, или что она *остается при этом преобразовании инвариантной.*

Применяя сокращенные обозначения

$$\xi_{ki}(x_1' \cdots x_n') = \xi_{ki}',$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}' \frac{\partial f}{\partial x_i'} = X_k' f,$$

мы можем записать следующее определение:

q-параметрическая полная система

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q)$$

допускает преобразование $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$ *тогда и только тогда, когда для любого* k *имеет место соотношение вида*[1]

$$X_k f = \sum_{j=1}^{q} \psi_{kj}(x_1' \cdots x_n') \cdot X_j' f. \tag{1}$$

Смысл этого важного определения можно нагляднее всего пояснить на простом примере.

Уравнения

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

от трех переменных x_1, x_2, x_3 образуют двухпараметрическую полную систему. Если теперь ввести вместо x новые переменные

$$x_1' = x_1 + x_2, \quad x_2' = x_1 - x_2, \quad x_3' = x_3,$$

то мы получим новую полную систему:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1'} + \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1'} - \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0,$$

эквивалентную системе $\dfrac{\partial f}{\partial x_1'} = 0, \dfrac{\partial f}{\partial x_2'} = 0$. Соотношения вида

$$X_1 f = X_1' f + X_2' f, \quad X_2 f = X_1' f - X_2' f,$$

имеют место, т. е. полная система $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ допускает преобразование $x_1' = x_1 + x_2, x_2' = x_1 - x_2$.

§ 37

Пусть q-параметрическая полная система $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ допускает преобразование $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$, то есть для любой f имеют место

[1] Lie, Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, Februar 1875. Ли, Научное общество Христиании, февраль 1875 г.

соотношения вида (1). Тогда если $\varphi(x_1 \cdots x_n)$ — решение полной системы, то правая часть уравнения (1) при подстановке $f = \varphi(x_1' \cdots x_n')$ обращается в нуль тождественно, с левой частью происходит то же самое при подстановке $f = \varphi\big(F_1(x) \cdots F_n(x)\big)$; следовательно, $\varphi\big(F_1(x) \cdots F_n(x)\big)$ вместе с $\varphi(x)$ является решением, или, как можно выразиться: преобразование $x_i' = F_i(x)$ переводит каждое решение полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ снова в решение той же самой полной системы.

И наоборот, справедливо следующее: если каждое решение q-параметрической полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ переводится преобразованием $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$ снова в решение, то эта полная система допускает данное преобразование. Уравнения $X_1' f = 0, \cdots X_q' f = 0$ превращаются при введении переменных x_i вместо x_i' в q-параметрическую полную систему, у которой все решения те же самые, что и у q-параметрической полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$; но отсюда следует, что имеют место соотношения (1), т. е. что полная система $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ действительно допускает преобразование $x_i' = F_i(x)$.

Из всего этого следует, что *q-параметрическая полная система допускает преобразование $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$ тогда и только тогда, когда это преобразование переводит каждое решение полной системы снова в решение. Разумеется, для этого требуется лишь, чтобы это преобразование переводило какие-либо $n - q$ независимых решений системы в решения.*

Если мы теперь зададим вопрос: каким образом можно понять, что q-параметрическая полная система $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ допускает все преобразования однопараметрической группы Yf, то это будет полностью соответствовать ходу мыслей в главах 6 и 7. Правда, этот вопрос относится, собственно, к общей теории дифференциальных уравнений, допускающих однопараметрические группы, поэтому к нему следует снова вернуться в одной из последующих глав этой части книги — в главе о дифференциальных инвариантах — и ответить на него на основании развитой там общей теории. Но еще раньше нам потребуются критерии, по которым мы сможем определить, допускает заданная полная система все преобразования заданной однопараметрической группы или нет. Поэтому мы хотим получить такие критерии уже сейчас, при помощи более простых вспомогательных средств.

Обозначим какие-либо $n - q$ независимых решений q-параметрической полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ через $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}$. Тогда если эта полная система допускает все преобразования

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \cdot Y x_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2} Y Y x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы Yf, то и $n-q$ независимых функций

$$\varphi_k(x+t\cdot Yx+\cdots)=\varphi_k(x)+\frac{t}{1}\cdot Y\varphi_k+\frac{t^2}{1\cdot 2}YY\varphi_k+\cdots$$
$$(k=1\cdots n-q)$$

должны быть решениями этой системы, причем для каждого значения t. Отсюда мы заключаем, что $n-q$ выражений $Y\varphi_k$ заведомо являются решениями системы, так что должны иметь место $n-q$ соотношений вида

$$Y\varphi_k=\omega_k(\varphi_1\cdots\varphi_{n-q})\quad(k=1\cdots n-q). \tag{2}$$

Это условие — необходимое, но оно одновременно является и достаточным, т. к. если оно выполняется, то все $YY\varphi_k, YYY\varphi_k\cdots$ будут функциями только от $\varphi_1\cdots\varphi_{n-q}$, выражения $\varphi_k(x+t\cdot Yx+\cdots)$ будут поэтому решениями полной системы, а отсюда следует, что эта система действительно допускает все преобразования однопараметрической группы Yf.

Таким образом, справедливо

Утверждение 1. *Полная q-параметрическая система $X_1f=0,\cdots$, $X_qf=0$ с $n-q$ независимыми решениями $\varphi_1\cdots\varphi_{n-q}$ допускает все преобразования однопараметрической группы*

$$Yf=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(x_1\cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

тогда и только тогда, когда имеют место $n-q$ соотношений вида

$$Y\varphi_k=\omega_k(\varphi_1\cdots\varphi_{n-q})\quad(k=1\cdots n-q). \tag{2}$$

Полученный таким образом критерий, разумеется, применим практически только тогда, когда полная система уже проинтегрирована. Но из этого критерия можно легко вывести другой, который не предполагает, что решения полной системы известны.

Если в тождестве

$$X_k\big(Y(f)\big)-Y\big(X_k(f)\big)\equiv\sum_{i=1}^{n}(X_k\eta_i-Y\xi_{ki})\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

подставить вместо f произвольное решение φ полной системы, то получится

$$X_k\big(Y(\varphi)\big)\equiv\sum_{i=1}^{n}(X_k\eta_i-Y\xi_{ki})\frac{\partial\varphi}{\varphi x_i}.$$

Если полная система допускает все преобразования однопараметрической группы Yf, то согласно вышесказанному $Y(\varphi)$ будет также являться решением этой системы, т. е. левая часть последнего уравнения обращается в нуль тождественно; с правой частью, конечно, происходит то же самое, следовательно, любое решение полной системы удовлетворяет также q уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n}(X_k\eta_i - Y\xi_{ki})\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0;$$

но отсюда следует, что имеют место q тождеств вида

$$\sum_{i=1}^{n}(X_k\eta_i - Y\xi_{ki})\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \sum_{j=1}^{q}\chi_{kj}(x_1 \cdots x_n)\cdot X_j f \quad (k = 1 \cdots q).$$

С другой стороны, если мы предположим, что тождества этого вида имеют место, и будем опять же понимать под φ какое-либо решение полной системы, то немедленно получим, что q выражений $X_k\big(Y(f)\big) - Y\big(X_k(f)\big)$ тождественно обращаются в нуль при подстановке $f = \varphi$; однако отсюда следует: $X_k\big(Y(\varphi)\big) \equiv 0$, и это значит, что $Y\varphi$ является решением системы, т. е. имеются $n - q$ соотношений вида

$$Y\varphi_k = \omega_k(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}) \quad (k = 1 \cdots n - q), \tag{2}$$

а это говорит о том, что полная система допускает все преобразования однопараметрической группы Yf.

Тем самым мы имеем следующую теорему.

Теорема 20.[2] *q-параметрическая полная система*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n}\xi_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

от переменных $x_1 \cdots x_n$ допускает все преобразования однопараметрической группы

$$Yf = \sum_{i=1}^{n}\eta_i(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

тогда и только тогда, когда все $X_k\big(Y(f)\big) - Y\big(X_k(f)\big)$ выражаются линейно через $X_1 f \cdots X_q f$

$$(X_k Y) = X_k\big(Y(f)\big) - Y\big(X_k(f)\big) = \sum_{j=1}^{q}\chi_{kj}(x_1 \cdots x_n)\cdot X_j f \ (k = 1 \cdots q). \tag{3}$$

[2] Ли, Научное общество Христиании, 1874 г.

Выполнение соотношений вида (3) является, таким образом, необходимым и достаточным условием для того, чтобы полная система $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ допускала все преобразования однопараметрической группы Yf. По разным причинам видится желательным доказать по крайней мере *необходимость* соотношений (3) еще и прямым методом.

Преобразования однопараметрической группы Yf имеют вид

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \cdot \eta_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \cdot Y\eta_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n).$$

Если мы теперь, пользуясь этой формулой, введем вместо x новые переменные $x_1' \cdots x_n'$ в выражения $X_k f$, то получим

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} X_k x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i'}.$$

Здесь надо еще выразить $X_k x_i'$ через $x_1' \cdots x_n'$. Если пренебречь второй и более высокими степенями t, то сначала получится

$$X_k x_i' = X_k x_i + t \cdot X_k \eta_i + \cdots . \tag{4}$$

Затем (ср. гл. 3, уравн. 7а, стр. 58)

$$X_k x_i = \xi_{ki}(x) = \xi_{ki}' - \frac{t}{1} \cdot Y'\xi_{ki}' + \cdots$$

$$t \cdot X_k \eta_i = t \cdot X_k' \eta_i' - \cdots .$$

Следовательно,

$$X_k x_i' = \xi_{ki}' + t(X_k' \eta_i' - Y'\xi_{ki}') + \cdots ,$$

и наконец,

$$X_k f = X_k' f + \frac{t}{1}(X_k' Y' f - Y' X_k' f) + \cdots , \tag{5}$$

где опущенные члены имеют порядок два и выше по t.

Если полная система $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ допускает все преобразования однопараметрической группы Yf, то система из q уравнений

$$X_k f + \frac{t}{1}(X_k Y) + \cdots = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

должна быть эквивалентна системе $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$, притом для любого значения t. Следовательно, коэффициенты при t должны заведомо

линейно выражаться через $X_1 f \cdots X_q f$, т. е. должны иметь место соотношения вида (3)

$$X_k\big(Y(f)\big) - Y\big(X_k(f)\big) = (X_k Y) = \sum_{j=1}^{q} \chi_{kj}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j f \quad (k = 1 \cdots q).$$

Этим непосредственно показано, что выполнение этих соотношений является необходимым; что оно также и достаточное, мы не будем снова доказывать, а ограничимся вышесказанным.

Так же, как мы говорим о системах уравнений

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0,$$

допускающих инфинитезимальное преобразование Yf, мы можем говорить и о полных системах, для которых это справедливо. Мы скажем: *q-параметрическая полная система $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование Yf, если имеют место соотношения вида* (3).

Используя эту терминологию, мы можем сформулировать теорему 20 также следующим образом:

q-параметрическая полная система $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ допускает все преобразования однопараметрической группы Yf тогда и только тогда, когда она допускает инфинитезимальное преобразование Yf.

Если полная система допускает все преобразования однопараметрической группы, то мы скажем кратко, *что она допускает эту однопараметрическую группу.*

Условия теоремы 20 выполняются, в частности, если Yf имеет вид

$$Yf = \sum_{j=1}^{q} \varrho_j(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j f,$$

где под ϱ_j понимаются произвольные функции от x. Тогда соотношения вида (3) всегда имеют место, и, кроме того, $Y\varphi_j \equiv 0$. Это согласуется с рассуждениями из главы 6, стр. 110, согласно которым любое решение $\Omega(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q})$ полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ при преобразованиях всех однопараметрических групп вида $\Sigma \varrho_j X_j f$ остается инвариантным.

Если, с другой стороны, инфинитезимальное преобразование Yf, которое не имеет вида $\Sigma \varrho_j(x) \cdot X_j f$, удовлетворяет условиям теоремы 20, то конечные преобразования однопараметрической группы никоим образом не

оставляют инвариантным каждое отдельное решение полной системы, но для совокупности всех этих решений это верно.

Среди инфинитезимальных преобразований, которые допускает полная система $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$, имеются также преобразования вида $\Sigma \varrho_j(x) \cdot X_j f$, заданные одновременно с этой полной системой, и потому их следует рассматривать как тривиальные. Остальные же инфинитезимальные преобразования, которые допускает эта система, вообще говоря, не могут быть заданы, пока система не проинтегрирована.

Если полная система $X_1 f = 0, \cdots X_q f$ допускает инфинитезимальное преобразование Yf, то, как мы видели выше, каждое решение $\Omega(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q})$ полной системы при любом преобразовании

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \cdot Y x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы Yf переходит в решение. Поэтому если мы истолкуем x и x' как координаты точек n-мерного пространства, а только что записанные преобразования — как операции, при которых точка $x_1 \cdots x_n$ принимает новое положение $x_1' \cdots x_n'$, и если мы к тому же вспомним, что уравнения $\varphi_1 = a_1, \cdots \varphi_{n-q} = a_{n-q}$ с константами $a_1 \cdots a_{n-q}$ представляют собой характеристическое многообразие полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ (ср. гл. 6, стр. 112), то мы сразу увидим, что преобразования однопараметрической группы Yf переводят каждое характеристическое многообразие полной системы в некоторое характеристическое многообразие. *Таким образом, характеристические многообразия нашей полной системы переставляются между собой преобразованиями однопараметрической группы Yf, они образуют — как мы это назовем, — семейство, инвариантное относительно однопараметрической группы.* Поскольку упомянутые характеристические многообразия определяют согласно гл. 6, стр. 112, разбиение пространства, то мы можем также сказать, что это *разбиение остается инвариантным относительно однопараметрической группы Yf.*

§ 38

Сформулируем еще несколько простых утверждений о полных системах, допускающих однопараметрические группы.

Утверждение 2. *Если q-параметрическая полная система допускает любое преобразование двух однопараметрических групп Yf и Zf, то*

она допускает также любое преобразование однопараметрической группы $Y\big(Z(f)\big) - Z\big(Y(f)\big) = (YZ)$.

Пусть $X_k f = 0$ — уравнения полной системы. Тогда если выписать тождество Якоби

$$\big((YZ)X_k\big) + \big((ZX_k)Y\big) + \big((X_kY)Z\big) = 0$$

и принять во внимание, что (YX_k) и (ZX_k) по условию утверждения выражаются линейно через $X_1 f \cdots X_q f$, то понятно, что то же самое верно и для $\big((YZ)X_k\big)$. Тем самым утверждение доказано.

Утверждение 3. *Если уравнения* $A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0$, *равно как и* $B_1 f = 0, \cdots B_s f = 0$, *образуют полные системы, то полную систему образует также и совокупность всех возможных уравнений* $Cf = 0$, *являющихся общими для этих двух полных систем в том смысле, что имеют место соотношения вида*

$$Cf = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j(x_1 \cdots x_n) \cdot A_j f = \sum_{k=1}^{s} \beta_k(x_1 \cdots x_n) \cdot B_k f.$$

Если полные системы $A_k f = 0$ *и* $B_k f = 0$ *допускают некоторую однопараметрическую группу* Xf, *то и полная система уравнений* $Cf = 0$ *допускает эту группу.*

Доказательство. Пусть среди уравнений $Cf = 0$ можно выбрать в точности m и не более друг от друга независимых, например

$$C_1 f = 0, \ \cdots \ C_m f = 0.$$

Тогда для любого $\mu = 1 \cdots m$ имеют место соотношения вида

$$C_\mu f = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{\mu j}(x) \cdot A_j f = \sum_{k=1}^{s} \beta_{\mu k}(x) \cdot B_k f;$$

следовательно, каждая скобка $C_\mu\big(C_\nu(f)\big) - C_\nu\big(C_\mu(f)\big) = (C_\mu C_\nu)$ может быть выражена линейно как через Af, так и через Bf, то есть всякая $(C_\mu C_\nu)$ выражается линейно через $C_1 f \cdots C_m f$. Тем самым первая часть нашего утверждения доказана. Далее, каждая (XC_μ) выражается как через Af, так и через Bf, и поэтому имеют место соотношения вида

$$(XC_\mu) = \sum_{\nu=1}^{m} \gamma_{\mu\nu}(x_1 \cdots x_n) \cdot C_\nu f \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

Это доказывает вторую часть утверждения.

Если даны две полные системы $A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0$ и $B_1 f = 0, \cdots B_s f = 0$, то все возможные общие решения обеих систем также определяются некоторой полной системой, которую можно получить из уравнений

$$A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0, \quad B_1 f = 0, \cdots B_s f = 0,$$

как указано в гл. 5, стр. 95. При этом справедливо

Утверждение 4. *Если полные системы $A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0$ и $B_1 f = 0, B_s f = 0$ допускают однопараметрическую группу Xf, то и полная система, определяющая общие решения всех уравнений $A_k f = 0$ и $B_k f = 0$, также допускает однопараметрическую группу Xf.*

Доказательство. Тождество

$$\big((A_j B_k)X\big) + \big((B_k X)A_j\big) + \big((X A_j)B_k\big) = 0$$

показывает, что все $\big((A_j B_k)X\big)$ выражаются линейно через Af, Bf и (AB). Поэтому если уравнения $(A_j B_k) = 0$ вместе с уравнениями $Af = 0$ и $Bf = 0$ образуют полную систему, то наше утверждение доказано. В противном случае следует поступить с системой уравнений $Af = 0$, $Bf = 0$, $(AB) = 0$ так же, как только что с системой уравнений $Af = 0$, $Bf = 0$, а именно: взяв любые два из выражений Af, Bf, (AB), добавить к ним Xf и образовать тождество Якоби и т. д.

Утверждения 3 и 4 обретают простой наглядный смысл, если трактовать $x_1 \cdots x_n$ как координаты точек пространства R_n.

Мы сначала напомним, что ∞^{n-q} q-мерных характеристических многообразий M_q полной системы $A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0$ образуют семейство, остающееся инвариантным относительно однопараметрической группы. Далее заметим, что ∞^{n-s} s-мерных характеристических многообразий M_q полной системы $B_1 f = 0, \cdots B_s f = 0$ также образуют такое инвариантное семейство.

Предположим, что $s \geqslant q$. Тогда всякое M_s общего положения разбивается с помощью тех M_q, которые вообще его пересекают, на семейство из ∞^{s-q+h} многообразий размерности $(q-h)$, причем под h понимается некоторое определенное число из $0, 1 \cdots q$. Таким образом, все пространство R_n разбивается на семейство из ∞^{s-q+h} $(q-h)$-мерных многообразий. Разумеется, совокупность этих многообразий остается инвариантной относительно однопараметрической группы Xf, поскольку она представляет собой пересечение совокупности всех M_q с совокупностью всех M_s,

и обе эти совокупности, как уже было сказано, инвариантны относительно группы Xf.

Только что упомянутые $(q-h)$-мерные многообразия суть не что иное, как характеристические многообразия полной системы $Cf = 0$, появляющейся в утверждении 3, эта полная система является при наложенных условиях $(q-h)$-параметрической.

С другой стороны, можно спросить о наименьших многообразиях, состоящих как из M_q, так и из M_s. Если такие многообразия существуют, то их совокупность, разумеется, остается инвариантной относительно однопараметрической группы Xf; они являются характеристическими многообразиями полной системы, определенной в утверждении 4.

Глава 9

Характеристические соотношения между инфинитезимальными преобразованиями группы

В главах 2 и 4 (утверждение 1, стр. 74) было показано, что каждой r-параметрической группе соответствуют r независимых инфинитезимальных преобразований, имеющих с данной группой своеобразную связь. Теперь мы хотим вывести некоторые важные соотношения, имеющие место между подобными инфинитезимальными преобразованиями. Затем мы докажем не менее важное утверждение о том, что r независимых инфинитезимальных преобразований, удовлетворяющих этим соотношениям, всегда определяют r-параметрическую группу с тождественным преобразованием.

§ 39

Вместо того чтобы рассматривать r-параметрическую группу, мы хотим сперва встать на более общую точку зрения, рассматривая семейство из ∞^r различных преобразований

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

удовлетворяющих дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n, k = 1 \cdots r).$$

В таком случае мы знаем (ср. гл. 4, стр. 74), что r инфинитезимальных преобразований

$$X_k'(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \quad (k = 1 \cdots r)$$

не зависят друг от друга, и что определитель, составленный из $\psi_{jk}(a)$, не обращается в нуль тождественно; следовательно, мы можем, как и ранее, записать вышеуказанные дифференциальные уравнения еще и так:

$$\xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \quad (i = 1 \cdots n, j = 1 \cdots r). \qquad (1)$$

Разумеется, определитель α_{jk} здесь тождественно в нуль не обращается. Если, с другой стороны, предположить, что уравнения

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$$

разрешены относительно $x_1 \cdots x_n$:

$$x_i = F_i(x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

то можно совсем легко вывести некоторые дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют $F_1 \cdots F_n$. Мы просто продифференцируем тождества

$$F_i\big(f_1(x,a) \cdots f_n(x,a), a_1 \cdots a_r\big) \equiv x_i$$

по a_k; тогда имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F_i(x',a)}{\partial x'_\nu} \frac{\partial f_\nu(x,a)}{\partial a_k} + \frac{\partial F_i(x',a)}{\partial a_k} \equiv 0$$

при условии, что здесь всюду положено $x'_\nu = f_\nu(x,a)$. Это тождество мы умножим на $\alpha_{jk}(a)$ и просуммируем по k от 1 до r, тогда, учитывая

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f_\nu(x,a)}{\partial a_k} \equiv \xi_{j\nu}(f_1 \cdots f_n),$$

получим следующее уравнение:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(x'_1 \cdots x'_n) \frac{\partial F_i}{\partial x'_\nu} + \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial F_i}{\partial a_k} = 0$$
$$(j = 1 \cdots r, \quad i = 1 \cdots n).$$

В соответствии с тем, как они получены, эти уравнения будут тождествами, если произвести в них подстановку $x'_\nu = f_\nu(x,a)$; но поскольку они вообще не содержат $x_1 \cdots x_n$, то уже сами по себе должны быть тождествами, то есть все $F_1 \cdots F_n$ являются решениями следующих линейных

дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\Omega_j(F) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x'_\nu} + \sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{j\mu} \frac{\partial F}{\partial a_\mu} = 0 \qquad (2)$$

$$(j = 1 \cdots r).$$

Эти r уравнений содержат $n + r$ переменных, а именно $x'_1 \cdots x'_n$ и $a_1 \cdots a_r$; кроме того, они независимы друг от друга, поскольку определитель α_{kj} не обращается в нуль тождественно, а потому возможно их разрешение относительно r производных $\frac{\partial F}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial a_r}$. С другой стороны, уравнения (2) имеют n общих независимых решений, а именно функции $F_1(x', a) \cdots F_n(x', a)$, функциональные определители которых относительно x'

$$\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x'_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x'_n} = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}$$

не обращаются в нуль тождественно, так как уравнения $x'_i = f(x, a)$ по условию представляют собой преобразования. Таким образом, условия из утверждения 8, гл. 5, стр. 98, выполнены также для уравнений (2), то есть эти уравнения образуют r-параметрическую полную систему.

Положим

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F}{\partial a_k} = A_j(F)$$

и, далее,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x'_\nu} = X'_j(F),$$

в соответствии с ранее введенными обозначениями, тогда уравнения (2) принимают вид

$$\Omega_j(F) = X'_j(F) + A_j(F) = 0 \quad (j = 1 \cdots n).$$

То, что они образуют r-параметрическую полную систему, находит, как мы знаем, свое выражение в том, что имеют место определенные тождества вида

$$\Omega_k\big(\Omega_j(F)\big) - \Omega_j\big(\Omega_k(F)\big) = \sum_{s=1}^{r} \vartheta_{kjs}(x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r) \cdot \Omega_s(F)$$

$$(k, j = 1 \cdots r),$$

какой бы функцией от $x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r$ ни была F. Поскольку эти тождества можно еще записать так:

$$X'_k\big(X'_j(F)\big) - X'_j\big(X'_k(F)\big) + A_k\big(A_j(F)\big) - A_j\big(A_k(F)\big) = \\ = \sum_{s=1}^{r} \vartheta_{kjs} X'_s(F) + \sum_{s=1}^{r} \vartheta_{kjs} A_s(F),$$

то мы можем их непосредственно разложить на пары:

$$\begin{cases} X'_k\big(X'_j(F)\big) - X'_j\big(X'_k(F)\big) = \sum_{s=1}^{r} \vartheta_{kjs} X'_s(F), \\ A_k\big(A_j(F)\big) - A_j\big(A_k(F)\big) = \sum_{s=1}^{r} \vartheta_{kjs} A_s(F), \end{cases} \tag{3}$$

а вторая строка разлагается и дальше:

$$A_k(\alpha_{j\mu}) - A_j(\alpha_{k\mu}) = \sum_{s=1}^{r} \vartheta_{kjs} \alpha_{s\mu} \quad (k, j, \mu = 1 \cdots r).$$

Поскольку определитель $\alpha_{s\mu}$ не обращается в нуль тождественно, то ϑ_{kjs} полностью заданы этими последними условиями, и оказывается, что ϑ_{kjs} могут зависеть лишь от $a_1 \cdots a_r$, в то время как они заведомо не зависят от $x'_1 \cdots x'_n$. Но можно доказать, что ϑ_{kjs} не зависят также и от $a_1 \cdots a_r$. Действительно, если мы в первой группе тождеств (3) рассмотрим F как произвольную функцию только от $x'_1 \cdots x'_n$, то в результате дифференцирования по a_μ получим следующее тождественное равенство:

$$0 = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial \vartheta_{kjs}}{\partial a_\mu} X'_s(F) \quad (k, j, \mu = 1 \cdots r).$$

Но так как $X'_1(F) \cdots X'_r(F)$ — независимые инфинитезимальные преобразования, и, кроме того, $\dfrac{\partial \vartheta_{kjs}}{\partial a_\mu}$ не зависят от $x'_1 \cdots x'_n$, то все $\dfrac{\partial \vartheta_{kjs}}{\partial a_\mu}$ должны обращаться в нуль тождественно, то есть ϑ_{kjs} не зависят также и от $a_1 \cdots a_r$, они суть числовые константы.

Таким образом, имеет место

Теорема 21. *Если семейство из ∞^r преобразований*

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений специального вида

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) \quad (i = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots r),$$

и если эти уравнения записать (что всегда возможно) в виде

$$\xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \quad (j = 1 \cdots r, \quad i = 1 \cdots n),$$

то между $2r$ независимыми друг от друга инфинитезимальными преобразованиями

$$X'_j(F) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (j = 1 \cdots r),$$

$$A_j(F) = \sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{j\mu}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial F}{\partial a_\mu} \quad (j = 1 \cdots r)$$

имеют место соотношения вида

$$\begin{cases} X'_k\big(X'_j(F)\big) - X'_j\big(X'_k(F)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X'_s(F), \\ A_k\big(A_j(F)\big) - A_j\big(A_k(F)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} A_s(F), \end{cases} \tag{4}$$

где c_{kjs} — числовые константы. Поэтому r уравнений

$$X'_j(F) + A_j(F) = 0 \quad (j = 1 \cdots r),$$

разрешимых относительно $\dfrac{\partial F}{\partial a_1} \cdots \dfrac{\partial F}{\partial a_r}$, образуют r-параметрическую полную систему в $n + r$ переменных $x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r$. Если n уравнений $x'_i = f_i(x, a)$

$$x_i = F_i(x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

разрешить относительно $x_1 \cdots x_n$, то $F_1(x', a) \cdots F_n(x', a)$ являются независимыми решениями этой полной системы.

Эту теорему можно непосредственно применить ко всем r-параметрическим группам, независимо от того, содержат они тождественное преобразование или нет.

Эта теорема, примененная в случае r-параметрической группы с тождественным преобразованием, дает нам определенные соотношения, имеющие место между инфинитезимальными преобразованиями группы. Таким образом, мы получаем важную теорему.

Теорема 22. *Если r-параметрическая группа в переменных $x_1 \cdots x_n$ содержит r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

то между этими инфинитезимальными преобразованиями имеют место попарные соотношения вида

$$X_k\big(X_j(f)\big) - X_j\big(X_k(f)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X_s(f),$$

где под c_{kjs} понимаются числовые константы[1].

Отсюда, в частности, следует важное

Утверждение 1. *Если конечная непрерывная группа содержит два инфинитезимальных преобразования*

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad Y(f) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

то она также содержит инфинитезимальное преобразование

$$X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big).$$

§ 40

Предположим, что теперь, наоборот, заданы r независимых инфинитезимальных преобразований

$$X'_j(F) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) \frac{\partial F}{\partial x'_i} \quad (j = 1 \cdots r)$$

от $x'_1 \cdots x'_n$, которые находятся попарно в соотношениях вида

$$X'_k\big(X'_j(F)\big) - X'_j\big(X'_k(F)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X'_x(F),$$

где c_{kjs} — числовые константы. Кроме того, пусть даны r инфинитезимальных преобразований

$$A_j(F) = \sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{j\mu}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial F}{\partial a_\mu} \quad (j = 1 \cdots r)$$

[1] Lie, Math. Ann. Bd. 8, S. 303; Göttinger Nachr. 1874.

в переменных $a_1 \cdots a_r$, которые попарно удовлетворяют соотношениям аналогичного вида

$$A_k\big(A_j(F)\big) - A_j\big(A_k(F)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} A_k(F)$$

с теми же c_{kjs}, и определитель которых $\Sigma \pm \alpha_{11}(a) \cdots \alpha_{rr}(a)$ не обращается в нуль тождественно. Мы покажем, что инфинитезимальные преобразования $X_1'(F) \cdots X_r'(F)$ порождают при этих условиях совершенно определенную r-параметрическую группу с тождественным преобразованием.

Для этого составим уравнения

$$\Omega_j(F) = X_j'(F) + A_j(F) = 0 \quad (j = 1 \cdots r),$$

образующие при наложенных условиях r-параметрическую полную систему; соотношения вида

$$\Omega_k\big(\Omega_j(F)\big) - \Omega_j\big(\Omega_k(F)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} \Omega_s(F)$$

имеют место, и, кроме того, уравнения $\Omega_1(F) = 0, \cdots \Omega_r(F) = 0$ разрешимы относительно $\dfrac{\partial F}{\partial a_1} \cdots \dfrac{\partial F}{\partial a_r}$. Пусть теперь $a_1^0 \cdots a_r^0$ — система значений параметров a, в окрестности которой $\alpha_{jk}(a)$ ведут себя регулярно, и для которой определитель $\sum \pm \alpha_{11}(a^0) \cdots \alpha_{rr}(a)$ отличен от нуля. Тогда согласно теореме 12, гл. 5, стр. 101, полная система $\Omega_j(F) = 0$ имеет n решений $F_1(x', a) \cdots F_n(x', a)$, которые сводятся при $a_k = a_k^0$ к $x_1' \cdots x_n'$ соответственно. Это суть так называемые главные решения полной системы относительно $a_k = a_k^0$. Предположив, что эти главные решения известны, составляем n уравнений

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

и разрешаем их относительно $x_1' \cdots x_n'$, что всегда возможно, т. к. очевидно, что $F_1 \cdots F_n$ независимы друг от друга относительно $x_1' \cdots x_n'$. Полученные таким образом уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

представляют собой, как мы сейчас покажем, r-параметрическую группу и, конечно же, группу с тождественным преобразованием, поскольку при $a_k = a_k^0$ получается $x_i' = x_i$.

Прежде всего, мы имеем тождество

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F_i}{\partial x'_\nu} + \sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{j\mu}(a) \frac{\partial F_i}{\partial a_\mu} = 0 \quad (j = 1 \cdots r, \quad i = 1 \cdots n). \tag{5}$$

С другой стороны, из $x_i = F_i(x', a)$ в результате дифференцирования по a_μ получается уравнение

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F_i}{\partial a_\mu} \quad (j = 1 \cdots r, \quad i = 1 \cdots n),$$

превращающееся в тождество при подстановке $x'_\nu = f_\nu(x, a)$. Умножив это уравнение на $\alpha_{j\mu}(a)$ и просуммировав по μ от 1 до r, мы получим уравнение, которое с использованием (5) переходит в

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x'_\nu} \left(\sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{j\mu}(a) \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu} - \xi_{j\nu}(x') \right) = 0 \quad (i = 1 \cdots n, \quad j = 1 \cdots r).$$

Но поскольку определитель $\sum \pm \dfrac{\partial F_1}{\partial x'_1} \cdots \dfrac{\partial F_n}{\partial x'_n}$ не обращается в нуль тождественно, то мы получаем систему

$$\sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{j\mu}(a) \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu} = \xi_{j\nu}(x'),$$

которую можно, в свою очередь, разрешить относительно $\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu}$, т. к. определитель $\alpha_{j\mu}(a)$ не обращается в нуль. В результате получается, что имеют место уравнения вида

$$\frac{\partial x'_\nu}{\partial \alpha \mu} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{j\mu}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{j\nu}(x'_1 \cdots x'_n) \tag{6}$$

$$(\nu = 1 \cdots n, \quad \mu = 1 \cdots r),$$

которые естественным образом превращаются в тождества при подстановке $x'_\nu = f_\nu(x, a)$.

Теперь совсем нетрудно доказать, что уравнения $x'_i = f_i(x, a)$ представляют r-параметрическую группу.

А именно: прежде всего, легко видеть, что уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ представляют ∞^r различных преобразований, так что все параметры $a_1 \cdots a_r$ являются существенными. В противном случае (ср. утв. 1, гл. 1, стр. 13) все функции $f_1(x, a) \cdots f_n(x, a)$ должны были бы удовлетворять линейному дифференциальному уравнению в частных производных вида

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0,$$

где χ_k были бы независимы от $x_1 \cdots x_n$. Тогда вследствие (6) мы имели бы

$$\sum_{k,j=1}^{r} \chi_k(a) \cdot \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{j\nu}(f_1 \cdots f_n) \equiv 0 \quad (\nu = 1 \cdots n),$$

а поскольку $X_1'(F) \cdots X_r'(F)$ — независимые инфинитезимальные преобразования, то

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a) \cdot \psi_{jk}(a) = 0 \quad (j = 1 \cdots r);$$

но отсюда следовало бы немедленно: $\chi_1(a) = 0, \cdots \chi_r(a) = 0$, т. к. определитель, составленный из $\psi_{jk}(a)$, не обращается в нуль тождественно.

Таким образом, уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ действительно представляют собой семейство из ∞^r различных преобразований. Тогда это семейство удовлетворяет определенным дифференциальным уравнениям специального вида (6); поэтому мы можем непосредственно применить теорему 9 из гл. 4, стр. 79, согласно которой справедливо следующее: если $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ — система значений параметров a, для которой $\psi_{jk}(a)$ ведут себя регулярно, а определитель $\sum \pm \psi_{11}(\overline{a}) \cdots \psi_{rr}(\overline{a})$ не обращается в нуль тождественно, то любое преобразование $x_i' = f_i(x, a)$, параметры которого $a_1 \cdots a_r$ лежат в определенной окрестности $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$, получается в результате того, что сперва выполняется преобразование

$$\overline{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

а затем преобразование

$$x_i' = \overline{x}_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(\overline{x}) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$, где под $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ понимаются соответствующие константы. Если, в частности, положить $\overline{a}_k = a_k^0$, то получится $\overline{x}_i = x_i$, т. е. мы, прежде всего, видим, что семейство ∞^r

преобразований $x_i' = f_i(x, a)$ в некоторой окрестности системы $a_1^0 \cdots a_r^0$ совпадает с семейством преобразований

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(x) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n). \tag{7}$$

Поэтому если мы, с другой стороны, выберем $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ произвольным образом в некоторой окрестности $a_1^0 \cdots a_r^0$, то преобразование $\overline{x}_i = f_i(x, \overline{a})$ всегда будет принадлежать семейству (7). Если, однако, сначала выполнить преобразование $\overline{x}_i = f_i(x, \overline{a})$, а затем соответствующее преобразование

$$x_i' = \overline{x}_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(\overline{x}) + \cdots$$

семейства (7), то согласно вышесказанному мы получим преобразование $x_i' = f_i(x, a)$, где $a_1 \cdots a_r$ могут принимать все значения в некоторой окрестности $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$. В частности, если мы выберем $a_1 \cdots a_r$ в вышеупомянутой окрестности $a_1^0 \cdots a_r^0$, что всегда возможно, то преобразование $x_i' = f_i(x, a)$ будет также принадлежать семейству (7); итак, мы видим, что два преобразования из этого семейства (7), выполненные последовательно, снова дают некоторое преобразование этого семейства. Следовательно, это семейство, а также, конечно, идентичное ему семейство $x_i' = f_i(x, a)$, образуют r-параметрическую группу, такую, которая содержит тождественное преобразование, и преобразования которой упорядочиваются в пары взаимно обратных.

Полученный результат мы выразим следующим образом.

Теорема 23. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k'(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \quad (k = 1 \cdots r)$$

в переменных $x_1' \cdots x_n'$ удовлетворяют попарно соотношениям вида

$$X_k'\big(X_j'(f)\big) - X_j'\big(X_k'(f)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X_s'(f),$$

и если далее r независимых инфинитезимальных преобразований

$$A_k(f) = \sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{k\mu}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_\mu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

в переменных $a_1 \cdots a_r$ удовлетворяют соответствующим соотношениям

$$A_k\big(A_j(f)\big) - A_j\big(A_k(f)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} A_s(f)$$

с теми же самыми c_{kjs}, и, кроме того, определитель $\sum \pm \alpha_{11}(a) \cdots \alpha_{rr}(a)$ не обращается в нуль тождественно, то уравнения r-параметрической группы получаются следующим образом: образуем r-параметрическую полную систему

$$X_k'(f) + A_k(f) = 0 \quad (k = 1 \cdots r)$$

и найдем ее главные решения относительно подходящей системы значений $a_k = a_k^0$. Если этими решениями являются $x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r)$, то возникающие в результате их разрешения уравнения $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ представляют r-параметрическую непрерывную группу преобразований. Эта группа содержит тождественное преобразование и с каждым из ее преобразований — также обратное к нему; она порождена ∞^{r-1} инфинитезимальными преобразованиями

$$\lambda_1 X_1'(f) + \cdots + \lambda_r X_r'(f),$$

где $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ — произвольные константы. И потому путем введения новых параметров вместо a_k можно привести уравнения этой группы к виду

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(x) + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} X_j(\xi_{ki}) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Очевидно, уравнения $x_i = F_i(x', a)$ из данной теоремы также представляют группу, а именно $x_i' = f_i(x, a)$.

§ 41

Условия, наложенные в важной теореме 23, можно существенно упростить.

Теорема утверждает, что $2r$ инфинитезимальных преобразований $X_k(f)$ и $A_k(f)$ задают некоторую r-параметрическую группу в переменных x; в то же время имеется представление этой группы, совершенно не зависящее от $A_k(f)$; данная группа согласно цитируемой теореме идентична семейству ∞^{r-1} однопараметрических групп $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$, и это семейство

уже только при помощи $X_k(f)$ полностью определено. Это обстоятельство наводит нас на мысль, что семейство ∞^{r-1} однопараметрических групп $\lambda_1 X_1(f)+\cdots+\lambda_r X_r(f)$ образует r-параметрическую группу всякий раз, когда независимые инфинитезимальные преобразования $X_1(f)\cdots X_r(f)$ находятся попарно в соотношениях

$$X_k\big(X_j(f)\big) - Xj\big(X_k(f)\big) = (X_k X_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X_s(f). \tag{8}$$

Согласно теореме 22 это условие является необходимым для того, чтобы ∞^{r-1} однопараметрических групп $\sum \lambda_k X_k(f)$ образовывали r-параметрическую группу. Наше предположение означает, таким образом, что это необходимое условие является также и достаточным.

Это предположение могло бы перейти в уверенность, если бы нам удалось построить для каждой системы $X_k(f)$ с оговоренным свойством r независимых инфинитезимальных преобразований

$$A_k(f) = \sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{k\mu}(a_1 \cdots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_\mu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

от $a_1 \cdots a_r$, удовлетворяющих соответствующим соотношениям

$$A_k\big(A_j(f)\big) - A_j\big(A_k(f)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} A_s(f),$$

в то время как определитель $\sum \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{rr}$ не обращается тождественно в нуль, или, иначе говоря, между которыми не существует тождественного соотношения вида

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a_1 \cdots a_r) \cdot A_k(f) = 0.$$

При помощи утверждения 5, гл. 3, стр. 71, мы действительно всегда можем построить такую систему инфинитезимальных преобразований $A_k(f)$. Положим, как и прежде,

$$X_k^{(\mu)}(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)})\frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}}$$

и образуем r инфинитезимальных преобразований

$$W_k(f) = \sum_{\mu=1}^{r} X_k^{(\mu)}(f).$$

Тогда они согласно приведенному утверждению обладают тем свойством, что соотношений вида

$$\sum_{k=1}^{r} \psi_k(x_1' \cdots x_n', x_1'' \cdots x_n'', \cdots x_1^{(r)} \cdots x_n^{(r)}) \cdot W_k(f) = 0$$

не существует. А поскольку, кроме того,

$$W_k\big(W_j(f)\big) - W_j\big(W_k(f)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} W_s(f),$$

то r независимых уравнений

$$W_1(f) = 0, \cdots W_r(f) = 0$$

образуют r-параметрическую полную систему от rn переменных $x_1' \cdots x_n' \cdots x_1^{(r)} \cdots x_n^{(r)}$. Эта полная система имеет $r(n-1)$ независимых решений, которые можно обозначить $u_1, u_2 \cdots u_{rn-r}$. Поэтому если выбрать r независимых друг от друга и от $u_1 \cdots u_{rn-r}$ функций $y_1 \cdots y_r$ от rn величин $x_i^{(\mu)}$, то можно ввести y и u в качестве новых переменных вместо $x_i^{(\mu)}$. При этом мы получаем

$$W_k(f) = \sum_{\pi=1}^{r} W_k(y_\pi) \frac{\partial f}{\partial y_\pi} + \sum_{\tau=1}^{rn-r} W_k(u_\tau) \frac{\partial f}{\partial u_\tau}$$

или (т. к. все $W_k(u_\tau)$ тождественно обращаются в нуль)

$$W_k(f) = \sum_{\pi=1}^{r} \omega_{k\pi}(y_1 \cdots y_r, u_1 \cdots u_{rn-r}) \frac{\partial f}{\partial y_\pi},$$

где $W_1(f) \cdots W_r(f)$ не связаны никакими соотношениями вида

$$\sum_{k=1}^{r} \varphi_k(y_1 \cdots y_r, u_1 \cdots u_{rn-r}) \cdot W_k(f) = 0.$$

Это свойство функций $W_k(f)$ сохраняется, конечно же, и тогда, когда мы придаем величинам u_τ подходящие постоянные значения u_τ^0. Если положить $\omega_{k\pi}(y, u^0) = \omega_{k\pi}^0(y)$, то r независимых инфинитезимальных преобразований

$$V_k(f) = \sum_{\pi=1}^{r} \omega_{k\pi}^0(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_\pi}$$

от r независимых переменных $y_1 \cdots y_r$ находятся попарно в соотношениях

$$V_k\big(V_j(f)\big) - V_j\big(V_k(f)\big) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} V_s(f)$$

и, кроме того, не связаны никакими соотношениями вида

$$\sum_{k=1}^{r} \varphi_k(y_1 \cdots y_r) \cdot V_k(f) = 0.$$

Следовательно, $V_k(f)$ — инфинитезимальные преобразования с требуемым свойством. Поэтому мы можем непосредственно применить теорему 23, стр. 172, к $2r$ инфинитезимальным преобразованиям и тем самым доказать, что ∞^{r-1} однопараметрических групп $\sum \lambda_k X_k(f)$ образуют r-параметрическую группу. Таким образом, справедлива

Теорема 24. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

попарно удовлетворяют соотношениям

$$X_k\big(X_j(f)\big) - X_j\big(X_k(f)\big) = (X_k X_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X_s(f), \tag{8}$$

где c_{kjs} — константы, то совокупность ∞^{r-1} однопараметрических групп

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$$

образует r-параметрическую непрерывную группу, которая содержит тождественное преобразование, и преобразования которой упорядочиваются в пары взаимно обратных[2].

[2] Ли, Math. Annalen, том 8, стр. 303, 1874; Göttinger Nachrichten, 1874, стр. 533 и 540; Archiv for Math. og Naturv., Христиания, 1878 г.

Если мы имеем r независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_1(f)\cdots X_r(f),$$

отвечающих условиям предыдущей теоремы, то мы будем впредь говорить, что $X_1(f)\cdots X_r(f)$ порождают r-параметрическую группу, или же говорить просто *о r-параметрической группе* $X_1(f)\cdots X_r(f)$.

§ 42

Пусть $X_1(f)\cdots X_r(f)$ — r-параметрическая группа в переменных $x_1\cdots x_n$, а $Y_1(f)\cdots Y_m(f)$ — m-параметрическая группа в тех же переменных. Соотношения между $X_k(f)$ и $Y_\mu(f)$ соответственно пусть имеют вид

$$X_k\big(X_j(f)\big)-X_j\big(X_k(f)\big)=\sum_{s=1}^{r}c_{kjs}X_s(f)=(X_kX_j),$$

$$Y_\mu\big(Y_\nu(f)\big)-Y_\nu\big(Y_\mu(f)\big)=\sum_{s=1}^{m}c'_{\mu\nu s}Y_s(f)=(Y_\mu Y_\nu),$$

$$(k,j=1\cdots r,\quad \mu,\nu=1\cdots m).$$

Может случиться так, что эти группы имеют некоторые общие инфинитезимальные преобразования. Предположим, что их в точности l независимых, например

$$Z_\lambda(f)=\sum_{k=1}^{r}g_{\lambda k}X_k(f)=\sum_{\mu=1}^{m}h_{\lambda\mu}Y_\mu(f)\quad(\lambda=1\cdots l),$$

где $g_{\lambda k}$ и $h_{\lambda\mu}$ — константы. Тогда любое другое инфинитезимальное преобразование, содержащееся в обеих группах, можно получить линейно из $Z_1(f)\cdots Z_l(f)$. Но если составить выражения

$$Z_\lambda\big(Z_\nu(f)\big)-Z_\nu\big(Z_\lambda(f)\big)=(Z_\lambda Z_\nu),$$

то мы увидим, что они получаются линейно как из $X_1(f)\cdots X_r(f)$, так и из $Y_1(f)\cdots Y_m(f)$, т. е. что они являются общими для обеих групп. Следовательно, имеют место соотношения вида

$$Z_\lambda\big(Z_\nu(f)\big)-Z_\nu\big(Z_\lambda(f)\big)=(Z_\lambda Z_\nu)=\sum_{s=1}^{l}d_{\lambda\nu s}Z_s(f),$$

т. е. $Z_1(f)\cdots Z_l(f)$ порождают l-параметрическую группу.

Таким образом, мы имеем

Утверждение 2. *Если две непрерывные группы* $X_1(f)\cdots X_r(f)$ *и* $Y_1(f)\cdots Y_m(f)$ *имеют в точности* l *и не более общих независимых инфинитезимальных преобразований в одних и тех же переменных, то эти преобразования порождают, в свою очередь,* l*-параметрическую непрерывную группу.*

§ 43

Если уравнения $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ представляют собой семейство из ∞^r преобразований и кроме того удовлетворяют дифференциальным уравнениям специального вида

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r)\cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

то r инфинитезимальных преобразований

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

являются, как мы знаем, независимыми друг от друга и связаны, кроме того, согласно теореме 21, стр. 166, соотношениями вида

$$X_k\big(X_j(f)\big) - X_j\big((X_k(f)\big) = (X_k X_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs}\cdot X_s(f).$$

Семейство ∞^{r-1} однопараметрических групп

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$$

образует тогда r-параметрическую группу с тождественным преобразованием. Итак, мы можем сформулировать теорему 9, стр. 79, следующим образом.

Теорема 25. *Если семейство из* ∞^r *преобразований*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r)\cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

а $a_1^0 \cdots a_r^0$ — система значений параметров a, для которой $\psi_{jk}(a)$ ведут себя регулярно, и, кроме того, определитель

$$\sum \pm \psi_{11}(a) \cdots \psi_{rr}(a)$$

отличен от нуля, то можно считать, что любое преобразование $x_i' = f_i(x, a)$, параметры которого $a_1 \cdots a_r$ лежат в некоторой окрестности $a_1^0 \cdots a_r^0$, возникает за счет того, что сначала выполняется преобразование $\overline{x}_i = f_i(x, a^0)$, а затем совершенно определенное преобразование

$$x_i' = \overline{x}_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(\overline{x}) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

такой r-параметрической группы, которая порождается при наложенных условиях r независимыми инфинитезимальными преобразованиями

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r).$$

Теорема выше особенно интересна тогда, когда уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ представляют собой r-параметрическую группу, которая по крайней мере в области $((a))$ не содержит тождественного преобразования. Для этого случая мы сделаем еще несколько важных заключений.

Итак, пусть $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ — r-параметрическая группа без тождественного преобразования, и пусть в результате преобразований

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r),$$
$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r),$$

выполненных последовательно, получается преобразование

$$x'' = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r) = f_i\big(x_1 \cdots x_n, \varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b)\big).$$

При этом, если применить обозначения, введенные раньше, $x_1 \cdots x_n$ меняются произвольным образом в области $((x))$, $a_1 \cdots a_r$ и $b_1 \cdots b_r$ — в области $((a))$, тогда как положение точек x_i', x_i'' и c_k определено заданными уравнениями. Кроме того, имеют место дифференциальные уравнения специального вида:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r).$$

В дальнейшем пусть $a_1^0 \cdots a_r^0$, а также $b_1^0 \cdots b_r^0$ обозначают заданное положение в области $((a))$, а $\varphi_k(a^0, b^0)$ равно c_k^0. Напротив, под $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ мы будем понимать произвольные точки в области (a), так что уравнения

$$\overline{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r)$$

могут представлять любое преобразование данной группы.

Любое преобразование вида $\overline{x}_i = f_i(x, \overline{a})$ может быть получено путем выполнения преобразования $x_i' = f_i(x, a^0)$, а затем некоторого второго преобразования. Чтобы найти последнее, разрешим уравнения $x_i' = f_i(x, a^0)$ относительно $x_1 \cdots x_n$:

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1^0 \cdots a_r^0),$$

и подставим эти значения x_i в $\overline{x}_i = f_i(x, \overline{a})$. Так мы получим для искомого преобразования выражение вида

$$\overline{x}_i = \Phi_i(x_1' \cdots x_n', \overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r) \quad (i = 1 \cdots n); \tag{9}$$

a_k^0 при этом мы не пишем, т. к. рассматриваем их как числовые константы.

Преобразование (9) определено для всех систем значений $\overline{a}_k$ из области (a), и его выражение можно аналитически продолжить на всю область этих систем значений; это следует из условий, наложенных нами в свое время на характер функций f_i и F_i.

Теперь мы утверждаем, что преобразования семейства $\overline{x}_i = \Phi_i(x', \overline{a})$ для определенных значений параметров $\overline{a}_k$ принадлежат первоначально заданной группе $x_i' = f_i(x, a)$, а для некоторых других значений $\overline{a}_k$ — группе $X_1 f \cdots X_r f$ с тождественным преобразованием.

Первую часть только что выдвинутого утверждения мы докажем следующим образом. Мы знаем, что преобразования

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0), \quad \overline{x}_i = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r),$$

выполненные последовательно, дают в результате преобразование $\overline{x}_i = f_i(x, c)$, где $c_k = \varphi_k(a^0, b)$; причем в качестве $b_1 \cdots b_r$ мы можем подставить любую систему значений из области $((a))$, тогда как система значений $c_1 \cdots c_r$ лежит в области (a), а именно в некоторой окрестности точки $c_1^0 \cdots c_r^0$. Согласно вышесказанному преобразование $\overline{x}_i = f_i(x, c)$ получается также, если выполнить последовательно преобразования

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0), \quad \overline{x}_i = \Phi_i(x_1' \cdots x_n', \overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r)$$

и при этом выбрать $\overline{a}_k = c_k$. Следовательно, при подстановке $\overline{a}_k = \varphi_k(a^0, b)$ преобразование $\overline{x}_i = \Phi_i(x', \overline{a})$ будет совпадать с преобразованием $\overline{x}_i = f_i(x', b)$, т. е. *все преобразования $\overline{x}_i = \Phi_i(x', \overline{a})$, параметры которых $\overline{a}_k$ лежат в окрестности $c_1^0 \cdots c_r^0$, заданной при помощи уравнения $\overline{a}_k = \varphi_k(a^0, b)$, принадлежат заданной группе $x_i' = f_i(x, a)$.*

Чтобы доказать вторую часть нашего утверждения, вспомним теорему 25. Если $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ лежат в некоторой окрестности $a_1^0 \cdots a_r^0$, то согласно этой теореме можно получить преобразование $\overline{x}_i = f_i(x, a)$, выполнив сначала преобразование

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0),$$

а затем некоторое вполне определенное преобразование

$$\overline{x}_i = x_i' + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(x') + \cdots \tag{10}$$

той r-параметрической группы, которая порождается r независимыми инфинитезимальными преобразованиями

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Из прежних рассуждений (ср. гл. 4, стр. 78) мы также знаем, что соответствующее преобразование (10) находится, если выбрать подходящим образом $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ как независимые функции от $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, а затем определить $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ как функции от $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ путем разрешения. Но, с другой стороны, мы получим преобразование $\overline{x}_i = f_i(x, a)$ и тогда, когда выполним сначала преобразование $x_i' = f_i(x, a^0)$, а затем — преобразование $\overline{x}_i = \Phi_i(x', \overline{a})$. Значит, преобразование $\overline{x}_i = \Phi_i(x', \overline{a})$ принадлежит группе, порожденной $X_1 f \cdots X_r f$, коль скоро система значений $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ лежит в определенной окрестности точки $a_1^0 \cdots a_r^0$. Иными словами, уравнения $\overline{x}_i = \Phi_i(x', \overline{a})$ переходят в уравнения (10), если заменить $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ ранее упомянутыми функциями от $\lambda_1 \cdots \lambda_r$.

Тем самым выдвинутое нами выше утверждение полностью доказано.

Итак, уравнения преобразований $\overline{x}_i = \Phi_i(x', \overline{a})$ обладают следующими важными свойствами: если вместо $\overline{a}_k$ ввести при помощи уравнений $\overline{a}_k = \varphi_k(a^0, b)$ новые параметры $b_1 \cdots b_r$, то для некоторых областей переменных уравнения $\overline{x}_i = \Phi_i(x', \overline{a})$ принимают вид $\overline{x}_i = f_i(x', b)$; если же вместо $\overline{a}_k$ ввести новые параметры $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, то уравнения $\overline{x}_i = \Phi_i(x', \overline{a})$ для подходящих областей превращаются в уравнения

$$x_i = x_i' + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(x') + \ldots \quad (i = 1 \cdots n).$$

В этом заключается важное свойство исходной группы $x_i' = f_i(x, a)$. А именно: если мы в уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ введем новые параметры $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ вместо a_k, полагая $\overline{a}_k = \varphi_k(a^0, a)$, то получим уравнения преобразований $x_i' = \Phi_i(x, \overline{a})$, которые с учетом их аналитических продолжений представляют собой семейство преобразований, которому принадлежат все преобразования r-параметрической группы, содержащей тождественное преобразование.

Это выразить можно еще и так.

Теорема 26. *Всякая r-параметрическая группа $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$, не порожденная r независимыми инфинитезимальными преобразованиями, может быть получена из r-параметрической группы с r независимыми инфинитезимальными преобразованиями следующим образом: сначала составим дифференциальные уравнения*

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

которым удовлетворяют функции $x_i' = f_i(x, a)$, а затем положим

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = X_k(f) \quad (k = 1 \cdots r)$$

и составим конечные уравнения

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(x) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

той r-параметрической группы с тождественным преобразованием, которая порождается r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$. Тогда можно ввести в эти конечные уравнения такие новые параметры $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ вместо $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, что получаемые уравнения преобразований

$$x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_n, \overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

при аналитическом продолжении представляют собой семейство из ∞^r преобразований, включающее все ∞^r преобразований группы

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r).$$

§ 44

Несложно доказать, что группы, не содержащие тождественного преобразования, и преобразования которых не упорядочиваются в пары взаимно обратных, действительно существуют.

Уравнение

$$x' = ax$$

с произвольным параметром a представляет однопараметрическую группу. Если последовательно выполнить два преобразования

$$x' = ax, \quad x'' = bx'$$

этой группы, то получится преобразование

$$x'' = abx,$$

также принадлежащее этой группе. Отсюда следует, что семейство всех преобразований вида $x' = ax$, в которых абсолютная величина a меньше 1, также образует группу. Очевидно, что это семейство не содержит тождественного преобразования, а его преобразования не упорядочиваются в пары взаимно обратных.

Поэтому если можно было бы задать аналитическое выражение, которое представляет только те преобразования вида $x' = ax$, при которых абсолютная величина a меньше 1, то мы имели бы тем самым конечную непрерывную группу без тождественного преобразования и без обратных преобразований.

Аналитическое выражение с требуемым свойством действительно можно задать.

Известно, что функция

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a^{\nu}}{1 - a^{2\nu}}$$

разлагается в окрестности $a = 0$ в обычный степенной ряд по a, который сходится, если абсолютная величина числа a меньше 1. Такой ряд имеет вид

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} k_{\mu} a^{\mu} = \omega(a),$$

где k_{μ} — целые числа, зависящие от индекса μ. Поэтому если мы будем рассматривать комплексные значения a как точки плоскости, то $\omega(a)$ будет аналитической функцией от a, определенной внутри окружности, описанной вокруг точки $a = 0$ с радиусом 1.

Кроме того, известно, что функция $\omega(a)$ для таких значений a, абсолютная величина которых равна 1, уже не имеет смысла, так что указанная окружность вокруг точки $a = 0$ образует естественную границу для $\omega(a)$, за пределы которой эта функция не может быть продолжена аналитически.

Положим теперь $\omega(a) = \lambda$, затем пусть $|a^0| < 1$ и $\omega(a^0) = \lambda^0$; тогда можно разрешить уравнение $\omega(a) = \lambda$ относительно a, т. е. мы можем представить a как обычный степенной ряд от $\lambda - \lambda^0$, такой, что при $\lambda = \lambda^0$ получается, $a = a^0$, и что уравнение $\omega(a) = \lambda$ при подстановке выражения для a выполняется тождественно.

Пусть $a = \chi(\lambda)$; тогда $\chi(\lambda)$ — аналитическая функция, принимающая лишь такие значения, абсолютная величина которых меньше 1; это справедливо не только для найденного выше функционального элемента, представленного в окрестности $\lambda = \lambda^0$ обычным степенным рядом от $\lambda - \lambda^0$, но также и для любого аналитического продолжения этого функционального элемента.

Поэтому если положить

$$x' = \chi(\lambda) \cdot x,$$

то мы получим искомое аналитическое выражение для всех преобразований $x' = ax$, в которых $|a|$ меньше 1. Если теперь

$$x' = \chi(\lambda_1) \cdot x, \quad x'' = \chi(\lambda_2) \cdot x',$$

то мы имеем

$$x'' = \chi(\lambda_1)\,\chi(\lambda_2) \cdot x;$$

это уравнение, однако, можно всегда привести к виду

$$x'' = \chi(\lambda_3) \cdot x,$$

а так как $|\chi(\lambda_1)\,\chi(\lambda_2)| < 1$, то, положив $\chi(\lambda_1) \cdot \chi(\lambda_2) = \alpha$, мы получаем просто $\lambda_3 = \omega(\alpha)$.

Тем самым доказано, что уравнение $x' = \chi(\lambda) \cdot x$ с произвольным параметром λ представляет группу. Эта группа непрерывна и конечна, но не содержит тождественного преобразования, а ее преобразования не упорядочиваются в пары взаимно обратных. Наша цель — доказать, что группы такого типа существуют, — таким образом, достигнута. Кроме того, легко видеть, что подобным образом можно построить сколько угодно групп с таким свойством.

Примечание. В своих первых работах о конечных непрерывных группах преобразований Ли пытался доказать, что всякая r-параметрическая группа содержит тождественное преобразование, а также r независимых инфинитезимальных преобразований и порождается последними (ср., в частности, оба исследования в Archiv for Math. og Naturvid., том 1, Христиания, 1876 г.). Однако вскоре он увидел, что в его доказательстве были сделаны некоторые неявные предположения о поведении встречающихся функций; вследствие этого он ограничился рассмотрением таких групп, преобразования которых упорядочиваются в пары взаимно обратных, и показал, что упомянутое утверждение во всяком случае справедливо для таких групп (Math. Ann. том 16, стр. 441 ff.).

Позже, в 1884 году, Энгелю удалось построить конечную непрерывную группу, не содержащую тождественного преобразования и не упорядочивающую свои преобразования в пары взаимно обратных; таковой является группа, рассмотренная в данном параграфе.

Наконец, Ли обнаружил, что уравнения любой конечной непрерывной группы с r параметрами всегда могут быть получены путем введения новых параметров и аналитического продолжения из уравнений r-параметрической группы, содержащей тождественное преобразование и r независимых инфинитезимальных преобразований, ее конечные преобразования при этом упорядочиваются в пары взаимно обратных (теорема 26).

§ 45

В главе 4, стр. 83, мы обнаружили, что всякая r-параметрическая группа, содержащая r независимых инфинитезимальных преобразований, обладает тем свой-

ством, что ее конечные преобразования упорядочиваются в пары взаимно обратных. С другой стороны, в конце предыдущего параграфа упоминалось, что это утверждение можно обратить, то есть что любая r-параметрическая группа, преобразования которой упорядочиваются в пары взаимно обратных, содержит тождественое преобразование и порождается r независимыми инфинитезимальными преобразованиями. Мы покажем, как можно убедиться в справедливости этого утверждения.

Пусть уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

с r существенными параметрами $a_1 \cdots a_r$ представляют r-параметрическую группу с попарно обратными преобразованиями. В результате разрешения относительно $x_1 \cdots x_n$ получаем

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Если система значений $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$ лежит в некоторой окрестности точки $\varepsilon_1 = 0, \cdots \varepsilon_r = 0$, то мы можем, очевидно, выполнить последовательно преобразования

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r),$$
$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 + \varepsilon_1, \cdots a_r + \varepsilon_r)$$

и получим тогда преобразование

$$x_i'' = f_i\big(F_1(x', a) \cdots F_n(x', a), a_1 + \varepsilon_1, \cdots a_r + \varepsilon_r\big),$$

которое также принадлежит нашей группе и которое можно разложить по степеням $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$:

$$x_i'' = x_i' + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \left[\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k}\right]_{x = F(x', a)} + \cdots . \tag{11}$$

Если здесь положить все ε_k равными нулю, то мы получим тождественное преобразование, которое, таким образом, имеется в нашей группе. Если же выбрать все ε_k бесконечно малыми, то мы получим преобразования нашей группы, бесконечно мало отличающиеся от тождественного преобразования.

Для краткости положим

$$\left[\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k}\right]_{x = F(x', a)} = \eta_{ki}(x', a), \tag{12}$$

так что преобразования (11) принимают вид

$$x_i'' = x_i' + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \eta_{ki}(x', a) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n).$$

Затем в переменных $x'_1 \cdots x'_n$ образуем r инфинитезимальных преобразований

$$Y'_k f = \sum_{i=1}^{n} \eta_{ki}(x', a) \frac{\partial f}{\partial x'_k} \quad (k = 1 \cdots r),$$

которые для неопределенных значений a_k, безусловно, независимы друг от друга. В противном случае имелось бы r не обращающихся одновременно в нуль величин $\varrho_1 \cdots \varrho_r$, которые удовлетворяли бы тождественно уравнению

$$\sum_{k=1}^{r} \varrho_k Y'_k f = 0$$

и при этом не зависели бы от $x'_1 \cdots x'_n$; из этого следовали бы тогда n соотношений

$$\sum_{k=1}^{r} \varrho_k \eta_{ki}(x', a) = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

которые, в свою очередь, переходили бы при подстановке $x'_i = f_i(x, a)$ в соотношение

$$\sum_{k=1}^{r} \varrho_k \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k} = 0 \quad (i = 1 \cdots n).$$

Такие соотношения, однако, не могут иметь места, поскольку параметры $a_1 \cdots a_r$ по условию являются существенными в уравнениях $x'_i = f_i(x, a)$ (ср. гл. 1, стр. 13).

Отсюда мы заключаем, что $Y'_1 f \cdots Y'_r f$ и тогда остаются независимыми друг от друга, когда в качестве $a_1 \cdots a_r$ берется определенная система значений общего положения. Если $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ — такая система, то мы запишем

$$\eta_{ki}(x', \bar{a}) = \xi_{ki}(x');$$

то есть тогда и r инфинитезимальных преобразований

$$X'_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

не зависят друг от друга. Остается показать, что наша группа порождена r инфинитезимальными преобразованиями $X'_k f$.

Выполним последовательно два преобразования нашей группы, а именно: сначала преобразование

$$x''_i = x'_i + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \eta_{ki}(x', a) + \cdots,$$

а затем преобразование

$$x'''_i = x''_i + \sum_{k=1}^{r} \vartheta_k \eta_{ki}(x'', a) + \cdots =$$

$$= x_i'' + \sum_{k=1}^{r} \vartheta_k \xi_{ki}(x'') + \cdots .$$

Если, как и прежде, учитывать только члены первого порядка, то мы получим уже указанным способом преобразование

$$x_i''' = x_i' + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \eta_{ki}(x', a) + \sum_{k=1}^{r} \vartheta_k \xi_{ki}(x') + \ldots ,$$

которое, разумеется, принадлежит нашей группе, причем для всех значений параметров $a, \varepsilon, \vartheta$ внутри определенных областей.

Если бы среди инфинитезимальных преобразований $Y_1' f \cdots Y_r' f$ имелось хоть одно, не зависящее от $X_1' f \cdots X_r' f$, то последние записанные уравнения представляли бы согласно предложению 4, гл. 3, стр. 71, по крайней мере, ∞^{r+1} различных преобразований, тогда как наша группа содержит лишь ∞^r различных преобразований. Следовательно, любое из инфинитезимальных преобразований $Y_k' f$ должно получаться линейно из $X_1' f \cdots X_r' f$, какие бы значения ни принимали a. Тогда при помощи рассуждений, подобных приведенным в гл. 2, стр. 41, можно увидеть, что имеют место r тождеств вида

$$Y_k' f \equiv \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot X_j' f \quad (k = 1 \cdots r),$$

где ψ_{jk} ведут себя регулярно в некоторой окрестности $a_k = \overline{a}_k$; кроме того, определитель из ψ_{jk}, разумеется, не обращается в нуль тождественно, иначе $Y_1' f \cdots Y_r' f$ не были бы независимыми инфинитезимальными преобразованиями.

Теперь понятно, что $\eta_{ki}(x', a)$ выражаются через $\xi_{ji}(x')$ следующим образом:

$$\eta_{ki}(x', a) \equiv \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x').$$

Если, наконец, вспомнить уравнения (12), которые задают функции $\eta_{ki}(x', a)$, то мы увидим, что дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial x_1'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jk}(a) \cdot \psi_{ji}(x') \tag{13}$$

выполняются тождественно при подстановке $x_i' = f_i(x, a)$.

Тем самым непосредственно доказано, что всякая группа с попарно обратными преобразованиями удовлетворяет определенным уравнениям характеристического вида (13); таким образом, получена отправная точка для рассуждений в главах 3 и 4.

Если бы можно было теперь доказать, что определитель функций $\psi_{jk}(a)$ для значений параметров $a_1^0 \cdots a_r^0$ тождественного преобразования имеет значение, отличное от нуля, то из только что приведенных рассуждений следовало бы, что группа $x_i' = f_i(x, a)$ порождается r инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$. Из общих соображений, однако, нельзя доказать, что определитель $\sum \pm \psi_{11}(a^0) \cdots \psi_{rr}(a^0)$ отличен от нуля. Этой неприятности можно избежать следующим образом.

Известно, что уравнения

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \xi_{ki}(x) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n) \tag{14}$$

представляют преобразования группы $x_i' = f_i(x, a)$, когда ε_k принадлежат некоторой окрестности точки $\varepsilon_1 = 0, \cdots \varepsilon_r = 0$; кроме того, можно показать, что таким образом получены *все* преобразования $x_i' = f_i(x, a)$, параметры которых a_k лежат в некоторой окрестности $a_1^0 \cdots a_r^0$. Тогда, взяв за основу уравнения (14), легко видеть, что x', рассматриваемые как функции от ε и x, удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида.

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon_k} = \sum_{j=1}^{r} \chi_{jk}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n, k = 1 \cdots r),$$

причем определитель $\chi(\varepsilon)$ для $\varepsilon_1 = 0, \cdots \varepsilon_r = 0$ не обращается в нуль. Таким образом, мы, наконец, приходим к следующему результату:

Каждая r-параметрическая группа с попарно обратными преобразованиями содержит тождественное преобразование, а также r независимых инфинитезимальных преобразований, которыми она порождается.

§ 46

Пусть заданы r независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_k f = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{k\nu}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \cdots r),$$

удовлетворяющих попарно соотношениям вида

$$X_i\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_i(f)\big) = (X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s(f) \quad (i = 1 \cdots r) \tag{8}$$

с определенными константами c_{iks}, так что согласно теореме 24, стр. 176, совокупность всех однопараметрических групп вида

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$$

образует r-параметрическую группу. Мы покажем, что константы c_{iks}, в свою очередь, связаны в вышеупомянутых соотношениях некоторыми уравнениями.

Прежде всего, мы имеем $(X_iX_k) = -(X_kX_i)$, откуда немедленно следует: $c_{iks} = -c_{kis}$. Другие соотношения мы находим, если число r больше двух. В этом случае (гл. 5, § 26, стр. 105) для каждых трех X_if, X_kf, X_jf из r инфинитезимальных преобразований $X_1f \cdots X_rf$ имеет место тождество Якоби:

$$\big((X_iX_k)X_j\big) + \big((X_kX_j)X_i\big) + \big((X_jX_i)X_k\big) = 0 \quad (i,k,j = 1 \cdots r).$$

Отсюда, используя вышестоящие соотношения (8), мы сначала получаем

$$\sum_{s=1}^{r} \{c_{iks}(X_sX_j) + c_{kjs}(X_sX_i) + c_{jis}(X_sX_k)\} = 0,$$

а при повторном использовании этих соотношений:

$$\sum_{s,\tau=1}^{r} \{c_{iks}c_{sj\tau} + c_{kjs}c_{si\tau} + c_{jis}c_{sk\tau}\} X_\tau f = 0.$$

Но поскольку инфинитезимальные преобразования $X_\tau f$ друг от друга независимы, то это уравнение распадается на r следующих:

$$\sum_{s=1}^{r} \{c_{iks}c_{sj\tau} + c_{kjs}c_{si\tau} + c_{jis}c_{sk\tau}\} = 0 \quad (\tau = 1 \cdots r). \tag{15}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 27.[3] *Если r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1(f) \cdots X_r(f)$ таковы, что попарно удовлетворяют соотношениям вида*

$$X_i\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_i(f)\big) = (X_iX_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}X_s(f) \quad (i,k = 1 \cdots r) \tag{8}$$

с некоторыми константами c_{iks}, так что совокупность всех ∞^{r-1} однопараметрических групп вида

$$\lambda_1X_1(f) + \cdots + \lambda_rX_r(f)$$

[3] Ли, Archiv for Math. og Naturv., т. 1, стр. 192, Христиания, 1876.

образует r-параметрическую группу, то между константами c_{iks} имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} c_{ik\tau} + c_{ki\tau} = 0, \\ \sum_{s=1}^{r} \{c_{iks}c_{sj\tau} + c_{kjs}c_{si\tau} + c_{jis}c_{sk\tau}\} = 0, \\ (i, k, j, \tau = 1 \cdots r). \end{cases} \tag{16}$$

Уравнения (16) совершенно независимы от числа переменных $x_1 \cdots x_n$ в инфинитезимальных преобразованиях $X_1(f) \cdots X_r(f)$. Поэтому мы можем из предыдущего утверждения заключить еще следующее.

Даже если число n независимых переменных $x_1 \cdots x_n$ выбирается совершенно произвольно, то и тогда не для каждой системы констант c_{iks} $(i, k, s = 1 \cdots r)$ можно задать r независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_k(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{k\nu}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \cdots r),$$

попарно удовлетворяющих соотношениям

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s(f) \quad (i, k = 1 \cdots r).$$

Для существования такого рода инфинитезимальных преобразований необходимо, скорее, выполнение уравнений (16); это же условие является и достаточным, как мы вскоре увидим.

Там, где особо не оговорено противное, мы ограничимся во всех следующих исследованиях такими r-параметрическими группами, которые содержат r независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

и, следовательно, порождены ими. При этом мы всегда принимаем во внимание лишь такие системы значений $x_1 \cdots x_n$, для которых все ξ_{ki} ведут себя регулярно.

Далее мы еще раз подчеркнем, что будем впредь часто для краткости обозначать r-параметрическую группу с независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$ как группу $X_1 f \cdots X_r f$. Среди

различных форм, которые могут принимать конечные уравнения r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, *назовем нижеследующую*

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} c_k \xi_{ki}(x) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

канонической формой группы.

Глава 10

Системы дифференциальных уравнений в частных производных, общие решения которых зависят лишь от конечного числа произвольных констант

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных произвольного порядка, заданную в переменных $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$. Пусть она содержит, помимо $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$, только производные от $z_1 \cdots z_m$ по $x_1 \cdots x_n$, так что $x_1 \cdots x_n$ будут рассматриваться как независимые друг от друга переменные, тогда как $z_1 \cdots z_m$ определяются как функции от $x_1 \cdots x_n$, такие, что система тождественно выполняется.

Наша система дифференциальных уравнений ни в коем случае не должна быть совершенно произвольной, а должна обладать некоторыми специальными свойствами. Мы полагаем, что она удовлетворяет в том виде, как задана, следующим условиям:

Первое. Если s — старший порядок производных, встречающихся в системе, то в силу уравнений системы путем *разрешения* все производные s-го порядка $z_1 \cdots z_m$ по $x_1 \cdots x_n$ должны выражаться через производные от первого до $(s-1)$-го порядка и через $z_1 \cdots z_m$, $x_1 \cdots x_n$, а выразить аналогичным образом все производные $(s-1)$-го порядка через производные более низкого порядка и через $z_1 \cdots z_m$, $x_1 \cdots x_n$ должно быть невозможно.

Второе. В результате однократного дифференцирования данной системы по отдельным переменным $x_1 \cdots x_n$ и комбинирования полученных уравнений должны получаться лишь такие соотношения между $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ и производными от первого до $(s-1)$-го порядка, которые уже следуют из заданной системы.

Эти специальные условия относительно вида данной системы уравнений мы налагаем только ради удобства. Само собой разумеется, что после-

дующие рассуждения можно применить вообще к любой системе дифференциальных уравнений в частных производных, которая может принять вышеупомянутый вид в результате дифференцирований и исключений.

Из известной теории уравнений в полных дифференциалах тогда легко следует, что всякая система дифференциальных уравнений, обладающая вышеописанными свойствами, является интегрируемой, и что самые общие функции $z_1 \cdots z_m$ от $x_1 \cdots x_n$, удовлетворяющие этой системе, зависят лишь от конечного числа произвольных констант.

Мы хотим теперь обосновать это утверждение другим способом, сведя упомянутую задачу интегрирования к задаче нахождения систем уравнений, допускающих некоторое число определенных инфинитезимальных преобразований; последнюю задачу мы можем решить непосредственно на основании результатов главы 7.

С другой стороны, мы также покажем, что рассматриваемое утверждение можно обратить: мы докажем, что всякая система уравнений

$$z_\mu = Z_\mu(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

содержащая конечное число r произвольных параметров a_k, представляет собой самую общую систему решений некоторой системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Для нас более важным является второе утверждение; мы его уже использовали ранее (ср. введение, стр. 5, а также гл. 2, стр. 39) и будем вновь применять в следующей главе.

Поэтому желательно вывести оба эти утверждения независимо, без привлечения теории уравнений в полных дифференциалах.

§ 47

Обозначим через ε_k число всех производных k-го порядка $z_1 \cdots z_m$ по $x_1 \cdots x_n$. Для самих производных k-го порядка мы введем обозначение $p_i^{(k)}$, где i пробегает значения $1, 2 \cdots \varepsilon_k$; но оставим за собой право писать вместо $p_1^{(0)} \cdots p_{\varepsilon_0}^{(0)}$ просто $z_1 \cdots z_m$. Наконец, положим

$$\frac{\partial p_i^{(k)}}{\partial x_j} = p_{ij}^{(k)},$$

так что $p_{ij}^{(k)}$ означает одну из ε_{k+1} производных $(k+1)$-го порядка.

В этих обозначениях мы можем записать исследуемую систему дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} W_1(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) = 0, \cdots W_q(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) = 0, \\ p_{ij}^{(s-1)} = P_{ij}(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) \quad (i = 1 \cdots \varepsilon_{s-1}, \quad j = 1 \cdots n). \end{cases} \tag{1}$$

При этом мы полагаем, что уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ независимы друг от друга. Конечно, $n\varepsilon_{s-1}$ уравнений $p_{ij}^{(s-1)} = P_{ij}$ независимы от $W = 0$, но не друг от друга, поскольку $n\varepsilon_{s-1}$ выражений $p_{ij}^{(s-1)}$ представляют собой не только различные производные s-го порядка. В последующем, однако, пользоваться вышеупомянутым способом записи удобнее, чем записывать систему уравнений (1) в виде

$$W_1 = 0, \cdots W_q = 0, p_i^{(s)} = P_i(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) \quad (i = 1 \cdots \varepsilon_s).$$

Наша система уравнений (1) по условию обладает свойством не давать никаких новых соотношений между $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ при однократном дифференцировании по x. Все соотношения между $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$, получающиеся в результате однократного дифференцирования системы (1), должны, таким образом, являться следствием уравнений $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$.

Очевидно, мы найдем все такие соотношения, если продифференцируем (1) по каждой из n переменных $x_1 \cdots x_n$, а затем уберем все производные $(s+1)$-го порядка и заменим все производные s-го порядка их значениями из (1).

Путем дифференцирования $W_k = 0$ и последующего исключения производных s-го порядка мы получим уравнения

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_\nu} + \sum_{i=1}^{m} p_{i\nu}^{(0)} \frac{\partial W_k}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} p_{i\nu}^{(1)} \frac{\partial W_k}{\partial p_i^{(1)}} + \cdots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\varepsilon_{s-2}} p_{i\nu}^{(s-2)} \frac{\partial W_k}{\partial p_i^{(s-2)}} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_{s-1}} P_{i\nu} \frac{\partial W_k}{\partial p_i^{(s-1)}} = 0$$

$$(k = 1 \cdots q, \quad \nu = 1 \cdots n).$$

Согласно вышесказанному, эти уравнения являются следствием уравнений $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$. Другими словами: *система уравнений от переменных* $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ *допускает следующие* n *инфинитезимальных*

преобразований:

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_\nu f = \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} + \sum_{i=1}^{m} p_{i\nu}^{(0)} \dfrac{\partial f}{\partial z_i} + \cdots + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{\varepsilon_{s-2}} p_{i\nu}^{(s-2)} \frac{\partial f}{\partial p_i^{(s-2)}} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_{s-1}} P_{i\nu} \frac{\partial f}{\partial p_i^{(s-1)}} \\ \qquad (\nu = 1 \cdots n), \end{array}\right. \tag{2}$$

от тех же переменных (ср. гл. 7, стр. 122).

С другой стороны, если продифференцировать уравнения $p_{ij}^{(s-1)} = P_{ij}$ по x_ν и затем исключить все производные s-го порядка, то мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} p_{ij}^{(s-1)} = \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_j} p_i^{(s-1)} = \Omega_\nu(P_{ij}).$$

Из этих уравнений надо еще убрать все производные порядка $s+1$. Легко видеть, что при этом получаются лишь следующие соотношения:

$$\Omega_\nu(P_{ij}) - \Omega_j(P_{i\nu}) = 0 \quad (\nu, j = 1 \cdots n,\ i = 1 \cdots \varepsilon_{s-1}), \tag{3}$$

которые также должны быть следствием уравнений $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$.

Тем самым свойства системы (1), затребованные в начале главы, сформулированы аналитически.

Предположим теперь, что нам дана некоторая система решений

$$z_1 = \varphi_1(x_1 \cdots x_n), \cdots z_m = \varphi_m(x_1 \cdots x_n)$$

дифференциальных уравнений (1). Дифференцируя ее, мы получим $p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}, p^{(s)}$, представленные как функции от $x_1 \cdots x_n$:

$$p_{i_1}^{(1)} = \varphi_{i_1}^{(1)}(x_1 \cdots x_n), \cdots p_{i_{s-1}}^{(s-1)} = \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}(x_1 \cdots x_n), p_{i_{s-1}\nu}^{(s-1)} = \frac{\partial \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}}{\partial x_\nu}$$
$$(i_k = 1, 2 \cdots \varepsilon_k, \quad \nu = 1 \cdots n),$$

и если подставить эти выражения, а также выражения для $z_1 \cdots z_m$ в уравнения (1), то мы, конечно же, получим только тождества. Отсюда следует, что уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ при подстановке

$$z_\mu = \varphi_\mu(x_1 \cdots x_n),\ p_{i_1}^{(1)} = \varphi_{i_1}^{(1)}(x_1 \cdots x_n), \cdots p_{i_{s-1}}^{(s-1)} = \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}(x_1 \cdots x_n) \tag{4}$$
$$(\mu = 1 \cdots m,\ i_k = 1 \cdots \varepsilon_k),$$

в свою очередь, тоже превращаются в тождества; это можно, очевидно, выразить также следующим образом: система уравнений (4) включает в себя уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$.

Далее мы утверждаем, что система уравнений (4) допускает вышеупомянутые инфинитезимальные преобразования $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$. Действительно, сначала в силу (4) обращаются в нуль все выражения

$$\Omega_\nu(z_\mu - \varphi_\mu) = p^{(0)}_{\mu\nu} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu},$$

$$\Omega_\nu\left(p^{(1)}_{i_1} - \varphi^{(1)}_{i_1}\right) = p^{(1)}_{i_1\nu} - \frac{\partial \varphi^{(1)}_{i_1}}{\partial x_\nu},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_\nu\left(p^{(s-2)}_{i_{s-2}} - \varphi^{(s-2)}_{i_{s-2}}\right) = p^{(s-2)}_{i_{s-2}\nu} - \frac{\partial \varphi^{(s-2)}_{i_{s-2}}}{\partial x_\nu},$$

поскольку уравнения (4) получены из $z_\mu - \varphi_\mu = 0$ дифференцированием по $x_1 \cdots x_n$. Но и выражения

$$\Omega_\nu(p^{(s-1)}_{i_{s-1}} - \varphi^{(s-1)}_{i_{s-1}}) = P_{i_{s-1}\nu} - \frac{\partial \varphi^{(s-1)}_{i_{s-1}}}{\partial x_\nu}$$

также обращаются в нуль в силу (4), т. к. уравнения

$$p^{(s-1)}_{i_{s-1}\nu} = P_{i_{s-1}\nu}$$

выполняются тождественно, как уже было сказано выше, при подстановке

$$z_\mu = \varphi_\mu, \quad p^{(1)}_{i_1} = \varphi^{(1)}_{i_1}, \cdots p^{(s-1)}_{i_{s-1}\nu} = \varphi^{(s-1)}_{i_{s-1}}, \quad p^{(s-1)}_{i_{s-1}\nu} = \frac{\partial \varphi^{(s-1)}_{i_{s-1}}}{\partial x_\nu}.$$

Тем самым сформулированное выше утверждение доказано.

Теперь, наоборот, предположим, что задана система уравнений вида (4), о которой мы не знаем ничего, кроме того, что она допускает инфинитезимальные преобразования $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ и включает в себя уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$.

Очевидно, что все уравнения (4) получаются из уравнений $z_\mu = \varphi_\mu$ в результате дифференцирования по $x_1 \cdots x_n$. Кроме того, поскольку при

наложенных условиях уравнения

$$\Omega_\nu\left(p_{i_{s-1}}^{(s-1)} - \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}\right) = P_{i_{s-1}\nu} - \frac{\partial \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}}{\partial x_\nu} = 0,$$

так же как и уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$, являются следствием системы (4), то система уравнений (1) выполняется тождественно, если произвести подстановку (4), а затем положить $p_{i\nu}^{(s-1)} = \dfrac{\partial \varphi_i^{(s-1)}}{\partial x_\nu}$. Таким образом, уравнения $z_\mu = \varphi_\mu$ представляют собой систему решений дифференциальных уравнений (1).

Отсюда мы видим: всякая система решений $z_\mu = \varphi_\mu$ дифференциальных уравнений (1) дает совершенно определенную систему уравнений вида (4), допускающую инфинитезимальные преобразования $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ и включающую в себя уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$; и наоборот, всякая система уравнений вида (4), обладающая вышеуказанными свойствами, дает совершенно определенную систему решений дифференциальных уравнений (1). *Следовательно, задача нахождения всех систем решений дифференциальных уравнений* (1) *эквивалентна задаче нахождения всех систем уравнений вида* (4), *допускающих инфинитезимальные преобразования* $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$, *а также включающих в себя уравнения* $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$. *Если известно самое общее решение одной из этих задач, то одновременно получается и самое общее решение другой.*

Эту новую задачу мы можем, однако, решить на основании рассуждений из гл. 7, стр. 131.

Согласно утверждению 5, гл. 7, стр. 131, любая из искомых систем уравнений вместе с $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ в то же время допускает все инфинитезимальные преобразования вида $\Omega_\nu\big(\Omega_j(f)\big) - \Omega_j\big(\Omega_\nu(f)\big)$. В результате вычисления получаем

$$\Omega_\nu\big(\Omega_j(f)\big) - \Omega_j\big(\Omega_\nu(f)\big) = \sum_{i=1}^{\varepsilon_{s-1}} \{\Omega_\nu(P_{ij}) - \Omega_j(P_{i\nu})\} \frac{\partial f}{\partial p_i^{(s-1)}} \quad (\nu, j = 1 \cdots n),$$

поскольку выражения

$$\Omega_\nu(p_{ij}^{(k)}) - \Omega_j(p_{i\nu}^{(k)})$$

одновременно обращаются в нуль, если $k < s-1$. Но мы видели ранее, что уравнения (3)

$$\Omega_\nu(P_{ij}) - \Omega_j(P_{i\nu}) = 0$$

являются следствием уравнений $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$. Поэтому для систем значений $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$, удовлетворяющих системе уравнений $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$, имеют место соотношения вида

$$\Omega_\nu\big(\Omega_j(f)\big) - \Omega_j\big(\Omega_\nu(f)\big) = \sum_{\tau=1}^{n} \omega_{\nu j\tau}(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) \cdot \Omega_\tau f \quad (\nu, j = 1 \cdots n),$$

где все функции $\omega_{\nu j\tau}$ равны нулю, а значит, заведомо ведут себя регулярно для систем значений из $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$.

Кроме того, необходимо подчеркнуть, что среди определителей порядка n матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 & p_{11}^{(0)} & \cdot & p_{\varepsilon_{s-2}1}^{(s-2)} & P_{11} & \cdot & P_{\varepsilon_{s-1}1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & p_{1n}^{(0)} & \cdot & p_{\varepsilon_{s-2}n}^{(s-2)} & P_{1n} & \cdot & P_{\varepsilon_{s-1}n} \end{vmatrix}$$

один принимает значение 1 и потому не может обращаться в нуль ни для одной из искомых систем.

Отсюда видно, что мы имеем дело со специальным случаем, решение которого дано в гл. 7, теорема 19, стр. 147. С помощью этой теоремы мы можем выписать вообще все системы уравнений, допускающие $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ и включающие в себя уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$. Не представляет труда выделить те из них, которые могут принимать вид (4).

Из системы уравнений, допускающей инфинитезимальные преобразования $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$, никогда нельзя получить соотношение только между переменными $x_1 \cdots x_n$. Это следует из приведенной теоремы и можно легко увидеть непосредственно. Поэтому уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ можно разрешить относительно q из $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1}$ величин $z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$. Если мы это сделаем, то получим q из $\sum \varepsilon_k$ переменных $z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$, выраженными через $\sum \varepsilon_k - q$ остальных и через $x_1 \cdots x_n$.

После такой подготовки мы можем построить укороченные инфинитезимальные преобразования, о которых идет речь в теореме. Мы получим их, если отбросим из $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ все члены с производными функции f по q переменным, выбранным из $z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$, а затем в оставшихся членах заменим эти q переменных на их выражения как функции от $\sum \varepsilon_k - q$ остальных переменных и от x.

Полученные таким образом n инфинитезимальных преобразований, которые можно обозначить $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_n f$, содержат $n - q + \sum \varepsilon_k$ независимых переменных и, кроме того, согласно этой теореме находятся попарно

в соотношениях

$$\overline{\Omega}_\nu\big(\overline{\Omega}_j(f)\big) - \overline{\Omega}_j\big(\overline{\Omega}_\nu(f)\big) \equiv 0 \quad (\nu, j = 1 \cdots n).$$

Следовательно, n независимых друг от друга уравнений $\overline{\Omega}_1 f = 0, \cdots \overline{\Omega}_n f = 0$ образуют n-параметрическую полную систему с $\sum \varepsilon_k - q$ независимыми решениями: $u_1, u_2 \cdots u_{\sum \varepsilon_k - q}$. Если эти решения найдены, то можно непосредственно задать все системы уравнений, допускающие инфинитезимальные преобразования $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ и включающие в себя уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$. Общий вид подобной системы уравнений таков: $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ с произвольно добавленными соотношениями между $\sum \varepsilon_k - q$ решениями u.

Речь идет теперь не обо всех системах уравнений такого вида, а только о тех, которые могут быть приведены к виду (4). Всякая система уравнений с этим свойством содержит в точности $\sum \varepsilon_k$ независимых решений, и потому может принимать вид

$$W_1 = 0, \cdots W_q = 0, \quad u_1 = a_1, \cdots u_{\sum \varepsilon_k - q} = a_{\sum \varepsilon_k - q}, \tag{5}$$

где a — константы. Но всякая система уравнений этого вида может быть разрешена относительно $\sum \varepsilon_k$ переменных $z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$, поскольку она допускает инфинитезимальные преобразования $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ и поэтому не может иметь в качестве следствия никаких соотношений, только между $x_1 \cdots x_n$. Если мы произведем такое разрешение, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} z_\mu = Z_\mu(x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots), p^{(1)}_{i_1} = \Pi^{(1)}_{i_1}(x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots), \\ \cdots p^{(s-1)}_{i_{s-1}} = \Pi_{i_{s-1}}(x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots) \\ (\mu = 1 \cdots m,\ i_k = 1 \cdots \varepsilon_k), \end{cases} \tag{5'}$$

удовлетворяющую всем поставленным условиям: она допускает инфинитезимальные преобразования $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$, включает в себя уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ и имеет вид (4). Если мы теперь рассмотрим $\sum \varepsilon_k - q$ параметров a в качестве произвольных констант, то, очевидно, получим самую общую систему уравнений с требуемым свойством.

Отсюда, согласно вышесказанному, следует, что уравнения

$$z_\mu = Z_\mu(x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots) \quad (\mu = 1 \cdots m) \tag{6}$$

представляют собой систему решений дифференциальных уравнений (1), причем наиболее общую систему решений. Мы утверждаем, что в этой

системе решений все $\sum \varepsilon_k - q$ произвольных констант a являются существенными.

Для доказательства нашего утверждения напомним, что уравнения (5′) могут быть получены из уравнений $z_\mu = Z_\mu$ путем дифференцирования по $x_1 \cdots x_n$ при условии, что $p^{(1)}, p^{(2)} \cdots$ снова рассматриваются как производные z по x. Если бы $\sum \varepsilon_k - q$ параметров a в уравнениях (6) не были существенными, то число параметров можно было бы уменьшить за счет введения подходящих функций от них. Но тем самым, согласно вышесказанному, одновременно уменьшилось бы число параметров в уравнениях (5′), что невозможно, поскольку уравнения (5′) приводятся к виду (5), откуда непосредственно следует, что все параметры a в (5′) являются существенными. Это противоречие, а значит, сделанное выше предположение неверно, и все параметры a существенны также и в уравнениях (6).

Следовательно, мы можем сформулировать

Утверждение 1. *Если система дифференциальных уравнений в частных производных s-го порядка вида*

$$F_\sigma \left(x_1 \cdots x_n,\ z_1 \cdots z_m,\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^s z_m}{\partial x_n^s} \right) = 0 \quad (\sigma = 1, 2 \cdots)$$

обладает тем свойством, что все производные функций z по x s-го порядка могут быть выражены через производные более низкого порядка, $z_1 \cdots z_m$ и $x_1 \cdots x_n$, тогда как это условие справедливо не для всех производных $(s-1)$-го порядка, и если, кроме того, эта система при однократном дифференцировании по x дает лишь такие соотношения между $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ и производными от первого до $(s-1)$-го порядка, которые следуют из самой системы, то общая система решений

$$z_\mu = \varphi_\mu(x_1 \cdots x_n) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

данной системы дифференциальных уравнений содержит лишь конечное число произвольных констант. Это число равно $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - q$, где ε_k — число производных k-го порядка от $z_1 \cdots z_m$ по $x_1 \cdots x_n$, а q — число независимых соотношений, которые дает данная система между $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ и производными от первого до $(s-1)$-го порядка. Общая система решений $z_\mu = \varphi_\mu$ находится при помощи интегрирования n-параметрической полной системы от $n - q + \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{s-1}$ независимых переменных.

При доказательстве предыдущего утверждения мы полагали, что уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ разрешимы относительно q из величин

$z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$. Собственно, совершенно безразлично, относительно каких из этих величин они разрешаются; но поскольку уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ являются дифференциальными, а $p^{(1)}, p^{(2)} \cdots$ обозначают производные, то целесообразно произвести данное разрешение некоторым специальным способом, который мы теперь и разберем.

Сначала, исключая из уравнений $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ все производные $p^{(1)}, p^{(2)} \cdots p^{(s-1)}$, мы получим, скажем, ν_0 независимых уравнений только между x и z и можем поэтому представить ν_0 величин z как функции от $\varepsilon_0 - \nu_0 = m - \nu_0$ остальных и x.

Выражения для этих ν_0 величин z подставим в уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$, которые теперь сводятся к $q - \nu_0$ независимым друг от друга. Затем устраним из этих $q - \nu_0$ уравнений все производные $p^{(2)} \cdots p^{(s-1)}$ и получим таким образом, скажем, ν_1 друг от друга независимых уравнений, при помощи которых мы можем выразить ν_1 из величин $p^{(1)}$ через $\varepsilon_1 - \nu_1$ остальных, через $\varepsilon_0 - \nu_0$ величин z и через $x_1 \cdots x_n$.

Если мы будем продолжать действовать описанным образом, то система уравнений $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ будет в конце концов разрешена относительно ν_k из ε_k производных $p^{(k)}$, где под k понимается произвольное из чисел $0, 1, 2 \cdots s-1$. При этом каждый раз эти ν_k из величин $p^{(k)}$ выражаются через $\varepsilon_k - \nu_k$ остальных, через некоторые из производных более низкого порядка $p^{(k-1)} \cdots p^{(1)}, p^{(0)}$ и через x. Сумма $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{s-1}$, разумеется, равна q. Наконец, можно показать, что ν_k всегда меньше, чем ε_k. Прежде всего, ν_{s-1} заведомо меньше ε_{s-1}, т. к. мы предположили, что не все производные $(s-1)$-го порядка в нашей системе дифференциальных уравнений можно выразить через производные более низкого порядка и через x. Но если бы какое-либо другое число из ν_k равнялось ε_k, то мы имели бы

$$p_i^{(k)} = F_i(x_1, z, p^{(1)} \cdots p^{(k-1)}) \quad (i = 1, 2 \cdots \varepsilon_k);$$

а поскольку система уравнений $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ допускает инфинитезимальные преобразования $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$, то и все уравнения

$$p_{i\nu}^{(k)} = \Omega_\nu(F_i) \quad (i = 1 \cdots \varepsilon_k;\ \nu = 1 \cdots n)$$

должны были бы являться следствием уравнений $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$, т. е. мы имели бы $\nu_{k+1} = \varepsilon_{k+1}$, а также $\nu_{k+2} = \varepsilon_{k+2}, \cdots \nu_{s-1} = \varepsilon_{s-1}$, что, согласно вышесказанному, невозможно.

Разрешив уравнения $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$, мы одновременно совершенно определенным образом разрешаем также систему дифференциальных уравнений (1), а именно: по ν_k из ε_k производных порядка k, где под k понимается любое из чисел $0, 1, 2 \cdots s$. При этом ν_k всегда меньше ε_k, лишь

ν_s равно ε_s, и всякий раз ν_k производных k-го порядка выражаются через остальные $\varepsilon_k - \nu_k$ производных k-го порядка, производные более низкого порядка и через x.

Если все числа ε_k и ν_k известны, то можно сразу определить число произвольных констант в общей системе решений дифференциальных уравнений (1). Согласно утверждению выше, это число равно

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - q = (\varepsilon_0 - \nu_0) + (\varepsilon_1 - \nu_1) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1}).$$

§ 48

Пусть теперь, наоборот, задана система уравнений вида

$$z_\mu = Z_\mu(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m), \tag{7}$$

в которой $x_1 \cdots x_n$ рассматриваются как независимые переменные, а $a_1 \cdots a_r$ — как произвольные параметры. И пусть все r параметров $a_1 \cdots a_r$, число которых конечно, являются существенными.

Мы покажем, что существует система дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащая $a_1 \cdots a_r$, самые общие решения которой могут быть представлены как раз при помощи уравнений (7).

Дифференцируя уравнения (7) по $x_1 \cdots x_n$, мы получим последовательно уравнения вида

$$p_i^{(1)} = Z_i^{(1)}(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots \varepsilon_1), \tag{7_1}$$

$$p_i^{(2)} = Z_i^{(2)}(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots \varepsilon_2) \tag{7_2}$$

и так далее.

Тогда при помощи уравнений (7) можно выразить некоторое число, например, μ_0 параметров a через $r - \mu_0$ остальных, через x и z. Если взять вместе уравнения (7) и (7_1), то можно выразить $\mu_0 + \mu_1$ из a через $r - \mu_0 - \mu_1$ остальных, через $p^{(1)}$, z и x. Если же вообще взять (7), (7_1), $\cdots$ (7_k), то можно выразить $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k$ из величин a через $r - \mu_0 - \cdots - \mu_k$ остальных и через $p^{(k)}, p^{(k-1)} \cdots p^{(1)}$, z и x. При этом $\mu_0, \mu_1 \cdots$ — совершенно определенные целые положительные числа.

Сумма $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k$, разумеется, не превосходит r; кроме того, число μ_0 заведомо отлично от нуля, так как мы предполагаем $r > 0$. Следовательно, должно иметься конечное целое число $s \geqslant 1$, такое, что все $\mu_0, \mu_1 \cdots \mu_{s-1}$ отличны от нуля, а μ_s равно нулю. Если теперь из уравнений (7), (7_1) $\cdots$ (7_{s-1}) определить соответствующие из величин $a_1 \cdots a_r$

и подставить их значения в уравнения (7_s), то получатся лишь уравнения, не содержащие $a_1 \cdots a_r$; в противном случае, исходя из уравнений (7), $(7_1) \cdots (7_s)$, можно было бы выразить более чем $\mu_0 + \cdots + \mu_{s-1}$ из величин a, т. е. мы имели бы $\mu_s > 0$, что неверно, согласно сказанному выше.

Следовательно, мы получаем из уравнений $(7), (7_1) \cdots (7_s)$ в результате исключения $a_1 \cdots a_r$ следующие уравнения:

во-первых, ε_s уравнений, которые выражают все ε_s производных $p^{(s)}$ через $p^{(s-1)} \cdots p^{(1)}$, z, x и,

во-вторых, еще $\varepsilon_0 - \mu_0 + \varepsilon_1 - \mu_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - \mu_{s-1}$ независимых друг от друга соотношений между x, z, $p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$.

Легко видеть, что найденная таким образом система дифференциальных уравнений s-го порядка обладает всеми свойствами, предписанными дифференциальным уравнениям $F_\sigma(x, z, \frac{\partial z}{\partial x} \cdots) = 0$ в утверждении 1, стр. 200.

В самом деле все ε_s производных s-го порядка являются функциями от производных более низкого порядка и от x; однако для производных $(s-1)$-го порядка это неверно, т. к. вышеупомянутое число μ_{s-1} отлично от нуля. Наконец, в результате дифференцирования по x и комбинирования полученных уравнений возникают лишь такие соотношения между $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$, которые являются следствиями из рассмотренных выше. Уравнения $(7), (7_1) \cdots (7_{s-1})$ и те, что из них следуют, являются единственными конечными соотношениями, посредством которых связаны величины $a_1 \cdots a_r, x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$; поэтому если мы исключим a, то получим единственные конечные соотношения, имеющие место между $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$, а именно: вышеупомянутые $\varepsilon_0 - \mu_0 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - \mu_{s-1}$ соотношений.

Таким образом, к нашей системе дифференциальных уравнений порядка s можно непосредственно применить уже упомянутое утверждение 1, стр. 200. Определенные там числа ν_k равны $\varepsilon_k - \mu_k$, а число q в данном случае имеет значение

$$\varepsilon_0 - \mu_0 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - \mu_{s-1}.$$

Следовательно, самая общая система решений наших дифференциальных уравнений содержит в точности $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{s-1}$ произвольных констант. Так как, с другой стороны, уравнения (7) представляют собой систему решений наших дифференциальных уравнений, причем систему с r существенными параметрами $a_1 \cdots a_r$, являющимися произвольными константами, то число $\mu_0 + \cdots + \mu_{s-1}$, которое меньше либо равно r, должно

равняться r в точности. Другими словами, система уравнений (7) представляет собой самую общую систему решений наших дифференциальных уравнений.

Тем самым мы имеем

Утверждение 2. *Если $z_1 \cdots z_m$ — заданные функции от переменных $x_1 \cdots x_n$ и конечного числа параметров $a_1 \cdots a_r$:*

$$z_\mu = Z_\mu(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

то всегда существует интегрируемая система дифференциальных уравнений в частных производных, которая задает z как функции от x, и самые общие решения которой представлены в точности уравнениями $z_\mu = Z_\mu(x, a)$.

Если связать это утверждение с утверждением 1, стр. 200, то немедленно получим

Утверждение 3. *Если интегрируемая система дифференциальных уравнений в частных производных*

$$F_\sigma(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \cdots) = 0 \quad (\sigma = 1, 2 \cdots)$$

такова, что ее самые общие решения зависят лишь от конечного числа произвольных констант, то при помощи дифференцирований и исключений ее всегда можно привести к виду, обладающему двумя следующими свойствами: во-первых, все производные определенного порядка, скажем s, выражены через производные более низкого порядка и через $z_1 \cdots z_m, x_1 \cdots x_n$, тогда как в случае порядка $(s-1)$ это справедливо заведомо не для всех производных. Во-вторых, в результате однократного дифференцирования по x получаются лишь такие соотношения между x, z и производными от первого до $(s-1)$-го порядка, которые следуют из уже имеющихся уравнений.

В рассуждениях настоящего параграфа кроме прочего предлагается простой метод для ответа на вопрос, сколько из параметров $a_1 \cdots a_r$ заданной системы уравнений

$$z_\mu = Z_\mu(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

являются существенными.

Чтобы ответить на этот вопрос, нам достаточно вычислить определенные выше числа $\mu_0, \mu_1 \cdots \mu_{s-1}$; тогда их сумма $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{s-1}$ даст число существенных параметров из $a_1 \cdots a_r$, поскольку уравнения $z_\mu = Z_\mu(x, a)$ представляют собой самые общие решения системы дифференциальных уравнений, которые, согласно вышеизложенному, содержат в точности $\mu_0 + \cdots + \mu_{s-1}$ существенных параметров.

Глава 11

Определяющие уравнения для инфинитезимальных преобразований группы

В главе 9 мы свели нахождение всех r-параметрических групп к описанию всех систем, состоящих из r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$, удовлетворяющих соотношениям вида

$$X_i X_k f - X_k X_i f = (X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f$$

с некоторыми константами c_{iks}. Лишь позднее мы найдем средства для исследования этой упрощенной задачи; временно нам придется ограничиться тем, чтобы считать системы $X_1 f \cdots X_r f$ такого типа заданными и исследовать их свойства.

В настоящей главе мы первым делом применим рассуждения предыдущей главы; из них мы заключим, что общее инфинитезимальное преобразование

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$$

r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ может быть задано при помощи некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые мы назовем «определяющими уравнениями» группы. Отсюда будут затем сделаны дальнейшие выводы[1].

§ 49

Пусть даны r независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

[1] Ли, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, том 3 и том 8, 1883 г.; Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania (Научное общество Христиании), 1883 г., № 12.

порождающих r-параметрическую группу. Тогда общее инфинитезимальное преобразование этой группы имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} e_k \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

где e_k — произвольные константы. Отсюда для ξ_i получаются выражения

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{r} e_k \cdot \xi_{ki}(x) \quad (i = 1 \cdots n), \tag{1}$$

в которых $\xi_{ki}(x)$ — заданные функции от $x_1 \cdots x_n$.

Согласно утверждению 2 из предыдущей главы выписанные выше выражения $\xi_1 \cdots \xi_n$ являются общей системой решений некоторой системы дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащей произвольных констант $e_1 \cdots e_r$. Чтобы составить эту систему, мы поступим согласно указаниям из § 48: продифференцируем уравнения (1) по каждой из n переменных $x_1 \cdots x_n$, полученные уравнения снова продифференцируем по $x_1 \cdots x_n$ и т. д. Если мы затем вычислим все производные функций ξ вплоть до определенного порядка, описанного подробнее в § 48, и исключим из найденных уравнений произвольные константы $e_1 \cdots e_r$, то получим в результате искомую систему дифференциальных уравнений, общими решениями которой как раз и являются выражения $\xi_1 \cdots \xi_n$.

Мы можем всегда устроить так, что все уравнения обсуждаемой системы будут линейными и однородными относительно ξ_i и их производных; из двух любых систем решений

$$\xi_{k\nu}, \xi_{j\nu} \quad (\nu = 1 \cdots n)$$

этих дифференциальных уравнений можно всегда получить новую систему решений $e_k \xi_{k\nu} + e_j \xi_{j\nu}$ с двумя произвольными константами e_k и e_j.

Система дифференциальных уравнений, определяющая $\xi_1 \cdots \xi_n$, имеет в соответствии с этим следующий вид:

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu}(x_1 \cdots x_n) \cdot \xi_\nu + \sum_{\nu,\pi=1}^{n} B_{\mu\nu\pi}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\pi} + \cdots = 0$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots)$$

где $A, B \cdots$ не содержат констант $e_1 \cdots e_r$.

Эти дифференциальные уравнения мы для краткости назовем *определяющими уравнениями группы* $X_1 f \cdots X_r f$, *поскольку они полностью определяют совокупность всех инфинитезимальных преобразований этой группы, а следовательно, и саму группу.*

В этом месте можно сразу пояснить сказанное на паре примеров.

В общем инфинитезимальном преобразовании

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

шестипараметрической линейной группы

$$x_1' = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3,$$
$$x_2' = a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6$$

ξ_1 и ξ_2 имеют значения:

$$\xi_1 = e_1 + e_2 x_1 + e_3 x_2, \quad \xi_2 = e_4 + e_5 x_1 + e_6 x_2.$$

Отсюда получаются следующие определяющие уравнения группы:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2} = 0.$$

Известная восьмипараметрическая группа

$$x_1' = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{a_7 x_1 + a_8 x_2 + 1}, \quad x_2' = \frac{a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6}{a_7 x_1 + a_8 x_2 + 1}$$

всех проективных преобразований плоскости послужит вторым примером. Ее общее инфинитезимальное преобразование

$$\xi_1 = e_1 + e_2 x_1 + e_3 x_2 + e_7 x_1^2 + e_8 x_1 x_2,$$
$$\xi_2 = e_4 + e_5 x_1 + e_6 x_2 + e_7 x_1 x_2 + e_8 x_2^2$$

задается четырьмя соотношениями между производными второго порядка от ξ, а именно:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} = 0.$$

При последующем дифференцировании обнаруживается, что все частные производные третьего порядка от ξ_1 и ξ_2 обращаются в нуль.

§ 50

Когда же, наоборот, система линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu}(x)\cdot\xi_\nu + \sum_{\nu,\pi=1}^{n} B_{\mu\nu\pi}(x)\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x_\pi} + \cdots = 0 \quad (\mu = 1, 2\cdots)$$

определяет общее инфинитезимальное преобразование некоторой конечной непрерывной группы?

Первое условие, разумеется, состоит в том, что общие решения $\xi_1 \cdots \xi_n$ этой системы зависят только от конечного числа произвольных констант. Пусть это условие выполнено. Тогда согласно утв. 3, стр. 204 предыдущей главы, такую систему всегда можно привести при помощи дифференцирований и исключений к некоторому специальному виду. При этом все производные высшего, скажем s-го, порядка будут выражаться через производные более низкого порядка и через $x_1 \cdots x_n$, но для производных $(s-1)$-го порядка аналогичное свойство уже не всегда будет справедливо. Кроме того, повторное дифференцирование по x не дает никаких новых соотношений между $x_1 \cdots x_n$, $\xi_1 \cdots \xi_n$ и производными порядка от 1 до $(s-1)$. Мы предполагаем, что система приняла такой вид, и считаем, что она разрешена способом, изложенным на стр. 201; тогда для $k = 0, 1 \cdots s$ мы всякий раз получим определенное число, скажем ν_k из ε_k производных k-го порядка от ξ, представленных как линейные однородные функции остальных производных порядка k и некоторых порядка $(k-1), \cdots 1, 0$, с коэффициентами, зависящими лишь от $x_1 \cdots x_n$, причем $\nu_s = \varepsilon_s$, но в остальных случаях ν_k всегда меньше, чем ε_k.

Как показано в предыдущей главе, стр. 202, общая система решений $\xi_1 \cdots \xi_n$ наших дифференциальных уравнений содержит при наложенных условиях в точности

$$(\varepsilon_0 - \nu_0) + (\varepsilon_1 - \nu_1) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1}) = r$$

произвольных констант; эта общая система решений выводится из r частных систем решений $\xi_{1i} \cdots \xi_{ri}$ при помощи r констант интегрирования $e_1 \cdots e_r$ следующих образом:

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{r} e_k \xi_{ki} \quad (i = 1 \cdots n),$$

только эти частные системы решений должны при этом быть таковы, чтобы r выражений

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \cdots \sum_{i=1}^{n} \xi_{ri} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

представляли столько же независимых инфинитезимальных преобразований.

Если теперь $\xi_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ — общее инфинитезимальное преобразование r-параметрической группы, то по теореме 24, стр. 176, одно и то же условие является и необходимым, и достаточным, а именно: если $\xi_{k1} \cdots \xi_{kn}$ и $\xi_{j1} \cdots \xi_{jn}$ — частные системы решений, то выражения

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu} - \xi_{j\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right) \quad (i = 1 \cdots n)$$

тоже должны всегда представлять собой систему решений. Таким образом, мы имеем теорему.

Теорема 28. *Если функции $\xi_1 \cdots \xi_n$ от $x_1 \cdots x_n$ задаются при помощи линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu}(x) \cdot \xi_\nu + \sum_{\nu,\pi=1}^{n} B_{\mu\nu\pi}(x) \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\pi} + \cdots = 0 \quad (\mu = 1, 2 \cdots),$$

то выражение $\xi_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ представляет общее инфинитезимальное преобразование конечной непрерывной группы тогда и только тогда, когда, во-первых, общая система решений этих дифференциальных уравнений зависит лишь от конечного числа произвольных констант, и, во-вторых, из каждых двух частных систем решений, $\xi_{k1} \cdots \xi_{kn}$ и $\xi_{j1} \cdots \xi_{jn}$, при помощи образования n выражений

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu} - \xi_{j\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right) \quad (i = 1 \cdots n)$$

всегда получается новая система решений.

Если $\xi_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ — действительно общее инфинитезимальное преобразование конечной группы, то вышеупомянутые дифференциальные

уравнения естественным образом являются определяющими уравнениями этой группы.

Если заданы определяющие уравнения конечной группы, то упомянутые выше числа $\nu_0, \nu_1 \cdots \nu_{s-1}$ можно найти при помощи дифференцирований и исключений; число

$$r = (\varepsilon_0 - \nu_0) + (\varepsilon_1 - \nu_1) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1})$$

указывает тогда, сколько параметров содержит группа. Так, в первом из двух предыдущих примеров

$$s = 2, \quad \nu_0 = 0, \quad \nu_1 = 0, \quad \varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_1 = 4,$$

таким образом, $r = 6$. Во втором примере

$$s = 3, \quad \nu_0 = 0, \quad \nu_1 = 0, \quad \nu_2 = 4, \quad \varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_1 = 4, \quad \varepsilon_2 = 6,$$

следовательно, $r = 8$.

§ 51

Пусть теперь снова

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

суть независимые инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы. Будем считать, что определяющие уравнения этой группы известны и приведены к указанному выше виду, т. е. разрешены по каждой из ν_k из ε_k производных k-го порядка функций $\xi\,(k = 0, 1 \cdots s)$; при этом, как уже было сказано выше, ν_k всегда строго меньше ε_k, за исключением случая $k = s$, где $\nu_s = \varepsilon_s$.

Коэффициенты в разрешенных определяющих уравнениях будут, очевидно, *рациональными* функциями от ξ и их производных от первого до s-го порядка. Поскольку мы теперь (ср. стр. 190) в основном ограничиваемся такими системами значений $x_1 \cdots x_n$, для которых все ξ_{ki} ведут себя регулярно, то упомянутые коэффициенты для систем значений $x_1 \cdots x_n$, подлежащих рассмотрению, также будут в общем случае вести себя регулярно, но, очевидно, только в общем случае: вполне возможно, что имеются точки $x_1 \cdots x_n$, в которых все ξ_{ki}, но не все коэффициенты разрешенных

дифференциальных уравнений ведут себя регулярно. На это отличие между разными точками $x_1 \cdots x_n$ надо будет в последующем всегда обращать внимание.

Пусть $x_1^0 \cdots x_n^0$ — *точка, для которой все коэффициенты в разрешенных определяющих уравнениях ведут себя регулярно*; тогда $\xi_1 \cdots \xi_n$ в некоторой окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$ будут обычными степенными рядами от $x_k - x_k^0$:

$$\xi_i = g_i^0 + \sum_{\nu=1}^{n} g'_{i\nu}(x_\nu - x_\nu^0) + \sum_{\nu,\pi=1}^{n} g''_{i\nu\pi}(x_\nu - x_\nu^0)(x_\pi - x_\pi^0) + \cdots,$$

причем предполагается, что члены одного и того же порядка всегда объединены вместе. Коэффициенты $g^0, g' \cdots$ должны при этом быть заданы так, чтобы данные дифференциальные уравнения при подстановке разложений в ряд вместо $\xi_1 \cdots \xi_n$ тождественно выполнялись.

Если мы вспомним, что наша группа r-параметрическая, то мы сразу увидим, что в целом r коэффициентов из $g^0, g' \cdots$ остаются неопределенными, т. е. что некоторые из начальных значений, которые принимают ξ и их производные для точки $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$, могут выбираться произвольно. Так как наши дифференциальные уравнения показывают, что все производные порядка s и выше можно выразить через $x_1 \cdots x_n$ и производные от нулевого до $(s-1)$-го порядка, то среди начальных значений $g_0, g', g'' \cdots g^{(s-1)}$ должно иметься r таких, которые можно выбрать произвольно, или, что то же самое: вышеупомянутые начальные значения $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1}$ должны быть связаны некоторыми $\sum \varepsilon_k - r$ независимыми соотношениями. Эти соотношения мы сейчас рассмотрим.

Наша система дифференциальных уравнений дает все соотношения, имеющие место при *произвольных* x между ξ и их производными от первого до $(s-1)$-го порядка. Поэтому если мы произведем в наших дифференциальных уравнениях подстановку $x_i = x_i^0$, то получим некоторые соотношения, которыми связаны начальные значения $g^0, g' \cdots g^{(s-1)}$. Таким образом, получаются ν_0 линейных однородных соотношений между g, далее — ν_1 соотношений между g' и некоторыми из g^0, и вообще ν_k соотношений между $g^{(k)}$ и некоторыми из $g^{(k-1)} \cdots g', g_0$. Эти соотношения разрешены относительно ν_0 величин из g^0, ν_1 — из g' и так далее, т. е. в целом мы получаем $\sum \nu_k = \sum \varepsilon_k - r$ независимых соотношений. Поскольку, согласно вышесказанному, между $g^0, g' \cdots g^{(s-1)}$ имеется не более чем $\sum \varepsilon_k - r$ независимых соотношений, то мы тем самым нашли все соотношения, которыми связаны эти $\sum \varepsilon_k$ начальных значений; в то же время мы получаем $\nu_0 + \cdots + \nu_{s-1}$ величин из $g^0 \cdots g^{(s-1)}$, представленных как

линейные однородные функции от остальных $\sum(\varepsilon_k - \nu_k) = r$, остающихся совершенно произвольными.

Мы используем предыдущие замечания, чтобы сделать из них некоторые важные выводы о свойствах частных систем решений наших дифференциальных уравнений.

Прежде всего, можно доказать, что не существует ни одной частной системы решений $\xi_1 \cdots \xi_n$, разложения в ряд которой по степеням $x_i - x_i^0$ начинаются с членов порядка s или выше. В разложениях в ряд такой системы решений все коэффициенты $g^0, g' \cdots g^{(s-1)}$ были бы равны нулю, следовательно, все $g^{(s)}, g^{(s+1)} \cdots$ также должны были бы обратиться в нуль, и система решений свелась бы тем самым к $\xi_1 = 0, \cdots \xi_n = 0$. Эта система решений, конечно, удовлетворяет заданным дифференциальным уравнениям, однако не дает нам никаких инфинитезимальных преобразований нашей группы, а потому является бесполезной.

Зато имеется целый ряд частных систем решений $\xi_1 \cdots \xi_n$, разложения в ряд которых начинаются с членов порядка ниже, чем s, скажем порядка k. Все коэффициенты $g^0, g' \cdots g^{(k-1)}$ можно выбрать равными нулю; тогда все соотношения, имеющиеся между ними, удовлетворяются, и остаются лишь ν_k соотношений между $g^{(k)}$, ν_{k+1} соотношений между $g^{(k+1)}$ и некоторыми $g^{(k)}, \cdots$, наконец, ν_{s-1} соотношений между $g^{(k+1)}$ и некоторыми $g^{(s-2)}, \cdots g^{(k)}$. Итак, можно произвольно выбрать в целом еще $(\varepsilon_k - \nu_k) + \\ + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1})$ из констант $g^{(k)} \cdots g^{(s-1)}$, и если эти константы таковы, что не все ε_k величин $g^{(k)}$ обращаются в нуль, то всегда получается частная система решений $\xi_1 \cdots \xi_n$, разложения в ряд которой по $x_i - x_i^0$ содержат члены порядка k, но не ниже.

Если $\xi_1 \cdots \xi_n$ — частная система решений наших дифференциальных уравнений, то инфинитезимальное преобразование

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

принадлежит нашей группе. Таким образом, из вышесказанного следует, что эта группа всегда содержит инфинитезимальные преобразования, для которых разложения в ряд начинаются с членов k-го порядка, если k — одно из чисел $0, 1, 2 \cdots s-1$. Напротив, в группе нет инфинитезимальных преобразований, для которых разложения в ряд по $x_i - x_i^0$ начинаются с членов порядка s или выше. Все это доказано, разумеется, лишь при условии, что коэффициенты разрешенных определяющих уравнений ведут себя в точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ регулярно.

Чтобы попытаться хоть в какой-то мере сократить формулировки, мы далее будем говорить: *инфинитезимальное преобразование имеет порядок k относительно $x_i - x_i^0$, если его разложение в ряд по $x_i - x_i^0$ начинается с членов k-го порядка*. Тогда мы можем сформулировать вышеупомянутый результат следующим образом.

Если $x_1^0 \cdots x_n^0$ — точка, в которой коэффициенты в разрешенных определяющих уравнениях группы $X_1 f \cdots X_r f$ ведут себя регулярно, то эта группа содержит некоторые инфинитезимальные преобразования нулевого порядка, некоторые — первого и, вообще, некоторые — k-го порядка по $x_i - x_i^0$ (k — любое из чисел $0, 1 \cdots s-1$), но не содержит никаких инфинитезимальных преобразований s-го или более высокого порядка по $x_i - x_i^0$.

Ясно, что два инфинитезимальных преобразования различного порядка по $x_i - x_i^0$ всегда друг от друга независимы. Вообще при выяснении вопроса о том, являются ли заданные инфинитезимальные преобразования независимыми друг от друга, рассмотрение членов самого низкого порядка при их разложении в ряд часто уже является решающим; а именно: если члены самого низкого порядка, взятые сами по себе, задают независимые инфинитезимальные преобразования, то и данные инфинитезимальные преобразования будут независимыми друг от друга.

Общее выражение инфинитезимального преобразования k-го порядка по $x_i - x_i^0$, принадлежащего нашей группе, содержит, как мы знаем, $(\varepsilon_k - \nu_k) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1}) = \varrho_k$ произвольных и существенных констант, а именно: $\varepsilon_k - \nu_k$ произвольно выбираемых среди $g^{(k)}$, $\varepsilon_{k+1} - \nu_{k+1}$ произвольных из $g^{(k+1)}$ и так далее; при этом произвольность этих $\varepsilon_k - \nu_k$ величин $g^{(k)}$ ограничена тем, что не все $g^{(k)}$ могут одновременно обращаться в нуль. Отсюда следует, что хоть и можно задать ϱ_k независимых инфинитезимальных преобразований нашей группы k-го порядка по $x_i - x_i^0$, однако легко видеть, что из этих ϱ_k инфинитезимальных преобразований в целом можно линейно получить ϱ_{k+1} независимых, имеющих порядок $(k+1)$ или выше по $x_i - x_i^0$. Общее выражение инфинитезимального преобразования, получаемого линейно из этих ϱ_k независимых, содержит в точности те же произвольные константы, что и общее выражение инфинитезимального преобразования порядка k по $x_i - x_i^0$, с той лишь разницей, что в первом выражении все $\varepsilon_k - \nu_k$ имеющихся в распоряжении $g^{(k)}$ можно сразу положить равными нулю, причем всегда получается инфинитезимальное преобразование порядка $(k+1)$ или выше. Следовательно, среди этих ϱ_k инфинитезимальных преобразований k-го порядка имеется только $\varrho_{k+1} - \varrho_k = \varepsilon_k - \nu_k$ независимых друг от друга, из которых нельзя линейно получить ни одного инфинитезимального преобразования порядка $(k+1)$ или выше по $x_i - x_i^0$.

Обобщим полученные до сих пор результаты в следующей теореме.

Теорема 29. *Любой r-параметрической группе $X_1 f \cdots X_r f$ от n переменных $x_1 \cdots x_n$ соответствует целое число $s \geqslant 1$ такое, что группа в окрестности любой точки x_i^0, для которой коэффициенты в разрешенных определяющих уравнениях ведут себя регулярно, содержит некоторые инфинитезимальные преобразования нулевого, первого, $\cdots$ $(s-1)$-го порядка от $x_i - x_i^0$, но не содержит преобразований порядка s или выше. В частности, можно всегда выбрать r таких независимых инфинитезимальных преобразований группы, что среди них для каждого из s значений $0, 1 \cdots s-1$ числа k имеется в точности $\varepsilon_k - \nu_k$ таких независимых друг от друга преобразований k-го порядка по $x_i - x_i^0$, из которых нельзя линейно получить никакого инфинитезимального преобразования порядка $(k+1)$ или выше. При этом число ν_k может быть найдено из определяющих уравнений общего инфинитезимального преобразования $\xi_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ этой группы, а ε_k, которое всегда больше, чем ν_k, обозначает число всех производных k-го порядка от $\xi_1 \cdots \xi_n$ по $x_1 \cdots x_n$.*

Пример. Уравнения

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2} = 0$$

мы уже ранее упоминали как определяющие уравнения шестипараметрической линейной группы.

$$x_1' = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3, \quad x_2' = a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6.$$

Эти определяющие уравнения записаны уже в разрешенной форме; все встречающиеся там коэффициенты равны нулю, т. е. ведут себя регулярно. Из инфинитезимальных преобразований этой группы мы можем выбрать следующие шесть друг от друга независимых:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, (x_1 - x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}, (x_2 - x_2^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}, (x_1 - x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_2}, (x_2 - x_2^0)\frac{\partial f}{\partial x_2};$$

первые два из них — нулевого, четыре последних — первого порядка по $x_i - x_i^0$.

При вычислениях с инфинитезимальными преобразованиями важную роль играют выражения вида

$$X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) = (XY).$$

Поэтому если Xf и Yf разложены в окрестности точки x_i^0 по степеням $x_i - x_i^0$, то возникает вопрос, как ведет себя преобразование (XY) в этой точке.

Пусть разложение в ряд для Xf начинается с членов порядка μ, а для Yf — с членов порядка ν, т. е. пусть

$$Xf = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k^{(\mu)} + \cdots) \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad Yf = \sum_{j=1}^{n} (\eta_j^{(\nu)} + \cdots) \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

где $\xi^{(\mu)}$ и $\eta^{(\nu)}$ — однородные функции порядка μ и ν от $x_i - x_i^0$ соответственно, тогда как члены более высокого порядка по $x_i - x_i^0$ опущены. Разложение в ряд для (XY) при таких условиях, с учетом членов лишь самого низкого порядка будет следующим:

$$(XY) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k^{(\mu)} \frac{\partial \eta_j^{(\nu)}}{\partial x_k} - \eta_k^{(\nu)} \frac{\partial \xi_j^{(\mu)}}{\partial x_k} \right) + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Таким образом, члены самого низкого порядка для (XY) имеют порядок $\mu + \nu - 1$ и происходят исключительно от членов порядка μ и ν в Xf и Yf соответственно.

Теорема 30. *Если Xf и Yf — два инфинитезимальных преобразования, разложения в ряд которых по степеням $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ начинаются с членов порядка μ и ν соответственно, то разложение в ряд для инфинитезимального преобразования $XYf - YXf = (XY)$ начинается с членов порядка $(\mu + \nu - 1)$, которые полностью определяются членами порядка μ и ν в Xf и Yf соответственно. Если эти члены порядка $(\mu + \nu - 1)$ обращаются в нуль, то о разложении в ряд преобразования (XY) можно сказать только, что оно начинается с членов порядка $(\mu + \nu)$ или выше.*

Если оба числа μ и ν больше единицы, то число $\mu + \nu - 1$ будет больше любого из них. Это наблюдение часто бывает очень полезным при вычислениях с инфинитезимальными преобразованиями различного порядка.

При выводе теоремы 30 отнюдь не предполагается, что оба инфинитезимальных преобразования Xf и Yf принадлежат одной группе; единственное условие — что как Xf, так и Yf можно разложить в ряд по степеням $x_k - x_k^0$.

§ 52

Пусть определяющие уравнения r-параметрической группы заданы в ранее указанном виде, т. е. разрешены относительно ν_k из ε_k производных

порядка k от $\xi_1 \cdots \xi_n$. Кроме того, пусть x_i^0 — точка, в которой коэффициенты разрешенных определяющих уравнений ведут себя регулярно.

При этих условиях мы можем разложить инфинитезимальные преобразования нашей группы в обычные степенные ряды по $x_i - x_i^0$. Мы даже знаем, что наша группа содержит совершенно определенное число независимых инфинитезимальных преобразований, а именно $\varepsilon_0 - \nu_0$, которые имеют нулевой порядок по $x_i - x_i^0$, и из которых нельзя линейно получить никаких инфинитезимальных преобразований первого или более высокого порядка; кроме того, группа содержит совершенно определенное число, а именно $\varepsilon_1 - \nu_1$, таких независимых инфинитезимальных преобразований первого порядка по $x_i - x_i^0$, из которых нельзя линейно получить инфинитезимальные преобразования второго или более высокого порядка и т. д.

Короче говоря, наша группа каждой точке с заданным свойством ставит в соответствие последовательность из s целых чисел $\varepsilon_0 - \nu_0$, $\varepsilon_1 - \nu_1, \ldots \varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1}$, и эти целые числа для всех таких точек одни и те же.

Могут существовать также точки $\overline{x}_i$ особого положения, т. е. такие, в окрестности которых коэффициенты разрешенных определяющих уравнений уже не ведут себя регулярно, в то время как все инфинитезимальные преобразования группы, напротив, разлагаются в обычные степенные ряды по $x_i - \overline{x}_i$. Если $\overline{x}_i \ldots \overline{x}_n$ — это некоторая точка такого рода, то в нашей группе, разумеется, имеется совершенно определенное число таких инфинитезимальных преобразований нулевого порядка по $x_i - \overline{x}_i$, из которых нельзя линейно получить инфинитезимальные преобразования более высокого порядка и т. д.

Следовательно, наша группа ставит в соответствие каждой точке особого положения определенную — очевидно, конечную — последовательность чисел. Часто двум различным точкам особого положения соответствуют две различные последовательности целых чисел.

Лучше всего пояснить это на **примере**.

Определяющие уравнения двухпараметрической группы $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, x_2^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ в разрешенном виде таковы:

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = \frac{1}{x_2} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2} = 0.$$

Имеющиеся здесь коэффициенты ведут себя для всех точек x_1, x_2, лежащих в конечной области, регулярно за исключением точек прямой $x_2 = 0$.

Рассмотрим сначала точку x_1^0, x_2^0 с x_2^0, отличным от нуля. Мы имеем $s = 2$, кроме того, $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_1 = 4$, $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 3$, то есть точке x_1^0, x_2^0 соответствуют числа 1, 1. Все инфинитезимальные преобразования группы можно линейно получить из двух преобразований:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \left(x_2 - x_2^0 + \frac{1}{2x_2^0}(x_2 - x_2^0)^2\right)\frac{\partial f}{\partial x_1},$$

первое из которых имеет по $x_i - x_i^0$ нулевой, а второе — первый порядок.

Иначе обстоит дело в точке $\overline{x}_1, \overline{x}_2 = 0$.

Ей группа ставит в соответствие три числа 1, 0, 1, т. к. среди ее инфинитезимальных преобразований нет ни одного порядка 1 по $x_i - \overline{x}_i$, но есть одно второго, т. е. s-го порядка, а именно: $x_2^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$.

Если $x_1^0 \cdots x_n^0$ — точка, для которой коэффициенты разрешенных определяющих уравнений ведут себя регулярно, то группа согласно теореме 29 обязательно содержит инфинитезимальные преобразования нулевого, первого, $\cdots$, $(s-1)$-го порядка по $x_i - x_i^0$, но не содержит инфинитезимальных преобразований порядка s или выше. Только что рассмотренный нами пример показывает, что для точки $\overline{x}_i$, в которой упомянутые коэффициенты не все ведут себя регулярно, подобное общее утверждение уже не верно: группа вполне может содержать инфинитезимальные преобразования порядка s по $x_i - x_i^0$, возможно, даже более высокого; с другой стороны, может случиться, что для отдельных чисел $k < s$ группа не содержит вообще никаких инфинитезимальных преобразований порядка k по $x_i - x_i^0$.

Если $x_1^0 \cdots x_n^0$ обозначает произвольную точку, в которой все ξ ведут себя регулярно, то инфинитезимальные преобразования нашей группы, как уже было сказано, можно классифицировать согласно их порядку по $x_i - x_i^0$. Очень важно, чтобы эта классификация оставалась верной, если вместо x ввести новые переменные $y_1 \cdots y_n$. Само собой разумеется, такая замена переменных должна обладать в окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$ следующими свойствами: во-первых, $y_1 \cdots y_n$ должны быть обычными степенными рядами от $x_i - x_i^0$:

$$y_k = y_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x_i - x_i^0) + \cdots \quad (k = 1 \cdots n), \tag{2}$$

и, во-вторых, $x_1 \cdots x_n$ должны также представляться как обычные степенные ряды от $y_k - y_k^0$, причем такие, что каждая функция x_i при $y_1 =$

$= y_1^0, \cdots y_n = y_n^0$ принимает значение x_i^0. Если первое из этих требований выполнено, то второе, как известно, имеет место всегда, когда определитель $\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ отличен от нуля.

Чтобы теперь доказать, что упомянутая классификация при переходе к переменным $y_1 \cdots y_n$ остается верной, нам надо лишь проверить, что всякое инфинитезимальное преобразование порядка μ по $x_i - x_i^0$ при введении новых переменных y превращается в инфинитезимальное преобразование порядка μ по $y_k - y_k^0$. Но это несложно.

Общий вид инфинитезимального преобразования порядка μ по $x_i - x_i^0$ таков:

$$Xf = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(\mu)} + \cdots) \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

где $\xi_1^{(\mu)} \cdots \xi_n^{(\mu)}$ — целые рациональные функции от $x_i - x_i^0, \cdots x_n - x_n^0$, которые однородны[2], имеют порядок μ и не все одновременно обращаются в нуль; члены порядка $(\mu + 1)$ и выше опущены.

При переходе к $y_1 \cdots y_n$ мы получаем

$$Xf = \sum_{k=1}^{n} Xy_k \frac{\partial f}{\partial y_k};$$

здесь Xy_k — обычные степенные ряды по $x_i - x_i^0$:

$$Xy_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \xi_j^{(\mu)} + \cdots,$$

начинающиеся с членов порядка μ. Эти члены не обращаются одновременно в нуль, т. к. иначе мы имели бы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \xi_j^{(\mu)} = 0 \quad (k = 1 \cdots n),$$

что невозможно, так как определитель $\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ отличен от нуля, а $\xi_1^{(\mu)} \cdots \xi_n^{(\mu)}$ не обращаются одновременно в нуль. Если мы теперь выразим x_i через y_i в $Xy_1 \cdots Xy_n$, то получим n обычных степенных рядов от $y_i - y_i^0$. Эти степенные ряды также начинаются с членов порядка μ, которые не обращаются одновременно в нуль. Соответствующие члены порядка μ получаются, если заменить x на y в n выражениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \xi_j^{(\mu)} \quad (k = 1 \cdots n)$$

[2]Имеются в виду однородные многочлены степени μ. — *Прим. ред.*

в силу уравнений

$$y_k = y_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x_i - x_i^0) \quad (k = 1 \cdots n).$$

Но так как заданные n выражений не обращаются одновременно в нуль, то и после введения y этого не произойдет.

Следовательно, инфинитезимальное преобразование Xf при введении y переходит в инфинитезимальное преобразование, имеющее по $y_i - y_1^0$ порядок μ. Это и требовалось доказать.

Итак, мы имеем

Утверждение 1. *Если ввести в инфинитезимальное преобразование Xf, имеющее по $x_i - x_i^0, \cdots x_n - x_n^0$ порядок μ, новые переменные $y_1 \cdots y_n$:*

$$y_k = y_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x_i - x_i^0) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{kij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \cdots$$

$$(k = 1 \cdots n),$$

и если при этом определитель $\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ отличен от нуля, то Xf переходит в инфинитезимальное преобразование порядка μ по $y_1 - y_i^0, \cdots y_n - y_n^0$.

Отсюда непосредственно следует несколько более специальное

Утверждение 2. *Если r-параметрическая группа в окрестности точки $x_1^0 \cdots x_n^0$ содержит в точности τ_μ таких независимых инфинитезимальных преобразований, из которых нельзя линейно получить ни одного преобразования более высокого порядка, и если в этой группе введены новые переменные*

$$y_k = y_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x_i - x_i^0) + \cdots \quad (k = 1 \cdots n),$$

причем определитель $\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ отличен от нуля, то полученная в результате новая группа, в свою очередь, содержит в окрестности точки y_k^0 в точности τ_μ таких независимых инфинитезимальных преобразований порядка μ по $y_k - y_k^0$, из которых нельзя линейно получить ни одного инфинитезимального преобразования более высокого порядка.

Таким образом: последовательность целых чисел, которую исходная группа ставит в соответствие точке $x_1^0 \cdots x_n^0$, совпадает с последовательностью целых чисел, которую новая группа ставит в соответствие точке $y_1^0 \cdots y_n^0$.

§ 53

Если определяющие уравнения r-параметрической группы известны, и если эти уравнения разрешены вышеупомянутым образом, то можно, как мы видели, непосредственно задать определенные выше числа $\varepsilon_k - \nu_k$. Следовательно, для каждой точки $x_1^0 \cdots x_n^0$, в которой коэффициенты этих разрешенных определяющих уравнений ведут себя регулярно, одновременно известно число всех независимых инфинитезимальных преобразований группы, которые имеют порядок k по $x_i - x_i^0$ и при этом обладают свойством, что из них нельзя линейно получить никакого инфинитезимального преобразования порядка $k+1$ или выше.

Можно, конечно, вычислить соответствующие числа и для таких точек $x_1^0 \cdots x_n^0$, в которых коэффициенты разрешенных определяющих уравнений не все ведут себя регулярно. Для этого достаточно знать определяющие уравнения, но гораздо удобнее, если какие-либо r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ уже заданы, что мы и будем в дальнейшем предполагать. В этом случае процедура состоит в следующем.

Прежде всего следует определить, сколько независимых инфинитезимальных преобразований порядка k и выше по $x_i - x_i^0$ содержит группа. Для этого надо разложить общее инфинитезимальное преобразование

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$$

по степеням $x_i - x_i^0$, а затем в n выражениях:

$$e_1 \xi_{1i} + \cdots + e_r \xi_{ri} \quad (i = 1 \cdots n),$$

положить равными нулю все коэффициенты при членах порядка $0, 1, \cdots (k-1)$. Таким образом мы получим некоторое число линейных однородных уравнений между $e_1 \cdots e_r$; сколько среди этих уравнений независимых, можно легко определить путем вычисления некоторых определителей; если получается, что число независимых уравнений равно $r - \omega_k$, то отсюда следует, что эта группа содержит в точности ω_k независимых инфинитезимальных преобразований порядка k или выше по $x_i - x_i^0$. Очевидно, что тогда $\omega_k - \omega_{k+1}$ — число независимых инфинитезимальных преобразований порядка k, из которых нельзя линейно получить преобразований более высокого порядка.

Вряд ли нужно упоминать, что вышеупомянутые операции остаются применимы к любой точке $x_1^0 \cdots x_n^0$, для которой коэффициенты разрешенных определяющих уравнений ведут себя регулярно.

Немного подробнее мы хотим остановиться на тех инфинитезимальных преобразованиях $\sum e_j \cdot X_j f$ группы $X_1 f \cdots X_r f$, разложения в ряд которых по $x_i - x_i^0$ содержат члены только первого и более высокого порядка, но не нулевого. Сначала выясним, сколько имеется таких независимых инфинитезимальных преобразований, а затем покажем, как их простым образом выписать. Под $x_1^0 \cdots x_n^0$ мы при этом понимаем совершенно произвольную, но фиксированную точку.

Подлежащие обсуждению инфинитезимальные преобразования, очевидно, характеризуются тем, что они сами, а также порожденная ими однопараметрическая группа оставляют неподвижной точку $x_i - x_i^0$ (ср. гл. 7, стр. 148), или (что то же самое) что среди инфинитезимальных преобразований $\sum e_j \cdot X_j f$ они единственные не ставят точке $x_i - x_i^0$ в соответствие никакого направления.

Аналитически самое общее преобразование $\sum e_j \cdot X_j f$ с таким свойством задается уравнениями

$$e_1 \cdot \xi_{1i}(x_1^0 \cdots x_n^0) + \cdots + e_r \cdot \xi_{ri}(x_1^0 \cdots x_n^0) = 0 \quad (i = 1 \cdots n).$$

Если в матрице

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x^0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x^0) \end{vmatrix} \tag{3}$$

все определители порядка $h+1$, но не все порядка h обращаются в нуль, то h из величин $e_1 \cdots e_r$ можно представить как линейные однородные функции остальных $r-h$, которые остаются совершенно произвольными. Согласно этому мы получаем следующий простой, но важный результат.

Утверждение 3. *Если в матрице*

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix}$$

для $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ все определители порядка $h+1$, но не все определители порядка h обращаются в нуль, то r-параметрическая группа

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

содержит в точности $r-h$ независимых преобразований, которые, будучи разложены по степеням $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$, не содержат членов

нулевого порядка, другими словами, которые оставляют точку $x_1^0 \cdots x_n^0$ *неподвижной.*

Вместе с тем из сказанного следует

Утверждение 4. *Если все определители порядка* $h+1$ *матрицы*

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x_0) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x_0) \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x_0) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x_0) \end{vmatrix}$$

положить равными нулю, то полученные уравнения определяют местоположение всех точек $x_1 \cdots x_n$, *допускающих по меньшей мере* $r-h$ *независимых инфинитезимальных преобразований группы* $X_1 f \cdots X_r f$; *те из найденных точек, в которых не все определители порядка* h *нашей матрицы обращаются в нуль, допускают в точности* $r-h$ *независимых инфинитезимальных преобразований группы.*

Ранее (стр.150) мы уже отмечали, что инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ ставят в соответствие точке $x_1 \cdots x_n$ ровно h независимых направлений, если все определители порядка $h+1$ матрицы (3) обращаются в нуль, в то время как определители порядка h — не все. Отсюда мы видим, что полученные результаты можно выразить следующим образом:

Утверждение 5. *Если* r*-параметрическая группа* $X_1 f \cdots X_r f$ *пространства* $x_1 \cdots x_n$ *содержит ровно* $r-h$ *независимых инфинитезимальных преобразований, которые оставляют некоторую точку* $x_1^0 \cdots x_n^0$ *неподвижной, то инфинитезимальные преобразования группы ставят в соответствие этой точке в точности* h *независимых направлений.*

Теперь сделаем следующий шаг: приступим к явному описанию всех инфинитезимальных преобразований $\sum e_j \cdot X_j f$, которые оставляют неподвижной определенную точку $x_1^0 \cdots x_n^0$.

Мы полагаем, что все определители порядка $h+1$, но не все определители порядка h матрицы (3) обращаются в нуль, и что, в частности, в меньшей матрице

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x^0) \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \xi_{h1}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{hn}(x^0) \end{vmatrix}$$

не все определители порядка h равны нулю.

При этих условиях, очевидно, не существует инфинитезимальных преобразований вида $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_h \cdot X_h f$, оставляющих неподвижной точку $x_1^0 \cdots x_n^0$; и наоборот, для $r - h$ инфинитезимальных преобразований

$$X_{h+k} f + \lambda_{k1} \cdot x_1 f + \cdots + \lambda_{kh} \cdot X_h f \quad (k = 1 \cdots r - h)$$

это выполняется, если выбрать подходящим образом константы λ, что, очевидно, возможно только единственным образом. Тем самым найдены $r - h$ независимых инфинитезимальных преобразований, разложения в ряд которых не содержат членов нулевого порядка; из этих $r - h$, разумеется, можно линейно получить любое другое преобразование такого же свойства. Отсюда следует, что среди инфинитезимальных преобразований нашей группы, которые имеют нулевой порядок по $x_i - x_i^0$, имеется лишь h независимых, из которых нельзя линейно получить никаких преобразований первого или более высокого порядка; очевидно, что таким свойством обладают $X_1 f \cdots X_h f$ преобразований нулевого порядка; поэтому они ставят в соответствие точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ в точности h независимых направлений. Тем самым мы имеем

Утверждение 6. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

r-параметрической группы пространства $x_1 \cdots x_n$ таковы, что при $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ все определители порядка $h + 1$, но не все определители порядка h матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль, и если, в частности, не все определители порядка h матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{h1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{hn}(x) \end{vmatrix}$$

равны нулю в точке $x_i = x_i^0$, то все инфинитезимальные преобразования

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_h \cdot X_h f$$

имеют нулевой порядок по $x_i - x_i^0$ *и ставят точке* $x_1^0 \cdots x_n^0$ *в соответствие ровно* h *независимых направлений. Кроме того, всегда можно, и притом единственным образом, выбрать* $h(r-h)$ *констант* λ_{kj} *так, чтобы в* $r-h$ *независимых инфинитезимальных преобразованиях*

$$X_{h+k}f + \lambda_{k1} \cdot X_1 f + \cdots + \lambda_{kh} \cdot X_h f \quad (k = 1 \cdots r-h)$$

отсутствовали все члены нулевого порядка по $x_i - x_i^0$*; из этих* $r-h$ *инфинитезимальных преобразований можно тогда линейно получить все инфинитезимальные преобразования группы* $X_1 f \cdots X_r f$ *первого порядка или выше по* $x_i - x_i^0$.

Для последующего полезно сформулировать это утверждение в несколько более специальном виде.

Предположим, что все определители порядка $q+1$ матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix} \tag{4}$$

обращаются в нуль тождественно, но что это верно не для всех определителей порядка q и что, в частности, не все определители порядка q матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{qn}(x) \end{vmatrix} \tag{5}$$

тождественно равны нулю.

При этих условиях нельзя задать q не равных одновременно нулю функций $\chi_1(x) \cdots \chi_q(x)$, которые тождественно обращали бы в нуль выражение $\chi_1(x) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_q(x) \cdot X_q f$. Напротив, можно задать $q(r-q)$ функций $\varphi_{jk}(x)$ таких, что $r-q$ уравнений

$$X_{q+j}f = \varphi_{j1}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{jq}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q f \quad (j = 1 \cdots r-q)$$

выполняются тождественно; каждое φ_{jk} будет при этом равно дроби, числителем которой является некоторый определитель порядка q матрицы (4), а знаменателем — не обращающийся в нуль определитель матрицы (5) (ср. похожие рассуждения в гл. 7, стр. 135).

Пусть теперь $x_1^0 \cdots x_n^0$ — точка общего положения, точнее говоря, точка, в которой не все определители порядка q матрицы (5) обращаются

в нуль. Тогда выражения $\varphi_{jk}(x^0)$ являются некоторыми конечными константами, и при этом $r-q$ инфинитезимальных преобразований

$$X_{q+j}f - \varphi_{j1}(x^0)\cdot X_1 f - \cdots - \varphi_{jq}(x^0)\cdot X_q f \quad (j=1\cdots r-q)$$

принадлежат нашей группе. Эти инфинитезимальные преобразования, очевидно, не зависят друг от друга и, кроме того, обладают тем свойством, что в их разложениях по $x_i - x_i^0$ отсутствуют все члены нулевого порядка. Поэтому согласно утверждению 3, стр. 222, каждое инфинитезимальное преобразование нашей группы, разложение в ряд которого содержит только члены первого или более высокого порядка, должно линейно получаться из только что найденых $r-q$ инфинитезимальных преобразований.

Таким образом, справедливо

Утверждение 7. *Если первые q инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ r-параметричекой группы не связаны никакими линейными соотношениями вида*

$$\chi_1(x_1\cdots x_n)\cdot X_1 f + \cdots + \chi_q(x_1\cdots x_n)\cdot X_q f = 0,$$

в то время как $X_{q+1}f\cdots X_r f$ можно линейно выразить через $X_1 f\cdots X_q f$:

$$X_{q+j}f \equiv \sum_{k=1}^{q}\varphi_{jk}(x_1\cdots x_n)\cdot X_k f \quad (j=1\cdots r-q),$$

то эта группа содержит в окрестности любой точки $x_1^0\cdots x_n^0$ общего положения в точности q независимых инфинитезимальных преобразований, например $X_1 f\cdots X_q f$, которые имеют нулевой порядок и из которых нельзя линейно получить инфинитезимальных преобразований первого или более высокого порядка по $x_i - x_i^0$. Напротив, группа содержит в окрестности x_i^0 ровно $r-q$ преобразований

$$X_{q+j}f - \sum_{k=1}^{q}\varphi_{jk}(x_1^0\cdots x_n^0)\cdot X_k f \quad (j=1\cdots r-q),$$

которые не содержат членов нулевого порядка по $x_i - x_i^0$ и поэтому оставляют точку $x_1^0\cdots x_n^0$ неподвижной.

Что в данном утверждении понимается под точкой общего положения, мы ранее подробно объяснили.

Глава 12

Описание всех подгрупп r-параметрической группы

Если все преобразования ϱ-параметрической группы содержатся в группе с более чем ϱ — скажем с r, — параметрами, то эта ϱ-параметрическая группа называется *подгруппой* r-параметрической группы.

Пример подгруппы r-параметрической группы приводится еще в рассуждениях гл. 4, а именно: они показывают, что всякая r-параметрическая группа содержит ∞^{r-1} однопараметрических подгрупп. В настоящей главе мы прежде всего разовьем некоторые специальные методы, позволяющие найти подгруппы заданой группы. Затем мы поставим вопрос, как действовать, чтобы описать все подгруппы заданной группы. При этом мы получим важный результат, состоящий в том, что описание всех непрерывных подгрупп r-параметрической группы всегда возможно при помощи разрешения *алгебраических* уравнений.

§ 54

В предыдущей главе мы рассматривали разложение в ряд инфинитезимальных преобразований заданной r-параметрической группы по степеням $x_i - x_i^0$, понимая под x_i^0 систему значений, для которой все эти преобразования ведут себя регулярно. Таким образом, для инфинитезимальных преобразований группы мы получили разбиение на классы, которое приведет нас теперь к существованию некоторых подгрупп. Конечно, соображения этого параграфа распространяются лишь на такие группы, которые в определенных точках x_i^0 заведомо содержат инфинитезимальные преобразования не только нулевого, но и более высокого порядка по $x_i - x_i^0$.

Пусть r-параметрическая группа пространства $x_1 \cdots x_n$ содержит в окрестности точки $x_1^0 \cdots x_n^0$ в точности ω_k независимых инфинитезимальных преобразований

$$Y_1 f \cdots Y_{\omega_k} f,$$

разложения в ряд для которых по степеням $x_i - x_i^0$ начинаются с членов порядка k или выше.

Мы полагаем, что $k \geqslant 1$. Тогда, комбинируя друг с другом два инфинитезимальных преобразования $Y_i f$ и $Y_j f$, мы получим (теорема 30, стр. 216) инфинитезимальное преобразование $(Y_i Y_j)$ порядка $(2k-1)$ или выше, т. е. по меньшей мере порядка k. Согласно этому $(Y_i Y_j)$ должно линейно получаться из Yf:

$$(Y_i Y_j) = \sum_{\nu=1}^{\omega_k} d_{ij\nu} \cdot Y_\nu f,$$

или, что то же самое: $Y_1 f \cdots Y_{\omega_k} f$ порождают ω_k-параметрическую подгруппу заданной группы. Таким образом, верно следующее

Утверждение 1. *Если r-параметрическая группа пространства $x_1 \cdots x_n$ содержит в окрестности точки $x_1^0 \cdots x_n^0$ ровно ω_k независимых инфинитезимальных преобразований порядка k или выше, и при этом $k \geqslant 1$, то эти ω_k инфинитезимальных преобразований порождают ω_k-параметрическую группу данной группы.*

Если точка $x_1^0 \cdots x_n^0$ такова, что в ней коэффициенты разрешенных определяющих уравнений группы $X_1 f \cdots X_r f$ ведут себя регулярно, то ω_1 имеет значение

$$(\varepsilon_k - \nu_k) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1})$$

(ср. гл. 11, стр. 215).

Особенно важным является случай $k = 1$, поэтому на нем мы задержимся.

Если

$$X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1 \cdots r)$$

— независимые инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы, то число ω_1 находится согласно гл. 11, стр. 222, путем исследования определителей матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{in}(x^0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x^0) \end{vmatrix}.$$

Далее вспомним (ср. стр. 222), что все инфинитезимальные преобразования группы, содержащие только члены первого или более высокого порядка по

$x_i - x_i^0$, характеризуются тем, что оставляют неподвижной точку $x_1^0 \cdots x_n^0$. Поэтому если $k = 1$, то мы можем переформулировать изложенное выше утверждение так.

Утверждение 2. *Если в группе пространства $x_1 \cdots x_n$ имеется в точности ω_1 независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих некоторую точку $x_1^0 \cdots x_n^0$ инвариантной, то они порождают ω_1-параметрическую подгруппу данной группы.*

Ясно, что в переменных $x_1 \cdots x_n$ не существует больше чем n независимых инфинитезимальных преобразований, которые имеют нулевой порядок по $x_i - x_i^0$ и из которых нельзя линейно получить никаких инфинитезимальных преобразований первого или более высокого порядка. Отсюда мы заключаем, что всякая r-параметрическая группа в $n < r$ переменных содержит по меньшей мере $r - n$ независимых инфинитезимальных преобразований, имеющих первый или более высокий порядок по $x_i - x_i^0$. Таким образом, мы имеем

Утверждение 3. *Каждая r-параметрическая группа от $n < r$ переменных содержит подгруппы по меньшей мере с $r - n$ параметрами.*

Из утверждения 7 предыдущей главы (стр. 226) мы, наконец, получаем для точек $x_1^0 \cdots x_n^0$ общего положения следующее

Утверждение 4. *Если инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_q f \cdots X_r f$ r-параметрической группы пространства $x_1 \cdots x_n$ таковы, что $X_1 f \cdots X_q f$ не связаны никакими соотношениями вида*

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_q(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q f \equiv 0,$$

в то время $X_{q+1} f \cdots X_r f$ можно линейно выразить через $X_1 f \cdots X_q f$:

$$X_{q+j} f \equiv \varphi_{j1}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{jq}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q f \qquad (j = 1 \cdots r - q),$$

и если, кроме того, $x_1^0 \cdots x_n^0$ — точка общего положения, то все $r - q$ независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_{q+j} f - \sum_{\mu=1}^{q} \varphi_{j\mu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot X_\mu f \quad (j = 1 \cdots r - q)$$

будут иметь первый или более высокий порядок по $x_i - x_i^0$ и порождать $(r - q)$-параметрическую подгруппу, преобразования которой характеризуются тем, что оставляют точку $x_1^0 \cdots x_n^0$ инвариатной.

Под точкой общего положения мы понимаем здесь, как и на стр. 226, такую точку, в которой не все определители порядка q матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x^0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{qn}(x^0) \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль.

§ 55

Здесь мы хотим обратить внимание на другой, более общий метод, который зачастую очень простым путем ведет к нахождению некоторых подгрупп заданной группы. Этот метод основывается на следующей теореме.

Теорема 31. *Если r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит такие инфинитезимальные преобразования, при которых заданная система уравнений*

$$\Omega_i(x_1 \cdots x_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots)$$

остается инвариантной, и если каждое входящее в эту группу инфинитезимальное преобразование такого рода можно линейно получить из m независимых инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{\nu=1}^{r} h_{k\nu} \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots m),$$

то $Y_1 f \cdots Y_m f$ порождают m-параметрическую подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Справедливость этой теоремы следует почти непосредственно из утверждения 5 в главе 7, стр. 131. Согласно этому утверждению $\Omega_i = 0$ допускает также все инфинитезимальные преобразования вида $(Y_k Y_j)$. Поскольку $(Y_k Y_j)$, в свою очередь, также принадлежат группе $X_1 f \cdots X_r f$, то при наложенных условиях ни одно из этих инфинитезимальных преобразований не может быть независимым от $Y_1 f \cdots Y_m f$, напротив, должны иметь место соотношения вида

$$(Y_k Y_j) = \sum_{\mu=1}^{m} h_{kj\mu} \cdot Y_\mu f,$$

то есть $Y_k f$ действительно порождают группу.

Разумеется, мы можем сформулировать вышеизложенную теорему еще и так.

Утверждение 5. *Если среди инфинитезимальных преобразований r-параметрической группы в переменных $x_1 \cdots x_n$ имеется в точности m независимых, при которых некоторое многообразие пространства $x_1 \cdots x_n$ остается инвариантным, то эти m инфинитезимальных преобразований порождают m-параметрическую подгруппу r-параметрической группы.*

Самым простым случаем является случай, когда инвариантная система уравнений определяет неподвижную точку, т. е. имеет вид:

$$x_1 - x_1^0 = 0, \cdots x_n - x_n^0 = 0.$$

Подгруппа, соответствующая этой системе уравнений, порождается, очевидно, всеми теми инфинитезимальными преобразованиями, разложения которых в ряд по $x_i - x_i^0$ начинаются с членов первого порядка или выше. Таким образом, мы приходим к одной из тех подгрупп, которые мы уже ранее нашли.

Вторым примером послужит подгруппа восьмипараметрической общей проективной группы плоскости. Уравнение невырожденного конического сечения допускает в точности три независимых инфинитезимальных проективных преобразования плоскости; следовательно, эти три инфинитезимальных преобразования порождают трехпараметрическую подгруппу общей проективной группы.

И наконец, еще один пример — десятипараметрическая группа всех конформных точечных преобразований пространства R_3. В этой группе имеется ровно шесть независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих инвариантной произвольно выбранную сферу. Эти преобразования порождают шестипараметрическую подгруппу этой десятипараметрической группы.

Теорема 31 является лишь частным случаем следующей общей теоремы:

Теорема 32. *Если задана какая-либо группа в переменных $x_1 \cdots x_n$, конечная или бесконечная, непрерывная или разрывная, то совокупность всех входящих в нее преобразований, оставляющих какую-либо систему уравнений от $x_1 \cdots x_n$ инвариантной, также образует группу.*

Доказательство этой теоремы очень простое. Какие-либо два преобразования группы, оставляющие систему уравнений инвариантной, выполненные последовательно, дают преобразование, в свою очередь принадлежащее этой группе и в то же

время оставляющее эту систему уравнений инвариантной. Тем самым мы привели доказательство того, что определенная в теореме совокупность преобразований действительно образует группу.

Вместо системы уравнений можно, конечно, рассматривать систему дифференциальных уравнений, и тогда теорема будет также оставаться верной.

Впрочем, если заданная группа непрерывна, то подгруппа, определенная при помощи инвариантной системы уравнений, вполне может быть и разрывной.

§ 56

После того как мы ознакомились с некоторыми методами нахождения отдельных подгрупп заданной группы, обратимся теперь к более общей задаче описания *всех* непрерывных подгрупп заданной r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Какие-либо m независимых инфинитезимальных преобразований

$$Y_\mu f = \sum_{\varrho=1}^{r} h_{\mu\varrho} \cdot X_\varrho f \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

нашей группы порождают m-параметрическую подгруппу тогда и только тогда, когда все

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{r} h_{\mu\varrho} h_{\nu\sigma} \cdot (X_\varrho X_\sigma)$$

выражаются только через $Y_1 f \cdots Y_m f$. Если ввести здесь обозначения

$$(X_\varrho X_\sigma) = \sum_{\tau=1}^{r} c_{\varrho\sigma\tau} \cdot X_\tau f,$$

то получится

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_{\varrho,\sigma,\tau=1}^{r} h_{\mu\varrho} h_{\nu\sigma} c_{\varrho\sigma\tau} \cdot X_\tau f,$$

и требуется, чтобы эти уравнения принимали вид

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_{\pi=1}^{m} l_{\mu\nu\pi} \cdot Y_\pi f = \sum_{\tau=1}^{r} \sum_{\pi=1}^{m} l_{\mu\nu\pi} h_{\pi\tau} \cdot X_\tau f$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнения

$$\sum_{\varrho\sigma=1}^{r} h_{\mu\varrho}h_{\nu\sigma}c_{\varrho\sigma\tau} = \sum_{\pi=1}^{m} l_{\mu\nu\pi}h_{\pi\tau} \quad (\mu,\nu = 1\cdots m;\ \tau = 1\cdots r) \tag{1}$$

удовлетворялись; для того, чтобы это было возможно, все определители порядка $m+1$ матрицы

$$\begin{vmatrix} \sum_{\varrho,\sigma=1}^{r} h_{\mu\varrho}h_{\nu\sigma}c_{\varrho\sigma 1} & h_{11} & \cdot & h_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{\varrho,\sigma=1}^{r} h_{\mu\varrho}h_{\nu\sigma}c_{\varrho\sigma r} & h_{1r} & \cdot & h_{mr} \end{vmatrix} \tag{2}$$

должны обращаться в нуль.

Тем самым мы имеем последовательность алгебраических уравнений для нахождения mr неизвестных $h_{\pi\varrho}$. Но поскольку $Y_1 f \cdots Y_m f$ должны быть независимыми инфинитезимальными преобразованиями, то с самого начала исключается любая система значений $h_{\pi\varrho}$, обращающая в нуль все определители порядка m матрицы

$$\begin{vmatrix} h_{11} & \cdot & \cdot & h_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1r} & \cdot & \cdot & h_{mr} \end{vmatrix}$$

в нуль.

Если $h_{\pi\varrho}$ заданы так, что они удовлетворяют всем этим условиям, то уравнения (1) для любой пары чисел μ,ν сводятся ровно к m уравнениям, полностью задающим неизвестные константы $l_{\mu\nu 1}\cdots l_{\mu\nu m}$. Итак, всякая система решений $h_{\pi\varrho}$ дает m-параметрическую подгруппу, и ясно, что таким образом находятся все m-параметрические подгруппы.

Тем самым мы имеем общий метод нахождения всех подгрупп заданной r-параметрической группы; практическое применение в общем случае он имеет, правда, лишь тогда, когда число r не слишком велико; но он показывает, что задача нахождения всех этих подгрупп требует лишь алгебраических операций, что само по себе уже является очень важным результатом.

Теорема 33. *Нахождение всех непрерывных подгрупп заданной r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ требует лишь алгебраических операций; эти операции полностью определены константами c_{iks} в соотношениях*[1]

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f \quad (i,k = 1\cdots r).$$

[1] Ли, Archiv for Mathematik og Naturv., том 1, Христиания, 1876 г.

В частных случаях нахождение всех подгрупп заданной группы облегчается за счет того, что с самого начала известны некоторые определенные подгруппы и вообще некоторые определенные свойства данной группы; а также оно облегчается, конечно, если задача уже решена для одной подгруппы заданной группы. Кстати, мы позднее увидим, что собственно, вовсе не обязательно действительно выписывать все подгруппы, а достаточно задать некоторые из них (ср. исследования о классах подгрупп, гл. 23).

§ 57

Пусть m независимых инфинитезимальных преобразований

$$Y_\mu f = \sum_{k=1}^{r} h_{\mu k} \cdot X_k f \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

порождают m-параметрическую подгруппу r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$. Тогда общее инфинитезимальное преобразование этой подгруппы имеет вид

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \cdot Y_\mu f = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} \alpha_\mu h_{\mu k} \cdot X_k f,$$

где α_μ — произвольные параметры.

Все инфинитезимальные преобразования $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ r-параметрической группы, принадлежащие m-параметрической подгруппе $Y_1 f \cdots Y_m f$, определяются поэтому уравнениями

$$e_k = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu h_{\mu k} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Если допустить, что m произвольных параметров α_μ отсюда убраны, то мы получим в точности $r - m$ независимых линейных однородных уравнений между $e_1 \cdots e_r$, то есть можем сформулировать

Утверждение 6. *Если $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ — общее инфинитезимальное преобразование r-параметрической группы, то инфинитезимальные преобразования m-параметрической подгруппы этой группы можно определить при помощи $r - m$ независимых линейных однородных соотношений между $e_1 \cdots e_r$.*

Инфинитезимальные преобразования, являющиеся общими для двух различных подгрупп r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, порождают в свою очередь подгруппу; как общие инфинитезимальные преобразования двух групп они порождают согласно гл. 9, утв. 2, стр. 178, группу, которая, конечно, содержится в $X_1 f \cdots X_r f$ как подгруппа.

Предположим теперь, что одна подгруппа — m-параметрическая, а другая — μ-параметрическая. Тогда их общие инфинитезимальные преобразования определяются $r - m + r - \mu$ линейными однородными уравнениями между константами e, уравнениями, которые разумеется, не обязательно должны быть независимыми друг от друга.

Отсюда мы заключаем, что среди общих инфинитезимальных преобразований имеется по крайней мере $r - (2r - m - \mu) = m + \mu - r$ независимых. Таким образом, мы имеем

Утверждение 7. *Если r-параметрическая группа содержит две подгруппы с m и μ параметрами соответственно, то они имеют по меньшей мере $m+\mu-r$ общих независимых инфинитезимальных преобразований. Все те инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы, которые являются общими для обеих подгрупп, в свою очередь порождают подгруппу.*

Это утверждение можно очевидно обобщить.

Если среди инфинитезимальных преобразований $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$ r-параметрической группы выделены два семейства, одно — посредством $r - m$ линейных однородных уравнений между e, другое — посредством $r - \mu$ таких уравнений, то имеется по меньшей мере $m + \mu - r$ независимых инфинитезимальных преобразований, которые являются общими для обоих семейств.

Глава 13

Транзитивность, инварианты, примитивность

Понятия транзитивности и примитивности, играющие в теории подстановок такую большую роль, будут здесь распространены на конечные непрерывные группы преобразований. Упомянем вскользь, что эти понятия можно распространить вообще на все группы, как на конечные, так и на бесконечные, как на непрерывные, так и на разрывные[1].

§ 58

Конечная непрерывная группа от переменных $x_1 \cdots x_n$ называется *транзитивной*, если в пространстве $(x_1 \cdots x_n)$ имеется n-мерная область, внутри которой любая точка может быть переведена в любую другую при помощи по крайней мере одного преобразования группы. Все группы, не являющиеся транзитивными, называются *интранзитивными*.

Согласно этому определению r-параметрическая группа

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

является транзитивной, если в общем случае для каждой системы значений $x_1 \cdots x_n$, $x_1' \cdots x_n'$ можно задать по меньшей мере одну такую систему

[1] После того как Ли в 1869 г. проинтегрировал некоторые дифференциальные уравнения с известной непрерывной группой, он в 1871–1872 г. совместно с Клейном поставил задачу, по возможности перенести понятия теории подстановок на теорию непрерывных групп преобразований. Ли решил эту задачу самостоятельно; опираясь на полученные при этом представления и понятия, он развил в 1874 г. основы общей теории интегрирования таких полных систем, которые допускают известные инфинитезимальные преобразования (Verh. d. G. d. W. zu Christiania, 1874 г.). Он свел эту задачу к случаю, когда известные инфинитезимальные преобразования порождают конечную непрерывную группу, являющуюся импримитивной, так как ее преобразования переставляют между собой характеристические многообразия полной системы. В частности, он указал все случаи, в которых интегрирование полной системы можно выполнить при помощи квадратур.

значений $a_1 \cdots a_r$, что уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ удовлетворяются соответствующими значениями x, a, x'. Другими словами, *уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ транзитивной группы могут быть разрешены относительно n из r параметров $a_1 \cdots a_r$. Если же такое разрешение невозможно, если из уравнений $x_i' = f_i(x, a)$ этой группы можно, напротив, вывести соотношения, не зависящие от параметров a и содержащие лишь переменные $x_1 \cdots x_n$, $x_1' \cdots x_n'$, то группа не будет транзитивной, то есть будет интранзитивной.*

Отсюда мы видим, что всякая транзитивная группа пространства $x_1 \cdots x_n$ содержит по меньшей мере n существенных параметров.

Если *транзитивная* группа от n переменных имеет в точности n существенных параметров, то в общем случае она содержит одно и только одно преобразование, которое переводит заданную точку пространства в другую произвольную точку; в частности, оно поэтому не содержит никакого преобразования, кроме тождественного, которое оставляет точку общего положения неподвижной. Мы называем всякую группу с таким свойством *просто транзитивной*.

Данный выше критерий транзитивности (соот. интранзитивности) группы практически применим лишь тогда, когда нам известны конечные уравнения группы. Но не существует ли критерия, для применения которого достаточно лишь того, чтобы были известны инфинитезимальные преобразования группы? Мы покажем, что такой критерий действительно можно дать. Одновременно мы укажем способ, позволяющий узнать, сколько соотношений только между x и x' возникает для интранзитивной группы с известными инфинитезимальными преобразованиями.

Пусть даны r независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

порождающих r-параметрическую группу. Эта группа, конечные уравнения которой мы можем представить записанными в виде

$$\Phi_i = -x_i' + x_i + \sum_{k=1}^{r} e_k \cdot \xi_{ki}(x) + \cdots = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

согласно вышесказанному, тогда и только тогда транзитивна, когда n уравнений $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_n = 0$ разрешимы относительно n из r параметров $e_1 \cdots e_r$. Следовательно, необходимым и достаточным условием транзитивности нашей группы является то, что не все определители порядка n

матрицы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial e_1} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial e_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial e_r} & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial e_r} \end{vmatrix} \tag{1}$$

обращаются в нуль тождественно. Отсюда следует, что группа заведомо транзитивна, если соответствующие определители не обращаются одновременно в нуль при $e_1 = 0, \cdots e_r = 0$, т. е. если не все определители порядка n матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdots & \xi_{rn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

тождественно равны нулю.

Таким образом, мы нашли достаточное условие транзитивности нашей группы. Теперь мы хотим выяснить, что происходит, если это условие не выполняется.

Итак, пусть все определители порядка n только что выписанной матрицы (2) тождественно равны нулю; чтобы рассмотреть все возможности сразу, мы, кроме того, предположим, что все определители порядка $n-1$, $n-2, \cdots q+1$ этой матрицы обращаются в нуль тождественно, но не все порядка q.

При этих условиях определители порядка q матрицы (1) также заведомо не все обращаются в нуль. Следовательно, мы можем заключить, что из n уравнений $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_n = 0$ можно получить самое большее $n-q$ не содержащих $e_1 \cdots e_r$ и не зависящих друг от друга уравнений только между x и x'.

Однако при наложенных условиях эти r уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ сводятся к ровно $q < n$ независимым, например к уравнениям $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$, в то время как $X_{q+1} f \cdots X_r f$ выражаются следующим образом:

$$X_{q+\nu} f \equiv \varphi_{\nu 1}(x) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{\nu q}(x) \cdot X_q f \quad (\nu = 1 \cdots r-q).$$

Таким образом,

$$(X_i X_k) = \sum_{j=1}^{q} \left(c_{ikj} + \sum_{\nu=1}^{r-q} c_{ik,q+\nu}\, \varphi_{\nu j} \right) X_j f$$

для всех значений i и k, то есть q уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ образуют q-параметрическую полную систему с $n - q$ независимыми решениями, обозначим их через $\Omega_1(x) \cdots \Omega_{n-q}(x)$. Эти решения допускают любое инфинитезимальное преобразование вида $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$, т. е. все инфинитезимальные, а также — как следствие этого, — все конечные преобразования нашей r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ (ср. гл. 6, стр. 110). Аналитически это выражается в том, что между переменными x и x', которые встречаются в уравнениях преобразований нашей группы, имеют место $n - q$ независимых, не содержащих e соотношений:

$$\Omega_1(x_1' \cdots x_n') = \Omega_1(x_1 \cdots x_n), \cdots \Omega_{n-q}(x_1' \cdots x_n') = \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n).$$

Выше мы видели, что могут иметь место максимум $n - q$ независимых соотношений только между x и x', согласно этому мы тем самым нашли все эти соотношения.

В частности, мы видим, что группа $X_1 f \cdots X_r f$ интранзитивна, если все определители порядка n матрицы (2) обращаются в нуль тождественно. Тем самым доказано также, что ранее найденное достаточное условие транзитивности группы $X_1 f \cdots X_r f$ является не только достаточным, но и необходимым.

Сформулируем полученные результаты в утверждениях. Во главу поставим следующую теорему.

Теорема 34. *r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_n$ является транзитивной, если среди r уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ найдется в точности n друг от друга независимых, в противном случае она интранзитивна.*

Затем следует

Утверждение 1. *Из конечных уравнений*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

r-параметрической группы с инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$ можно только тогда исключить все r параметров $a_1 \cdots a_r$, когда эта группа интранзитивна; в этом случае мы получаем некоторое число соотношений между x и x', которые можно привести к виду

$$\Omega_r(x_1' \cdots x_n') = \Omega_r(x_1 \cdots x_n) \quad (k = 1, 2 \cdots),$$

где $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x) \cdots$ — система независимых решений полной системы, заданной при помощи r уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$.

В главе 6, стр. 108, мы видели, что решения линейного дифференциального уравнения в частных производных $Xf = 0$ являются единственными инвариантами однопараметрической группы Xf; совместные решения уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ являются соответственно единственными инвариантами группы $X_1 f \cdots X_r f$. Поэтому мы можем сформулировать

Утверждение 2. *Если r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_n$ транзитивна, то она не имеет инвариантов, если же она интранзитивна, то ее единственными инвариантами являются совместные решения уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$.*

Наконец, можно привести еще следующее утверждение, которое выражает характеристическое свойство инвариантов конечных непрерывных групп.

Утверждение 3. *Если $u_1 \cdots u_\varrho$ — инварианты r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, то и каждая функция от $u_1 \cdots u_\varrho$ является инвариантом этой группы.*

Чтобы пояснить наглядный смысл полученных аналитических результатов, мы теперь истолкуем $x_1 \cdots x_n$ как координаты точки n-мерного пространства.

Пусть упомянутая в теореме полная система является q-параметрической, а число q будет меньше n, т. е. группа $X_1 f \cdots X_r f$ является интранзитивной. Пусть функции $\Omega_1(x_1 \cdots x_n) \cdots \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n)$ — независимые решения этой полной системы, наконец, пусть $C_1 \cdots C_{n-q}$ обозначают произвольные константы. *Тогда уравнения*

$$\Omega_1 = C_1, \cdots \Omega_{n-q} = C_{n-q}$$

разбивают все пространство на ∞^{n-q} различных q-мерных подмножеств, каждое из которых остается инвариантным относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$. Каждая точка пространства принадлежит одному вполне определенному подмножеству и может быть переведена преобразованиями группы только в точки того же самого подмножества. Однако точки одной части транзитивно преобразуются между собой, то есть каждая точка общего положения в этом подмножестве может быть переведена по меньшей мере одним преобразованием группы в другую такую точку.

Если $x_1 \cdots x_n$ — точка общего положения, то функции $\Omega_1(x) \cdots \Omega_{n-q}(x)$ мы также рассматриваем как инварианты точки $x_1 \cdots x_n$ относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$. Число этих инвариантов задает степень интранзитивности нашей группы, так как чем больше число инвариантов, тем меньше

число измерений той части, внутри которой точка $x_1 \cdots x_n$ остается под действием преобразований группы.

Если же задана транзитивная группа, то точка общего положения, очевидно, инвариантов не имеет.

Изложенная выше теорема позволяет выяснить, является заданная группа $X_1 f \cdots X_r f$ транзитивной или нет. Содержащемуся в ней критерию транзитивности или интранзитивности некоторой группы можно также придавать различные другие формы.

Прежде всего, слегка изменив терминологию, мы можем сказать: r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ от переменных $x_1 \cdots x_n$ транзитивна тогда и только тогда, когда среди ее инфинитезимальных преобразований имеется в точности n — например $X_1 f \cdots X_n f$, — преобразований, не связанных линейными соотношениями вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_n) \cdot X_n f = 0,$$

тогда как $X_{n+1} f \cdots X_r f$ выражаются через $X_1 f \cdots X_n f$ следующим образом:

$$X_{n+j} f = \varphi_{j1} \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{jn} \cdot X_n f \qquad (j = 1 \cdots r - n).$$

Если же инфинитезимальных преобразований с таким свойством не n, то группа интранзитивна.

Вспомним теперь, что всякое инфинитезимальное преобразование $X_k f$ ставит в соответствие каждой точке пространства $x_1 \cdots x_n$ некоторое направление. Добавив к этому сказанное в гл. 6, стр. 113, о независимости таких направлений, проходящих через эту точку, мы можем сформулировать критерий транзитивности группы также следующим образом.

Утверждение 4. *Группа $X_1 f \cdots X_r f$ в переменных $x_1 \cdots x_n$ транзитивна, если она содержит n инфинитезимальных преобразований, которые каждой точке общего положения ставят в соответствие n независимых направлений; если же группа не содержит n таких инфинитезимальных преобразований, то она интранзитивна.*

С другой стороны, вспомним рассуждения из гл. 11, стр. 226, где мы предполагали, что инфинитезимальные преобразования группы в окрестности точки x_i^0 общего положения разложены по степеням $x_i - x_i^0$. Поскольку транзитивная группа $X_1 f \cdots X_r f$ в переменных $x_1 \cdots x_n$ содержит n инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_n f$, которые не связаны никакими соотношениями вида $\chi_1(x) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x) \cdot X_n f = 0$, то мы получаем следующее

Утверждение 5. *r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ в n переменных $x_1 \cdots x_n$ является транзитивной, если она в окрестности точки x_i^0 общего положения содержит в точности n таких независимых инфинитезимальных преобразований нулевого порядка по $x_i - x_i^0$, из которых нельзя линейно получить никаких инфинитезимальных преобразований первого или более высокого порядка. Если число таких инфинитезимальных преобразований нулевого порядка меньше n, то группа интранзитивна.*

Отсюда видно, что нам достаточно знать только определяющие уравнения группы $X_1 f \cdots X_r f$ для того, чтобы можно было решить, транзитивна она или нет.

Первую часть утверждения 5 мы, наконец, можем высказать еще и так: группа $X_1 f \cdots X_r f$ транзитивна, если она в окрестности точки x_i^0 общего положения содержит в точности $r - n$ независимых инфинитезимальных преобразований, разложения в ряд которых по $x_i - x_i^0$ начинаются с членов первого или более высокого порядка, то есть если эта группа содержит в точности $r - n$ и не более независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих точку общего положения инвариантной.

Если известны лишь инфинитезимальные преобразования интранзитивной группы $X_1 f \cdots X_r f$, то инварианты этой группы, как мы видели, можно найти путем интегрирования полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$. Очень важно, что это интегрирование вовсе не обязательно, если известны конечные уравнения группы; в этом случае, напротив, инварианты получаются путем простого исключения.

Чтобы доказать это, предположим, что нам даны конечные уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

интранзитивной группы, из которых затем исключены параметры $a_1 \cdots a_r$. Полученные таким образом $n - q$ независимых уравнений

$$W_\mu(x_1 \cdots x_n, x_1' \cdots x_n') = 0 \quad (\mu = 1 \cdots n - q) \tag{3}$$

должны, согласно вышесказанному, приводиться к виду

$$\Omega_\mu(x_1' \cdots x_n') = \Omega_\mu(x_1 \cdots x_n) \quad (\mu = 1 \cdots n - q), \tag{4}$$

где $\Omega_\mu(x)$ — искомые инварианты. Поэтому если мы разрешим уравнения (3) относительно $n - q$ из переменных $x_1' \cdots x_n'$ (что всегда возможно):

$$x_\mu' = \Pi_\mu(x_1 \cdots x_n, x_{n-q+1}' \cdots x_n') \quad (\mu = 1 \cdots n - q),$$

то получим $n-q$ функций $\Pi_1 \cdots \Pi_{n-q}$, в которых переменные $x_1 \cdots x_n$ встречаются только в выражениях $\Omega_1(x) \cdots \Omega_{n-q}(x)$. Таким образом, $n-q$ выражений

$$\Pi_\mu(x_1 \cdots x_n, \alpha_{n-q+1} \cdots \alpha_n) \quad (\mu = 1 \cdots n-q),$$

где $\alpha_{n-q+1} \cdots \alpha_n$ — константы, представляют инварианты нашей группы, причем, очевидно, $n-q$ независимых инвариантов.

Итак, справедлива

Теорема 35. *Если известны конечные уравнения:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

интранзитивной группы, то инварианты этой группы можно найти путем исключения.

§ 59

Исследование поведения точки общего положения при действии преобразований r-параметрической группы привело нас с необходимостью к понятиям транзитивности и интранзитивности. Таким образом, мы получили разделение всех r-параметрических групп n-мерного пространства на два различных класса точно так же, как в теории подстановок; но вместе с тем мы одновременно получили еще одно разделение интранзитивных групп, а именно по числу инвариантов, которые имеет точка общего положения при действии этих групп.

По аналогии с теорией подстановок мы можем теперь пойти еще дальше и исследовать поведение двух и более точек общего положения при действии преобразований r-параметрической группы. Это дает нам новую классификацию групп пространства R_n. Пусть

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

— r-параметрическая группа, а $X_1 f \cdots X_r f$ — r ее независимых инфинитезимальных преобразований.

Рассмотрим сначала две точки $x_1' \cdots x_n'$ и $x_1'' \cdots x_n''$ и найдем их инварианты относительно нашей группы, то есть мы ищем все функции от $x_1' \cdots x_n'$, $x_1'' \cdots x_n''$, остающиеся инвариантными при преобразованиях нашей группы.

Для этого обозначим инфинитезимальные преобразования $X_k f$ в переменных x' через $X_k' f$, а в переменных x'' — через $X_k'' f$; искомыми

инвариантами тогда являются просто инварианты r-параметрической группы

$$X'_k f + X''_k f \quad (k = 1 \cdots r) \tag{5}$$

в переменных $x'_1 \cdots x'_n, x''_1 \cdots x''_n$.

Если $J_1(x) \cdots J_{\varrho_1}(x)$ — инварианты группы $X_1 f \cdots X_r f$, то $2\varrho_1$ функций

$$J_1(x') \cdots J_{\varrho_1}(x'), J_1(x'') \cdots J_{\varrho_1}(x'')$$

разумеется, являются инвариантами группы (5) и при этом независимыми; кроме того, может еще иметься несколько, скажем ϱ_2, инвариантов

$$J'_1(x'_1 \cdots x'_n, x''_1 \cdots x''_n) \cdots J'_{\rho_2}(x'_1 \cdots x'_n, x''_1 \cdots x''_n),$$

не зависящих друг от друга и от $2\varrho_1$ вышеназванных. В этом случае две точки общего положения имеют в точности $2\varrho_1 + \varrho_2$ независимых инвариантов относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$, из которых, однако, лишь ϱ_2 рассматриваются как существенные, так как каждая из этих точек сама по себе уже имеет ϱ_1 инвариантов. Из уравнений

$$y'_i = f_i(x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r), \quad y''_i = f_i(x''_1 \cdots x''_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

получаются в этих предположениях следующие соотношения, не содержащие a:

$$J_k(y') = J_k(x'), J_k(y'') = J_k(x'') \quad (k = 1 \cdots \varrho_1),$$

$$J'_j(y', y'') = J'_j(x', x'') \quad (j = 1 \cdots \varrho_2).$$

Поэтому если предположить, что величины $x'_1 \cdots x'_n$ и $y'_1 \cdots y'_n$ выбраны фиксированными, то множество всех положений $y''_1 \cdots y''_n$, которые может принимать точка $x''_1 \cdots x''_n$, задано уравнениями

$$J_k(y'') = J_k(x''), \quad J'_j(y', y'') = J'_j(x', x'') \quad (k = 1 \cdots \varrho_1, \quad j = 1 \cdots \varrho_2).$$

Следовательно, имеется $\infty^{n-\varrho_1-\varrho_2}$ различных положений этого рода.

Подобным образом можно задать инварианты, которые имеют три, четыре и больше точек при действии группы $X_1 f \cdots X_r f$. Так, мы находим последовательность целых чисел $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \cdots$, свойственных этой группе и не зависящих от выбора переменных. Вычисляя эти числа одно за другим, мы всегда придем к числу ϱ_m, которое обращается в нуль вместе со всеми последующими числами $\varrho_{m+1}, \varrho_{m+2} \cdots$. Не будем вдаваться в подробности, но все же заметим, что подобные рассуждения можно провести для любого семейства из ∞^r преобразований, будь то группа или нет.

§ 60

Выше мы видели, что интранзитивная группа $X_1 f \cdots X_r f$ разбивает все пространство $(x_1 \cdots x_n)$ в непрерывное семейство q-мерных точечных многообразий

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = C_1, \cdots \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = C_{n-q},$$

каждое из которых остается при преобразованиях группы инвариантным. Через Ω обозначены при этом независимые решения q-параметрической полной системы, заданной уравнениями $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$.

Каждая точка пространства принадлежит одному и только одному из ∞^{n-q} многообразий $\Omega_1 = a_1, \cdots \Omega_{n-q} = a_{n-q}$, т. е. здесь мы имеем дело с разбиением пространства в смысле, указанном в гл. 6, стр. 112. Это разбиение остается при всех преобразованиях группы $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантным, вместе с тем остается инвариантным каждый отдельный элемент этого разбиения.

Бывает, что и для транзитивных групп существует разбиение пространства на ∞^{n-q} q-мерных многообразий $\Omega_1 = a_1, \cdots \Omega_{n-q} = a_{n-q}$, остающееся при действии группы инвариантным. Но каждое отдельное из ∞^{n-q} многообразий не может, разумеется, оставаться при этом инвариантным, иначе группа была бы интранзитивной; эти ∞^{n-q} многообразий, напротив, должны переставляться группой между собой, тогда как их совокупность остается инвариантной.

Группа пространства R_n называется *импримитивной*, если она определяет хотя бы одно инвариантное разбиение пространства на ∞^{n-q} q-мерных многообразий; группа, которая не допускает ни одного инвариантного разбиения, называется *примитивной*. О том, что значения $q = 0$ и $q = n$ при этом исключаются, вряд ли стоит упоминать.

Интранзитивность является, очевидно, частным случаем импримитивности; каждая интранзитивная группа в то же время является импримитивной. С другой стороны, всякая примитивная группа необходимо является транзитивной.

Чтобы получить теперь аналитическое определение импримитивности r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, нам надо лишь вспомнить, что любое разбиение пространства на ∞^{n-q} q-мерных многообразий $y_1 = \text{const}, \cdots y_{n-q} = \text{const}$ задается аналитически при помощи q-параметрической полной системы $Y_1 f = 0, \cdots Y_q f = 0$, решениями которой являются y_k. Тот факт, что данное разбиение остается инвариантным относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$, означает, что соответствующая q-параметрическая полная система допускает все преобразования группы.

Полная q-параметрическая система $Y_k f = 0$ допускает нашу группу, если она допускает общую однопараметрическую группу $\lambda_1 \cdot X_1 f + \cdots + \lambda_r \cdot X_r f$. Согласно теореме 20, гл. 8, стр. 156, это верно тогда, когда между $X_i f$ и $Y_k f$ имеют место соотношения следующего вида:

$$(X_i Y_k) = \sum_{\nu=1}^{q} \psi_{ik\nu}(x) \cdot Y_\nu f.$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием импримитивности группы $X_1 f \cdots X_r f$ является существование q-параметрической полной системы

$$Y_1 f = 0, \cdots Y_q f = 0 \quad (q < n),$$

связанной с $X_k f$ описанным образом.

Впрочем, группа $X_1 f \cdots X_r f$ может быть также «мультиимпримитивной»[2] — это значит, что может иметься несколько или даже бесконечно много полных систем, допускающих эту группу.

Позже мы расскажем о методах описания всех полных систем, остающихся инвариантными относительно заданной группы. В частности, мы сможем также понять, является эта группа примитивной или нет. Конечно, последний вопрос требует специального изучения лишь для транзитивных групп.

Теперь еще одно краткое замечание.

Пусть уравнения

$$y_1 = C_1, \cdots y_{n-q} = C_{n-q}$$

задают разбиение пространства $x_1 \cdots x_n$, инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$. Тогда если мы введем $y_1 \cdots y_{n-q}$ вместе с q другими подходящими функциями $z_1 \cdots z_q$ от $x_1 \cdots x_n$ в качестве новых независимых переменных, то получим инфинитезимальные преобразования $X_k f$ специального вида

$$X_k f = \sum_{\mu=1}^{n-q} \omega_{k\mu}(y_1 \cdots y_{n-q}) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} + \sum_{j=1}^{q} \zeta_{kj}(y_1 \cdots y_{n-q}, z_1 \cdots z_q) \frac{\partial f}{\partial z_j}$$

$$(k = 1 \cdots r).$$

Согласно главе 12, стр. 230, все инфинитезимальные преобразования $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$, оставляющие некоторое фиксированное многообразие $y_1 = y_1^0, \cdots y_{n-q} = y_{n-q}^0$ инвариантным, порождают подгруппу.

[2] Автор использует термин auf mehrfache Weise imprimitiv. — *Прим. перев.*

Если мы хотим найти все такие инфинитезимальные преобразования, то нам достаточно лишь найти все системы значений $e_1 \cdots e_r$, удовлетворяющие $n-q$ уравнениям

$$\sum_{k=1}^{r} e_k \cdot \omega_{k\mu}(y_1^0 \cdots y_{n-q}^0) = 0 \quad (\mu = 1 \cdots n-q).$$

Если $r > n-q$, то всегда имеются системы значений $e_1 \cdots e_r$ с этим свойством, следовательно, группа $X_1 f \cdots X_r f$ в этом случае заведомо содержит подгруппы с по меньшей мере $r-n+q$ параметрами. Кстати, ясно, что r *укороченных* инфинитезимальных преобразований

$$\overline{X}_k f = \sum_{\mu=1}^{n-q} \omega_{k\mu}(y_1 \cdots y_{n-q}) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

в $n-q$ переменных $y_1 \cdots y_{n-q}$ порождают группу; однако эта группа содержит, возможно, не r, а меньше существенных параметров. Ранее упомянутое вычисление сводится, очевидно, к описанию всех инфинитезимальных преобразований $e_1 \cdot \overline{X}_1 f + \cdots + e_r \cdot \overline{X}_r f$, оставляющих точку $y_1^0 \cdots y_{n-q}^0$ $(n-q)$-мерного пространства $y_1 \cdots y_{n-q}$ инвариантной.

Глава 14

Описание всех систем уравнений, допускающих заданную r-параметрическую группу

Если система уравнений от $x_1 \cdots x_n$ остается при всех преобразованиях r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантной, то мы говорим, что она допускает эту группу. Каждая такая система допускает все преобразования общей однопараметрической группы $\sum e_k \cdot X_k f$, т. е., в частности, все ∞^{r-1} *инфинитезимальных* преобразований $\sum e_k \cdot X_k f$ r-параметрической группы.

Но, с другой стороны, мы уже показали, что всякая система уравнений, допускающая r *инфинитезимальных* преобразований $X_1 f \cdots X_r f$, а также все ∞^{r-1} *инфинитезимальных* преобразований $\sum e_k \cdot X_k f$, в то же время допускает все *конечные* преобразования однопараметрических групп $\sum e_k \cdot X_k f$, т. е. все преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$ (ср. теорему 14, стр. 125). Поэтому если надо описать все системы уравнений, допускающие r-параметрическую группу $X_1 f \cdots X_r f$, то эта задача уже была решена в полной общности в главе 7. Там были описаны все системы уравнений, допускающие r заданных инфинитезимальных преобразований.

Одно то обстоятельство, что рассматриваемые здесь $X_1 f \cdots X_r f$ порождают r-параметрическую группу, означает по сравнению с общим случаем значительное упрощение. Поэтому видится совершенно обоснованным, если этот особый случай, где $X_k f$ порождают группу, мы исследуем самостоятельно.

Различия в решении обсуждаемой задачи для случаев, когда конечные уравнения данной группы известны и когда нет, довольно существенны. В первом случае интегрирование не требуется. Во втором же без него, вообще говоря, не обойтись; но необходимость многих операций, использованных при решении общей задачи в главе 7, отпадает.

Мы рассмотрим один за другим оба эти случая, прежде всего, из-за приложений, но также и для того, чтобы поглубже ознакомиться с данным вопросом; на самом деле, оба подхода взаимно друг друга дополняют[1].

Наконец, надо еще упомянуть, что мы отныне будем часто переносить символику, употребляемую в теории подстановок, на теорию групп преобразований. Так, например, мы обозначаем через S, $T, \cdots$ отдельные преобразования, а через S^{-1}, $T^{-1}, \cdots$ — соответствующие им обратные преобразования. Под ST мы понимаем преобразование, получающееся, если сначала выполнить преобразование S, а затем преобразование T[2]. Отсюда следует, что выражения вида SS^{-1}, TT^{-1} означают тождественное преобразование.

§ 61

Рассмотрим какую-либо точку P пространства. Множество всех положений, которые эта точка принимает при ∞^r преобразованиях группы, образует некоторое многообразие M. Покажем, что это многообразие допускает группу, иначе говоря, всякая точка из M при любом преобразовании группы снова переходит в точку многообразия M.

Действительно, пусть P' какая-либо точка из M, а именно: пусть P' получается из P при помощи преобразования S нашей группы, что мы выразим с помощью символического уравнения

$$(P)\,S = (P').$$

Тогда если T — произвольное преобразование группы, то при выполнении T точка P' переходит в

$$(P')T = (P)\,ST;$$

но поскольку преобразование ST также принадлежит этой группе, то $(P)\,ST$ — это тоже точка из M, следовательно, наше утверждение доказано.

Очевидно, что всякое инвариантное относительно этой группы многообразие, содержащее точку P, должно в то же время содержать многообразие M. Поэтому мы можем также сказать: M — это *наименьшее* инвариантное относительно группы многообразие, которому принадлежит точка P.

[1] Ли, Math. Ann., том XI, стр. 510–512, том XVI, стр. 476. Archiv for Math. og Nat., Христиания, 1878, 1882, 1883 гг., Math. Ann., том XXIV.

[2] Используемая здесь и ниже символика теории групп отличается от принятой сейчас. — *Прим. ред.*

Более того, можно показать, что при помощи преобразований группы можно перевести любую точку из M в любую другую точку этого многообразия. А именно: если P' и P'' — две точки из M, и они получаются из P в результате преобразований S и U соответственно, то имеют место соотношения

$$(P)\,S = (P'), \quad (P)\,U = (P'');$$

из первого следует:

$$(P')S^{-1} = (P)SS^{-1} = (P);$$

таким образом, при помощи второго соотношения получается

$$(P')S^{-1}U = (P''),$$

это значит, что точка P' переходит при преобразовании $S^{-1}U$, которое также принадлежит этой группе, в точку P''. Тем самым сформулированное выше утверждение доказано.

Отсюда мы видим, что многообразие M может также быть определено как совокупность всех положений, которые принимает любая другая его точка, отличная от P, при ∞^r преобразованиях группы.

Таким образом, верна

Теорема 36. *Если применить все ∞^r преобразований r-параметрической группы пространства $(x_1 \cdots x_n)$ к точке P этого пространства, то множество всех положений, которые эта точка в результате принимает, образует инвариантное относительно этой группы многообразие; это многообразие не содержит никакого меньшего инвариантного относительно этой группы подмножества, напротив, оно само содержится во всех инвариантных многообразиях, которым принадлежит точка P.*

Если предположить, что конечные уравнения $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ r-параметрической группы известны, то можно без труда описать для любой точки $x_1^0 \cdots x_n^0$ наименьшее инвариантное многообразие, которому она принадлежит. Это многообразие состоит, согласно вышесказанному, из совокупности всех положений $x_1 \cdots x_n$, которые принимает точка $x_1^0 \cdots x_n^0$ при преобразованиях группы. Очевидно, однако, что совокупность этих положений представляется n уравнениями

$$x_i = f_i(x_1^0 \cdots x_n^0, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

в которых параметры a истолковываются как независимые переменные. Если исключить a, то мы получим искомое многообразие, заданное уравнениями, содержащими лишь переменные x.

Здесь необходимо напомнить, что в уравнениях $x_i = f_i(x^0, a)$ параметры a не являются совершенно произвольными; с самого начала исключены все системы значений $a_1 \cdots a_r$, для которых определитель

$$\sum \pm \left[\frac{\partial f_1(x,a)}{\partial x_1}\right]_{x=x^0} \cdots \left[\frac{\partial f_n(x,a)}{\partial x_n}\right]_{x=x^0}$$

обращается в нуль, так как мы всегда используем лишь такие преобразования, которые являются разрешимыми. Отсюда следует, что при исключении a при определенных условиях получаются уравнения многообразия, содержащего, помимо тех точек, в которые переходит $x_1^0 \cdots x_n^0$ под действием *разрешимых* преобразований группы, еще и другие точки; тогда эти последние точки, в свою очередь, как легко видеть, образуют некоторое инвариантное многообразие.

Далее надо заметить, что описанный процесс исключения может происходить по-разному для различных систем значений x_k^0; исключение параметров a не обязательно всегда приводит к одному и тому же числу соотношений между переменными x, что опять же означает, что соответствующие наименьшие инвариантные многообразия не обязаны все иметь одну и ту же размерность.

Если из всех наименьших инвариантных многообразий одинаковой размерности выбрать бесконечную совокупность согласно какому-нибудь аналитическому закону, то она также образует инвариантное многообразие. Таким образом можно, очевидно, получить все инвариантные многообразия.

Итак, мы имеем следующую теорему.

Теорема 37. *Если известны конечные уравнения r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ в переменных $x_1 \cdots x_n$, то можно без интегрирования найти все инвариантные относительно этой группы системы уравнений или, что то же самое, все инвариантные многообразия.*

§ 62

В главе 12, стр. 229, мы видели, что r-параметрическая группа G_r в переменных $x_1 \cdots x_n$ каждой точке пространства ставит в соответствие совершенно определенную подгруппу, а именно такую, которая состоит из преобразований группы G_r, оставляющих эту точку инвариантной.

Пусть точка P остается инвариантной относительно подгруппы группы G_r с m, но не более параметрами; пусть S — общий символ преобразования этой m-параметрической подгруппы, так что $(P)\,S = (P)$. Пусть, далее. T будет преобразованием, переводящим точку P в новое положение P':

$$(P)\,T = (P').$$

Если теперь T — произвольное преобразование группы G_r, также переводящее P в P', то мы имеем

$$(P)\,\mathsf{T} = (P') = (P)T,$$

следовательно

$$(P)\,\mathsf{T}\,T^{-1} = (P).$$

Отсюда ясно, что $\mathsf{T}\,T^{-1}$ — одно из преобразований S, т. е. что

$$\mathsf{T} = ST$$

является общим видом такого преобразования T. А поскольку имеется в точности ∞^m различных преобразований S, то мы видим:

Группа G_r содержит в точности ∞^m различных преобразований, переводящих P в P'.

Если мы, с другой стороны, зададимся вопросом описания всех преобразований S' группы G_r, оставляющих точку P' инвариантной, то нам потребуется выполнение условия $(P')S' = (P')$. Отсюда мы видим, что

$$(P)\,T\,S' = (P)T \quad \text{и} \quad (P)\,T\,S'\,T^{-1} = (P),$$

следовательно, $T\,S'\,T^{-1}$ является преобразованием S, т. е. S' имеет вид

$$S' = T^{-1}\,S\,T.$$

Легко видеть, что S здесь может быть совершенно произвольным преобразованием подгруппы, соответствующей точке P; поэтому наша группа содержит в точности ∞^m различных преобразований S', которые, в свою очередь, очевидно, образуют m-параметрическую подгруппу группы G_r.

Обобщим прежние результаты этого параграфа следующим образом:

Утверждение 1. *Если r-параметрическая группа G_r пространства R_n содержит в точности ∞^m и не более преобразований S, оставляющих точку P инвариантной, и, кроме того, хотя бы одно преобразование T, переводящее точку P в точку P', то в целом она содержит ∞^m различных преобразований, переводящих P в P'; общий вид этих преобразований таков: $S\,T$. Кроме того, группа G_r содержит в точности ∞^m преобразований, оставляющих точку P' инвариантной, общий вид которых $T^{-1}\,S\,T$.*

Из второй части этого утверждения следует, что те точки, которые допускают в точности ∞^m преобразований нашей группы, переставляются между собой преобразованиями этой группы, в то время как их совокупность остается инвариантной.

Таким образом, справедлива

Теорема 38. *Совокупность всех точек, допускающих одинаковое количество, скажем ∞^m и не более, преобразований r-параметрической группы, остается инвариантной относительно всех преобразований группы.*

Эту теорему мы доказали, применяя рассуждения, заимствованные из теории перестановок. Вместе с тем мы хотим показать, как можно провести это доказательство, не прибегая к таким рассуждениям, вернее, к языку теории подстановок.

Точка $x_1^0 \cdots x_n^0$, допускающая ∞^m преобразований r-параметрической группы

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1 \cdots r),$$

допускает в точности m независимых инфинитезимальных преобразований этой группы. Поэтому в окрестности точки $x_1^0 \cdots x_n^0$ эта группа содержит в точности m независимых инфинитезимальных преобразований, разложения которых в ряд по $x_i - x_i^0$ начинаются с членов первого или более высокого порядка. Если теперь предположить, что в группу введены новые переменные

$$\overline{x}_i = \overline{x}_i^0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}(x_k - x_k^0) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n), \quad \sum \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{nn} \neq 0,$$

то согласно гл. 11, стр. 220, мы получим в переменных $\overline{x}_i$ группу, также содержащую в окрестности $\overline{x}_i^0$ в точности m независимых инфинитезимальных преобразований порядка 1 или выше. Если, в частности, предположить, что переход от x_i к $\overline{x}_i$ является преобразованием группы $X_1 f \cdots X_r f$, то группа в переменных $\overline{x}_i$ просто идентична группе

$$\overline{X}_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \overline{x}_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

(ср. гл. 4, утв. 4, стр. 89). Другими словами, если точка x_i^0 при преобразовании нашей группы переходит в точку $\overline{x}_i^0$, то эта точка также допускает в точности m независимых инфинитезимальных преобразований этой группы. Но тем самым теорема 38, очевидно, доказана.

Из теоремы 38 непосредственно следует, что верно также следующее

Утверждение 2. *Совокупность всех точек $x_1 \cdots x_n$, допускающих m или более независимых инфинитезимальных преобразований r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, остается при преобразованиях этой группы инвариантной.*

Объединив это утверждение с рассуждениями из главы 11, утв. 4, стр. 223, мы получим новый важный результат. Там мы видели, что точки $x_1 \cdots x_n$, допускающие m или более независимых инфинитезимальных преобразований $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$ r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, характеризуются тем, что обращают в нуль все определители порядка $r - m + 1$ некоторой матрицы. Теперь мы видим, что система уравнений, получающаяся в результате приравнивания этих определителей порядка $r - m + 1$ к нулю, допускает все преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$. В соответствии с этим мы имеем следующую теорему.

Теорема 39. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

порождают r-параметрическую группу, то в результате приравнивания нулю всех определителей порядка $r - m + 1$ матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix} \tag{1}$$

всегда получается система уравнений, допускающая все преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$; это справедливо для любого числа $m \leqslant r$, но лишь при условии, что системы значений $x_1 \cdots x_n$, обращающие все такие определители порядка $r - m + 1$ в нуль, вообще существуют.

Далее в этой главе (§§ 66 и 67, стр. 264 и 265) мы дадим еще два других, чисто аналитических, доказательства этой важной вышеизложенной теоремы. А пока заметим лишь следующее.

Теорема 39 показывает, что между задачей из главы 7, стр. 137–148, и задачей из настоящей главы имеется существенное различие.

Если $X_1 f \cdots X_r f$ порождают r-параметрическую группу, то приравнивая нулю все определители порядка $r - m + 1$ матрицы (1), мы всегда получим инвариантную систему уравнений, если только все эти определители действительно одновременно могут обращаться в нуль. Ситуация будет иной, если относительно $X_k f$ предполагается лишь, что они, будучи приравнены нулю, дают полную систему из r или менее уравнений. В этом случае инвариантные системы, включающие в себя уравнения, полученные в результате приравнивания соответствующих определителей нулю, вполне могут существовать. Однако далеко не всегда в результате приравнивания

этих определителей нулю сразу получается инвариантная система уравнений. Для проверки условия инвариантности в общем случае понадобятся дополнительные операции, описанные в гл. 7, стр. 138.

В последнем параграфе этой главы, стр. 268 и далее, мы остановимся на этом вопросе подробнее.

§ 63

В предыдущем параграфе мы видели, что из инфинитезимальных преобразований r-параметрической группы можно без интегрирования получить некоторые системы уравнений, остающиеся инвариантными относительно данной группы. Теперь мы покажем, как находятся все системы уравнений, которые допускают r-параметрическую группу с заданными инфинитезимальными преобразованиями:

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Мы полагаем, что среди r уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ имеется в точности q друг от друга независимых, т. е. что все определители порядка $q+1$, но не все определители порядка q в матрице (1) обращаются в нуль тождественно.

Также, как в гл. 7, стр. 134 и 137, мы можем тогда разделить системы уравнений, допускающие r инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$, на $q+1$ различных классов. К одному и тому же классу мы отнесем при этом те системы уравнений, в силу которых все определители порядка $p+1$, но не все определители порядка p матрицы (1) обращаются в нуль, под p понимается одно из $q+1$ чисел $q, q-1, \cdots 1, 0$. Если мы предпочтем использование терминологии теории многообразий, то мы должны будем сказать: к одному и тому же классу относятся те инвариантные многообразия, точки которых допускают одинаковое число, например ровно $r-p$, независимых инфинитезимальных преобразований $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_e \cdot X_r f$. Каждой точке такого многообразия инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ ставят в соответствие в точности p независимых направлений, которые, в свою очередь, касаются этого многообразия (ср. гл. 7, стр. 148).

Польза этой классификации состоит в том, что можно рассматривать каждый класс в отдельности и описывать относящиеся к нему системы уравнений и многообразия.

Если число p равно q, то все инвариантные системы уравнений, принадлежащие соответствующему классу, описываются при помощи теоремы 17, гл. 7, стр. 137, согласно которой каждая такая система может быть представлена соотношениями между общими решениями уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$. Поскольку эти r уравнений образуют q-параметрическую полную систему, то они будут лишь тогда иметь общие решения, когда $q < n$.

Случай $p = q$ мы можем теперь не рассматривать. Отныне мы предполагаем, что p — одно из чисел $0, 1, q - 1$, и ставим себе задачу описать все инвариантные относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$ многообразия, принадлежащие классу, заданному числом p.

Первый шаг к решению этой задачи — определение местонахождения всех точек, для которых все определители порядка $p + 1$, но не все определители порядка p матрицы (1) обращаются в нуль. Это множество, очевидно, содержит все многообразия, инвариантные относительно этой группы и принадлежащие нашему классу; кроме того, оно само согласно теореме 38, стр. 253, образует инвариантное многообразие.

Чтобы найти искомое множество, сначала найдем совокупность всех точек, для которых по меньшей мере все определители порядка $p + 1$ матрицы (1) обращаются в нуль, то есть вычислим все определители порядка $p + 1$ упомянутой матрицы — обозначим их через $\Delta_1, \Delta_2 \cdots \Delta_\varrho$ — и положим их равными нулю:

$$\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0.$$

Найденные таким образом уравнения задают многообразие, являющееся согласно теореме 39, стр. 254, инвариантным относительно этой группы и содержащее искомое множество.

Если же никакой системы значений $x_1 \cdots x_n$, обращающей все Δ в нуль вообще не существует, или если определители порядка $p + 1$ обращаются, в нуль лишь в том случае, когда и все определители порядка p одновременно обращаются в нуль, то понятно, что класс, отвечающий числу p, не содержит вообще никаких многообразий, инвариантных относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$. Таким образом, мы видим, что далеко не каждый из наших $q + 1$ классов должен быть представлен принадлежащими ему многообразиями.

Предположим, что для выбранного нами p ни один из упомянутых исключительных случаев не имеет места, т. е. что действительно имеются системы значений $x_1 \cdots x_n$, для которых все определители порядка $p + 1$, но не все — порядка p матрицы (1) обращаются в нуль.

Многообразие $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ остается, как мы уже заметили,

инвариантным относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$. Если это многообразие приводимо, то есть состоит из дискретного числа различных многообразий, то оно попросту распадается на столько же инвариантных по отдельности многообразий. В самом деле, группа $X_1 f \cdots X_r f$ порождена инфинитезимальными преобразованиями, поэтому если она оставляет инвариантной совокупность нескольких конечным образом различных многообразий, то она должна оставлять неподвижным каждое отдельное из этих многообразий.

Пусть $M_1, M_2, \cdots$ — отдельные неприводимые и потому инвариантные относительно группы многообразия, на которые распадается многообразие $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$. Среди них могут тогда иметься некоторые многообразия, для точек которых все определители порядка p матрицы (1) также обращаются в нуль. Если исключить все многообразия с этим особым свойством, то останутся еще некоторые многообразия $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \cdots$, совокупность которых очевидно образует множество всех точек, для которых все определители порядка $p+1$, но не все определители порядка p матрицы (1) обращаются в нуль.

Тем самым мы нашли искомое множество; вместе с тем мы видим, что это множество может состоять из дискретной совокупности отдельных инвариантных многообразий $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \cdots$, каждое из которых, разумеется, принадлежит классу, заданному числом p.

Очевидно, что всякое инвариантное относительно нашей группы многообразие, принадлежащее классу, соответствующему числу p, содержится в одном из многообразий $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \cdots$. Поэтому, чтобы найти все такие многообразия, нам нужно лишь рассмотреть каждое из многообразий $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \cdots$ по отдельности и описать содержащиеся в нем инвариантные многообразия, принадлежащие упомянутому классу. Согласно одному из предыдущих замечаний (гл. 7, утв. 6, стр. 151) любое инвариантное многообразие, принадлежащее классу p, является по крайней мере p-мерным.

§ 64

Задача, к которой мы были приведены в конце предыдущего параграфа, является частным случаем следующей общей задачи.

Даны уравнения неприводимого многообразия M, остающегося при преобразованиях r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантным. Точкам этого многообразия инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ в общем случае ставят в соответствие ровно p независимых направлений, которые, разумеется, касаются этого (по крайней мере

p-мерного) многообразия. Надо найти все содержащиеся в M инвариантные подмножества, точкам которых инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ также ставят в соответствие ровно p независимых направлений.

Эту задачу мы теперь решим.

Мы предполагаем, что уравнения многообразия M даны нам в разрешенном виде:

$$x_{s+i} - \varphi_{s+i}(x_1 \cdots x_s) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n - s),$$

но не должны при этом забывать, что, сделав выбор определенного разрешения, мы исключаем все системы значений $x_1 \cdots x_n$, для которых именно это разрешение уравнений невозможно. Вполне вероятно, что мы таким образом исключаем некоторые инвариантные подмножества многообразия M, которые получили бы при другом разрешении.

Случай $p = 0$ особо рассматривать нет надобности, поскольку многообразие M состоит в этом случае, очевидно, только из инвариантных точек.

Чтобы решить эту задачу для остальных значений p, необходимо сделать несколько предварительных замечаний, которые сами по себе очень важны и вдобавок тесно связаны с аналитическими построениями в главе 7, стр. 140–141.

Поскольку многообразие M остается инвариантным при преобразованиях нашей группы, то его точки переставляются между собой преобразованиями этой группы. Поэтому если не принимать во внимание точки, лежащие за пределами M, то наша группа $X_1 f \cdots X_r f$ задаст некоторую группу преобразований точек многообразия M (ср. стр. 27). Конечно, эта новая группа не обязана содержать r существенных параметров, так как может случиться, что некоторая подгруппа группы $X_1 f \cdots X_r f$ оставляет неподвижными все точки из M по отдельности.

Сначала обобщим сказанное в утверждении.

Теорема 40. *Точки многообразия, остающегося инвариантным относительно r-параметрической группы пространства $(x_1 \cdots x_n)$, в свою очередь, преобразуются непрерывной группой, содержащей r или менее параметров.*

Поскольку мы полагаем, что инвариантное многообразие M является неприводимым, мы можем рассматривать его как некоторое пространство само по себе. Поэтому мы должны получить аналитическое выражение группы преобразований, которая преобразует точки этого пространства,

если сопоставим точкам из M некоторую систему координат на этом многообразии и проследим, как эти координаты преобразуются под действием группы $X_1 f \cdots X_r f$.

При наложенных условиях группу, преобразующую точки из M, можно задать непосредственно. Действительно, нам требуется лишь истолковать $x_1 \cdots x_s$ как координаты точек из M и в конечных уравнениях $x_i' = f_i(x, a)$ группы $X_1 f \cdots X_r f$ заменить $x_{s+1} \cdots x_n$ на $\varphi_{s+1} \cdots \varphi_n$ или опустить; тогда мы получим следующие уравнения данной группы:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_s, \varphi_{s+1} \cdots \varphi_n; a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots s).$$

Можно было бы непосредственно убедиться, что мы действительно имеем дело с группой в переменных $x_1 \cdots x_s$. Для этого достаточно было бы выполнить последовательно два преобразования указанного вида и затем учесть два факта: во-первых, что преобразования $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ образуют группу, и, во-вторых, что система уравнений $x_{s+i} = \varphi_{s+i}$ эту группу допускает.

Если же, напротив, желательно знать *инфинитезимальные* преобразования этой группы в переменных $x_1 \cdots x_s$, то надо лишь отбросить в $X_k f$ члены с $\dfrac{\partial f}{\partial x_{s+1}} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, а в остальных членах заменить $x_{s+1} \cdots x_n$ на φ. Находим r инфинитезимальных преобразований

$$\overline{X}_k f = \sum_{\nu=1}^{s} \xi_{k\nu}(x_1 \cdots x_n, \varphi_{s+1} \cdots \varphi_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \cdots r),$$

которые, однако, не обязаны быть друг от друга независимыми.

Мы непосредственно проверим, что укороченные инфинитезимальные преобразования $\overline{X}_k f$ порождают группу. Соответствующие вычисления очень похожи на те, что были проведены в гл. 7, стр. 146.

Как и тогда, мы обозначим выполнение подстановки $x_{s+1} = \varphi_{s+1}$ через [ ]. Тогда прежде всего мы имеем:

$$\overline{X}_k f = \sum_{\nu=1}^{s} [\xi_{k\nu}] \frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

Далее мы видим из уравнения (3), глава 7, стр. 123, что

$$\overline{X}_k [\Omega] \equiv [X_k \Omega],$$

где под Ω понимается совершенно произвольная функция от $x_1 \cdots x_n$. Отсюда следует:

$$(\overline{X}_k \overline{X}_j) = \sum_{\nu=1}^{s} \{[X_k \xi_{j\nu}] - [X_j \xi_{k\nu}]\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu};$$

а так как имеют место соотношения вида

$$(X_k X_j) = \sum_{\nu=1}^{s} c_{kj\pi} \cdot X_\pi f$$

или, что то же самое, вида

$$X_k \xi_{j\nu} - X_j \xi_{k\nu} = \sum_{\nu=1}^{s} c_{kj\pi} \xi_{\pi\nu},$$

то мы просто получаем

$$(\overline{X}_k \overline{X}_j) = \sum_{\nu=1}^{s} c_{kj\pi} \cdot \overline{X}_\pi f.$$

Тем самым чисто аналитически доказано, что $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ порождают группу.

Инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_n$ каждой точке общего положения на многообразии M ставят в соответствие в точности p независимых направлений $dx_1 : \cdots : dx_n$, которые, как известно, касаются этого многообразия. Можно предвидеть, что инфинитезимальные преобразования $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$ или, что то же самое, многообразия M также ставят в соответствие каждой точке $x_1 \cdots x_s$ общего положения в точности p независимых направлений $dx_1 : \cdots : dx_s$. Мы проверим, что это действительно так. При наложенных условиях все определители порядка $p+1$, но не все определители порядка p матрицы (1) обращаются в нуль при подстановке $x_{s+1} = \varphi_{s+1}$, следовательно, среди r уравнений

$$[\xi_{k1}] \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + [\xi_{kn}] \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (k = 1 \cdots r) \tag{2}$$

имеется в точности p независимых. Отсюда следует, что из r уравнений $\overline{X}_k f = 0$ имеется не более p независимых; наша задача — доказать, что их ровно p. Это несложно.

Поскольку система уравнений $x_{s+1} - \varphi_{s+1} = 0$ допускает инфинитезимальные преобразования $X_k f$, то имеет место тождество

$$[X_k(x_{s+1} - \varphi_{s+1})] \equiv 0,$$

или подробнее:

$$[\xi_{k,s+i}] \equiv \sum_{\nu=1}^{s} [\xi_{k\nu}] \frac{\partial \varphi_{s+i}}{\partial x_\nu}.$$

Если обозначить через $\chi_1 \cdots \chi_r$ произвольные функции от $x_1 \cdots x_s$, то мы имеем

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k [\xi_{k,s+i}] \equiv \sum_{k=1}^{r} \chi_k \cdot \overline{X}_k \varphi_{s+i}.$$

Если теперь имеются r функций $\psi_1 \cdots \psi_r$ от $x_1 \cdots x_s$, не обращающихся одновременно в нуль, таких, что уравнение

$$\sum_{k=1}^{r} \psi_k(x_1 \cdots x_s) \cdot \overline{X}_k f = 0$$

тождественно выполняется, то мы получим

$$\sum_{k=1}^{r} \psi_k [\xi_{k,s+i}] \equiv \sum_{k=1}^{r} \psi_k \cdot \overline{X}_k \varphi_{s+i} \equiv 0,$$

откуда также:

$$\sum_{k=1}^{r} \psi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} [\xi_{k\nu}] \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \equiv 0.$$

Тем самым доказано, что среди уравнений

$$\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_r f = 0$$

ровно столько же независимых, сколько и среди уравнений (2), то есть ровно p.

Теперь мы, наконец-то, имеем возможность решить задачу, поставленную в начале параграфа, на стр. 257.

Речь идет о нахождении некоторых инвариантных относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$ подмножеств инвариантного многообразия M, а именно: тех подмножеств, точкам которых инфинитезимальные преобразования

$X_1 f \cdots X_r f$ ставят в соответствие в точности p независимых направлений. Эти подмножества можно, согласно вышесказанному, определить как некоторые многообразия пространства $x_1 \cdots x_s$; они характеризуются тем, что допускают группу $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$, и что инфинитезимальные преобразования $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ ставят их точкам в соответствие ровно p независимых направлений. Наша задача сводится, таким образом, к следующей.

В s-мерном пространстве M дана группа $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$, инфинитезимальные преобразования которой сопоставляют точкам общего положения в этом пространстве в точности $p \leqslant s$ независимых направлений. Требуется найти все такие инвариантные многообразия, содержащиеся в M.

Эту задачу мы уже, однако, решили выше (стр. 255); только тогда вместо группы $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ рассматривалась группа $X_1 f \cdots X_r f$, вместо s — число n, вместо p — число q. Искомые многообразия представляются согласно этому при помощи соотношений между решениями p-параметрической полной системы, которую задают уравнения $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_r f = 0$. Если эти соотношения добавить к уравнениям многообразия M, то получатся уравнения инвариантных подмножеств в M в исходных переменных $x_1 \cdots x_n$.

Конечно, инвариантные подмножества требуемого типа имеются в M лишь тогда, когда $s > p$, и отсутствуют, если числа s и p равны.

Итак, мы имеем, прежде всего, следующий важный результат:

Теорема 41. *Если s-мерное многообразие пространства $x_1 \cdots x_n$ допускает r-параметрическую группу $X_1 f \cdots X_r f$, и если точкам этого многообразия инфинитезимальными преобразованиями этой группы ставятся в соответствие ровно p независимых направлений, которые тогда заведомо касаются многообразия, то $s \geqslant p$; в случае $s > p$ многообразие разбивается на ∞^{s-p} p-мерных подмножеств, каждое из которых допускает группу $X_1 f \cdots X_r f$.*

Вместе с тем также полностью решена задача, к которой мы были приведены в конце предыдущего параграфа (стр. 257), а следовательно, получено описание всех систем уравнений, допускающих группу $X_1 f \cdots X_r f$. Для дальнейшего использования еще раз сведем воедино необходимые для этого шаги.

Теорема 42. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

порождают r-параметрическую группу, и если при этом все определители порядка $q+1$, но не все определители порядка q матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdot & \cdot & \xi_{rn} \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль тождественно, то все системы уравнений или, что то же самое, все многообразия, которые допускает эта группа, находятся следующим образом:

Разобьем данные системы уравнений и соответственно многообразия на $q+1$ различных классов, причисляя к одному и тому же классу те системы уравнений, в силу которых все определители порядка $p+1$, но не все определители порядка p вышеупомянутой матрицы обращаются в нуль, где под p понимается одно из чисел $q, q-1, \cdots 1, 0$.

Чтобы теперь найти все инвариантные системы уравнений, относящиеся к определенному классу, выделим все определители порядка $p+1$ матрицы $\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_\varrho$ и приравняем их нулю. Если не существует никакой системы значений $x_1 \cdots x_n$, которая все ϱ определителей Δ_i одновременно обращает в нуль, то класс, задаваемый числом p, не содержит вообще никаких инвариантных многообразий; то же самое, очевидно, справедливо и для классов, отвечающих числам $p-1, p-2, \cdots 1, 0$. С другой стороны, если все системы значений $x_1 \cdots x_n$, которые обращают в нуль $\Delta_1 \cdots \Delta_\varrho$, одновременно приводят к обращению в нуль всех определителей порядка p нашей матрицы, то и в этом случае класс с числом p вообще не будет представлен многообразиями. Если же ни один из этих двух случаев не имеет места, то система уравнений

$$\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$$

представляет то инвариантное относительно этой группы многообразие M, в котором содержатся все инвариантные многообразия из класса, задаваемого числом p. Если M распадается на дискретное множество многообразий $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2 \cdots$, то они остаются инвариантными по отдельности, но в любом из этих многообразий может содержаться бесконечно много инвариантных подмножеств, принадлежащих тому же классу, что и M. Чтобы найти эти подмножества, рассмотрим уравнения, например, задающие M_1 в разрешенном виде:

$$x_{s+i} = \varphi_{s+i}(x_1 \cdots x_s) \quad (i = 1 \cdots n-s),$$

где целое число s больше либо равно p. Наконец, выпишем r уравнений

$$\overline{X}_k f = \sum_{\nu=1}^{s} \xi_{k\nu}(x_1 \cdots x_n, \varphi_{s+1} \cdots \varphi_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0$$

и вычислим какие-либо $s-p$ независимых решений

$$\omega_1(x_1 \cdots x_n) \cdots \omega_{s-p}(x_1 \cdots x_n)$$

p-параметрической полной системы, заданной этими уравнениями. Тогда общее аналитическое выражение искомых инвариантных подмножеств в M_1 таково:

$$x_{s+i} - \varphi_{s+i}(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad \psi_j(\omega_1 \cdots \omega_{s-p}) = 0$$
$$(i = 1 \cdots n-s; \quad j = 1 \cdots m),$$

где $m \leqslant s-p$ соотношений $\psi_j = 0$ являются совершенно произвольными.

Таким же образом, как с M_1, следует поступить, разумеется, и с $\mathsf{M}_2, \cdots$. В качестве p, кроме того, надо по порядку подставить все $q+1$ чисел $q, q-1, \cdots 1, 0$.

§ 65

В качестве примера использования вышеизложенных рассуждений рассмотрим трехпараметрическую группу

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$X_3 f = (-z + xy)\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + yz\frac{\partial f}{\partial z}$$

обычного пространства. Эта группа транзитивна, так как определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & y & z \\ -z+xy & y^2 & yz \end{vmatrix} = -(z-xy)^2$$

не обращается тождественно в нуль. Отсюда мы заключаем, что поверхность второго порядка $z - xy = 0$ остается инвариантной относительно этой группы, но только она и никакая другая.

Для точек поверхности $z - xy = 0$ — и только для них — обращаются в нуль даже все двумерные миноры матрицы Δ, тогда так одномерные миноры не могут одновременно обращаться в нуль. Отсюда следует, что инвариантная поверхность разбивается на ∞^1 инвариантных кривых, при этом никаких других инвариантных кривых не возникает, а инвариантных точек нет вообще.

Чтобы найти ∞^1 инвариантных кривых на поверхности $z-xy=0$, выберем x и y в качестве координат для точек поверхности и зададим согласно изложенному выше правилу укороченные инфинитезимальные преобразования в переменных x, y:

$$\overline{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \overline{X}_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \overline{X}_3 f = y^2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Три уравнения $\overline{X}_k f = 0$ сводятся к одному единственному, решением которого является x. Следовательно, искомые кривые задаются уравнениями

$$z - xy = 0, \quad x = \text{const},$$

то есть каждая отдельная прямая из семейства прямолинейных образующих на этой поверхности второго порядка остается инвариантной.

§ 66

Здесь мы дадим одно из двух новых, обещанных на стр. 254 доказательств важной теоремы 39.

Как и прежде, через $\Delta_1(x) \cdots \Delta_\varrho(x)$ мы обозначаем все определители порядка $p+1$ матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Кроме того, мы предполагаем, что существует система значений $x_1 \cdots x_n$, обращающая все ϱ определителей Δ в нуль. Требуется доказать, что система уравнений

$$\Delta_1(x) = 0, \cdots \Delta_\varrho(x) = 0$$

допускает все преобразования

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Согласно гл. 6, стр. 110, достаточно доказать, что система уравнений

$$\Delta_1(x') = 0, \cdots \Delta_\varrho(x') = 0$$

при подстановке $x_i' = f_i(x, a)$ будет эквивалентна системе уравнений

$$\Delta_1(x) = 0, \cdots \Delta_\varrho(x) = 0;$$

при этом совершенно безразлично, являются уравнения $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ друг от друга независимыми или нет.

Чтобы теперь доказать, что наша система уравнений действительно обладает данным свойством, мы поступим следующим образом.

В гл. 4, стр. 89, мы видели, что в силу уравнений $x_i' = f_i(x, a)$ имеет место соотношение вида

$$\sum_{k=1}^{r} e_k' \cdot X_k' f = \sum_{k=1}^{r} e_k \cdot X_k f, \tag{4}$$

в котором e_k' связаны с e_k посредством r уравнений

$$e_j = -\sum_{\pi,k=1}^{r} \vartheta_{jk}(a) \cdot \alpha_{\pi k}(a) \cdot e_\pi' = \sum_{\pi=1}^{r} \omega_{j\pi}(a) \cdot e_\pi'.$$

Подставляя записанные выше выражения для e_k в (4) и сравнивая коэффициенты в обеих частях, получаем r соотношений

$$X_k' f = \sum_{j=1}^{r} \omega_{jk}(a) \cdot X_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

которые, очевидно, обращаются в тождества, если выразить x' через x при помощи уравнений $x_i' = f_i(x, a)$.

В только что найденных уравнениях подставим вместо f функцию x_i' и получим таким образом уравнения

$$\begin{aligned} X_k' x_i' = \xi_{ki}(x') &= \sum_{j=1}^{r} \omega_{jk}(a) \cdot X_j x_i' \\ &= \sum_{j=1}^{r} \omega_{jk}(a) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}(x) \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\nu}, \end{aligned}$$

которые выражают $\xi_{ki}(x)$ непосредственно как функции от x и a. Это дает нам возможность исследовать поведение уравнений $\Delta(x') = 0$ при подстановке $x'_i = f_i(x, a)$.

Определители $\Delta_1(x') \cdots \Delta_\varrho(x')$ получаются из матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x') & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x') & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x') \end{vmatrix}$$

точно так же, как определители $\Delta_1(x) \cdots \Delta_\varrho(x)$ из матрицы (3). Если теперь подставить найденные прежде значения

$$\xi_{ki}(x') = \sum_{j=1}^{r} \omega_{jk} \cdot X_j x'_i$$

в только что записанную матрицу, а затем вычислить определители, то мы, прежде всего, увидим следующее: определители $\Delta_\sigma(x')$ имеют вид

$$\Delta_\sigma(x') = \sum_{\tau=1}^{\varrho} \chi_{\sigma\tau}(a) \cdot D_\tau \quad (\sigma = 1 \cdots \varrho),$$

где $\chi_{\sigma\tau}$ — некоторые, образованные из $\omega_{jk}(a)$ определители, тогда как $D_1 \cdots D_\varrho$ означают все определители порядка $p+1$ матрицы

$$\begin{vmatrix} X_1 x'_1 & \cdot & \cdot & X_1 x'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_r x'_1 & \cdot & \cdot & X_r x'_n \end{vmatrix}.$$

Наконец, если заменить каждую величину $X_k x'_i$ ее значением:

$$X_k x'_i = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{k\nu}(x) \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\nu},$$

то мы получим для определителей D_τ выражения вида

$$D_\tau = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \psi_{\tau\mu}(x, a) \cdot \Delta_\mu(x),$$

где $\psi_{\tau\mu}$ — некоторые, составленные из $\dfrac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\nu}$ определители.

Этим доказано, что $\Delta_\sigma(x')$ при подстановке $x'_i = f_i(x, a)$ принимают вид

$$\Delta_\sigma(x') = \sum_{\tau,\mu=1}^{\varrho} \chi_{\sigma\tau}(a) \cdot \psi_{\tau\mu}(x, a) \cdot \Delta_\mu(x) \quad (\sigma = 1 \cdots \varrho).$$

Поскольку функции $\chi_{\sigma\tau}(a)$, $\psi_{\tau\mu}(x, a)$ ведут себя для рассматриваемых систем значений x, a, вообще говоря, регулярно, то ясно, что система уравнений $\Delta_\sigma(x') = 0$ при подстановке $x'_i = f_i(x, a)$ будет эквивалентна системе уравнений $\Delta_\sigma(x) = 0$, то есть что последняя система уравнений допускает все преобразования $x'_i = f_i(x, a)$, что и требовалось доказать.

§ 67

Теорема 39 является настолько важной, что видится нелишним дать еще одно, третье ее доказательство.

Согласно утверждению 3 из главы 7 (стр. 127) система уравнений $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ заведомо допускает все преобразования r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, если имеют место соотношения вида

$$X_k \Delta_\sigma = \sum_{\tau=1}^{\varrho} \omega_{\sigma\tau}(x_1 \cdots x_n) \cdot \Delta_\tau \quad (k = 1 \cdots r, \sigma = 1 \cdots \varrho),$$

и если, кроме того, функции $\omega_{\sigma\tau}$ ведут себя регулярно для таких систем значений $x_1 \cdots x_n$, которые удовлетворяют уравнениям $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$. В нашем случае нетрудно доказать, что система уравнений $\Delta_\sigma = 0$ этими свойствами обладает. Однако, чтобы не быть многословными, мы приведем доказательство только для одного наиболее простого случая. Из него достаточно хорошо видно, как поступать в общем случае.

Во-первых, предположим, что наша группа является просто транзитивной. Тогда она содержит n независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_n f$ и, кроме того, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

не обращается тождественно в нуль.

Далее ограничимся доказательством того, что выполняются n соотношений вида

$$X_i \Delta = \omega_i(x_1 \cdots x_n) \cdot \Delta \quad (i = 1 \cdots n),$$

то есть что уравнение $\Delta = 0$ допускает все преобразования группы. Инвариантные системы уравнений, получающиеся путем приравнивания нулю миноров определителя Δ, мы при этом обсуждать не будем.

Если выразить миноры порядка $n-1$ определителя Δ через частные производные Δ по $\xi_{\mu\nu}$, то для $X_i\Delta$ получится выражение

$$X_i\Delta = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} X_i\,\xi_{\mu\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_{\mu\nu}}.$$

Преобразования $X_1 f \cdots X_n f$ порождают n-параметрическую группу, т. е. имеют место соотношения вида

$$(X_i\,X_\mu) = \sum_{s=1}^{n} c_{i\mu s}X_s f$$

или, если записать подробнее,

$$X_i\,\xi_{\mu\nu} - X_\mu\,\xi_{i\nu} = \sum_{s=1}^{n} c_{i\mu s}\xi_{s\nu}.$$

Таким образом, для $X_i\,\xi_{\mu\nu}$ получается нижеследующее выражение:

$$X_i\,\xi_{\mu\nu} = \sum_{s=1}^{n}\Big(\xi_{\mu s}\frac{\partial\xi_{i\nu}}{\partial x_s} + c_{i\mu s}\xi_{s\nu}\Big).$$

Если подставить его в вышестоящее уравнение для $X_i\Delta$, то получим,

$$X_i\Delta = \sum_{\mu,\nu,s=1}^{n}\Big(\xi_{\mu s}\frac{\partial\xi_{i\nu}}{\partial x_s} + c_{i\mu s}\xi_{s\nu}\Big)\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_{\mu\nu}}.$$

Здесь можно выразить коэффициенты при $\dfrac{\partial\xi_{i\nu}}{\partial x_s}$ и $c_{i\mu s}$ через Δ согласно известному утверждению об определителях. А именно:

$$\sum_{\mu=1}^{n}\xi_{\mu s}\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_{\mu\nu}} = \varepsilon_{s\nu}\Delta,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{s\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_{\mu\nu}} = \varepsilon_{s\mu}\Delta,$$

где величина $\varepsilon_{\pi\varrho}$ обращается в нуль, если π и ϱ отличны друг от друга, в то время как $\varepsilon_{\pi\pi}$ всегда имеет значение 1. Используя эти формулы, получаем,

$$X_i\Delta = \Delta\left\{\sum_{\nu,s=1}^{n}\varepsilon_{s\nu}\frac{\partial\xi_{i\nu}}{\partial x_s}+\sum_{\mu s=1}^{n}\varepsilon_{s\mu}\,c_{i\mu s}\right\},$$

а отсюда, наконец, следует:

$$X_i\Delta = \Delta\sum_{s=1}^{n}\varepsilon_{s\nu}\left(\frac{\partial\xi_{is}}{\partial x_s}+c_{iss}\right)\quad(i=1\cdots n). \tag{5}$$

Поскольку, как всегда, учитываются только такие системы значений $x_1\cdots x_n$, для которых все $\xi_{ki}(x)$ ведут себя регулярно, то и сомножитель, стоящий в правой части после Δ, очевидно, ведет себя для рассматриваемых систем значений $x_1\cdots x_n$ регулярно. Но если уравнение $\Delta=0$ выполняется для подобных систем значений $x_1\cdots x_n$, то согласно утверждению 3, стр. 127, оно допускает все преобразования группы $X_1f\cdots X_nf$.

§ 68

Как уже подчеркивалось на стр. 248, рассуждения в настоящей главе очень похожи на рассуждения из главы 7, стр. 134. Тем более важно поэтому уяснить различия между этими двумя теориями.

Первое различие мы уже упоминали на странице 254. Оно состоит в следующем: если r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1f\cdots X_nf$ порождают r-параметрическую группу, то каждая из уже достаточно часто упоминавшихся систем уравнений $\Delta_1=0,\cdots\Delta_\varrho=0$, полученных из определителей, допускает все инфинитезимальные преобразования $X_1f\cdots X_rf$. Если же на эти r инфинитезимальных преобразований $X_1f\cdots X_rf$ наложено лишь то ограничение, что независимые из уравнений $X_1f=0,\cdots X_rf=0$ образуют полную систему, то, вообще говоря, ни одна из систем уравнений $\Delta_1=0,\cdots\Delta_\varrho=0$ не обязана допускать инфинитезимальные преобразования $X_1f\cdots X_rf$.

Впрочем, при известных условиях можно и во втором из упомянутых случаев быть заранее уверенным в том, что система уравнений $\Delta_1=0,\cdots\Delta_\varrho=0$, полученная из определителей, допускает инфинитезимальные преобразования $X_1f\cdots X_rf$.

Пусть r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1f\cdots X_rf$ таковы, что независимые из r уравнений $X_1f=0,\cdots X_rf=0$ образуют полную

систему, так что выполняются соотношения вида

$$(X_iX_k) = \gamma_{ik1}(x_1 \cdots x_n)\cdot X_1 f + \cdots + \gamma_{ikr}(x_1 \cdots x_n)\cdot X_r f \quad (i,k = 1 \cdots r). \quad (6)$$

Обозначим определители порядка $p+1$ матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix} \quad (7)$$

через $\Delta_1, \cdots \Delta_\varrho$. Тогда, если существуют системы значений $x_1 \cdots x_n$, для которых все определители $\Delta_1 \cdots \Delta_\varrho$ обращаются в нуль, и если *все функции* $\gamma_{ikj}(x_1 \cdots x_n)$ *ведут себя для этих систем значений регулярно*, можно показать, что система уравнений $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ допускает инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$.

В дальнейшем это утверждение роли не играет, поэтому мы ограничимся тем, что докажем его только для одного наиболее простого случая; доказательство общего утверждения можно провести совершенно аналогичным образом.

Предположим, что $r = n$, и что n уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ независимы друг от друга; кроме того, пусть $p = n - 1$. Матрица (7) сводится тогда к не обращающемуся в нуль тождественно определителю

$$\Delta = \sum \pm \xi_{11} \cdots \xi_{nn}$$

и содержит один единственный определитель порядка $p+1$, а именно сам Δ. Мы покажем, что это уравнение заведомо допускает инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_n f$, если функции γ_{ikj} в уравнениях

$$(X_iX_k) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ikj} \cdot X_j f \quad (i,k = 1 \cdots n)$$

ведут себя регулярно для тех систем значений $x_1 \cdots x_n$, которые обращают Δ в нуль.

Согласно гл. 7, утверждение 3, стр. 127, нам необходимо лишь доказать, что каждое выражение $X_k\Delta$ можно представить в виде $\omega_k(x_1 \cdots x_n)\cdot\Delta$, и что ω_k ведут себя для систем значений, удовлетворяющих $\Delta = 0$, регулярно. Это доказательство проводится тем же путем, что и в предыдущем параграфе. Мы просто вычисляем выражения $X_k\Delta$ и находим тем же образом:

$$X_k\Delta = \Delta \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_\nu} + \gamma_{k\nu\nu}(x_1 \cdots x_n) \right\} \quad (k = 1 \cdots n).$$

Необходимое для этого вычисление — точно такое же, как и прежде, хотя прежние константы c_{ikj} заменены функциями $\gamma_{ikj}(x)$; если тем не менее никакого различия не наблюдается, то причина этого такова, что в предыдущем параграфе тот факт, что c_{ikj} являются константами, никак не использовался.

Сомножители, стоящие после Δ в правой части приведенных выше уравнений, очевидно, ведут себя для систем значений, удовлетворяющих $\Delta = 0$, регулярно, то есть мы видим, что уравнение $\Delta = 0$ действительно допускает инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_n f$.

Второе важное различие между случаем r-параметрической *группы* $X_1 f \cdots X_r f$ и более общим случаем из главы 7 проявляется, если мы уже знаем многообразие M, допускающее все инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$.

Мы полагаем, что $X_1 f \cdots X_r f$ ставят точкам из M в соответствие ровно p независимых направлений, и что, в частности, $X_1 f \cdots X_p f$ задают p независимых направлений. В этих предположениях для точек из M имеют место соотношения вида

$$X_{p+k} f = \varphi_{k1}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{kp}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_p f \qquad (k = 1 \cdots r - p),$$

где φ_{kj} ведут себя регулярно; с другой стороны, никаких соотношений вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_p(x_1 \cdots x_n) \cdot X_p f = 0$$

нет. Если теперь $X_1 f \cdots X_r f$ порождают r-параметрическую группу, то все $(X_i X_k)$ для точек из M можно представить в виде

$$(X_i X_k) = \sum_{j=1}^{p} \psi_{ikj}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j f \quad (i, k = 1 \cdots r),$$

и ψ_{ikj} *ведут себя при этом регулярно*. Если же $X_1 f, \cdots X_r f$ обладают лишь тем свойством, что независимые из уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ образуют полную систему, то такое представление выражений $(X_i X_k)$ для точек многообразия M не во всех случаях возможно; но оно всегда возможно, если функции γ_{ikj} в уравнениях (6) ведут себя регулярно для систем значений $x_1 \cdots x_n$. Это обстоятельство мы уже научились использовать в главе 7, стр. 145 и далее.

Глава 15

Инвариантные семейства инфинитезимальных преобразований

Под

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q)$$

мы, как обычно, понимаем *независимые* инфинитезимальные преобразования, и пока это единственное условие, которое мы налагаем на $X_k f$.

Рассмотрим семейство из ∞^{q-1} инфинитезимальных преобразований, представленное выражением

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_q \cdot X_q f$$

с q произвольными параметрами $e_1 \cdots e_q$. Если мы введем новые независимые переменные x' вместо x, то всякое инфинитезимальное преобразование нашего семейства принимает новый вид; в соответствии с этим мы, очевидно, получим, вообще говоря, совершенно новое семейство из ∞^{q-1} инфинитезимальных преобразований. Однако при определенных условиях может случиться, что новое семейство несущественно отличается по виду от исходного, если для произвольных значений e имеет место соотношение следующего типа:

$$\sum_{k=1}^{q} e_k \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{q} e'_k \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x'_1 \cdots x'_n) \frac{\partial f}{\partial x'_i}, \qquad (1)$$

в котором e'_k зависят не от x, а лишь от $e_1 \cdots e_q$.

Если соотношение такого рода, которое мы также можем кратко записать в виде

$$\sum_{k=1}^{q} e_k \cdot X_k f = \sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot X'_k f, \qquad (2)$$

имеет место, то мы говорим: *семейство инфинитезимальных преобразований* $\sum e_k X_k f$ *остается при введении новых переменных* x' *инвариантным*, или: *оно допускает преобразование, представленное данной заменой переменных.*

§ 69

Пусть семейство из ∞^{q-1} инфинитезимальных преобразований $\sum e_k X_k f$ остается при переходе к переменным x' инвариантным, то есть имеет место соотношение вида

$$\sum_{k=1}^{q} e_k \cdot X_k f = \sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot X'_k f, \tag{2}$$

где e' — некоторые функции, зависящие только от e. Сначала рассмотрим это отношение зависимости между e и e'; так мы получаем отправную точку для более точного анализа семейств инфинитезимальных преобразований подобного рода.

Выражение $X_k f$ можно записать так:

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} X_k x'_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x'_i},$$

или, если выразить $X_k x'_i$ через x':

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \eta_{ki}(x'_1 \cdots x'_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x'_i}.$$

Если подставить это значение в уравнение (2), то можно приравнять коэффициенты при $\dfrac{\partial f}{\partial x'_i}$ в обеих частях и получить таким образом следующие линейные соотношения между e и e':

$$\sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot \xi_{ki}(x') = \sum_{k=1}^{q} e_k \cdot \eta_{ki}(x') \quad (i = 1 \cdots n). \tag{2'}$$

Согласно нашему условию можно вместо e' подставить такие функции только от e, что уравнения (2') будут выполняться для всех значений x'. Можно показать, что эти функции от e однозначно определены.

Поскольку уравнения $(2')$ должны выполняться для всех значений x', то они должны также иметь место, если заменить $x'_1 \cdots x'_n$ любой другой системой переменных. Сделаем это и запишем уравнения $(2')$ ровно для q различных систем переменных: $x'_1 \cdots x'_n$, $x''_1 \cdots x''_n, \cdots x_1^{(q)} \cdots x_n^{(q)}$:

$$\sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot \xi_{ki}(x^{(\nu)}) = \sum_{k=1}^{q} e_k \cdot \eta_{ki}(x^{(\nu)}) \quad (i = 1 \cdots n) \quad (\nu = 1 \cdots q).$$

Полученные таким образом уравнения разрешимы относительно $e'_1 \cdots e'_q$, так как при наложенных условиях согласно рассуждениям в главе 3, стр. 69, не все определители порядка q матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi'_{11} & \cdot & \cdot & \xi'_{1n} & \xi''_{11} & \cdot & \cdot & \xi''_{1n} & \cdots & \xi^{(q)}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi'_{q1} & \cdot & \cdot & \xi'_{qn} & \xi''_{q1} & \cdot & \cdot & \xi''_{qn} & \cdots & \xi^{(q)}_{qn} \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль.

Поскольку, кроме того, данные уравнения, несомненно, являются совместными, то мы получим величины e', представленные как линейные однородные функции от e:

$$e'_k = \sum_{j=1}^{q} \varrho_{kj} e_j \quad (k = 1 \cdots q).$$

Разумеется, ϱ_{kj} здесь являются независимыми от $x', x'' \cdots x^{(q)}$ и потому абсолютными константами; определитель, составленный из ϱ_{kj}, отличен от нуля, так как e_k, очевидно, можно таким же образом представить как линейные однородные функции от e'.

Даже если *семейство* инфинитезимальных преобразований $\sum e_k X_k f$ при наложенных условиях и введении x' остается инвариантным, то его отдельные преобразования в общем случае переставляются между собой. Однако всегда имеется по крайней мере одно инфинитезимальное преобразование $\sum e_k{}^0 X_k f$, само остающееся инвариантным, поскольку условие

$$\sum_{k=1}^{q} e_k{}^0 \cdot X_k f = \omega \sum_{k=1}^{q} e_k{}^0 \cdot X'_k f,$$

которому должны удовлетворять коэффициенты такого инфинитезимального преобразования, можно заменить q уравнениями

$$\omega\, e_k{}^0 = \sum_{j=1}^{q} \varrho_{kj}\, e_j{}^0 \quad (k = 1 \cdots q),$$

и последние всегда можно удовлетворить так, чтобы не все e_k^0 обращались в нуль.

Самым подходящим для более детального объяснения вышесказанного будет следующий пример.

В семействе из ∞^3 инфинитезимальных преобразований

$$e_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+e_3\left(x_1^2\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_1x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)+e_4\left(x_1x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2^2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

введем новые переменные, полагая

$$x_1'=a_1x_1+a_2x_2,\quad x_2'=a_3x_1+a_4x_2.$$

Семейство получит при этом новый вид:

$$e_1'\frac{\partial f}{\partial x_1'}+e_2'\frac{\partial f}{\partial x_2'}+e_3'\left({x_1'}^2\frac{\partial f}{\partial x_1'}+x_1'x_2'\frac{\partial f}{\partial x_2'}\right)+e_4'\left(x_1'x_2'\frac{\partial f}{\partial x_1'}+{x_2'}^2\frac{\partial f}{\partial x_2'}\right),$$

где $e_1'\cdots e_4'$ выражаются следующим образом:

$$e_1'=a_1e_1+a_2e_2,\ e_2'=a_3e_1+a_4e_2,\ e_3'=\frac{a_4e_3-a_3e_4}{a_1a_4-a_2a_3},\ e_4'=\frac{a_1e_4-a_2e_3}{a_1a_4-a_2a_3}.$$

Таким образом, это семейство остается в определенном выше смысле инвариантным. Если мы хотим узнать, какие отдельные инфинитезимальные преобразования семейства остаются инвариантными, то надо лишь определить ω из уравнения

$$\begin{vmatrix}a_1-\omega & a_2\\ a_3 & a_4-\omega\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1\omega-1 & a_2\\ a_3 & a_4\omega-1\end{vmatrix}=0$$

и выбрать $e_1\cdots e_4$ такими, чтобы $e_k'=\omega e_k$; соответствующие системы значений e_k дают нам инвариантные инфинитезимальные преобразования.

Возвращаясь теперь к общему случаю, мы конкретизируем наложенные выше условия в одном определенном направлении. А именно: мы предполагаем, что переход от x к x' является совершенно произвольным преобразованием некой однопараметрической группы. В соответствии с этим мы зададим себе теперь следующий вопрос.

При каких условиях семейство $\sum e_kX_kf$ остается инвариантным относительно любого преобразования $x_i'=f_i(x_1\cdots x_n,t)$ однопараметрической группы Yf, другими словами, при каких условиях для каждой системы

значений $e_1 \cdots e_r$, t *имеет место соотношение*

$$\sum_{k=1}^{q} e_k \cdot X_k f = \sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot X'_k f,$$

в котором e'_k *зависят кроме* e_j *еще только от* t*?*

Если применить общее преобразование

$$x'_i = x_i + t \cdot Y x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы Yf, чтобы ввести в $X_k f$ новые переменные, то согласно гл. 8, стр. 157, формула (5), мы получим

$$X_k f = X'_k f + t(X'_k Y' f - Y' X'_k f) + \cdots;$$

следовательно, и наоборот:

$$X'_k f = X_k f + t(Y X_k) + \cdots, \tag{3}$$

что для последующего удобнее.

Для того чтобы всякое инфинитезимальное преобразование $X_k f + t(Y X_k) + \cdots$ принадлежало семейству $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, причем для любого значения t, в это семейство должно, очевидно, также входить и любое инфинитезимальное преобразование $(Y X_k)$. Тем самым найдены некоторые необходимые условия инвариантности нашего семейства, которые сводятся к тому, что должны иметь место q соотношений вида

$$(Y X_k) = \sum_{j=1}^{q} g_{kj} \cdot X_j f \quad (k = 1 \cdots q), \tag{4}$$

где g_{kj} — абсолютные константы.

Если семейство инфинитезимальных преобразований

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_q \cdot X_q f$$

таково, что для любого k имеет место соотношение вида (4), то мы скажем, *что это семейство допускает инфинитезимальное преобразование* Yf. Принимая это определение, мы можем сформулировать только что полученный результат следующим образом.

Если семейство инфинитезимальных преобразований

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_q \cdot X_q f$$

допускает все преобразования однопараметрической группы Yf, то оно допускает также инфинитезимальное преобразование Yf.

Обратное тоже верно, как мы сейчас покажем.

Мы предполагаем, что семейство преобразований $\sum e_k X_k f$ допускает инфинитезимальное преобразование Yf, т. е. что имеют место соотношения вида (4). Чтобы теперь семейство $\sum e_k X_k f$ в то же время допускало все конечные преобразования однопараметрической группы Yf, необходимо, чтобы можно было задать $e'_1 \cdots e'_q$ как функции от $e_1 \cdots e_q$ и t такие, что соотношение

$$\sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot X'_k f = \sum_{k=1}^{q} e_k \cdot X_k f$$

будет выполняться тождественно, если ввести в $X'_k f$ переменные x вместо x'. Поэтому если $X'_k f$ при введении x принимает вид

$$X'_k f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n, t) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

то e'_k должны задаваться таким образом, чтобы выражение

$$\sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot X'_k f = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} e'_k \cdot \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n, t) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

не зависело от t, т. е. чтобы производная

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot X'_k f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n, t)$$

обращалась в нуль; но в то же время величины e должны удовлетворять начальному условию $e'_k = e_k$ при $t = 0$.

Чтобы показать, что при наложенных условиях действительно имеются функции e' с требуемым свойством, нам необходимо сначала вычислить производную

$$\frac{\partial}{\partial t} X'_k f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n, t)}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

для этого мы выбираем косвенный путь. Выше мы видели, что $X'_k f$ выражается через $x_1 \cdots x_n$ и t следующим образом:

$$X'_k f = X_k f + t(YX_k) + \cdots,$$

если независимые переменные x', входящие в $X'_k f$, заданы уравнениями $x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, t)$ однопараметрической группы Yf. Следовательно, искомая производная получается в результате дифференцирования по t бесконечного ряда в правой части, иначе говоря, она является коэффициентом при τ^1 в разложении выражения

$$X_k f + (t+\tau)(YX_k) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x''_1 \cdots x''_n) \frac{\partial f}{\partial x''_i} = X''_k f$$

по степеням от τ. При этом величины x'' означают

$$x''_i = f_i(x_1 \cdots x_n, t+\tau).$$

Упомянутый коэффициент разложения появляется, однако, сначала в виде бесконечного ряда по степеням от t. Но нетрудно найти для него конечное замкнутое выражение.

Переход от переменных x к переменным $x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, t)$ происходит, как мы знаем, при помощи преобразования однопараметрической *группы* Yf, а именно при помощи преобразования с параметром t. От x к $x''_i = f_i(x_1 \cdots x_n, t+\tau)$ мы приходим путем преобразования *той же самой* группы, а именно преобразования с параметром $t+\tau$. Это преобразование можно, однако, заменить последовательностью двух преобразований, первое из которых имеет параметр t, а второе — параметр τ; следовательно, переход от x' к x'' происходит также посредством преобразования однопараметрической группы Yf, а именно преобразования, параметром которого является τ:

$$x''_i = f_i(x'_1 \cdots x'_n, \tau).$$

Отсюда мы заключаем, что разложение в ряд $X''_k f$ по степеням τ таково:

$$X''_k f = X'_k f + \tau(Y' X'_k) + \cdots .$$

Тем самым найдено конечное замкнутое выражение для ранее упомянутых коэффициентов разложения, поэтому искомая производная $\dfrac{\partial(X'_k f)}{\partial t}$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} X'_k f = (Y' X'_k) = Y' X'_k f - X'_k Y' f. \tag{5}$$

Эта формула верна, разумеется, и в общем случае, какими бы мы ни выбрали инфинитезимальные преобразования $X_k f$ и Yf. Но в нашем особом случае $X_1 f \cdots X_q f, Yf$ не являются совершенно произвольными,

а связаны соотношениями (4). Поэтому при наложенных выше условиях мы получаем

$$\frac{\partial(X'_k f)}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{q} g_{k\nu} \cdot X'_\nu f \quad (k = 1 \cdots q). \tag{6}$$

Если мы теперь вычислим производную от $\sum e'_k X'_k f$ по t, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot X'_k f = \sum_{k=1}^{q} \frac{de'_k}{dt} X'_k f + \sum_{k=1}^{q} e'_k \sum_{\nu=1}^{q} g_{k\nu} \cdot X'_\nu f =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \left\{ \frac{de'_k}{dt} + \sum_{\nu=1}^{q} g_{\nu k} e'_\nu \right\} X'_k f.$$

Это выражение, очевидно, обращается в нуль только тогда, когда e'_k удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{de'_k}{dt} + \sum_{\nu=1}^{q} g_{\nu k} e'_\nu = 0 \quad (k = 1 \cdots q). \tag{7}$$

Отсюда e'_k выражаются как такие функции от t, что каждое e'_k при $t = 0$ переходит в соответствующее e_k; более того, e' будут линейными однородными функциями от e.

Если подставить значения e' в выражение $\sum e'_k X'_k f$ и затем вернуться от x' к исходным переменным $x_1 \cdots x_n$, то $\sum e'_k X'_k f$ не будет зависеть от t, то есть будет равна $\sum e_k X_k f$. Семейство инфинитезимальных преобразований $\sum e_k X_k f$ действительно остается инвариантным при такой замене переменных.

Таким образом мы можем сформулировать следующую теорему

Теорема 43.[1] *Семейство, состоящее из ∞^{q-1} инфинитезимальных преобразований $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_q \cdot X_q f$, остается инвариантным при введении новых переменных x', заданных уравнениями*

$$x'_i = x_i + t \cdot Y x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

определяющими однопараметрическую группу, тогда и только тогда, когда между Yf и $X_k f$ имеют место q соотношений вида

$$(Y X_k) = \sum_{\nu=1}^{q} g_{k\nu} \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots q), \tag{4}$$

[1] Ли, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, том 3, Христиания, 1878 г.

где $g_{k\nu}$ — некоторые константы. Если эти условия выполнены, то при данной замене переменных выражение $\sum e_k X_k f$ принимает вид $\sum e'_k X'_k f$, где $e'_1 \cdots e'_q$ как функции от t определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{de'_k}{dt} + \sum_{\nu=1}^{q} g_{\nu k} e'_\nu = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

с учетом начальных условий $e'_k = e_k$ при $t = 0$.

Если выполнить интегрирование, о котором идет речь в предыдущей теореме, то есть если $e'_1 \cdots e'_r$ задать из дифференциальных уравнений

$$\frac{de'_k}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{q} g_{\nu k} e'_\nu = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

с учетом начальных условий $e'_k = e_k$ при $t = 0$, то получаются уравнения вида

$$e'_k = \sum_{j=1}^{q} d_{kj}(t) \cdot e_j \quad (k = 1 \cdots q).$$

Ясно, что эти уравнения представляют конечные преобразования некоторой однопараметрической группы, а именно такой, которая порождается инфинитезимальным преобразованием

$$\sum_{k=1}^{q} \left\{ \sum_{\nu=1}^{q} g_{\nu k} e_\nu \right\} \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

(ср. гл. 3, стр. 52).

Выведем из только что сформулированной теоремы очевидное, но важное утверждение.

Если семейство из ∞^{q-1} инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ допускает два инфинитезимальных преобразования $Y_1 f$ и $Y_2 f$, то оно в то же время допускает любое инфинитезимальное преобразование $c_1 Y_1 f + c_2 Y_2 f$, полученное линейно из $Y_1 f$ и $Y_2 f$; это следует непосредственно из того, что инфинитезимальное преобразование

$$(c_1 Y_1 f + c_2 Y_2 f, X_k f) = c_1 (Y_1 X_k) + c_2 (Y_2 X_k)$$

в нашем случае можно линейно получить из $X_i f$. Наше семейство $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ допускает, однако, также инфинитезимальное преобразование $(Y_1 Y_2)$. Действительно, если выписать тождество Якоби

$$((Y_1 Y_2) X_k) + ((Y_2 X_k) Y_1) + ((X_k Y_1) Y_2) = 0$$

и учесть при этом, что (Y_1X_k) и (Y_2X_k) получаются линейно из X_if, то понятно, что это верно также и для $((Y_1Y_2)X_k)$.

Объединяя эти оба замечания, мы получим обещанное

Утверждение 1. *Если самое общее инфинитезимальное преобразование, оставляющее инвариантным семейство ∞^{q-1} инфинитезимальных преобразований*

$$e_1 \cdot X_1f + \cdots + e_q \cdot X_qf,$$

можно получить линейно из конечного числа инфинитезимальных преобразований, например из $Y_1f \cdots Y_mf$, то эти преобразования Y_kf порождают m-параметрическую группу.

Это утверждение можно еще обобщить: само собой разумеется, что совокупность *всех конечных* преобразований, оставляющих семейство $\sum e_kX_kf$ инвариантным, всегда образуют группу.

§ 70

Пусть условия последней теоремы выполнены, и пусть семейство из ∞^{q-1} инфинитезимальных преобразований $\sum e_kX_kf$ инвариантно относительно всех преобразований однопараметрической группы Yf.

Тогда согласно гл. 3, стр. 62, справедливо следующее: если инфинитезимальное преобразование Xf при введении новых переменных переходит в Zf, то преобразования однопараметрической группы Xf также переходят в преобразования однопараметрической группы Zf. Отсюда мы заключаем, что в предположениях теоремы 43 инвариантным остается не только семейство из ∞^{q-1} инфинитезимальных преобразований $e_1X_1f + \cdots + e_qX_qf$, но и семейство из ∞^{q-1} однопараметрических групп, порожденных этими инфинитезимальными преобразованиями, и, конечно же, совокупность ∞^q конечных преобразований, принадлежащих этим однопараметрическим группам.

Однако мы хотим пойти еще дальше — выяснить, как ведет себя аналитическое выражение отдельных конечных преобразований однопараметрических групп $e_1X_1f + \cdots + e_qX_qf$, если ввести вместо x новые переменные

$$x_i' = x_i + t \cdot Yx_i + \cdots .$$

Ответ на этот вопрос дает утверждение 3, гл. 3. стр. 62. А именно: из этого утверждения сразу следует, что всякое конечное преобразование

$$\overline{x}_i = x_i + \sum_{k=1}^{q} e_k \cdot X_k\, x_i + \sum_{k,j=1}^{q} \frac{e_ke_j}{1 \cdot 2} X_k\, X_j\, x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n) \qquad (8)$$

при введении новых переменных x' принимает вид

$$\overline{x}'_i = x'_i + \sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot X'_k x'_i + \sum_{k,j=1}^{q} \frac{e'_k e'_j}{1 \cdot 2} X'_k X'_j x'_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n), \tag{9}$$

где связь между e_k и e'_k устанавливается при помощи соотношения

$$\sum_{k=1}^{q} e_k \cdot X_k f = \sum_{k=1}^{q} e'_k \cdot X'_k f. \tag{10}$$

Итак, мы непосредственно видим, что данное семейство из ∞^q конечных преобразований имеет в новых переменных x' в точности такой же вид, что и в исходных. Но, кроме этого, мы замечаем, что конечное преобразование, имеющее в переменных x параметры $e_1 \cdots e_q$, после введения новых переменных x' будет иметь параметры $e'_1 \cdots e'_q$.

Поскольку, как уже было сказано, связь между e и e' полностью определяется при помощи тождества (10), то этого тождества совершенно достаточно, если речь идет о задании нового вида, который принимает произвольное конечное преобразование (8) при переходе к x'.

Нагляднее всего это можно продемонстрировать, если мы истолкуем $\sum e_k X_k f$ *просто как символ конечного преобразования*

$$\overline{x}_i = x_i + \sum_{k=1}^{q} e_k \cdot X_k x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

причем учитываются абсолютные значения e_k, *а не только их отношения.* Тогда мы можем просто сказать:

Конечное преобразование $\sum e_k X_k f$ *при введении новых переменных* x' *переходит в конечное преобразование* $\sum e'_k X'_k f$.

В последующих исследованиях этой главы $\sum e_k X_k f$ будет использоваться то как символ конечного, то как инфинитезимального преобразования. Поэтому в каждом отдельном случае мы будем указывать, какая из этих двух интерпретаций символа имеется в виду.

§ 71

Пусть семейство из ∞^q конечных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ остается инвариантным при всех преобразованиях однопараметрической группы Yf. Может случиться, что Yf само является инфинитезимальным

преобразованием семейства $\sum e_k X_k f$; особый интерес представляет случай, когда можно в качестве Yf взять любое из ∞^{q-1} инфинитезимальных преобразований $\sum e_k X_k f$. Но это произойдет тогда и только тогда, когда между $X_k f$ имеют место соотношения вида

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{q} g_{iks} X_s f.$$

Из теоремы предыдущего параграфа мы тогда получаем следующую, более специальную, в которой мы позволяем себе записать r вместо q и c_{iks} вместо g_{iks}.

Теорема 44. *Для того чтобы семейство, состоящее из ∞^r конечных преобразований*

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f \quad \text{или} \quad \overline{x}_i = \mathfrak{P}_i(x_1 \cdots x_n, e_1 \cdots e_r),$$

оставалось инвариантным при любом содержащемся в нем преобразовании, т. е. чтобы оно при введении новых переменных

$$x_i' = \mathfrak{P}_i(x_1 \cdots x_n, h_1 \cdots h_r), \quad \overline{x}_i' = \mathfrak{P}_i(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n, h_1 \cdots h_r)$$

вместо x и $\overline{x}$ принимало вид

$$\overline{x}_i' = \mathfrak{P}_i(x_1' \cdots x_n', l_1 \cdots l_r),$$

где l зависит лишь от $e_1 \cdots e_r$ и $h_1 \cdots h_r$, необходимо и достаточно, чтобы Xf попарно находились в соотношениях вида

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f,$$

где c_{iks} — абсолютные константы.

Эта теорема выражает важное свойство, которым обладает семейство ∞^r конечных преобразований $\sum e_k X_k f$, если имеют место соотношения вида $(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$. Примечательно, что при доказательстве этой теоремы мы лишь в самой малой мере использовали результаты предыдущих глав — некоторые рассуждения из глав 1, 2, 3 и 8, — и более ничего. Обратим особое внимание на то, что мы не пользовались теоремой 24, гл. 9, стр. 176.

Если исходить из того, что эта последняя теорема известна, то доказательство теоремы 44 можно сократить следующим образом: сначала надо показать, как это было сделано выше, что соотношения $(X_iX_k) = \sum_s c_{iks}X_sf$ являются необходимыми; тогда из теоремы 24, стр. 176, мы получаем, что ∞^{r-1} инфинитезимальных преобразований $\sum e_kX_kf$ порождают r-параметрическую группу. Если $x_i' = \mathfrak{P}_i(x_1 \cdots x_n, h_1 \cdots h_r)$ — конечные уравнения этой группы, то согласно теореме 5, стр. 48, имеет место тождество вида

$$\sum_{k=1}^{r} e_k \cdot X_kf = \sum_{k=1}^{r} e_k' \cdot X_k'f;$$

таким образом, теорема 44 доказана.

Можно даже совсем не обращаться к теореме 5, стр. 48, а сделать вывод следующим образом:

Разрешенные уравнения $x_i' = \mathfrak{P}_i(x, h)$ нашей группы дают преобразование вида

$$x_i = \mathfrak{P}_i(x_1' \cdots x_n', \chi_1(h) \cdots \chi_r(h)),$$

а именно такое, которое является обратным к преобразованию с параметрами $h_1 \cdots h_r$. Если теперь подставить эти значения x_i в уравнения $\overline{x}_i = \mathfrak{P}_i(x, e)$ и учесть при этом, что мы имеем дело с группой, то понятно, что выполняются некоторые уравнения вида

$$\overline{x}_i = \mathfrak{P}_i(x_1' \cdots x_n', \psi_1(h, e) \cdots \psi_r(h, e)).$$

Наконец, подставляя эти выражения для $\overline{x}_i$ в уравнения $\overline{x}_i' = \mathfrak{P}_i(\overline{x}, h)$, получаем

$$\overline{x}_i' = \mathfrak{P}_i(x_1' \cdots x_n', l_1 \cdots l_r).$$

Это тот новый вид, который принимают преобразования $\overline{x}_i = \mathfrak{P}_i(x, e)$ при введении новых переменных x'. При этом величины l, очевидно, — функции лишь от e и h, в точности так, как это утверждается в теореме 44, стр. 284.

Таким образом, связь между теоремой 24, стр. 176, и теоремой 44 настоящей главы явно установлена.

§ 72

Чтобы сформулировать полученные до этого результаты более кратко и, если угодно, четко, мы перенесем символику теории подстановок, как это уже делалось ранее, на теорию групп преобразований.

Все конечные преобразования $e_1X_1f + \cdots + e_rX_rf$ мы обозначим одним и тем же символом T, а отдельные преобразования — при помощи

добавленного индекса, так что символ $T_{(a)}$, например, будет обозначать конечное преобразование

$$a_1 \cdot X_1 f + \cdots + a_r \cdot X_r f.$$

Используя эти обозначения, мы можем, прежде всего, следующим образом сформулировать теорему 24, стр. 176.

Утверждение 2. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ попарно находятся в соотношениях вида*

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

то семейство всех конечных преобразований $\sum e_k X_k f$, или $T_{(e)}$, одновременно с преобразованиями $T_{(a)}$ и $T_{(b)}$ содержит также и преобразование $T_{(a)} T_{(b)}$ и, следовательно, имеет место символическое равенство вида

$$T_{(a)} T_{(b)} = T_{(c)},$$

в котором параметры c являются функциями от a и b.

Соответствующим образом из теоремы 44 настоящей главы мы получаем следующее утверждение, которое, однако, не исчерпывает всего содержания теоремы.

Утверждение 3. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ находятся попарно в соотношениях вида $(X_i X_k) = \sum c_{iks} X_s f$, то семейство, состоящее из ∞^r конечных преобразований $\sum e_k X_k f$, или $T_{(e)}$, содержит одновременно с преобразованиями $T_{(a)}$ и $T_{(b)}$ преобразование $T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)}$, т. е. выполнено уравнение вида*

$$T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)} = T_{(c')},$$

где параметр c' является функцией от a и b.

Существование символического соотношения $T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)} = T_{(c')}$, очевидно, является следствием прежнего соотношения $T_{(a)} T_{(b)} = T_{(c)}$, т. е. последнее утверждение является следствием предшествующего, как мы уже видели в предыдущем параграфе.

Наконец, объединяя теоремы 44 и 24, стр. 176, мы получаем следующий замечательный результат.

Теорема 45. *Если семейство, состоящее из ∞^r конечных преобразований $a_1 X_1 f + \cdots + a_r X_r f$, или кратко $T_{(a)}$, обладает тем свойством, что преобразование $T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)}$ всегда принадлежит этому семейству,*

какими бы ни были значения параметров $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$, *то данное семейство* ∞^r *преобразований образует* r*-параметрическую группу, т. е.* $T_{(a)}T_{(b)}$ *также всегда является преобразованием, принадлежащим данному семейству.*

§ 73

Если преобразование $T_{(a)}^{-1}T_{(b)}T_{(a)}$ совпадает с преобразованием $T_{(b)}$, что мы выражаем при помощи символического уравнения

$$T_{(a)}^{-1}T_{(b)}T_{(a)} = T_{(b)},$$

то мы говорим: *преобразование* $T_{(b)}$ *остается при преобразовании* $T_{(a)}$ *инвариантным.*

Но в этом случае мы имеем также

$$T_{(b)}^{-1}T_{(a)}T_{(b)} = T_{(a)},$$

то есть преобразование $T_{(a)}$ остается при преобразовании $T_{(b)}$ инвариантным; с другой стороны, уравнение

$$T_{(a)}T_{(b)} = T_{(b)}T_{(a)}$$

свидетельствует о том, что преобразования $T_{(a)}$ и $T_{(b)}$ *перестановочны* (ср. стр. 3).

Еще в теореме 6, стр. 52, мы замечали, что преобразования любой однопараметрической группы попарно перестановочны. Теперь мы можем также решить более общий вопрос: когда преобразования двух различных однопараметрических групп Xf и Yf перестановочны.

Введем в общее конечное преобразование eXf однопараметрической группы Xf новые переменные x_i', определенные при помощи конечных уравнений $x_i' = x_i + t \cdot Yx_i + \cdots$ однопараметрической группы Yf. Преобразования обеих наших однопараметрических групп будут перестановочны тогда и только тогда, когда всякое преобразование вида eXf при введении x' остается инвариантным, т. е. когда eXf равно $eX'f$.

Согласно теореме 43, стр. 280, для выполнения равенства вида

$$e \cdot Xf = e' \cdot X'f$$

необходимо и достаточно, чтобы инфинитезимальные преобразования Xf и Yf удовлетворяли соотношению

$$(YX) = g \cdot Xf;$$

при этом e' находится из дифференциального уравнения

$$\frac{de'}{dt} + ge' = 0.$$

Однако в нашем случае e' должно быть равно e для любого t, следовательно, e' совсем не зависит от t, т. е. производная $\frac{de'}{dt}$ обращается в нуль, а вместе в ней и величина g. Это условие, очевидно, является одновременно и необходимым, и достаточным. Таким образом, справедливо

Утверждение 4. *Конечные преобразования двух однопараметрических групп Xf и Yf перестановочны тогда и только тогда, когда выражение (XY) тождественно равно нулю.*

Два инфинитезимальных преобразования Xf и Yf, находящиеся в соотношении $(XY) \equiv 0$, естественно называть перестановочными. Если мы введем такое определение, то можно сказать, что конечные преобразования двух однопараметрических групп тогда и только тогда попарно перестановочны, когда таковыми являются инфинитезимальные преобразования этих групп.

Из последнего утверждения следует

Теорема 46. *Конечные преобразования r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ попарно перестановочны тогда и только тогда, когда все выражения $(X_i X_k)$ тождественно обращаются в нуль, другими словами, когда все инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ попарно перестановочны*[2].

§ 74

Из общих рассуждений §§ 69 и 70 мы теперь сделаем еще несколько важных выводов.

Предположим снова, что r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ удовлетворяют соотношениям

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

т. е. что согласно теореме 24, гл. 9, стр. 176, ∞^r конечных преобразований $\sum e_k X_k f$ образуют r-параметрическую группу. Если семейство преобразований $\sum e_k X_k f$ остается инвариантным относительно всех преобразований

[2] Ли, Научное общество Христиании, 1872 г.; Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, том 8, стр. 180, 1882 г.; Math. Annalen, том 24, стр. 557, 1884 г.

однопараметрической группы, не принадлежащей этой r-параметрической группе, то согласно теореме 43, стр. 280, имеют место r уравнений вида

$$(YX_k) = \sum_{s=1}^{r} g_{ks} X_s f. \tag{4}$$

Эти уравнения показывают, что $r+1$ инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f, Yf$ порождают $(r+1)$-параметрическую группу, в которую $X_1 f \cdots X_r f$ входят в качестве r-параметрической подгруппы.

Кроме того, ясно, что соотношения (4) несущественно меняют свой вид, если подставить вместо Yf совершенно произвольное инфинитезимальное преобразование $(r+1)$-параметрической группы.

Поэтому если $x_i' = \psi_i(x_1 \cdots x_n; a_1 \cdots a_{r+1})$ — конечные уравнения $(r+1)$-параметрической группы, то семейство конечных преобразований $\sum e_k X_k f$ остается инвариантным, если в нем вместо x ввести новые переменные x', т. е. в аналитическом выражении r-параметрической группы меняются только параметры.

Аналогичное выполнялось бы, если бы имелось не одно преобразование Yf, а несколько, скажем m, таких преобразований, удовлетворяющих всем соотношениям вида (4); кроме того, мы хотим добавить условие, что эти m инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_m f$ вместе с $X_1 f \cdots X_r f$ порождают $(r+m)$-параметрическую группу. Если теперь ввести в группу $X_1 f \cdots X_r f$ с помощью произвольного преобразования $(r+m)$-параметрической группы новые переменные, то семейство конечных преобразований нашей r-параметрической группы останется инвариантным, в то время как в ее аналитическом представлении параметры изменятся.

Говоря: *r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ является инвариантной подгруппой*[3] *$(r+m)$-параметрической группы, т. е. остается инвариантной при всех преобразованиях последней*, мы кратко выражаем эту связь между обеими группами.

Если перенести это на терминологию, используемую в теории подстановок, то определение инвариантных подгрупп можно сформулировать следующим образом.

Если T — символ произвольного преобразования $(r+m)$-параметрической группы G, а S — произвольное преобразование подгруппы группы G, то эта подгруппа в G инвариантна, если преобразование $T^{-1}ST$ также всегда принадлежит этой подгруппе.

[3] Современный термин — нормальная подгруппа. — *Прим. ред.*

Аналитические условия инвариантности подгруппы полностью описаны выше; поэтому нам надо только еще раз подытожить.

Теорема 47. *Если r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержится в $(r+m)$-параметрической группе $X_1 f \cdots X_r f, Y_1 f \cdots Y_m f$, то она является ее инвариантной подгруппой, если каждая скобка $(Y_i X_k)$ линейно выражается с постоянными коэффициентами только через $X_1 f \cdots X_r f$.*

Теорему 47 можно обобщить (правда, лишь формально) следующим образом:

Утверждение 5. *Если совокупность всех инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_m X_m f$ образует инвариантное подмножество в r-параметрической группе $X_1 f \cdots X_m f \cdots X_r f$, то $X_1 f \cdots X_m f$ порождают m-параметрическую инвариантную подгруппу этой r-параметрической группы.*

Поскольку все $(X_i X_k)$, в которых $i \leqslant m$, можно линейно получить лишь из $X_1 f \cdots X_m f$, то это верно, в частности, и для всех $(X_i X_k)$, в которых $i, k \leqslant m$. Согласно этому $X_1 f \cdots X_m f$ порождают m-параметрическую подгруппу, к которой можно непосредственно применить теорему 47.

Сначала приведем несколько примеров инвариантных подгрупп.

Утверждение 6.[4] *Если r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ порождают r-параметрическую группу, то совокупность всех инфинитезимальных преобразований $(X_i X_k)$ также порождает группу; если последняя содержит r параметров, то она тождественно совпадает с группой $X_1 f \cdots X_r f$; если меньше чем r параметров, то она является инвариантной подгруппой группы $X_1 f \cdots X_r f$; если добавить к $(X_i X_k)$ произвольное число независимых друг от друга и от $(X_i X_k)$ инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, то мы всегда снова получим инвариантную подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$.*

Ясно, что $(X_i X_k)$ могут породить самое большее — r-параметрическую группу, так как все они принадлежат группе $X_1 f \cdots X_r f$; то, что они действительно порождают группу, непосредственно следует из соотношений

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

[4] В своей работе в Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, том 8, стр. 390, Христиания, 1883 г., Ли заметил, что $(X_i X_k)$ образуют инвариантную подгруппу. Независимо от него это установил Киллинг в 1886 году.

поскольку

$$((X_iX_k)(X_jX_l)) = \sum_{s,\sigma=1}^{r} c_{iks}c_{jl\sigma}(X_sX_\sigma).$$

То, что группа, порожденная (X_iX_k), будет инвариантной в группе $X_1f \cdots X_rf$, явствует из соотношений

$$(X_j(X_iX_k)) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}(X_jX_s).$$

Последняя часть утверждения не нуждается в дальнейшем обосновании. Примечательно следующее обобщение только что доказанного утверждения:

Утверждение 7. *Если m независимых инфинитезимальных преобразований $Z_1f \cdots Z_mf$ r-параметрической группы $X_1f \cdots X_rf$ порождают в ней m-параметрическую подгруппу, и данная подгруппа в этой r-параметрической группе инвариантна, то и подгруппа, порожденная всевозможными инфинитезимальными преобразованиями $(Z_\mu Z_\nu)$, в этой r-параметрической группе также будет инвариантной.*

Доказательство очень простое. По условиям утверждения имеют место соотношения вида

$$(X_kZ_\mu) = \sum_{\lambda=1}^{m} h_{k\mu\lambda}Z_\lambda f \quad (k = 1 \cdots r; \mu = 1 \cdots m),$$

где $h_{k\mu\lambda}$ — константы. Выписывая теперь тождество Якоби (ср. гл. 5, стр. 94)

$$(X_k(Z_\mu Z_\nu)) + (Z_\mu(Z_\nu X_k)) + (Z_\nu(X_kZ_\mu)) = 0$$

и подставляя в него вместо $(Z_\mu X_k)$ и $(Z_\nu X_k)$ записанные ранее выражения, получаем уравнения

$$(X_k(Z_\mu Z_\nu)) = \sum_{\lambda=1}^{m} \{h_{k\nu\lambda}(Z_\mu Z_\lambda) - h_{k\mu\lambda}(Z_\nu Z_\lambda)\},$$

из которых следует, что подгруппа группы $X_1f \cdots X_rf$, порожденная преобразованиями $(Z_\mu Z_\nu)$, является в этой группе инвариантной. Это и требовалось доказать.

Пусть r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$, или кратко G_r, содержит $(r-1)$-параметрическую инвариантную подгруппу, и пусть r независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$ группы G_r выбраны так, что $Y_1 f \cdots Y_{r-1} f$ будет этой инвариантной подгруппой. Тогда имеют место соотношения вида

$$(Y_i Y_k) = c_{ik1} Y_1 f + \cdots + c_{ik,r-1} Y_{r-1} f \quad (i, k = 1 \cdots r),$$

таким образом, все $(Y_i Y_k)$ и, конечно же, все $(X_i X_k)$ можно линейно получить только из $Y_1 f \cdots Y_{r-1} f$. Отсюда мы заключаем, что каждая $(r-1)$-параметрическая инвариантная подгруппа группы G_r содержит все инфинитезимальные преобразования $(X_i X_k)$ и видим, что справедливо следующее

Утверждение 8. *В r-параметрической группе $X_1 f \cdots X_r f$ тогда и только тогда имеется $(r-1)$-параметрическая инвариантная подгруппа, когда инфинитезимальные преобразования $(X_i X_k)$ порождают группу с меньшим, чем r, числом параметров; если среди $(X_i X_k)$ имеется ровно $r_1 < r$ независимых между собой инфинитезимальных преобразований, то все $(r-1)$-параметрические инвариантые подгруппы группы $X_1 f \cdots X_r f$ можно получить, если добавить к $(X_i X_k)$ произвольным образом $r - r_1 - 1$ независимых друг от друга и от $(X_i X_k)$ инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$.*

Утверждение 1 в главе 12, стр. 228, дает нам другие примеры инвариантных подгрупп.

Так, если бы группа в окрестности точки $x_1^0 \cdots x_n^0$ содержала инфинитезимальные преобразования первого и более высокого порядка в $x_i - x_i^0$, то все инфинитезимальные преобразования порядка k $(k > 0)$ и выше всякий раз порождали бы подгруппу. Тогда два инфинитезимальных преобразования Xf и Yf, порядка k и $(k+\nu)$ соответственно, дают в результате взятия скобки преобразование (XY) порядка $2k+\nu-1$. Поскольку $k > 0$, то $2k+\nu-1 \geqslant k+\nu$, следовательно, (XY) должно линейно получаться из инфинитезимальных преобразований порядка $(k+\nu)$ и выше. Другими словами, все инфинитезимальные преобразования порядка $(k+\nu)$ и выше порождают группу, которая инвариантна в группе, порожденной инфинитезимальными преобразованиями порядка k и выше. Но все это, как уже говорилось, выполняется только при условии, что число k больше нуля.

В частности, если числа k и $k+\nu$ можно выбрать такими, что группа не содержит инфинитезимальных преобразований порядка $(2k+\nu-1)$ и выше в окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$, то выражение (XY) должно тождественно обращаться в нуль. Поэтому справедливо

Утверждение 9. *Если группа не содержит в окрестности точки* $x_1^0 \cdots x_n^0$ *инфинитезимальных преобразований порядка* $s+1$ *или более высокого, но зато содержит преобразования* k*-го порядка, где* k *удовлетворяет условию* $2k - 1 > s$*, то все инфинитезимальные преобразования группы, имеющие порядок* k *или выше, порождают группу с попарно перестановочными преобразованиями.*

При этом точка $x_1^0 \cdots x_n^0$ вовсе не должна быть такой, чтобы коэффициенты разрешенных определяющих уравнений этой группы (ср. гл. 11, стр. 212 и далее) вели себя регулярно.

Чтобы оставаться последовательными, надо сказать, что всякая конечная непрерывная группа содержит две инвариантные подгруппы, а именно: 1) саму себя и 2) тождественное преобразование. Это видно, если в теореме 47 сначала m, а затем r положить равными нулю; в обоих случаях условие инвариантности подгруппы $X_1 f \cdots X_r f$ выполняется очевидным образом, если только $X_1 f \cdots X_r f$, $Y_1 f \cdots Y_m f$ является $(r+m)$-параметрической группой.

Особо важными являются группы, которые не содержат никаких инвариантных подгрупп, за исключением двух всегда имеющихся. Поэтому эти группы должны иметь специальное название, они должны называться *простыми группами*. В противоположность этому группа называется *составной*, если она содержит, помимо вышеназванных двух, и другие инвариантные подгруппы.

В заключение еще два утверждения об инвариантных подгруппах.

Утверждение 10. *Общие преобразования двух инвариантных подгрупп группы* G *также образуют инвариантную в* G *подгруппу.*

Некоторую подгруппу группы G рассматриваемые преобразования непременно образуют (ср. гл. 9, утверждение 2, стр. 178); эта подгруппа должна быть в G инвариантной, так как переходит при всех преобразованиях G в группу, принадлежащую обеим инвариантным подгруппам, т. е. в себя саму.

Утверждение 11. *Если две инвариантные подгруппы* $Y_1 f \cdots Y_m f$ *и* $Z_1 f \cdots Z_p f$ *группы* G *не имеют общих инфинитезимальных преобразований, то все выражения* $(Y_i Z_k)$ *тождественно обращаются в нуль, то есть любое преобразование одной подгруппы перестановочно с любым преобразованием другой.*

Каждое выражение $(Y_i Z_k)$ должно при наложенных условиях выражаться линейно с постоянными коэффициентами как через $Y_1 f \cdots Y_m f$, так

и через $Z_1 f \cdots Z_p f$; но поскольку обе подгруппы не имеют общих инфинитезимальных преобразований, то это может быть только при тождественном обращении всех выражений $(Y_i Z_k)$ в нуль и никак иначе. Остальное следует из утверждения 4, стр. 288.

§ 75

Существуют r-параметрические группы, из инфинитезимальных преобразований которых можно выбрать r независимых $Y_1 f \cdots Y_r f$ таким образом, что i независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_i f$ для любого $i < r$ порождают i-параметрическую группу, инвариантную в $(i+1)$-параметрической группе $Y_1 f \cdots Y_{i+1} f$. Тогда между $Y_1 f \cdots Y_r f$ имеют место соотношения вида

$$(Y_i Y_{i+k}) = \overline{c}_{i,i+k,1} Y_1 f + \cdots + \overline{c}_{i,i+k,i+k-1} Y_{i+k-1} f \qquad (5)$$
$$(i = 1 \cdots r-1; k = 1 \cdots r-i).$$

В теории интегрирования систем дифференциальных уравнений, допускающих конечные группы, доказывается, что группы с только что определенным специальным свойством занимают по отношению ко всем остальным некоторое исключительное положение[5].

Позже, в главе о линейных однородных группах, мы подробнее ознакомимся с этой особой категорией групп; теперь же мы лишь хотим показать, каким образом можно решить, относится данная r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ к данной категории или нет.

Если среди инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ можно выбрать r друг от друга независимых $Y_1 f \cdots Y_r f$, связанных соотношениями вида (5), то прежде всего в группе G_r, порожденной $X_1 f \cdots X_r f$, должна иметься $(r-1)$-параметрическая инвариантная подгруппа. Верно ли последнее, нам позволяет определить утверждение 8, стр. 292: согласно этому утверждению группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит $(r - -1)$-параметрическую инвариантную подгруппу только тогда, когда группа, порожденная всеми $(X_i X_k)$, содержит меньше, чем r, например r_1, параметров; если это условие выполнено, то добавляя к $(X_i X_k)$ в самом общем виде $r - r_1 - 1$ независимых друг от друга и от $(X_i X_k)$ инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, мы получаем все $(r-1)$-параметрические инвариантные подгруппы группы G_r.

[5] Ли, Ges. der Wiss. zu Christiania, 1874 г., стр. 273. Math. Ann., том XI, стр. 517–518. Archiv for Math, og Nat., том 3, 1878 г., стр. 105, том 8, 1883 г.

Но не всякая r-параметрическая группа, содержащая $(r-1)$-параметрическую инвариантную подгруппу, относится к определенной выше особой категории; чтобы к ней относиться, группа должна содержать $(r-1)$-параметрическую инвариантную подгруппу, которая в свою очередь содержит $(r-2)$-параметрическую инвариантную подгруппу, а эта последняя должна опять же содержать $(r-3)$-параметрическую инвариантную подгруппу и т. д.

Отсюда видно, как нам следует поступить с группой $X_1 f \cdots X_r f$: мы должны выбрать из всех $(r-1)$-параметрических инвариантных подгрупп группы G_r такие, которые содержат по меньшей мере одну $(r-2)$-параметрическую инвариантную подгруппу, и определить все ее $(r-2)$-параметрические инвариантные подгруппы; согласно вышесказанному, это несложно. Затем мы должны выбрать из найденных $(r-2)$-параметрических инвариантных подгрупп те, которые содержат $(r-3)$-параметрические инвариантные подгруппы и т. д.

Ясно, что мы таким путем приходим к ответу на вопрос, который поставили себе относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$. Либо мы увидим, что данная группа не относится к этой нашей особой категории, либо найдем r независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$ нашей группы, связанных соотношениями вида (5).

Упомянутое выше вычисление иногда затрудняется тем, что исследуемые группы содержат произвольные параметры, которые специфицируются в процессе вычисления. Поэтому мы дадим еще один метод, который также приводит к ответу на наш вопрос, избегая любых вычислений с произвольными параметрами.

Предположим, что среди $(X_i X_k)$ найдется в точности $r_1 \leqslant r$ независимых, и что все $(X_i X_k)$ можно линейно получить из $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$, что соответствующим образом можно далее линейно получить все $(X_i' X_k')$ из $r_2 \leqslant r_1$ независимых преобразований $X_1'' f \cdots X_{r_2}'' f$, все $(X_i'' X_k'')$ из $r_3 \leqslant r_2$ независимых $X_1''' f \cdots X_{r_3}''' f$ и т. д. Тогда согласно утверждению 6, стр. 290, $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$ порождают r_1-параметрическую инвариантную подгруппу G_{r_1} группы G_r: $X_1 f \cdots X_r f$. Кроме того, $X_1'' f \cdots X_{r_2}'' f$ порождают r_2-параметрическую инвариантную подгруппу G_{r_2} группы G_{r_1} и так далее; короче говоря, мы получаем ряд подгрупп $G_{r_1}, G_{r_2}, G_{r_3} \cdots$ группы G_r, каждая из которых содержится во всех предшествующих, а в непосредственно предшествующей заведомо инвариантна. Однако согласно утверждению 7, стр. 291, группа G_{r_2} изначально инвариантна не только в G_{r_1}, но и в G_r, и далее, согласно тому же утверждению, G_{r_3} инвариантна не только в G_{r_2}, но и в G_{r_1} и даже в самой G_r и т. д. Мы видим, что в ряду групп $G_r, G_{r_1}, G_{r_2} \cdots$ каждая содержится и является инвариантной во всех предшествующих группах.

В последовательности целых чисел $r, r_1, r_2 \cdots$ нет ни одного такого, чтобы оно было больше предыдущего, а с другой стороны — меньше нуля. Следовательно, должно существовать целое положительное число q, такое, что $r_{q+1} = r_q$, тогда как для $j < q$ всегда верно $r_{j+1} < r_j$. Очевидно, что тогда

$$r_q = r_{q+1} = r_{q+2} = \cdots ,$$

то есть вообще

$$r_{q+k} = r_q \quad (k = 1, 2 \cdots).$$

Различают два случая в зависимости от того, равно число r_q нулю или больше нуля.

В случае $r_q = 0$, как мы покажем, всегда можно выбрать r независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$ группы G_r, удовлетворяющих соотношениям вида (5).

Действительно, выберем в качестве инфинитезимальных преобразований $Y_r f, Y_{r-1} f \cdots Y_{r_1+1} f$ какие-либо $r - r_1$ независимых друг от друга и от $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$ инфинитезимальных преобразований группы G_r в качестве преобразований $Y_{r_1} f, Y_{r_1-1} f \cdots Y_{r_2+1} f$ выберем какие-либо $r_1 - r_2$ друг от друга и от $X_1'' f \cdots X_{r_2}'' f$ независимых преобразований $e_1' X_1' f + \cdots + e_{r_1}' X_{r_1}' f$ группы $G_{r_1}, \cdots$; наконец, в качестве преобразований $Y_{r_{q-1}} f, Y_{r_{q-1}-1} f \cdots Y_1 f$ выберем какие-либо r_{q-1} независимых инфинитезимальных преобразований $e_1^{(q-1)} X_1^{(q-1)} f + \cdots + e_{r_q-1}^{(q-1)} X_{r_q-1}^{(q-1)} f$ группы $G_{r_{q-1}}$. Таким образом, мы, очевидно, получим r независимых друг от друга инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$ нашей группы G_r; о них мы утверждаем, что для любого $i < r$ преобразования $Y_1 f \cdots Y_i f$ порождают i-параметрическую группу, которая в $(i+1)$-параметрической группе $Y_1 f \cdots Y_{i+1} f$ инвариантна. Если нам удастся доказать это утверждение, то мы также докажем, что $Y_1 f \cdots Y_r f$ удовлетворяют соотношениям (5).

Пусть j — одно из чисел $1, 2, \cdots q$. Тогда ясно, что r_j независимых друг от друга инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_{r_j} f$ порождают r_j-параметрическую группу, а именно: определенную выше группу G_{r_j}; правда, надо заметить, что в случае $j = q$ группа G_{r_j} сводится к тождественному преобразованию.

Как мы уже ранее замечали, G_{r_j} инвариантна в группе $G_{r_{j-1}}$ согласно утверждению 6, стр. 290; из этого утверждения, однако, можно заключить еще больше: мы всегда получаем инвариантную подгруппу группы $G_{r_{j-1}}$, если добавить к инфинитезимальным преобразованиям $Y_1 f \cdots Y_{r_j} f$ группы G_{r_j} какие-либо независимые друг от друга и от $Y_1 f \cdots Y_{r_j} f$ инфинитезимальные преобразования группы $G_{r_{j-1}}$. Поскольку $Y_{r_j+1} f \cdots Y_{r_{j-1}} f$

принадлежат группе $G_{r_{j-1}}$, и поскольку они к тому же не зависят друг от друга и от $Y_1 f \cdots Y_{r_j} f$, то получается, что каждая из нижеследующих систем инфинитезимальных преобразований:

$$\begin{array}{llllll} Y_1 f & \cdots & Y_{r_j} f, & Y_{r_j+1} f & \cdots & Y_{r_{j-1}-1} f, \\ Y_1 f & \cdots & Y_{r_j} f, & Y_{r_j+1} f & \cdots & Y_{r_{j-1}-2} f, \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot, \\ Y_1 f & \cdots & Y_{r_j} f, & Y_{r_j+1} f, & Y_{r_j+2} f, & \\ Y_1 f & \cdots & Y_{r_j} f, & Y_{r_j+1} f, & & \end{array}$$

порождает инвариантную подгруппу группы $G_{r_{j-1}}$.

Таким образом, между группами $G_{r_{j-1}}$ и G_{r_j} вставлены некоторые группы, обозначим их $\Gamma_{r_{j-1}-1}, \Gamma_{r_{j-1}-2}, \cdots \Gamma_{r_j+1}$, обладающие следующими свойствами: каждая из них имеет на один параметр меньше, чем предыдущая в этой последовательности, каждая содержится во всех предшествующих группах ряда и в $G_{r_{j-1}}$, каждая инвариантна в $G_{r_{j-1}}$, а стало быть, и во всех предшествующих группах последовательности, в частности в непосредственно предыдущей. К этому добавляется, что G_{r_j} входит в Γ_{r_j+1} в качестве инвариантной подгруппы.

Сказанное верно для всех значений $1, 2 \cdots q$ числа j, т. е. тем самым доказано, что $Y_1 f \cdots Y_r f$ действительно являются такими независимыми инфинитезимальными преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$, что при $i < r$ $Y_1 f \cdots Y_i f$ всегда порождают i-параметрическую, инвариантную в $(i+1)$-параметрической группе $Y_1 f \cdots Y_{i+1} f$ подгруппу. Это мы и хотели доказать.

Таким образом, случай, когда определенное выше целое число r_q обращается в нуль, рассмотрен, остается лишь случай, когда r_q больше нуля. Мы покажем, что в этом случае невозможно выбрать в группе $X_1 f \cdots X_r f$ r независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$, для которых выполняются соотношения вида (5).

Если $r_q > 0$, то r_q-параметрическая группа G_{r_q}, порожденная r_q независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1^{(q)} f \cdots X_{r_q}^{(q)} f$, заведомо не содержит ни одной $(r_q - 1)$-параметрической инвариантной подгруппы. Поскольку $r_{q+1} = r_q$, то среди инфинитезимальных преобразований $(X_i^{(q)} X_k^{(q)})$ находятся в точности r_q друг от друга независимых, откуда с учетом утверждения 8, стр. 292, следует только что заявленное свойство группы G_{r_q}.

Предположим теперь, что в группе $X_1 f \cdots X_r f$ имеется r независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$, связанных соотно-

шениями вида (5), и обозначим i-параметрическую группу, порождаемую при этих условиях преобразованиями $Y_1 f \cdots Y_i f$ через $\mathfrak{G}_i$.

Группа G_{r_q}, согласно стр. 295, инвариантна в группе $X_1 f \cdots X_r f$, но не содержит, как мы видели ранее, ни одной $(r_q - 1)$-параметрической инвариантной подгруппы. А так как всякая $\mathfrak{G}_i$ содержит $(i-1)$-параметрическую подгруппу — группу $\mathfrak{G}_{i-1}$, то немедленно получается, что G_{r_q} не может совпадать с группой $\mathfrak{G}_{r_q}$. Вместе с тем отсюда следует, что существует целое число m, $r_q \leqslant m < r$, такое, что G_{r_q} не входит ни в одну из групп $\mathfrak{G}_{r_q}, \mathfrak{G}_{r_{q+1}} \cdots \mathfrak{G}_m$ и наоборот, входит во все группы $\mathfrak{G}_{m+1}, \mathfrak{G}_{m+2} \cdots \mathfrak{G}_r$.

В соответствии с этим мы имеем m-параметрическую группу $\mathfrak{G}_m$ и r_q-параметрическую группу G_{r_q}, обе содержатся в $(m+1)$-параметрической группе как подгруппы, причем, очевидно, как инвариантные подгруппы. Общие преобразования групп $\mathfrak{G}_m$ и G_{r_q} образуют согласно утв. 7, гл. 12, стр. 235, группу Γ, имеющую по меньшей мере $r_q - 1$ параметров и инвариантную в группе $\mathfrak{G}_{m+1}$ согласно гл. 15, утв. 10, стр. 293. А поскольку G_{r_q} при наложенных условиях не содержится в $\mathfrak{G}_m$, то получается, что Γ является в точности $(r_q - 1)$-параметрической и к тому же инвариантной в G_{r_q}.

Это — противоречие, т. к. G_{r_q}, согласно вышесказанному, не содержит ни одной $(r_q - 1)$-параметрической инвариантной подгруппы. Следовательно, предположение, из которого мы исходили, о том, что в группе $X_1 f \cdots X_r f$ можно задать r независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$, связанных соотношениями вида (5), неверно. Отсюда мы видим, что в случае $r_q > 0$ нет инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$ с таким свойством.

Предыдущие рассуждения дают нам простой способ, при помощи которого можно понять, относится ли заданная r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ к особой категории групп, определенной на стр. 294. Для удобства еще раз подытожим найденные результаты следующим образом:

Утверждение 12.[6] *Пусть $X_1 f \cdots X_r f$ — независимые инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы, а $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$ $(r_1 \leqslant r)$ — такие независимые инфинитезимальные преобразования, через которые линейно выражаются все $(X_i X_k)$; пусть далее $X_1'' f \cdots X_{r_2}'' f$ $(r_2 \leqslant r_1)$ — такие инфинитезимальные преобразования, через которые линейно выражаются все $(X_i' X_k')$. Если аналогичным образом определяются $r_3 \leqslant r_2$ независимых друг от друга инфинитезимальных преобразований $X_1''' f \cdots X_{r_2}''' f$ и т. д., то $X' f$ порождают r_1-параметрическую груп-*

[6] В этом утверждении r_1, а также r_2, r_3 и т. д.; имеют, конечно, те же значения, что и на стр. 295.

ну, $X''f$ порождают r_2-параметрическую, $X'''f$ — r_3-параметрическую и так далее, при этом каждая из этих групп инвариантна во всех предшествующих и в самой группе $X_1 f \cdots X_r f$. В последовательности чисел $r, r_1, r_2, \cdots$ имеется число, скажем r_q, равное всем последующим числам: $r_{q+1}, r_{q+2} \cdots$, тогда как числа $r, r_1 \cdots r_q$, напротив, все различны. Если при этом $r_q = 0$, то в группе $X_1 f \cdots X_r f$ всегда можно выбрать r таких независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$, что для каждого $i < r$ преобразования $Y_1 f \cdots Y_i f$ порождают i-параметрическую группу, которая инвариантна в $(i+1)$-параметрической группе $Y_1 f \cdots Y_{i+1} f$, так что имеют место соотношения специального вида:

$$(Y_i Y_{i+k}) = c_{i,i+k,1} Y_1 f + \cdots + c_{i,i+k,i+k-1} Y_{i+k-1} f$$
$$(i = 1 \cdots r-1;\ k = 1 \cdots r-i).$$

Если, напротив, $r_q > 0$, то в группе $X_1 f \cdots X_r f$ нельзя задать r независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_r f$ с только что описанным свойством.

Глава 16

Присоединенная группа

Пусть $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ — r-параметрическая группа с r независимыми инфинитезимальными преобразованиями

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Если ввести x_i' в выражение $\sum e_k X_k f$ в качестве новых переменных, то для любых значений e_k, как уже было показано в гл. 4, утв. 4, стр. 89, получится уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{r} e_k \cdot X_k f = \sum_{k=1}^{r} e_k' \cdot X_k' f.$$

При этом e_k' являются некоторыми линейными однородными функциями от e_k с коэффициентами, зависящими от $a_1 \cdots a_r$:

$$e_k' = \sum_{j=1}^{r} \varrho_{kj}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_j. \tag{1}$$

Если далее ввести в $\sum e_k' X_k' f$ новые переменные $x_i'' = f_i(x', b)$, то получится

$$\sum_{k=1}^{r} e_k' \cdot X_k' f = \sum_{k=1}^{r} e_k'' \cdot X_k'' f$$

где

$$e_k'' = \sum_{j=1}^{r} \varrho_{kj}(b_1 \cdots b_r) \cdot e_j'. \tag{1'}$$

Но уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ представляют группу, т. е. x'' связаны с x соотношениями вида $x_i'' = f_i(x, c)$, в которых c зависят только от a и b:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r).$$

Если перейти от x непосредственно к x'', то мы получим, что

$$\sum_{k=1}^{r} e_k \cdot X_k f = \sum_{k=1}^{r} e''_k \cdot X''_k f,$$

и имеет место

$$e''_k = \sum_{j=1}^{r} \varrho_{kj}(c_1 \cdots c_r) \cdot e_j = \sum_{j=1}^{r} \varrho_{kj}(\varphi_1(a,b) \cdots \varphi_r(a,b)) \cdot e_j. \qquad (1'')$$

Отсюда можно заключить, что совокупность всех преобразований $e'_k = \sum \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ образует группу. Объединяя уравнения (1) и (1'), получаем

$$e''_k = \sum_{j,\nu=1}^{r} \varrho_{kj}(b_1 \cdots b_r) \cdot \varrho_{j\nu}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_\nu,$$

что, разумеется, должно совпадать с уравнениями (1''), причем для всех значений e, a и b. Поэтому имеют место r^2 тождеств:

$$\varrho_{k\nu}\big(\varphi_1(a,b) \cdots \varphi_r(a,b)\big) \equiv \sum_{j=1}^{r} \varrho_{j\nu}(a_1 \cdots a_r) \cdot \varrho_{kj}(b_1 \cdots b_r),$$

из которых следует, что семейство преобразований $e'_k = \sum \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ действительно образует группу.

Таким образом, с каждой r-параметрической группой $x'_i = f_i(x,a)$ связана некоторая вполне определенная линейная однородная группа

$$e'_k = \sum_{j=1}^{r} \varrho_{kj}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_j \quad (k = 1 \cdots r), \qquad (1)$$

которую мы назовем *присоединенной группой*[1] *группы* $x'_i = f_i(x,a)$.

Рассмотрим, *к примеру*, двухпараметрическую группу $x' = ax + b$ с двумя независимыми инфинитезимальными преобразованиями $\dfrac{df}{dx}$, $x\dfrac{df}{dx}$. Мы находим:

$$e_1\frac{df}{dx} + e_2 x\frac{df}{dx} = e_1 a\frac{df}{dx'} + e_2(x'-b)\frac{df}{dx'} = e'_1\frac{df}{dx'} + e'_2 x'\frac{df}{dx'},$$

[1] Ли, Archiv for Math., том 1, Христиания, 1876 г.

то есть для присоединенной группы группы $x' = ax + b$ получаем следующие уравнения:

$$e_1' = ae_1 - be_2, \quad e_2' = e_2,$$

которые, очевидно, действительно представляют группу.

Присоединенная группа группы $x_i' = f_i(x, a)$ в том виде, в котором мы ее выше нашли, имеет в точности r произвольных параметров: $a_1 \cdots a_r$. Однако для каждой отдельно взятой группы требуется специальное исследование, чтобы выяснить, все ли параметры $a_1 \cdots a_r$ в присоединенной группе являются существенными. Действительно, мы скоро увидим, что существуют r-параметрические группы, присоединенные группы которых не имеют r существенных параметров.

Впрочем, о д н о преобразование содержится в присоединенной группе $x_i' = f_i(x, a)$ при любых обстоятельствах — тождественное преобразование; так как если в уравнениях (1) придать параметрам $a_1 \cdots a_r$ те числовые значения, которые дают тождественное преобразование $x_i' = x_i$ в группе $x_i' = f_i(x, a)$, то получится преобразование $e_1' = e_1, \cdots e_r' = e_r$, которое поэтому всегда имеется в присоединенной группе. Правда, может случиться, что присоединенная группа состоит лишь из тождественного преобразования $e_1' = e_1, \cdots e_r' = e_r$.

§ 76

Чтобы сделать присоединенную группу доступной для исследования, мы должны прежде всего задать ее инфинитезимальные преобразования. Это легко достигается при помощи теоремы 43, гл. 15, стр. 280; но при этом мы должны заменить уравнения $x_i' = f_i(x, a)$ нашей группы эквивалентными им *каноническими* уравнениями

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot X_k x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n), \tag{2}$$

которые представляют ∞^{r-1} однопараметрических подгрупп группы $x_i' = f_i(x, a)$. Согласно гл. 4, стр. 76, параметры a_k определяются здесь как функции от t и $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ при помощи системы

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \cdot \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1 \cdots r). \tag{3}$$

То есть мы должны посредством уравнений (2) ввести в $\sum e_k X_k f$ новые переменные x'_i и получить при этом соотношение вида

$$\sum_{k=1}^{r} e_k \cdot X_k f = \sum_{k=1}^{r} e'_k \cdot X'_k f.$$

Инфинитезимальное преобразование, обозначенное Yf в теореме 43, стр. 280, выглядит теперь так: $\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$; поэтому в нашем случае мы получаем

$$Y\big(X_k(f)\big) - X_k\big(Y(f)\big) = \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu (X_\nu X_k) = \sum_{s=1}^{r} \left\{ \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu c_{\nu ks} \right\} X_s f.$$

В соответствии с этим для $e'_1 \cdots e'_r$ получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{de'_s}{dt} + \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \sum_{k=1}^{r} c_{\nu ks} e'_k = 0 \quad (s = 1 \cdots r). \tag{4}$$

Интегрирование этих дифференциальных уравнений мы рассматриваем как выполнимую операцию, поскольку оно, как известно, требует лишь разрешения одного алгебраического уравнения r-го порядка. Если мы выполним интегрирование с учетом начального условия $e'_k = e_k$ при $t = 0$, то получим r уравнений вида

$$e'_k = \sum_{j=1}^{r} \psi_{kj}(\lambda_1 t, \cdots, \lambda_r t) \cdot e_j \quad (k = 1 \cdots r), \tag{5}$$

эквивалентных уравнениям (1), если в последних a_k выразить как функции от $\lambda_1 t, \cdots, \lambda_r t$.

Отсюда следует, что уравнения (5) также представляют присоединенную группу. Однако мы получили теперь уравнения (5) таким образом, как если бы хотели найти все конечные преобразования, порождаемые инфинитезимальными преобразованиями

$$\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \sum_{ks}^{1 \cdots r} c_{k\nu s} e_k \frac{\partial f}{\partial e_s} = \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \cdot E_\nu f$$

(ср. стр. 55). *Итак, мы заключаем, что присоединенная группа* (1) *состоит из совокупности всех однопараметрических групп вида* $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_r E_r f$.

Если в семействе инфинитезимальных преобразований $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_r E_r f$ имеется ровно ϱ и не более независимых, скажем $E_1 f \cdots E_\varrho f$, то все конечные преобразования однопараметрических групп $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_r E_r f$ уже содержатся в совокупности всех инфинитезимальных преобразований $\infty^{\varrho-1}$ однопараметрических групп $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_\varrho E_\varrho f$. Совокупность этих ∞^ϱ конечных преобразований образует присоединенную группу $e'_k = \sum \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$, которая, таким образом, содержит лишь ϱ существенных параметров (гл. 3, теорема 8, стр. 71).

Согласно вышесказанному, можно предсказать, что $E_1 f \cdots E_\varrho f$ связаны соотношениями вида

$$(E_\mu E_\nu) = \sum_{s=1}^{\varrho} g_{\mu\nu s} \cdot E_s f;$$

мы можем также убедиться в этом при помощи вычислений. Путем прямого вычисления получаем

$$E_\mu\big(E_\nu(f)\big) - E_\nu\big(E_\mu(f)\big) = \sum_{\sigma,k,\pi=1}^{r} (c_{\pi\mu k}\, c_{k\nu\sigma} - c_{\pi\nu k}\, c_{k\mu\sigma}) e_\pi \frac{\partial f}{\partial e_\sigma}.$$

Но между c_{iks} имеют место соотношения

$$\sum_{k=1}^{r} (c_{\pi\mu k}\, c_{k\nu\sigma} + c_{\mu\nu k}\, c_{k\pi\sigma} + c_{\nu\pi k}\, c_{k\mu\sigma}) = 0,$$

которые мы в свое время (ср. гл. 9, теорема 27, стр. 190) вывели из тождества Якоби. Если мы добавим к этому, что $c_{\nu\pi k} = -c_{\pi\nu k}$ и $c_{k\pi\sigma} = -c_{\pi k\sigma}$, то можно привести правую часть нашего уравнения для $(E_\mu E_\nu)$ к следующему виду:

$$\sum_{k=1}^{r} c_{\mu\nu k} \sum_{\sigma,\pi=1}^{r} c_{\pi k\sigma}\, e_\pi \frac{\partial f}{\partial e_\sigma},$$

таким образом, получается:

$$(E_\mu E_\nu) = \sum_{k=1}^{r} c_{\mu\nu k} \cdot E_k f.$$

Наконец, при наложенных условиях здесь можно выразить правую часть только через $E_1 f \cdots E_\varrho f$, так что действительно имеют место соотношения вида

$$(E_\mu E_\nu) = \sum_{s=1}^{\varrho} g_{\mu\nu s} \cdot E_s f,$$

в которых $g_{\mu\nu s}$ означают константы.

Прежде чем пойти дальше, повторим полученные до этого в данной главе результаты во взаимосвязи

Теорема 48. *Если в общее инфинитезимальное преобразование* $e_1X_1f + \cdots + e_rX_rf$ *r-параметрической группы* $x_i' = f_i(x, a)$ *ввести вместо* x *новые переменные* x', *то получится выражение вида*

$$e_1' \cdot X_1'f + \cdots + e_r' \cdot X_r'f;$$

при этом e' *связаны с* e *соотношениями*

$$e_k' = \sum_{j=1}^{r} \varrho_{kj}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_j \quad (k = 1 \cdots r),$$

которые представляют некоторую группу в переменных e, *так называемую присоединенную группу группы* $x_i' = f_i(x, a)$. *Эта присоединенная группа содержит тождественное преобразование и порождается некоторыми инфинитезимальными преобразованиями; если* $X_1f \cdots X_rf$ *удовлетворяют соотношениям*

$$(X_iX_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_sf \quad (i, k = 1 \cdots r),$$

и мы положим

$$E_\mu f = \sum_{k,j=1}^{r} c_{j\mu k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \quad (\mu = 1 \cdots r),$$

то $\lambda_1E_1f + \cdots + \lambda_rE_rf$ *будет общим инфинитезимальным преобразованием присоединенной группы, и между* $E_1f \cdots E_rf$ *будут при этом выполнены соотношения*

$$(E_iE_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot E_sf \quad (i, k = 1 \cdots r).$$

Если две r-параметрические группы $X_1f \cdots X_rf$ и $Y_1f \cdots Y_rf$ таковы, что одновременно выполняется

$$(X_iX_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_sf, \quad (Y_iY_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot Y_sf$$

в обоих случаях с одними и теми же константами c_{iks}, то эти группы, очевидно, имеют одну и ту же присоединенную группу. Позднее мы увидим, что группы, имеющие неодинаковое число параметров, все же могут иметь при определенных условиях одну и ту же присоединенную группу.

§ 77

Как же узнать, сколько имеется независимых среди инфинитезимальных преобразований $E_1 f \cdots E_r f$?

Если не все $E_1 f \cdots E_r f$ независимы друг от друга, то имеется по меньшей мере одно инфинитезимальное преобразование $\sum g_\mu E_\mu f$, тождественно обращающееся в нуль. Из тождества

$$\sum_{\mu=1}^{r} g_\mu \sum_{k,j=1}^{r} c_{j\mu k} e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \equiv 0$$

получается

$$\sum_{\mu=1}^{r} g_\mu c_{j\mu k} = 0$$

для всех значений j и k, следовательно, выражение

$$\left(X_j f, \sum_{\mu=1}^{r} g_\mu \cdot X_\mu f \right) = \sum_{k=1}^{r} \left\{ \sum_{\mu=1}^{r} g_\mu c_{j\mu k} \right\} X_k f$$

обращается в нуль, то есть инфинитезимальное преобразование $\sum g_\mu X_\mu f$ перестановочно со всеми r инфинитезимальными преобразованиями $X_j f$. Если же, наоборот, группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит инфинитезимальное преобразование $\sum g_\mu X_\mu f$, перестановочное со всеми $X_k f$, то отсюда таким же образом следует, что инфинитезимальное преобразование $\sum g_\mu E_\mu f$ обращается тождественно в нуль.

Чтобы выразить эти связи как можно короче, введем следующее определение:

Инфинитезимальное преобразование $\sum g_\mu X_\mu f$ r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ называется выделенным[2] инфинитезимальным преобразованием этой группы, если оно перестановочно со всеми $X_k f$.

[2] Для таких преобразований в современной математике специального термина обычно не используют, а говорят о них как об элементах центра группы или алгебры. — *Прим. ред.*

К слову сказать, выделенные инфинитезимальные преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$ характеризуются также тем, что сохраняют свой вид при введении новых переменных $x_i' = f_i(x, a)$, какие бы значения ни принимали параметры $a_1 \cdots a_r$. А именно: если инфинитезимальное преобразование $\sum g_\mu X_\mu f$ является выделенным, то согласно гл. 15, стр. 288, имеет место соотношение вида

$$\sum g_\mu \cdot X_\mu f = \sum g_\mu \cdot X'_\mu f.$$

Кроме того, указанные рассуждения показывают, что конечное преобразование однопараметрической группы $\sum g_\mu X_\mu f$ перестановочно с любым конечным преобразованием группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Согласно вышесказанному, каждому выделенному инфинитезимальному преобразованию группы $X_1 f \cdots X_r f$ соответствует линейное соотношение между $E_1 f \cdots E_r f$. Если $\sum g_\mu X_\mu f$ — выделенное инфинитезимальное преобразование, то между Ef имеет место просто соотношение $\sum g_\mu E_\mu f = 0$. Следовательно, среди $E_1 f \cdots E_r f$ содержится ровно столько независимых соотношений такого рода, сколько имеется независимых выделенных инфинитезимальных преобразований в группе $X_1 f \cdots X_r f$. Таким образом, если таких независимых преобразований ровно m и не более, то среди инфинитезимальных преобразований $E_1 f \cdots E_r f$ имеется в точности $r - m$ и не более независимых, и столько же параметров содержит присоединенная группа.

Итак, мы имеем следующую теорему.

Теорема 49. *Присоединенная группа* $e'_k = \sum \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ *r-параметрической группы* $X_1 f \cdots X_r f$ *тогда и только тогда содержит* r *существенных параметров, когда ни одно из* ∞^{r-1} *инфинитезимальных преобразований* $\sum g_\mu X_\mu f$ *не является выделенным в группе* $X_1 f \cdots X_r f$*; напротив, присоединенная группа имеет менее* r*, а именно в точности* $r - m$ *существенных параметров, если* $X_1 f \cdots X_r f$ *содержит ровно* m *и не более независимых выделенных инфинитезимальных преобразований*[3].

Возьмем, к примеру, группу

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_r} \quad (r \leqslant n).$$

Все ее инфинитезимальные преобразования являются выделенными, т. к. все c_{iks} равны нулю. Таким образом, все r выражений $E_1 f \cdots E_r f$ об-

[3] Ли, Math. Ann., том XXV, стр. 94.

ращаются в нуль тождественно, а присоединенная группа сводится к тождественному преобразованию.

Если мы, напротив, рассмотрим четырехпараметрическую группу

$$x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial x}, x\frac{\partial f}{\partial y}, y\frac{\partial f}{\partial y},$$

то она содержит одно единственное выделенное инфинитезимальное преобразование, а именно:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y};$$

поэтому ее присоединенная группа является лишь трехпараметрической.

Если группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит выделенное инфинитезимальное преобразование $\sum g_\mu X_\mu f$, то $\sum g_\mu X_\mu f = 0$ является линейным дифференциальным уравнением в частных производных, остающимся инвариантным относительно этой группы; следовательно, эта группа импримитивна (ср. стр. 245). Отсюда мы заключаем, что справедливо следующее

Утверждение 1. *Если группа $X_1 f \cdots X_r f$ в переменных $x_1 \cdots x_n$ является примитивной, то она не содержит выделенных инфинитезимальных преобразований.*

Если соединить это утверждение с последней теоремой, то получится еще одно

Утверждение 2. *Присоединенная группа r-параметрической примитивной группы содержит r существенных параметров.*

Несколько позднее мы дадим более общую формулировку двух последних утверждений (ср. гл. 24, о систатических группах).

Согласно вышесказаному, инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ и инфинитезимальные преобразования присоединенной группы $E_1 f \cdots E_r f$ связаны друг с другом таким образом, что всякое не являющееся выделенным инфинитезимальное преобразование $\sum e_k X_k f$ соответствует не обращающемуся тождественно в нуль инфинитезимальному преобразованию, в то время как всякому выделенному инфинитезимальному преобразованию $\sum e_k X_k f$ в присоединенной группе отвечает *тождественное* преобразование. Если к тому же учесть, что две системы уравнений

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f, \quad (E_i E_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot E_s f$$

имеют один и тот же вид, то можно прийти к гипотезе, что присоединенная группа не может содержать выделенных инфинитезимальных преобразований. Но это предположение было бы неверным, как нам показывает группа $\frac{\partial f}{\partial x_2}, x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1}$, присоединенная группа которой состоит из двух перестановочных инфинитезимальных преобразований и, следовательно, содержит два независимых выделенных инфинитезимальных преобразования.

§ 78

Исходным пунктом нашего исследования послужило замечание, что выражение $\sum e_k X_k f$ при введении новых переменных $x_i' = f_i(x, a)$ принимает аналогичный вид $\sum e_k' X_k' f$. Но выражение $\sum e_k X_k f$ можно согласно гл. 15, стр. 283, воспринимать как символ общего конечного преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$; причем величины $e_1 \cdots e_r$ надо рассматривать как параметры конечных преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$. Следовательно, мы можем также сказать: конечные преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$ при переходе к переменным x_i' переставляются между собой, в то время как их совокупность остается инвариантной. Мы можем на основании результатов предыдущего параграфа добавить, что соответствующая перестановка обусловлена преобразованием присоединенной группы.

Но если речь идет о *«перестановке конечных преобразований* $\sum e_k X_k f$ *между собой»*, то под этим подразумевается, что эти преобразования рассматриваются *индивидуально*, т. е. как отдельные объекты — «индивидуумы»; на этой трактовке мы хотим теперь остановиться подробнее.

Каждый «индивидуум» в семействе $\sum e_k X_k f$ задается соответствующими значениями параметров $e_1 \cdots e_r$; поэтому для наглядности представим себе, что e_k – координаты точек r-мерного многообразия в прямоугольной системе координат. Тогда точки этого многообразия представляют все конечные преобразования $\sum e_k X_k f$; поэтому они преобразуются уже известной нам линейной однородной группой

$$e_k' = \sum_{j=1}^{r} \varrho_{kj}(a) \cdot e_j.$$

Начало координат $e_1 = 0, \cdots e_r = 0$, являющееся образом тождественного преобразования, очевидно, остается при этом инвариантным.

Каждое конечное преобразование e_k^0 принадлежит совершенно определенной однопараметрической группе, преобразования которой определяют-

ся уравнениями

$$\frac{e_1}{e_1^0} = \cdots = \frac{e_r}{e_r^0};$$

но в нашей интерпретации эти уравнения представляют собой прямую, проходящую через $e_k = 0$, то есть

Каждая однопараметрическая подгруппа группы $X_1 f \cdots X_r f$ представляет собой прямую в пространстве $e_1 \cdots e_r$, проходящую через начало координат $e_k = 0$; и наоборот, любая прямая, проходящая через начало координат, представляет такую однопараметрическую подгруппу.

Любая другая подгруппа r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ состоит из однопараметрических подгрупп, а эти однопараметрические подгруппы определяются инфинитезимальными преобразованиями, содержащимися в соответствующей подгруппе. Однако согласно гл. 11, утв. 6, стр. 235, инфинитезимальные преобразования подгруппы группы $X_1 f \cdots X_r f$ можно определить при помощи *линейных однородных* уравнений между $e_1 \cdots e_r$; конечно, те же уравнения определяют также однопараметрические группы, принадлежащие подгруппе, то есть вообще конечные преобразования данной подгруппы. Иначе говоря,

Каждая m-параметрическая подгруппа группы $X_1 f \cdots X_r f$ представлена в пространстве $e_1 \cdots e_r$ плоским m-мерным многообразием, проходящим через начало координат $e_1 = 0, \cdots e_r = 0$[4].

Само собой разумеется, что обратное, вообще говоря, неверно и происходит только в совершенно исключительном случае, когда *любое* плоское многообразие, проходящее через начало координат, представляет подгруппу.

Присоединенная группа $e'_k = \sum \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ преобразует точки e_k линейно. Если какая-либо точка $\bar{e}_k$ и, как следствие этого, каждая точка $m\,\bar{e}_k = \mathrm{Const.}\,\bar{e}_k$ остаются при всех преобразованиях группы инвариантными, то согласно вышесказанному, это означает, что преобразования однопараметрической группы $\sum \bar{e}_k X_k f$ перестановочны со всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Всякая *инвариантная* подгруппа группы $X_1 f \cdots X_r f$ представляется плоским многообразием, содержащим начало координат и сохраняющим свое положение при всех преобразованиях $e'_k = \sum \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$. С другой стороны, каждое плоское многообразие, проходящее через начало координат и остающееся при всех преобразованиях присоединенной группы инвариантным, представляет инвариантную подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$ (ср. гл. 15, утв. 5, стр. 290).

[4] Имеется в виду m-мерное линейное подпространство. – *Прим. ред.*

Пусть M — произвольное плоское многообразие, проходящее через начало координат, представляющее некоторую подгруппу группы G_r: $X_1 f \cdots X_r f$. Если к M применить какое-либо преобразование присоединенной группы, то получится новое плоское многообразие, также представляющее подгруппу группы G_r. Очевидно, что эта новая подгруппа подобна исходной посредством преобразования из G_r, что в терминах теории подстановок мы выразим так: *две вышеупомянутые подгруппы равноправны*[5] *между собой в группе* $X_1 f \cdots X_r f$.

Совокупность всех подгрупп, являющихся внутри G_r равноправными с подгруппой, представленной некоторым M, представляется семейством плоских многообразий, а именно таким, которое получается, если применить к M все преобразования присоединенной группы. Любые два многообразия этого семейства, конечно, представляют равноправные подгруппы.

Отсюда мы заключаем, что любая инвариантная подгруппа группы G_r является внутри G_r равноправной лишь самой себе.

Поскольку семейство всех подгрупп g, равноправных с данной, получается из последней в результате выполнения всех преобразований $e'_k = \sum \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$, то это же самое семейство должно воспроизводиться при всех преобразованиях $e''_k = \sum \varrho_{kj}(b) \cdot e_j$. Так, выполнив последовательно преобразования $e'_k = \sum \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ и $e''_k = \sum \varrho_{kj}(b) \cdot e_j$, мы получим тот же результат, как если бы к исходно заданной подгруппе были применены все преобразования

$$e''_k = \sum \varrho_{kj}(c) \cdot e_j \quad (c_k = \varphi_k(a, b));$$

в обоих случаях получается одно и то же семейство.

Если все равноправные подгруппы g обладают некоторым непрерывным, общим для них семейством преобразований, то совокупность всех этих преобразований представляется плоским многообразием пространства $e_1 \cdots e_r$. Это плоское многообразие, разумеется, остается при всех преобразованиях присоединенной группы инвариантным и потому представляет, согласно вышесказанному, инвариантную подгруппу группы G_r. Следовательно, верна

Теорема 50. *Если те подгруппы группы G_r, которые равноправны внутри G_r с некоторой фиксированной подгруппой, имеют общее семейство преобразований, то совокупность таких преобразований образует инвариантную в G_r подгруппу.*

[5] В современной терминологии: «сопряжены». — *Прим. ред.*

§ 79

Мы разделяем подгруппы любой r-параметрической группы G_r на различные классы, которые назовем *типами подгрупп группы* G_r. К *одному и тому же* типу отнесем такие подгруппы группы G_r, которые равноправны между собой внутри G_r; подгруппы, которые не являются равноправными внутри G_r, мы относим к *разным* типам.

Если известна какая-либо подгруппа группы G_r, то можно непосредственно задать все подгруппы, принадлежащие тому же самому типу. Благодаря этому обстоятельству перечисление подгрупп заданной группы существенно упрощается, поскольку очевидно, что нет необходимости действительно описывать все подгруппы, скорее, надо перечислить лишь различные типы подгрупп, для чего задать один представитель для каждого типа, то есть подгруппу, относящуюся к данному типу.

При рассмотрении конечных преобразований группы мы также говорим о различных типах. Два конечных преобразования: $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ и $\bar{e}_1 X_1 f + \cdots + \bar{e}_r X_r f$, r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ мы причисляем к одному и тому же типу тогда и только тогда, когда они равноправны друг с другом внутри группы G_r, то есть, когда присоединенная группа содержит преобразование, переводящее точку $e_1^0 \cdots e_r^0$ в точку $\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_r$. Само собой разумеется (но все же хочется об этом упомянуть), что в данном преобразовании $e'_k = \sum \gamma_{kj} e_j$ присоединенной группы определитель, составленный из коэффициентов γ_{kj} не должен обращаться в нуль.

Мы сейчас не будем рассматривать вопрос относительно типов подгрупп заданной группы в полной общности, но хотим по крайней мере показать, как находятся имеющиеся типы однопараметрических групп и конечных преобразований.

Сначала зададимся вопросом относительно всех типов конечных преобразований.

Пусть $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ — какое-либо конечное преобразование группы $X_1 f \cdots X_r f$. Если применить к точке $e_1^0 \cdots e_r^0$ все преобразования присоединенной группы, то мы получим образы всех тех конечных преобразований нашей группы, которые равноправны с $\sum e_k^0 X_k f$ и, таким образом, относятся к одному и тому же типу, что и $\sum e_k^0 X_k f$. Совокупность всех этих точек образует согласно гл. 14, стр. 250, многообразие, инвариантное относительно присоединенной группы[6], а именно одно из инвариантных многообразий, названных нами тогда *наименьшими*.

Конечные уравнения присоединенной группы мы можем рассматривать как известные; следовательно, мы в состоянии найти без интегриро-

[6] В современной терминологии: «орбита присоединенного представления». — *Прим. ред.*

вания уравнения только что упомянутых наименьших инвариантных многообразий (ср. гл. 14, теорема 37, стр. 251). А поскольку всякое такое наименьшее инвариантное многообразие представляет совокупность всех конечных преобразований, относящихся к определенному типу, то тем самым все типы конечных преобразований нашей группы найдены. Следовательно, верно

Утверждение 3. *Если задана r-параметрическая группа $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ с r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$, то все типы конечных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ этой группы находятся следующим образом: составляются конечные уравнения $e_k' = \sum \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ присоединенной группы группы $X_1 f \cdots X_r f$, а затем в пространстве e определяются наименьшие многообразия, остающиеся инвариантными при действии присоединенной группы; эти многообразия и представляют искомые типы.*

Все же нельзя забывать, что допустимы лишь такие преобразования присоединенной группы, при которых определитель, составленный из коэффициентов, не обращается в нуль. Сравните с тем, что сказано по этому вопросу в гл. 14, стр. 250.

Теперь найдем все типы однопараметрических подгрупп или, что то же самое, все *типы инфинитезимальных преобразований нашей группы.*

Две однопараметрические группы $\sum e_k^0 X_k f$ и $\sum \bar{e}_k X_k f$ равноправны внутри G_r, если в присоединенной группе имеется преобразование, переводящее прямую

$$\frac{e_1}{e_1^0} = \cdots = \frac{e_r}{e_r^0}$$

в прямую

$$\frac{e_1}{\bar{e}_1} = \cdots = \frac{e_r}{\bar{e}_r};$$

обе эти прямые, проходящие через начало координат, являются образами соответствующих однопараметрических групп. Поэтому если мы представим себе, что к первой прямой применены все преобразования присоединенной группы, то получим все проходящие через начало координат прямые, представляющие однопараметрические подгруппы, равноправные группе $\sum e_k^0 X_k f$. Совокупность всех этих прямых образует, разумеется, некоторое многообразие, инвариантное относительно присоединенной группы — наименьшее инвариантное многообразие, которому принадлежит прямая $\frac{e_1}{e_1^0} = \cdots = \frac{e_r}{e_r^0}$. Ясно, что это многообразие представляется системой уравнений, являющейся в переменных $e_1 \cdots e_r$ *однородной.*

Наоборот, ясно, что каждая однородная по e система уравнений, допускающая присоединенную группу, представляет инвариантное семейство однопараметрических групп. А поскольку всякая однородная по e система уравнений характеризуется как таковая тем, что допускает все преобразования вида

$$e_1' = \lambda e_1, \cdots e_r' = \lambda e_r, \tag{6}$$

то мы получим все инвариантные семейства однопараметрических групп, если найдем все многообразия пространства $e_1 \cdots e_r$, допускающие, помимо преобразований присоединенной группы, еще и все преобразования вида (6). В частности, если мы будем искать все наименьшие инвариантные многообразия с этим свойством, то получим, очевидно, все имеющиеся типы однопараметрических подгрупп.

Преобразования (6) образуют однопараметрическую группу, инфинитезимальное преобразование которой таково:

$$Ef = \sum_{k=1} e_k \frac{\partial f}{\partial e_k}.$$

Добавляя Ef к инфинитезимальным преобразованиям $E_1 f \cdots E_r f$ присоединенной группы, мы снова получаем инфинитезимальные преобразования некоторой группы; а именно: все выражения $(E_k\, E)$ обращаются, как показывает их вычисление, тождественно в нуль. Очевидно, все сводится к описанию наименьших многообразий, остающихся при действии группы $E_1 f \cdots E_r f$, Ef инвариантными. Это описание может быть выполнено согласно указаниям в гл. 14, стр. 250, так как если известны конечные уравнения присоединенной группы, то сразу же известны и конечные уравнения только что упомянутой группы. Поэтому мы имеем

Утверждение 4. *Если задана r-параметрическая группа $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ с r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$, то все типы однопараметрических подгрупп или, что то же самое, инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ данной группы можно найти следующим образом: составляются инфинитезимальные преобразования $E_1 f \cdots E_r f$ присоединенной группы заданной группы $X_1 f \cdots X_r f$, затем вычисляются конечные уравнения группы, порожденной $r+1$ инфинитезимальными преобразованиями $E_1 f \cdots E_r f$ и*

$$Ef = \sum_{k+1}^{r} e_k \frac{\partial f}{\partial e_k},$$

и, наконец, в пространстве $e_1 \cdots e_r$ определяются наименьшие многообразия, инвариантные относительно только что определенной группы; эти многообразия представляют искомые типы.

Выше было показано, как можно задать все типы конечных преобразований и все типы однопараметрических подгрупп заданной r-параметрической группы. Сейчас мы рассмотрим немного подробнее взаимосвязь между этими двумя задачами и увидим, что решение одной из них всякий раз значительно упрощает решение другой.

Предположим прежде всего, что нам уже известны все типы *конечных преобразований* группы $X_1 f \cdots X_r f$, то есть все наименьшие многообразия пространства $e_1 \cdots e_r$, допускающие присоединенную группу $E_1 f \cdots E_r f$. Как же нам тогда надо действовать, чтобы найти наименьшие многообразия, инвариантные относительно группы Ef, $E_1 f \cdots E_r f$?

Ясно, что всякое инвариантное относительно группы Ef, $E_1 f \cdots E_r f$ многообразие допускает присоединенную группу; следовательно, каждое искомое многообразие либо должно быть одним из уже известных, либо должно содержать одно из известных многообразий. Поэтому, чтобы найти все искомые многообразия, нам надо лишь взять поочередно уже известные многообразия и для каждого из них найти наименьшее инвариантное относительно группы Ef, $E_1 f \cdots E_r f$ многообразие, в котором оно содержится.

Пусть

$$W_1(e_1 \cdots e_r) = 0, \cdots W_m(e_1 \cdots e_r) = 0, \tag{7}$$

или короче — M, — одно из известных наименьших многообразий, допускающих присоединенную группу $E_1 f \cdots E_r f$. Как же найти наименьшее многообразие, допускающее группу Ef, $E_1 f \cdots E_r f$ и включающее к тому же многообразие M?

Искомое многообразие обязательно содержит начало координат $e_1 = 0, \cdots e_r = 0$ и, кроме того, состоит из проходящих через него прямых, поэтому оно заведомо содержит такое многообразие M', которое образовано прямыми между началом координат и точками многообразия M. Если мы теперь сможем доказать, что M' допускает инфинитезимальные преобразования Ef, $E_1 f \cdots E_r f$, то тем самым мы также докажем, что M' является искомым многообразием.

Очевидно, уравнения многообразия M' получаются, если исключить из уравнений

$$W_1(e_1\tau, \cdots e_r\tau) = 0, \cdots W_m(e_1\tau, \cdots e_r\tau) = 0 \tag{8}$$

произвольный параметр τ. Следовательно, M' можно также рассматривать как совокупность из ∞^1 многообразий, представленных уравнениями (8)

с произвольным параметром τ. Но совокупность многообразий (8), очевидно, допускает инфинитезимальное преобразование Ef, так как ∞^1 систем уравнений (8) переставляются между собой конечными преобразованиями

$$e_1' = \lambda e_1, \ \cdots \ e_r' = \lambda e_r$$

однопараметрической группы Ef. К тому же легко видеть, что даже каждая отдельно взятая из ∞^1 систем уравнений (8) допускает инфинитезимальные преобразования $E_1 f \cdots E_r f$. Действительно, поскольку система уравнений (7) допускает инфинитезимальное преобразование

$$E_\mu f = \sum_{k,j=1}^{r} c_{j\mu k} e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \quad (\mu = 1 \cdots r),$$

то система (8) с параметром τ должна допускать преобразования

$$\sum_{k,j=1}^{r} c_{j\mu k} \cdot e_j \tau \frac{\partial f}{\partial (e_k \tau)} = E_\mu f,$$

то есть сами преобразования $E_1 f \cdots E_r f$, каким бы ни было значение τ.

Отсюда мы заключаем, что совокупность из ∞^1 многообразий (8) допускает инфинитезимальные преобразования Ef, $E_1 f \cdots E_r f$, то есть что многообразие M', совпадающее с этой совокупностью, действительно является искомым многообразием; то же самое, как уже было сказано, аналитически представляется уравнениями, которые получаются из (8) путем исключения параметра τ.

Будем считать, что для *каждого* многообразия M построено соответствующее многообразие M', тогда мы получим, согласно вышесказанному, все типы однопараметрических подгрупп группы $X_1 f \cdots X_r f$.

С другой стороны, предположим, что нам известны все типы *однопараметрических подгрупп* группы $X_1 f \cdots X_r f$, и попытаемся с их помощью найти типы конечных преобразований этой группы.

Нам известны все наименьшие многообразия, инвариантные относительно группы Ef, $E_1 f \cdots E_r f$, и требуется найти наименьшие, инвариатные относительно группы $E_1 f \cdots E_r f$. Поскольку каждое из искомых многообразий, очевидно, содержится в одном из уже известных, то нам надо лишь рассмотреть каждое из известных многообразий само по себе и отыскать содержащиеся в нем многообразия с требуемым свойством.

Пусть q-мерное многообразие M — одно из наименьших многообразий, инвариантных относительно группы Ef, $E_1 f \cdots E_r f$. Тогда для точек

многообразия M все определители порядка $q+1$, но не все определители порядка q матрицы

$$\begin{vmatrix} e_1 & \cdot & e_r \\ \sum_{k=1}^{r} c_{k11} e_k & \cdot & \sum_{k=1}^{r} c_{k1r} e_k \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^{r} c_{kr1} e_k & \cdot & \sum_{k=1}^{r} c_{krr} e_k \end{vmatrix} \tag{9}$$

обращаются в нуль (ср. гл. 14, стр. 263 и далее.)

О том, разбивается ли M на подмножества, остающиеся инвариантными относительно группы $E_1 f \cdots E_r f$, можно судить по поведению миноров порядка q определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{r} c_{k11} e_k & \cdot & \sum_{k=1}^{r} c_{k1r} e_k \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^{r} c_{kr1} e_k & \cdot & \sum_{k=1}^{r} c_{krr} e_k \end{vmatrix}.$$

Если для точек многообразия M не все рассматриваемые миноры обращаются в нуль, то разбиения M на меньшие многообразия, инвариантные относительно присоединенной группы, не происходит.

Если же, напротив, рассматриваемые миноры для точек из M одновременно обращаются в нуль, то M разбивается на ∞^1 $(q-1)$-мерных, инвариантных относительно группы $E_1 f \cdots E_r f$ подмножеств; тот факт, что таких подобластей — в точности ∞^1, следует из того обстоятельства, что для точек многообразия M заведомо не все миноры порядка $q-1$ определителя Δ обращаются в нуль, в противном случае обращались бы в нуль все определители порядка q матрицы (9). Конечно, можно выписать уравнения оговоренных подмножеств без интегрирования, поскольку конечные уравнения группы $E_1 f \cdots E_r f$ известны.

В настоящей главе мы до сих пор всегда рассматривали лишь конечные преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$ как «индивидуумы» и интерпретировали их как точки r-мерного пространства.

Существует другая точка зрения, которая тоже оправданна. Мы можем также рассматривать однопараметрические подгруппы или, что то же самое, инфинитезимальные преобразования нашей группы как «индивидуумы» и истолковывать их на сей раз как точки $(r-1)$-мерного пространства. Тогда мы должны понимать величины $e_1 \cdots e_r$ как *однородные* координаты в этом пространстве.

Мы не намерены развивать эту мысль; тем более что многое, что можно было бы здесь сказать, кажется, с учетом вышесказанного, само собой разумеющимся, например, что всякая m-параметрическая подгруппа группы $X_1 f \cdots X_r f$ представляется в $(r-1)$-мерном пространстве плоским многообразием размерности $m-1$. Мы выведем только одно простое утверждение, получающееся при взятии за основу новой трактовки и часто являющееся полезным при исследованиях групп преобразований в более общих терминах.

Мы считаем, что применяем общее конечное преобразование

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^0 X_k x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы $\lambda_1^0 X_1 f + \cdots + \lambda_r^0 X_r f$ к инфнинитезимальному преобразованию нашей r-параметрической группы, то есть предполагаем, что в выражении $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ вместо $x_1 \cdots x_n$ введены новые переменные $x_1' \cdots x_n'$. Согласно изложенному на стр. 302, инфинитезимальное преобразование $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ переходит в ∞^1 инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ нашей группы, где $e_1 \cdots e_r$ — некоторые функции от $e_1^0 \cdots e_r^0$ и t, которые задаются из дифференциальных уравнений

$$\frac{de_s}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^0 \sum_{k=1}^{r} c_{\nu k s}\, e_k \qquad (s = 1 \cdots r) \tag{4'}$$

и начальных условий $e_1 = e_1^0, \cdots e_r = e_r^0$ при $t = 0$.

Поскольку всякое инфинитезимальное преобразование нашей группы представляется точкой ранее упомянутого $(r-1)$-мерного пространства, то, очевидно, мы также можем сказать: если применить к инфинитезимальному преобразованию $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ все ∞^1 преобразований однопараметрической группы $\lambda_1^0 X_1 f + \cdots + \lambda_r^0 X_r f$, то точка, соответствующая этому инфинитезимальному преобразованию, движется по некоторой кривой пространства $e_1 \cdots e_r$.

Тогда имеется очень простое определение для касательной к этой кривой, проходящей через точку $e_1^0 : \cdots : e_r^0$. Уравнения этой касательной имеют вид

$$e_s \sum_{\nu,k=1}^{r} c_{\nu k \tau}\, \lambda_\nu^0\, e_k^0 - e_\tau \sum_{\nu,k=1}^{r} c_{\nu k s}\, \lambda_\nu^0\, e_k^0 = 0 \qquad (s, \tau = 1 \cdots r),$$

то есть точка, однородные координаты которой имеют значения

$$e_s = \sum_{\nu,k=1}^{r} c_{\nu k s}\, \lambda_\nu^0\, e_k^0 \quad (s = 1 \cdots r),$$

лежит на этой касательной. Но очевидно, что эта точка соответствует инфинитезимальному преобразованию

$$\left(\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^0 \cdot X_\nu f, \sum_{k=1}^{r} e_k^0 \cdot X_k f \right) = \sum_{s=1}^{r} \left\{ \sum_{\nu,k=1}^{r} c_{\nu k s}\, \lambda_\nu^0\, e_k^0 \right\} X_s f,$$

получающемуся в результате *комбинации* двух преобразований, $\sum \lambda_\nu^0 X_\nu f$ и $\sum e_k^0 X_k f$. Следовательно, мы имеем следующее

Утверждение 5. *Если интерпретировать* ∞^{r-1} *инфинитезимальных преобразований* $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ *некоторой* r*-параметрической группы* $X_1 f \cdots X_r f$ *как точки* $(r-1)$*-мерного пространства, в котором* $e_1 \cdots e_r$ *понимаются как однородные координаты этого пространства, то имеет место следующее: если к некоторому инфинитезимальному преобразованию* $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ *группы применены все преобразования некоторой однопараметрической группы* $\lambda_1^0 X_1 f + \cdots + \lambda_r^0 X_r f$, *то точка-образ преобразования* $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ *описывает кривую, касательная к которой в точке* $e_1^0 : \cdots : e_r^0$ *получается, если эту точку соединить прямой с точкой-образом инфинитезимальнго преобразования* $\left(\sum \lambda_\nu^0 X_\nu f, \sum e_k^0 X_k f\right)$; *если, с другой стороны, к инфинитезимальному преобразованию* $\sum \lambda_\nu^0 X_\nu f$ *применить все преобразования однопараметрической группы* $\sum e_k^0 X_k f$, *то точка-образ преобразования* $\sum \lambda_\nu^0 X_\nu f$ *описывает кривую, касательная к которой в точке* $\lambda_1^0 : \cdots : \lambda_r^0$ *получается, если эту точку соединить прямой с точкой-образом инфинитезимального преобразования* $\left(\sum \lambda_\nu^0 X_\nu f, \sum e_k^0 X_k f\right)$.

Глава 17

Структура и изоморфизм

Для решения многих задач, которые можно поставить относительно r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, требуется знать лишь константы c_{iks} в соотношениях

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f.$$

Так, например, мы видели, что описание всех подгрупп группы $X_1 f \cdots X_r f$ зависит лишь от констант c_{iks}, и то же самое справедливо для описания всех типов подгрупп (ср. теорему 33, стр. 233, и гл. 16, стр. 310–311).

Отсюда явствует, что константы c_{iks} сами по себе уже отражают некоторые свойства группы $X_1 f \cdots X_r f$. Для совокупности этих свойств мы введем особый термин, назовем ее *структурой* группы и скажем поэтому, что *константы c_{iks} в соотношениях*

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f \tag{1}$$

задают структуру r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$.

§ 80

Система констант c_{iks}, задающая структуру r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, в свою очередь, определена неоднозначно. А именно: отдельные c_{iks} получают, вообще говоря, другие числовые значения, если выбрать вместо $X_1 f \cdots X_r f$ какие-либо другие r независимых инфинитезимальных преобразований этой же группы.

Отсюда следует, что две различные системы констант c_{iks} могут при некоторых условиях представлять структуру одной и той же группы. Как же узнать, происходит это или нет?

Мы исходим из соотношений

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f \quad (i,k = 1 \cdots r), \tag{1}$$

имеющих место между определенными r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$ нашей группы. Найдем общий вид соотношений, которыми связаны r произвольных независимых инфинитезимальных преобразований $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Если эти соотношения имеют вид

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_{s=1}^{r} c'_{iks} \cdot \mathfrak{X}_s f, \tag{2}$$

то система констант c'_{iks} является самой общей, представляющей структуру группы $X_1 f \cdots X_r f$. При этом речь идет лишь о вычислении констант c'_{iks}.

Поскольку $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ должны быть произвольными независимыми инфинитезимальными преобразованиями, то

$$\mathfrak{X}_k f = \sum_{j=1}^{r} h_{kj} \cdot X_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

где константы h_{kj} могут принимать всевозможные значения, при которых определитель

$$D = \sum \pm h_{11} \cdots h_{rr}$$

не обращается в нуль.

В результате вычислений получается:

$$(\mathfrak{X}_i \, \mathfrak{X}_k) = \sum_{j,\pi=1}^{r} h_{ij} \, h_{k\pi} (X_j \, X_\pi) = \sum_{j,\pi,s=1}^{r} h_{ij} \, h_{k\pi} \, c_{j\pi s} \cdot X_s f;$$

с другой стороны, из (2) следует:

$$(\mathfrak{X}_i \, \mathfrak{X}_k) = \sum_{\pi,s=1}^{r} h_{\pi s} \, c'_{ik\pi} \cdot X_s f.$$

Сравнивая эти два выражения для $(\mathfrak{X}_i \, \mathfrak{X}_k)$ и учитывая, что $X_1 f \cdots X_r f$ — независимые инфинитезимальные преобразования, мы получаем соотношения

$$\sum_{\pi=1}^{r} h_{\pi s} \, c'_{ik\pi} = \sum_{j,\pi=1}^{r} h_{ij} \, h_{k\pi} \, c_{j\pi s} \quad (s = 1 \cdots r). \tag{3}$$

При наложенных условиях эти уравнения можно разрешить относительно $c'_{ik\pi}$, то есть

$$c'_{ik\varrho} = \frac{1}{D}\sum_{s=1}^{r}\left\{\frac{\partial D}{\partial h_{\varrho s}}\sum_{j,\pi=1}^{r} h_{ij}\,h_{k\pi}\right\} c_{j\pi s} \quad (i,k,\varrho = 1\cdots r). \tag{4}$$

Тем самым, согласно вышеизложенному, найден самый общий вид всех систем констант, задающих структуру группы $X_1 f \cdots X_r f$. В то же время мы имеем по крайней мере теоретическую возможность решить, задает ли данная система констант $\bar{c}_{iks}$ структуру группы $X_1 f \cdots X_r f$; она обладает этим свойством, очевидно, тогда и только тогда, когда можно выбрать параметры h_{kj} в (4) такими, что $c'_{iks} = \bar{c}_{iks}$.

Если даны *две* r-параметрические группы, то мы можем сравнить их структуры. Очевидно, что рассуждения выше дают нам возможность решить, имеют ли эти группы одинаковые или разные структуры. Число переменных, встречающихся в обеих группах, можно при этом не учитывать.

Две r-параметрические группы, которые имеют одну и ту же структуру, мы назовем равносоставленными[1].

Если

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1\cdots r)$$

— независимые инфинитезимальные преобразования одной r-параметрической группы, а

$$Y_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \eta_{k\mu}(y_1 \cdots y_m)\frac{\partial f}{\partial y_\mu} \quad (k = 1\cdots r)$$

— независимые инфинитезимальные преобразования другой, и если, кроме того, имеют место соотношения

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\cdot X_s f,$$

то эти две группы тогда и только тогда являются равносоставленными, когда среди инфинитезимальных преобразований $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ второй

[1] В современной терминологии это условие означает, что соответствующие алгебры Ли изоморфны. — *Прим. ред.*

группы можно выбрать r таких независимых друг от друга $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$, что имеют место тождества

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f.$$

Если соотношения, выполняющиеся между $Y_1 f \cdots Y_r f$, имеют вид

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} \bar{c}_{iks} \cdot Y_s f,$$

то мы можем сказать: обе группы являются равносоставленными тогда и только тогда, когда параметры h_{kj} в уравнениях (4) можно выбрать такими, что каждое c'_{iks} будет равно соответствующему $\bar{c}_{iks}$.

Можно также сравнить структуры таких групп, которые имеют неодинаковое число параметров. Это будет возможно, если ввести общее понятие *изоморфизма*[2].

Мы называем *r-параметрическую группу* $X_1 f \cdots X_r f$:

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f,$$

изоморфной $(r-q)$-параметрической группе $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$, *если можно выбрать r инфинитезимальных преобразований*

$$\mathfrak{Y}_k f = h_{k1} \cdot Y_1 f + \cdots + h_{k,r-q} \cdot Y_{r-q} f$$
$$(k = 1 \cdots r)$$

такими, чтобы не все определители порядка $r-q$ матрицы

$$\begin{vmatrix} h_{11} & \cdot & h_{1,r-q} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r1} & \cdot & h_{r,r-q} \end{vmatrix}$$

обращались в нуль, и в то же время тождественно имели место соотношения[3, 4]

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f.$$

[2] В современной терминологии: «гомоморфизм», или, более точно, «сюръективный гомоморфизм», между соответствующими алгебрами Ли. — *Прим. ред.*

[3] Ср. часть III, стр. 701.

[4] Ссылка дана на оригинальное немецкое издание, часть 3. — *Прим. перев.*

Допустим, что изоморфизм в этом смысле имеет место, и что $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ уже выбраны указанным способом. Тогда если инфинитезимальному преобразованию $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ r-параметрической группы всегда сопоставляется инфинитезимальное преобразование

$$e_1 \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + e_r \cdot \mathfrak{Y}_r f$$

$(r-q)$-параметрической группы, какие бы значения ни принимали константы $e_1 \cdots e_r$, то имеет место следующее: если $\Upsilon_1 f$ — такое преобразование $(r-q)$-параметрической группы, которое сопоставляется преобразованию $\Xi_1 f$ другой группы, и если таким же образом $\Upsilon_2 f$ сопоставляется преобразованию $\Xi_2 f$, то преобразование $(\Xi_1 \Xi_2)$ всегда соответствует преобразованию $(\Upsilon_1 \Upsilon_2)$. Более кратко это можно выразить так: при заданном соответствии между инфинитезимальными преобразованиями обеих групп эти группы *связаны друг с другом изоморфизмом*. Очевидно, что эта изоморфная связь полностью задана, если известно, что $X_1 f \cdots X_r f$ соответствуют преобразованиям $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$.

Различают *голоэдрический* и мероэдрический *изоморфизмы*. *Голоэдрический* имеет место, если число q, встречающееся в определении изоморфизма, равно нулю, а *мероэдрический* — если q больше нуля. В зависимости от этого говорят, что две группы изоморфны друг другу голоэдрически или соответственно мероэдрически.

Очевидно, что свойство равносоставленности двух групп является частным случаем изоморфизма, а именно: две равносоставленные группы всегда голоэдрически изоморфны, и наоборот.

Например, следующие две группы:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\ x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1},\ x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y_1},\ y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1},\ y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

с четырьмя и тремя параметрами соответственно являются мероэдрически изоморфными. Мы получим мероэдрический изоморфизм одной из них на другую, если четырем инфинитезимальным преобразованиям одной группы:

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1},\ X_2 = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1},\ X_3 = x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1},\ X_4 = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

поставим в соответствие следующие четыре преобразования:

$$\mathfrak{Y}_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1},\ \mathfrak{Y}_2 f = y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1},\ \mathfrak{Y}_3 f = y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1},\ \mathfrak{Y}_4 f = \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

другой группы.

В теории подстановок также идет речь об изоморфных группах, но определение изоморфизма там дается иначе, чем здесь[5]. Позднее (ср. гл. 21, «Группа параметров») мы убедимся, что понятие изоморфизма, следующее из нашего определения, тем не менее полностью совпадает с тем, которое получается, если перенести определение из теории подстановок непосредственно на теорию конечных непрерывных групп.

Сначала выведем несколько простых следствий из нашего определения изоморфизма.

В предыдущей главе мы видели, что каждой r-параметрической группе $X_1 f \cdots X_r f$ соответствует некоторая линейная однородная группа, которую мы назвали присоединенной группой. Из соотношений между инфинитезимальными преобразованиями присоединенной группы (ср. гл. 16, стр. 305) непосредственно следует, что группа $X_1 f \cdots X_r f$ изоморфна своей присоединенной группе; голоэдрически изоморфными эти группы являются, однако, лишь тогда, когда группа $X_1 f \cdots X_r f$ не содержит выделенных инфинитезимальных преобразований, так как только в этом случае присоединенная группа является r-параметрической, в то время как во всех остальных случаях она содержит меньше, чем r параметров. Отсюда следует

Теорема 51. *Для каждой r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ имеется изоморфная линейная однородная группа, а именно соответствующая присоединенная группа; эта группа голоэдрически изоморфна группе $X_1 f \cdots X_r f$ лишь тогда, когда последняя не содержит выделенных инфинитезимальных преобразований.*

Мы не будем здесь останавливаться на вопросе, для всякой ли такой r-параметрической группы, содержащей выделенные инфинитезимальные преобразования, можно задать голоэдрически изоморфную линейную однородную группу. Но хотим все же показать на примерах, что во многих случаях это возможно, даже если заданная r-параметрическая группа содержит выделенные инфинитезимальные преобразования.

Пусть r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит в точности $r-m$ независимых выделенных инфинитезимальных преобразований, а $X_1 f \cdots X_r f$ выбраны такими, что $X_{m+1} f \cdots X_r f$ являются выделенными преобразованиями; тогда

[5] Камиль Жордан, Traite des substitutions, Париж, 1870 г.

между $X_1 f \cdots X_r f$ имеют место соотношения вида

$$(X_\mu X_\nu) = c_{\mu\nu 1} \cdot X_1 f + \cdots + c_{\mu\nu r} \cdot X_r f,$$
$$(X_\mu X_{m+k}) = (X_{m+k} X_{m+j}) = 0,$$
$$(\mu, \nu = 1 \cdots m;\ k, j = 1 \cdots r - m).$$

В соответствующей присоединенной группе $E_1 f \cdots E_r f$ имеется только m независимых инфинитезимальных преобразований $E_1 f \cdots E_m f$, в то время как $E_{m+1} f \cdots E_r f$ обращаются в нуль тождественно, поэтому $E_1 f \cdots E_m f$ связаны соотношениями

$$(E_\mu E_\nu) = c_{\mu\nu 1} \cdot E_1 f + \cdots + c_{\mu\nu m} \cdot E_m f.$$

Если, в частности, все $c_{\mu,\nu,m+1} \cdots c_{\mu\nu r}$ обращаются в нуль, то всегда можно задать r-параметрическую линейную однородную группу, которая будет голоэдрически изоморфной группе $X_1 f \cdots X_r f$. В этом случае преобразования $X_1 f \cdots X_m f$ сами по себе порождают m-параметрическую группу, которой группа $E_1 f \cdots E_m f$ голоэдрически изоморфна. Поэтому если положить

$$\mathsf{E}_{m+1} f = e_{r+1} \frac{\partial f}{\partial e_{r+1}}, \cdots \mathsf{E}_r f = e_{2r-m} \frac{\partial f}{\partial e_{2r-m}},$$

то r независимых инфинитезимальных преобразований

$$E_1 f \cdots E_m f, \mathsf{E}_{m+1} f \cdots \mathsf{E}_r f,$$

очевидно, порождают линейную однородную группу, голоэдрически изоморфную группе $X_1 f \cdots X_r f$.

Но и в таких случаях, когда не все $c_{\mu,\nu,m+1} \cdots c_{\mu\nu r}$ обращаются в нуль, часто можно легко задать голоэдрически изоморфную линейную однородную группу. Примером послужит трехпараметрическая группа $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$:

$$(X_1 X_2) = X_3 f, \quad (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0,$$

содержащая выделенные инфинитезимальные преобразования, а именно $X_3 f$; она голоэдрически изоморфна линейной однородной группе:

$$\mathsf{E}_1 f = \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \ \mathsf{E}_2 f = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \ \mathsf{E}_3 f = \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}.$$

Константы c_{iks} в уравнениях

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f \tag{1}$$

удовлетворяют, как мы видели в гл. 9, стр. 190, соотношениям

$$\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{r} \{c_{ik\nu}\, c_{\nu js} + c_{kj\nu}\, c_{\nu is} + c_{ji\nu}\, c_{\nu ks}\} = 0, \\ (i, k, j, s = 1 \cdots r). \end{cases} \tag{5}$$

С помощью этих соотношений нам удалось в гл. 16, стр. 303, доказать, что r инфинитезимальных преобразований

$$E_\mu f = \sum_{k,j=1}^{r} c_{j\mu k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \quad (\mu = 1 \cdots r) \tag{6}$$

группы, присоединенной к группе $X_1 f \cdots X_r f$, попарно находятся в соотношениях

$$(E_\mu E_\nu) = \sum_{s=1}^{r} c_{\mu\nu s} \cdot E_s f. \tag{7}$$

В этом доказательстве соотношений (7) мы не использовали ничего другого, кроме того обстоятельства, что c_{iks} удовлетворяют уравнениям (5), в частности, мы не воспользовались тем, что нам уже было известно о факте существования r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$, связанных соотношениями (1). Поэтому при помощи процитированных рассуждений доказано, что r инфинитезимальных преобразований (6) всегда находятся в соотношениях (7), если c_{iks} удовлетворяют уравнениям (5).

Следовательно, если нам известна система констант c_{iks}, удовлетворяющая соотношениям (5), то мы немедленно можем задать r линейных однородных инфинитезимальных преобразований $E_1 f \cdots E_r f$, а именно преобразования (6), находящиеся попарно в соотношениях

$$(E_i E_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot E_s f.$$

Само собой разумеется, полученные таким образом инфинитезимальные преобразования $E_1 f \cdots E_r f$ порождают группу с r или менее параметрами; группу с r параметрами они, очевидно, порождают только тогда, когда независимы друг от друга, то есть когда невозможно удовлетворить уравнениям

$$g_1 \cdot E_1 f + \cdots + g_r \cdot E_r f = 0$$

или эквивалентным им r^2 уравнениям

$$g_1 c_{j1k} + g_2 c_{j2k} + \cdots + g_r c_{jrk} = 0 \quad (j,k = 1 \cdots r)$$

при помощи r не обращающихся одновременно в нуль величин $g_1 \cdots g_r$.

Таким образом, имеет место

Теорема 52.[6] *Если константы c_{iks} $(i,k,s = 1 \cdots r)$ имеют такие значения, что все соотношения вида*

$$\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{r} \{c_{ik\nu}\, c_{\nu js} + c_{kj\nu}\, c_{\nu is} + c_{ji\nu}\, c_{\nu ks}\} = 0 \quad (i,k,j,s = 1 \cdots r) \end{cases} \tag{5}$$

выполняются, то r линейных однородных инфинитезимальных преобразований

$$E_\mu f = \sum_{k,j=1}^{r} c_{j\mu k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \quad (\mu = 1 \cdots r)$$

находятся попарно в соотношениях

$$(E_i E_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot E_s f \quad (i,k = 1 \cdots r)$$

и порождают поэтому линейную однородную группу. Если, в частности, c_{iks} таковы, что не все определители порядка r, строчки которых имеют вид:

$$|c_{j1k}\, c_{j2k} \cdots c_{jrk}| \quad (j,k = 1 \cdots r),$$

обращаются в нуль, то $E_1 f \cdots E_r f$ являются независимыми инфинитезимальными преобразованиями и порождают r-параметрическую группу, структура которой определяется системой c_{iks} и которая не содержит выделенных инфинитезимальных преобразований. Во всех остальных случаях группа, порожденная $E_1 f \cdots E_r f$, имеет меньше, чем r параметров.

§ 81

Результаты предыдущего параграфа приводят нас к предположению, что вообще любая система констант c_{iks}, удовлетворяющая соотношениям (5), представляет структуру некоторой r-параметрической группы. Это предположение соответствует истине, т. к. имеет место следующее

[6] Ли, Archiv for Math, og Nat., том 1, стр. 192, Христиания, 1876 г.

Утверждение 1. *Если константы* c_{iks} $(i, k, s = 1 \cdots r)$ *имеют такие значения, что выполняются соотношения*

$$\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{r} \{c_{ik\nu}c_{\nu js} + c_{kj\nu}c_{\nu is} + c_{ji\nu}c_{\nu ks}\} = 0 \quad (i, k, j, s = 1 \cdots r), \end{cases} \tag{5}$$

то в пространстве подходящей размерности всегда имеется r *независимых инфинитезимальных преобразований* $X_1 f \cdots X_r f$, *находящихся попарно в соотношениях*

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f$$

и потому порождающих r*-параметрическую группу со структурой* c_{iks}.

Чтобы не отвлекаться, мы пока отложим доказательство этого важного утверждения и приведем его в следующей части книги. До тех пор, разумеется, мы по возможности не будем использовать это утверждение.

Из утверждения 1 следует, что совокупность всех возможных структур r-параметрических групп представляется совокупностью всех систем c_{iks}, удовлетворяющих уравнениям (5). Если все такие системы констант c_{iks} известны, то вместе с тем известны и все структуры r-параметрических групп.

Но, как мы видели на стр. 322, вообще говоря, существует бесконечно много систем c_{iks}, представляющих одну и ту же структуру; если дана некоторая система c_{iks}, представляющая какую-то структуру, то при помощи уравнений (4) находятся все системы c'_{iks}, представляющих ту же структуру, где h_{jk} — произвольные параметры. Поэтому если известны все системы констант c_{iks}, удовлетворяющие уравнениям (5), то необходимо еще одно специальное исследование, чтобы установить, какие из этих систем представляют различные структуры. Чтобы провести это исследование, мы должны сначала более подробно рассмотреть уравнения (4).

Не будем пока принимать во внимание того, что c_{iks} связаны соотношениями; напротив, рассмотрим c_{iks}, а также c'_{iks} как независимые друг от друга переменные. Мы увидим, что при взятии за основу этой трактовки уравнения (4) будут представлять собой непрерывную группу преобразований в переменных c_{iks} и с параметрами h_{jk}.

Чтобы доказать заявленное свойство уравнений (4), просто выполним два преобразования (4) или, что то же самое, два преобразования

$$\sum_{\pi=1}^{r} h_{\pi s} c'_{ik\pi} = \sum_{j,\pi=1}^{r} h_{ij}\, h_{k\pi}\, c_{j\pi s} \qquad (i, k, s = 1 \cdots r) \tag{3}$$

последовательно.

Сначала перейдем при помощи преобразования (3) от c_{iks} к c'_{iks}, а затем — в силу преобразования

$$\sum_{\pi=1}^{r} h'_{\pi s}\, c''_{ik\pi} = \sum_{j,\pi=1}^{r} h'_{ij}\, h'_{k\pi}\, c'_{j\pi s} \tag{3'}$$

— от c'_{iks} к c''_{iks}.

Таким образом, мы имеем новое преобразование, уравнения которого получаются, если исключить c'_{iks} из (3) и (3'). Требуется доказать, что это новое преобразование имеет вид

$$\sum_{\pi=1}^{r} h''_{\pi s}\, c''_{ik\pi} = \sum_{j,\pi,s=1}^{r} h''_{ij}\, h''_{k\pi}\, c'_{j\pi s}, \tag{3''}$$

где h'' — функции только от h и h'.

Умножая (3') на $h_{s\sigma}$ и суммируя по s, мы получаем

$$\sum_{\pi,s=1}^{r} h'_{\pi s}\, h_{s\sigma}\, c''_{ik\pi} = \sum_{j,\pi,s=1}^{r} h'_{ij}\, h'_{k\pi}\, h_{s\sigma}\, c'_{j\pi s}$$

или вследствие (3)

$$\sum_{\pi,s=1}^{r} h'_{\pi s}\, h_{s\sigma}\, c''_{ik\pi} = \sum_{j,\pi,\tau,\varrho=1}^{r} h'_{ij}\, h'_{k\pi}\, h_{j\tau}\, h_{\pi\varrho}\, c_{\tau\rho\sigma}.$$

Это и есть вышеупомянутое новое преобразование; оно превращается в (3''), если положить

$$h''_{\pi\sigma} = \sum_{s=1}^{r} h'_{\pi s}\, h_{s\sigma}.$$

Тем самым доказано, что преобразования (4) действительно образуют группу.

Теперь мы утверждаем, что преобразования этой группы оставляют систему уравнений (5) инвариантной.

Пусть c_{iks} — система констант, удовлетворяющая соотношениям (5) и представляющая согласно утверждению 1 структуру некоторой r-параметрической группы. Тогда, как мы знаем, система констант c'_{iks}, задаваемая уравнениями (4), также представляет структуру, а именно ту же самую, что и система констант c_{iks}; следовательно, и c'_{iks} удовлетворяют соотношениям вида (5). Преобразования (4) переводят, таким образом, любую

систему значений c_{iks}, удовлетворяющую системе (5), в систему значений c'_{iks} с тем же свойством, то есть оставляют систему уравнений (5) инвариантной, что мы и утверждали.

Интерпретируем теперь r^3 переменных c_{iks} как координаты точек в пространстве размерности r^3.

В этом пространстве выделяют некоторое многообразие M, остающееся инвариантным при преобразованиях группы (4). Каждая точка пространства M — можно так сказать, — представляет структуру r-параметрической группы, и наоборот, любая возможная структура r-параметрических групп представляется некоторыми точками многообразия M. Две различные точки из M представляют одну и ту же структуру, если в группе (4) имеется преобразование, переводящее одну точку в другую.

Следовательно, если P — какая-либо точка из M, то множество всех положений, которые занимает P при преобразованиях группы (4), совпадает с множеством всех точек, представляющих ту же структуру, что и P. Как мы уже знаем (гл. 14, стр. 250), это множество точек образует многообразие, инвариантное относительно группы (4), а именно так называемое наименьшее инвариантное многообразие.

Отсюда следует, что последовательность действий, необходимых для нахождения всех различных структур r-параметрической группы, такова: найдем все лежащие на M наименьшие многообразия, остающиеся инвариантными относительно группы (4); на *каждом* таком многообразии выберем по одной точке c_{iks}; тогда системы значений c_{iks}, принадлежащие выбранным точкам, представляют все различные структуры r-параметрических групп.

Поскольку конечные уравнения группы (4) заданы, то нахождение наименьших инвариантных многообразий надо рассматривать как выполнимую операцию; оно требует лишь разрешения алгебраических уравнений.

Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 53. *Описание всех существенно различных структур r-параметрических групп требует лишь алгебраических операций.*

§ 82

Пусть теперь $X_1 f \cdots X_r f$ — r-параметрическая группа со структурой

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f.$$

Далее, пусть $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ — $(r-q)$-параметрическая группа, изоморфная группе G_r, причем мероэдрически изоморфная, так что q больше нуля. Эту вторую группу обозначим кратко через G_{r-q}.

Пусть эти две группы связаны друг с другом изоморфизмом в смысле, изложенном на стр. 323 и 324; то есть пусть в G_{r-q} выбраны r инфинитезимальных преобразований $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$, находящихся в соотношениях

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f,$$

причем $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ друг от друга независимы, тогда как $\mathfrak{Y}_{r-q+1} f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ заданы тождествами:

$$\mathfrak{Y}_{r-q+k} f \equiv d_{k1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + d_{k,r-q} \cdot \mathfrak{Y}_{r-q} f \quad (k = 1 \cdots q). \tag{8}$$

При наложенных условиях, очевидно,

$$\left(\mathfrak{Y}_i f, \mathfrak{Y}_{r-q+k} f - \sum_{\mu=1}^{r-q} d_{k\mu} \mathfrak{Y}_\mu f \right) \equiv 0 \quad (j = 1 \cdots r,\ k = 1 \cdots q)$$

или

$$\sum_{s=1}^{r} \left\{ c_{j,r-q+k,s} - \sum_{\mu=1}^{r-q} d_{k\mu} c_{j\mu s} \right\} \mathfrak{Y}_s f \equiv 0.$$

Если мы заменим здесь $\mathfrak{Y}_{r-q+1} f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ их значениями (8), то получим линейные соотношения между $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$; такие соотношения могут, очевидно, иметь место лишь тогда, когда их коэффициенты для каждого отдельного $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ равны нулю.

Из обращения в нуль этих коэффициентов следует, что rq выражений

$$\left(X_j f, X_{r-q+k} f - \sum_{\mu=1}^{r-q} d_{k\mu} X_\mu f \right) = \sum_{s=1}^{r} \left\{ c_{j,r-q+k,s} - \sum_{\mu=1}^{r-q} d_{k\mu} c_{j\mu s} \right\} X_s f$$

могут быть линейно получены только из q инфинитезимальных преобразований

$$X_{r-q+k} f - \sum_{\mu=1}^{r-q} d_{k\mu} \cdot X_\mu f \quad (k = 1 \cdots q). \tag{9}$$

Иначе говоря, q независимых инфинитезимальных преобразований (9) порождают q-параметрическую *инвариантную* подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Теорема 54. *Если $(r-q)$-параметрическая группа $Y_1 f \cdots Y_r f$ изоморфна r-параметрической: $X_1 f \cdots X_r f$, и если $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ — такие инфинитезимальные преобразования этой $(r-q)$-параметрической группы, что, во-первых, $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ независимы друг от друга, в то время как $\mathfrak{Y}_{r-q+1} f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ можно получить линейно из $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$:*

$$\mathfrak{Y}_{r-q+k} f \equiv d_{k1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + d_{k,r-q} \cdot \mathfrak{Y}_{r-q} f \quad (k = 1 \cdots q),$$

и что, во-вторых, одновременно с соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f$$

имеют место аналогичные соотношения

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f,$$

то q инфинитезимальных преобразований

$$X_{r-q+k} f - d_{k1} \cdot X_1 f - \cdots - d_{k,r-q} \cdot X_{r-q} f \quad (k = 1 \cdots q)$$

порождают q-параметрическую инвариантную подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Как мы знаем, группы G_r: $X_1 f \cdots X_r f$ и G_{r-q}: $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ связаны друг с другом изоморфизмом, если каждому инфинитезимальному преобразованию вида $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ можно поставить в соответствие инфинитезимальное преобразование

$$\sum_{k=1}^{r} e_k \cdot \mathfrak{Y}_k f = \sum_{k=1}^{r-q} \left\{ e_k + \sum_{j=1}^{q} e_{r-q+j}\, d_{jk} \right\} \mathfrak{Y}_k f.$$

При таком соответствии инфинитезимальные преобразования группы G_r, принадлежащие q-параметрической группе (9), являются единственными, которым соответствуют инфинитезимальные преобразования группы G_{r-q}, обращающиеся тождественно в нуль. Следовательно, всякой однопараметрической подгруппе группы G_r в общем случае соответствует некоторая совершенно определенная однопараметрическая подгруппа группы G_{r-q}, только однопараметрическим подгруппам группы (9) не соответствуют никакие однопараметрические подгруппы группы G_{r-q}, говоря точнее,

соответствующие однопараметрические группы сводятся к тождественному преобразованию. Напротив, одной и той же однопараметрической подгруппе $h_1\mathfrak{Y}_1 f + \cdots + h_{r-q}\mathfrak{Y}_{r-q} f$ группы G_{r-q} соответствует в целом ∞^q различных однопараметрических подгрупп группы G_r, и все они имеют вид

$$\sum_{k=1}^{r-q} h_k \cdot X_k f + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \left\{ X_{r-q+j} f - \sum_{\mu=1}^{r-q} d_{j\mu} \cdot X_\mu f \right\},$$

где $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ — произвольные константы.

И вообще, между подгруппами групп G_r и G_{r-q} имеет место определенное соответствие.

Если какие-либо m независимых друг от друга инфинитезимальных преобразований

$$l_{\mu 1} \cdot X_1 f + \cdots + l_{\mu r} \cdot X_r f \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

группы G_r порождают m-параметрическую подгруппу, то m инфинитезимальных преобразований

$$\sum_{k=1}^{r} l_{\mu k} \cdot \mathfrak{Y}_k f = \sum_{k=1}^{r-q} \left\{ l_{\mu k} + \sum_{j=1}^{q} l_{\mu, r-q+j}\, d_{j\mu} \right\} \mathfrak{Y}_k f \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

очевидно, порождают подгруппу группы G_{r-q}. Эта подгруппа будет самое большее m-параметрической, в частности нульпараметрической, то есть состоять только из тождественного преобразования, если эта m-параметрическая подгруппа группы G_r содержится в q-параметрической группе (9), причем, очевидно, лишь в этом случае.

Если, наоборот, какие-либо m' независимых инфинитезимальных преобразований

$$l_{\mu 1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + l_{\mu, r-q} \cdot \mathfrak{Y}_{r-q} f \quad (\mu = 1 \cdots m')$$

порождают m'-параметрическую подгруппу группы G_{r-q}: $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$, то m' инфинитезимальных преобразований

$$l_{\mu 1} \cdot X_1 f + \cdots + l_{\mu, r-q} \cdot X_{r-q} f \quad (\mu = 1 \cdots m')$$

вместе с q преобразованиями

$$X_{r-q+k} f - d_{k1} \cdot X_1 f - \cdots - d_{k, r-q} \cdot X_{r-q} f \quad (k = 1 \cdots q)$$

всегда порождают $(m' + q)$-параметрическую подгруппу группы G_r.

Отсюда мы видим, что каждой подгруппе группы G_r соответствует совершенно определенная подгруппа группы G_{r-q}, состоящая при определенных условиях лишь из тождественного преобразования, а также что каждой подгруппе группы G_{r-q} соответствует по меньшей мере одна подгруппа группы G_r. Если нам известны все подгруппы группы G_r, и если мы зададим все соответствующие им подгруппы группы G_{r-q}, то получим все подгруппы группы G_{r-q}. Таким образом, справедливо

Утверждение 2. *Если r-параметрическая группа, все подгруппы которой известны, связана изоморфизмом с $(r-q)$-параметрической группой, то можно непосредственно задать также все подгруппы $(r-q)$-параметрической группы.*

Пусть $X_1 f \cdots X_r f$, или кратко G_r, — это r-параметрическая группа со структурой

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f.$$

Мы хотим выяснить, какие различные структуры может иметь группа, мероэдрически изоморфная группе G_r.

До сих пор нам известно лишь следующее. Если G_r можно связать с $(r-q)$-параметрической группой изоморфизмом, то в группе G_r имеется совершенно определенная q-параметрическая инвариантная подгруппа, которой в $(r-q)$-параметрической группе соответствует тождественное преобразование. Мы утверждаем, что можно следующим образом обратить это утверждение: если G_r содержит q-параметрическую инвариантную подгруппу, то всегда найдется $(r-q)$-параметрическая группа G_{r-q}, изоморфная группе G_r и связанная с последней изоморфизмом так, что q-параметрической инвариантной группе группы G_r в G_{r-q} соответствует тождественное преобразование.

Ради удобства представим себе, что r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ выбраны так, что $X_{r-q+1} f \cdots X_r f$ порождают некоторую инвариантную подгруппу группы G_r. Тогда наше утверждение, очевидно, сводится к тому, что в каких-либо переменных $y_1, y_2 \cdots$ имеется r инфинитезимальных преобразований $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$, удовлетворяющих следующим двум условиям: во-первых, $\mathfrak{Y}_{r-q+1} f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ должны обращаться в нуль тождественно, тогда как $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ друг от друга независимы, и во-вторых, должны тождественно выполняться соотношения

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = c_{ik1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + c_{ikr} \cdot \mathfrak{Y}_r f \quad (i, k = 1 \cdots r). \tag{10}$$

Поскольку $X_{r-q+1}f \cdots X_r f$ порождают подгруппу, инвариантную в G_r, то все $c_{ik1}, c_{ik2} \cdots c_{ik,r-q}$, в которых хотя бы один из двух индексов i и k больше, чем $r-q$, равны нулю. Если мы теперь положим все инфинитезимальные преобразования $\mathfrak{Y}_{r-q+1}f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ в соотношениях (10) равными нулю, то все соотношения, в которых хотя бы один из индексов i и k больше $r-q$, тождественно выполняются, и у нас остаются только следующие соотношения между $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$:

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = c_{ik1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + c_{ik,r-q} \cdot \mathfrak{Y}_{r-q} f \quad (i,k = 1 \cdots r-q). \tag{11}$$

Поэтому требуется лишь доказать, что существует $r-q$ независимых инфинитезимальных преобразований $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$, связанных соотношениями (11), или, что то же самое, что имеется $(r-q)$-параметрическая группа, структура которой представлена системой констант c_{iks} $(i,k,s = 1 \cdots r-q)$.

Для доказательства этого мы исходим из того, что для $i,k,j = 1 \cdots r-q$ имеет место тождество Якоби:

$$((X_i X_k) X_j) + ((X_k X_j) X_i) + ((X_j X_i) X_k) = 0,$$

которое можно также записать в виде

$$\sum_{\mu=1}^{r-q} \{c_{ik\mu}(X_\mu X_j) + c_{kj\mu}(X_\mu X_i) + c_{ji\mu}(X_\mu X_k)\} +$$

$$+ \sum_{\pi=1}^{q} (X_{r-q+\pi} f, c_{ik,r-q+\pi} X_j f + c_{kj,r-q+\pi} X_i f + c_{ji,r-q+\pi} X_k f) = 0.$$

Разлагая полностью левую часть и учитывая, что коэффициенты при $X_1 f \cdots X_{r-q} f$ должны обращаться в нуль, получаем следующие соотношения между константами c_{iks}, входящими в (11):

$$\sum_{\mu=1}^{r-q} \{c_{ik\mu}\, c_{\mu j\nu} + c_{kj\mu}\, c_{\mu i\nu} + c_{ji\mu}\, c_{\mu k\nu}\} = 0$$

$$(i,k,j,\nu = 1 \cdots r-q).$$

Они показывают, что c_{iks} $(i,k,s = 1 \cdots r-q)$ задают структуру в ранее определенном смысле. Как замечено на стр. 329, заведомо имеется $(r-q)$-параметрическая группа, структура которой задается при помощи c_{iks} $(i,k,s = 1 \cdots r-q)$.

Тем самым выдвинутое выше утверждение доказано. Если добавить к этому то, что мы уже знали раньше, то мы получим[7]

Утверждение 3. *Если известны все инвариантные подгруппы r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$:*

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f,$$

то можно указать все структуры, которые может иметь группа, мероэдрически изоморфная группе $X_1 f \cdots X_r f$.

Чтобы действительно выписать все соответствующие структуры, необходимо действовать следующим образом

Пусть $q > 0$ независимых инфинитезимальных преобразований

$$g_{\mu 1} \cdot X_1 f + \cdots + g_{\mu r} \cdot X_r f \quad (\mu = 1 \cdots q)$$

порождают q-параметрическую инвариантную подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$, или кратко G_r. Положим

$$g_{\mu 1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + g_{\mu r} \cdot \mathfrak{Y}_r f = 0 \quad (\mu = 1 \cdots q),$$

разрешим эту систему относительно q из r выражений $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ и затем исключим их из соотношений

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f.$$

Тогда между оставшимися $r-q$ выражениями из $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ получатся соотношения, определяющие структуру $(r-q)$-параметрической группы, изоморфной группе G_r. Если таким образом поступить с каждой отдельной инвариантной подгруппой группы G_r, то мы получим все искомые структуры.

Поскольку всякая группа является инвариантной подгруппой самой себя, то получается, что для любой r-параметрической группы G_r существует мероэдрически изоморфная группа, образуемая тождественным преобразованием. Если группа G_r — простая (ср. гл. 15, стр. 293), то тождественное преобразование, очевидно, является единственной мероэдрически изоморфной ей группой.

[7] Далее мы покажем, что процитированное утверждение 1, стр. 329, отнюдь не является необходимым для рассуждений, данных в этом месте. Ср. Ли, Archiv for Math. og Nat., том 10, стр. 357, Христиания, 1885 г.

§ 83

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные случаи, в которых встречаются группы, изоморфные заданной группе.

Пусть r-параметрическая группа

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

пространства $x_1 \cdots x_n$ импримитивна, и пусть

$$u_1(x_1 \cdots x_n) = \text{const}, \cdots \; u_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = \text{const}$$

— инвариантное относительно этой группы разбиение пространства на ∞^{n-q} q-мерных многообразий.

Согласно гл. 13, стр. 246, $n - q$ независимых друг от друга функций $u_1 \cdots u_{n-q}$ удовлетворяют соотношениям вида

$$X_k u_\nu = \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-q}) \quad (k = 1 \cdots r, \; \nu = 1 \cdots n - q),$$

поэтому r выражений

$$\sum_{\nu=1}^{n-q} X_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-q} \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-q}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \overline{X}_k f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

представляют столько же инфинитезимальных преобразований в переменных $u_1 \cdots u_{n-q}$. Мы утверждаем, что $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ порождают группу, изоморфную группе $X_1 f \cdots X_r f$. Для доказательства образуем выражения

$$\begin{aligned} \overline{X}_i\big(\overline{X}_k(f)\big) - \overline{X}_k(\overline{X}_i(f)) &= \sum_{\nu=1}^{n-q} (\overline{X}_i \omega_{k\nu} - \overline{X}_k \omega_{i\nu}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu}, \\ &= \sum_{\nu=1}^{n-q} (X_i \omega_{k\nu} - X_k \omega_{i\nu}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu}. \end{aligned}$$

Но тогда

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot X_s f$$

или, если подставить u_ν вместо f,

$$X_i\,\omega_{k\nu} - X_k\,\omega_{i\nu} = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\cdot X_s u_\nu = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\,\omega_{s\nu};$$

таким образом, подставляя найденное значение $X_i\omega_{k\nu} - X_k\omega_{i\nu}$, получаем:

$$\overline{X}_i\big(\overline{X}_k(f)\big) - \overline{X}_k\big(\overline{X}_i(f)\big) = \sum_{s=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{n-q} c_{iks}\omega_{s\nu}\frac{\partial f}{\partial u_\nu},$$

или, что то же самое:

$$(\overline{X}_i\overline{X}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\cdot\overline{X}_s f,$$

что и требовалось доказать.

Группа $\overline{X}_1 f\cdots\overline{X}_r f$ имеет очень простое описание в более общих терминах.

Из определения импримитивности следует, что множество из ∞^{n-q} многообразий $u_1(x_1\cdots x_n) = \text{const}, \cdots u_{n-q}(x_1\cdots x_n) = \text{const}$ остается инвариантным относительно группы $X_1 f\cdots X_r f$, так что при любом преобразовании этой группы ∞^{n-q} многообразий могут переставляться между собой. Следовательно, каждому преобразованию группы $X_1 f\cdots X_r f$ соответствует некоторая перестановка наших ∞^{n-q} многообразий или, что то же самое, преобразование от $n-q$ переменных $u_1\cdots u_{n-q}$. Ясно, что совокупность всех полученных преобразований в переменных u образует группу, а именно группу, порожденную $\overline{X}_1 f\cdots\overline{X}_r f$.

Разумеется, группа $\overline{X}_1 f\cdots\overline{X}_r f$ не обязательно должна быть голоэдрически изоморфной исходной группе, но она, очевидно, изоморфна ей мероэдрически только тогда, когда среди инфинитезимальных преобразований $e_1\overline{X}_1 f + \cdots + e_r\overline{X}_r f$ имеется хотя бы одно, обращающееся в нуль тождественно, а $e_1\cdots e_r$ при этом не все равны нулю, т. е. когда хотя бы одно из инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ оставляет инвариантным каждое отдельное из наших ∞^{n-q} многообразий. Итак, мы имеем

Утверждение 4. *Если r-параметрическая группа $X_1 f\cdots X_r f$ пространства $x_1\cdots x_n$ импримитивна, и если уравнения*

$$u_1(x_1\cdots x_n) = \text{const}, \cdots u_{n-q}(x_1\cdots x_n) = \text{const}$$

представляют инвариантное относительно этой группы разбиение пространства на ∞^{n-q} q-мерных многообразий, то инфинитезимальные преобразования

$$\sum_{\nu=1}^{n-q} X_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-q} \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-q}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \overline{X}_k f \quad (k = 1 \cdots r)$$

порождают в переменных $u_1 \cdots u_{n-q}$ группу, изоморфную группе $X_1 f \cdots X_r f$, показывающую, каким образом переставляются ∞^{n-q} многообразий при преобразованиях группы $X_1 f \cdots X_r f$. Если среди инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ имеется в точности $r - \varrho$ независимых, оставляющих каждое отдельное из ∞^{n-q} многообразий инвариантным, то группа $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ всего лишь ϱ-параметрическая.

Используя теорему 54, стр. 333, мы также получаем

Утверждение 5. *Если группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства импримитивна, и если*

$$u_1(x_1 \cdots x_n) = \text{const}, \ \cdots \ u_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = \text{const}$$

является инвариантным относительно этой группы разбиением пространства на ∞^{n-q} q-мерных многообразий, то совокупность всех инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, оставляющих каждое отдельное из этих многообразий инвариантным, порождает инвариантную подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Рассмотрим теперь произвольную r-параметрическую группу $X_1 f \cdots X_r f$, оставляющую некоторое многообразие пространства $x_1 \cdots x_n$ инвариантным.

Согласно гл. 14, стр. 258, точки этого многообразия, в свою очередь, преобразуются группой, инфинитезимальные преобразования которой можно немедленно выписать, если у нас есть уравнения этого многообразия в разрешенном виде. А именно: если уравнения многообразия выглядят следующим образом:

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n), \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1} \cdots x_n),$$

и если $x_{n-m+1} \cdots x_n$ выбираются как координаты для точек этого многообразия, то инфинитезимальные преобразования рассматриваемой группы имеют вид (ср. гл. 14, стр. 259)

$$\overline{X}_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{k,n-m+\mu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-m}, \, x_{n-m+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \quad (k = 1 \cdots r).$$

При этом, как мы тогда уже доказали, имеют место соотношения

$$(\overline{X}_i\overline{X}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \cdot \overline{X}_s f.$$

Отсюда мы видим, что группа $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ изоморфна группе $X_1 f \cdots X_r f$; в частности, она мероэдрически изоморфна ей, если среди инфинитезимальных преобразований

$$e_1 \cdot \overline{X}_1 f + \cdots + e_r \cdot \overline{X}_r f$$

имеется хотя бы одно, обращающееся в нуль тождественно, т. е. если хотя бы одно из инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ оставляет каждую отдельную точку многообразия на месте.

Итак, мы можем дополнить теорему 40 в гл. 14, стр. 258, следующим образом.

Утверждение 6. *Если r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ в переменных $x_1 \cdots x_n$ оставляет многообразие*

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n), \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1} \cdots x_n)$$

инвариантным, то укороченные инфинитезимальные преобразования

$$\overline{X}_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{k,n-m+\mu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-m},\, x_{n-m+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \quad (k = 1 \cdots r)$$

в переменных $x_{n-m+1} \cdots x_n$ порождают группу, изоморфную этой r-параметрической, показывающую, каким образом точки многообразия переставляются между собой преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$. Если среди инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ имеется в точности $r - \varrho$ независимых, оставляющих каждую отдельную точку многообразия инвариантной, то группа $X_1 f \cdots X_r f$ является всего лишь ϱ-параметрической.

Кроме того, конечно, справедливо

Утверждение 7. *Если r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_n$ оставляет многообразие инвариантным, то совокупность всех инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, оставляющих каждую отдельную точку этого многообразия неподвижной, образует инвариантную подгруппу этой r-параметрической группы.*

Пусть

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— r-параметрическая *интранзитивная* группа пространства R_n, причем такая, которая содержит только *конечное* число инвариантных подгрупп.

Полная система, задаваемая уравнениями

$$X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0,$$

является при этих предположениях q-параметрической, где $q < n$, и имеет $n - q$ независимых решений. Поэтому мы можем считать, что переменные $x_1 \cdots x_n$ с самого начала выбраны так, чтобы $x_{q+1} \cdots x_n$ были решениями полной системы; если мы так сделаем, то все $\xi_{k,q+1} \cdots \xi_{kr}$ при подстановке $\xi_{k,q+j} = X_k x_{q+j}$ обратятся в нуль.

Тогда очевидно, что каждое из ∞^{n-q} q-мерных многообразий

$$x_{q+1} = a_{q+1}, \cdots x_n = a_n$$

остается инвариантным относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$; но зато его точки, согласно гл. 14, стр. 258, переставляются между собой посредством некоторой группы. Выберем $x_1 \cdots x_q$ в качестве координат для точек многообразия, тогда инфинитезимальные преобразования этой группы будут такими:

$$\overline{X}_k f = \sum_{i=1}^{q} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_q, a_{q+1} \cdots a_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Является эта группа r-параметрической или нет, остается пока неизвестным, во всяком случае она изоморфна группе $X_1 f \cdots X_r f$.

Если группа $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ является ϱ-параметрической ($\varrho \leqslant r$), то группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит $(r - \varrho)$-параметрическую инвариантную подгруппу, оставляющую каждую отдельную точку многообразия $x_{q+1} = a_{q+1}, \cdots x_n = a_n$ неподвижной (ср. утв. 6 и 7). Эта инвариантная подгруппа не может изменяться в зависимости от значений $a_{q+1} \cdots a_n$, иначе группа $X_1 f \cdots X_r f$ должна была бы содержать непрерывное семейство инвариантных подгрупп, что противоречило бы нашему предположению. Следовательно, в группе $X_1 f \cdots X_r f$ существует $(r - \varrho)$-параметрическая инвариантная подгруппа, оставляющая все точки каждого из ∞^{n-q} многообразий

$$x_{q+1} = a_{q+1}, \cdots x_n = a_n,$$

а стало быть, и вообще все точки пространства $x_1 \cdots x_n$ неподвижными. Но тождественное преобразование — единственное, оставляющее все точки пространства $x_1 \cdots x_n$ на месте, то есть $r - \varrho = 0$ и $\varrho = r$; это значит, что группа $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ голоэдрически изоморфна группе $X_1 f \cdots X_r f$.

Итак, верно следующее

Утверждение 8. *Если $X_1 f \cdots X_r f$ — независимые инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы с абсолютными инвариантами $\Omega_1(x_1 \ldots x_n), \cdots \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n)$, и если в этой группе имеется лишь дискретное число инвариантных подгрупп, то точки любого инвариантного множества $\Omega_1 = a_1, \cdots \Omega_{n-q} = a_{n-q}$ группы $X_1 f \cdots X_r f$ преобразуются некоторой r-параметрической голоэдрически изоморфной ей группой.*

Глава 18

Конечные группы, преобразования которых образуют дискретные непрерывные семейства

До сих пор мы имели дело только с конечными непрерывными группами преобразований, т. е. с такими, которые представляются при помощи системы уравнений вида

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n).$$

В этой главе будут кратко рассмотрены и такие конечные группы, которые задаются не одной такой системой, а несколькими системами данного вида; это такие группы, о которых мы уже упоминали во введении, стр. 7[1].

Итак, допустим, что нам дан ряд систем уравнений вида

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1^{(k)} \cdots a_{r_k}^{(k)}) \quad (i = 1 \cdots n), \quad (k = 1, 2 \cdots), \qquad (1)$$

каждая из которых содержит конечное число r_k произвольных параметров $a_1^{(k)} \cdots a_{r_k}^{(k)}$, и предположим, что совокупность всех преобразований, представленных этими системами уравнений, образует группу.

Поскольку каждая из систем уравнений (1) представляет непрерывное семейство преобразований, то наша группа состоит из нескольких дискретных непрерывных семейств[2]. Ясно, что любое непрерывное семейство преобразований нашей группы должно либо совпадать с одним из семейств (1), либо содержаться в одном из этих семейств. Разумеется, мы предполагаем, что ни одно из семейств (1) не входит ни в одно из остальных.

Мы намерены развить основы общей теории только что определенного вида групп, но ради простоты введем некоторые ограничения, не являющиеся, впрочем, существенными.

---

[1] Ли, Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania (Слушания Научного общества Христиании), № 12, стр. 1, 1883 г.

[2] Речь идет о группах, состоящих из нескольких связных компонент. — *Прим. ред.*

Во-первых, предположим, что преобразования группы (1) упорядочиваются в пары взаимно обратных. Тогда если преобразования отдельного семейства

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1^{(k)} \cdots a_{r_k}^{(k)}) \quad (i = 1 \cdots n)$$

не упорядочиваются в пары взаимно обратных, то совокупность соответствующих обратных преобразований должна образовывать семейство, которое принадлежит группе, то есть содержится среди семейств (1).

Во-вторых, предположим, что число семейств (1) конечно и равно, скажем, m. В том же случае, когда полученные нами утверждения останутся справедливыми и для бесконечного числа семейств (1), мы сделаем об этом специальное упоминание.

§ 84

К тем двум условиям, что мы наложили на группу (1) в начале данной главы, добавим временно еще третье, что все семейства этой группы должны содержать одинаковое число существенных параметров, например r. В следующем параграфе мы покажем, что это третье условие следует из двух первых и потому является излишним.

Пусть

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

— одно из m семейств ∞^r преобразований, из которых состоит наша группа, а k — одно из чисел $1 \cdots m$.

В результате разрешения только что выписанных уравнений мы получим семейство преобразований

$$x_i = F_i^{(k)}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

также принадлежащее этой группе при наложенных условиях.

Поэтому если мы выполним друг за другом два преобразования

$$\begin{aligned} x_i &= F_i^{(k)}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r), \\ x_i'' &= f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1 + h_1, \cdots a_r + h_r) \quad (i = 1 \cdots n), \end{aligned}$$

то получим опять же преобразование нашей группы, а именно следующее:

$$x_i'' = f_i^{(k)}(F_1^{(k)}(x', a) \cdots F_n^{(k)}(x', a), a_1 + h_1, \cdots a_r + h_r) \quad (i = 1 \cdots n). \quad (2)$$

Разложим здесь правые части по степеням $h_1 \cdots h_r$ и найдем

$$x_i'' = f_i^{(k)}\left(F^{(k)}(x', a), a\right) + \sum_{j=1}^{r} h_j \left[\frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j}\right]_{x=F^{(k)}(x', a)} + \cdots,$$

где все отброшенные члены по $h_1 \cdots h_r$ — порядка 2 и выше. Если, однако, принять во внимание, что преобразования

$$x_i = F_i^{(k)}(x', a), \quad x_i' = f_i^{(k)}(x, a) \quad (i = 1 \cdots n)$$

являются обратными друг другу, и для краткости положить

$$\left[\frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j}\right]_{x=F^{(k)}(x', a)} = \eta_{ji}^{(k)}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r), \tag{3}$$

то мы увидим, что только что найденное выше преобразование имеет следующий вид:

$$x_i'' = x_i' + \sum_{j=1}^{r} h_j \cdot \eta_{ji}^{(k)}(x', a) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n). \tag{4}$$

Легко видеть, что не существует не зависящих от $x_1' \cdots x_n'$ функций $\chi_1(a) \cdots \chi_r(a)$, которые тождественно удовлетворяли бы n уравнениям

$$\sum_{j=1}^{r} \chi_j(a_1 \cdots a_r) \cdot \eta_{ji}^{(k)}(x', a) = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

не обращаясь одновременно в нуль. Если же в этих уравнениях произвести подстановку $x_\nu' = f_\nu^{(k)}(x, a)$, то получатся уравнения

$$\sum_{j=1}^{r} \chi_j(a) \frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j} = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

которые также должны тождественно выполняться; но согласно утв. 1, гл. 1, стр. 13, это невозможно, так как параметры $a_1 \cdots a_r$ в уравнениях преобразований $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$ являются существенными.

Мы заключаем, что r инфинитезимальных преобразований

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_{ji}^{(k)}(x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial x'_i} \quad (j = 1 \cdots r) \tag{5}$$

всегда независимы друг от друга, если $a_1 \cdots a_r$ — система значений общего положения.

Понимая под $a_1^0 \cdots a_r^0$ систему значений общего положения и полагая

$$\eta_{ji}^{(1)}(x', a^0) = \xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n)$$

(число k при этом получает особое значение 1), мы покажем, что все инфинитезимальные преобразования (5) можно получить линейно из r независимых друг от друга инфинитезимальных преобразований

$$X'_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) \frac{\partial f}{\partial x'_i} \quad (j = 1 \cdots r),$$

каким бы из чисел $1, 2 \cdots m$ ни было k и какие бы значения ни принимали $a_1 \cdots a_r$.

Доказательство этого очень похоже на рассуждения в главе 4, стр. 84.

Выполним два преобразования нашей группы последовательно, а именно: сначала преобразование

$$x''_i = x'_i + \sum_{j=1}^{r} h_j \cdot \xi_{ji}(x') + \cdots \quad (i = 1 \cdots n), \tag{6}$$

которое получается из преобразования (4), если положить $k = 1$ и $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$, а затем — преобразование

$$x'''_i = x''_i + \sum_{j=1}^{r} \varrho_j \cdot \eta_{ij}^{(k)}(x'', a) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

также имеющее вид (4). Таким образом, мы получим следующее преобразование, относящееся к нашей группе:

$$x'''_i = x'_i + \sum_{j=1}^{r} h_j \cdot \xi_{ji}(x') + \sum_{j=1}^{r} \varrho_j \cdot \eta_{ij}^{(k)}(x', a) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

где опущенные члены имеют порядок 2 и выше по $2r$ величинам $h_1 \dots h_r, \varrho_1 \cdots \varrho_r$.

Помимо a, в последнее преобразование входит $2r$ произвольных параметров $h_1 \dots h_r, \varrho_1 \cdots \varrho_r$, в то время как наша группа может содержать лишь преобразования с r существенными произвольными параметрами. Из утверждения 4, гл. 3, стр. 71, тем самым следует, что среди $2r$ инфинитезимальных преобразований (5) и $X_1'f \cdots X_r'f$ может иметься только r независимых друг от друга. Но поскольку $X_1'f \cdots X_r'f$ независимы друг от друга, то инфинитезимальные преобразования (5) на самом деле должны получаться линейно из $X_1'f \cdots X_r'f$ для всех значений $1, 2 \cdots m$ числа k и всех значений a.

Рассуждения, аналогичные приведенным в гл. 2, стр. 41– 43, показывают, что имеют место тождества вида

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_{ji}^{(k)}(x', a) \frac{\partial f}{\partial x_i'} \equiv \sum_{\pi=1}^{r} \psi_{j\pi}^{(k)}(a_1 \cdots a_r) \cdot X_\pi' f$$

$$(k = 1 \cdots m,\ j = 1 \cdots r),$$

где $\psi_{j\pi}^{(k)}$ — совершенно определенные аналитические функции от $a_1 \cdots a_r$.

Наконец, возвращаясь к уравнениям (3), которые, очевидно, можно записать как:

$$\eta_{ji}^{(k)}(f_1^{(k)}(x, a) \cdots f_n^{(k)}(x, a), a_1 \cdots a_r) \equiv \frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j},$$

и связывая их тождествами

$$\eta_{ij}^{(k)}(x', a) \equiv \sum_{\pi=1}^{r} \psi_{j\pi}^{(k)}(a) \cdot \xi_{\pi i}(x'),$$

мы получаем тождества

$$\frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j} \equiv \sum_{\pi=1}^{r} \psi_{j\pi}^{(k)}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{\pi i}(f_1^{(k)}(x, a) \cdots f_n^{(k)}(x, a)) \qquad (7)$$

$$(j = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n;\ k = 1 \cdots m).$$

Функции $\xi_{\pi i}$ при этом не зависят от индекса k, а $\psi_{j\pi}^{(k)}$, вообще говоря, зависят.

Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 55. *Если m систем уравнений*

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

$$(k = 1 \cdots m),$$

в каждой из которых r параметров $a_1 \cdots a_r$ являются существенными, представляют все преобразования группы (и все эти преобразования упорядочиваются при этом в пары взаимно обратных)[3]*, то существует r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1 \cdots r),$$

находящихся в таком отношении с этой группой, что каждое семейство

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial f_i^{(k)}}{\partial a_j} = \sum_{\pi=1}^{r} \psi_{j\pi}^{(k)}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{\pi i}(x_1' \cdots x_n') \qquad (7')$$

$$(i = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots r).$$

Отсюда следует, прежде всего, согласно теоремам 21, 24, стр. 166 и 176, что r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ порождают r-параметрическую группу.

Далее ясно, что к каждому из семейств $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$ применима теорема 25 в гл. 9, стр. 178: любое преобразование $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$, параметры которого $a_1 \cdots a_r$ лежат в некоторой окрестности $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$, получается в результате выполнения сначала преобразования $\overline{x}_i = f_i^{(k)}(x, \overline{a})$, а затем — некоторого преобразования r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Поскольку наша группа содержит все преобразования вида (6):

$$x_i'' = x_i' + \sum_{j=1}^{r} h_j \cdot \xi_{ji}(x') + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

[3] Теорема 55 остается, как легко видеть, по-прежнему справедливой, если слова в скобках вычеркнуть. (Ср. рассуждения гл. 2.)

и так как одно из этих преобразований, а именно преобразование с параметрами $h_1 = 0, \cdots h_r = 0$, является тождественным преобразованием, то тождественное преобразование должно содержаться в одном из семейств $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$. Следовательно, одно из этих семейств — r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$. Разумеется, это единственная порожденная инфинитезимальными преобразованиями r-параметрическая группа, содержащаяся в группе $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$.

Таким образом, мы получили следующую теорему.

Теорема 56. *Любая группа*

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n), \quad (k = 1 \cdots m)$$

со свойством, заданным в предыдущей теореме, содержит одну и только одну r-параметрическую группу с попарно обратными преобразованиями. Эта r-параметрическая группа порождается определенными в предыдущей теореме инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$, ее ∞^r преобразований образуют одно из m семейств $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$ и, кроме того, находятся в следующем соотношении к остальным $m - 1$ семействам: если $\overline{x}_i = f_i^{(k)}(x, \overline{a})$ — какое-либо преобразование семейства $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$, то любое другое преобразование этого семейства, параметры которого лежат в некоторой окрестности $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$, получается, если сначала выполняется преобразование $\overline{x}_i = f_i^{(k)}(x, \overline{a})$, а затем — некоторое преобразование $x_i' = \omega(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n)$ из r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Рассмотрим, к примеру, группу, состоящую из двух семейств по ∞^1 преобразований, представляемую двумя системами уравнений:

$$x' = x\cos a - y\sin a, \quad y' = x\sin a + y\cos a,$$
$$x' = x\cos a + y\sin a, \quad y' = x\sin a - y\cos a.$$

В обоих семействах в результате дифференцирования по a получается

$$\frac{dx'}{da} = -y', \quad \frac{dy'}{da} = x',$$

так что функции $\psi_{j\pi}^{(k)}$, упомянутые в теореме 55, в данном случае не зависят от индекса k.

Первое из двух вышеназванных семейств — однопараметрическая группа, порожденная инфинитезимальными преобразованиями $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Общее преобразование второго семейства получается, если сначала выполнить преобразование

$$\overline{x} = x,\ \overline{y} = -y,$$

а затем — преобразование

$$x' = \overline{x}\cos a - \overline{y}\sin a, \quad y' = \overline{x}\sin a + \overline{y}\cos a$$

однопараметрической группы $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то есть общее преобразование первого семейства.

Нельзя не упомянуть, что обе теоремы, 55 и 56, остаются верными и тогда, когда обсуждаемая в них группа состоит из *бесконечного* числа дискретных непрерывных семейств, каждое из которых содержит одно и то же число существенных параметров.

Прежде чем пойти дальше, сделаем еще несколько довольно важных замечаний.

Пусть

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

— r-параметрическая непрерывная группа, не содержащая тождественного преобразования. Тогда согласно теореме 25, гл. 9, стр. 178, существует r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ с тождественным и с попарно обратными преобразованиями, связанная следующими соотношениями с группой $x_i' = f_i(x, a)$, или кратко $\mathfrak{G}$: если выполнить сначала преобразование $\overline{x}_i = f_i(x, \overline{a})$ из $\mathfrak{G}$, а затем преобразование

$$x_i' = \overline{x}_i + \sum_{k=1}^{r} e_k \cdot \overline{X}_k\, \overline{x}_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

группы $X_1 f \cdots X_r f$, то всегда получится преобразование группы $\mathfrak{G}$.

Теперь можно легко доказать, что преобразование группы $\mathfrak{G}$ всегда получается также, если сначала выполнить преобразование группы $X_1 f \cdots X_r f$, а затем — преобразование группы $\mathfrak{G}$. Мы не будем задерживаться на подробном доказательстве, заметим лишь, что совершенно аналогичные рассуждения мы уже приводили в главе 4 (ср. теорему 58).

Если теперь рассмотреть оба эти соотношения между $\mathfrak{G}$ и группой $X_1 f \cdots X_r f$ вместе и, кроме того учесть, что мы имеем дело с двумя группами, то сразу станет ясно, что преобразования группы $\mathfrak{G}$ и группы $X_1 f \cdots X_r f$, если их объединить, в свою очередь, образуют группу, причем такую, преобразования которой не упорядочиваются в пары взаимно обратных.

Теперь добавим в круг нашего рассмотрения следующее семейство преобразований:

$$x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

которые обратны преобразованиям $x_i' = f_i(x, a)$. Согласно теореме 2, гл. 1, стр. 20, это семейство преобразований также образует группу, обозначим ее $\mathfrak{G}'$. Мы покажем, что преобразования трех групп $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $X_1 f \cdots X_r f$, взятые вместе, снова образуют группу, разумеется, группу с попарно обратными преобразованиями.

Пусть T — общий символ преобразования группы $\mathfrak{G}$, T^{-1} — общий символ преобразования $\mathfrak{G}'$, а под S всегда понимается преобразование группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Мы уже знаем, что все вместе взятые преобразования T и S, образуют группу, и преобразования T^{-1} сами по себе — тоже. Отсюда мы выводим наличие соотношений, имеющих следующий вид:

$$T_\alpha T_\beta = T_\gamma, \quad S_\lambda S_\mu = S_\nu, \quad T_\beta^{-1} T_\alpha^{-1} = T_\gamma^{-1},$$

$$T_\alpha S_\lambda = T_\pi, \quad S_\lambda T_\alpha = T_\varrho.$$

Второй ряд этих соотношений мы также можем записать в виде

$$S_\lambda^{-1} T_\alpha^{-1} = T_\pi^{-1}, \quad T_\alpha^{-1} S_\lambda^{-1} = T_\varrho^{-1}.$$

Поскольку группа преобразований S состоит из попарно обратных преобразований, то сразу ясно, что T^{-1} вместе с S образуют группу. Далее мы имеем

$$T_\alpha^{-1} T_\pi = T_\alpha^{-1} T_\alpha S_\lambda = S_\lambda,$$

$$T_\alpha T_\varrho^{-1} = T_\alpha T_\alpha^{-1} S_\lambda^{-1} = S_\lambda^{-1},$$

то есть совокупность всех S, T, T^{-1} также образует группу.

Тем самым приведено обещанное доказательство того, что преобразования трех групп $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $X_1 f \cdots X_r f$, взятые вместе, образуют группу, причем группу с попарно обратными преобразованиями.

§ 85

Мы встанем теперь на более общую точку зрения, чем в предыдущем параграфе. Наложенное там особое условие опустим и оставим лишь два условия, сформулированные в вводной части.

Итак, рассмотрим группу G, состоящую из m дискретных семейств с существенными параметрами $r_1, r_2 \cdots r_m$ соответственно и содержащую для каждого своего преобразования обратное. Мы докажем, что все числа $r_1, r_2 \cdots r_m$ равны между собой. Тогда отсюда следует, что предположение

$r_1 = r_2 = \cdots = r_m$, сделанное в предыдущем параграфе, не было ограничением.

Выполним последовательно два преобразования группы G, сначала преобразование

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_{r_k}) \quad (i = 1 \cdots n)$$

семейства с r_k параметрами, а затем преобразование

$$x_i'' = f_i^{(j)}(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_{r_j}) \quad (i = 1 \cdots n)$$

семейства с r_j параметрами.

Таким образом мы находим преобразование

$$x_i'' = f_i^{(j)}\big(f_1^{(k)}(x, a) \ldots f_n^{(k)}(x, a), b_1 \cdots b_{r_j}\big),$$

принадлежащее нашей группе и формально содержащее $r_k + r_j$ произвольных параметров. Если теперь наибольшее из чисел $r_1, r_2 \cdots r_m$ имеет значение r, то среди этих $r_k + r_j$ произвольных параметров не может быть больше, чем r существенных, с другой стороны, их не меньше, чем наибольшее из чисел r_k и r_j. В частности, если оба числа r_k и r_j равны r, то записанное последним преобразование содержит ровно r существенных параметров. Следовательно, все семейства нашей группы, содержащие ровно r существенных параметров, образуют, вместе взятые, группу Γ.

К группе Γ мы можем теперь непосредственно применить теорему 56 из предыдущего параграфа. Из нее видно, что Γ, а также G содержат r-параметрическую группу

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

порожденную r независимыми инфинитезимальными преобразованиями. Если мы в соответствии с этим сначала выполним преобразование $x_i' = f_i(x, a)$, а затем преобразование

$$x_i'' = f_i^{(j)}(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_{r_j}), \tag{8}$$

то получим снова преобразование группы G, а именно следующее:

$$x_i'' = f_i^{(j)}(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_{r_j}) \quad (i = 1 \cdots n). \tag{9}$$

Из $r + r_j$ параметров этого преобразования ровно r являются существенными, таким образом, выписанные выше уравнения представляют непрерывное семейство ∞^r преобразований группы G. Но поскольку группа $x_i' = f_i(x, a)$ содержит тождественное преобразование, то

имеются особые значения параметров $a_1 \cdots a_r$, для которых функции $f_1(x, a) \cdots f_n(x, a)$ сводятся к $x_1 \cdots x_n$ соответственно. Следовательно, семейство из ∞^{r_j} преобразований (8) содержится в семействе из ∞^r преобразований (9). Согласно замечаниям, сделанным во введении к данной главе, это возможно только тогда, когда оба семейства совпадают, то есть когда $r_j = r$.

Тем самым доказано, что все числа $r_1, r_2 \cdots r_m$ действительно равны между собой. Таким образом, имеет место

Теорема 57. *Если группа, преобразования которой попарно взаимообратны, состоит из m непрерывных семейств преобразований, и если каждое из этих семейств содержит лишь конечное число произвольных параметров, то все эти семейства имеют одно и то же число существенных параметров.*

Эта теорема, впрочем, остается справедливой и тогда, когда число семейств, из которых состоит группа, бесконечно велико, если только при этом предположить, что каждое из этого бесконечно большого числа семейств зависит только от конечного числа ρ_k произвольных параметров, и что среди чисел ρ_k имеется самое большое.

§ 86

Как и прежде, пусть G состоит из m дискретных непрерывных семейств, каждое из ∞^r преобразований; кроме того, предположим, что преобразования группы G попарно взаимообратны.

Согласно теореме 57 из предыдущего параграфа в группе G содержится одна и только одна r-параметрическая группа, порожденная независимыми инфинитезимальными преобразованиями. Если теперь S — символ общего преобразования этой r-параметрической группы, а T — символ какого-либо преобразования группы G, то

$$T^{-1}ST$$

также будет символом общего преобразования r-параметрической группы, порожденной инфинитезимальными преобразованиями. Поскольку эта новая группа содержится в G, то она должна совпадать с группой всех S; согласно терминологии, введенной в гл. 15, стр. 290, мы можем это выразить еще и так: рассматриваемая r-параметрическая группа остается при любом преобразовании T инвариантной. Стало быть, справедлива следующая

Теорема 58. *Если группа G с попарно взаимно обратными преобразованиями состоит из нескольких семейств преобразований, то наибольшая*

группа, входящая в G, порожденная инфинитезимальными преобразованиями, остается инвариантной при любом преобразовании группы G.

Отсюда видно, как можно построить группы, состоящие из многих непрерывных семейств по ∞^r преобразований в каждом.

Пусть $X_1 f \cdots X_r f$ — r-параметрическая группа в переменных $x_1 \cdots x_n$, а S — символ общего преобразования этой группы.

Если группа с попарно взаимно обратными преобразованиями содержит все преобразования r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ и, кроме того, еще некоторое конечное число, скажем $m-1$, дискретных семейств, каждое по ∞^r преобразований, то по теореме 56, стр. 349, она имеет вид

$$T_0 S,\ T_1 S,\ \cdots\ T_{m-1} S. \tag{10}$$

Здесь T_0 означает тождественное преобразование, а $T_1 \cdots T_{m-1}$ согласно последней теореме таковы, что оставляют совокупность всех преобразований S инвариантной. Аналитически это свойство преобразования T_ν выражается тем, что для каждого преобразования S_k группы $X_1 f \cdots X_r f$ имеет место соотношение вида

$$T_\nu^{-1} S_k T_\nu = S_j,$$

где преобразование S_j снова принадлежит группе $X_1 f \cdots X_r f$. Это соотношение выполняется, впрочем, и тогда, когда ν равно нулю, в этом случае $S_k = S_j$.

Поскольку $T_1 \cdots T_{m-1}$ сами относятся к преобразованиям (10), то совокупность всех преобразований (10) может лишь тогда образовывать группу, когда все преобразования $T_\mu T_\nu$ принадлежат этой совокупности. Преобразования T_i должны поэтому удовлетворять, помимо вышеупомянутых, еще и соотношениям вида

$$T_\mu T_\nu = T_\pi S_\tau,$$

где μ и ν — произвольные из чисел $1, 2 \cdots m-1$, тогда как π пробегает значения $0, 1 \cdots m-1$. Если одно из чисел μ, ν равно нулю (например, μ), то соотношение данного вида выполняется, очевидно, уже само по себе; тогда $T_\pi = T_\nu$ и S_π, так же как и T_0, — это тождественное преобразование.

Если, с другой стороны, преобразования T_μ обладают указанными свойствами, то для всех значений $0, 1 \cdots m-1$ обоих чисел μ и ν имеют место соотношения вида

$$T_\mu S_k T_\nu S_l = T_\mu T_\nu S_j S_l = T_\pi S_\tau S_j S_l = T_\pi S_\varrho,$$

то есть совокупность всех преобразований (10) образует группу. Легко видеть, что в общем случае преобразования такой группы всегда упорядочиваются в пары взаимно обратных.

Теперь спрашивается еще, каковы должны быть преобразования T_μ, чтобы все m семейств (10) были отличны друг от друга.

Очевидно, что все семейства (10) друг от друга отличны, если ни одно преобразование группы не принадлежит одновременно двум из этих семейств. Если, напротив, какие-либо два семейства из (10), скажем $T_\mu S$ и $T_\nu S$, имеют общее преобразование, то они совпадают друг с другом. Поскольку из существования соотношения вида

$$T_\mu S_k = T_\nu S_l$$

немедленно следует:

$$T_\nu = T_\mu S_k S_l^{-1},$$

то семейство преобразований $T_\nu S$ имеет вид

$$T_\mu S_k S_l^{-1} S,$$

то есть идентично семейству $T_\mu S$.

Поэтому, для того чтобы все m семейств (10) были отличны друг от друга, необходимо и достаточно, чтобы никакие два из преобразований $T_0, T_1 \cdots T_{m-1}$ не были связаны соотношением вида

$$T_\nu = T_\mu S_j \quad (\nu \neq \mu).$$

Полученные результаты мы обобщим в следующей теореме.

Теорема 59. *Если S — символ общего преобразования r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, а $T_1 \cdots T_{m-1}$ — преобразования, которые оставляют группу $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантной и связаны друг с другом и с тождественным преобразованием T_0 соотношением вида*

$$T_\mu T_\nu = T_\pi S_\tau,$$

а соотношениями вида

$$T_\nu = T_\mu S_j \quad (\nu \neq \mu)$$

— не связаны, то совокупность всех преобразований

$$T_0 S,\ T_1 S,\ \cdots\ T_{m-1} S$$

образует группу с попарно взаимно обратными преобразованиями, состоящую из дискретного числа m непрерывных семейств с ∞^r преобразований в каждом и содержащую при этом все преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$. Если выбрать преобразования $T_1 \cdots T_{m-1}$ всеми возможными способами, то мы получим все группы с указанным свойством.

В следующей главе мы дадим общий метод для нахождения всех преобразований, оставляющих заданную группу $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантной.

Если имеются две различные системы преобразований $T_1 \cdots T_{m-1}$, например $T_1 \cdots T_{m-1}$ и $T_1' \cdots T_{m-1}'$, то две группы

$$T_0 S,\ T_1 S,\ \cdots\ T_{m-1} S,$$
$$T_0 S,\ T_1' S,\ \cdots\ T_{m-1}' S,$$

очевидно, будут отличны друг от друга тогда и только тогда, когда хотя бы одно из преобразований $T_1' \cdots T_{m-1}'$ нельзя представить в виде

$$T_\mu' = T_{i_\mu} S_{k_\mu}.$$

Кстати сказать, часто можно устроить так, что m преобразований $T_0, T_1, \cdots T_{m-1}$ уже сами по себе образуют разрывную группу.

Пример. n инфинитезимальных преобразований

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

порождают n-параметрическую группу. Совокупность всех преобразований, оставляющих эту группу инвариантной, представляет собой конечную непрерывную группу, порождаемую $n + n^2$ инфинитезимальными преобразованиями

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (i, k = 1 \cdots n).$$

Если среди ∞^{nn} преобразований

$$x_i' = a_{i1} x_1 + \cdots a_{in} x_n \quad (i = 1 \cdots n)$$

группы

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (i, k = 1 \cdots n)$$

выбрать какие-либо m, образующие разрывную группу, и взять их в качестве преобразований $T_0, T_1, \cdots T_{m-1}$, а в качестве S положить общее преобразование

$$x_1' = x_1 + a_1, \cdots x_n' = x_n + a_n$$

группы $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, то мы всегда получим группу, состоящую из m разрывных семейств и содержащую все ∞^n преобразований группы $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.

Теорема 58, стр. 354, верна, конечно, и тогда, когда группа G состоит из бесконечно многих семейств, с ∞^r преобразованиями в каждом. Поэтому если мы хотим построить такую группу, то надо лишь найти бесконечно большое дискретное семейство преобразований

$$T_1,\ T_2,\ T_3 \cdots,$$

оставляющих группу $X_1 f \cdots X_n f$ инвариантной и, кроме того, удовлетворяющих попарно соотношениям вида

$$T_\mu T_\nu = T_\pi S_\tau,$$

и наоборот, не связанных ни друг с другом, ни с тождественным преобразованием T_0 соотношениями вида

$$T_\mu = T_\nu S_\tau.$$

Тогда совокупность всех преобразований

$$T_0 S,\ T_1 S,\ T_2 S,\ \cdots$$

образует группу G, включающую в себя группу $X_1 f \cdots X_r f$ и состоящую из бесконечно большого числа различных семейств, содержащих по ∞^r преобразований.

Но преобразования найденной таким образом группы G в общем случае не упорядочиваются в пары взаимно обратных; для того чтобы это происходило, всякое преобразование $T_1, T_2 \cdots$ должно, помимо ранее упомянутых соотношений, удовлетворять также еще одному, следующего вида:

$$T_\mu^{-1} = T_{k_\mu} S_{j_\mu}.$$

§ 87

Теперь еще немного об *инвариантах* тех групп, которые мы рассматривали в трех предыдущих параграфах.

Пусть G — группа, состоящая из m дискретных семейств:

$$x_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}) \quad (i = 1 \cdots n),$$

$$(k = 1 \cdots m),$$

с ∞^r преобразованиями в каждом, причем для каждого преобразования группы в ней содержится также и обратное. Пусть, в частности,

$$x_i = f_i^{(1)}(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

— r-параметрическая группа, содержащаяся в G и порожденная r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$.

В соответствии с гл. 6, стр. 106, мы будем называть *инвариантом* группы G любую функцию $\mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n)$, допускающую все преобразования группы G, то есть удовлетворяющую m уравнениям

$$\mathfrak{U}(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n) \quad (k = 1 \ldots m).$$

Покажем, как можно найти инварианты группы G.

Каждый инвариант G, очевидно, является в то же время инвариантом r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, а значит, решением полной системы, задаваемой уравнениями

$$X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0.$$

Если эта полная система — n-параметрическая, то группа $X_1 f \cdots X_r f$, а стало быть, и группа G не имеют никаких инвариантов. Поэтому предположим, что указанная полная система является $(n-q)$-параметрической и обозначим некоторые q ее независимых решений через $u_1 \cdots u_q$.

Согласно теореме 58 группа $X_1 f \cdots X_r f$ остается при всех преобразованиях инвариантной; следовательно, и $(n-q)$-параметрическая полная система, задаваемая уравнениями

$$X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0,$$

допускает все преобразования группы G. А потому решения $u_1 \cdots u_q$ этой полной системы удовлетворяют (ср. гл. 8, стр. 154) соотношениям вида

$$u_j(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \omega_j^{(k)}(u_1(x) \cdots u_q(x), a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}) \qquad (11)$$

$$(j = 1 \cdots q, \quad k = 1 \cdots m).$$

Можно показать, что все функции $\omega_j^{(k)}$ независимы от параметров $a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}$.

Через $\overline{a}_1^{(k)} \cdots \overline{a}_r^{(k)}$ обозначим какую-либо фиксированную систему значений. Тогда если система значений $a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}$ лежит в некоторой окрестности $\overline{a}_1^{(k)} \cdots \overline{a}_r^{(k)}$, то согласно теореме 56, стр. 349, можно получить преобразование

$$x_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n,\, a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)})$$

в результате того, что сначала выполняется преобразование

$$\overline{x}_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n,\, \overline{a}_1^{(k)} \cdots \overline{a}_r^{(k)}),$$

а затем некоторое преобразование

$$x_i^{(k)} = f_i^{(1)}(\overline{x}_1^{(k)} \cdots \overline{x}_n^{(k)},\, \alpha_1 \cdots \alpha_r)$$

группы $X_1 f \cdots X_r f$. Таким образом, мы имеем

$$x_i^{(k)} = f_i^{(1)}\big(f_1^{(k)}(x, \overline{a}^{(k)}) \cdots f_n^{(k)}(x, \overline{a}^{(k)}),\, \alpha_1 \cdots \alpha_r\big).$$

Теперь $u_1 \cdots u_q$ — это инварианты группы $X_1 f \cdots X_r f$ и потому удовлетворяют соотношениям вида

$$u_j(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = u_j(\overline{x}_1^{(k)} \cdots \overline{x}_n^{(k)}).$$

С другой стороны

$$u_j\big(\overline{x}_1^{(k)} \cdots \overline{x}_n^{(k)}\big) = \overline{\omega}_j^{(k)}\big(u_1(x) \cdots u_q(x)\big),$$

где $\overline{\omega}_j^{(k)}$ зависят лишь от $u_1 \cdots u_q$ и не содержат произвольных параметров, так как $\overline{a}_1^{(k)} \cdots \overline{a}_r^{(k)}$ являются численными константами. Таким образом, получается

$$u_j(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \overline{\omega}_j^{(k)}(u_1(x) \cdots u_q(x)) \qquad (11')$$

$$(j = 1 \cdots q;\ k = 1 \cdots m),$$

чем доказано, что функции $\omega_j^{(k)}$ в уравнениях (11) действительно не зависят от параметров $a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}$.

Согласно вышесказанному, каждый инвариант $\mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n)$ группы G удовлетворяет m уравнениям вида

$$\mathfrak{U}(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n) \quad (k = 1 \ldots m);$$

поскольку он к тому же является функцией только от $u_1 \cdots u_q$, например

$$\mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n) = J(u_1 \cdots u_q),$$

то он удовлетворяет одновременно m соотношениям:

$$J\big(\omega_1^{(k)}(u_1 \cdots u_q) \cdots \omega_q^{(k)}(u_1 \cdots u_q)\big) = J(u_1 \cdots u_q) \qquad (12)$$

$$(k = 1 \cdots m).$$

И наоборот, каждая функция $J(u_1 \cdots u_q)$, удовлетворяющая выше упомянутым m функциональным уравнениям, очевидно, является инвариантом группы G. Следовательно, чтобы получить все инварианты группы G, надо лишь удовлетворить этим функциональным уравнениям в самом общем виде.

Задача нахождения всех решений функциональных уравнений (12), очевидно, идентична задаче нахождения всех функций от $u_1 \cdots u_q$, допускающих m преобразований

$$u_j' = \omega_j^{(k)}(u_1 \cdots u_q) \quad (j = 1 \cdots q), \qquad (13)$$

$$(k = 1 \cdots m).$$

Но эти m преобразований образуют разрывную группу, как легко следует из группового свойства G. Таким образом, поставленная нами в начале параграфа задача сводится к задаче из теории разрывных групп.

Полученные результаты мы подытожим в следующей теореме.

Теорема 60. *Если группа G (преобразования которой попарно обратны) состоит из нескольких дискретных семейств, содержащих по ∞^r преобразований*

$$x_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}) \quad (i = 1 \cdots n),$$

$$(k = 1, 2 \ldots),$$

то все инварианты группы G являются в то же время инвариантами r-параметрической непрерывной группы $X_1 f \cdots X_r f$, отвечающей группе G. Если инварианты этой последней группы известны, то есть если известны какие-либо q независимых решений $u_1 \cdots u_q$ $(n-q)$-параметрической полной системы, определяемой уравнениями

$$X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0,$$

то инварианты группы G находятся следующим образом: сначала составим соотношения

$$u_j(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \omega_j^{(k)}\big(u_1(x) \cdots u_q(x)\big) \quad (j = 1 \cdots q),$$

$$(k = 1, 2 \cdots),$$

которые имеют место при наложенных условиях и в которых $\omega_j^{(k)}$ зависят только от индексов j и k; затем находятся все функции от $u_1 \cdots u_q$, допускающие разрывную группу, образуемую преобразованиями

$$u_j' = \omega_j^{(k)}(u_1 \cdots u_q) \quad (j = 1 \cdots q),$$

$$(k = 1, 2 \cdots).$$

Полученные функции являются инвариантами группы G.

Подобная теорема справедлива, очевидно, если группа G состоит из бесконечного числа семейств преобразований.

Можно поставить себе задачу найти все инварианты, которые имеет заданное семейство преобразований:

$$x_i' = \varphi(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

или все инварианты, являющиеся общими для нескольких таких семейств[4]. Это семейство или эти семейства могут быть совершенно произвольными и не обязаны принадлежать некоторой конечной группе.

Мы не намерены рассматривать эту задачу в полном объеме; заметим только, что данные инварианты являются решениями (правда, непроизвольными) некоторой легко задаваемой полной системы. А так как искомые инварианты, помимо заданных преобразований, допускают, очевидно, еще и соответствующие обратные преобразования, то совсем несложно выписать некоторые инфинитезимальные преобразования, при которых они также остаются инвариантными. Эти инфинитезимальные преобразования в общем случае содержат произвольные элементы, в частности некоторые параметры; будучи приравнены нулю, они дают линейные дифференциальные уравнения в частных производных, которым должны удовлетворять искомые инварианты. Всегда можно записать наименьшую полную систему, включающую все эти дифференциальные уравнения. Если известна система решений $u_1, u_2 \cdots$ этой полной системы, то следует образовать произвольную функцию от этих решений $\Omega(u_1, u_2 \cdots)$, применить к ней общее преобразование заданного семейства и задать Ω в общем виде так, чтобы Ω вела себя как инвариант.

[4]Ср. Ли, Berichte der K. Sachs. Ges. d. W. (Доклады Королевского научного общества Саксонии), 1 августа 1887 г.

Глава 19

Теория подобия r-параметрических групп

Крайне важным часто бывает ответ на вопрос, является ли заданная r-параметрическая группа $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_s, a_1 \cdots a_r)$ s-мерного пространства *подобной* другой заданной r-параметрической группе $y_i' = F_i(y_1 \cdots y_s, b_1 \cdots b_r)$ того же пространства, то есть можно ли ввести вместо x и a такие новые *переменные* $y_1 \cdots y_s$ и новые *параметры* $b_1 \cdots b_r$, чтобы первая группа перешла во вторую (гл. 1, стр. 25). Если в каком-то конкретном случае известно, что такой переход одной группы в другую возможен, то возникает второй вопрос: как осуществить такой переход наиболее общим образом?

В настоящей главе мы дадим средства для ответов на оба вопроса.

Сначала покажем, что первый из двух вопросов может быть заменен следующим, более простым: при каких условиях существует преобразование

$$y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s) \quad (i = 1 \cdots s),$$

такое, что какие-либо r независимых инфинитезимальных преобразований группы $x_i' = f_i(x, a)$ при введении новых переменных $y_1 \cdots y_s$ переходят в инфинитезимальные преобразования группы $y_i' = F_i(y, b)$? Эту более простую задачу мы решим, сформулировав некоторые условия, необходимые для существования преобразования $y_i = \Phi_i(x)$ с требуемым свойством, которые окажутся также и достаточными. В то же время мы увидим, что все имеющиеся преобразования $y_i = \Phi_i(x)$ с требуемым свойством могут быть найдены при помощи интегрирования полных систем. Тем самым мы получим ответ и на второй из двух поставленных вопросов.

§ 88

Пусть две r-параметрические группы, $x_i' = f_i(x, a)$ и $y_i' = F_i(y, b)$, подобны, а именно: пусть одна переходит в другую, если вместо $x_1 \cdots x_s$

ввести новые переменные $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, а вместо $a_1 \cdots a_r$ — новые параметры $b_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r)$. Далее пусть

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— какие-либо r независимых инфинитезимальных преобразований группы $x_i' = f_i(x, a)$, принимающих при введении новых переменных $y_1 \cdots y_s$ такой вид:

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} X_k y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{h}_{ki}(y_1 \ldots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} = \mathfrak{Y}_k f \quad (k = 1 \cdots r).$$

Переход от группы $x_i' = f_i(x, a)$ к группе $y_i' = F_i(y, b)$ разобьем на несколько шагов.

Сначала приведем группу $x_i' = f_i(x, a)$ к канонической форме

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} e_k \cdot \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) + \cdots \quad (i = 1 \cdots s), \tag{1}$$

введя вместо $a_1 \cdots a_r$ некоторые, кстати говоря, совершенно определенные, зависящие от них функции $e_1 \cdots e_r$. Из (1) мы тогда должны получить уравнения $y_i' = F_i(y, b)$, если введем вместо x новые переменные $y_1 \cdots y_s$, и, кроме того, вместо $e_1 \cdots e_r$ — некоторые совершенно определенные функции от $b_1 \cdots b_r$.

Но тогда уравнения (1) согласно гл. 3, стр. 62, при введении переменных $y_1 \cdots y_s$ принимают вид

$$y_i' = y_i + \sum_{k=1}^{r} e_k \cdot \mathfrak{h}_{ki}(y_1 \cdots y_s) + \cdots \quad (i = 1 \cdots s); \tag{1'}$$

то есть уравнения (1') должны быть идентичны уравнениям $y_i' = F_i(y, b)$, если выразить $e_1 \cdots e_r$ указанным образом через $b_1 \cdots b_r$. Следовательно, уравнения (1') являются записью группы $y_i' = F_i(y, b)$, причем, как мы видим, в канонической форме. Другими словами, $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ — независимые инфинитезимальные преобразования этой группы.

Если r-параметрическая группа $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_s, a_1 \cdots a_r)$ при введении новых переменных $y_1 \cdots y_s$ и новых параметров $b_1 \cdots b_r$ превращается в группу $y_i' = F_i(y_1 \cdots y_s, b_1 \cdots b_r)$, то инфинитезимальные преобразования первой группы при введении переменных $y_1 \cdots y_s$ превращаются в инфинитезимальные преобразования второй группы.

Очевидно, имеет место и обратное: если две группы, $x_i' = f_i(x, a)$ и $y_i' = F_i(y, b)$, связаны между собой так, что инфинитезимальные преобразования первой при введении новых переменных $y_1 \cdots y_s$ переходят в инфинитезимальные преобразования второй, то всегда можно при подходящем выборе переменных и параметров перевести группу $x_i' = f_i(x, a)$ в группу $y_i' = F_i(y, b)$. При введении y каноническая форма (1) группы $x_i' = f_i(x, a)$ переходит в каноническую форму (1′) группы $y_i' = F_i(y, b)$.

Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 61. *Две r-параметрические группы от одинакового числа переменных подобны тогда и только тогда, когда можно перевести какие-либо r независимых инфинитезимальных преобразований одной группы в инфинитезимальные преобразования другой при помощи введения новых переменных.*

Таким образом, чтобы выяснить, являются ли две r-параметрические группы $x_i' = f_i(x, a)$ и $y_i' = F_i(y, b)$ подобными, надо лишь рассмотреть инфинитезимальные преобразования обеих групп и спросить, можно ли перевести их друг в друга.

Из рассуждений выше можно непосредственно сделать еще один важный вывод.

Мы знаем, что между инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$ группы $x_i' = f_i(x, a)$ имеют место соотношения вида

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = (X_i X_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \cdot X_\sigma f.$$

При введении новых переменных $y_1 \cdots y_s$ эти соотношения, согласно гл. 5, стр. 93, принимают вид

$$\mathfrak{Y}_i(\mathfrak{Y}_k(f)) - \mathfrak{Y}_k(\mathfrak{Y}_i(f)) = (\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \cdot \mathfrak{Y}_\sigma f,$$

то есть, r независимых инфинитезимальных преобразований $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ группы $y_i' = F_i(y, b)$ связаны точно такими же соотношениями, что и инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ группы $x_i' = f_i(x, a)$.

Поэтому в соответствии с введенной в гл. 11 (стр. 322) терминологией мы можем сказать:

Теорема 62. *Если две r-параметрические группы от одинакового числа переменных подобны, то они также являются равносоставленными, или, что то же самое, голоэдрически изоморфными.*

В то же время понятно, что преобразование $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ устанавливает голоэдрически изоморфную связь между двумя группами: $x_i' = f_i(x, a)$ и $y_i' = F_i(y, b)$, оно ставит в соответствие r независимым инфинитезимальным преобразованиям $X_1 f \cdots X_r f$ одной группы r независимых инфинитезимальных преобразований другой, и благодаря такому соответствию эти группы, очевидно, связаны друг с другом голоэдрическим изоморфизмом.

§ 89

Предположим, что нам даны две произвольные r-параметрические группы от одинакового числа переменных; пусть их инфинитезимальные преобразования таковы:

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Z_k f = \sum_{i=1}^{s} \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Вопрос: являются эти две группы подобными друг другу или нет?

Наш ответ на этот вопрос, очевидно, должен быть отрицательным, если группы не являются равносоставленными; согласно теореме 62 подобными могут быть только равносоставленные группы. Следовательно, нам надо рассматривать лишь тот случай, когда эти две группы являются равносоставленными; выполнение этого условия для заданных групп можно всегда проверить алгебраическими методами.

Следовательно, отныне мы предполагаем, что заданные группы являются *равносоставленными*.

По теореме 61 две равносоставленные группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ подобны друг другу тогда и только тогда, когда существует преобразование $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, такое, что $X_1 f \cdots X_r f$ превращаются при введении новых переменных $y_1 \cdots y_s$ в инфинитезимальные преобразования группы $Z_1 f \cdots Z_r f$. Если мы объединим это с замечанием в конце предыдущего параграфа, то увидим, что эти две группы подобны тогда и только тогда, когда между ними можно установить такую голоэдрически изоморфную связь, чтобы путем введения подходящих новых переменных $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ можно было перевести r инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ как раз в те инфинитезимальные преобразования

$\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, которые поставлены им в соответствие изоморфной связью.

Следующий шаг, который нам надо сделать для ответа на поставленный вопрос, — это наиболее общим образом связать между собой эти две группы голоэдрическим изоморфизмом.

Выберем в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$ самым общим образом r таких независимых инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} g_{kj} \cdot Z_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

что, наряду с соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \cdot X_\sigma f, \tag{2}$$

мы одновременно будем иметь соотношения

$$(Y_i Y_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \cdot Y_\sigma f. \tag{2'}$$

Когда это сделано — для этого необходимы лишь алгебраические операции — мы сопоставим $Y_1 f \cdots Y_r f$ инфинитезимальным преобразованиям $X_1 f \cdots X_r f$ и получим наиболее общую голоэдрически изоморфную связь между этими группами.

В настоящей главе под g_{kj} мы всюду понимаем *общую систему констант, удовлетворяющую вышеупомянутым требованиям.*

Здесь надо заметить, что в общем случае g_{kj} зависят от некоторых произвольных элементов, прежде всего от произвольных параметров, а кроме того, от некоторых неоднозначностей, обусловленных алгебраическими операциями, необходимыми для нахождения g_{kj}: вполне возможно, что имеется несколько дискретных семейств таких систем значений g_{kj}, которые обладают требуемым свойством.

Теперь спрашивается, имеется ли среди найденных данным образом изоморфных связей между двумя группами такая, которая обладает вышеупомянутым свойством. Другими словами, можно ли из произвольных элементов, входящих в коэффициенты g_{kj}, выделить такие, чтобы можно было перевести $X_1 f \cdots X_r f$ подходящей заменой переменных $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно?

Эти две группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ являются подобными тогда и только тогда, когда ответ на этот вопрос положителен.

Пусть $X_1 f \cdots X_n f$ $(n \leqslant r)$ не связаны линейными соотношениями вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0,$$

а $X_{n+1} f \cdots X_r f$, напротив, можно выразить линейно через $X_1 f \cdots X_n f$:

$$X_{n+k} f \equiv \varphi_{k1}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{kn}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f \quad (k = 1 \cdots r - n). \tag{3}$$

Если преобразование $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ таково, что $X_1 f \cdots X_r f$ при введении y переходят в некоторые инфинитезимальные преобразования $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$, принадлежащие группе $Z_1 f \cdots Z_r f$, то, разумеется, $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_n f$ не могут быть связаны линейным соотношением вида

$$\psi_1(y_1 \cdots y_s) \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + \psi_n(y_1 \cdots y_s) \cdot \mathfrak{Y}_n f = 0;$$

напротив, для $\mathfrak{Y}_{n+1} f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ мы, очевидно, получаем выражения типа

$$\mathfrak{Y}_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\varphi}_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot \mathfrak{Y}_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

в которых $\overline{\varphi}_{k\nu}(y)$ получаются из $\varphi_{k\nu}(x)$ в результате введения переменных y вместо x, так что $n(r-n)$ уравнений

$$\overline{\varphi}_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$$

при подстановке $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ превращаются в тождества.

Отсюда мы заключаем:

Если между $X_1 f \cdots X_n f$ нет линейных соотношений, в то время как $X_{n+1} f \cdots X_r f$ выражаются линейно через $X_1 f \cdots X_n f$ при помощи соотношений (3), *то две равносоставленные группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ лишь тогда могут быть подобными, когда произвольные элементы в определенных выше коэффициентах g_{kj} можно выбрать так, что инфинитезимальные преобразования*

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} g_{kj} \cdot Z_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

будут обладать следующими свойствами: во-первых, $Y_1 f \cdots Y_n f$ не связаны никакими линейными соотношениями, в то время как $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$,

напротив, выражаются линейно через $Y_1 f \cdots Y_n f$:

$$Y_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \qquad (k = 1 \cdots r-n); \tag{3'}$$

и, во-вторых, $n(r-n)$ *уравнений*

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n) \tag{4}$$

совместны друг с другом и не дают никаких соотношений по отдельности ни между x, *ни между* y.

Эти условия являются *необходимыми* для подобия двух равносоставленных групп $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$. Мы утверждаем, что они являются также и *достаточными*. Точнее говоря, мы утверждаем: *если выполнены указанные условия, то всегда имеется преобразование* $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, *переводящее инфинитезимальные преобразования* $X_1 f \cdots X_r f$ *в* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *соответственно, и эти две группы* $X_1 f \cdots X_r f$ *и* $Z_1 f \cdots Z_r f$ *являются подобными.*

Это утверждение мы докажем при помощи разработанного нами метода, приводящего к нахождению преобразования с указанным свойством.

Наша теперешняя точка зрения, таким образом, следующая:

Дана r-параметрическая группа

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

от s переменных $x_1 \cdots x_s$, структура которой определяется соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \cdot X_\sigma f.$$

При этом между $X_1 f \cdots X_n f$ нет никаких линейных соотношений вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0,$$

в то время как $X_{n+1} f \cdots X_r f$, напротив, можно выразить через $X_1 f \cdots X_n f$:

$$X_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \qquad (k = 1 \cdots r-n). \tag{3}$$

Кроме того, дана r-параметрическая группа, равносоставленная с группой $X_1 f \cdots X_r f$:

$$Z_k f = \sum_{i=1}^{s} \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

и в этой группе r независимых инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} \overline{g}_{kj} Z_j f = \sum_{i=1}^{s} \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

выбраны такими, что, во-первых, соотношения

$$(Y_i Y_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \cdot Y_\sigma f$$

выполняются тождественно, во-вторых, $Y_1 f \cdots Y_n f$ не связаны никакими линейными соотношениями вида

$$\psi_1(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_1 f + \cdots + \psi_n(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_n f = 0,$$

в то время как $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$, напротив, выражаются следующим образом:

$$Y_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \qquad (k = 1 \cdots r - n), \tag{3'}$$

и наконец, что $n(r-n)$ уравнений

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k = 1 \cdots r - n,\ \nu = 1 \cdots n) \tag{4}$$

совместны друг с другом и не дают соотношений по отдельности ни между x, ни между y.

Требуется найти преобразование

$$y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s) \quad (i = 1 \cdots s), \tag{5}$$

переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

Мы можем добавить:

Искомое преобразование таково, что уравнения (4) *при подстановке* $y_1 = \Phi_1(x), \cdots y_s = \Phi_s(x)$ *становятся тождествами.*

Тем самым сформулирована задача, решением которой мы прежде всего и займемся.

§ 90

Прежде чем заняться поставленной в конце предыдущего параграфа задачей в ее полной общности, рассмотрим частный случай, справиться с которым намного проще; мы имеем в виду случай $n = r$, который, очевидно, может возникнуть лишь тогда, когда s больше либо равно r.

Пусть определенное выше целое число n равно r.

Ясно, что в этом случае ни между $X_1 f \cdots X_r f$, ни между $Z_1 f \cdots Z_r f$ нет линейных соотношений. Отсюда следует, что r инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} g_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

удовлетворяют указанным на стр. 368 условиям сами по себе, и содержащиеся в g_{kj} произвольные элементы не нуждаются при этом в дальнейшем уточнении. Во-первых, между $Y_1 f \cdots Y_r f$ нет никаких линейных соотношений, и, во-вторых, уравнения (4) сводятся к тождеству $0 = 0$, то есть они, безусловно, совместны друг с другом и не дают соотношений по отдельности ни между x, ни между y.

Поэтому если сформулированное на стр. 368 утверждение верно, то наши r-параметрические группы подобны, а именно: имеется преобразование $y_i = \Phi_i(x_1, \cdots x_s)$, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно. Попробуем найти такое преобразование.

Если мы введем при помощи уравнений преобразований

$$y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s) \quad (i = 1 \cdots s) \tag{5}$$

переменные $y_1 \cdots y_s$ в $X_k f$, то получим

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} X_k y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{s} X_k \Phi_i \frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

Сравнивая с

$$Y_k f = \sum_{i=1}^{s} \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{s} Y_k y_i \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

мы видим, что преобразование (5) переводит $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно тогда и только тогда, когда rs уравнений

$$Y_k y_i - X_k \Phi_i = 0 \quad (k = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots s) \tag{6}$$

при подстановке $y_1 = \Phi_1(x), \cdots y_s = \Phi_s(x)$ обращаются в тождества. Если теперь положим:

$$X_k f + Y_k f = \Omega_k f \quad (k = 1 \cdots r),$$

то

$$\Omega_k(y_i - \Phi_i) = Y_k y_i - X_k \Phi_i;$$

поэтому если уравнения (5) представляют преобразование с требуемым свойством, то rs выражений $\Omega_k(y_i - \Phi_i)$ обращаются одновременно в нуль в силу (5), или, что то же самое, система уравнений (5) допускает r инфинитезимальных преобразований $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ (ср. гл. 7, стр. 122 и далее).

С другой стороны, очевидно, что справедливо следующее: всякая система уравнений вида (5), разрешимая относительно $x_1 \cdots x_s$, допускающая r инфинитезимальных преобразований $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$, представляет преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

Если теперь принять во внимание, что r независимых инфинитезимальных преобразований $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ находятся попарно в соотношениях

$$(\Omega_i \Omega_k) = (X_i X_k) + (Y_i Y_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \Omega_\sigma f$$

и, следовательно, порождают r-параметрическую группу от $2s$ переменных $x_1 \cdots x_s, y_1 \cdots y_s$, то мы можем сказать:

Совокупность всех преобразований (5), *переводящих* $X_1 f \cdots X_r f$ *в* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *соответственно, идентична совокупности всех разрешимых относительно* $x_1 \cdots x_s$ *систем уравнений вида* (5), *допускающих* r*-параметрическую группу* $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$.

Тем самым нахождение преобразования с указанным свойством сводится к нахождению некоторой системы уравнений от $2s$ переменных $x_1 \cdots x_s, y_1 \cdots y_s$; эта система должна обладать следующими свойствами: *она должна состоять из* s *независимых уравнений, должна быть разрешима относительно как* $x_1 \cdots x_s$, *так и* $y_1 \cdots y_s$ *и, наконец, должна допускать* r*-параметрическую группу* $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$.

При решении этой новой задачи мы можем опираться на рассуждения из главы 14.

При наложенных условиях не все определители порядка r матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rs}(x) \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль тождественно, и это тем более верно для матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) & \eta_{11}(y) & \cdot & \cdot & \eta_{1s}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rs}(x) & \eta_{r1}(y) & \cdot & \cdot & \eta_{rs}(y) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Поэтому если система уравнений обращает все определители порядка r матрицы (7) в нуль, то она обязательно должна содержать соотношения только между x.

Наша задача — нахождение системы уравнений вида

$$y_1 - \Phi_1(x_1 \cdots x_s) = 0, \cdots y_s - \Phi_s(x_1 \cdots x_s) = 0, \tag{8}$$

допускающей группу $X_k f + Y_k f$ и притом разрешимой относительно $x_1 \cdots x_s$.

Такая система уравнений заведомо не содержит никаких соотношений только между $x_1 \cdots x_s$, то есть она не обращает все определители порядка r матрицы (7) в нуль и согласно теореме 17 в гл. 1, стр. 137, может быть приведена к такому виду, что будет содержать лишь соотношения между решениями полной системы:

$$\Omega_k f = X_k f + Y_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r). \tag{9}$$

Следовательно, наша задача будет решена, если нам удастся найти s независимых, разрешимых относительно как $x_1 \cdots x_s$, так и $y_1 \cdots y_s$ соотношений между решениями этой полной системы. Полная система (9) имеет $2s - r$ независимых решений, которые мы, очевидно, можем выбрать так, что $s - r$ из них, скажем

$$u_1(x_1 \cdots x_s) \cdots u_{s-r}(x_1 \cdots x_s),$$

зависят лишь от x, а $s - r$ других:

$$v_1(y_1 \cdots y_s) \cdots v_{s-r}(y_1 \cdots y_s)$$

— лишь от y, тогда как остальные r

$$w_1(x_1 \cdots x_s, y_1 \cdots y_s) \cdots w_r(x_1 \cdots x_s, y_1 \cdots y_s),$$

напротив, должны содержать как некоторые x, так и y. Здесь s функций $u_1 \cdots u_{s-r}, w_1 \cdots w_r$ являются независимыми друг от друга относительно $x_1 \cdots x_s$, а s функций $v_1 \cdots v_{s-r}, w_1 \cdots w_r$ — относительно $y_1 \cdots y_s$; это

следует из того, что r уравнений полной системы разрешимы как относительно r из производных $\frac{\partial f}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_s}$, так и относительно r из производных $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_s}$ (ср. гл. 5, теорема 12, стр. 101).

Когда же s независимых друг от друга соотношений между u, v, w разрешимы относительно как $x_1 \cdots x_s$, так и $y_1 \cdots y_s$? Очевидно, тогда и только тогда, когда они могут быть разрешены как относительно $u_1 \cdots u_{s-r}, w_1 \cdots w_r$, так и относительно $v_1 \cdots v_{s-r}, w_1 \cdots w_r$, то есть приведены к виду

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathfrak{F}_1(u_1 \cdots u_{s-r}), \cdots v_{s-r} = \mathfrak{F}_{s-r}(u_1 \cdots u_{s-r}), \\ w_1 &= \mathfrak{G}_1(u_1 \cdots u_{s-r}), \cdots w_r = \mathfrak{G}_r(u_1 \cdots u_{s-r}), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_{s-r}$ означают произвольные *независимые друг от друга* функции своих аргументов, в то время как на функции $\mathfrak{G}_1 \cdots \mathfrak{G}_r$ не налагается никаких ограничений.

Уравнения (10) представляют собой наиболее общую систему уравнений, которая состоит из s независимых уравнений, допускает группу $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ и разрешима относительно как $x_1 \cdots x_s$, так и $y_1 \ldots y_s$; в то же время они представляют наиболее общее преобразование между $x_1 \cdots x_s$ и $y_1 \ldots y_s$, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно. Таким образом, мы доказали, что существуют преобразования, реализующие этот переход, то есть что наши две группы действительно подобны.

Более того, уравнения (10) вообще представляют самое общее преобразование, переводящее группу $X_1 f \cdots X_r f$ в группу $Z_1 f \cdots Z_r f$.

В самом деле, если $y_i = \Psi_i(x_1 \cdots x_s)$ — какое-либо преобразование, переводящее одну группу в другую, то оно превращает $X_1 f \cdots X_r f$ в определенные инфинитезимальные преобразования $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, находящиеся попарно в соотношениях

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \mathfrak{Y}_\sigma f$$

и получаемые поэтому из r инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} g_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

если подходящим образом выбрать входящие в g_{kj} произвольные элементы. Однако все преобразования, превращающие $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$

соответственно, имеют вид (10), то есть, в частности, и преобразование $y_i = \Psi_i(x_1 \cdots x_s)$ имеет такой вид.

Обобщая полученные результаты, мы можем сказать:

Теорема 63. *Если две r-параметрические группы:*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Z_k f = \sum_{i=1}^{s} \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

являются равносоставленными, и ни $X_1 f \cdots X_r f$, ни $Z_1 f \cdots Z_r f$ не связаны линейными соотношениями, то эти группы также подобны. Самое общее преобразование, переводящее одну группу в другую, получается следующим образом: выбирают самым общим образом r^2 констант g_{kj}, таких, что r инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} g_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

независимы друг от друга, и что, наряду с соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} X_\sigma f,$$

одновременно имеют место соотношения

$$(Y_i Y_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} Y_\sigma f;$$

затем образуют r-параметрическую полную систему

$$X_k f + Y_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r)$$

от $2s$ переменных $x_1 \cdots x_s$, $y_1 \cdots y_s$ и находят $2s - r$ ее независимых решений, а именно: $s - r$ независимых решений

$$u_1(x_1 \cdots x_s) \cdots u_{s-r}(x_1 \cdots x_s), \quad \textit{содержащих только } x,$$

$s - r$ независимых решений

$$v_1(y_1 \cdots y_s) \cdots v_{s-r}(y_1 \cdots y_s), \quad \textit{содержащих только } y,$$

и r независимых друг от друга и от $u_1 \cdots u_{s-r}, v_1 \cdots v_{s-r}$ решений

$$w_1(x_1 \cdots x_s, y_1 \cdots y_s) \cdots w_r(x_1 \cdots x_s, y_1 \cdots y_s);$$

если это сделано, то система уравнений

$$v_1 = \mathfrak{F}_1(u_1 \cdots u_{s-r}), \cdots v_{s-r} = \mathfrak{F}_{s-r}(u_1 \cdots u_{s-r}),$$
$$w_1 = \mathfrak{G}_1(u_1 \cdots u_{s-r}), \cdots w_r = \mathfrak{G}_r(u_1 \cdots u_{s-r})$$

представляет требуемое преобразование; причем $\mathfrak{G}_1 \cdots \mathfrak{G}_r$ — совершенно произвольные функции своих аргументов, а $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_{s-r}$ должны обязательно быть независимы друг от друга.

Отсюда, в частности, следует

Утверждение 1. *Если $r \leqslant s$ независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

находятся попарно в соотношениях

$$(X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1 \cdots r),$$

но не связаны линейным соотношением вида

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(x_1 \cdots x_s) \cdot X_k f = 0,$$

то они порождают r-параметрическую группу, подобную группе переносов:

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \cdots Y_r f = \frac{\partial f}{\partial y_r}.$$

Исключительно важным является случай, когда числа s и r равны, то есть обе группы являются транзитивными или, точнее, просто транзитивными (ср. гл. 13, стр. 237). Для этого случая мы сформулируем теорему 64 отдельно.

Теорема 64. *Две равносоставленные просто транзитивные группы от равного числа переменных также всегда являются подобными. Если*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{r} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_r) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Z_k f = \sum_{i=1}^{r} \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— инфинитезимальные преобразования этих двух групп, то самое общее преобразование, переводящее одну группу в другую, находится следующим образом: выбирают самым общим образом r^2 констант g_{kj}, таких, что r инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} g_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

независимы друг от друга, и что, наряду с соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} X_\sigma f,$$

одновременно выполняются соотношения

$$(Y_i Y_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} Y_\sigma f;$$

далее образуют r-параметрическую полную систему

$$X_k f + Y_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r)$$

в $2r$ переменных $x_1 \cdots x_r$, $y_1 \cdots y_r$ и находят какие-либо r ее независимых решений:

$$w_1(x_1 \cdots x_r, y_1 \cdots y_r) \cdots w_r(x_1 \cdots x_r, y_1 \cdots y_r);$$

тогда r уравнений

$$w_1 = a_1, \cdots w_r = a_r$$

с r произвольными константами представляют самое общее преобразование с требуемым свойством.

§ 91

Теперь перейдем к решению общей задачи, которую мы поставили в конце § 89 (стр. 369).

Прежде всего, мы можем, причем точно так же, как и в предыдущем параграфе, доказать, что всякое преобразование $y_i = \Phi_i(x_1, \cdots x_s)$, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно, представляет собой систему уравнений, допускающую r-параметрическую группу $\Omega_k f = X_k f + + Y_k f$, и что, с другой стороны, всякая, разрешимая относительно $x_1 \cdots x_s$ система уравнений

$$y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s),$$

допускающая группу $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$, представляет собой преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

Но согласно рассуждениям на стр. 369 всякое преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно, таково, что уравнения (4) при подстановке $y_1 = \Phi_1(x), \cdots y_s = \Phi_s(x)$ превращаются в тождества. Следовательно, можно сформулировать задачу на стр. 369 еще и следующим образом:

Требуется найти систему уравнений в переменных $x_1 \cdots x_s$, $y_1 \cdots y_s$, допускающую r-параметрическую группу $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$, состоящую ровно из s независимых уравнений, разрешимую относительно как $x_1 \cdots x_s$, так и $y_1 \cdots y_s$ и, наконец, содержащую $n(r-n)$ уравнений

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n). \qquad (4)$$

Для решения этой задачи очень важно, чтобы *система уравнений* (4), *в свою очередь, допускала r-параметрическую группу $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$.*

Чтобы это доказать, запишем матрицу

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) & \eta_{11}(y) & \cdot & \cdot & \eta_{1s}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rs}(x) & \eta_{r1}(y) & \cdot & \cdot & \eta_{rs}(y) \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

соответствующую инфинитезимальным преобразованиям $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$. Мы покажем, что уравнения (4) — одна из систем уравнений, получающихся в результате приравнивания нулю всех определителей порядка $n+1$ матрицы (11). Тем самым согласно теореме 39, гл. 14, стр. 254, будет доказано, что система уравнений (4) допускает группу $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$.

Среди определителей порядка $n+1$ матрицы (11) имеются, в частности, определители такого вида:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{1k_1}(x) & \cdot & \xi_{1k_n}(x) & \eta_{1\sigma}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{nk_1}(x) & \cdot & \xi_{nk_n}(x) & \eta_{n\sigma}(y) \\ \xi_{n+j,k_1}(x) & \cdot & \xi_{n+j,k_n}(x) & \eta_{n+j,\sigma}(y) \end{vmatrix}.$$

Заменяя в Δ члены последней строки их значениями, полученными из (3) и (3′):

$$\xi_{n+j,k_\mu}(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu}(x) \cdot \xi_{\nu,k_\mu}(x), \quad \eta_{n+j,\sigma}(y) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{j\nu}(y) \cdot \eta_{\nu\sigma}(y),$$

и вычитая из последней строки n первых, предварительно умноженных на $\varphi_{j1}(x) \cdots \varphi_{jn}(x)$ соответственно, получаем

$$\Delta = \sum \pm \xi_{1k_1}(x) \cdots \xi_{nk_n}(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \eta_{\nu\sigma}(y)\{\psi_{j\nu}(y) - \varphi_{j\nu}(x)\}.$$

Здесь при ранее наложенных условиях не все определители вида

$$D = \sum \pm \xi_{1k_1}(x) \cdots \xi_{nk_n}(x)$$

обращаются в нуль тождественно, и также не все определители вида

$$\mathfrak{D} = \sum \pm \eta_{1k_1}(y) \cdots \eta_{nk_n}(y).$$

Система уравнений, обращающая определители Δ в нуль, должна, очевидно, либо содержать все уравнения вида $D = 0$, либо $s(r-n)$ уравнений:

$$\sum_{1}^{n} \eta_{\nu\sigma}(y)\{\psi_{j\nu}(y) - \varphi_{j\nu}(x)\} = 0 \quad (\sigma = 1 \cdots s,\ j = 1 \cdots r-n);$$

в последнем случае она включает в себя либо все уравнения вида $\mathfrak{D} = 0$, либо $n(r-n)$ уравнений

$$\varphi_{j\nu}(x) - \psi_{j\nu}(y) = 0 \quad (j = 1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n). \tag{4}$$

В последнем из этих трех случаев заметим следующее: система уравнений (4) обращает в нуль не только все определители Δ, но и вообще все определители порядка $n+1$ матрицы (11). Это видно сразу, если записать эту матрицу в виде

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \xi_{1s}(x) & \eta_{11}(y) & \cdot & \eta_{1s}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1}(x) & \cdot & \xi_{ns}(x) & \eta_{n1}(y) & \cdot & \eta_{ns}(y) \\ \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{1\nu}\xi_{\nu 1} & \cdot & \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{1\nu}\xi_{\nu s} & \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{1\nu}\eta_{\nu 1} & \cdot & \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{1\nu}\eta_{\nu s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{r-n,\nu}\xi_{\nu 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{r-n,\nu}\eta_{\nu s} \end{vmatrix},$$

а затем произвести подстановку $\psi_{k\nu}(y) = \varphi_{k\nu}(x)$; определители порядка $n+1$ полученной таким образом матрицы тождественно равны нулю. Следовательно, (4) относится к тем системам уравнений, которые получаются в результате приравнивания нулю всех определителей порядка $n+1$ матрицы (11), и потому допускает согласно вышеизложенной теореме r-параметрическую группу $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$.

Только что доказанное важное свойство системы уравнений (4) может также еще быть подтверждено другим, более непосредственным путем.

Согласно рассуждениям на стр. 122 и 248, система уравнений (4) допускает r-параметрическую группу $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ только тогда, когда все уравнения вида

$$\Omega_j(\varphi_{k\nu}(x) - \psi_{k\nu}(y)) = X_j\varphi_{k\nu}(x) - Y_j\psi_{k\nu}(y) = 0$$

являются следствием из (4). Можно легко доказать, что это условие в настоящем случае выполнено.

Для $j = 1 \cdots r$, $k = 1 \cdots r - n$ мы имеем

$$(X_j X_{n+k}) = \left(X_j f, \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu} \cdot X_\nu f\right) = \\ = \sum_{\nu=1}^{n} X_j\varphi_{k\nu} \cdot X_\nu f + \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(X_j X_\nu).$$

Далее в общем случае:

$$(X_j X_\mu) = \sum_{\pi=1}^{r} c_{j\mu\pi} \cdot X_\pi f = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ c_{j\mu\nu} + \sum_{\tau=1}^{r-n} c_{j\mu,n+\tau}\varphi_{\tau\nu} \right\} X_\nu f.$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение и учитывая, кроме того, что $X_1 f \cdots X_n f$ не связаны никаким линейным соотношением, находим

$$\left\{ \begin{array}{l} X_j\varphi_{k\nu} = c_{j,n+k,\nu} + \sum\limits_{\tau=1}^{r-n} c_{j,n+k,n+\tau}\varphi_{\tau\nu} - \\ \qquad - \sum\limits_{\mu=1}^{n} \varphi_{k\mu} \left(c_{j\mu\nu} + \sum\limits_{\tau=1}^{r-n} c_{j,\mu,n+\tau}\varphi_{\tau\nu} \right). \end{array} \right. \tag{12}$$

Таким образом,

$$X_j\varphi_{k\nu} = \Pi_{jk\nu}(\varphi_{11}, \varphi_{12} \cdots) \quad (j = 1 \cdots r,\ k = 1 \cdots r - n,\ \nu = 1 \cdots n),$$

и совершенно аналогичное вычисление дает

$$Y_j\psi_{k\nu} = \Pi_{jk\nu}(\psi_{11}, \psi_{12}\cdots),$$

где $\Pi_{jk\nu}$ в обоих случаях обозначает одну и ту же функцию своих аргументов. Тогда мы получаем

$$\Omega_j(\varphi_{k\nu} - \psi_{k\nu}) = \Pi_{jk\nu}(\varphi_{11}, \varphi_{12}\cdots) - \Pi_{jk\nu}(\psi_{11}, \psi_{12}\cdots),$$

откуда видно, что все выражения $\Omega_j(\varphi_{k\nu} - \psi_{k\nu})$ действительно обращаются в нуль в силу (4).

Вообще говоря, $n(r-n)$ уравнений $\varphi_{k\nu}(x) = \psi_{k\nu}(y)$ не будут независимыми друг от друга, напротив, их можно будет заменить меньшим числом независимых друг от друга уравнений, например $s - \varrho \leqslant s$ следующих:

$$\varphi_k(x_1\cdots x_s) = \psi_k(y_1\ldots y_s) \quad (k = 1\cdots s-\varrho). \tag{13}$$

Конечно, тогда каждое $X_j\varphi_k$ будет функцией только от $\varphi_1\cdots\varphi_{s-\varrho}$:

$$X_j\varphi_k = \pi_{jk}(\varphi_1\cdots\varphi_{s-\varrho}) \quad (j = 1\cdots r;\ k = 1\cdots s-\varrho), \tag{14}$$

а каждое $Y_j\psi_k$ будет той же функцией от $\psi_1\cdots\psi_{s-\varrho}$:

$$Y_j\psi_k = \pi_{jk}(\psi_1\cdots\psi_{s-\varrho}) \quad (j = 1\cdots r;\ k = 1\cdots s-\varrho), \tag{14'}$$

поэтому в силу системы уравнений $\varphi_1 - \psi_1 = 0, \cdots \varphi_{s-\varrho} = \psi_{s-\varrho}$ все $\Omega_j(\varphi_k - \psi_k)$ обращаются в нуль. А поскольку эта система уравнений задана в виде, удовлетворяющем требованию, поставленному на стр. 120 и ниже, то, согласно изложенному на стр. 125 и 248, мы можем заключить, что она допускает r-параметрическую группу $\Omega_1 f\cdots\Omega_r f$.

Если $s-\varrho = s$, т. е. $\varrho = 0$, то s уравнений $\varphi_1 = \psi_1, \cdots \varphi_s = \psi_s$ уже сами по себе представляют преобразование в переменных $x_1\cdots x_s$, $y_1\cdots y_s$. Это преобразование, очевидно, переводит $X_1 f\cdots X_r f$ в $Y_1 f\cdots Y_r f$ соответственно и в то же время является самым общим преобразованием, осуществляющим такой переход.

Таким образом, со случаем $s - \varrho = s$ мы сразу разобрались, случай же $s - \varrho < s$ требует более детального рассмотрения.

Чтобы упростить дальнейшие рассуждения, прежде всего введем вместо x и y подходящие новые переменные.

Независимые друг от друга n уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ образуют n-параметрическую полную систему от s переменных $x_1\cdots x_s$, поэтому они имеют $s - n$ независимых совместных решений, и также n уравнений

$Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$ от переменных $y_1 \cdots y_s$ имеют $s - n$ независимых совместных решений.

Инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ и $Y_1 f \cdots Y_r f$ вполне можно упростить за счет введения новых независимых переменных вместо x, из которых $s - n$ являются независимыми решениями полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$, а вместо y — новых независимых переменных, из которых $s - n$ являются независимыми решениями полной системы $Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$.

С другой стороны, вполне можно упростить уравнения (13), введя в качестве новых переменных функции $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ и $\psi_1(y) \cdots \psi_{s-\varrho}(y)$.

Попробуем, насколько это возможно, соединить то и другое.

Сначала займемся введением подходящих новых переменных вместо x.

Среди решений полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ могут иметься такие, которые можно выразить только через функции $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$; все решения $F(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho})$ такого рода определяются из n дифференциальных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{s-\varrho} X_k \varphi_\nu \frac{\partial F}{\partial \varphi_\nu} = \sum_{\nu=1}^{s-\varrho} \pi_{k\nu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \frac{\partial F}{\partial \varphi_\nu} = 0 \quad (k = 1 \cdots n) \tag{15}$$

от $s - \varrho$ переменных $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$. Мы полагаем, что эти уравнения имеют в точности $s - q \leqslant s - \varrho$ независимых решений, например следующих:

$$\mathfrak{U}_1(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \cdots \mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}).$$

При этом условии очевидно, что

$$\mathfrak{U}_1\big(\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)\big) = u_1(x), \cdots \mathfrak{U}_{s-q}\big(\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)\big) = u_{s-q}(x)$$

являются такими независимыми решениями полной системы $X_1 f = 0$, $\cdots X_n f = 0$, которые можно выразить только через $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$, и всякое другое решение такого же типа является функцией только от $u_1(x) \cdots u_{s-q}(x)$. Разумеется, при этом справедливо также неравенство $s - q \leqslant s - n$, то есть ни одно из чисел ϱ и n не превосходит q.

Пусть теперь

$$u_{s-q+1} = u_{s-q+1}(x), \cdots u_{s-n} = u_{s-n}(x)$$

— какие-либо $q - n$ независимых друг от друга и от $u_1(x) \cdots u_{s-q}(x)$ решений полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$. Покажем, что $s - \varrho + q - n$ функций $u_{s-q+1}(x) \cdots u_{s-n}(x)$, $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ друг от друга не зависят.

Поскольку $\varphi_1(x)\cdots\varphi_{s-\varrho}(x)$ друг от друга независимы, то среди функций $\varphi_1(x)\cdots\varphi_{s-\varrho}(x)$, $u_{s-q+1}(x)\cdots u_{s-n}(x)$ есть хотя бы $s-\varrho$, то есть скажем, ровно $s-\varrho+q-n-h$ друг от друга независимых, где $0\leqslant h\leqslant q-n$. Мы полагаем, что как раз $\varphi_1(x)\cdots\varphi_{s-\varrho}(x)$, $u_{s-q+h+1}(x)\cdots u_{s-n}(x)$ независимы друг от друга, тогда как $u_{s-q+1}(x)\cdots u_{s-q+h}(x)$ можно выразить только через $\varphi_1(x)\cdots\varphi_{s-\varrho}(x)$, $u_{s-q+h+1}(x)\cdots u_{s-n}(x)$. Таким образом, между величинами $u_{s-q+1}\cdots u_{s-n}$, $\varphi_1\cdots\varphi_{s-\varrho}$ должны иметь место соотношения вида

$$u_{s-q+j}=\chi_j(u_{s-q+h+1}\cdots u_{s-n},\ \varphi_1\cdots\varphi_{s-\varrho})\quad(j=1\cdots h),\tag{16}$$

обращающиеся при подстановке

$$\begin{cases} u_{s-q+1}=u_{s-q+1}(x),\cdots u_{s-n}=u_{s-n}(x),\\ \varphi_1=\varphi_1(x),\cdots\varphi_{s-\varrho}=\varphi_{s-\varrho}(x)\end{cases}\tag{17}$$

в тождества.

Если обозначить подстановку (17) через $[\ ]$, то мы имеем

$$[u_{s-q+j}-\chi_j]\equiv 0\quad(j=1\cdots h),$$

следовательно, также имеем

$$X_k[u_{s-q+j}-\chi_j]=-\sum_{\nu=1}^{s-\varrho}[\pi_{k\nu}(\varphi_1\cdots\varphi_{s-\varrho})]\left[\frac{\partial\chi_j}{\partial\varphi_\nu}\right]\equiv 0$$
$$(k=1\cdots n,\ j=1\cdots h),$$

то есть все выражения

$$\sum_{\nu=1}^{s-\varrho}\pi_{k\nu}(\varphi_1\cdots\varphi_{s-\varrho})\frac{\partial\chi_j}{\partial\varphi_\nu}\quad(k=1\cdots n,\ j=1\cdots h)\tag{18}$$

обращаются при подстановке (17) в нуль. Но при этом все эти выражения не содержат $u_{s-q+1}\cdots u_{s-q+h}$, поэтому если бы они не равнялись тождественно нулю, а обращались бы в нуль только при подстановке (17), то функции $u_{s-q+h+1}(x)\cdots u_{s-n}(x)$, $\varphi_1(x)\cdots\varphi_{s-\varrho}(x)$ не были бы друг от друга независимы, но это противоречило бы нашему предположению. Следовательно, выражения (18) сами по себе тождественно равны нулю или, что то же самое, функции $\chi_1\cdots\chi_h$ являются решениями n дифференциальных уравнений (15) в $s-\varrho$ переменных $\varphi_1\cdots\varphi_{s-\varrho}$.

Отсюда следует, что $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$ входят в χ_j только в следующих связях $\mathfrak{U}_1(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \cdots \mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho})$, то есть что h уравнений (16) можно заменить h соотношениями вида

$$u_{s-q+j} = \overline{\chi}_j(u_{s-q+h+1} \cdots u_{s-n}, u_1 \cdots u_{s-q}) \quad (j = 1 \cdots h), \tag{19}$$

которые, в свою очередь, при подстановке

$$u_1 = u_1(x), \cdots u_{s-n} = u_{s-n}(x)$$

становятся тождествами.

Очевидно, что соотношения вида (19) не могут выполняться, так как $u_1 \cdots u_{s-n}$ являются независимыми решениями полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$; следовательно, h равно нулю. Тем самым доказано, что $s - \varrho + q - n$ функций $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$, $u_{s-q+1}(x) \cdots u_{s-n}(x)$ действительно независимы друг от друга.

Мы видим, что между $s-n+s-\varrho$ величинами $u_1 \cdots u_{s-n}, \varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$ нет других соотношений, кроме $s - q$ следующих:

$$u_1 = \mathfrak{U}_1(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}), \cdots u_{s-q} = \mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}), \tag{20}$$

обращающихся при подстановке

$$u_1 = u_1(x), \cdots u_{s-q} = u_{s-q}(x), \quad \varphi_1 = \varphi_1(x), \cdots \varphi_{s-\varrho} = \varphi_{s-\varrho}(x)$$

в тождества.

Из сказанного выше следует, что из $s - n + s - \varrho$ функций $u_1(x) \cdots u_{s-n}(x), \varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ имеется в точности $s - n + s - \varrho - (s - q) = s - n + q - \varrho$ друг от друга независимых, а именно, скажем, $s - n$ функций $u_1(x) \cdots u_{s-n}(x)$, к которым добавляются еще $q - \varrho > 0$ из функций $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$. Если предположить, что уравнения (20) разрешаются относительно $\varphi_{q-\varrho+1} \cdots \varphi_{s-\varrho}$, то можно заключить, что ровно $s - n + q - \varrho$ функций $u_1(x) \cdots u_{s-n}(x)$, $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{q-\varrho}(x)$ являются независимыми друг от друга. При этом число $q - \varrho$, или короче — m, заведомо не больше n, так как сумма $s - n + q - \varrho$, разумеется, не может превосходить число s переменных x.

Теперь мы подошли к тому, чтобы ввести вместо $x_1 \cdots x_s$ новые независимые переменные $x'_1 \cdots x'_s$; выбираем их следующим образом.

Просто положим

$$x'_{q+1} = u_1(x_1 \cdots x_s), \cdots x'_s = u_{s-q}(x_1 \cdots x_s),$$

далее

$$x'_{n+1} = u_{s-q+1}(x_1 \cdots x_s), \cdots x'_q = u_{s-n}(x_1 \cdots x_s)$$

и

$$x'_1 = \varphi_1(x_1 \cdots x_s), \cdots x'_m = \varphi_m(x_1 \cdots x_s),$$

где $m = q - \varrho$ не превосходит n; кроме того, положим

$$x'_{m+1} = \lambda_1(x_1 \cdots x_s), \cdots x'_n = \lambda_{n-m}(x_1 \cdots x_s),$$

где $\lambda_1(x) \cdots \lambda_{n-m}(x)$ — некоторые независимые друг от друга и от $u_1(x) \cdots u_{s-n}(x)$, $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)$ функции.

Совершенно аналогичным образом введем новые независимые переменные вместо $y_1 \cdots y_s$.

Построим $s - q$ функций

$$\mathfrak{U}_1\big(\psi_1(y) \cdots \psi_{s-\varrho}(y)\big) = v_1(y), \ \cdots \ \mathfrak{U}_{s-q}\big(\psi_1(y) \cdots \psi_{s-\varrho}(y)\big) = v_{s-q}(y),$$

очевидно, являющихся независимыми решениями n-параметрической полной системы $Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$; далее находим какие-либо $q - n$ независимых друг от друга и от $v_1(y) \cdots v_{s-q}(y)$ решений $v_{s-q+1}(y) \cdots v_{s-n}(y)$ этой же полной системы. Тогда ясно, что $s - n + q - \varrho$ функций

$$v_1(y) \cdots v_{s-n}(y), \ \psi_1(y) \cdots \psi_{q-\varrho}(y)$$

не зависят друг от друга.

Новые переменные $y'_1 \cdots y'_s$ мы выбираем точно так же, как прежде x'.

Просто положим

$$y'_{q+1} = v_1(y_1 \cdots y_s), \ \cdots y'_s = v_{s-q}(y_1 \cdots y_s),$$

далее

$$y'_{n+1} = v_{s-q+1}(y_1 \cdots y_s), \ \ \ldots \ y'_q = v_{s-n}(y_1 \cdots y_s)$$

и

$$y'_1 = \psi_1(y_1 \cdots y_s), \ \cdots y'_m = \psi_m(y_1 \cdots y_s);$$

кроме того, положим

$$y'_{m+1} = \Lambda_1(y_1 \cdots y_s), \ \cdots y'_n = \Lambda_{n-m}(y_1 \cdots y_s),$$

где $\Lambda_1 \cdots \Lambda_{n-m}$ — какие-либо независимые друг от друга и от $v_1(y) \cdots v_{s-n}(y)$, $\psi_1(y) \cdots \psi_m(y)$ функции.

Теперь введем новые переменные x' и y' в инфинитезимальные преобразования $X_k f$, $Y_k f$ и в уравнения (13).

Поскольку все $X_k x'_{n+1} \cdots X_k x'_s$ обращаются в нуль тождественно, а все $X_k \varphi_1 \cdots X_k \varphi_m$ зависят лишь от $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$, то есть от $x'_1 \cdots x'_m$, $x'_{q+1} \cdots x'_s$, то $X_k f$ в переменных $x'_1 \cdots x'_s$ принимает вид

$$X_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{k\mu}(x'_1 \cdots x'_m, x'_{q+1} \cdots x'_s) \frac{\partial f}{\partial x'_\mu} + \\ + \sum_{j=1}^{n-m} \xi_{k,m+j}(x'_1 \cdots x'_m \cdots x'_n \cdots x'_q \cdots x'_s) \frac{\partial f}{\partial x'_{m+j}} = \Xi_k f.$$

Точно так же

$$Y_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{k\mu}(y'_1 \cdots y'_m, y'_{q+1} \cdots y'_s) \frac{\partial f}{\partial y'_\mu} + \\ + \sum_{j=1}^{n-m} \eta_{k,m+j}(y'_1 \cdots y'_m \cdots y'_n \cdots y'_q \cdots y'_s) \frac{\partial f}{\partial y'_{m+j}} = H_k f.$$

Выражения $\xi_{k\mu}(y'_1 \cdots y'_m, y'_{q+1} \cdots y'_s)$ означают здесь те же функции своих аргументов, что и $\xi_{k\mu}(x'_1 \cdots x'_m, x'_{q+1} \cdots x'_s)$. Из уравнений (14) и (14′) следует, что $Y_k y'_\mu$ будет такой же функцией от $y'_1 \cdots y'_m, y'_{q+1} \cdots y'_s$, как $X_k x'_\mu$ — от $x'_1 \cdots x'_m$, $x'_{q+1} \cdots x'_s$, где под μ понимается произвольное число из $1, 2 \cdots m$.

С другой стороны, мы должны выяснить, какой вид принимает система уравнений (13) в новых переменных.

Систему уравнений (13), очевидно, можно заменить следующей:

$$\varphi_1 - \psi_1 = 0, \cdots \varphi_m - \psi_m = 0,$$
$$\mathfrak{U}_1(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) - \mathfrak{U}_1(\psi_1 \cdots \psi_{s-\varrho}) = 0, \cdots,$$
$$\mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) - \mathfrak{U}_{s-q}(\psi_1 \cdots \psi_{s-\varrho}) = 0.$$

Если мы теперь введем в эту систему наши новые переменные, то, очевидно, получим простую систему уравнений:

$$\begin{cases} x'_1 - y'_1 = 0, \quad \cdots \quad x'_m - y'_m = 0, \\ x'_{q+1} - y'_{q+1} = 0, \quad \cdots \quad x'_s - y'_s = 0; \end{cases} \tag{21}$$

таким образом, систему уравнений (13) или, что то же самое, систему (4) после введения новых переменных можно привести к такому виду.

Наконец, если мы вспомним, что ни $X_1 f \cdots X_n f$, ни $Y_1 f \cdots Y_n f$ не связаны линейными соотношениями, и что в силу (4) все определители порядка $n+1$ матрицы (11) обращаются в нуль, то увидим, что также ни $\Xi_1 f \cdots \Xi_n f$, ни $H_1 f \cdots H_n f$ не связаны линейными соотношениями, и что в силу (21) обращаются в нуль все определители порядка $n+1$ той матрицы, которая может быть образована из коэффициентов при производных f в r инфинитезимальных преобразованиях $\Omega_k f = \Xi_k f + H_k f$.

При помощи рассуждений выше задача, поставленная в начале параграфа на стр. 378, сводится к следующей, более простой:

Требуется найти систему уравнений от $2s$ переменных $x'_1 \cdots x'_s$, $y'_1 \cdots y'_s$, допускающую r-параметрическую группу

$$\Omega_k f = \Xi_k f + H_k f \quad (k = 1 \cdots r)$$

и, кроме того, состоящую из s независимых уравнений, разрешимую относительно как $x'_1 \cdots x'_s$, так и $y'_1 \cdots y'_s$ и, наконец, включающую в себя $s - q + m$ уравнений (21).

Чтобы решить эту новую задачу, вернемся к гл. 14, стр. 258 и ниже; из сказанного там мы заключаем, что всякая система уравнений, допускающая группу $\Xi_k f + H_k f = \Omega_k f$ и охватывающая уравнения (21), может быть получена в результате добавления к уравнениям (21) системы уравнений от $s + q - m$ переменных $x'_1 \cdots x'_m \cdots x'_n \cdots x'_q \cdots x'_s$, $y'_{m+1} \cdots y'_q$, допускающей r-параметрическую группу:

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_k f = &\sum_{\mu=1}^{m} \mathfrak{x}_{k\mu}(x'_1 \cdots x'_m, x'_{q+1} \cdots x'_s) \frac{\partial f}{\partial x'_\mu} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-m} \mathfrak{x}_{k,m+j}(x'_1 \cdots x'_m \cdots x'_n \cdots x'_q \cdots x'_s) \frac{\partial f}{\partial x'_{\mu+j}} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-m} \mathfrak{y}_{k,m+j}(x'_1 \cdots x'_m, y'_{m+1} \cdots y'_n \cdots y'_q, x'_{q+1} \cdots x'_s) \frac{\partial f}{\partial y'_{m+j}}.\end{aligned}$$

Здесь $\overline{\Omega}_k f$ получается, если в $\Omega_k f = \Xi_k f + H_k f$ отбросить все члены с $\dfrac{\partial f}{\partial y'_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial y'_m}$ и в остальных членах сделать подстановку, вытекающую из (21):

$$y'_1 = x'_1, \cdots y'_m = x'_m, \quad y'_{q+1} = x'_{q+1}, \cdots y'_s = x'_s.$$

Из этого построения $\overline{\Omega}_k f$ видно, что в матрице

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x') & \cdot & \xi_{1n}(x') & \eta_{1,m+1}(x',y') & \cdot & \eta_{1n}(x',y') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x') & \cdot & \xi_{rn}(x') & \eta_{r,m+1}(x',y') & \cdot & \eta_{rn}(x',y') \end{vmatrix}, \tag{22}$$

образованной из $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_r f$, все определители порядка $n+1$, но не все определители порядка n обращаются в нуль тождественно. Если к тому же учесть, что ни $\Xi_1 f \cdots \Xi_n f$, ни $H_1 f \cdots H_n f$ не связаны линейными соотношениями, то мы, в частности, сразу видим, что определители порядка n:

$$\sum \pm \xi_{11}(x') \cdots \xi_{nn}(x') \tag{23}$$

и

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x') & \cdot & \xi_{1m}(x') & \eta_{1,m+1}(x',y') & \cdot & \eta_{1n}(x',y') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1}(x') & \cdot & \xi_{nm}(x') & \eta_{n,m+1}(x',y') & \cdot & \eta_{nn}(x',y') \end{vmatrix}, \tag{24}$$

не равны тождественно нулю.

Наша задача теперь заключается не в том, чтобы найти *все* системы уравнений, включающие (21) и допускающие группу $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$, а лишь в нахождении таких систем уравнений, которые состоят из s независимых уравнений и разрешимы относительно как $x'_1 \cdots x'_s$, так и $y'_1 \cdots y'_s$. Следовательно, нам надо выписать не *все* системы уравнений от $x'_1 \cdots x'_s$, $y'_{m+1} \cdots y'_q$, допускающие $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_r f$, а только те, которые состоят из $s - (m+s-q) = q-m$ независимых уравнений и, кроме того, разрешимы относительно как $x'_{m+1} \cdots x'_n \cdots x'_q$, так и $y'_{m+1} \cdots y'_n \cdots y'_q$.

Если система уравнений от $x'_1 \cdots x'_s$, $y'_{m+1} \cdots y'_q$ удовлетворяет поставленным выше требованиям, то ее можно привести к виду

$$y'_{m+j} = \Phi_{m+j}(x'_1 \cdots x'_m \cdots x'_n \cdots x'_q \cdots x'_s) \quad (j = 1 \cdots q-m), \tag{25}$$

где функции $\Phi_{m+1} \cdots \Phi_q$, в свою очередь, независимы друг от друга по переменным $x'_{m+1} \cdots x'_q$. Тогда ясно, что система вида (25) обращает в нуль не все определители порядка n матрицы (22), так как определитель (23) также не может равняться нулю в силу (25). Поскольку, с другой стороны, все определители порядка $n+1$ матрицы (22) обращаются в нуль тождественно, то из гл. 14, стр. 255, следует, что всякая система уравнений вида (25), допускающая группу $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_r f$, представлена соотношениями между решениями уравнений: $\overline{\Omega}_1 f = 0, \cdots \overline{\Omega}_r f = 0$ или, что то же самое, соотношениями между решениями n-параметрической полной системы $\overline{\Omega}_1 f = 0, \cdots \overline{\Omega}_n f = 0$.

Полная n-параметрическая система $\overline{\Omega}_1 f = 0, \cdots \overline{\Omega}_n f = 0$ содержит $s+q-m$ независимых переменных и потому имеет $s-n+q-m$ независимых решений; $s-n+q-n$ независимых решений можно сразу указать, а именно $x'_{n+1} \cdots x'_q \cdots x'_s$, $y'_{n+1} \cdots y'_q$, недостающие $n-m$ должны получаться при помощи интегрирования и могут, очевидно, быть приведены к виду

$$\omega_1(x'_1 \cdots x'_m \cdots x'_s, y'_{m+1} \cdots y'_q) \cdots \omega_{n-m}(x'_1 \cdots x'_m \cdots x'_s, y'_{m+1} \cdots y'_q).$$

Поскольку оба определителя, (23) и (24), не обращаются в нуль тождественно, то уравнения нашей полной системы разрешимы относительно как $\frac{\partial f}{\partial x'_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x'_m} \cdots \frac{\partial f}{\partial x'_n}$, так и $\frac{\partial f}{\partial x'_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x'_m}, \frac{\partial f}{\partial y'_{m+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial y'_n}$, и поэтому ее $s-n+q-m$ независимых решений $x'_{n+1} \cdots x'_s$, $y'_{n+1} \cdots y'_q$, $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$ независимы друг от друга относительно как $x'_{m+1} \cdots x'_n \cdots x'_q \cdots x'_s$, $y'_{n+1} \cdots y'_q$, так и $x'_{m+1} \cdots x'_n \cdots x'_q \cdots x'_s$, $y'_{n+1} \cdots y'_q$ (ср. теорему 12, стр. 101). Следовательно, функции $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$ независимы друг от друга относительно как $y'_{m+1} \cdots y'_n$, так и $x'_{m+1} \cdots x'_n$.

Всякая система уравнений (25), удовлетворяющая поставленным требованиям, представлена соотношениями между решениями $x'_{n+1} \cdots x'_s$, $y'_{n+1} \cdots y'_q$, $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$, а именно $q-m$ соотношениями, разрешимыми относительно как $y'_{m+1} \cdots y'_q$, так и $x'_{m+1} \cdots x'_q$. Очевидно, что эти соотношения должны быть разрешимы относительно как $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$, $x'_{n+1} \cdots x'_q$, так и $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$, $y'_{n+1} \cdots y'_q$, то есть иметь вид

$$\begin{cases} \omega_\mu(x'_1 \cdots x'_m, x'_{m+1} \cdots x'_s, y'_{m+1} \cdots y'_q) = \chi_\mu(x'_{n+1} \cdots x'_q \cdots x'_s), \\ \qquad\qquad (\mu = 1 \cdots n-m) \\ y'_{n+1} = \Pi_1(x'_{n+1} \cdots x'_q \cdots x'_s), \cdots y'_q = \Pi_{q-n}(x'_{n+1} \cdots x'_q \cdots x'_s), \end{cases} \tag{26}$$

где $\Pi_1 \cdots \Pi_{q-n}$ независимы друг от друга относительно $x'_{n+1} \cdots x'_q$.

И наоборот, всякая система уравнений вида (26), в которой $\Pi_1 \cdots \Pi_{q-n}$ независимы друг от друга относительно $x'_{n+1} \cdots x'_q$, разрешима относительно как $y'_{m+1} \cdots y'_q$, так и $x'_{m+1} \cdots x'_q$, и поскольку она также допускает группу $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_r f$, то обладает всеми свойствами, которые должна иметь искомая система уравнений от переменных $x'_1 \cdots x'_s$, $y'_{m+1} \cdots y'_q$.

Отсюда мы заключаем, что уравнения (26) представляют собой самую общую систему уравнений, которая допускает группу $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_r f$, состоит из ровно $q-m$ независимых уравнений и является разрешимой относительно как $y'_{m+1} \cdots y'_q$, так и $x'_{m+1} \cdots x'_q$; при этом $\chi_1 \cdots \chi_{n-m}$ — совершенно произвольные функции своих аргументов и $\Pi_1 \cdots \Pi_{q-n}$ — тоже, правда, последние с тем ограничением, что они должны быть независимы друг от друга относительно $x'_{n+1} \cdots x'_q$.

Поэтому если добавить систему уравнений (26) к уравнениям (21), то мы получим самую общую систему уравнений в $x_1' \cdots x_s'$, $y_1' \cdots y_s'$, которая допускает группу $\Omega_k f = \Xi_k f + H_k f$, содержит уравнения (21), состоит из s независимых уравнений и разрешима относительно как $x_1' \cdots x_s'$, так и $y_1' \cdots y_s'$. Наконец, если мы в этой системе уравнений выразим переменные x' и y' через исходные переменные x и y, то получим самую общую систему уравнений, которая допускает группу $\Omega_k f = X_k f + Y_k f$, содержит уравнения (4), состоит из s независимых уравнений и разрешима относительно как $x_1 \cdots x_s$, так и $y_1 \cdots y_s$. Другими словами, мы получим самое общее преобразование $y_i = \Phi_i(x_1, \cdots x_s)$, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

Таким образом, поставленная на стр. 369 задача решена; собственно, сделано даже больше, чем там требовалось, так как нам известно не просто какое-то преобразование с требуемым свойством, а сразу все такие преобразования. В то же время доказано утверждение, выдвинутое на стр. 368, о том, что две группы, $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$, действительно подобны друг другу при наложенных там условиях.

Наконец, на основании вышеизложенного, мы можем также задать самое общее преобразование, переводящее группу $X_1 f \cdots X_r f$ в группу $Z_1 f \cdots Z_r f$; если вспомнить рассуждения на стр. 366 и связать их с только что полученными результатами, то мы непосредственно увидим, что такое преобразование может быть найдено следующим образом: в определенных на стр. 369 инфинитезимальных преобразованиях

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} \overline{g}_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

наиболее общим образом выбираются константы $\overline{g}_{kj}$, и затем согласно предложенному нами методу задается самое общее преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно; тогда это преобразование будет одновременно и самым общим из тех, что вообще переводят группу $X_1 f \cdots X_r f$ в группу $Z_1 f \cdots Z_r f$.

Найденное таким образом преобразование содержит, как показывают уравнения (26), $n - m + q - n = q - m$ произвольных функций от $s - n$ аргументов и, кроме того, некоторые произвольные элементы, которые происходят из $\overline{g}_{kj}$; это, во-первых, некоторые произвольные параметры и, во-вторых, неоднозначности, вытекающие из того, что $\overline{g}_{kj}$ задаются алгебраическими уравнениями. Отсюда следует, что искомое преобразование не во всех случаях может быть представлено единственной системой уравнений.

Теперь обобщим наши результаты.
Прежде всего, мы имеем следующую теорему.

Теорема 65. *Две r-параметрические группы*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Z_k f = \sum_{i=1}^{s} \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

от одинакового числа переменных подобны друг другу тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: во-первых, обе группы должны быть равносоставленными; то есть если имеют место соотношения

$$(X_i X_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} X_\sigma f,$$

то должна иметься возможность задать r^2 таких констант g_{kj}, чтобы r инфинитезимальных преобразований

$$\mathfrak{Y}_k f = \sum_{j=1}^{r} g_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

были независимы друг от друга и удовлетворяли соотношениям

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \mathfrak{Y}_\sigma f$$

тождественно.

Во-вторых, если $X_1 f \cdots X_r f$ таковы, что некоторые из них, например $X_1 f \cdots X_n f$, не связаны никакими линейными соотношениями вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0,$$

тогда как $X_{n+1} f \cdots X_r f$, напротив, выражаются линейно через $X_1 f \cdots X_n f$:

$$X_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

то среди систем констант g_{kj}, удовлетворяющих требованиям выше, должна иметься хотя бы одна, например система $g_{kj} = \overline{g}_{kj}$, такая, что из r инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} \overline{g}_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

первые n не связаны никакими линейными соотношениями вида

$$\psi_1(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_1 f + \cdots + \psi_n(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_n f = 0,$$

тогда как $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$ линейно выражаются через $Y_1 f \cdots Y_n f$:

$$Y_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

и что, кроме того, $n(r-n)$ уравнений

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k = 1 \cdots r - n,\ \nu = 1 \cdots n)$$

не противоречат друг другу и не дают соотношений только между x или между y[1].

Далее следует

Утверждение 2. *Если две r-параметрические группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ подобны друг другу, и r инфинитезимальных преобразований*

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} \overline{g}_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

выбраны так, как указано в теореме 65, то всегда существует по меньшей мере одно преобразование:

$$y_1 = \Phi_1(x_1 \cdots x_s), \cdots y_s = \Phi_s(x_1 \cdots x_s),$$

переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно. Всякое преобразование с таким свойством можно получить, проинтегрировав некоторые полные системы. Самое общее преобразование, которое переводит группу

[1] Ли, Archiv for Math. og Naturv., том 3 и 4, Христиания, 1878 и 1879 гг.; Math. Annalen, том XXV, стр. 96–107.

$X_1 f \cdots X_r f$ в группу $Z_1 f \cdots Z_r f$, получается, если выбрать константы $\overline{g}_{kj}$ наиболее общим образом в выражениях для $Y_k f$, а затем найти самое общее преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

Полные системы, о которых идет речь в этом утверждении, в одном случае вообще не возникают, а именно в случае, когда ранее определенное число ϱ равно нулю, то есть когда среди $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ имеется в точности s независимых. Мы уже замечали на стр. 381, что в этом случае уравнения

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n)$$

разрешимы относительно как $y_1 \cdots y_s$, так и $x_1 \cdots x_s$ и представляют самое общее преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

С другой стороны, имеются случаи, в которых интегрирование упомянутых полных систем можно выполнить. Например, оно всегда возможно, если известны конечные уравнения обеих групп $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$; но здесь мы не будем рассматривать подобного рода вопросы.

§ 92

Пусть две r-параметрические группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ подобны друг другу, то есть существуют преобразования, превращающие $X_1 f \cdots X_r f$ в инфинитезимальные преобразования другой группы.

Тогда если в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$ выбрать r инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} g_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

то, согласно вышесказанному, преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$, существует тогда и только тогда, когда $Y_1 f \cdots Y_r f$ обладает свойствами, указанными в теореме 65.

Предположим, что $Y_1 f \cdots Y_r f$ удовлетворяют этому требованию, и что $y_i = \Phi_i(x_1, \cdots x_s)$ — преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно. Тогда при преобразовании $y_i = \Phi_i(x)$ общее инфинитезимальное преобразование

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f \quad \text{принимает вид } e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f,$$

то есть наше преобразование ставит всякому инфинитезимальному преобразованию группы $X_1 f \cdots X_r f$ в соответствие совершенно определенное инфинитезимальное преобразование группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, и наоборот. Взаимно однозначное соответствие, получающееся таким образом между инфинитезимальными преобразованиями обеих групп, является согласно стр. 365 голоэдрически изоморфным.

Пусть теперь $x_1^0 \cdots x_s^0$ — точка общего положения, т. е. точка, для которой преобразования $X_1 f \cdots X_n f$ дают n независимых направлений, так что функции $\varphi_{k\nu}(x)$ в тождествах

$$X_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n) \tag{3}$$

ведут себя регулярно. Тогда, согласно гл. 11, стр. 226, инфинитезимальные преобразования, оставляющие точку $x_1^0 \cdots x_s^0$ инвариантной, имеют вид

$$\sum_{k=1}^{r-n} \varepsilon_k \left\{ X_{q+k} f - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \cdot X_\nu f \right\}, \tag{27}$$

где под $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{r-n}$ понимаются произвольные параметры, и все эти инфинитезимальные преобразования порождают $(r-n)$-параметрическую подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Если мы в силу преобразования $y_i = \Phi_i(x_1, \cdots x_s)$ введем в тождества (3) новые переменные $y_1 \cdots y_s$, то получим между $Y_1 f \cdots Y_r f$ следующие тождества:

$$Y_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n). \tag{3'}$$

Поэтому если $y_i^0 = \Phi_i(x_1^0 \cdots x_s^0)$, то инфинитезимальное преобразование (27) при введении переменной y переходит в

$$\sum_{k=1}^{r-n} \varepsilon_k \left\{ Y_{q+k} f - \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{k\nu}(y_1^0 \cdots y_s^0) \cdot Y_\nu f \right\}, \tag{27'}$$

то есть в самое общее инфинитезимальное преобразование $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, оставляющее неподвижной точку общего положения $y_1^0 \cdots y_s^0$. При этом все инфинитезимальные преобразования вида (27'), разумеется, порождают $(r-n)$-параметрическую подгруппу группы $Z_1 f \cdots Z_r f$.

В этом заключается важное свойство голоэдрически изоморфной связи, получающейся в результате преобразования $y_i = \Phi_i(x_1, \cdots x_s)$ между нашими группами. А именно: эта голоэдрически изоморфная связь всегда ставит в соответствие самой общей подгруппе $X_1 f \cdots X_r f$, оставляющей произвольно выбранную точку общего положения $x_1^0 \cdots x_s^0$ неподвижной, самую общую подгруппу группы $Y_1 f \cdots Y_r f$, оставляющую неподвижной точку общего положения $y_1^0 \cdots y_s^0$. То же самое соответствие имеет место и в обратном направлении; другими словами, если точка $x_1^0 \cdots x_s^0$ пробегает все возможные положения, то и точка $y_1^0 \cdots y_s^0$ пробегает все возможные положения.

Чтобы теперь, наоборот, две r-параметрические группы от равного числа переменных были подобны друг другу, между ними, очевидно, должна образоваться голоэдрически изоморфная связь с вышеописанным свойством. Мы утверждаем, что это необходимое условие одновременно является и достаточным; мы покажем, что эти группы действительно подобны, если можно установить между ними такую голоэдрически изоморфную связь.

В самом деле, пусть $Z_1 f \cdots Z_r f$ — некоторая r-параметрическая группа, которую можно указанным образом связать голоэдрическим изоморфизмом с группой $X_1 f \cdots X_r f$, а $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ — такое инфинитезимальное преобразование группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, которое ставится в соответствие общему инфинитезимальному преобразованию $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ при помощи этой голоэдрически изоморфной связи.

Если $X_1 f \cdots X_n f$ не связаны никакими линейными отношениями, тогда как $X_{n+1} f \cdots X_r f$ выражаются известным образом через $X_1 f \cdots X_n f$, то самое общее инфинитезимальное преобразование группы $X_1 f \cdots X_r f$, оставляющее точку $x_1^0 \cdots x_s^0$ общего положения инвариантной, будет следующим:

$$\sum_{k=1}^{r-n} \varepsilon_k \left\{ X_{n+k} f - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \cdot X_\nu f \right\}. \tag{27}$$

При наложенном условии ему соответствует в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$ инфинитезимальное преобразование

$$\sum_{k=1}^{r-n} \varepsilon_k \left\{ Y_{n+k} f - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \cdot Y_\nu f \right\}, \tag{28}$$

в свою очередь являющееся самым общим инфинитезимальным преобразованием группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, оставляющим некоторую точку общего поло-

жения $y_1^0 \cdots y_s^0$ неподвижной. Если при этом точка $x_1^0 \cdots x_s^0$ пробегает все возможные значения, тогда то же самое верно и для точки $y_1^0 \cdots y_s^0$.

Поскольку (28) является самым общим инфинитезимальным преобразованием $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, оставляющим точку общего положения $y_1^0 \cdots y_s^0$ инвариантной, то $Y_1 f \cdots Y_n f$ не могут быть связаны никаким линейным соотношением, напротив, $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$ должны выражаться известным образом через $Y_1 f \cdots Y_n f$. Отсюда мы заключаем, что самое общее инфинитезимальное преобразование $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, оставляющее точку $y_1^0 \cdots y_s^0$ неподвижной, представлено следующим выражением:

$$\sum_{k=1}^{r-n} \varepsilon'_k \left\{ Y_{n+k} f - \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{k\nu}(y_1^0 \cdots y_s^0) \cdot Y_\nu f \right\}. \tag{28'}$$

Очевидно, что каждое инфинитезимальное преобразование, содержащееся в выражении (28), идентично одному из инфинитезимальных преобразований (28′), то есть для произвольно выбранных $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{r-n}$ всегда возможно так задать такие $\varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_{r-n}$, что равенство

$$\sum_{k=1}^{r-n} (\varepsilon_k - \varepsilon'_k) Y_{n+k} f - \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{r-n} \left(\varepsilon_k \varphi_{k\nu}(x^0) - \varepsilon'_k \psi_{k\nu}(y^0) \right) \right\} Y_\nu f = 0$$

выполняется тождественно.

Поскольку $Y_1 f \cdots Y_r f$ — независимые инфинитезимальные преобразования, то записанное выше уравнение разбивается на следующие:

$$\begin{gathered} \varepsilon_k - \varepsilon'_k = 0, \quad \sum_{j=1}^{r-n} \left(\varepsilon_j \varphi_{j\nu}(x^0) - \varepsilon'_j \psi_{j\nu}(y^0) \right) = 0 \\ (k = 1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n). \end{gathered} \tag{29}$$

Отсюда непосредственно следует:

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_1, \cdots \varepsilon'_{r-n} = \varepsilon_{r-n},$$

и, кроме того, в силу произвольности ε мы получаем уравнения

$$\varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) - \psi_{k\nu}(y_1^0 \cdots y_s^0) = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n),$$

которые, таким образом, должны при наложенных условиях иметь место для обеих точек, $x_1^0 \cdots x_s^0$ и $y_1^0 \cdots y_s^0$. Если теперь еще вспомнить, что точка

$y_1^0 \cdots y_s^0$ пробегает все возможные положения, если это выполняется для точки $x_1^0 \cdots x_s^0$, то мы сразу видим, что при наложенных условиях $n(r-n)$ уравнений

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n;\ \nu = 1 \cdots n) \qquad (4)$$

совместны друг с другом и не дают никаких соотношений по отдельности ни между x, ни между y.

Согласно теореме 65, стр. 391, тем самым доказано, что группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ подобны друг другу, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы имеем

Утверждение 3. *Две r-параметрические группы G и Γ от одинакового числа переменных подобны друг другу тогда и только тогда, когда можно так связать их голоэдрическим изоморфизмом, чтобы самой общей подгруппе группы G, оставляющей определенную точку общего положения инвариантной, всегда, как бы ни была выбрана эта точка, соответствовала самая общая подгруппа группы Γ, оставляющая некоторую точку общего положения инвариантной, и то же самое соответствие также имело место в обратном направлении.*

В то же время доказано, что при только что наложенном условии существует преобразование $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно. Поэтому мы можем сформулировать следующее, несколько более специальное

Утверждение 4. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

порождают r-параметрическую группу G, а r независимых преобразований

$$Y_k f = \sum_{i=1}^{s} \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

— r-параметрическую группу Γ, то преобразование $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно, существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: во-первых, если G содержит ровно $r-n$ независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих произвольно выбранную точку общего положения инвариантной, то и Γ должна содержать ровно $r-n$ таких инфинитезимальных преобразований.

Во-вторых, если каждому инфинитезимальному преобразованию $e_1X_1f + \cdots + e_rX_rf$ *группы* G *ставится в соответствие инфинитезимальное преобразование* $e_1Y_1f + \cdots + e_rY_rf$ *группы* Γ*, то эти две группы должны быть связаны между собой голоэдрическим изоморфизмом так, как указано в предыдущем утверждении.*

Поскольку самая общая подгруппа группы G, оставляющая определенную точку общего положения инвариантной, полностью определена этой точкой, и так как, кроме того, эта многократно упомянутая голоэдрически изоморфная связь между G и Γ ставит в соответствие каждой такой подгруппе группы G подгруппу группы Γ с тем же свойством, то эта связь между G и Γ устанавливает соответствие между точками $x_1 \cdots x_s$ и $y_1 \cdots y_s$; но это соответствие, вообще говоря, бесконечно многозначно, так как любой точке $x_1 \cdots x_s$, очевидно, соответствуют все точки $y_1 \cdots y_s$, удовлетворяющие уравнениям (4), и наоборот. Это согласуется с тем, что в целом имеется бесконечно много преобразований, переводящих $X_1f \cdots X_rf$ в $Y_1f \cdots Y_rf$ соответственно.

Для *транзитивных* групп критерий подобия, сформулированный в утверждении 3, выглядит особенно просто. Далее (гл. 21) мы увидим, что две r-параметрические группы G и Γ от одинакового числа переменных, скажем s, подобны друг другу уже тогда, когда возможно так связать их голоэдрическим изоморфизмом, что одной единственной $(r-s)$-параметрической подгруппе группы G, оставляющей точку общего положения неподвижной, соответствует аналогичная $(r-s)$-параметрическая подгруппа группы F.

Если задана r-параметрическая группа

$$X_kf = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s)\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

со структурой

$$(X_iX_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma}X_\sigma f,$$

то можно поставить вопрос относительно всех преобразований

$$x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_s) \quad (i = 1 \cdots s),$$

оставляющих ее инвариантной, то есть всех преобразований, в силу которых эта группа подобна себе самой.

Рассуждения из предыдущего параграфа позволяют нам найти все эти преобразования.

Сначала свяжем группу $X_1 f \cdots X_r f$ самым общим образом с самой собой голоэдрическим изоморфизмом, то есть выберем самым общим образом r независимых инфинитезимальных преобразований

$$\Xi_k f = \sum_{j=1}^{r} g_{kj} X_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

находящихся попарно в соотношениях

$$(\Xi_i \Xi_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \Xi_\sigma f.$$

Затем специфицируем содержащиеся в g_{kj} произвольные элементы так, чтобы выполнялись следующие условия: если между $X_1 f \cdots X_n f$ нет никаких линейных соотношений, в то время как $X_{n+1} f \cdots X_r f$ выражаются линейно через $X_1 f \cdots X_n f$:

$$X_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

то во-первых, $\Xi_1 f \cdots \Xi_n f$ также не должны быть связаны никакими линейными соотношениями, а $\Xi_{n+1} f \cdots \Xi_r f$ должны выражаться линейно через $\Xi_1 f \cdots \Xi_n f$:

$$\Xi_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot \Xi_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

и, во-вторых, $n(r-n)$ уравнений

$$\varphi_{k\nu}(x'_1 \cdots x'_s) = \psi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \quad (k = 1 \cdots r - n,\ \nu = 1 \cdots n)$$

должны быть совместны друг с другом и не давать соотношений по отдельности ни между x, ни между x'.

Если все это выполняется, то согласно указанию из § 91 мы находим самое общее преобразование $x'_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, переводящее $\Xi_1 f \cdots \Xi_r f$ в $X'_1 f \cdots X'_r f$ соответственно:

$$X'_k f = \sum_{i=1}^{r} \xi_{ki}(x'_1 \cdots x'_s) \frac{\partial f}{\partial x'_i}.$$

Это преобразование является тогда самым общим, при котором группа $X_1 f \cdots X_r f$ переходит в себя.

Ясно, что совокупность всех преобразований, оставляющих группу $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантной, сама образует группу, а именно *наибольшую группу, в которой $X_1 f \cdots X_r f$ содержится как инвариантная подгруппа*. Эта группа может быть конечной или бесконечной, непрерывной или не непрерывной, но в любом случае ее преобразования упорядочиваются в пары взаимно обратных, так как если преобразование $x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ оставляет группу $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантной, то это же верно и для соответствующего обратного преобразования.

Если определенная выше группа случайно состоит из конечного числа различных семейств преобразований, и каждое из этих семейств содержит при этом лишь конечное число произвольных параметров, то согласно гл. 18, стр. 361 и ниже, в этой группе имеется семейство преобразований, образующее конечную непрерывную группу; это семейство является тогда самой большой непрерывной группой, в которой $X_1 f \cdots X_r f$ содержится как инвариантная подгруппа.

До сих пор мы говорили о подобии лишь для тех групп, которые содержат одинаковое число переменных. Но при этом не исключалось, что некоторые из переменных вовсе не преобразовывались соответствующими группами, более того, даже не встречались в инфинитезимальных преобразованиях.

Но и для групп, содержащих неодинаковое число переменных, можно говорить о подобии; ведь всегда можно увеличить число переменных в группе, добавив некоторое число таких переменных, которые вообще не преобразуются этой группой. Тогда мы получим две группы от одинакового числа переменных и можем выяснить, подобны они друг другу или нет.

В последующем мы, впрочем, будем всегда, если четко не оговорено противное, рассматривать понятие подобия в исходном более узком смысле.

§ 93

Чтобы пояснить общую теорию подобия на примере, мы исследуем, являются ли две трехпараметрические группы с двумя независимыми переменными:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$X_3 f = x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (2x_1 x_2 + C x_2^2) \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

и

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad Y_2 f = y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$Y_3 f = y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2^2 \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

подобными.

Как можно заметить, $Y_k f$ здесь уже выбраны такими, что мы одновременно имеем

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

и

$$(Y_1 Y_2) = Y_1 f, \quad (Y_1 Y_3) = 2Y_2 f, \quad (Y_2 Y_3) = Y_3 f.$$

Правда, мы выбрали не самый общий вид преобразований $Y_k f$, удовлетворяющих заданным соотношениям, но это и не обязательно делать, — результат от этого не изменится.

Мы находим

$$X_3 f \equiv -(x_1^2 + C x_1 x_2) X_1 f + (2x_1 + C x_2) X_2 f$$

и

$$Y_3 f \equiv -y_1 y_2 Y_1 f + (y_1 + y_2) Y_2 f,$$

то есть должно получиться

$$y_1 y_2 = x_1^2 + C x_1 x_2, \quad y_1 + y_2 = 2x_1 + C x_2.$$

Пока константа C не обращается в нуль, эти уравнения задают преобразование, следовательно, согласно нашей общей теории в случае $C \neq 0$ эти две группы подобны.

Если же $C = 0$, то получается соотношение только между y_1 и y_2, то есть вообще не существует преобразований, которые бы переводили $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ в $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ соответственно; можно легко убедиться, что эти две группы в данном случае вообще не являются подобными.

§ 94

В связи с теорией подобия r-параметрических групп мы хотим еще вкратце рассмотреть один более общий вопрос и дать его решение.

Предположим, что нам даны какие-либо p инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_p f$ от переменных $x_1 \cdots x_s$, то есть не обязательно такие, которые порождают конечную группу; а также предположим, что в $y_1 \cdots y_s$ нам даны какие-либо p инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_p f$. Мы спрашиваем, при каких условиях существует преобразование $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, переводящее $X_1 f \cdots X_p f$ в $Y_1 f \cdots Y_p f$ соответственно. При этом мы не требуем, чтобы $X_1 f \cdots X_p f$ были независимыми инфинитезимальными преобразованиями, так как это условие хоть и не повлияло бы на общность последующих рассуждений, но все же затруднило бы их изложение, так как должно было бы всегда учитываться.

Вышеупомянутую общую задачу мы можем сначала свести к специальному случаю, когда независимые из уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$ образуют полную систему.

Ибо если имеется преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_p f$ в $Y_1 f \cdots Y_p f$ соответственно, то согласно гл. 5, стр. 93, оно превращает также любое выражение

$$X_k\big(X_j(f)\big) - X_j\big(X_k(f)\big) = (X_k X_j)$$

в соответствующее выражение

$$Y_k\big(Y_j(f)\big) - Y_j\big(Y_k(f)\big) = (Y_k Y_j).$$

Поэтому если независимые из уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$ не образуют полную систему сами по себе, то мы можем добавить к $X_1 f \cdots X_p f$ еще все выражения $(X_k X_j)$, но в этом случае мы должны будем также добавить и все выражения $(Y_k Y_j)$ к $Y_1 f \cdots Y_p f$. Вопрос, существует ли преобразование с требуемым свойством, сводится тогда к выяснению того, существует ли преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_p f$, $(X_k X_j)$ в $Y_1 f \cdots Y_p f$, $(Y_k Y_j)$, где k и j пробегают последовательно значения $1, 2 \cdots p$.

Если же теперь и независимые среди уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$, $(X_k X_j) = 0$ не образуют полной системы, то добавим к ним еще выражения $X_i(X_k X_j))$ и $((X_i X_k)(X_j X_l))$, а также соответствующие выражения в Yf. Продолжая так, мы в конце концов получим нашу исходную задачу сведенной к следующей.

Даны r инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ от переменных $x_1 \cdots x_s$, из которых $n \leqslant r$, скажем $X_1 f \cdots X_n f$, не связаны никакими линейными соотношениями, в то время как $X_{n+1} f \cdots X_r f$ выражаются линейно через $X_1 f \cdots X_n f$:

$$X_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n);$$

кроме того, имеют место соотношения вида

$$(X_k X_j) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{kj\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k, j = 1 \cdots r),$$

так что независимые из уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ *образуют* n*-параметрическую полную систему. Далее, в переменных* $y_1 \cdots y_s$ *даны* r *инфинитезимальных преобразований* $Y_1 f \cdots Y_r f$*, и надо определить, существует ли преобразование* $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$*, переводящее* $X_1 f \cdots X_r f$ *в* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *соответственно.*

Для того, чтобы существовало преобразование с требуемым здесь свойством, $Y_1 f \cdots Y_n f$, конечно, не должны быть связаны линейным соотношением, напротив, $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$ должны линейно выражаться через $Y_1 f \cdots Y_n f$:

$$Y_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

и должны иметь место соотношения вида

$$(Y_k Y_j) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{kj\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \quad (k, j = 1 \cdots r).$$

Кроме того, уравнения

$$\begin{cases} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 & (k = 1 \cdots r - n;\ \nu = 1 \cdots n), \\ \varphi_{kj\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{kj\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 & (k, j = 1 \cdots r;\ \nu = 1 \cdots n) \end{cases} \tag{30}$$

не могут ни противоречить друг другу, ни приводить к соотношениям только между x или y, так как эти уравнения, очевидно, становятся тождествами при подстановке $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, если преобразование $y_i = \Phi_i(x)$ переводит выражения $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

Мы предполагаем, что эти условия выполнены, и что все уравнения (30) сводятся к ϱ независимым друг от друга уравнениям:

$$\varphi_1(x) - \psi_1(y) = 0, \cdots \varphi_\varrho(x) - \psi_\varrho(y) = 0. \tag{31}$$

Благодаря рассуждениям, аналогичным изложенным на стр. 371, мы увидим, что нахождение преобразования, переводящего $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно, сводится к тому, чтобы найти систему уравнений от $2s$ переменных $x_1 \cdots x_s$, $y_1 \cdots y_s$, а именно систему уравнений

со следующими свойствами: она должна допускать r инфинитезимальных преобразований $\Omega_k f = X_k f + Y_k f$, состоять ровно из s независимых уравнений, быть разрешима относительно как $x_1 \cdots x_s$, так и $y_1 \cdots y_s$ и, наконец, включать в себя ϱ уравнений (31).

Система уравнений, содержащая ϱ уравнений (31) и допускающая r инфинитезимальных преобразований $\Omega_k f$, в то же время содержит и все следующие $r\varrho$ уравнений:

$$\Omega_k\big(\varphi_j(x) - \psi_j(y)\big) = X_k\varphi_j(x) - Y_k\psi_j(y) = 0 \quad (k = 1 \cdots r, j = 1 \cdots \varrho).$$

Если эти уравнения не являются следствием (31), то мы можем получить из них новые уравнения, которые должны содержаться в искомой системе уравнений, и так далее. Продолжая так, мы в конце концов должны будем прийти либо к соотношениям, которые друг другу противоречат, либо к соотношениям только между x или только между y, либо, наконец, к системе из $\sigma \leqslant s$ независимых уравнений:

$$\varphi_1(x) - \psi_1(y) = 0, \cdots \varphi_\sigma(x) - \psi_\sigma(y) = 0 \quad (\sigma \geqslant \varrho), \tag{32}$$

обладающей двумя следующими свойствами: она не дает никаких соотношений только между x или y и допускает r инфинитезимальных преобразований $\Omega_k f$, так что любое из $r\sigma$ уравнений

$$\Omega_k\big(\varphi_j(x) - \psi_j(y)\big) = 0 \quad (k = 1 \cdots r, j = 1 \cdots \sigma)$$

является следствием (32).

Очевидно, что преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$, может существовать только тогда, когда мы при помощи указанных операций приходим к системе уравнений (32) с только что определенным свойством. Таким образом, нам надо рассмотреть только этот случай.

Если целое число σ в точности равно s, то система уравнений (32) сама по себе представляет преобразование, осуществляющее требуемый переход, причем, очевидно, единственное преобразование, для которого это справедливо. Мы покажем, что в случае $\sigma < s$ существует преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно; доказательство этому мы получим, указав метод, приводящий к нахождению преобразования с требуемым свойством.

Ясно, что уравнения (32) сохраняют независимость как уравнений $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, так и уравнений $Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$, ведь они не дают соотношений ни между x, ни между y по отдельности.

Более того, надо заметить, что имеют место соотношения вида

$$(\Omega_k \Omega_j) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{kj\nu}(x) \cdot \Omega_\nu f = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{kj\nu}(y) \cdot \Omega_\nu f \quad (k, j = 1, 2 \cdots n),$$

в которых коэффициенты $\varphi_{kj\nu}(x) = \psi_{kj\nu}(y)$ для систем значений системы уравнений $\varphi_1 - \psi_1 = 0, \cdots \varphi_\sigma - \psi_\sigma = 0$, вообще говоря, ведут себя регулярно. Таким образом, имеет место случай, рассмотренный в теореме 19, стр. 147.

Как и на стр. 381, введем решения n-параметрической полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ в качестве новых x, а решения полной системы $Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$ — в качестве новых y, при этом так же, как и тогда, мы должны различать такие решения, которые выражаются через $\varphi_1(x) \cdots \varphi_\sigma(x)$ или через $\psi_1(y) \cdots \psi_\sigma(y)$, и такие, которые не зависят от φ или ψ соответственно. Таким образом, мы упрощаем вид уравнений (32) и можем тогда точно так же, как на стр. 386, найти систему уравнений, допускающую $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$, содержащую s независимых уравнений, разрешимую относительно как $x_1 \cdots x_s$, так и $y_1 \cdots y_s$ и, наконец, включающую в себя уравнения (32). Очевидно, она представляет собой преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

Тем самым мы имеем следующую теорему.

Теорема 66. *Если даны p инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_p f$ от переменных $x_1 \cdots x_s$ и p инфинитезимальных преобразований $Y_1 f \cdots Y_p f$ от $y_1 \cdots y_s$, то при помощи дифференцирования и исключения всегда можно выяснить, существует ли преобразование $y_i = \Phi_i(x_1, \cdots x_s)$, переводящее $X_1 f \cdots X_p f$ в $Y_1 f \cdots Y_p f$ соответственно; если да, то можно задать самое общее преобразование, осуществляющее этот переход, коль скоро проинтегрирована некоторая полная система*[2].

[2] Ли, Archiv for Math. og Naturv., том 3, стр. 125, Христиания, 1878 г.

Глава 20

Группы, преобразования которых перестановочны со всеми преобразованиями заданной группы

Благодаря результатам §§ 89, 90, 91, стр. 365–393, мы получили возможность описать все преобразования, оставляющие заданную r-параметрическую группу

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

инвариантной. Теперь мы хотим из всех подобных преобразований выбрать такие, которые к тому же обладают свойством *оставлять каждое преобразование группы* $X_1 f \cdots X_r f$ *инвариантным*, и остановиться на этих преобразованиях несколько подробнее.

Если преобразование T оставляет каждое отдельное преобразование S группы $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантным, то согласно стр. 286 оно связано с S следующим соотношением:

$$T^{-1} S T = S$$

или, что то же самое, соотношением

$$ST = TS,$$

то есть перестановочно с T. Следовательно, мы можем также охарактеризовать определенные выше преобразования следующим образом: *это такие преобразования, которые перестановочны со всеми преобразованиями группы* $X_1 f \cdots X_r f$.

§ 95

Согласно гл. 15, стр. 283, можно рассматривать выражение $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ как общий символ группы $X_1 f \cdots X_r f$. Следовательно, преобразование $x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ оставляет каждое отдельное преобразование

группы $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантным тогда и только тогда, когда оно оставляет инвариантным выражение $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ при произвольном выборе чисел e, то есть когда выражение $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ при введении новых переменных $x_i' = \Phi_i(x)$ принимает вид $e_1 X_1' f + \cdots + e_r X_r' f$, где

$$X_k' f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1' \cdots x_s') \frac{\partial f}{\partial x_i'}.$$

Необходимым и достаточным условием для этого является то, что r инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ при введении новых переменных x_i' принимают вид $X_1' f \cdots X_r' f$ соответственно.

Ясно, что преобразования $x_i' = \Phi_i(x)$ с требуемым свойством существуют: тождественное преобразование $x_i' = x_i$ является таковым, кроме того, это следует из утверждения 2 в предыдущей главе (стр. 392), поскольку это утверждение показывает, что существуют преобразования, переводящие $X_1 f \cdots X_r f$ в $X_1' f \cdots X_r' f$. Из тех прежних рассуждений следует также, что самое общее преобразование с требуемым свойством представляется самой общей, разрешимой относительно $x_1 \cdots x_s$ системой уравнений

$$x_1' = \Phi_1(x_1 \cdots x_s), \ \cdots \ x_s' = \Phi_s(x_1 \cdots x_s),$$

допускающей r-параметрическую группу $X_1 f + X_1' f, \cdots X_r f + X_r' f$ от $2s$ переменных $x_1 \cdots x_s, x_1' \cdots x_s'$.

Если выполнить последовательно два преобразования, оставляющие всякое отдельное преобразование группы $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантным, то мы, очевидно, всегда получим преобразование, для которого это тоже справедливо, то есть совокупность всех таких преобразований образует группу G. Эта группа может быть разрывной и даже сводиться к тождественному преобразованию, она может состоять из нескольких дискретных семейств, каждое из которых содержит лишь конечное число произвольных параметров, может быть бесконечной, но ее преобразования будут всегда упорядочиваться в пары взаимно обратных, так как если преобразование оставляет инвариантными все преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$, то соответствующее обратное преобразование, разумеется, обладает тем же свойством.

Если определенная выше группа G содержит лишь конечное число произвольных параметров, то она относится к категории групп, обсуждаемых в главе 18, и согласно теореме 56, стр. 349, непременно содержит порожденную инфинитезимальными преобразованиями конечную непрерывную подгруппу. С другой стороны, если группа G бесконечна, то при помощи рассуждений, подобных тем, что были проведены в главе 18, можно доказать, что эта группа содержит однопараметрические

группы (причем бесконечно много), порожденные бесконечно многими независимыми инфинитезимальными преобразованиями.

Мы ставим теперь непосредственную задачу — найти все однопараметрические группы, которые содержатся, например, в группе G.

Согласно гл. 15, стр. 286 и 288, r выражений $X_1 f \cdots X_r f$ остаются инвариантными при всех преобразованиях однопараметрической группы Zf тогда и только тогда, когда r соотношений

$$(X_k Z) = X_k(Z(f)) - Z(X_k(f)) = 0 \quad (k = 1 \cdots r)$$

выполнены тождественно, то есть когда инфинитезимальное преобразование Zf перестановочно со всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$. В соответствии с этим описание всех однопараметрических групп с указанным выше свойством сводится к нахождению самого общего преобразования Zf, перестановочного со всеми $X_k f$.

Если есть два $X_k f$ инфинитезимальных преобразования $Z_1 f$ и $Z_2 f$, которые перестановочны со всеми $X_k f$, то все выражения $(Z_1 X_k)$ и $(Z_2 X_k)$ обращаются в нуль тождественно, то есть тождество Якоби

$$\big((Z_1 Z_2) X_k\big) + \big((Z_2 X_k) Z_1\big) + \big((X_k Z_1) Z_2\big) \equiv 0$$

сводится к

$$\big((Z_1 Z_2) X_k\big) \equiv 0.$$

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 1. *Если два инфинитезимальных преобразования $Z_1 f$ и $Z_2 f$ перестановочны со всеми инфинитезимальными преобразованиями r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, то это верно и для преобразования $(Z_1 Z_2)$.*

С другой стороны, всякое инфинитезимальное преобразование $aZ_1 f + bZ_2 f$ в то же время перестановочно с $X_1 f \cdots X_r f$, какие бы значения ни принимали константы a и b. Поэтому если случайно имеется только конечное число, скажем, только q независимых инфинитезимальных преобразований $Z_1 f \cdots Z_q f$, перестановочных с $X_1 f \cdots X_r f$, то самое общее инфинитезимальное преобразование с таким свойством имеет вид $\lambda_1 Z_1 f + \cdots \lambda_q Z_q f$, где под $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ понимаются произвольные параметры. Тогда вследствие утверждения 1 должны иметь место соотношения вида

$$(Z_i Z_k) = \sum_{\sigma=1}^{q} c'_{ik\sigma} Z_\sigma f,$$

так что $Z_1 f \cdots Z_q f$ порождают *q-параметрическую группу.*

Попробуем теперь непосредственно найти самое общее инфинитезимальное преобразование

$$Zf = \sum_{i=1}^{s} \zeta_i(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

перестановочное со всеми инфинитезимальными преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Соответствующие r уравнений

$$(X_1 Z) = 0, \cdots (X_r Z) = 0$$

непосредственно распадаются на rs следующих:

$$X_k \zeta_i = Z \xi_{ki} \quad (k = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots s),$$

или подробнее:

$$\sum_{\nu=1}^{s} \xi_{k\nu}(x) \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \quad (k = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots s). \tag{1}$$

Таким образом, речь идет о том, чтобы найти самые общие решения этих дифференциальных уравнений для $\zeta_1 \cdots \zeta_s$. Если

$$\zeta_i = \omega_i(x_1 \cdots x_s) \quad (i = 1 \cdots s) \tag{2}$$

— какая-либо система решений системы (1), то выражения

$$X_k \omega_i - \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu$$

при подстановке $\zeta_1 = \omega_1(x), \cdots \zeta_s = \omega_s(x)$ одновременно обращаются в нуль тождественно; другими словами, система уравнений (2) в $2s$ переменных $x_1 \cdots x_s, \zeta_1 \cdots \zeta_s$ допускает r инфинитезимальных преобразований:

$$W_k f = X_k f + \sum_{i=1}^{s} \left\{ \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \right\} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Если, наоборот, система уравнений вида (2) допускает инфинитезимальные преобразования $W_1 f \cdots W_r f$, то $\omega_1(x) \cdots \omega_s(x)$, очевидно, являются решениями дифференциальных уравнений (1). Следовательно, интегрирование дифференциальных уравнений (1) равносильно нахождению

самой общей системы уравнений (2), допускающей инфинитезимальные преобразования $W_1 f \cdots W_r f$.

Любая система уравнений, допускающая $W_1 f \cdots W_r f$, допускает также инфинитезимальное преобразование $W_k(W_j(f)) - W_j(W_k(f)) = (W_k W_j)$; вычислим его.

Мы имеем

$$(W_k W_j) = (X_k X_j) + \sum_{i,\mu,\nu=1}^{s} \left\{ \xi_{k\nu} \frac{\partial^2 \xi_{ji}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \xi_{j\nu} \frac{\partial^2 \xi_{ki}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right\} \zeta_\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} + \\ + \sum_{i,\mu,\nu=1}^{s} \left\{ \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \xi_{j\nu}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right\} \zeta_\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta_i},$$

и правую часть при этом можно записать так:

$$(X_k X_j) + \sum_{i,\mu=1}^{s} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{\nu=1}^{s} \left\{ \xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu} - \xi_{j\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right\} \cdot \zeta_\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}.$$

Но при этом имеют место соотношения вида

$$(X_k X_j) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{kj\sigma} X_\sigma f,$$

из которых следует:

$$\sum_{\nu=1}^{s} \left\{ \xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu} - \xi_{j\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right\} = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{kj\sigma} \xi_{\sigma i},$$

таким образом, получается просто

$$(W_k W_j) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{kj\sigma} W_\sigma f.$$

Отсюда мы видим, что $W_1 f \cdots W_r f$ порождают r-параметрическую группу от $2s$ переменных $x_1 \cdots x_s$, $\zeta_1 \cdots \zeta_s$; правда, это можно было предвидеть.

Среди инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ могут иметься какие-либо n, скажем $X_1 f \cdots X_n f$, не связанные никакими соотношениями вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0,$$

в то время как $X_{n+1}f \cdots X_rf$ выражаются следующим образом:

$$X_{n+k}f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r-n). \tag{3}$$

При этих условиях дифференциальные уравнения (1) можно также записать в виде

$$X_\nu \zeta_i - Z\xi_{\nu i} = 0 \quad (\nu = 1 \cdots n,\ i = 1 \cdots s),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x) \cdot X_\nu \zeta_i - Z\xi_{n+k,i} = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n,\ i = 1 \cdots s).$$

Поэтому если исключить выражения $X_1\zeta_i \cdots X_n\zeta_i$, то для $\zeta_1 \cdots \zeta_s$ получаются конечные уравнения:

$$\sum_{\pi=1}^{s} \left\{ \frac{\partial \xi_{n+k,i}}{\partial x_\pi} - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi} \right\} \zeta_\pi = 0 \tag{4}$$

$$(k = 1 \cdots r-n,\ i = 1 \cdots s).$$

Очевидно, что любая система уравнений вида (2), допускающая группу $W_1f \cdots W_rf$, должна содержать уравнения (4).

Уравнения (4) являются линейными и однородными в $\zeta_1 \cdots \zeta_s$; если среди них найдутся ровно s друг от друга независимых, то $\zeta_1 = 0, \cdots \zeta_s = 0$ — единственная система решений, которая им всем удовлетворяет. В этом случае существует только одна система решений вида (2), допускающая группу $W_1f \cdots W_rf$, а именно система $\zeta_1 = 0, \cdots \zeta_s = 0$, то есть не существует никакого инфинитезимального преобразования Zf, перестановочного с X_kf.

Ситуация изменится, если уравнения (4) сводятся менее чем к s, скажем, к $m < s$ независимым уравнениям. Мы увидим, что в этом случае, помимо не интересующей нас системы $\zeta_1 = 0, \cdots \zeta_s = 0$, имеются еще другие системы вида (2), допускающие группу $W_1f \cdots W_rf$.

Прежде всего, мы замечаем, что система уравнений (4) допускает группу $W_1f \cdots W_rf$.

Чтобы это доказать, запишем матрицу, соответствующую инфинитезимальным преобразованиям $W_1f \cdots W_rf$:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \xi_{1s} & \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x_\nu}\zeta_\nu & \cdot & \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{1s}}{\partial x_\nu}\zeta_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdot & \xi_{rs} & \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{r1}}{\partial x_\nu}\zeta_\nu & \cdot & \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{rs}}{\partial x_\nu}\zeta_\nu \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Покажем, что (4) относится к системам уравнений, которые получаются путем приравнивания нулю всех определителей порядка $n+1$ этой матрицы. Тогда согласно гл. 14, стр. 254, будет доказано, что (4) допускает группу $W_1 f \cdots W_r f$.

Среди определителей порядка $n+1$ матрицы (5) имеются определители вида

$$D = \begin{vmatrix} \xi_{1k_1} & \cdot & \xi_{1k_n} & \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{1\sigma}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{nk_1} & \cdot & \xi_{nk_n} & \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{n\sigma}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \\ \xi_{n+j,k_1} & \cdot & \xi_{n+j,k_n} & \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \xi_{n+j,\sigma}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \end{vmatrix}.$$

Если использовать тождества, следующие из (3):

$$\xi_{n+j,\pi} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu}(x) \cdot \xi_{\nu\pi} \quad (\pi = 1 \cdots s,\ j = 1 \cdots r-n),$$

то можно, очевидно, записать:

$$D = \sum \pm \xi_{1k_1} \cdots \xi_{nk_n} \cdot \sum_{\nu=1}^{s} \left\{ \frac{\partial \xi_{n+j,\sigma}}{\partial x_\nu} - \sum_{\tau=1}^{n} \varphi_{j\tau} \frac{\partial \xi_{\tau\sigma}}{\partial x_\nu} \right\} \zeta_\nu.$$

Теперь при наложенных условиях не все определители вида

$$\sum \pm \xi_{1k_1} \cdots \xi_{nk_n}$$

тождественно обращаются в нуль; поэтому, если приравнять все определители вида D нулю, мы получим либо соотношения только между $x_1 \cdots x_s$, либо систему уравнений (4). Эта система уравнений, однако, как легко видеть, обращает вообще все определители порядка $n+1$ матрицы (5) в нуль, то есть допускает группу $W_1 f \cdots W_r f$.

Нахождение самой общей системы уравнений (2), допускающей группу $W_1 f \cdots W_r f$ и содержащей уравнения (4), можно провести на основании гл. 14, стр. 262–263.

Система уравнений (4) обращает все определители порядка $n+1$, но не все определители порядка n матрицы (5) в нуль; точно так же система уравнений вида (2) не может обратить все определители порядка n матрицы (5) в нуль. Значит, мы поступим следующим образом: разрешим уравнения (4) относительно m из величин $\zeta_1 \cdots \zeta_s$, например относительно

$\zeta_1 \cdots \zeta_m$ затем согласно указаниям в цитируемых рассуждениях, образуем укороченные инфинитезимальные преобразования $\overline{W}_1 f \cdots \overline{W}_r f$ от $2s-m$ переменных $x_1 \cdots x_s, \zeta_{m+1} \cdots \zeta_s$, наконец, найдем какие-либо $2s-m-n$ независимых решений n-параметрической полной системы, образованной n уравнениями $\overline{W}_1 f = 0, \cdots \overline{W}_r f = 0$.

Эти n уравнений $\overline{W}_1 f = 0, \cdots \overline{W}_r f = 0$ разрешимы относительно n производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_s}$, то есть $2s-m-n$ их независимых решений относительно $s-n$ независимы от x, а переменные $\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s$ — друг от друга (ср. теор. 12, гл. 5, стр. 101). Тогда среди решений полной системы $\overline{W}_k f = 0$ имеется ровно $s-n$ независимых, одновременно удовлетворяющих n-параметрической полной системе $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, а значит, зависящих лишь от x решений, обозначим их:

$$\mathfrak{u}_1(x_1 \cdots x_s) \cdots \mathfrak{u}_{s-n}(x_1 \cdots x_s).$$

Поэтому если

$$\mathfrak{B}_1(\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s, x_1 \cdots x_s), \ldots \mathfrak{B}_{s-m}(\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s, x_1 \cdots x_s)$$

— какие-либо $s-m$ независимых друг от друга и от $\mathfrak{u}$ решений полной системы $\overline{W}_k f = 0$, то они необходимо независимы друг от друга относительно $\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s$.

Самую общую систему уравнений (2), допускающую группу $W_1 f \cdots W_r f$ мы получим теперь, если добавим к уравнениям (4) самым общим образом $s-m$ независимых друг от друга, разрешимых относительно $\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s$ соотношений между $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}, \mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_{s-m}$. Ясно, что эти соотношения должны быть разрешимы относительно $\mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_{s-m}$, то есть приводимы к виду

$$\mathfrak{B}_\mu(\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s, x_1 \cdots x_s) = \Omega_\mu\big(\mathfrak{u}_1(x) \cdots u_{s-n}(x)\big) \quad (\mu = 1 \cdots s-m). \quad (6)$$

Здесь Ω_μ не подлежат никаким ограничениям, а являются совершенно произвольными функциями своих аргументов.

Поэтому если мы добавим уравнения (6) к (4) и разрешим их в совокупности относительно $\zeta_1 \cdots \zeta_s$, что всегда возможно, то мы получим самую общую систему уравнений (2), допускающую группу $W_1 f \cdots W_r f$, и тем самым также самую общую систему решений дифференциальных уравнений (1). Эта самая общая система решений, очевидно, содержит $s-m$ произвольных функций от $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}$.

Однако дифференциальные уравнения (1) линейны и однородны относительно неизвестных $\zeta_1 \cdots \zeta_s$; то есть можно заключить, что самая общая система их решений $\zeta_1 \cdots \zeta_s$ получена из $s-m$ частных систем решений

$$\zeta_{\mu 1}(x) \cdots \zeta_{\mu s}(x) \quad (\mu = 1 \cdots s-m)$$

следующим образом:

$$\zeta_i = \chi_1(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}) \cdot \zeta_{1i} + \cdots + \chi_{s-m}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}) \cdot \zeta_{s-m,i}$$

$$(i = 1 \cdots s),$$

где χ — совершенно произвольные функции от $\mathfrak{u}$; разумеется, эти частные системы решений должны быть такими, что не существует $s-m$ функций $\psi_1(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}) \cdots \psi_{s-m}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n})$, тождественно удовлетворяющих s уравнениям

$$\psi_1(\mathfrak{u}) \cdot \zeta_{1i} + \cdots + \psi_{s-m}(\mathfrak{u}) \cdot \zeta_{s-m,i} = 0 \quad (i = 1 \cdots s).$$

Можно даже показать, что не существует вообще никаких $s-m$ функций, $\Psi_1(x_1 \cdots x_s) \cdots \Psi_{s-m}(x_1 \cdots x_s)$, которые удовлетворяли бы $s-m$ уравнениям

$$\Psi_1(x) \cdot \zeta_{1i} + \cdots + \Psi_{s-m}(x) \cdot \zeta_{s-m,i} = 0 \quad (i = 1 \cdots s)$$

тождественно. А именно: $s-m$ уравнений

$$\zeta_{m+\sigma} = \sum_{\mu=1}^{s-m} \chi_\mu(\mathfrak{u}) \cdot \zeta_{\mu,m+\sigma} \quad (\sigma = 1 \cdots s-m),$$

очевидно, эквивалентны уравнениям (6), то есть должны быть разрешимы относительно $\chi_1 \cdots \chi_{s-m}$, а определитель

$$\sum \pm \zeta_{1,m+1} \cdot \zeta_{s-m,m+s-m}$$

не должен обращаться в нуль тождественно.

После этих приготовлений мы, наконец-то, можем указать вид, который имеет самое общее, перестановочное с $X_1 f \cdots X_r f$ инфинитезимальное преобразование Zf. Это преобразование таково:

$$Zf = \sum_{\mu=1}^{s-m} \chi_\mu(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-m}) \cdot Z_\mu f,$$

где $s-m$ инфинитезимальных преобразований

$$Z_\mu f = \sum_{i=1}^{s} \zeta_{\mu i}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\mu = 1 \cdots s-m)$$

не связаны никакими линейными соотношениями вида

$$\Psi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot Z_1 f + \cdots + \Psi_{s-m}(x_1 \cdots x_s) \cdot Z_{s-m} f = 0.$$

Поскольку, кроме того, согласно утв. 1, стр. 408, любое инфинитезимальное преобразование $(Z_\mu Z_\nu)$ перестановочно с $X_1 f \cdots X_r f$, то имеют место соотношения специального вида:

$$(Z_\mu Z_\nu) = \sum_{\pi=1}^{s-m} \omega_{\mu\nu\pi}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-m}) \cdot Z_\pi f \quad (\mu, \nu = 1 \cdots s-m).$$

Таким образом, мы видим: инфинитезимальное преобразование, перестановочное с $X_1 f \cdots X_r f$, существует тогда и только тогда, когда число m, определенное на стр. 411, меньше числа s переменных x. Если $m < s$ и в то же время $n < s$, то есть если группа $X_1 f \cdots X_r f$ интранзитивна, то самое общее инфинитезимальное преобразование Zf, перестановочное с $X_1 f \cdots X_r f$, зависит лишь от произвольных функций. Если же $n = s$, то есть группа $X_1 f \cdots X_r f$ транзитивна, то самое общее инфинитезимальное преобразование Zf, перестановочное с $X_1 f \cdots X_r f$, можно линейно получить из $s-m$ независимых инфинитезимальных преобразований $Z_1 f \cdots Z_{s-m} f$; согласно вышеупомянутому замечанию (стр. 408), эти инфинитезимальные преобразования порождают тогда $(s-m)$-параметрическую группу.

Мы знаем, что инфинитезимальное преобразование, перестановочное с $X_1 f \cdots X_r f$, существует только тогда, когда уравнения (4) сводятся к менее чем s независимым. Этому условию мы можем придать более наглядную формулировку, если вспомним тождества (3) или эквивалентные им

$$\xi_{n+k,i} - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x) \cdot \xi_{\nu i} \equiv 0 \quad (k = 1 \cdots r-n;\ i = 1 \cdots s),$$

определяющие функции $\varphi_{k\nu}$. Продифференцировав вышеупомянутые тождества относительно x_j, получаем следующие тождества:

$$\frac{\partial \xi_{n+k,i}}{\partial x_j} - \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \varphi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_j} + \xi_{\nu i} \frac{\partial \varphi_{k\nu}}{\partial x_j} \right\} \equiv 0$$
$$(k = 1 \cdots r-n;\ i, j = 1 \cdots s),$$

в силу которых можно заменить уравнения (4) эквивалентными уравнениями:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\nu i} \sum_{j=1}^{s} \zeta_j \frac{\partial \varphi_{k\nu}}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1 \cdots s,\ k = 1 \cdots r - n).$$

Но поскольку не все определители вида $\sum \pm \xi_{1k_1} \cdots \xi_{nk_n}$ обращаются в нуль тождественно, то последние уравнения, в свою очередь, эквивалентны следующим:

$$\sum_{j=1}^{s} \zeta_j \frac{\partial \varphi_{k\nu}}{\partial x_j} = 0 \quad (k = 1 \cdots r - n,\ \nu = 1 \cdots n). \tag{4'}$$

Таким образом, инфинитезимальное преобразование Zf, перестановочное с $X_1 f \cdots X_r f$, существует только тогда, когда уравнения (4'), линейные по ζ_j, сводятся к менее чем s независимым уравнениям.

Уравнения (4') нагляднее, чем уравнения (4), кроме того, они имеют простой смысл, который состоит в том, что каждая из $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ допускает все инфинитезимальные преобразования Zf.

Если среди уравнений (4) имеется ровно m независимых друг от друга, то, конечно, и среди уравнений (4') имеется ровно m независимых друг от друга, то есть очевидно, что m — не что иное, как число независимых среди $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x)$.

Обобщим полученные результаты.

Теорема 67. *Если из r независимых инфинитезимальных преобразований:*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

r-параметрической группы некоторые $X_1 f \cdots X_n f$ не связаны никакими линейными соотношениями, в то время как $X_{n+1} f \cdots X_r f$ можно выразить через них линейно:

$$X_{n+j} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (j = 1 \cdots r - n),$$

и если среди $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}$ имеется ровно s друг от друга независимых, то не существует инфинитезимального преобразования, перестановочного со всеми $X_k f$; если же среди функций $\varphi_{k\nu}$ имеется меньше, чем s, скажем лишь m независимых, то инфинитезимальное преобразование,

перестановочное с $X_1 f \cdots X_r f$, *а именно самое общее такое инфинитезимальное преобразование* Zf, *имеет вид*

$$Zf = \psi_1(\mathrm{u}_1 \cdots \mathrm{u}_{s-n}) \cdot Z_1 f + \cdots + \psi_{s-m}(\mathrm{u}_1 \cdots \mathrm{u}_{s-n}) \cdot Z_{s-m} f,$$

где $\mathrm{u}_1 \cdots \mathrm{u}_{s-n}$ — *независимые решения* n-*параметрической полной системы* $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, *а* $\psi_1 \cdots \psi_{s-m}$ — *произвольные функции своих аргументов и, наконец, где перестановочные с* $X_1 f \cdots X_r f$ *инфинитезимальные преобразования, не связанные никакими линейными соотношениями*

$$Z_\mu f = \sum_{i=1}^{s} \zeta_{\mu i}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\mu = 1 \cdots s-m),$$

находятся попарно в соотношениях вида[1]

$$(Z_\mu Z_\nu) = \sum_{\pi=1}^{s-m} \omega_{\mu\nu\pi}(\mathrm{u}_1 \cdots \mathrm{u}_{s-n}) \cdot Z_\pi f.$$

Часть сформулированных в этом утверждении результатов следует, кстати, непосредственно из рассуждений предыдущей главы. Так, если число независимых функций среди $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ в точности равно s, то уравнения

$$\varphi_{k\nu}(x_1' \cdots x_s') = \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \quad (k = 1 \cdots r-n;\ \nu = 1 \cdots n),$$

согласно стр. 381, представляют самое общее преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $X_1' f \cdots X_r' f$ соответственно. Если же среди $\varphi_{k\nu}$ имеется меньше, чем s независимых друг от друга функций, то согласно теореме 65, стр. 391, имеется непрерывное семейство преобразований, оставляющих всякое $X_k f$ инвариантным; на стр. 407 мы уже замечали, что совокупность всех таких преобразований образует группу, о которой сразу можно сказать, что она содержит однопараметрические группы.

Видится уместным сформулировать особо еще следующее

Утверждение 2. *Если вообще существует инфинитезимальное преобразование, перестановочное со всеми инфинитезимальными преобразованиями* $X_1 f \cdots X_r f$ r-*параметрической группы пространства* $x_1 \cdots x_s$, *то самое общее инфинитезимальное преобразование, перестановочное с* $X_1 f \cdots X_r f$, *содержит произвольные функции, если группа* $X_1 f \cdots X_r f$ *интранзитивна, и напротив, оно содержит только произвольные параметры, если группа транзитивна.*

[1] На эту общую теорему Ли указал в Math. Ann., том XXV.

§ 96

Исключительное значение имеет случай, когда группа $X_k f$ является просто транзитивной, то есть случай $s = r = n$.

Если мы хотим в этом случае знать самое общее преобразование $x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_n)$, в силу которого всякое $X_k f$ принимает вид $X_k' f$, то надо лишь найти n независимых решений $\Omega_1 \cdots \Omega_n$ n-параметрической полной системы

$$X_k f + X_k' f = 0 \quad (k = 1 \cdots n)$$

и приравнять их произвольным константам $a_1 \cdots a_n$. Тогда уравнения

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ x_1' \cdots x_n') = a_k \quad (k = 1 \cdots n)$$

разрешимы относительно как x, так и x' и представляют требуемое преобразование.

Мы знаем изначально, что совокупность всех преобразований $\Omega_k = a_k$ образует группу. Теперь мы видим, что эта группа является n-параметрической и простой транзитивной; это следует непосредственно из вида, который принимает группа, будучи разрешенной относительно n своих параметров.

Группа

$$\Omega_1(x, x') = a_1,\ \cdots\ \Omega_n(x, x') = a_n$$

содержит тождественное преобразование и n независимых инфинитезимальных преобразований

$$Z_k f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots n).$$

Это следует из рассуждений предыдущего параграфа, но ясно и само по себе, так как преобразования группы упорядочиваются в пары взаимно обратных, и стало быть, применима теорема 56 из гл. 18, стр. 349. Кроме того, из транзитивности группы $Z_1 f \cdots Z_n f$ следует, что $Z_1 f \cdots Z_n f$ не связаны никакими линейными соотношениями вида $\sum \chi_i(x_1 \cdots x_s) Z_i f = 0$.

Между двумя *просто транзитивными* группами $X_k f$ и $Z_i f$ имеет место полное взаимное соответствие. Если заданы $X_k f$, то общее инфинитезимальное преобразование $Z f = \sum e_i Z_i f$ полностью определяется n уравнениями

$$X_k\big(Z(f)\big) - Z\big(X_k(f)\big) = 0 \quad (k = 1 \cdots n);$$

если, с другой стороны, заданы $Z_i f$, то n уравнений

$$X\big(Z_i(f)\big) - Z_i\big(X(f)\big) = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

задают тем же образом общее инфинитезимальное преобразование

$$Xf = \sum e_k X_k f.$$

Но этим описание своеобразной связи, в которой находятся эти две группы, еще не исчерпывается, а именно: как мы теперь покажем, они к тому же являются равносоставленными; поскольку обе группы являются просто транзитивными, то отсюда непосредственно следует, что они также подобны (ср. гл. 19, теорема 64, стр. 376).

Допустим, что $\xi_{k\nu}$ и $\zeta_{i\nu}$ в инфинитезимальных преобразованиях $X_k f$ и $Z_i f$ разложены по степеням $x_1 \cdots x_n$, если предположить, что $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ — точка общего положения. Согласно гл. 13, стр. 241, группа $X_k f$, будучи просто транзитивной, содержит в точности n инфинитезимальных преобразований нулевого порядка относительно $x_1 \cdots x_n$, из которых нельзя линейно получить никаких инфинитезимальных преобразований первого или более высокого порядка.

Поэтому мы можем считать, что $X_1 f \cdots X_n f$ заменены другими n независимыми инфинитезимальными преобразованиями $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_n f$, имеющими вид

$$\mathfrak{X}_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{k\mu\nu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots$$

$$(k = 1 \cdots n),$$

если опустить члены второго и более высокого порядка. Таким же образом мы можем заменить $Z_1 f \cdots Z_n f$ n независимыми инфинитезимальными преобразованиями вида

$$\mathfrak{Z}_i f = -\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} l_{i\mu\nu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots$$

$$(i = 1 \cdots n).$$

После этих приготовлений составим уравнение $(\mathfrak{X}_k \mathfrak{Z}_i) = 0$; оно будет иметь вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} (l_{ik\nu} + h_{ki\nu}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots = 0,$$

откуда следует:

$$l_{ik\nu} = -h_{ki\nu}.$$

Подобные вычисления дают в результате:

$$(\mathfrak{X}_k\mathfrak{X}_j) = \sum_{\nu=1}^{n}(h_{jk\nu} - h_{kj\nu})\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots,$$

$$(\mathfrak{Z}_k\mathfrak{Z}_j) = \sum_{\nu=1}^{n}(-l_{jk\nu} + l_{kj\nu})\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}(h_{kj\nu} - h_{jk\nu})\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots.$$

С другой стороны,

$$(\mathfrak{X}_k\mathfrak{X}_j) = \sum_{\nu=1}^{n} c_{kj\nu}\mathfrak{X}_\nu f, \quad (\mathfrak{Z}_k\mathfrak{Z}_j) = \sum_{\nu=1}^{n} c'_{kj\nu}\mathfrak{Z}_\nu f;$$

здесь мы подставим найденные только что выражения для $\mathfrak{X}_\nu f$, $\mathfrak{Z}_\nu f$, $(\mathfrak{X}_k\mathfrak{X}_j)$, $(\mathfrak{Z}_k\mathfrak{Z}_j)$, а затем произведем подстановку $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$; при этом получим

$$c_{kj\nu} = h_{jk\nu} - h_{kj\nu} = c'_{kj\nu}.$$

Таким образом, наши группы действительно являются равносоставленными и вследствие этого, как уже выше отмечалось, подобными. Итак, справедлива

Теорема 68. *Если $X_1 f \cdots X_n f$ — независимые инфинитезимальные преобразования просто транзитивной группы в переменных $x_1 \cdots x_n$, то n уравнений $(X_k Z) = 0$ определяют общее инфинитезимальное преобразование Zf второй просто транзитивной группы $Z_1 f \cdots Z_n f$, являющейся равносоставленной с группой $X_1 f \cdots X_n f$ и в то же время подобной ей. Связь между этими двумя просто транзитивными группами является двусторонней: каждая из обеих групп состоит из совокупности всех однопараметрических групп, преобразования которых перестановочны с любым преобразованием другой группы*[2].

Удобно называть группы $X_k f$ и $Z_i f$ *взаимными* группами преобразований, или же одну из них взаимной по отношению к другой.

[2]Теорему 68 Ли представил Научному обществу Христиании в ноябре 1882 г. и мае 1883 г.; ср. также Math. Annalen, том XXV, стр. 107 дд.

Вспомним из гл. 16, стр. 306, что выделенные инфинитезимальные преобразования $e_1 X_1 f + \cdots + e_n X_n f = Yf$ группы $X_1 f \cdots X_n f$ определены n уравнениями $(X_k Y) = 0$, тогда можно также сформулировать следующее

Утверждение 3. *Общие инфинитезимальные преобразования двух взаимных просто транзитивных групп являются в то же время выделенными инфинитезимальными преобразованиями обеих групп.*

Пусть две n-параметрические группы $X_1 f \cdots X_n f$ и $Z_1 f \cdots Z_n f$ в n переменных $x_1 \cdots x_n$ являются просто транзитивными и взаимными по отношению друг к другу. Тогда если при введении новых переменных $x'_1 \cdots x'_n$ преобразования X_k переходят в $X'_k f$, а $Z_k f$ — в $Z'_k f$, то обе просто транзитивные группы $X'_1 f \cdots X'_n f$ и $Z'_1 f \cdots Z'_n f$ также являются взаимными по отношению друг к другу. Это непосредственно следует из соотношения $(X'_k Z'_j) = (X_k Z_j) \equiv 0$.

Отсюда, в частности, следует

Утверждение 4. *Если n-параметрическая просто транзитивная группа от n переменных остается при преобразовании инвариантной, то и взаимная ей просто транзитивная группа остается инвариантной.*

Из этого утверждения, наконец, следует

Утверждение 5. *Наибольшая группа пространства $x_1 \cdots x_n$, в которой n-параметрическая просто транзитивная группа этого пространства содержится как инвариантная подгруппа, совпадает с наибольшей группой, в которой группа, взаимная этой просто транзитивной группе, содержится как инвариантная подгруппа.*

Снабдим предшествующие общие рассуждения о просто транзитивных группах парой простых примеров.

Группа

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

плоскости x, y является просто транзитивной. Конечные уравнения взаимной группы получаются в результате интегрирования полной системы

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x'} = 0, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + x'\frac{\partial f}{\partial x'} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

и имеют следующий вид:

$$\frac{x' - x}{y} = a, \quad \frac{y'}{y} = b$$

или, разрешенные относительно x' и y':

$$x' = x + ay, \quad y' = by.$$

Тогда инфинитезимальные преобразования взаимной группы будут таковы:

$$y\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Еще более интересный пример: шестипараметрическая проективная группа невырожденной поверхности второго порядка в обычном пространстве. Эта группа содержит две двухпараметрические просто транзитивные взаимные по отношению друг к другу группы, одна из которых оставляет неподвижными все образующие одного семейства, а вторая — все образующие другого.

Если $z - xy = 0$ — уравнение поверхности, то

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$X_3 f = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + (xy - z)\frac{\partial f}{\partial y} + xz\frac{\partial f}{\partial z}$$

— одна из этих двух просто транзитивных групп, а

$$Z_1 f = \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial z}, \quad Z_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$Z_3 f = (xy - z)\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + yz\frac{\partial f}{\partial z}$$

— вторая.

Эти две взаимные группы, разумеется, подобны, но надо заметить, что подобны они посредством *проективного* преобразования, а именно всякого проективного преобразования, переставляющего два семейства, образующих поверхности.

§ 97

Мы продолжаем общие исследования взаимных просто транзитивных групп.

Пусть $X_1 f \cdots X_n f$ и $Z_1 f \cdots Z_n f$ — две просто транзитивные и взаимные по отношению друг к другу группы в переменных $x_1 \cdots x_n$.

Если бы n равнялось 1, то эти группы были бы идентичны, как легко убедиться; поэтому мы предполагаем, что n больше 1. Тогда группа $Z_1 f \cdots Z_n f$ заведомо содержит подгруппы. Если $Z_1 f \cdots Z_m f$ $(m < n)$ — одна из них, то m уравнений

$$Z_1 f = 0, \cdots Z_m f = 0$$

образуют m-параметрическую полную систему, которая, как следует из тождеств

$$(X_i Z_1) \equiv 0, \cdots (X_i Z_m) \equiv 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

допускает группу $X_1 f \cdots X_n f$ (ср. гл. 8, теорема 20, стр. 156). Следовательно, группа $X_1 f \cdots X_n f$ является *импримитивной*.

Если $u_1 \cdots u_{n-m}$ — независимые решения полной системы $Z_1 f = 0, \cdots Z_m f = 0$, то согласно гл. 8, утв. 1, стр. 155, имеют место соотношения вида

$$X_i u_\nu = \omega_{i\nu}(u_1 \cdots u_{n-m}) \quad (i = 1 \cdots n,\ \nu = 1 \cdots n-m),$$

и поэтому (ср. стр. 159) ∞^{n-m} m-мерных многообразий

$$u_1 = \text{const}, \cdots u_{n-m} = \text{const}$$

переставляются между собой при помощи группы $X_1 f \cdots X_n f$.

Таким образом, мы имеем

Утверждение 6. *Всякая просто транзитивная группа $X_1 f \cdots X_n f$ от $n > 1$ переменных $x_1 \cdots x_n$ является импримитивной; если $Z_1 f \cdots Z_n f$ — соответствующая взаимная группа, а $Z_1 f \cdots Z_m f$ — ее произвольная подгруппа с инвариантами $u_1 \cdots u_{n-m}$, то m-параметрическая полная система $Z_1 f = 0, \cdots Z_m f = 0$ допускает группу $X_1 f \cdots X_n f$, а ∞^{n-m} m-мерных многообразий $u_1 = \text{const}, \cdots u_{n-m} = \text{const}$ переставляются этой группой между собой.*

Предыдущее утверждение показывает, что всякая m-параметрическая подгруппа группы $Z_1 f \cdots Z_n f$ дает совершенно определенное, инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_n f$ разбиение пространства $x_1 \cdots x_n$ на ∞^{n-m} m-мерных многообразий. Поэтому если представить, что все подгруппы группы $Z_1 f \cdots Z_n f$ заданы, и для каждой вычислены соответствующие инварианты, то мы получим бесконечно много разбиений пространства, инвариантных относительно группы $X_1 f \cdots X_n f$. Можно доказать, что таким образом находятся все имеющиеся инвариантные разбиения, то есть что утверждение 6 можно обратить.

Пусть $Y_1 f = 0, \cdots Y_m f = 0$ — некоторая m-параметрическая полная система, допускающая группу $X_1 f \cdots X_n f$, а $u_1 \cdots u_{n-m}$ — независимые решения этой полной системы, так что семейство из ∞^{n-m} m-мерных многообразий

$$u_1 = \text{const}, \cdots u_{n-m} = \text{const}$$

представляет инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_n f$ разбиение пространства. Мы утверждаем, что группа $Z_1 f \cdots Z_n f$ содержит совершенно определенную m-параметрическую подгруппу, оставляющую каждое из этих ∞^{n-m} многообразий неподвижным; это как раз и есть утверждение, обратное утверждению 6.

Сначала введем в качестве переменных в наших взаимных группах функции $u_1 \cdots u_{n-m}$ и какие-либо m независимых от них и друг от друга функций $v_1 \cdots v_m$ от x, тогда

$$X_k f = \sum_{\nu=1}^{n-m} \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} X_k v_\mu \frac{\partial f}{\partial v_\mu} \quad (k = 1 \cdots n)$$

и

$$Z_k f = \sum_{\nu=1}^{n-m} Z_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} Z_k v_\mu \frac{\partial f}{\partial v_\mu} \quad (k = 1 \cdots n),$$

где $X_k v_\mu$, $Z_k u_\nu$ и $Z_k v_\mu$ — некоторые функции от u и v. Наше утверждение, очевидно, сводится к тому, что из $Z_1 f \cdots Z_n f$ должны линейно получаться в точности m независимых инфинитезимальных преобразований, которые вовсе не преобразуют $u_1 \cdots u_{n-m}$, то есть в которых все коэффициенты при $\dfrac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial u_{n-m}}$ равны нулю.

Чтобы это доказать, мы должны вычислить коэффициенты при $\dfrac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial u_{n-m}}$ в общем инфинитезимальном преобразовании $Zf = e_1 Z_1 f + + \cdots + e_n Z_n f$ группы $Z_1 f \cdots Z_n f$.

Инфинитезимальное преобразование Zf полностью определено соотношениями

$$X_1\big(Z(f)\big) - Z\big(X_1(f)\big) = 0, \cdots X_n\big(Z(f)\big) - Z\big(X_n(f)\big) = 0.$$

Если мы в них заменим f на u_ν, то получим соотношения

$$X_1(Zu_\nu) - Z\omega_{1\nu} = 0, \cdots X_n(Zu_\nu) - Z\omega_{n\nu} = 0 \quad (\nu = 1 \cdots n - m).$$

Следовательно, функции $Zu_1 \cdots Zu_{n-m}$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$X_k \varrho_\nu - \sum_{\mu=1}^{n-m} \frac{\partial \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu} \varrho_\mu = 0 \quad (k = 1 \cdots n,\ \nu = 1 \cdots n-m), \tag{7}$$

в которых $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$ надо рассматривать как неизвестные функции.

Если

$$\varrho_1 = \psi_1(u_1 \cdots u_{n-m}, v_1 \cdots v_m), \cdots \varrho_{n-m} = \psi_{n-m}(u_1 \cdots u_{n-m}, v_1 \cdots v_m) \tag{8}$$

— некоторая система решений дифференциальных уравнений (7), то все $n(n-m)$ выражений

$$X_k \psi_\nu - \sum_{\mu=1}^{n-m} \frac{\partial \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu} \varrho_\mu$$

при подстановке $\varrho_1 = \psi_1, \cdots \varrho_{n-m} = \psi_{n-m}$ обращаются в нуль тождественно. Поэтому если понимать уравнения (8) как систему уравнений от $n+n-m$ переменных $u_1 \cdots u_{n-m}, v_1 \cdots v_m, \varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$, то сразу ясно, что эта система уравнений допускает n инфинитезимальных преобразований

$$U_k f = X_k f + \sum_{\nu=1}^{n-m} \left\{ \sum_{\mu=1}^{n-m} \frac{\partial \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu} \varrho_\mu \right\} \frac{\partial f}{\partial \varrho_\nu} \quad (k = 1 \cdots n). \tag{9}$$

И наоборот, также ясно, что если известна какая-либо система уравнений вида (8), допускающая инфинитезимальные преобразования $U_1 f \cdots U_n f$, то также известна система решений дифференциальных уравнений (7), так как функции $\psi_1 \cdots \psi_{n-m}$ являются такой системой.

Отсюда следует, что описание самой общей системы решений дифференциальных уравнений (7) сводится к тому, чтобы найти самую общую систему уравнений (8) от $2n-m$ переменных u, v, ϱ, допускающую инфинитезимальные преобразования $U_1 f \cdots U_n f$.

Всякая система уравнений, допускающая $U_1 f \cdots U_n f$, допускает также все инфинитезимальные преобразования $(U_i U_k)$. Вычисляя, находим

$$(U_i U_k) = (X_i X_k) + \sum_{\mu,\nu,\pi=1}^{n-m} \left(\omega_{i\pi} \frac{\partial^2 \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu \partial u_\pi} - \omega_{k\pi} \frac{\partial^2 \omega_{i\nu}}{\partial u_\mu \partial u_\pi} \right) \varrho_\mu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\nu} +$$

$$+ \sum_{\mu,\nu,\pi=1}^{n-m} \left(\frac{\partial \omega_{i\nu}}{\partial u_\mu} \frac{\partial \omega_{k\pi}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu} \frac{\partial \omega_{i\pi}}{\partial u_\nu} \right) \varrho_\mu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\pi},$$

или, если записать по-другому:

$$(U_iU_k) = (X_iX_k) + \sum_{\mu,\nu=1}^{n-m} \frac{\partial}{\partial u_\mu}(X_i\omega_{k\nu} - X_k\omega_{i\nu}) \cdot \varrho_\mu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\nu}.$$

Но так как $X_1 f \cdots X_n f$ порождают группу, то имеют место соотношения вида

$$(X_iX_k) = X_i\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_i(f)\big) = \sum_{\sigma=1}^{n} c_{ik\sigma} X_\sigma f,$$

то есть, в частности:

$$X_i(X_k u_\nu) - X_k(X_i u_\nu) = X_i\omega_{k\nu} - X_k\omega_{i\nu} = \sum_{\sigma=1}^{n} c_{ik\sigma}\omega_{\sigma\nu},$$

и тогда мы имеем

$$(U_iU_k) = \sum_{\sigma=1}^{n} c_{ik\sigma} U_\sigma f.$$

Следовательно, инфинитезимальные преобразования $U_1 f \cdots U_n f$ порождают n-параметрическую группу в $2n-m$ переменных $u_1 \cdots u_{n-m}, v_1 \cdots v_m, \varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$.

Таким образом, речь теперь идет о том, чтобы найти самую общую систему уравнений вида (8), допускающую группу $U_1 f \cdots U_n f$. Поскольку $X_1 f \cdots X_n f$ не связаны никакими линейными соотношениями, то в матрице, соответствующей преобразованиям $U_1 f \cdots U_n f$, не все определители порядка n обращаются в нуль тождественно, и точно так же эти определители не могут все обращаться в нуль в силу системы уравнений вида (8). Из теоремы 42, гл. 14, стр. 263, следует поэтому, что всякая система уравнений вида (8), допускающая группу $U_1 f \cdots U_n f$, представлена соотношениями между решениями n-параметрической полной системы $U_1 f = 0, \cdots U_n f = 0$. Но эта полная система имеет ровно $n - m$ независимых решений, например:

$$\Psi_\mu(u_1 \cdots u_{n-m}, v_1 \cdots v_m, \varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}) \quad (k = 1 \cdots n-m),$$

а значит, $\Psi_1 \cdots \Psi_{n-m}$ являются независимыми друг от друга относительно $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$, так как полная система разрешима относительно производных $\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial u_{n-m}}, \frac{\partial f}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial v_n}$ (ср. гл. 5, теорема 12, стр. 101). Отсюда мы

заключаем, что самая общая система уравнений (8), допускающая группу $U_1 f \cdots U_n f$, может принять вид

$$\Psi_1 = C_1, \cdots \Psi_{n-m} = C_{n-m},$$

где $C_1 \cdots C_{n-m}$ — произвольные константы.

Разрешив только что найденную систему уравнений относительно $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$, что, несомненно, возможно, мы получим самую общую систему решений дифференциальных уравнений (7), то есть мы видим, что эта самая общая система решений содержит ровно $n-m$ существенных произвольных констант. Но поскольку дифференциальные уравнения (7) от неизвестных $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$ линейны и однородны, то должно быть возможным записать упомянутую самую общую систему решений в виде

$$\varrho_\mu = C_1' \psi_\mu^{(1)} + C_2' \psi_\mu^{(2)} + \cdots + C_{n-m}' \psi_\mu^{(n-m)} \quad (\mu = 1 \cdots n-m), \tag{10}$$

где $n-m$ систем функций

$$\psi_1^{(\nu)}, \psi_2^{(\nu)} \cdots \psi_{n-m}^{(\nu)} \quad (\nu = 1 \cdots n-m)$$

представляют собой столько же линейно независимых, не содержащих произвольных констант систем решений дифференциальных уравнений (7), и где C' — произвольные константы. Само собой разумеется, определитель, составленный из ψ, здесь не обращается в нуль, так как уравнения (10) должны быть разрешимы относительно $C_1' \cdots C_{n-m}'$.

Функции $Zu_1 \cdots Zu_{n-m}$ являются (стр. 424) решениями дифференциальных уравнений (7), а потому имеют вид

$$Zu_\mu = \varrho_\mu = \overline{C}_1 \psi_\mu^{(1)} + \cdots + \overline{C}_{n-m} \psi_\mu^{(n-m)} \quad (\mu = 1 \cdots n-m).$$

При этом $\overline{C}_\nu$ — константы, о которых мы пока больше ничего точно не знаем; не исключено, что эти функции связаны линейными соотношениями.

Из значений функции Zu_μ для инфинитезимального преобразования Zf группы $Z_1 f \cdots Z_n f$ получается следующее представление:

$$Zf = \sum_{\mu,\nu=1}^{n-m} \overline{C}_\mu \psi_\nu^{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial u_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} Zv_\mu \frac{\partial f}{\partial v_\mu}.$$

А поскольку $n-m$ выражений

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \psi_\nu^{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \quad (\mu = 1 \cdots n-m)$$

представляют независимые инфинитезимальные преобразования, то из $Z_1 f \cdots Z_n f$ можно, очевидно, линейно получить по меньшей мере m, то есть, например, в точности $m + \varepsilon$ независимых инфинитезимальных преобразований, в которых коэффициенты при $\dfrac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial u_{n-m}}$ равны нулю. Эти $m + \varepsilon$ инфинитезимальных преобразований, конечно, порождают $(m + \varepsilon)$-параметрическую подгруппу группы $Z_1 f \cdots Z_n f$, а именно подгруппу, которая оставляет каждое из ∞^{n-m} m-мерных многообразий $u_1 = \text{const}, \cdots u_{n-m} = \text{const}$ неподвижным. Но это возможно лишь тогда, когда целое число ε равно нулю, так как если бы было $\varepsilon > 0$, то группа $Z_1 f \cdots Z_n f$ не могла бы быть просто транзитивной.

Итак, утверждение, сформулированное на стр. 423, доказано, следовательно мы можем сформулировать следующее

Утверждение 7. *Если $X_1 f \cdots X_n f$ и $Z_1 f \cdots Z_n f$ — две взаимные просто транзитивные группы в n переменных $x_1 \cdots x_n$, а*

$$u_1(x_1 \cdots x_n) = \text{const}, \cdots u_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = \text{const}$$

— некоторое инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_n f$ разбиение пространства $x_1 \cdots x_n$ на ∞^{n-m} m-мерных многообразий, то группа $Z_1 f \cdots Z_r f$ всегда содержит m-параметрическую подгруппу, оставляющую каждое из этих ∞^{n-m} многообразий неподвижным.

Связав это утверждение с утверждением 6 на стр. 423, мы получим следующую теорему.

Теорема 69. *Если n-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_n f$ в n переменных $x_1 \cdots x_n$ является просто транзитивной, то все m-параметрические полные системы, допускающие эту группу или, что то же самое, все инвариантные разбиения пространства $x_1 \cdots x_n$ на ∞^{n-m} m-мерных многообразий находятся следующим образом: сначала задается соответствующая группе $X_1 f \cdots X_n f$ взаимная просто транзитивная группа $Z_1 f \cdots Z_n f$ и выписываются все m-параметрические подгруппы последней; если*

$$\mathrm{Z}_\mu f = g_{\mu 1} Z_1 f + \cdots + g_{\mu n} Z_n f \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

— одна из найденных подгрупп, то уравнения $\mathrm{Z}_1 f = 0, \cdots \mathrm{Z}_m f = 0$ представляют собой одну из искомых полных систем и задают некоторое инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_n f$ разбиение пространства $x_1 \cdots x_n$ на ∞^{n-m} m-мерных многообразий; если для каждой из найденных подгрупп составить m-параметрическую полную систему, которая ей

соответствует, то получатся все m-параметрические полные системы, допускающие группу $X_1 f \cdots X_n f$. Если провести указанное исследование для каждого из чисел $m = 1, 2 \cdots n-1$, то мы получим вообще все полные системы, допускающие группу $X_1 f \cdots X_n f$, и в то же время все инвариантные относительно этой группы разбиения пространства $x_1 \cdots x_n$.

Вышеизложенная теорема содержит решение задачи нахождения всех возможных вариантов, каким образом заданная *просто транзитивная* группа может быть представлена как импримитивная.

Пусть теперь уравнения

$$u_1 = \text{const}, \cdots u_{n-m} = \text{const}$$

снова представляют какое-либо инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_n f$ разбиение пространства $x_1 \cdots x_n$ на ∞^{n-m} m-мерных многообразий, такое, что если ввести $u_1 \cdots u_{n-m}$ в качестве новых переменных, помимо m функций $v_1 \cdots v_m$, то $X_1 f \cdots X_n f$ принимают вид

$$X_k f = \sum_{\nu=1}^{n-m} \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} \bar{\xi}_{k\mu}(u_1 \cdots u_{n-m}, v_1 \cdots v_m) \frac{\partial f}{\partial v_\mu}.$$

Здесь не все определители порядка $n-m$ матрицы

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \cdot & \omega_{1,n-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{n1} & \cdot & \omega_{n,n-m} \end{vmatrix}$$

могут обращаться в нуль тождественно, иначе $X_1 f \cdots X_n f$ должны были бы быть связаны линейным соотношением, что противоречило бы условию. Поэтому если мы под $u_1^0 \cdots u_{n-m}^0$ понимаем общую систему значений, то группа $X_1 f \cdots X_n f$ содержит согласно гл. 13, стр. 246, ровно ∞^{m-1} различных инфинитезимальных преобразований, оставляющих систему уравнений

$$u_1 = u_1^0, \cdots u_{n-m} = u_{n-m}^0$$

инвариантной; тогда эти инфинитезимальные преобразования, разумеется, порождают m-параметрическую подгруппу, самую общую подгруппу группы $X_1 f \cdots X_n f$, оставляющую m-мерное многообразие $u_1 = u_1^0, \cdots u_{n-m} = u_{n-m}^0$, или кратко M, неподвижным.

С другой стороны, только что упомянутое выше m-мерное многообразие M допускает также m независимых инфинитезимальных преобразований взаимной группы $Z_1 f \cdots Z_n f$, так как эта группа содержит согласно утверждению 7, стр. 427, m-параметрическую подгруппу, оставляющую

неподвижным каждое из этих ∞^{n-m} многообразий в отдельности:

$$u_1 = \text{const}, \cdots u_{n-m} = \text{const}.$$

Кроме того, ясно, что M не может допускать никакой большей подгруппы, чем подгруппа группы $Z_1 f \cdots Z_n f$, так как $u_1^0 \cdots u_{n-m}^0$ должна быть общей системой значений.

Отсюда мы видим, что M допускает для каждой из взаимных групп $X_1 f \cdots X_n f$ и $Z_1 f \cdots Z_n f$ в точности m независимых инфинитезимальных преобразований, то есть для каждой группы — совершенно определенную m-параметрическую подгруппу.

Мы можем описать обе эти m-параметрические подгруппы более явно, если выберем какую-либо систему значений $v_1^0 \cdots v_m^0$ общего положения и разложим инфинитезимальные преобразования обеих наших взаимных групп по степеням $u_1 - u_1^0, \cdots u_{n-m} - u_{n-m}^0, v_1 - v_1^0, \cdots v_m - v_m^0$. Если не принимать во внимание члены первого и более высокого порядка, то мы можем, как это было сделано на стр. 419, заменить инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_n f$ на n независимых вида

$$\mathfrak{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial u_1} + \cdots, \cdots \mathfrak{X}_{n-m} f = \frac{\partial f}{\partial u_{n-m}} + \cdots,$$

$$\mathfrak{X}_{n-m+1} f = \frac{\partial f}{\partial v_1} + \cdots, \cdots \mathfrak{X}_n f = \frac{\partial f}{\partial v_m} + \cdots,$$

а $Z_1 f \cdots Z_n f$ — на n преобразований вида

$$\mathfrak{Z}_1 f = -\frac{\partial f}{\partial u_1} + \cdots, \cdots \mathfrak{Z}_{n-m} f = -\frac{\partial f}{\partial u_{n-m}} + \cdots,$$

$$\mathfrak{Z}_{n-m+1} f = -\frac{\partial f}{\partial v_1} + \cdots, \cdots \mathfrak{Z}_n f = -\frac{\partial f}{\partial v_m} + \cdots.$$

Здесь $\mathfrak{X}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{X}_n f$, очевидно, — независимые инфинитезимальные преобразования, оставляющие многообразие $u_1 = u_1^0, \cdots u_{n-m} = u_{n-m}^0$ инвариантным, и $\mathfrak{Z}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{Z}_n f$ — независимые инфинитезимальные преобразования, делающие то же самое; то есть $\mathfrak{X}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{X}_n f$ и $\mathfrak{Z}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{Z}_n f$ — две m-параметрические подгруппы, о которых только что шла речь.

Из этого представления обеих подгрупп можно сделать несколько замечательных выводов.

Между $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_n f$ имеют место соотношения вида

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_{\nu=1}^{n} c_{ik\nu} \mathfrak{X}_\nu f,$$

и, согласно стр. 419 и д., между $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_n f$ имеют место те же соотношения:

$$(\mathfrak{Z}_i \mathfrak{Z}_k) = \sum_{\nu=1}^{n} c_{ik\nu} \mathfrak{Z}_\nu f,$$

с теми же константами $c_{ik\nu}$. Отсюда следует, что обе подгруппы $\mathfrak{X}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{X}_n f$ и $\mathfrak{Z}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{Z}_n f$ являются равносоставленными. И можно сказать даже больше. Группы $X_1 f \cdots X_n f$ и $Z_1 f \cdots Z_n f$ связаны между собой голоэдрическим изоморфизмом, который всякому инфинитезимальному преобразованию $e_1 \mathfrak{X}_1 f + \cdots + e_n \mathfrak{X}_n f$ ставит в соответствие инфинитезимальное преобразование $e_1 \mathfrak{Z}_1 f + \cdots + e_n \mathfrak{Z}_n f$. Поскольку при этом соответствии подгруппе $\mathfrak{X}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{X}_n f$ отвечает подгруппа $\mathfrak{Z}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{Z}_n f$, то ясно, что обе эти взаимные группы могут быть так связаны между собой голоэдрическим изоморфизмом, что обе m-параметрические подгруппы, оставляющие M инвариантным, соответствуют друг другу.

Обобщая результаты на стр. 429 и далее, мы имеем

Утверждение 8. *Если m-мерное многообразие пространства $x_1 \cdots x_n$ допускает ровно m независимых инфинитезимальных преобразований, а стало быть, и m-параметрическую подгруппу просто транзитивной группы $X_1 f \cdots X_n f$ этого пространства, то она в то же время допускает ровно m независимых инфинитезимальных преобразований, а значит, m-параметрическую подгруппу группы, взаимной по отношению к просто транзитивной группе $Z_1 f \cdots Z_n f$. Эти две определенные таким образом m-параметрические подгруппы являются равносоставленными, и можно так связать эти взаимные простые транзитивные группы голоэдрическим изоморфизмом, что при этом наши m-параметрические подгруппы соответствуют друг другу.*

§ 98

Бóльшую часть результатов предыдущего параграфа можно получить при помощи простых рассуждений в более общих терминах. Мы сейчас это проделаем и получим некоторые дополнительные результаты.

Пусть, как и прежде, $X_1 f \cdots X_n f$ и $Z_1 f \cdots Z_n f$ — две взаимные просто транзитивные группы в переменных $x_1 \cdots x_n$; далее пусть $Z_1 f \cdots Z_m f$ — снова какая-либо m-параметрическая подгруппа группы $Z_1 f \cdots Z_n f$, а $u_1 \cdots u_{n-m}$ — ее инварианты. Пусть S будет общим символом преобразования группы $Z_1 f \cdots Z_m f$ и, наконец, T будет произвольно выбранным преобразованием группы $X_1 f \cdots X_n f$.

Если теперь P — какая-либо точка пространства $x_1 \cdots x_n$, то

$$(P') = (P)S$$

— общий символ точки на таком многообразии

$$u_1 = \text{const}, \cdots u_{n-m} = \text{const},$$

которое проходит через точку P. Поскольку, кроме того, преобразования S и T перестановочны, то мы имеем

$$(P')T = (P)ST = (P)TS,$$

то есть, если обозначить точку $(P)T$ через Π:

$$(P')T = (\Pi)S. \tag{11}$$

Здесь $(\Pi)S$ — общий символ точки на многообразии, проходящем через Π: $u_\nu = \text{const}$. Следовательно, наше символическое уравнение (11) означает, что преобразование T, то есть вообще всякое преобразование группы $X_1 f \cdots X_n f$, переставляет между собой ∞^{n-m} многообразий $u_1 = \text{const}, \cdots u_{n-m} = \text{const}$, переводя каждое из этих многообразий в многообразие того же семейства.

Таким образом, мы вывели утверждение 6, стр. 423.

Но и обратное к этому утверждение мы можем доказать при помощи аналогичных общих рассуждений.

Предположим, что нам дано некоторое разбиение пространства $x_1 \cdots x_n$ на ∞^{n-m} m-мерных многообразий, инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_n f$, и что M — одно из этих ∞^{n-m} многообразий. Под P и P' мы понимаем какие-либо две точки M, а под T — какое-либо преобразование группы $X_1 f \cdots X_n f$.

Если P переходит при выполнении T в Π, то мы имеем

$$(\Pi) = (P)T;$$

с другой стороны, во взаимной группе $Z_1 f \cdots Z_n f$ всегда имеется одно и только одно преобразование S, переводящее P в P':

$$(P') = (P)S.$$

Поскольку

$$(P)ST = (P)TS,$$

то

$$(P')T = (\Pi)S. \tag{12}$$

Это уравнение мы должны попытаться объяснить.

Сначала предположим, что точка Π также принадлежит многообразию M. В этом случае преобразование T обладает свойством оставлять M инвариантным. Действительно, T переставляет упомянутые ∞^{n-m} многообразий между собой, с другой стороны, T переводит точку из M, а именно P, в точку из M, а именно в точку Π; таким образом, T должно переводить все точки из M в точки из M, то есть оставлять M инвариантным. Но поскольку P' лежит на M, то точка $(P')T$, а в силу (12) также и точка $(\Pi)S$, принадлежат многообразию M; однако Π при подходящем выборе T может быть любой точкой из M, то есть преобразование S переводит каждую точку из M в точку из M, то есть оно тоже оставляет многообразие M инвариантным.

С другой стороны, мы можем предположить, что Π — произвольная точка какого-либо другого многообразия из упомянутых ∞^{n-m} многообразий; если мы наложим такое условие, то сразу увидим из (12), что S оставляет рассматриваемое многообразие на месте.

Тем самым доказано, что группа $Z_1 f \cdots Z_n f$ содержит преобразование S, оставляющее каждое из наших ∞^{n-m} многообразий неподвижным. Таких преобразований S имеется, очевидно, ∞^m различных, так как при фиксированном P точка P' внутри M может выбираться еще ∞^m различными способами. Больше, чем ∞^m, таких преобразований в группе $Z_1 f \cdots Z_n f$ также не может иметься, так как она является просто транзитивной; то есть ∞^m имеющихся преобразований образуют m-параметрическую подгруппу группы $Z_1 f \cdots Z_n f$.

Итак, утверждение 7 на стр. 427 доказано.

Очевидно, что многообразие M допускает, кроме ∞^m преобразований группы $Z_1 f \cdots Z_n f$, еще ∞^m преобразований группы $X_1 f \cdots X_n f$, которые, в свою очередь, образуют m-параметрическую подгруппу этой группы. Это результат, сформулированный в утверждении 8, стр. 431.

Нечто существенно новое получается, если в только что проведенных рассуждениях число m выбрать равным n. До сих пор этот случай не рассматривался, поскольку ему не соответствует никакое разбиение пространства $x_1 \cdots x_n$.

Если m равно n, то многообразие M совпадает с самим пространством $x_1 \cdots x_n$; поэтому P и P' — произвольные точки этого пространства, S

может при подходящем выборе точек P и P' быть любым преобразованием взаимной группы $Z_1 f \cdots Z_n f$.

Если выбрать фиксированными P и P', то преобразование S будет полностью определено; тогда если T — произвольное преобразование группы $X_1 f \cdots X_n f$, то мы имеем

$$(P)ST = (P)TS$$

или, в силу $(P') = (P)S$,

$$(P')T = (P)TS. \tag{13}$$

Здесь точка $(P)T$ при подходящем выборе преобразования T может быть совмещена с любой точкой пространства $x_1 \cdots x_n$; то же самое верно для точки $(P')T$. Следовательно, уравнение (13) дает нам возможность, указать для всякой точки $\mathfrak{B}$ этого пространства новое положение $\mathfrak{P}'$, которое она получает при преобразовании S; нам надо лишь задать такое преобразование T группы $X_1 f \cdots X_n f$, которое переводит P в $\mathfrak{P}$, то есть удовлетворяет символическому уравнению

$$(P)\mathsf{T} = (\mathfrak{P}).$$

Тогда

$$(\mathfrak{P}') = (\mathfrak{P})S = (P)\mathsf{T}S,$$

то есть

$$(\mathfrak{P}') = (P')\mathsf{T}.$$

Пусть теперь точка $\mathfrak{P}$ принимает все возможные положения, или что то же самое, подставим в качестве T по очереди все преобразования группы $X_1 f \cdots X_n f$, тогда для каждой точки пространства $x_1 \cdots x_n$ мы получим соответствующую ей совершенно определенную другую точку, то есть мы получим преобразование пространства $x_1 \cdots x_n$, а именно преобразование S. Если мы, наконец, еще выберем точки P и P' всеми возможными способами, то получим, очевидно, все преобразования группы $Z_1 f \cdots Z_n f$.

Таким образом, мы можем сказать:

Если две точки P и P' пространства $x_1 \cdots x_n$ преобразуются конгредиентным образом каждым из ∞^n преобразований просто транзитивной группы $X_1 f \cdots X_n f$, то преобразование, которое переводит любое из ∞^n принимаемых точкой P положений в соответствующее положение точки P', принадлежит взаимной группе $Z_1 f \cdots Z_n f$ группы $X_1 f \cdots X_n f$.

Если выбирать точки P и P' всеми возможными способами, то получатся все преобразования группы $Z_1 f \cdots Z_n f$.

Само собой разумеется, что здесь под точками P и P' всегда понимаются точки общего положения или, точнее говоря, такие, которые не лежат ни на каком многообразии, инвариантном относительно группы $X_1 f \cdots X_n f$.

Если известны конечные уравнения группы $X_1 f \cdots X_n f$, то чтобы выписать конечные уравнения для преобразований группы $Z_1 f \cdots Z_n f$, можно использовать только что найденную конструкцию.

Пусть

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

— конечные уравнения группы $X_1 f \cdots X_n f$. Тогда если обозначить координаты точки P через $x_1^0 \cdots x_n^0$, а координаты точки P' — через $u_1^0 \cdots u_n^0$, то P принимает в результате ∞^n преобразований группы $X_1 f \cdots X_n f$ ∞^n различных положений

$$y_i = f_i(x_1^0 \cdots x_n^0, a_1 \cdots a_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

а P' принимает ∞^n положений

$$y_i' = f_i(u_1^0 \cdots u_n^0, a_1 \cdots a_n) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Всякая система значений a дает нам соответствующие друг другу положения P и P'; поэтому если мы исключим из уравнений $y_i = f_i(x^0, a)$ и $y_i' = f_i(u^0, a)$ параметры $a_1 \cdots a_n$, то получим уравнения

$$y_i' = \mathfrak{F}(y_1 \cdots y_n, x_1^0 \cdots x_n^0, u_1^0 \cdots u_n^0) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{14}$$

преобразования группы $Z_1 f \cdots Z_n f$, а именно такого, которое переводит P в P'. Наконец, если мы придадим величинам $x_1^0 \cdots x_n^0$ и $u_1^0 \cdots u_n^0$ все возможные значения, то получим все преобразования группы $Z_1 f \cdots Z_n f$.

В только что найденных уравнениях (14) группы $Z_1 f \cdots Z_n f$, казалось бы, имеется $2n$ произвольных параметров, но лишь n из этих параметров являются существенными. Действительно, каждое преобразование группы $Z_1 f \cdots Z_n f$ можно получить ∞^n способами, так как можно всегда произвольно выбрать точку P, тогда как точка P' при фиксированном P задается соответствующим преобразованием.

Из этого следует, что все преобразования группы $Z_1 f \cdots Z_n f$ можно получить и таким образом: зафиксировать раз и навсегда точку P и придавать только точке P' все возможные положения; это значит, что для величин $x_1^0 \cdots x_n^0$ можно фиксировать значения и тогда нужно рассматривать лишь $u_1^0 \cdots u_n^0$ в качестве произвольных параметров.

Таким образом, верно следующее

Утверждение 9. *Если заданы конечные уравнения*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

n-параметрической просто транзитивной группы пространства $x_1 \cdots x_n$, то уравнения взаимной просто транзитивной группы находятся следующим образом.

В уравнениях

$$y_i = f_i(x_1^0 \cdots x_n^0, a_1 \cdots a_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

надо придать x^0 фиксированные значения и затем исключить из них и из уравнений

$$y_i' = f_i(u_1^0 \cdots u_n^0, a_1 \cdots a_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

n величин $a_1 \cdots a_n$; вытекающие отсюда уравнения

$$y_i' = \mathfrak{F}_i(y_1 \cdots y_n, x_1^0 \cdots x_n^0, u_1^0 \cdots u_n^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

с n произвольными параметрами $u_1^0 \cdots u_n^0$ — это уравнения взаимной группы. При этом по условию x_k^0 выбираются так, что точка $x_1^0 \cdots x_n^0$ не лежит ни на каком многообразии, остающемся инвариантным относительно группы $x_i' = f_i(x, a)$.

§ 99

Утверждение 1, стр. 427, — это частный случай общего утверждения, которое справедливо также для некоторых групп, не являющихся просто транзитивными. Это общее утверждение мы хотим теперь вывести; одновременно мы получим новое доказательство для утверждения 7.

Пусть $X_1 f \cdots X_n f$ — n-параметрическая группа в переменных $x_1 \cdots x_s$, причем число n не больше s. Кроме того, мы накладываем условие, что $X_1 f \cdots X_n f$ не связаны никакими линейными соотношениями вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0.$$

Доказываемое утверждение сводится к следующему: если известна какая-либо m-параметрическая полная система $\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0$, допускающая группу $X_1 f \cdots X_n f$, то эту систему всегда можно привести

к такому виду $Y_1 f = 0, \cdots Y_m f = 0$, что *все инфинитезимальные преобразования* $Y_1 f \cdots Y_m f$ *перестановочны с* $X_1 f \cdots X_n f$, и что в соотношениях

$$(Y_i Y_k) = \sum_{\nu=1}^{m} \tau_{ik\nu}(x_1 \cdots x_n) \cdot Y_\nu f,$$

имеющих место между $Y_1 f \cdots Y_m f$, все функции $\tau_{ik\nu}$ являются решениями n-параметрической полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$.

В специальном случае $s = n$, где группа $X_1 f \cdots X_n f$ является просто транзитивной, инфинитезимальные преобразования $Y_1 f \cdots Y_m f$, очевидно, относятся к группе $Z_1 f \cdots Z_n f$, взаимной к просто транзитивной группе $X_1 f \cdots X_n f$; далее, поскольку n-параметрическая полная система $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ в этом случае не имеет другого решения, кроме $f = \text{const}$, то функции $\tau_{ik\nu}$ являются просто константами, так что $Y_1 f \cdots Y_m f$ порождают m-параметрическую подгруппу группы $Z_1 f \cdots Z_n f$. Таким образом, мы получаем утверждение 7, стр. 427.

Но пока вернемся к общему случаю.

Предположим, нам дана m-параметрическая полная система

$$\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0,$$

допускающая группу $X_1 f \cdots X_n f$, так что Xf и $\mathfrak{Y} f$ связаны соотношениями вида

$$(\mathfrak{Y}_\mu X_k) = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{\mu k \nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot \mathfrak{Y}_\nu f \quad (k = 1 \cdots n;\ \mu = 1 \cdots m) \qquad (15)$$

(ср. гл. 13, стр. 245).

Сначала попробуем задать m функций $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ от x так, чтобы инфинитезимальное преобразование

$$Yf = \sum_{\mu=1}^{m} \varrho_\mu(x_1 \cdots x_s) \cdot \mathfrak{Y}_\mu f$$

было перестановочно со всеми n инфинитезимальными преобразованиями $X_k f$. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялись следующие n уравнений:

$$(X_k Y) = \sum_{\mu=1}^{m} X_k \varrho_\mu \cdot \mathfrak{Y}_\mu f + \sum_{\mu=1}^{m} \varrho_\mu (X_k \mathfrak{Y}_\mu) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ X_k \varrho_\mu - \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{\nu k \mu} \varrho_\nu \right\} \mathfrak{Y}_\mu f = 0,$$

или — поскольку $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_m f$ не могут быть связаны линейными соотношениями, — следующие mn соотношений:

$$X_k \varrho_\mu - \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{\nu k \mu} \varrho_\nu = 0 \quad (k = 1 \cdots n;\ \mu = 1 \cdots m). \tag{16}$$

Это дифференциальные уравнения, из которых надо определить ϱ. Если

$$\varrho_1 = P_1(x_1, \cdots x_s), \cdots \varrho_m = P_m(x_1 \cdots x_s) \tag{17}$$

— система решений дифференциальных уравнений (16), то уравнения

$$X_k P_\mu - \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{\nu k \mu} \varrho_\nu = 0$$

при подстановке $\varrho_1 = P_1, \cdots \varrho_m = P_m$ выполняются тождественно. Другими словами, система уравнений (17) в $s+m$ переменных $x_1 \cdots x_s$, $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ допускает инфинитезимальные преобразования

$$\mathfrak{U}_k f = X_k f + \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{\nu k \mu} \varrho_\nu \right\} \frac{\partial f}{\partial \varrho_\mu} \quad (k = 1 \cdots n).$$

Если, наоборот, система уравнений вида (17) допускает инфинитезимальные преобразования $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$, то функции $P_1 \cdots P_n$, очевидно, являются системой решений дифференциальных уравнений (16).

Отсюда мы видим, что интегрирование дифференциальных уравнений (16) сводится к тому, чтобы найти самую общую систему уравнений (17) в $s+m$ переменных x, ϱ, допускающую инфинитезимальные преобразования $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$.

Эта система допускает также инфинитезимальные преобразования $(\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_k)$.

Вычисляя, находим

$$(\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_k) = (X_i X_k) + \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \{X_i \alpha_{\nu k \mu} - X_k \alpha_{\nu i \mu}\} \varrho_\nu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\mu} + \\ + \sum_{\mu,\nu,\pi=1}^{m} \{\alpha_{\nu i \pi} \alpha_{\pi k \mu} - \alpha_{\nu k \pi} \alpha_{\pi i \mu}\} \varrho_\nu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\mu}.$$

Чтобы упростить здесь правую часть, применим тождество Якоби (ср. гл. 5, стр. 105):

$$\big(\mathfrak{Y}_\nu(X_iX_k)\big) + \big(X_i(X_k\mathfrak{Y}_\nu)\big) + \big(X_k(\mathfrak{Y}_\nu X_i)\big) = 0,$$

которое, если использовать (15), можно записать в виде

$$\big(\mathfrak{Y}_\nu(X_iX_k)\big) = \sum_{\mu=1}^{m}\{(X_if, a_{\nu k\mu}\mathfrak{Y}_\mu f) - (X_kf, \alpha_{\nu i\mu}\mathfrak{Y}_\mu f)\}$$

или

$$\big(\mathfrak{Y}_\nu(X_iX_k)\big) = \sum_{\mu=1}^{m}\{X_i\,\alpha_{\nu k\mu} - X_k\,\alpha_{\nu i\mu}\}\mathfrak{Y}_\mu f + \\ + \sum_{\mu,\pi=1}^{m}\{\alpha_{\nu i\mu}\,\alpha_{\mu k\pi} - \alpha_{\nu k\mu}\,\alpha_{\mu i\pi}\}\,\mathfrak{Y}_\pi f.$$

Но $X_1f\cdots X_nf$ порождают n-параметрическую группу, то есть

$$(X_iX_k) = \sum_{\sigma=1}^{n} c_{ik\sigma}X_\sigma f,$$

откуда следует:

$$\big(\mathfrak{Y}_\nu(X_iX_k)\big) = \sum_{\mu=1}^{m}\left\{\sum_{\sigma=1}^{n} c_{ik\sigma}\alpha_{\nu\sigma\mu}\right\}\mathfrak{Y}_\mu f.$$

Если еще учесть, что $\mathfrak{Y}_1f\cdots\mathfrak{Y}_mf$ не связаны линейными соотношениями, то мы получаем:

$$X_i\,\alpha_{\nu k\mu} - X_k\,\alpha_{\nu i\mu} + \sum_{\pi=1}^{m}\{\alpha_{\nu i\pi}\,\alpha_{\pi k\mu} - \alpha_{\nu k\pi}\,\alpha_{\pi i\mu}\} = \\ = \sum_{\sigma=1}^{n} c_{ik\sigma}\alpha_{\nu\sigma\mu}.$$

Если подставить это значение в полученное выше выражение вместо $(\mathfrak{U}_i\,\mathfrak{U}_k)$, то получится

$$(\mathfrak{U}_i\,\mathfrak{U}_k) = \sum_{\sigma=1}^{n} c_{ik\sigma}\,\mathfrak{U}_\sigma f,$$

следовательно, $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$ порождают n-параметрическую группу в $s+m$ переменных x, ϱ.

Но теперь речь идет о том, чтобы задать самую общую систему уравнений (17), допускающую n-параметрическую группу $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$.

Так как $X_1 f \cdots X_n f$ не связаны никакими линейными соотношениями, то не все определители порядка $n+1$ в матрице, соответствующей $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$, обращаются в нуль тождественно; но эти определители порядка n также, очевидно, не могут все быть равны нулю в силу системы уравнений вида (17). Следовательно, любая система уравнений вида (17), допускающая группу $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$, будет представлена соотношениями между решениями n-параметрической полной системы $\mathfrak{U}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{U}_n f = 0$ (ср. гл. 14, теорема 42, стр. 263).

Полная n-параметрическая система $\mathfrak{U}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{U}_n f = 0$ имеет $s + m - n$ независимых решений; $s-n$ из этих решений можно выбрать так, что они будут зависеть лишь от x и не будут содержать ϱ. Это те независимые решения n-параметрической полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, которые могут быть обозначены через

$$\mathfrak{v}_1(x_1 \cdots x_s) \cdots \mathfrak{v}_{s-n}(x_1 \cdots x_s).$$

Пусть, кроме того,

$$\Omega_1(\varrho_1 \cdots \varrho_m, x_1 \cdots x_s) \cdots \Omega_m(\varrho_1 \cdots \varrho_m, x_1 \cdots x_s)$$

— какие-либо m независимых друг от друга и от $\mathfrak{v}$ решений полной системы $\mathfrak{U}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{U}_n f = 0$.

Поскольку уравнения $\mathfrak{U}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{U}_n f = 0$ разрешимы относительно n из производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_s}$, то $s-n+m$ функций $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}, \Omega_1 \cdots \Omega_m$ должны быть независимы друг от друга относительно $s-n$ из переменных $x_1 \cdots x_s$ и относительно $\varrho_1 \cdots \varrho_m$. Следовательно, $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ независимы друг от друга относительно $\varrho_1 \cdots \varrho_m$.

После этих приготовлений мы можем задать самую общую систему уравнений, которая допускает группу $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$ и может принимать вид (17).

Такая система уравнений состоит из m соотношений между $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$, $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ и разрешима относительно $\varrho_1 \cdots \varrho_m$; следовательно, она также разрешима относительно $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ и имеет вид

$$\Omega_\mu(\varrho_1 \cdots \varrho_m, x_1 \cdots x_s) = \Psi_\mu\big(\mathfrak{v}_1(x) \cdots \mathfrak{v}_{s-n}(x)\big) \quad (\mu = 1 \cdots m), \qquad (18)$$

где Ψ — совершенно произвольные функции своих аргументов. Если мы разрешим эту систему уравнений относительно $\varrho_1 \cdots \varrho_m$, то получим для $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ выражения, представляющие самую общую систему решений дифференциальных уравнений (16).

Таким образом, самая общая система решений уравнений (16) содержит m произвольных функций $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$. А поскольку уравнения (16) являются линейными и однородными по неизвестным $\varrho_1 \cdots \varrho_m$, то можно заключить, что самая общая система их решений $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ может быть получена из m частных систем решений

$$P_1^{(\mu)}(x_1 \cdots x_s) \cdots P_m^{(\mu)}(x_1 \cdots x_s) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

следующим образом:

$$\varrho_\nu = \chi_1(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \cdot P_\nu^{(1)} + \cdots + \chi_m(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \cdot P_\nu^{(m)} \quad (\nu = 1 \cdots m), \quad (19)$$

где под χ понимаются произвольные функции своих аргументов. Разумеется, эти m частных систем решений должны быть таковы, что невозможно задать такие m функций $\psi_1 \cdots \psi_m$ от $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$, чтобы одновременно выполнялись m уравнений

$$\sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \cdot P_\nu^{(\mu)} = 0 \quad (\nu = 1 \cdots m).$$

Наконец, необходимо еще заметить, что уравнения (19) разрешимы относительно $\chi_1 \cdots \chi_m$, так что определитель, составленный из $P_\nu^{(\mu)}$, не обращается в нуль тождественно. Согласно вышесказанному, должна быть возможность привести уравнения (19) к виду уравнения (18), что, очевидно, невозможно, если определитель из $P_\nu^{(\mu)}$ обращается в нуль.

Теперь мы можем выписать самое общее инфинитезимальное преобразование

$$Yf = \sum_{\mu=1}^{m} \varrho_\mu \mathfrak{Y}_\mu f,$$

являющееся перестановочным с $X_1 f \cdots X_n f$ (ср. выше, стр. 437). Оно имеет вид

$$Yf = \sum_{\nu=1}^{m} \chi_\nu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \sum_{\mu=1}^{m} P_\mu^{(\nu)}(x_1 \cdots x_s) \cdot \mathfrak{Y}_\mu f$$

или

$$Y_f = \sum_{\nu=1}^{m} \chi_\nu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \cdot Y_\nu f,$$

если мы положим

$$\sum_{\mu=1}^{m} P_m^{(\nu)} \mathfrak{Y}_\mu f = Y_\nu f \quad (\nu = 1 \cdots m).$$

Здесь все $Y_1 f \cdots Y_m f$, очевидно, перестановочны с $X_1 f \cdots X_n f$, кроме того, уравнения $Y_1 f = 0, \cdots Y_m f = 0$ эквивалентны уравнениям $\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0$ и потому образуют, в свою очередь, m-параметрическую полную систему, допускающую группу $X_1 f \cdots X_n f$.

Следовательно, между $Y_1 f \cdots Y_m f$ имеют место соотношения вида

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_{\pi=1}^{m} \tau_{\mu\nu\pi}(x_1 \cdots x_s) \cdot Y_\pi f.$$

Но из тождества Якоби

$$\big(X_k(Y_\mu Y_\nu)\big) + \big(Y_\mu(Y_\nu X_k)\big) + \big(Y_\nu(X_k Y_\mu)\big) \equiv 0,$$

в котором оба последних члена тождественно равны нулю, непосредственно следует:

$$\big(X_k(Y_\mu Y_\nu)\big) \equiv 0.$$

Итак, мы должны иметь

$$\sum_{\pi=1}^{m} X_k \tau_{\mu\nu\pi} \cdot Y_\pi f \equiv 0$$

или (так как $Y_1 f \cdots Y_m f$ не связаны никакими линейными соотношениями)

$$X_k \tau_{\mu\nu\pi} \equiv 0 \quad (k = 1 \cdots n),$$

то есть все $\tau_{\mu\nu\pi}$ являются решениями полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, причем они являются функциями только от $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$.

Полная система $Y_1 f = 0, \cdots Y_m f = 0$ обладает всеми указанными на стр. 436 свойствами; таким образом, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 70. *Если m-параметрическая полная система $\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0$ в s переменных $x_1 \cdots x_s$ допускает n-параметрическую группу $X_1 f \cdots X_n f$, и если эта группа такова, что между $X_1 f \cdots X_n f$ нет никаких линейных соотношений вида*

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0,$$

то можно задать m^2 таких функций $P_\mu^{(\nu)}(x_1 \cdots x_s)$ с необращающимся в нуль определителем, что все m инфинитезимальных преобразований

$$Y_\nu f = \sum_{\mu=1}^{m} P_\mu^{(\nu)}(x_1 \cdots x_s) \cdot \mathfrak{Y}_\mu f \quad (\nu = 1 \cdots m)$$

перестановочны с $X_1 f \cdots X_n f$. Тогда уравнения, эквивалентные $\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0$, в свою очередь образуют m-параметрическую полную систему, допускающую группу $X_1 f \cdots X_n f$. Наконец, между $Y_1 f \cdots Y_m f$ имеют место соотношения особого вида:

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_{\pi=1}^{m} \vartheta_{\mu\nu\pi}(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) Y_\pi f,$$

где $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$ — независимые решения n-параметрической полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$[3].

[3]Теорему 70, рассматривающую теорему 69 как частный случай, Ли изложил в лекции летнего семестра 1887 г. об общей теории интегрирования таких дифференциальных уравнений, которые допускают известную конечную непрерывную группу.

Глава 21

Группа параметров

Если последовательно выполнить три преобразования пространства $x_1 \cdots x_n$, например следующие:

$$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) & (i = 1 \cdots n), \\ x_i'' = g_i(x_1' \cdots x_n') & (i = 1 \cdots n), \\ x_i''' = h_i(x_1'' \cdots x_n'') & (i = 1 \cdots n), \end{cases} \tag{1}$$

то получится новое преобразование:

$$x_i''' = \omega_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

пространства $x_1 \cdots x_n$.

Уравнения нового преобразования получаются, если исключить $2n$ переменных $x_1' \cdots x_n'$, $x_1'' \cdots x_n''$ из $3n$ уравнений (1). Очевидно, что это исключение можно провести двумя различными способами, так как можно начать с исключения либо x', либо x''. В первом случае сначала получаются соотношения между x и x'':

$$x_i'' = g_i\big(f_i(x) \cdots f_n(x)\big) \quad (i = 1 \cdots n),$$

а затем эти значения $x_i'' \cdots x_n''$ надо подставить в уравнения

$$x_i''' = h_i(x_1'' \cdots x_n'') \quad (i = 1 \cdots n).$$

Во втором случае сначала получаются соотношения между x' и x''':

$$x_i''' = h_i\big(g_1(x') \cdots g_n(x')\big) \quad (i = 1 \cdots n),$$

а затем надо еще подставить вместо x' их значения:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Само собой разумеющееся замечание о том, что в обоих упомянутых случаях в конечном результате получается одно и то же преобразование, приобретает содержание, если трактовать преобразования как операции и применить к ним символику теории подстановок.

Для трех подстановок (1) мы хотим ввести обозначения S, T, U соответственно так, чтобы преобразование

$$x_i'' = g_i\big(f_1(x) \cdots f_n(x)\big) \quad (i = 1 \cdots n)$$

получило обозначение ST, преобразование

$$x_i''' = h_i\big(g_1(x') \cdots g_n(x')\big) \quad (i = 1 \cdots n)$$

– обозначение TU и, наконец, преобразование $x_i''' = \omega_i(x_1 \cdots x_n)$ – обозначение STU. Оба описанных выше способа получения преобразования $x_i''' = \omega_i(x_1 \cdots x_n)$ мы можем тогда охарактеризовать, сказав, что это преобразование получается как в случае, если сперва выполнить преобразование ST, а затем U, так и в случае, когда первым выполняется преобразование S, а вторым – TU.

Символически можно выразить этот факт при помощи уравнения

$$(ST)U = S(TU) = STU, \tag{2}$$

которое, как известно, свидетельствует о том, что операции S, T, U удовлетворяют так называемому *ассоциативному закону*.

Таким образом, мы можем сказать:

Преобразования n-мерного пространства являются такими операциями, для которых выполняется ассоциативный закон.

Теперь рассмотрим специальный случай, когда S, T, U являются произвольными преобразованиями r-параметрической группы

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n).$$

В этом случае к данной группе относятся, конечно же, и преобразования ST, TU и STU. Посмотрим, что можно заключить из выполнения ассоциативного закона.

§ 100

Пусть преобразования S, T, U нашей группы таковы:

$$\begin{cases} S: x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r), \\ T: x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r), \\ U: x_i''' = f_i(x_1'' \cdots x_n'', c_1 \cdots c_r). \end{cases} \tag{3}$$

Для преобразования ST отсюда известным образом получаются уравнения вида

$$x_i'' = f_i\big(x_1 \cdots x_n,\ \varphi_1(a,b) \cdots \varphi_r(a,b)\big),$$

где функции $\varphi_1(a,b) \cdots \varphi_r(a,b)$ согласно теореме 1, стр. 18, независимы друг от друга относительно как $a_1 \cdots a_r$, так и $b_1 \cdots b_r$.

Далее, пусть уравнения преобразования $(ST)U$ будут иметь вид

$$x_i''' = f_i\big(x_1 \cdots x_n,\ \varphi_1\big(\varphi(a,b),c\big) \cdots \varphi_r\big(\varphi(a,b),c\big)\big). \tag{4}$$

С другой стороны, для преобразования TU мы имеем уравнения

$$x_i''' = f_i(x_1' \cdots x_n',\ \varphi_1(b,c) \cdots \varphi_r(b,c)\big),$$

а значит, для $S(TU)$ — следующие:

$$x_i''' = f_i\big(x_1 \cdots x_n,\ \varphi_1\big(a,\varphi(b,c)\big) \cdots \varphi_r\big(a,\varphi(b,c)\big)\big). \tag{4'}$$

Так как $(ST)U = S(TU)$, то преобразования (4) и (4') должны быть идентичны; сравнивая параметры в этих преобразованиях, получаем следующие соотношения:

$$\varphi_k(\varphi_1(a,b) \cdots \varphi_r(a,b), c_1 \cdots c_r) = \varphi_k\big(a_1 \cdots a_r,\ \varphi_1(b,c) \cdots \varphi_r(b,c)\big) \quad (k = 1 \cdots r),$$

или короче:

$$\varphi_k\big(\varphi(a,b),c\big) = \varphi_k\big(a,\varphi(b,c)\big) \quad (k = 1 \cdots r). \tag{5}$$

Таким образом, функции $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ должны тождественно удовлетворять этим соотношениям для всех значений a, b, c.

Уравнения (5) выражают ассоциативный закон для трех произвольных преобразований группы $x_i' = f_i(x,a)$. Но можно их истолковать и по-другому: они выражают тот факт, что уравнения

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r) \tag{6}$$

в переменных $a_1 \cdots a_r$ представляют группу, причем группу с r параметрами $b_1 \cdots b_r$.

Так, если выполнить два преобразования (6), например:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r)$$

и

$$a_k'' = \varphi_k(a_1' \cdots a_r',\ c_1 \cdots c_r),$$

последовательно, то мы получим преобразование

$$a_k'' = \varphi_k(\varphi_1(a,b) \cdots \varphi_r(a,b),\ c_1 \cdots c_r),$$

принимающее в силу (5) следующий вид:

$$a_k'' = \varphi_k\big(a_1 \cdots a_r,\ \varphi_1(b,c) \cdots \varphi_r(b,c)\big),$$

и потому относящееся также к преобразованиям вида (6). Тем самым наше утверждение доказано.

Назовем группу

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r) \tag{6}$$

группой параметров группы $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$.

Согласно уже цитированной теореме 1, стр. 18, уравнения $a_k' = \varphi_k(a,b)$ разрешимы относительно параметров $b_1 \cdots b_r$:

$$b_k = \psi_k(a_1 \cdots a_r,\ a_1' \cdots a_r') \quad (k = 1 \cdots r).$$

Отсюда мы заключаем, что эта группа параметров является r-параметрической и транзитивной, причем, просто транзитивной. Более того, уравнения (5) показывают, что эта группа является группой параметров для самой себя.

Обобщая, мы можем сказать:

Теорема 71. *Если функции* $f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ *удовлетворяют в уравнениях* $x_i' = f_i(x,a)$ *r-параметрической группы функциональным уравнениям*

$$f_i\big(f_1(x,a) \cdots f_n(x,a),\ b_1 \cdots b_r\big) = f_i\big(x_1 \cdots x_n, \varphi(a,b) \cdots \varphi_r(a,b)\big) \quad (i = 1 \cdots n),$$

то r соотношений

$$a_i' = \varphi_i(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r) \quad (i = 1 \cdots r)$$

задают r-параметрическую группу преобразований между $2r$ переменными a и a': группу параметров исходной группы. Она является просто транзитивной и группой параметров для самой себя.

§ 101

Если r-параметрическая группа $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ порождена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями:

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

то ее преобразования упорядочиваются в пары взаимно обратных согласно гл. 9, стр. 176. Очевидно, что преобразования соответствующей группы параметров $a_k' = \varphi_k(a, b)$ тогда тоже упорядочиваются в пары взаимно обратных, то есть группа параметров содержит согласно гл. 9, стр. 188, ровно r независимых инфинитезимальных преобразований и порождена ими.

Это важное свойство группы параметров можно доказать также следующим образом (который позволит нам одновременно найти инфинитезимальные преобразования этой группы).

Если в уравнениях $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ рассмотреть x_i' как функции от x и a, то согласно теореме 3, стр. 36, имеют место дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n, k = 1 \cdots r), \qquad (7)$$

которые можно записать и так:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \quad (j = 1 \cdots r, i = 1 \cdots n). \qquad (7')$$

Здесь, согласно рассуждениям главы 2, стр. 32–34, ξ_{ji} и α_{jk} определяются уравнениями

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \left[\frac{\partial x_i'}{\partial b_j}\right]_{b=\omega}, \quad \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) = \left[\frac{\partial a_k}{\partial b_j}\right]_{b=\omega},$$

смысл которых объяснен там же.

Для группы $a_k' = \varphi_k(a, b)$ мы, разумеется, получаем аналогичные дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial a_i'}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(b_1 \cdots b_r) \cdot \overline{\alpha}_{ji}(a_1' \cdots a_r') \quad (i, k = 1 \cdots r),$$

в которых ψ_{jk} имеют те же значение, что и в (7), тогда как $\overline{\alpha}_{ji}(a)$ находятся из

$$\overline{\alpha}_{ji}(a_1 \cdots a_r) = \left[\frac{\partial a_i}{\partial b_j}\right]_{b=\omega}.$$

Вследствие этого $\overline{\alpha}_{ji}$ *являются теми же функциями своих аргументов, что и* α_{ji}; таким образом, в соответствии с (7) и (7′) мы получаем два следующих соотношения:

$$\frac{\partial a_i'}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(b_1 \cdots b_r) \cdot \alpha_{ji}(a_1' \cdots a_r') \quad (i,k = 1 \cdots r), \tag{8}$$

и

$$\alpha_{ji}(a_1' \cdots a_r') = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{jk}(b_1 \cdots b_r) \frac{\partial a_i'}{\partial b_k} \quad (j,i = 1 \cdots r). \tag{8'}$$

Группа $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ содержит тождественное преобразование, и притом мы всегда можем предположить, что параметры тождественного преобразования $a_1^0 \cdots a_r^0$ лежат в области $((a))$, определенной на стр. 16. Поэтому согласно стр. 34 определитель

$$\sum \pm \psi_{11}(a^0) \cdots \psi_{rr}(a^0)$$

заведомо отличен от нуля.

С другой стороны, ясно, что в семействе преобразований $a_k' = \varphi_k(a,b)$ также присутствует тождественное преобразование $a_1' = a_1, \cdots a_r' = a_r$, и что именно преобразование

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, a_1^0 \cdots a_r^0) \quad (k = 1 \cdots r)$$

и есть это тождественное преобразование. Если учесть наличие дифференциальных уравнений (8) и обратиться к теореме 9, стр. 79, то мы сразу видим, что семейство из ∞^r преобразований $a_k' = \varphi_k(a,b)$ совпадает с семейством ∞^{r-1} однопараметрических групп:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}.$$

Следовательно, группа $a_k' = \varphi_k(a,b)$ порождена r инфинитезимальными преобразованиями:

$$A_k f = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Разумеется, эти инфинитезимальные преобразования независимы друг от друга, между ними даже не существует ни одного соотношения вида

$$\chi_1(a_1 \cdots a_r) \cdot A_1 f + \cdots + \chi_r(a_1 \cdots a_r) \cdot A_r f = 0;$$

это мы видели еще в гл. 2, теорема 3, стр. 36; с другой стороны, это также следует из того, что эта группа параметров является просто транзитивной (теор. 71).

Выше мы не только доказали, что группа $a'_k = \varphi_k(a, b)$ порождена инфинитезимальными преобразованиями, но и нашли эти самые инфинитезимальные преобразования. Отсюда мы можем вывести новое важное свойство группы $a'_k = \varphi_k(a, b)$.

Инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ группы $x_i = f_i(x, a)$ связаны соотношениями вида

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

и согласно теореме 21, стр. 166, между $A_1 f \cdots A_r f$ имеют место соотношения такого же вида:

$$(A_i A_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} A_s f,$$

с теми же константами c_{iks}. Поэтому, используя введенную в гл. 17, стр. 322, 325, терминологию, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 72. *Каждая r-параметрическая группа*

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

является равносоставленной со своей группой параметров:

$$a'_k = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

или, что то же самое, голоэдрически ей изоморфна. Если для инфинитезимальных преобразований группы $x'_i = f_i(x, a)$ выполняются соотношения

$$\xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \quad (i = 1 \cdots n, j = 1 \cdots r),$$

то выражения

$$A_j f = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} \quad (j = 1 \cdots r)$$

представляют собой r независимых инфинитезимальных преобразований этой группы параметров[1].

§ 102

Пусть, как обычно,

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{kj}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— независимые инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы от переменных $x_1 \cdots x_n$.

Руководствуясь указаниями в гл. 9, стр. 174–175, найдем r независимых инфинитезимальных преобразований

$$\overline{A}_k f = \sum_{j=1}^{r} \overline{\alpha}_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k = 1 \cdots r),$$

не связанных никакими линейными соотношениями вида

$$\chi_1(a_1 \cdots a_r) \cdot \overline{A}_1 f + \cdots + \chi_r(a_1 \cdots a_r) \cdot \overline{A}_r f = 0,$$

но находящимися попарно в соотношениях

$$(\overline{A}_i \overline{A}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \overline{A}_s f;$$

другими словами, найдем r независимых инфинитезимальных преобразований какой-либо r-параметрической просто транзитивной группы, равносоставленной с группой $X_1 f \cdots X_r f$.

Затем выберем какую-либо систему значений, в окрестности которой $\overline{\alpha}(a_1 \cdots a_r)$ ведут себя регулярно и для которой определитель $\sum \pm \overline{\alpha}_{11} \cdots \overline{\alpha}_{rr}$ не обращается в нуль, и найдем относительно этой системы значений главные решения r-параметрической полной системы

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i} + \sum_{j=1}^{r} \overline{\alpha}_{kj}(a) \frac{\partial f}{\partial a_j} = X'_k f + \overline{A}_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r) \qquad (9)$$

от $n + r$ переменных $x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r$.

[1] Ли, Научное общество Христиании, 1884 г., № 15.

Если теперь $\overline{F}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \cdots \overline{F}_n(x', a)$ суть эти главные решения, то полагая

$$x_i = \overline{F}_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

и разрешая относительно $x_1' \cdots x_n'$, получаем уравнения вида

$$x_i' = \overline{f}_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

представляющие собой согласно теор. 23, стр. 172, конечные преобразования r-параметрической группы, а именно группы $X_1 f \cdots X_r f$.

В теореме выше мы уже замечали, что уравнения $x_i' = \overline{f}_i(x, a)$ путем введения новых параметров могут быть приведены к

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} e_k X_k x_i + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} X_k X_j x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

то есть что они представляют конечные преобразования той r-параметрической группы, которая порождается инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$.

Это означает, что не имеет значения, выбираем ли мы группу $\overline{A}_i f \cdots \overline{A}_r f$ или какую-либо другую из бесконечного множества просто транзитивных групп, равносоставленных с группой $X_1 f \cdots X_r f$, и совершенно безразлично, выбираем ли мы систему значений $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ или какую-либо другую: мы всегда получаем указанным способом аналитическое представление для конечных преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Это замечание мы также делали в гл. 9, хотя, конечно, другими словами. Но теперь мы продвинулись настолько, что можем непосредственно видеть, почему при различном выборе группы $\overline{A}_i f \cdots \overline{A}_r f$ и системы значений $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ тем не менее всегда получаются уравнения одной и той же группы.

Действительно, пусть

$$\mathfrak{A}_k f = \sum_{j=1}^{r} \beta_{kj}(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— какая-либо другая, просто транзитивная, равносоставленная с группой $X_1 f \cdots X_r f$ группа, для которой соотношения

$$(\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \mathfrak{A}_s f$$

тождественно выполняются; далее, пусть $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$ — какая-либо система значений, в окрестности которой все $\beta_{kj}(\mathfrak{a})$ ведут себя регулярно и для которой определитель $\sum \pm \beta_{11} \cdots \beta_{rr}$ не обращается в в нуль.

Поскольку группы $A_i f \cdots A_r f$ и $\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_r f$ являются равносоставленными и просто транзитивными, то существует ∞^r различных преобразований (теорема 64, стр. 376)

$$a_k = \lambda_k(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r, C_1 \cdots C_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

переводящих $\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_r f$ в $\overline{A}_i f \cdots \overline{A}_r f$ соответственно. Уравнения этих преобразований разрешимы относительно произвольных параметров $C_1 \cdots C_r$, то есть $C_1 \cdots C_r$ можно, в частности, выбрать такими, что они будут удовлетворять уравнениям

$$\overline{a}_k = \lambda_k(\mathfrak{a}_1^0 \cdots \mathfrak{a}_r^0, C_1 \cdots C_r) \quad (k = 1 \cdots r).$$

Если $C_1^0 \cdots C_r^0$ — полученные таким образом значения $C_1 \cdots C_r$, и если положить:

$$\lambda_k(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r, C_1^0 \cdots C_r^0) = \pi_k(\mathfrak{a} \cdots \mathfrak{a}_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

то уравнения

$$a_k = \pi_k(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \quad (k = 1 \cdots r) \tag{10}$$

представляют преобразование, переводящее $\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_r f$ в $\overline{A}_i f \cdots \overline{A}_r f$ соответственно, а также систему значений $\mathfrak{a}_1^0 \cdots \mathfrak{a}_r^0$ в систему значений $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$.

Отсюда следует, что мы получим главные решения полной системы

$$X_k' f + \mathfrak{A} f = 0 \quad (k = 1 \cdots r) \tag{9'}$$

относительно $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^0, \cdots \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_r^0$, если произведем в главных решениях

$$\overline{F}_i(x_1' \cdots x_n',\, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

полной системы (9) подстановку $a_1 = \pi_1(\mathfrak{a}), \cdots a_r = \pi_r(\mathfrak{a})$. Поэтому если бы мы вместо просто транзитивной группы $\overline{A}_i f \cdots \overline{A}_r f$ использовали группу $\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_r f$, а вместо системы значений $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$ систему значений $\mathfrak{a}_1^0 \cdots \mathfrak{a}_r^0$, то получили бы вместо уравнений $x_i' = \overline{f}_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ уравнения

$$x_i' = \overline{f}_i\big(x_1 \cdots x_n, \pi_1(\mathfrak{a}) \cdots \pi_r(\mathfrak{a})\big) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Последние, очевидно, переходят в исходные, если в силу уравнений (10) ввести вместо $a_1 \cdots a_r$ новые параметры $a_1 \cdots a_r$.

Как и в параграфах 100 и 101, стр. 444 и ниже, мы будем снова исходить из того, что группа $X_1 f \cdots X_r f$ задана соотношениями определенного вида:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

и пусть $a_1^0 \cdots a_r^0$, как и прежде, обозначают параметры, соответствующие тождественному преобразованию $x_i' = x_i$.

Тогда легко указать полную систему, интегрирование которой приводит как раз к уравнениям $x_i' = f_i(x, a)$.

Эта полная система просто имеет вид

$$X_k' + A_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r),$$

где в инфинитезимальных преобразованиях

$$A_k f = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

функции $\alpha_{kj}(a)$ те же, что и в дифференциальных уравнениях (7′). Если

$$F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots r)$$

означают главные решения полной системы $X_k' f + A_k f = 0$ относительно $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$, то в результате разрешения уравнений

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

относительно $x_1' \cdots x_n'$ получаются в точности уравнения $x_i' = f_i(x, a)$. Все это следует из рассуждений глав 2 и 9.

Применим эти рассуждения к группе параметров, относящейся к группе $x_i' = f_i(x, a)$, уравнения которой согласно стр. 447 имеют вид

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

а ее тождественное преобразование имеет параметры $b_1 = a_1^0, \cdots b_r = a_r^0$.

Полная система, при помощи интегрирования которой могут быть найдены уравнения $a_k' = \varphi_k(a, b)$ группы параметров, очевидно, такова:

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1' \cdots a_r') \frac{\partial f}{\partial a_j'} + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(b_1 \cdots b_r) \frac{\partial f}{\partial b_j} = 0 \quad (k = 1 \cdots r).$$

Найдем главные решения

$$H_j(a'_1 \cdots a'_r, b_1 \cdots b_r) \quad (j = 1 \cdots r)$$

этой полной системы относительно $b_k = a_k^0$. Затем, разрешая уравнения

$$a_j = H_j(a'_1 \cdots a'_r, b_1 \cdots b_r) \quad (j = 1 \cdots r)$$

относительно $a'_1 \cdots a'_r$, получаем $a'_k = \varphi_k(a, b)$. Таким образом, справедлива

Теорема 73. *Если известны инфинитезимальные преобразования*

$$A_k f = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

группы параметров r-параметрической группы и то, что тождественное преобразование этой группы и группы параметров имеет параметры $a_1^0 \cdots a_r^0$, то конечные уравнения этой группы параметров находятся следующим образом: находят главные решения полной системы

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a') \frac{\partial f}{\partial a'_j} + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(b) \frac{\partial f}{\partial b_j} = 0$$

относительно $b_1 = a_1^0, \cdots b_r = a_r^0$; если

$$H_j(a'_1 \cdots a'_r, b_1 \cdots b_r) \quad (j = 1 \cdots r)$$

— эти главные решения, то искомые уравнения группы параметров получаются, если разрешить r уравнений

$$a_j = H_j(a'_1 \cdots a'_r, b_1 \cdots b_r) \quad (j = 1 \cdots r)$$

относительно $a'_1 \cdots a'_r$.

Если в r-параметрическую группу $x'_i = f_i(x, a)$ ввести новые параметры $\mathfrak{a}_k$ вместо a, то группа получает новый вид, которому, разумеется, соответствует также новая группа параметров.

Связь между новой и старой группами параметров очень простая: если новые параметры $\mathfrak{a}_k$ заданы уравнениями

$$a_j = \lambda_j(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \quad (j = 1 \cdots r),$$

то новый вид группы $x_i' = f_i(x, a)$ будет следующим:

$$x_i' = f_i\big(x_1 \cdots x_n, \lambda_1(\mathfrak{a}) \cdots \lambda_r(\mathfrak{a})\big) \quad (i = 1 \cdots n),$$

а новая группа параметров будет такой:

$$\lambda_k(\mathfrak{a}'_1 \cdots \mathfrak{a}'_r) = \varphi_k\big(\lambda_1(\mathfrak{a}) \cdots \lambda_r(\mathfrak{a}),\ \lambda_1(\mathfrak{b}) \cdots \lambda_r(\mathfrak{b})\big) \quad (k = 1 \cdots r),$$

если старая была $a_k' = \varphi_k(a, b)$. Следовательно, новая группа получается из старой, если применить подстановку $a_j = \lambda_j(\mathfrak{a})$ как к параметрам a, так и к b, то есть если в уравнения $a_k' = \varphi_k(a, b)$ подставить вместо a', a, b следующие значения:

$$a_j' = \lambda_j(\mathfrak{a}'), \quad a_j = \lambda_j(\mathfrak{a}), \quad b_j = \lambda_j(\mathfrak{b}) \qquad (j = 1 \cdots r).$$

§ 103

Согласно теореме 72, стр. 450, всякая r-параметрическая группа является равносоставленной со своей группой параметров, а значит, все r-параметрические группы, имеющие одну и ту же группу параметров, равносоставлены между собой.

Теперь мы утверждаем, что, наоборот, две r-параметрические равносоставленные группы могут путем введения новых параметров всегда быть приведены к такому виду, что они будут иметь одну и ту же группу параметров.

Чтобы доказать это утверждение, предположим, что нам даны инфинитезимальные преобразования этих двух групп; для первой:

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

для второй:

$$Y_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \eta_{k\mu}(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Так как группы равносоставлены, то мы можем предположить, что $X_k f$ и $Y_k f$ уже выбраны так, что, наряду с соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

одновременно имеют место соотношения

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s f.$$

Наконец, допустим, что нам даны еще какие-либо r независимых инфинитезимальных преобразований

$$A_k f = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k = 1 \cdots r),$$

порождающих r-параметрическую просто транзитивную группу, равносоставленную с этими группами, и находящихся попарно в соотношениях

$$(A_i A_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} A_s f.$$

Теперь составим полную систему:

$$X'_k f + A_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r),$$

и найдем ее главные решения:

$$F_i(x'_1 \cdots x'_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

относительно какой-либо системы значений $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$; далее составим полную систему:

$$Y'_k f + A_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r),$$

и найдем ее главные решения:

$$\mathfrak{F}_\mu(y'_1 \cdots y'_m, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

относительно той же самой системы значений $a_k = a_k^0$.

Кроме того, разрешим n уравнений $x_i = F_i(x', a)$ относительно $x'_1 \cdots x'_n$:

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m), \tag{11}$$

а также m уравнений $y_\mu = \mathfrak{F}_\mu(y', a)$ относительно $y'_1 \cdots y'_m$:

$$y'_\mu = \mathfrak{f}_\mu(y_1 \cdots y_m, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m). \tag{11'}$$

Тогда если конечные уравнения группы $X_1 f \cdots X_r f$ заданы в какомнибудь виде, то они могут, очевидно, быть приведены путем введения новых параметров к виду (11), и точно так же конечные уравнения группы $Y_1 f \cdots Y_r f$, в каком бы виде они ни существовали, могут получить вид (11′) в результате введения новых параметров.

Но к группам (11) и (11′) можно применить теорему 73, стр. 455: в обеих группах тождественное преобразование имеет параметры $a_1^0 \cdots a_r^0$, и для обеих соответствующая группа параметров содержит r независимых инфинитезимальных преобразований $A_1 f \cdots A_r f$, следовательно, согласно упомянутой теореме для каждой из этих групп можно задать соответствующую группу параметров, и эта группа параметров будет для обеих групп одинаковой.

Тем самым сформулированное выше утверждение доказано.

Таким образом, отныне установлено, что две группы, имеющие одну и ту же группу параметров, являются равносоставленными, и, с другой стороны, что две равносоставленные группы могут путем введения новых параметров быть приведены к виду, в котором они имеют одну и ту же группу параметров. Следовательно, мы можем сказать:

Теорема 74. *Две r-параметрические группы*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

и

$$y_\mu' = g_\mu(y_1 \cdots y_m, \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

являются равносоставленными тогда и только тогда, когда можно представить параметры $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$ как независимые функции от параметров a:

$$\mathfrak{a}_k = \chi_k(a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

так, что группа параметров группы

$$y_\mu' = g_\mu\big(y_1 \cdots y_m, \chi_1(a) \cdots (a)\big) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

совпадает с группой параметров группы $x_i' = f_i(x, a)$.

Стоит особо отметить, что наши две равносоставленные группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Y_1 f \cdots Y_r f$ будут иметь общую группу параметров тогда, когда их конечные уравнения записываются в каноническом виде:

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} e_k X_k x_i + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} X_k X_j x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n) \qquad (12)$$

и, соответственно,

$$y'_\mu = y_\mu + \sum_{k=1}^{r} e_k Y_k y_\mu + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} Y_k Y_j y_\mu + \cdots \quad (\mu = 1 \cdots m). \tag{12'}$$

Действительно, из рассуждений в гл. 4, стр. 74, следует, что уравнения (11) при подстановке

$$a_\nu = a_\nu^0 + \sum_{k=1}^{r} e_k [A_k a_\nu]_{a=a^0} + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} [A_k A_j a_\nu]_{a=a^0} + \cdots \tag{13}$$

$$(\nu = 1 \cdots r)$$

принимают вид (12), и что уравнения (11′) при той же самой подстановке переходят в (12′). Поскольку уравнения (13) задают преобразование между параметрами $a_1 \cdots a_r$ и $e_1 \cdots e_r$, а группы (11) и (11′) имеют общую группу параметров, то отсюда следует, что и группам (12) и (12′) соответствует одна и та же группа параметров. Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 1. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

находятся попарно в соотношениях

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

и, с другой стороны, r независимых инфинитезимальных преобразований

$$Y_k f = \sum_{\mu=1}^{m} (y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

находятся попарно в тех же соотношениях

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s f,$$

то соответствующие r-параметрические равносоставленные группы

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^{r} e_k X_k x_i + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} X_k X_j x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

и

$$y'_\mu = y_\mu + \sum_{k=1}^{r} e_k Y_k y_\mu + \sum_{k,j=1}^{r} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} Y_k Y_j y_\mu + \cdots \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

имеют одну и ту же группу параметров.

Предположим, что нам даны какие-либо две r-параметрические равносоставленные группы:

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

и

$$y'_\mu = \mathfrak{f}_\mu(y_1 \cdots y_m, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

уже имеющие такой вид, что группа параметров у них одинакова.

Пусть инфинитезимальные преобразования этой группы параметров таковы:

$$A_k f = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \quad (k = 1 \cdots r),$$

и связаны соотношениями

$$(A_i A_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} A_s f.$$

Согласно стр. 448, $x'_1 \cdots x'_n$, рассматриваемые как функции от $x_1 \cdots x_n$ $a_1 \cdots a_r$, удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям вида

$$\xi_{ij}(x'_1 \cdots x'_n) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial \alpha_k} \quad (j = 1 \cdots r;\ i = 1 \cdots n).$$

При этом $\xi_{ji}(x')$ — совершенно определенные функции. Так, если в результате разрешения уравнений $x'_i = f_i(x, a)$ получится, например, $x_i = F_i(x', a)$, то мы имеем тождество:

$$\xi_{ji}(x'_1 \cdots x'_n) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \left[\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k} \right]_{x = F(x', a)},$$

и можем при желании без труда найти $\xi_{ji}(x')$.

Согласно теореме 21, стр. 166, r выражений

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

являются независимыми инфинитезимальными преобразованиями и связаны соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f;$$

разумеется, они порождают группу $x_i' = f_i(x, a)$.

Для группы $y_\mu' = \mathfrak{f}_\mu(y, a)$ получаются соответствующим образом дифференциальные уравнения вида

$$\eta_{j\mu}(y_1' \cdots y_m') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial y_\mu'}{\partial a_k} \quad (j = 1 \cdots r,\ \mu = 1 \cdots m),$$

где $\eta_{j\mu}(y')$ — вполне определенные функции. Выражения

$$Y_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \eta_{k\mu}(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

являются независимыми инфинитезимальными преобразованиями и связаны соотношениями

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s f;$$

они, естественно, порождают группу $y_\mu' = f_\mu(y, a)$.

Теперь мы видим, как и на стр. 458, что группы $x_i' = f_i(x, a)$ и $y_\mu' = \mathfrak{f}(y, a)$ при подстановке

$$a_\nu = a_\nu^0 + \sum_{k=1}^{r} e_k [A_k a_\nu]_{a=a^0} + \cdots \quad (\nu = 1 \cdots r)$$

принимают вид

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} e_k X_k x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

и

$$y_\mu' = y_\mu + \sum_{k=1}^{r} e_k Y_k y_\mu + \cdots \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

соответственно. Отсюда следует

Утверждение 2. *Если две r-параметрические группы*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

и

$$y_\mu' = f_\mu(y_1 \cdots y_m, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

имеют одну и ту же группу параметров, то можно ввести вместо a такие новые параметры $e_1 \cdots e_r$, что эти группы примут вид

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} e_k X_k x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

и

$$y_\mu' = \sum_{k=1}^{r} e_k Y_k y_\mu + \cdots \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

соответственно; причем $X_1 f \cdots X_r f$ и $Y_1 f \cdots Y_r f$ — такие независимые инфинитезимальные преобразования обеих групп, что, наряду с соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

одновременно имеют место соотношения

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s f,$$

так что эти группы связаны между собой голоэдрическим изоморфизмом, при котором всякому инфинитезимальному преобразованию $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ ставится в соответствие инфинитезимальное преобразование $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$.

На группы $x_i' = f_i(x, a)$ и $y_\mu' = f_\mu(y, a)$ мы налагаем те же условия, что и в утверждении 2, кроме того, мы полагаем, что $a_k' = \varphi_k(a, b)$ являются конечными уравнениями их общей группы параметров.

Очевидно, что при этом условии для каждой из этих двух групп имеет место следующее: если выполнить последовательно два преобразования группы, имеющих параметры $a_1 \cdots a_r$ и $b_1 \cdots b_r$ соответственно, то результирующее преобразование принадлежит группе и имеет параметры $\varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b)$.

Этот факт мы можем выразить несколько иначе, если сопоставим преобразования обеих групп так, что всякому преобразованию одной группы соответствует преобразование другой группы, имеющее те же параметры. Тогда мы можем сказать следующее: если S — преобразование одной группы, а $\mathfrak{S}$ — соответствующее преобразование другой, если T — еще одно преобразование первой группы, а $\mathfrak{T}$ — соответствующее преобразование второй группы, то преобразованию ST первой группы соответствует преобразование $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ во второй группе.

Согласно теореме 74, стр. 458, такое соответствие между преобразованиями обеих групп возможно тогда и только тогда, когда эти группы являются равносоставленными. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 75. *Две r-параметрические группы являются равносоставленными тогда и только тогда, когда преобразования одной можно так взаимно однозначно связать с преобразованиями другой, что имеет место следующее: если в одной группе последовательно выполнить два преобразования и в другой группе выполнить соответствующие преобразования в той же последовательности, то преобразование, получаемое в первой группе, соответствует тому преобразованию, которое получается во второй*[2].

Новый важный результат дают приведенные выше рассуждения, если их применить к утверждению 1, стр. 459. Чтобы сформулировать этот результат в наиболее простой форме, вспомним еще две вещи: во-первых, что группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Y_1 f \cdots Y_r f$ связаны голоэдрическим изоморфизмом, при котором всякому инфинитезимальному преобразованию $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ соответствует инфинитезимальное преобразование $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, и, во-вторых, что выражение $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ может также трактоваться как символ конечного преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$ (ср. гл. 17, стр. 325 и гл. 15, стр. 283). С учетом этого мы можем сформулировать

Утверждение 3. *Пусть две равносоставленные r-параметрические группы*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Y_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \eta_{k\mu}(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

[2] Ср. Ли, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, 1876 г.; Math. Ann., том XXV, стр. 77; Н. о. Христиании, 1884 г., № 15.

связаны друг с другом голоэдрическим изоморфизмом, при котором всякому инфинитезимальному преобразованию $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ соответствует инфинитезимальное преобразование $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, то есть пусть, наряду с соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\, X_s f$$

одновременно имеют место соотношения

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\, Y_s f.$$

Если истолковать выражения $\sum e_k X_k f$ и $\sum e_k Y_k f$ как общие символы конечных преобразований групп $X_1 f \cdots X_r f$ и $Y_1 f \cdots Y_r f$, то справедливо следующее: если два преобразования $\sum e_k X_k f$ и $\sum e'_k X_k f$ группы $X_1 f \cdots X_r f$, выполненные последовательно, дают в итоге преобразование $\sum e''_k X_k f$, то в результате последовательного выполнения преобразований $\sum e_k Y_k f$ и $\sum e'_k Y_k f$ группы $Y_1 f \cdots Y_r f$ получается преобразование $\sum e''_k Y_k f$.

Итак, если мы связали две r-параметрические равносоставленные группы друг с другом голоэдрическим изоморфизмом в смысле гл. 17, стр. 325, то тем самым мы одновременно установили между конечными преобразованиями этих двух групп взаимно однозначное соответствие, как это изложено в теореме 75.

Но верно и обратное: если между преобразованиями двух r-параметрических равносоставленных групп установлено такое взаимно однозначное соответствие, как в теореме 75, то эти группы в то же время связаны друг с другом голоэдрическим изоморфизмом.

В самом деле, пусть $x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ — одна из этих групп, а $y'_\mu = f_\mu(y_1 \cdots y_m, a_1 \cdots a_r)$ — то преобразование другой группы, которое соответствует преобразованию $x'_i = f_i(x, a)$. Тогда обе группы, $x'_i = f_i(x, a)$ и $y'_\mu = f_\mu(y, a)$, очевидно, имеют одну и ту же группу параметров и потому могут согласно утверждению 2, стр. 462, в результате введения новых параметров $e_1 \cdots e_r$ принять следующий вид:

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^{r} e_k\, X_k x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

и

$$y'_\mu = y_\mu + \sum_{k=1}^{r} e_k Y_k y_\mu + \cdots \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

Отсюда следует, что указанное взаимно однозначное соответствие между преобразованиями этих групп сводится к тому, что всякому конечному преобразованию $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ одной группы соответствует конечное преобразование $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ другой группы. В то же время всякому инфинитезимальному преобразованию $\sum e_k X_k f$ ставится в соответствие инфинитезимальное преобразование $\sum e_k Y_k f$, и, таким образом, согласно утверждению 2 между этими группами действительно установлена голоэдрически изоморфная связь.

В теории подстановок голоэдрический изоморфизм двух групп и голоэдрически изоморфная связь между двумя группами определяются иначе, чем мы это сделали в гл. 17. Там говорится, что две группы с одинаковым числом подстановок являются «равносоставленными», или «голоэдрически изоморфными», если между преобразованиями этих групп можно установить взаимно однозначное соответствие, обладающее свойством, описанным в теореме 75, стр. 463. Если такое соответствие между двумя голоэдрически изоморфными группами действительно установлено, то говорят, что эти две группы «связаны друг с другом голоэдрическим изоморфизмом».

Но еще на стр. 325 мы отмечали, что по существу наше определение обсуждаемых понятий точно соответствует тому, которое принято в теории подстановок, во всяком случае соответствует настолько, насколько это возможно для двух таких различных областей, как теория групп подстановок и теория групп преобразований.

Наши последние результаты показывают, что утверждение на стр. 325 является верным. Из теоремы 75, стр. 463, следует, что две r-параметрические группы, являющиеся голоэдрически изоморфными в смысле гл. 17, стр. 325, должны быть голоэдрически изоморфными также в смысле теории подстановок и наоборот. Из утверждения 3, стр. 463, и последующих замечаний ясно, что две r-параметрические группы, связанные между собой голоэдрическим изоморфизмом в смысле гл. 17, стр. 325, связаны таким же образом и в смысле теории подстановок, и наоборот.

Остается лишь доказать, что наше определение мероэдрического изоморфизма (ср. гл. 17, стр. 325) соответствует определению, которое дается для этого понятия в теории подстановок.

Пусть $X_1 f \cdots X_{r-q} \cdots X_r f$ и $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ — две мероэдрически изоморфные группы, и пусть $X_{r-q+1} f \cdots X_r f$ — именно та инвариантная подгруппа r-параметрической группы, которая соответствует тождественному преобразованию

$(r-q)$-параметрической группы. Наконец, пусть $A_1 f \cdots A_r f$ — просто транзитивная группа от переменных $a_1 \cdots a_r$, равносоставленная с группой $X_1 f \cdots X_r f$. При этом мы предполагаем, что $a_1 \cdots a_{r-q}$ являются решениями полной системы

$$A_{r-q+1} f = 0, \cdots A_r f = 0.$$

При таком выборе переменных $A_1 f \cdots A_{r-q} f$ имеют вид

$$A_k f = \sum_{i=1}^{r-q} \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \sum_{j=r-q+1}^{r} \beta_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \quad (k = 1 \cdots r-q),$$

тогда как $A_{r-q+1} f \cdots A_{r-q} f$ имеют вид

$$A_k f = \sum_{j=r-q+1}^{r-q} \beta_{ki}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \quad (k = r-q+1 \cdots r).$$

В то же время ясно, что укороченные инфинитезимальные преобразования

$$\overline{A}_k f = \sum_{i=1}^{r-q} \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i} \quad (k = 1 \cdots r-q)$$

порождают просто транзитивную группу, равносоставленную с $r-q$-параметрической группой $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$.

Если обозначить инфинитезимальные преобразования $A_k f$, $\overline{A}_k f$, записанные в переменных b вместо a, через $B_k f$, $\overline{B}_k f$, то согласно предыдущим рассуждениям группа параметров $(r-q)$-параметрической группы $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ находится путем интегрирования полной системы

$$\overline{A}_k f + \overline{B}_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r-q),$$

а группа параметров r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ — при помощи интегрирования полной системы

$$A_k f + B_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r).$$

Если таким образом получаются уравнения группы параметров, соответствующей $(r-q)$-параметрической группе, например

$$a'_k = \varphi_k(a_1 \cdots a_{r-q}, b_1 \cdots b_{r-q}) \quad (k = 1 \cdots r-q),$$

то ясно, что группа параметров, соответствующая r-параметрической группе, задается уравнениями вида

$$\begin{aligned} a'_k &= \varphi_k(a_1 \cdots a_{r-q}, b_1 \cdots b_{r-q}) \quad (k = 1 \cdots r-q), \\ a'_i &= \psi_i(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (i = r-q+1 \cdots r). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ являются мероэдрически изоморфными в смысле теории подстановок.

Теперь выведем только что полученный результат еще другим способом. Однако в детальном разборе этого замечательного метода мы необходимости не видим, поскольку он совершено аналогичен предыдущим рассуждениям.

Пусть нам даны уравнения преобразований

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

но при этом неизвестно, являются параметры a существенными или нет. Если теперь f_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(f_1 \cdots f_n),$$

которые можно разрешить относительно ξ_{ji}:

$$\xi_{ji}(f) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f_i}{\partial a_k},$$

то мы легко видим (ср. гл. 4, стр. 74 и ниже), что любое преобразование $x_i' = f_i(x, a)$, параметры которого a лежат в некоторой окрестности $\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_r$, возникает в результате того, что мы сначала выполняем преобразование $x_i = f_i(x, \overline{a})$, а затем — некоторое преобразование

$$x_i' = w_i(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n, \lambda_1 \cdots \lambda_r)$$

однопараметрической группы

$$\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Кроме того, мы обнаруживаем, что эти значения параметра λ зависят только от вида функций $\alpha_{kj}(a)$, а также от обеих систем значений $\overline{a}_k$ и a_k.

Если положить

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k} = A_k f, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'} = X_k' f,$$

то при наложенных условиях получается (ср. стр. 165 и ниже), что имеют место соотношения вида

$$(X_i' X_k') = \sum_{s=1}^{r} \vartheta_{iks}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \cdot X_s' f,$$

$$(A_i A_k) = \sum_{s=1}^{r} \vartheta_{iks}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \cdot A_s f,$$

в которых ϑ_{iks} на самом деле не зависят от x'. Правда, теперь нельзя, как в аналогичных рассуждениях выше, доказать, что в *обоих* последних уравнениях ϑ могут быть положены равными абсолютным константам. Но если мы рассмотрим только уравнения

$$(X_i' X_k') = \sum_{s=1}^{r} \vartheta_{iks}(a) \cdot X_s' f,$$

то становится ясно, что при конкретном значении параметров a они дают соотношения вида

$$(X_i' X_k') = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s' f,$$

в которых c_{iks} обозначают некоторые константы. Поэтому и при наших настоящих условиях все конечные преобразования $\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$ образуют группу, заведомо содержащую столько же существенных параметров, что и семейство $x_i' = f_i(x, a)$.

С другой стороны, пусть $X_1' f \cdots X_r' f$ — это такие r не обязательно независимых инфинитезимальных преобразований от переменных $x_1' \cdots x_n'$, которые находятся в соотношениях

$$(X_i' X_k') = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s' f;$$

далее, пусть

$$A_k f = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— r независимых инфинитезимальных преобразований просто транзитивной группы, структура которой задана уравнениями

$$(A_i A_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} A_s f.$$

Выпишем теперь r-параметрическую полную систему

$$X_k' f + A_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r),$$

найдем ее главные решения $F_1 \cdots F_n$ относительно подходящей системы значений $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$ и положим $x_1 = F_1, \cdots x_n = F_n$. Тогда получающиеся в результате разрешения уравнения:

$$x_k' = f_k(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r),$$

задают семейство, состоящее не более чем из ∞^r преобразований, в которое, очевидно, входит тождественное преобразование $x_k' = x_k$.

Действуя точно так же, как на стр. 169, мы сначала получаем систему уравнений:

$$\sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{j\mu}(a) \frac{\partial x_\nu'}{\partial a_\mu} = \xi_{j\nu}(x'),$$

а затем в результате разрешения:

$$\frac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{j\mu}(a) \cdot \xi_{j\nu}(x').$$

Отсюда мы заключаем, *во-первых*, что семейство $x'_i = f_i(x, a)$ состоит из преобразований всех однопараметрических групп $\sum \lambda_k X_k f$, *во-вторых*, что все эти преобразования образуют *группу* с максимум r существенными параметрами, и, наконец, *в-третьих*, что из двух преобразований

$$x'_i = f_i(x, a), \quad x''_i = f_i(x', b)$$

возникает третье преобразование $x''_i = f_i(x, c)$ этой группы, параметры которого $c_1 = \varphi_1(a, b), \cdots c_r = \varphi_r(a, b)$ определяются двумя системами значений a_k, b_i и видом функций $\alpha_{kj}(a)$.

Но тем самым прежде полученный результат выведен новым способом, останавливаться на котором подробнее нет необходимости.

Если заданная r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_{r-q} f \cdots X_r f$ содержит известную инвариантную подгруппу, скажем $X_{r-q+1} f \cdots X_r f$, то мы можем теперь легко задать мероэдрически изоморфную ей $(r-q)$-параметрическую группу, тождественное преобразование которой соответствует вышеупомянутой инвариантной подгруппе (ср. стр. 337). В самом деле, рассмотрим просто транзитивную группу $A_1 f \cdots A_{r-q} f \cdots A_r f$ в переменных $a_1 \cdots a_r$, равносоставленную с данной r-параметрической. При этом мы можем, как и прежде, предположить, что $a_1 \cdots a_{r-q}$ являются инвариантами r-параметрической группы $A_{r-q+1} f \cdots A_r f$. Если мы вновь положим

$$A_k f = \sum_{i=1}^{r-q} \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i} + \sum_{j=r-q+1}^{r} \beta_{kj}(a) \frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k = 1 \cdots r-q),$$

то укороченные инфинитезимальные преобразования

$$\overline{A}_k f = \sum_{i=1}^{r-q} \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i} \quad (k = 1 \cdots r-q),$$

очевидно, порождают $(r-q)$-параметрическую группу с требуемым свойством. Кроме того, из этих рассуждений следует, что *всякое утверждение о структуре $(r-q)$-параметрических групп непосредственно дает утверждение о структуре r-параметрических групп с инвариантной q-параметрической подгруппой*. Этот общий принцип, имеющий аналог в теории подстановок, будет обсуждаться в третьей части[3].

[3] Ср. Ли, Math. Ann., том XXV, стр. 137.

§ 104

В гл. 19, утверждение 3, стр. 397, мы придали критериям подобия равносоставленных групп замечательный вид: мы показали, что две равносоставленные группы от одинакового числа переменных подобны тогда и только тогда, когда их можно определенным, весьма специальным образом связать между собой голоэдрическим изоморфизмом.

Уже тогда говорилось, что этот критерий значительно упрощается, если обе группы, о которых идет речь, являются транзитивными; мы утверждали, что справедлива следующая

Теорема 76. *Две равносоставленные транзитивные группы*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Z_k f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

от одинакового числа переменных подобны тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если выбрать определенную точку $x_1^0 \cdots x_n^0$, не лежащую ни на одном многообразии, инвариантном относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$, то должна иметься возможность связать эти две группы голоэдрическим изоморфизмом так, что наибольшей входящей в группу $X_1 f \cdots X_r f$ подгруппе, оставляющей точку $x_1^0 \cdots x_n^0$ инвариантной, соответствует наибольшая подгруппа группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, оставляющая неподвижной некоторую точку $y_1^0 \cdots y_n^0$[4].

Из утверждения 3, стр. 397 ясно, что это условие является необходимым для подобия этих двух групп; поэтому требуется лишь доказать, что оно является также и достаточным.

Допустим, что условия теоремы выполнены, и в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$ выбраны такие независимые инфинитезимальные преобразования $Y_1 f \cdots Y_r f$, что наши группы связаны друг с другом голоэдрическим изоморфизмом, описанным в теореме 76, при котором каждому инфинитезимальному преобразованию $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ ставится в соответствие инфинитезимальное преобразование $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$.

Согласно рассуждениям из предыдущего параграфа, это голоэдрически изоморфное соответствие дает нам также взаимно однозначное соответствие между конечными преобразованиями обеих групп. Последнее можно

[4] Ср. Ли, Archiv for Math. og Naturv., Христиания, 1885 г., стр. 388–389.

описать проще всего, если мы, как ранее, будем рассматривать символы $\sum e_k X_k f$ и $\sum e_k Y_k f$ как символы конечных преобразований наших групп и, кроме того, обозначим для большего удобства конечное преобразование $\sum e_k X_k f$ кратко через $T_{(e)}$, а преобразование $\sum e_k Y_k f$ — через $\mathfrak{T}_{(e)}$.

При этих условиях голоэдрически изоморфная связь между нашими группами ставит преобразованию $T_{(e)}$ в соответствие преобразование $\mathfrak{T}_{(e)}$, и наоборот, и это соответствие обладает тем свойством, что преобразования $T_{(e)}\,T_{(e')}$ и $\mathfrak{T}_{(e)}\,\mathfrak{T}_{(e')}$ также соответствуют друг другу, причем $e_1 \cdots e_r$ и $e'_1 \cdots e'_r$ означают совершенно произвольные системы значений.

Точка $x_1^0 \cdots x_n^0$ остается инвариантной относительно ровно $r-n$ независимых инфинитезимальных преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, следовательно, она допускает в точности ∞^{r-n} различных конечных преобразований этой группы, которые, как известно, образуют $(r-n)$-параметрическую подгруппу. Мы хотим ввести для общего преобразования $T_{(e)}$, оставляющего точку $x_1^0 \cdots x_n^0$ неподвижной, символ $S_{(a_1 \cdots a_{r-n})}$, или кратко $S_{(a)}$; под $a_1 \cdots a_{r-n}$ мы при этом понимаем произвольные параметры.

Те преобразования $\mathfrak{T}_{(e)}$ группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, которым соответствуют преобразования $S_{(a)}$ группы $X_1 f \cdots X_r f$, мы обозначим $\mathfrak{S}_{(a_1 \cdots a_{r-n})}$, или кратко $\mathfrak{S}_{(a)}$; тогда при наложенных условиях ∞^{r-n} преобразований $\mathfrak{S}_{(a)}$ образуют наибольшую в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$ подгруппу, оставляющую точку $y_1^0 \cdots y_n^0$ инвариантной. Это означает, что точка $y_1^0 \cdots y_n^0$ не принадлежит никакому многообразию, остающемуся инвариантным относительно группы $Z_1 f \cdots Z_r f$.

После этих приготовлений проведем следующие рассуждения.

При выполнении преобразования $T_{(e)}$ точка x_i^0 переходит в точку $(x_i^0)T_{(e)}$, положение которой, разумеется, зависит от значений параметров $e_1 \cdots e_r$. Эта новая точка, согласно утверждению 1, гл. 14, стр. 253, в свою очередь, допускает в точности ∞^{r-n} преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, а именно все преобразования вида

$$T_{(e)}^{-1}\, S_{(a)}\, T_{(e)},$$

с $r-n$ произвольными параметрами $a_1 \cdots a_{r-n}$.

С другой стороны, точка y_i^0 переходит при преобразовании $\mathfrak{T}_{(e)}$ в точку $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$, которая, конечно, допускает в точности ∞^{r-n} преобразований группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, а именно все преобразования вида

$$\mathfrak{T}_{(e)}^{-1}\, \mathfrak{S}_{(a)}\, \mathfrak{T}_{(e)}.$$

Очевидно, что это те преобразования группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, которые поставлены в соответствие преобразованиям $T_{(e)}^{-1}\, S_{(a)}\, T_{(e)}$; таким образом, мы ви-

дим, что при нашей голоэдрически изоморфной связи для точек $(x_i^0)T_{(e)}$ и $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$ выполняется то же самое, что и для точек x_i^0 и y_i^0: наибольшей подгруппе, содержащейся в группе $X_1 f \cdots X_r f$ и оставляющей точку $(x_i^0)T_{(e)}$ инвариантной, соответствует наибольшая подгруппа группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, относительно которой точка $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$ остается неподвижной.

Придадим теперь параметрам $e_1 \cdots e_r$ в преобразованиях $T_{(e)}$ и $\mathfrak{T}_{(e)}$ одно за другим все возможные значения. Тогда точка $(x_i^0)T_{(e)}$ в силу транзитивности группы $X_1 f \cdots X_r f$ будет по очереди переходить во все точки пространства $x_1 \cdots x_n$, которые не лежат ни на одном инвариантном многообразии, то есть во все точки общего положения. В то же время точка $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$ переходит во все точки общего положения в пространстве $y_1 \cdots y_n$.

Тем самым показано, что голоэдрически изоморфная связь между нашими двумя группами обладает свойствами, сформулированными в утверждении 3, стр. 397; следовательно, группа $X_1 f \cdots X_r f$ согласно этому утверждению подобна группе $Z_1 f \cdots Z_r f$, и справедливость теоремы 76, стр. 470, доказана.

Для доказательства теоремы 76, впрочем, совсем необязательно прибегать к цитированному утверждению. Скорее наоборот, из изложенного выше можно непосредственно заключить, что существует преобразование, переводящее инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

Мы видели, что наша голоэдрически изоморфная связь ставит в соответствие точке $(x_i^0)T_{(e)}$ пространства $x_1 \cdots x_n$ точку $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$ пространства $y_1 \cdots y_n$, а именно таким образом установлено взаимно однозначное соответствие в пределах определенной области между точками общего положения обоих пространств. Если мы теперь истолкуем x_i и y_i как координаты точек одного и того же n-мерного пространства R_n, причем в обоих случаях относительно одной и той же системы координат, то существует совершенно определенное преобразование T пространства R_n, которое всегда переводит точку с координатами $(x_i^0)T_{(e)}$ в точку с координатами $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$. Мы докажем, что это преобразование T переводит инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно, то есть что наши две r-параметрические группы именно в силу преобразования T являются подобными.

Преобразование T удовлетворяет всем бесконечно многим символическим уравнениям

$$(x_i^0)T_{(e')}\mathsf{T} = (y_i^0)\mathfrak{T}_{(e')} \tag{14}$$

с r произвольными параметрами $e_1 \cdots e_r$, оно даже определено этими уравнениями. Отсюда следует, что T в то же время удовлетворяет следу-

ющим символическим уравнениям:

$$(x_i^0)T_{(e')}T_{(e)}\mathsf{T} = (y_i^0)\mathfrak{T}_{(e')}\mathfrak{T}_{(e)},$$

какие бы значения ни принимали параметры e и e'.

Если мы свяжем эти уравнения с уравнениями (14), которые можно, очевидно, записать и так:

$$(x_i^0)T_{(e')} = (y_i^0)\mathfrak{T}_{(e')}\mathsf{T}^{-1},$$

то получим

$$(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e')}\mathsf{T}^{-1}T_{(e)}\mathsf{T} = (y_i^0)\mathfrak{T}_{(e')}\mathfrak{T}_{(e)}$$

или, что то же самое,

$$(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e')}\mathsf{T}^{-1}T_{(e)}\mathsf{T}\mathfrak{T}_{(e)}^{-1} = (y_i^0)\mathfrak{T}_{(e')}. \tag{15}$$

Точка $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e')}$ может при подходящем выборе параметров $e_1' \cdots e_r'$ попасть в любую точку общего положения в R_n, таким образом, уравнения (15) говорят, что всякое преобразование вида

$$\mathsf{T}^{-1}T_{(e)}\mathsf{T}\mathfrak{T}_{(e)}^{-1} \tag{16}$$

оставляет все точки общего положения в пространстве R_n неподвижными. Но это, очевидно, возможно лишь тогда, когда все преобразования (16) совпадают с тождественным преобразованием.

Тем самым доказано, что имеют место следующие ∞^r символических уравнений:

$$\mathsf{T}^{-1}T_{(e)}\mathsf{T} = \mathfrak{T}_{(e)}, \tag{17}$$

то есть что преобразование T переводит всякое преобразование $T_{(e)}$ группы $X_1 f \cdots X_r f$ в соответствующее преобразование $\mathfrak{T}_{(e)}$ группы $Z_1 f \cdots Z_r f$. Другими словами, выражение $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ превращается при выполнении преобразования T в выражение $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, или, что то же самое, r инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ переходят при выполнении T в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно.

Следовательно, группы $X_1 f \cdots X_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ подобны, и теорема 76, стр. 470, доказана теперь также независимо от утверждения 3, стр. 397.

§ 105

В § 100 мы видели, что определенные там уравнения $a_k' = \varphi_k(a, b)$ представляют группу, причем этот вывод был основан на том, что между r

функциями $\varphi_k(a, b)$ имели место r тождеств:

$$\varphi_k(\varphi_1(a,b)\cdots\varphi_r(a,b),\ c_1\cdots c_r) \equiv \varphi_k\big(a_1\cdots a_r,\ \varphi_1(b,c)\cdots\varphi_r(b,c)\big). \tag{5}$$

Теперь мы убеждаемся, что и уравнения

$$a'_k = \varphi_k(b_1\cdots b_r,\ a_1\cdots a_r) \quad (k = 1\cdots r) \tag{18}$$

представляют группу от переменных a с параметрами b, а именно: r-параметрическую просто транзитивную группу.

Несколько замечаний по поводу этой новой группы.

Она обладает замечательным свойством: любое из ее преобразований перестановочно с любым преобразованием группы параметров $a'_k = \varphi_k(a, b)$. Так, если сначала выполнить преобразования (18), а затем какое-либо преобразование

$$a''_k = \varphi_k(a'_1\cdots a'_r,\ c_1\cdots c_r) \quad (k = 1\cdots r)$$

группы параметров $a'_k = \varphi_k(a, b)$, то получится преобразование

$$a''_k = \varphi_k(\varphi_1(b,a)\cdots\varphi_r(b,a),\ c_1\cdots c_r) \quad (k = 1\cdots r),$$

которое можно в силу тождеств (5) привести к виду

$$a''_k = \varphi_k\big(b_1\cdots b_r,\ \varphi_1(a,c)\cdots\varphi_r(a,c)\big) \quad (k = 1\cdots r).$$

Но это преобразование можно также получить, выполнив сначала преобразование

$$a'_k = \varphi_k(a_1\cdots a_r,\ c_1\cdots c_r)$$

группы параметров, а затем — преобразование

$$a''_k = \varphi_k(b_1\cdots b_r,\ a'_1\cdots a'_r)$$

группы (18).

Следовательно, группа (18) — это не что иное, как взаимная к группе параметров просто транзитивная группа[5]; она является согласно теореме 68, стр. 420, равносоставленной с группой параметров и даже подобной ей; более того, она также является равносоставленной с самой группой $x'_i = f_i(x, a)$.

[5]Замечание о том, что упомянутые в тексте группы (6) и (18) находятся в таком соотношении, что преобразования одной перестановочны с преобразованиями другой, принадлежит Энгелю.

Глава 22

Описание всех r-параметрических групп

Еще в главе 17, стр. 329, мы отмечали, что всякая система констант c_{iks}, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{r} (c_{ik\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks} = 0 \quad (i, k, j, s = 1 \cdots r), \end{cases} \tag{1}$$

представляет возможную структуру r-параметрических групп, т. е. что всегда существуют r-параметрические группы, структура которых задается как раз этой системой c_{iks}. Доказательство этого в полной общности, как мы уже указывали, будет дано только во второй части. Там мы рассмотрим произвольную систему c_{iks} с указанным свойством и докажем, что для нахождения инфинитезимальных преобразований r-параметрической группы, имеющей структуру c_{iks}, необходимо только лишь интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Конечные уравнения этой группы получаются тогда согласно гл. 4 и 9 также путем интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей же главе мы покажем две вещи.

Во-первых, мы рассмотрим конечные уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

r-параметрической группы и покажем, что при помощи интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений можно заведомо найти все r-параметрические *транзитивные* группы, являющиеся равносоставленными с группой $x_i' = f_i(x, a)$.

Во-вторых, мы покажем, что все r-параметрические *интранзитивные* группы можно описать без интегрирования, если известны все *транзитивные* группы с r или менее параметрами.

Соединив эти результаты с вышесказанным и добавив к этому, что согласно теореме 53, стр. 331, описание всех возможных структур групп

с заданным числом параметров требует лишь алгебраических операций, мы непосредственно заключаем следующее:

Если число r задано, то описание всех r-параметрических групп требует, помимо выполнимых операций, всего лишь интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Конечно, очень важным является вопрос, будет ли интегрирование возникающих дифференциальных уравнений выполнимым. Но ни в этой главе, ни в соответствующих местах второй части мы такими вопросами заниматься не можем, так как ответы на них предполагают наличие теорий интегрирования, которые не могут быть развиты в работе о группах преобразований, а требуют отдельного рассмотрения.

§ 106

В этом параграфе мы сопоставим различные методы описания *просто транзитивных* групп, отчасти поскольку эти методы позже будут применяться, а отчасти еще потому, что они замечательны сами по себе.

Пусть сначала заданы конечные уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots r) \tag{2}$$

r-параметрической группы. Найдем конечные уравнения просто транзитивной группы, являющейся равносоставленной с ней.

Согласно гл. 21, стр. 447, группа параметров группы (2) является просто транзитивной и равносоставленной с группой (2). Тогда конечные уравнения

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r)$$

этой группы параметров находятся при помощи выполнимых операций, а именно: путем разрешения конечных уравнений. Следовательно, мы можем выписать конечные уравнения просто транзитивной группы с требуемым свойством, то есть упомянутой группы параметров.

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 77. *Если заданы конечные уравнения r-параметрической группы, то при помощи выполнимых операций можно найти конечные уравнения равносоставленной с ней просто транзитивной группы.*

Очевидно, что задав эту одну просто транзитивную группу, мы задаем и все другие просто транзитивные группы, равносоставленные с группой $x_i' = f_i(x, a)$; ведь в соответствии с теоремой 64, стр. 376, все они подобны между собой.

Предположим теперь, что заданы не конечные, а лишь инфинитезимальные преобразования

$$X_k f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

r-параметрической группы, и попробуем найти инфинитезимальные преобразования равносоставленной просто транзитивной группы.

Эту задачу мы уже, очевидно, решили в гл. 9, стр. 174–175, но она сформулирована там иначе, поскольку мы тогда еще не располагали понятиями просто транзитивной группы и равносоставленности. Наше тогдашнее решение этой задачи мы теперь можем выразить так:

Утверждение 1. *Если заданы инфинитезимальные преобразования*

$$X_k f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

r-параметрической группы, то инфинитезимальные преобразования равносоставленной с ней просто транзитивной группы находятся следующим образом: положим

$$X_k^{(\mu)} f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}} \quad (k = 1 \cdots r), \quad (\mu = 1, 2 \cdots r-1),$$

возьмем r инфинитезимальных преобразований

$$W_k f = X_k f + X_k^{(1)} f + \cdots + X_k^{(r-1)} f \quad (k = 1 \cdots r)$$

и найдем какие-либо $nr - r$ независимых решений $u_1 \cdots u_{nr-r}$ r-параметрической полной системы

$$W_1 f = 0, \cdots W_r f = 0;$$

затем введем $u_1 \cdots u_{nr-r}$ в качестве новых независимых переменных, помимо r подходящих функций $y_1 \cdots y_r$ от nr переменных $x_i^{(\mu)}$, и получим таким образом инфинитезимальные преобразования:

$$W_k f = \sum_{j=1}^r \eta_{kj}(y_1 \cdots y_r, u_1 \cdots u_{nr-r}) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r);$$

если, кроме того, под $u_1^0 \cdots u_{nr-r}^0$ *понимаются числовые константы, то* r *независимых инфинитезимальных преобразований*

$$\mathfrak{W}_k f = \sum_{j=1}^{r} \eta_{kj}\,(y_1 \cdots y_r, u_1^0 \cdots u_{nr-r}^0) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

порождают просто транзитивную группу, которая является равносоставленной с группой $X_1 f \cdots X_r f$. *Если* $X_1 f \cdots X_r f$ *связаны соотношениями*

$$(X_i\, X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\, X_s f,$$

то между $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ *имеют место те же соотношения*

$$(\mathfrak{W}_i\, \mathfrak{W}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\, \mathfrak{W}_s f.$$

Процедура, описанная в этом утверждении, требует интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, а это интегрирование будет, конечно же, не всегда выполнимо. Теоретически это совершенно безразлично, потому что в настоящей главе без интегрирования не обойтись. Тем не менее там, где речь пойдет действительно о просто транзитивных группах, мы в следующей главе нигде не будем использовать описанный выше метод; мы применим его только в одном случае, когда понадобится доказать существование просто транзитивной группы с определенными свойствами.

Наконец, мы еще хотим стать на следующую точку зрения: предположим, что нам дана лишь одна структура r-параметрических групп, то есть система констант c_{iks}, удовлетворяющая уравнениям (1). Мы покажем, что по меньшей мере в очень многих случаях можно выписать конечные уравнения просто транзитивной группы со структурой c_{iks} при помощи выполнимых операций.

Воспользуемся для этого теоремой 52, стр. 328, согласно которой r инфинитезимальных преобразований

$$E_\mu f = \sum_{k,j=1}^{r} c_{j\mu k} e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \quad (\mu = 1 \cdots r)$$

находятся попарно в соотношениях

$$(E_i\, E_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\, E_s f,$$

то есть порождают линейную однородную группу в переменных $e_1 \cdots e_r$. Эта группа является, в частности, r-параметрической, если не все определители порядка r, строки которых имеют вид

$$|c_{j1k}\, c_{j2k} \cdots c_{jrk}| \quad (j,k = 1 \cdots r),$$

обращаются в нуль, и тогда она, очевидно, имеет структуру c_{iks}.

Теперь можно выписать конечные уравнения группы $E_1 f \cdots E_r f$ при помощи выполнимых операций (ср. стр. 302); поэтому если упомянутые определители не все равны нулю, то мы можем задать конечные уравнения r-параметрической группы со структурой c_{iks}. Но отсюда сразу следует (теор. 77, стр. 476), что мы можем также задать конечные уравнения просто транзитивной группы со структурой c_{iks}. Тем самым мы получаем следующее

Утверждение 2. *Если задана система констант c_{iks}, удовлетворяющая уравнениям*

$$\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{r} (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu ks} = 0 \quad (i,k,j,s = 1 \cdots r) \end{cases} \tag{1}$$

и такая, что не все определители порядка r, строки которых имеют вид

$$|c_{j1k}\, c_{j2k} \cdots c_{jrk}| \quad (j,k = 1 \cdots r),$$

обращаются в нуль, то всегда можно при помощи выполнимых операций найти просто транзитивную группу со структурой c_{iks}.

Впрочем, то же самое можно совершенно аналогичным образом доказать и для других систем c_{iks}, но мы не хотим в это дальше углубляться. Еще всего лишь одно замечание.

Если даны r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$, порождающих r-параметрическую группу, то одновременно задана система c_{iks}, отвечающая этой группе. И если эта система c_{iks} такова, что указанные в утверждении 2 определители не все обращаются в нуль, то группа $X_1 f \cdots X_r f$, очевидно, не содержит никаких совершенных инфинитезимальных преобразований (ср. стр. 306), то есть мы видим, что верно следующее:

Если даны r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$, порождающих r-параметрическую группу, то во всяком случае тогда, когда эта группа не содержит совершенных инфинитезимальных преобразований, при помощи выполнимых операций можно выписать конечные уравнения просто транзитивной группы, равносоставленной с группой $X_r f \cdots X_r f$.

§ 107

Теперь приступим к первой из двух задач, решение которых мы обещали в вводной части этой главы.

Итак, предположим, что нам даны конечные уравнения

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{2}$$

r-параметрической группы, и поставим задачу описать все r-параметрические транзитивные группы, равносоставленные с данной.

Если r-параметрическая группа Γ какого-либо пространства является транзитивной и равносоставленной с группой $x_i' = f_i(x, a)$, то очевидно, что то же самое справедливо для всех групп того же пространства, подобных Γ. Поэтому вполне можно поделить искомые группы на классы, отнеся к одному и тому же классу все группы с требуемым свойством, которые содержат одинаковое число переменных и, кроме того, подобны между собой. Совокупность всех групп, принадлежащих такому классу, мы назовем *типом* транзитивных групп данной структуры.

Это деление искомых групп на типы имеет преимущество, что нам не надо выписывать действительно все группы. Поскольку если известна одна группа с требуемым свойством, то одновременно известны все подобные ей группы, то есть все группы, относящиеся к этому же типу. Поэтому будет вполне достаточно, если мы перечислим, сколько имеется различных типов искомых групп, и если для каждого отдельного типа зададим представитель, то есть группу, относящуюся к данному типу.

Чтобы решить нашу задачу, пойдем следующим путем:

Сначала опишем метод, дающий транзитивные группы, равносоставленные с группой $x_i' = f_i(x, a)$. Затем приведем доказательство того, что при помощи этого метода можно получить любую такую группу, и что, в частности, найдется хотя бы один представитель для любого типа таких групп. Наконец, зададим критерии, позволяющие решить, являются ли две различные группы, полученные нашим методом, подобными или нет, то есть относятся ли они к одному и тому же типу. Тем самым мы получаем возможность охватить все имеющиеся различные типы и в то же время указать для каждого из этих типов одного представителя.

Такова программа, которую мы далее будем выполнять.

Пусть

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} \eta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— независимые инфинитезимальные преобразования просто транзитивной группы, равносоставленной с группой $x_i' = f_i(x, a)$. Далее, пусть

$$Z_k f = \sum_{j=1}^{r} \zeta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— независимые инфинитезимальные преобразования соответствующей взаимной группы, являющейся согласно теореме 68, стр. 420, также просто транзитивной и равносоставленной с группой $x_i' = f_i(x, a)$.

Все эти условия, очевидно, могут быть выполнены. Двумя просто транзитивными группами с заданным свойством являются, например, определенная в предыдущей главе группа параметров

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r)$$

группы $x_i' = f_i(x, a)$ и взаимная ей группа

$$a_k' = \varphi_k(b_1 \cdots b_r, a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1 \cdots r).$$

Для этих двух групп можно даже выписать конечные уравнения при помощи выполнимых операций.

После этих приготовлений обратимся к изложению вышеуказанного метода получения транзитивных групп, равносоставленных с группой $x_i' = f_i(x, a)$. При этом мы, очевидно, можем заменить группу $x_i' = f_i(x, a)$ на группу $Y_1 f \cdots Y_r f$.

В главе 17, стр. 337–340, мы показали, как можно использовать произвольное инвариантное относительно группы разбиение пространства для того, чтобы получить изоморфную группу. Применим это к группе $Y_1 f \cdots Y_r f$.

На основании теоремы 69, стр. 427, ищем какое-либо инвариантное относительно группы $Y_1 f \cdots Y_r f$ разбиение пространства $y_1 \cdots y_r$. При помощи алгебраических операций найдем m-параметрическую подгруппу взаимной группы $Z_1 f \cdots Z_r f$. Если

$$\mathsf{Z}_\mu f = \varepsilon_{\mu 1} Z_1 f + \cdots + \varepsilon_{\mu r} Z_r f \quad (\mu = 1 \cdots m) \tag{3}$$

— независимые инфинитезимальные преобразования этой группы, то мы образуем m-параметрическую полную систему

$$\mathsf{Z}_1 f = 0, \cdots \mathsf{Z}_m f = 0$$

и вычислим путем ее интегрирования какие-либо $r - m$ независимых инвариантов

$$u_1(y_1 \cdots y_r) \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r)$$

группы $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$. Тогда уравнения

$$u_1(y_1 \cdots y_r) = \text{const}, \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = \text{const} \tag{4}$$

задают инвариантное относительно группы $Y_1 f \cdots Y_r f$ разбиение пространства $y_1 \cdots y_r$ на ∞^{r-m} m-мерных многообразий.

Теперь введем $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ вместе с m другими подходящими функциями $v_1 \cdots v_m$ от y в качестве новых переменных в $Y_1 f \cdots Y_r f$ и получим

$$Y_k f = \sum_{\nu=1}^{r-m} \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} w_{k\mu}(u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m) \frac{\partial f}{\partial v_\mu}$$

$$(k = 1 \cdots r).$$

Отсюда, наконец, образуем укороченные инфинитезимальные преобразования:

$$U_k f = \sum_{\nu=1}^{r-m} \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Они порождают согласно утв. 4, гл. 17, стр. 340, группу, изоморфную группе $Y_1 f \cdots Y_r f$ в переменных $u_1 \cdots u_{r-m}$.

Если бы мы вместо $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ выбрали какие-либо другие независимые инварианты $u'_1(y) \cdots u'_{r-m}(y)$ группы $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$, то получили бы вместо группы $U_1 f \cdots U_r f$ другую группу в переменных $u'_1 \cdots u'_{r-m}$, но она была бы подобна группе $U_1 f \cdots U_r f$, поскольку $u'_1(y) \cdots u'_{r-m}(y)$ суть независимые функции от $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$. Если бы мы заменили $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ на общую систему $r-m$ независимых инвариантов группы $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$, то получили бы наиболее общую группу в $r-m$ переменных, подобную группе $U_1 f \cdots U_r f$.

Из того, что группа $Y_1 f \cdots Y_r f$ является просто транзитивной, следует, как уже отмечалось в гл. 20, стр. 429, что не все определители порядка $r-m$ матрицы

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}(u) & \cdot & \omega_{1,r-m}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{r1}(u) & \cdot & \omega_{r,r-m}(u) \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль тождественно; иначе говоря, получается, что группа $U_1 f \cdots U_{r-m} f$ от $r-m$ переменных u транзитивна.

Тем самым мы имеем метод для описания транзитивных групп, изоморфных группе $Y_1 f \cdots Y_r f$. Но этого нам недостаточно, нам требуются

транзитивные группы, равносоставленные с группой $Y_1 f \cdots Y_r f$, то есть голоэдрически изоморфные. Следовательно, группа $U_1 f \cdots U_r f$ для нас лишь тогда интересна, когда она является r-параметрической. При каких условиях это выполняется?

Поскольку группа $U_1 f \cdots U_r f$ транзитивна, то она содержит по меньшей мере $r - m$ существенных параметров, то есть в общем случае она будет содержать $r - l$ существенных параметров, где $0 \leqslant l \leqslant m$. Тогда согласно стр. 340 в группе $Y_1 f \cdots Y_r f$ имеется ровно l независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих каждое из ∞^{r-m} многообразий (4) неподвижным, и эти инфинитезимальные преобразования порождают l-параметрическую инвариантную подгруппу группы $Y_1 f \cdots Y_r f$. Обозначим эту подгруппу для краткости через g.

Если M — какое-либо многообразие общего положения из (4), то M допускает ровно m независимых инфинитезимальных преобразований вида $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, порождающих m-параметрическую подгруппу γ группы $Y_1 f \cdots Y_r f$ (ср. стр. 429). Разумеется, в этой группе γ содержится инвариантная подгруппа g. С другой стороны, M допускает ровно m независимых инфинитезимальных преобразований взаимной группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, а именно $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$, которые тоже порождают m-парамерическую группу. Поэтому можно так связать эти просто транзитивные группы $Y_1 f \cdots Y_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ друг с другом голоэдрическим изоморфизмом, что подгруппе γ будет соответствовать подгруппа $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$. При этом инвариантной подгруппе g, очевидно, соответствует l-параметрическая инвариантная подгруппа g' группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, причем g' содержится в подгруппе $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$.

Итак, мы видим: если группа $U_1 f \cdots U_r f$ является в точности $(r - l)$-параметрической, то группа $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ содержит l-параметрическую подгруппу g', инвариантную в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$.

Наоборот, если группа $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ содержит l-параметрическую подгруппу

$$\mathrm{Z}'_\lambda f = h_{\lambda 1} \mathrm{Z}_1 f + \cdots + h_{\lambda m} \mathrm{Z}_m f,$$

инвариантную в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$, то группа $U_1 f \cdots U_r f$ может быть максимум $(r - l)$-параметрической.

Действительно, при только что наложенном условии l друг от друга независимых уравнений

$$\mathrm{Z}'_1 f = 0, \cdots \mathrm{Z}'_l f = 0 \tag{5}$$

образуют l-параметрическую полную систему с $r - l$ независимыми решениями

$$\psi_1(y_1 \cdots y_r) \cdots \psi_{r-l}(y_1 \cdots y_r).$$

Кроме того, имеют место соотношения вида

$$(Z_k Z'_\lambda) = h_{k\lambda 1}\, \mathsf{Z}'_1 f + \cdots + h_{k\lambda l}\, \mathsf{Z}'_l f \quad (k = 1 \cdots r,\ \lambda = 1 \cdots l),$$

говорящие о том, что полная система (5) допускает группу $Z_1 f \cdots Z_r f$. Следовательно, уравнения

$$\psi_1(y_1 \cdots y_r) = \text{const}, \cdots \psi_{r-l}(y_1 \cdots y_r) = \text{const} \tag{6}$$

представляют инвариантное относительно группы $Z_1 f \cdots Z_r f$ разбиение пространства $y_1 \cdots y_r$ на ∞^{r-l} l-мерных многообразий.

Эти ∞^{r-l} многообразий находятся в очень простой связи с ∞^{r-m} многообразиями

$$u_1(y_1 \cdots y_r) = \text{const}, \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = \text{const}, \tag{4}$$

а именно: каждое многообразие из (4) состоит из ∞^{m-l} различных многообразий (6). Это непосредственно следует из того, что $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ как решения полной системы

$$\mathsf{Z}'_1 f = 0, \cdots \mathsf{Z}'_m f = 0$$

в то же время удовлетворяют полной системе (5) и могут быть представлены как функции от $\psi_1(y_1 \cdots y_r) \cdots \psi_{r-l}(y_1 \cdots y_r)$.

Взаимная группа $Y_1 f \cdots Y_r f$ согласно гл. 20, стр. 427, содержит в точности l независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих любое отдельно взятое из ∞^{r-l} многообразий (6) неподвижным, то есть оно, очевидно, содержит по меньшей мере l независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих любое [отдельно взятое] из ∞^{r-m} многообразий (4) неподвижным; но отсюда немедленно следует, что группа $U_1 f \cdots U_r f$ при наложенных условиях может быть максимум $(r-l)$-параметрической, как мы и утверждали выше.

При помощи вышеизложенных рассуждений доказано: группа $U_1 f \cdots U_r f$ является $(r-l)$-параметрической тогда и только тогда, когда группа $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ содержит инвариантную в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$ подгруппу с l параметрами, но не больше. В частности, группа $U_1 f \cdots U_r f$ поэтому является r-параметрической тогда и только тогда, когда группа $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$, помимо тождественного преобразования, не содержит никакой подгруппы, инвариантной в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$. Слово «подгруппа» при этом надо трактовать в самом широком смысле, так что даже сама группа $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ рассматривается как содержащаяся в ней подгруппа.

Обобщая полученные результаты, мы можем теперь сказать:

Теорема 78. *Если две r-параметрические группы*

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} \eta_{kj}(y_1 \cdots y_r)\frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Z_k f = \sum_{j=1}^{r} \zeta_{kj}(y_1 \cdots y_r)\frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

являются транзитивными и взаимными по отношению друг к другу, и если

$$\mathrm{Z}_\mu f = \varepsilon_{\mu 1} Z_1 f + \cdots + \varepsilon_{\mu r} Z_r f \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

— m-параметрическая подгруппа группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, а

$$u_1(y_1 \cdots y_r) \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r)$$

— независимые инварианты этой подгруппы, то r инфинитезимальных преобразований

$$\sum_{\nu=1}^{r-m} Y_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_{\nu=1}^{r-m} \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m})\frac{\partial f}{\partial u_\nu} = U_k f$$

порождают в $r - m$ переменных $u_1 \cdots u_{r-m}$ транзитивную группу, изоморфную группе $Y_1 f \cdots Y_r f$. Эта группа является $(r-l)$-параметрической, если в группе $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ имеется подгруппа с l, но не более параметрами, инвариантная в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$. Поэтому она, в частности, тогда и только тогда будет r-параметрической и равносоставленной с группой $Y_1 f \cdots Y_r f$, когда группа $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ ни сама не является инвариантной в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$, ни содержит никакой другой инвариантной в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$ подгруппы, за исключением тождественного преобразования.

Если заменить $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ наиболее общей системой $u'_1(y) \cdots u'_{r-m}(y)$ независимых $r - m$ инвариантов группы $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$, то вместо группы $U_1 f \cdots U_r f$ получится подобная ей, наиболее общая группа от $r - m$ переменных. Если, в частности, группа $U_1 f \cdots U_r f$ — r-параметрическая, то, таким образом, получается наиболее общая транзитивная группа, равносоставленная с группой $Y_1 f \cdots Y_r f$, относящаяся к тому же типу, что и группа $U_1 f \cdots U_r f$.

Из рассуждений, использованных при доказательстве этой теоремы, следует, кроме того,

Утверждение 3. *Если $Y_1 f \cdots Y_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ — две взаимные просто транзитивные группы, и если $Z_1 f \cdots Z_l f$ — инвариантная l-параметрическая подгруппа второй из них, то инварианты этой l-параметрической группы можно также определить как инварианты некоторой l-параметрической группы, содержащейся в r-параметрической группе $Y_1 f \cdots Y_r f$ в качестве инвариантной подгруппы.*

Благодаря теореме 78 первая часть поставленной на стр. 480 задачи решена, мы имеем способ получения транзитивных групп, равносоставленных с группой $x_i' = f_i(x, a)$. Переходим теперь ко второй части, к доказательству того, что при помощи нашего метода можно найти любую подобного рода группу.

Пусть в переменных $r - m$ дана какая-либо транзитивная группа, равносоставленная с группой $x_i' = f_i(x, a)$; пусть ее инфинитезимальными преобразованиями будут

$$\mathfrak{X}_k f = \sum_{\nu=1}^{r-m} \xi_{k\nu}(z_1 \cdots z_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Докажем сначала, что среди просто транзитивных групп с той же структурой имеется во всяком случае одна, из которой может быть получена группа $\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_r f$, совершенно аналогично тому, как группа $U_1 f \cdots U_r f$ — из просто транзитивной группы $Y_1 f \cdots Y_r f$.

Для этого рассмотрим согласно указанию в утверждении 1, стр. 477 r инфинитезимальных преобразований

$$W_k f = \mathfrak{X}_k f + \mathfrak{X}_k^{(1)} f + \cdots + \mathfrak{X}_k^{(r-1)} f \quad (k = 1 \cdots r)$$

от $r(r - m)$ переменных $z, z^{(1)} \cdots z^{(r-1)}$. Если теперь $\varphi_1 \cdots \varphi_R$ — какие-либо $(r - m)r - r = R$ решений r-параметрической полной системы

$$W_1 f = 0, \cdots W_r f = 0, \tag{7}$$

то мы введем их вместе с $z_1 \cdots z_{r-m}$ и еще с m подходящими функциями $\overline{z}_1 \cdots \overline{z}_m$ от $z, z^{(1)} \cdots z^{(r-1)}$ в качестве новых переменных. Это возможно, так как уравнения (7) разрешимы благодаря транзитивности группы $\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_r f$ относительно $\dfrac{\partial f}{\partial z_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial z_{r-m}}$, поэтому $z_1 \cdots z_{r-m}$ независимы от функций $\varphi_1 \cdots \varphi_R$. В новых переменных $W_1 f \cdots W_r f$ принимают вид

$$W_k f = \mathfrak{X} f + \sum_{\mu=1}^{m} w_{k\mu}(z_1 \cdots z_{r-m}, \overline{z}_1 \cdots \overline{z}_m, \varphi_1 \cdots \varphi_R) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\mu} \quad (k = 1 \cdots r),$$

и если мы здесь придадим φ подходящие фиксированные значения $\varphi_1^0 \cdots \varphi_R^0$ и положим

$$w_k(z_1 \cdots z_{r-m}, \overline{z}_1 \cdots \overline{z}_m, \varphi_1^0 \cdots \varphi_R^0) = w_k^0(z_1 \cdots z_{r-m}, \overline{z}_1 \cdots \overline{z}_m),$$

то

$$\mathfrak{W}_k f = \mathfrak{X}_k f + \sum_{\mu=1}^{m} w_{k\mu}^0(z_1 \cdots z_{r-m}, \overline{z}_1 \cdots \overline{z}_m) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\mu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

суть независимые инфинитезимальные преобразования просто транзитивной группы, равносоставленной с группой $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$, а стало быть, и с группой $x_i' = f_i(x, a)$.

Тем самым мы нашли просто транзитивную группу с заданным прежде свойством.

Уравнения

$$z_1 = \text{const}, \cdots z_{r-m} = \text{const},$$

очевидно, задают инвариантное относительно группы $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ разбиение пространства $z_1 \cdots z_{r-m}, \overline{z}_1 \cdots \overline{z}_{r-m}$ на ∞^{r-m} m-мерных многообразий. Группа $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ указывает, каким образом эти ∞^{r-m} многообразий группы $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ переставляются между собой. Таким образом, между группами $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ и $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ существует соотношение, совершенно подобное вышеупомянутому между группами $U_1 f \cdots U_r f$ и $Y_1 f \cdots Y_r f$.

Тогда совсем несложно доказать, что группа $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ подобна одной из групп, которые мы получим, если применим описанный в теореме 78, стр. 485, метод к двум взаимным просто транзитивным группам $Y_1 f \cdots Y_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ с соответствующей структурой.

Пусть $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_r f$ просто транзитивная группа, взаимная к группе $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$. Конечно же, она является равносоставленной с группой $Z_1 f \cdots Z_r f$, а потому также подобна ей (ср. гл. 19, теор. 64, стр. 376).

Мы полагаем, что преобразование

$$\begin{cases} z_1 = z_1(y_1 \cdots y_r), \cdots z_{r-m} = z_{r-m}(y_1 \cdots y_r), \\ \overline{z}_1 = \overline{z}_1(y_1 \cdots y_r), \cdots \overline{z}_m = \overline{z}_m(y_1 \cdots y_r) \end{cases} \tag{8}$$

переводит группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ в группу $\mathsf{B}_1 f \cdots \mathsf{B}_r f$. Тогда одновременно согласно гл. 20, стр. 421, при том же преобразовании группа $Y_1 f \cdots Y_r f$ переходит в группу $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$, то есть в силу (8) имеют место соотношения вида

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} \mathfrak{h}_{kj} \mathfrak{W}_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

где определитель, составленный из констант $\mathfrak{h}_{kj}$, не обращается в нуль. Но из этих соотношений непосредственно следуют соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{r-m} Y_k z_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = \sum_{j=1}^{r} \mathfrak{h}_{kj} \mathfrak{W}_j f \quad (k = 1 \cdots r), \tag{9}$$

которые также имеют место в силу (8). Это означает, что уравнения

$$z_1(y_1 \cdots y_r) = \text{const}, \cdots z_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = \text{const}$$

представляют разбиение пространства $y_1 \cdots y_r$, инвариантное относительно группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, что равносильно тому, что $z_1(y) \cdots z_{r-m}(y)$ являются независимыми инвариантами совершенно определенной m-параметрической подгруппы группы $Z_1 f \cdots Z_r f$. Таким образом, мы получаем группу $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ при помощи описанного в теореме 78, стр. 485, метода, если сделаем следующее: в качестве группы $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ выберем только что определенную m-параметрическую подгруппу $\mathfrak{g}$ группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, в качестве функций $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ — вышеупомянутые инварианты $z_1(y) \cdots z_{r-m}(y)$ группы $\mathfrak{g}$. При этих условиях имеют место соотношения (9), выражения в правой части которых суть независимые инфинитезимальные преобразования группы $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$.

Тем самым доказано, что при помощи метода, описанного в теореме 78, стр. 485, можно найти любую транзитивную группу, изоморфную группе $x_i' = f_i(x, a)$. Поэтому мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 79. *Если заданы конечные уравнения*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

r-параметрической группы, то все равносоставленные с ней транзитивные группы находятся следующим образом.

Сначала определяется то, что требует лишь выполнимых операций: две r-параметрические просто транзитивные группы

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} \eta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Z_k f = \sum_{j=1}^{r} \zeta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

взаимные друг к другу и равносоставленные с заданной группой. Затем при помощи алгебраических операций выписываются все те подгруппы группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, которые неинвариантны в этой группе и не содержат никаких других инвариантных в этой группе подгрупп, кроме тождественного преобразования. Каждая из найденных подгрупп дает согласно указанию из теоремы 78 все транзитивные группы, равносоставленные с группой $x_i' = f_i(x, a)$, относящиеся к определенному типу. Задав эти группы для всех найденных подгрупп, мы получаем все транзитивные группы, равносоставленные с группой $x_i' = f_i(x, a)$[1].

Теперь и вторая часть нашей программы выполнена, мы можем задать все типы транзитивных групп, равносоставленных с группой $x_i' = f_i(x, a)$. Всякая подгруппа группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, обладающая указанным в теореме 79 свойством, дает нам такой тип. Остается лишь выяснить, когда две различные подгруппы группы $Z_1 f \cdots Z_r f$ дают разные типы, а когда один и тот же.

Пусть m независимых инфинитезимальных преобразований

$$\mathsf{Z}_\mu f = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{\mu k} Z_k f \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

порождают m-параметрическую группу, которая неинвариантна в этой группе и не содержит никакой другой инвариантной в этой группе подгруппы, кроме тождественного преобразования. Пусть функции

$$u_1(y_1 \cdots y_r) \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r)$$

будут независимыми инвариантами группы $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$. При этих условиях группа

$$U_k f = \sum_{\nu=1}^{r-m} Y_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_{\nu=1}^{r-m} \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

в $r - m$ переменных $u_1 \cdots u_{r-m}$ является согласно теореме 79 равносоставленной с группой $x_i' = f_i(x, a)$ и, кроме того, транзитивной, и поэтому является представителем некоторого типа таких групп, соответствующего подгруппе $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$.

[1] Ли, Archiv for Math., том 10, Христиания, 1885 г., а также Verh. der Gesellsch. d. W. zu Chr. (Слушания Научного общества Христиании), 1884 г. и Berichte der Kgl. Sachs. G. d. W. (Записки Королевского Научного общества Саксонии), 1888 г.

Для того чтобы другая подгруппа группы $Z_1 f \cdots Z_r f$ давала этот же тип группы, она, очевидно, должна быть m-параметрической, так как лишь тогда она может давать транзитивные группы в $r - m$ переменных, равносоставленные с группой $x_i' = f_i(x, a)$.

Предположим, что

$$3_\mu f = \sum_{k=1}^{r} e_{\mu k} Z_k f \quad (\mu = 1 \quad m)$$

— другая m-параметрическая подгруппа группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, и что эта подгруппа также не является инвариантной в группе $Z_1 f \cdots Z_r f$, и $Z_1 f \cdots Z_r f$ не содержит никакой другой инвариантной в этой группе подгруппы, кроме тождественного преобразования. Пусть независимые инварианты группы $3_1 f \cdots 3_m f$ таковы:

$$u(y_1 \cdots y_r) \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r).$$

При этих условиях группа

$$\mathfrak{U}_k f = \sum_{\nu=1}^{r-m} Y_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_{\nu=1}^{r-m} o_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \quad (k = 1 \quad r)$$

в $r - m$ переменных $u \cdots u_{r-m}$ также является транзитивной и равносоставленной с группой $x_i' = f_i(x, a)$.

Вопрос, дают ли подгруппы $Z_1 f \cdots Z_m f$ и $3_1 f \cdots 3_m f$ группы $Z_1 f \cdots Z_r f$ один и тот же тип группы, очевидно, можно теперь сформулировать еще и так: являются ли группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ подобными?

Группы, о которых здесь идет речь, являются транзитивными, а подобны они или нет, можно решить на основании теоремы 76, стр. 470.

Из нее мы видим, что группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_m f$ подобны тогда и только тогда, когда их можно так связать друг с другом голоэдрическим изоморфизмом, что будет выполняться следующее условие: наиболее общей подгруппе группы $U_1 f \cdots U_r f$, оставляющей произвольно выбранную, но фиксированную систему значений $u_1 = u_1^0, \cdots u_{r-m} = u_{r-m}^0$ общего положения инвариантной, должна соответствовать наиболее общая подгруппа группы $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_m f$, оставляющая некоторую систему значений $u_1 = u_1^0, \cdots u_{r-m} = u_{r-m}^0$ общего положения инвариантной.

Теперь обе группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_m f$ связаны по своему построению голоэдрическим изоморфизмом с группой $Y_1 f \cdots Y_r f$, следовательно, мы можем сформулировать необходимый и достаточный критерий

их подобия еще и так: *подобие имеет место тогда и только тогда, когда можно так связать группу* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *голоэдрическим изоморфизмом с самой собой, что ее наибольшей подгруппе* G, *сохраняющей многообразие*

$$u_1(y_1 \cdots y_r) = u_1^0, , \cdots , u_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = u_{r-m}^0, \tag{10}$$

соответствует ее наибольшая подгруппа $\mathfrak{G}$, *сохраняющая многообразие*

$$\mathfrak{u}_1(y_1 \cdots y_r) = \mathfrak{u}_1^0, \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = \mathfrak{u}_{r-m}^0. \tag{11}$$

Найденный таким образом критерий можно привести к другому замечательному виду. Действительно, рассмотрим группу $Z_1 f \cdots Z_r f$, взаимную группе $Y_1 f \cdots Y_r f$. В ней $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ — наибольшая подгруппа, оставляющая многообразие (10) инвариантным, а $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ — наибольшая подгруппа, оставляющая многообразие (11) инвариантным. Тогда согласно утв. 8, гл. 20, стр. 431, можно так связать группы $Y_1 f \cdots Y_r f$ и $Z_1 f \cdots Z_r f$ между собой голоэдрическим изоморфизмом, что подгруппе G будет соответствовать подгруппа $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$; но можно связать их между собой голоэдрическим изоморфизмом и так, что подгруппе $\mathfrak{G}$ будет соответствовать подгруппа $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$.

Отсюда следует, что группу $Y_1 f \cdots Y_r f$ можно связать с ней самой голоэдрическим изоморфизмом указанным выше способом тогда и только тогда, когда можно связать группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ с ней самой голоэдрическим изоморфизмом так, чтобы подгруппе $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ соответствовала подгруппа $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$.

Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 80. *Если две* r*-параметрические группы*

$$Y_k f = \sum_{j=1}^{r} \eta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Z_k f = \sum_{j=1}^{r} \zeta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

являются транзитивными и взаимными по отношению друг к другу, и если

$$\mathrm{Z}_\mu f = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{\mu k} Z_k f \quad (k = 1 \cdots m)$$

и

$$3_\mu f = \sum_{k=1}^{r} e_{\mu k} Z_k f \quad (k = 1 \cdots m)$$

суть две m-параметрические подгруппы группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, которые неинвариантны в этой группе и не содержат никакой другой инвариантной в этой группе подгруппы, кроме тождественного преобразования; наконец, если $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ и $\mathfrak{u}_1(y) \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(y)$ — независимые инварианты этих двух m-параметрических подгрупп соответственно, то две транзитивные группы, равносоставленные с группой $Y_1 f \cdots Y_r f$:

$$U_k f = \sum_{\nu=1}^{r-m} Y_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_{\nu=1}^{r-m} \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$\mathfrak{U}_k f = \sum_{\nu=1}^{r-m} Y_k \mathfrak{u}_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_{\nu=1}^{r-m} \mathfrak{v}_{k\nu}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{u}_\nu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

подобны тогда и только тогда, когда можно связать группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ с ней самой голоэдрическим изоморфизмом так, чтобы подгруппе $Z_1 f \cdots Z_m f$ соответствовала подгруппа $3_1 f \cdots 3_m f$.

Благодаря этой теореме и последняя часть составленной на стр. 480 программы выполнена. Мы можем теперь определить, дают ли две различные подгруппы группы $Z_1 f \cdots Z_r f$ различные типы транзитивных групп, равносоставленных с группой $x_i' = f_i(x, a)$. Для этого достаточно, очевидно, исследовать подгруппы группы $Z_1 f \cdots Z_r f$ или, что то же самое, подгруппы группы $x_i' = f_i(x, a)$.

Объединим необходимые операции в следующей теореме.

Теорема 81. *Если даны конечные уравнения или инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы Γ, то определить, сколько имеется различных типов транзитивных групп, равносоставленных с группой Γ, можно следующим образом: надо задать все m-параметрические подгруппы группы Γ, исключив, однако, все те подгруппы, которые либо инвариантны в Γ, либо содержат какую-либо другую инвариантную в Γ подгруппу, кроме тождественного преобразования. Найденные подгруппы надо разделить на классы, причем две подгруппы всегда относятся к одному и тому же классу, если можно так связать Γ с ней самой голоэдрическим изоморфизмом, что эти две подгруппы будут соответствовать друг другу.*

Каждому из полученных таким образом классов m-параметрических подгрупп соответствует совершенно определенный тип транзитивных, равносоставленных с Γ групп от $r-m$ переменных; различным классам соответствуют различные типы. Если провести это исследование для каждого из чисел $m = 0, 1, 2 \cdots r-1$, то можно получить представление о числе всех имеющихся типов.

Заметим еще следующее: все требуемые в теореме 81 операции выполнимы, даже если задана не группа Γ, а только ее структура. И в этом случае необходимы лишь алгебраические операции. Поскольку количество подгрупп для каждого r зависит только от произвольных параметров, то и количество имеющихся типов зависит не более, чем от произвольных параметров. В частности, имеется один единственный тип просто транзитивных групп, равносоставленных с группой Γ. Это следует, однако, уже из рассуждений предыдущего параграфа.

Объединяя теоремы 81 и 78, мы получаем еще одну теорему.

Теорема 82. *Если заданы конечные уравнения*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

r-параметрической группы, то для описания всех равносоставленных транзитивных групп, помимо выполнимых операций, требуется каждый раз только интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений[2].

Если мы хотим выписать все r-параметрические транзитивные группы от n переменных, то надо задать все структуры r-параметрических групп, а затем найти для каждой структуры соответствующие типы транзитивных групп от n переменных. Все эти типы распадаются для заданного r (и n) на ограниченное число категорий, таких, что типы одной категории имеют то же самое аналитическое представление. Однако аналитические выражения для всех типов одной категории в общем случае содержат определенные параметры, число которых мы всегда полагаем сведенным к минимуму. Появление таких параметров основано на двух различных обстоятельствах: во-первых, на том, что заданному $r > 2$ соответствует неограниченное число различных структур; во-вторых, что заданная r-параметрическая группа в общем случае содержит неограниченное число подгрупп, дающих самые различные типы. Мы не считаем целесообразным продолжать здесь эти рассуждения.

[2] Ср. Ли, Math. Annalen, том XVI, стр. 528.

§ 108

Вернемся еще раз к той точке зрения, которой мы придерживались на стр. 489.

Мы использовали две m-параметрические подгруппы, $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ и $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$, группы $Z_1 f \cdots Z_r f$, чтобы получить транзитивные группы, равносоставленные с группой $Y_1 f \cdots Y_r f$, и нашли, таким образом, группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$. После этого спрашивалось, при каких условиях эти две группы подобны.

На этот вопрос мы тогда отвечали, опираясь на теорему 76, стр. 470, и получили, таким образом, теорему 80, стр. 491. Теперь снова поставим этот же вопрос и попробуем ответить на него без привлечения теоремы 76.

Можно, очевидно, предположить, что группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ подобны во всяком случае тогда, когда существует преобразование

$$\overline{y}_k = \Omega_k(y_1 \cdots y_r) \quad (k = 1 \cdots r), \tag{12}$$

которое превращает подгруппу $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ в подгруппу $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ и в то же время переводит группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ в себя. Покажем, что это предположение истинно.

Итак, пусть (12) — преобразование, обладающее указанными свойствами. Под его действием инварианты группы $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$, очевидно, переходят в инварианты, группы: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$, а потому в силу (12)

$$\mathfrak{u}_\nu(\overline{y}_1 \cdots \overline{y}_r) = \chi_\nu\big(u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)\big) \quad (\nu = 1 \cdots r-m),$$

где функции $\chi_1 \cdots \chi_{r-m}$ полностью определены и независимы друг от друга относительно $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$. С другой стороны, согласно гл. 20, стр. 421, при преобразовании (12) не только группа $Z_1 f \cdots Z_r f$, но и взаимная ей группа $Y_1 f \cdots Y_r f$ переходят в себя. Таким образом, мы имеем

$$\sum_{j=1}^{r} \eta_{kj}(\overline{y}_1 \cdots \overline{y}_r) \frac{\partial f}{\partial \overline{y}_j} = \overline{Y}_k f = \sum_{j=1}^{r} h_{kj} Y_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

где h_{kj} — константы, определитель из которых не обращается в нуль.

Взяв теперь в только что записанных уравнениях в качестве f какую-либо функцию F от $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ или, что то же самое, функцию от $\mathfrak{u}_1(\overline{y}) \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(\overline{y})$, получаем

$$\overline{Y}_k F = \sum_{\nu=1}^{r-m} \mathfrak{v}_{k\nu}(\mathfrak{u} \cdots \mathfrak{u}_{r-m}) \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{u}_\nu} = \sum_{j=1}^{r} h_{kj} \sum_{\nu=1}^{r-m} \omega_{j\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial F}{\partial u_\nu}.$$

Другими словами, группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ подобны. Очевидно, что

$$\mathfrak{u}_\nu = \chi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu = 1 \cdots r-m) \tag{13}$$

— преобразование, переводящее одну группу в другую. Тем самым высказанное выше предположение доказано.

Но можно также доказать, что и обратное верно: если группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ подобны, то всегда существует преобразование, переводящее подгруппу $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ в подгруппу $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ и одновременно группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ — в себя.

Итак, пусть две группы, $U_k f$ и $\mathfrak{U}_k f$, подобны, и пусть

$$\mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu = 1 \cdots r-m) \tag{14}$$

— преобразование, переводящее одну группу в другую, так что

$$\mathfrak{U}_k f = \sum_{j=1}^{r} \delta_{kj} U_j f = U'_k f \quad (k = 1 \cdots r). \tag{15}$$

Под δ_{kj} здесь понимаются константы, такие, что составленные из них определители не обращаются в нуль. Если $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ связаны соотношениями вида

$$(\mathfrak{U}_i \, \mathfrak{U}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \, \mathfrak{U}_s f,$$

то $U'_1 f \cdots U'_r f$, конечно, тоже связаны соотношениями вида

$$(U'_i \, U'_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} \, U'_s f.$$

Мы уже видели прежде, что всякое преобразование (12), оставляющее группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ инвариантной и переводящее подгруппу $\mathsf{Z}_\mu f$ в подгруппу $\mathfrak{Z}_\mu f$, дает совершенно определенное преобразование (13), переводящее группу $U_k f$ в группу $\mathfrak{U}_k f$. При настоящих условиях нам уже известно одно преобразование, осуществляющее последний переход, а именно преобразование (14). Поэтому попытаемся задать преобразование

$$\overline{y}_k = O_k(y_1 \cdots y_r) \quad (k = 1 \cdots r), \tag{16}$$

оставляющее группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ инвариантной, превращающее подгруппу $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ в подгруппу $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ и, наконец, дающее преобразование (14).

Ясно, что всякое преобразование (16) требуемого вида должно быть таким, чтобы его уравнения включали в себя $r-m$ независимых друг от друга уравнений

$$\mathfrak{u}_\nu(\overline{y}_1 \cdots \overline{y}_r) = \psi_\nu\big(u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)\big) \quad (\nu = 1 \cdots r-m). \tag{14'}$$

Если оно удовлетворяет этому условию и, кроме того, оставляет группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ инвариантной, то оно удовлетворяет всем нашим требованиям. С одной стороны оно переводит инварианты группы $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ в инварианты группы $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$, то есть превращает первую из этих групп во вторую, а с другой стороны оно явно задает преобразование (14), в силу которого группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ подобны.

Однако очевидно, что совершенно безразлично, требуем ли мы теперь, чтобы оно оставляло группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ инвариантной или же чтобы переводило группу $Y_1 f \cdots Y_r f$ в себя. Поэтому мы можем нашу задачу сформулировать еще и так:

Требуется найти преобразование (16), *оставляющее группу* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *инвариантной, такое, что его уравнения включают в себя уравнения* (14').

Для простоты введем новые переменные.

Выберем какие-либо m независимых друг от друга и от $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ функций $v_1(y) \cdots v_m(y)$ и еще какие-либо m независимых друг от друга и от $\mathfrak{u}_1(\overline{y}) \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(\overline{y})$ функций $\mathfrak{v}_1(\overline{y}) \cdots \mathfrak{v}_m(\overline{y})$. Функции $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$, $v_1(y) \cdots v_m(y)$ мы введем в качестве новых переменных вместо $y_1 \cdots y_r$, а функции $\mathfrak{u}_1(\overline{y}) \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(\overline{y})$, $\mathfrak{v}_1(y) \cdots \mathfrak{v}_m(\overline{y})$ — вместо $\overline{y}_1 \cdots \overline{y}_r$.

В этих новых переменных искомое преобразование (16) необходимо принимает вид

$$\begin{cases} \mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu = 1 \cdots r-m), \\ \mathfrak{v}_\mu = \Psi_\mu(u_1 \cdots u_{r-m},\, v_1 \cdots v_m) \quad (\mu = 1 \cdots m), \end{cases} \tag{16'}$$

где уже предусмотрено, что его настоящие уравнения должны содержать уравнения (14).

Что же встает на место требования, чтобы преобразование (16) оставляло группу $Y_1 f \cdots Y_r f$ инвариантной?

В новых переменных $u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m$ группа $Y_1 f \cdots Y_r f$, очевидно, принимает вид

$$U_k f + \sum_{\mu=1}^{m} w_{k\mu}(u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m) \frac{\partial f}{\partial v_\mu} = U_k f + V_k f \quad (k = 1 \cdots r).$$

С другой стороны, инфинитезимальные преобразования

$$\overline{Y}_k f = \sum_{j=1}^{r} \eta_{kj}(\overline{y}_1 \cdots \overline{y}_r) \frac{\partial f}{\partial \overline{y}_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

при введении $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$, $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$ переходят в

$$\mathfrak{U}_k f + \sum_{\mu=1}^{m} \mathfrak{w}_{k\mu}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}, , \mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}_\mu} = \mathfrak{U}_k f + \mathfrak{V}_k f \quad (k = 1 \cdots r).$$

Следовательно, мы должны требовать от преобразования (16′), чтобы оно переводило группу $U_1 f + V_1 f, \cdots U_r f + V_r f$ в группу $\mathfrak{U}_1 f + \mathfrak{V}_1 f, \cdots \mathfrak{U}_r f + \mathfrak{V}_r f$; мы должны попытаться в соответствии с этим найти функции $\Psi_1 \cdots \Psi_m$.

Как показывают уравнения (15), r независимых инфинитезимальных преобразований

$$\sum_{j=1}^{r} \delta_{1j} U_j f, \ \cdots \ \sum_{j=1}^{r} \delta_{rj} U_j f$$

переходят под действием преобразования

$$\mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu = 1 \cdots r - m) \tag{14}$$

в

$$\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$$

соответственно. Поэтому чтобы преобразование вида (16′) превращало группу $U_k f + V_k f$ в группу $\mathfrak{U}_k f + \mathfrak{V}_k f$, r независимых инфинитезимальных преобразований

$$\sum_{j=1}^{r} \delta_{1j}(U_j f + V_j f), \cdots \sum_{j=1}^{r} \delta_{rj}(U_j f + V_j f)$$

должны под его действием переходить в

$$\mathfrak{U}_1 f + \mathfrak{V}_1 f, \cdots \mathfrak{U}_r f + \mathfrak{V}_r f$$

соответственно. Это условие является необходимым, но в то же время и достаточным.

При помощи таких рассуждений, как в гл. 19, стр. 371, мы теперь видим, что всякое преобразование (16′) с требуемым свойством может быть

также определено как система уравнений от $2r$ переменных $u, v, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, имеющая вид

$$\begin{cases} \mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu = 1 \cdots r-m), \\ \mathfrak{v}_\mu = \Psi_\mu(u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m) \quad (\mu = 1 \cdots m), \end{cases} \tag{16'}$$

допускающая r-параметрическую группу

$$W_k f = \mathfrak{U}_k f + \mathfrak{V}_k f + \sum_{j=1}^{r} \delta_{kj}(U_j f + V_j f) \quad (k = 1 \cdots r)$$

и разрешаемая относительно $u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m$.

Система уравнений

$$\mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu = 1 \cdots r-m) \tag{14}$$

представляет согласно нашему условию преобразование, переводящее r независимых инфинитезимальных преобразований

$$\sum_{j=1}^{r} \delta_{kj} U_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

в $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ соответственно и допускающее, таким образом, r-параметрическую группу

$$\mathfrak{U}_k f + \sum_{j=1}^{r} \delta_{kj} U_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

а следовательно, и группу $W_1 f \cdots W_r f$.

Поэтому мы можем использовать результаты из гл. 14, стр. 258–262, для нахождения системы уравнений (16′) требуемого типа.

Сначала составим из $W_1 f \cdots W_r f$ некоторые укороченные инфинитезимальные преобразования $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$, опустив все члены с производными $\dfrac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial u_{r-m}}$ и произведя во всех остальных членах подстановку $\mathfrak{u}_1 = \psi_1(u), \cdots \mathfrak{u}_{r-m} = \psi_{r-m}(u)$. Если эту подстановку обозначить через [ ], то $\mathfrak{W}_k f$ принимают следующий вид:

$$\mathfrak{W}_k f = \sum_{\mu=1}^{m} [\mathfrak{w}_{k\mu}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}, \mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m)] \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}_\mu} + \sum_{j=1}^{r} \delta_{kj}(U_j f + V_j f),$$

или еще короче:

$$\mathfrak{W}_k f = [\mathfrak{B}_k f] + \sum_{j=1}^{r} \delta_{kj}(U_j f + V_j f) \quad (k = 1 \cdots r).$$

Конечно же, $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ порождают группу в $r+m$ переменных $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$, $u_1 \cdots u_{r-m}$, $v_1 \cdots v_m$, причем в нашем случае — r-параметрическую.

Теперь зададим в переменных $\mathfrak{v}, u, v$ систему уравнений вида

$$\mathfrak{v}_\mu = \Psi_\mu(u_1 \cdots u_{r-m},\ v_1 \cdots v_m) \quad (\mu = 1 \cdots m), \tag{17}$$

допускающую группу $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ и разрешимую относительно $v_1 \cdots v_m$. Наконец, если мы добавим ее к уравнениям (14), то получим систему уравнений вида (16′), которая имеет вышеуказанные свойства. Поскольку r-параметрическая группа

$$\sum_{j=1}^{r} \delta_{kj}(U_j f + V_j f) \quad (k = 1 \cdots r)$$

является просто транзитивной, то в матрице, которая может быть составлена из коэффициентов $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$, заведомо не все определители порядка r обращаются в нуль тождественно, точно так же они не могут в силу системы уравнений вида (17) обращаться в нуль все одновременно. Следовательно, всякая система уравнений вида (17), допускающая группу $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$, может быть представлена посредством m независимых соотношений между какими-либо m независимыми решениями r-параметрической полной системы

$$\mathfrak{W}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{W}_r f = 0 \tag{18}$$

от $r+m$ переменных $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m, u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m$.

Уравнения (18), очевидно, разрешимы относительно $\dfrac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial u_{r-m}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial v_m}$, с другой стороны, они также разрешимы относительно $\dfrac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial u_{r-m}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}_m}$, поскольку если мы введем в r инфинитезимальных преобразований

$$\mathfrak{U}_1 f + \mathfrak{V}_1 f, \cdots \mathfrak{U}_r f + \mathfrak{V}_r f$$

вместо $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$, $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$, в силу уравнений

$$\mathfrak{u}_\mu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu = 1 \cdots r-m), \tag{14}$$

новые переменные $u_1 \cdots u_{r-m}$, $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$, то получим инфинитезимальные преобразования

$$\sum_{j=1}^{r} \delta_{kj} U_j f + [\mathfrak{V}_k f] \quad (k = 1 \cdots r),$$

которые, в свою очередь, порождают в переменных $u_1 \cdots u_{r-m}$, $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$ просто транзитивную группу. Поэтому если

$$P_\mu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m, u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

— какие-либо m независимых решений полной системы (18), то они независимы друг от друга как по отношению к $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$, так и по отношению к $v_1 \cdots v_m$ (ср. теор. 12, стр. 101).

Отсюда следует, что наиболее общая система уравнений вида (17), которая может быть разрешена относительно $v_1 \cdots v_m$ и допускает группу $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$, получается за счет того, что m уравнений

$$P_\mu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m, u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m) = \text{const} \quad (\mu = 1 \cdots m) \qquad (19)$$

разрешаются относительно $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$.

Тогда мы можем непосредственно задать некоторое, да и вообще — наиболее общее преобразование (16′), переводящее инфинитезимальные преобразования

$$\sum_{j=1}^{r} \delta_{1j}(U_j f + V_j f), \ \cdots \ \sum_{j=1}^{r} \delta_{rj}(U_j f + V_j f)$$

в

$$\mathfrak{U}_1 f + \mathfrak{V}_1 f, \ \cdots \ \mathfrak{U}_r f + \mathfrak{V}_r f$$

соответственно; оно просто представлено уравнениями (14) и (19), вместе взятыми. Если, наконец, снова ввести в (14) и (19) переменные $y_1 \cdots y_r$, $\overline{y}_1 \cdots \overline{y}_r$, то мы получим преобразование, которое оставляет группу $Y_1 f \cdots Y_r f$ инвариантной и уравнения которого включают в себя уравнения (14′), другими словами, преобразование, оставляющее группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ инвариантной и переводящее подгруппу $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ в подгруппу $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$.

Тем самым доказано, что всегда имеется преобразование с указанным свойством, если группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ подобны. Поскольку напротив, согласно стр. 494 из существования такого преобразования следует подобие этих двух групп, то мы можем сказать:

Группы $U_1 f \cdots U_r f$ *и* $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ *подобны тогда и только тогда, когда существует преобразование, которое оставляет группу* $Z_1 f \cdots Z_r f$ *инвариантной, а подгруппу* $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ *переводит в подгруппу* $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$.

Так как группа $Z_1 f \cdots Z_r f$ — просто транзитивная, то ясно, что такое преобразование существует тогда и только тогда, когда группа $Z_1 f \cdots Z_r f$ может быть связана сама с собой голоэдрическим изоморфизмом так, что подгруппы $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ и $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ соответствуют друг другу. Таким образом, мы находим для подобия групп $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ точно такой же критерий, как тот, что был сформулирован в теореме 80, стр. 491.

Полученные выше результаты могут, кстати, быть использованы в новом доказательстве теоремы 76, гл. 21, стр. 470, как мы хотим обрисовать.

Прежде всего, при помощи рассуждений, совершенно аналогичных тем, что на стр. 489, можно доказать, что транзитивные группы $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ могут быть связаны между собой голоэдрическим изоморфизмом вида, описанного в теореме 76, тогда и только тогда, когда можно так связать группу $Z_1 f \cdots Z_r f$ с нею же самой голоэдрическим изоморфизмом, что подгруппы $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ и $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ будут соответствовать друг другу. Из вышеизложенного тогда следует, что условия подобия двух групп, $U_1 f \cdots U_r f$ и $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$, в теореме 76 являются необходимыми и достаточными.

§ 109

Перейдем теперь ко второй из задач, о решении которых было объявлено в начале главы (на стр. 475), — *к описанию всех r-параметрических интранзитивных групп*; как уже было сказано, мы будем проводить соответствующее описание при условии, что все транзитивные группы с r или менее параметрами уже заданы. Поскольку все транзитивные группы с одинаковым числом параметров упорядочиваются в классы согласно их структуре, и так как, кроме того, все транзитивные группы с одной и той же структурой распадаются на ряд типов (ср. стр. 479 и далее), то мы можем уточнить наше условие, предположив, во-первых, что все возможные структуры группы с r или менее параметрами нам известны, и во-вторых, что мы считаем, что все возможные типы транзитивных групп с соответствующей структурой заданы.

Рассмотрим сначала r-параметрическую интранзитивную группу.

Если $X_1 f \cdots X_r f$ — независимые инфинитезимальные преобразования r-параметрической интранзитивной группы пространства $x_1 \cdots x_n$, то r уравнений

$$X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0 \tag{20}$$

имеют определенное число, скажем, в точности $n - l > 0$ независимых решений. Поэтому мы с самого начала можем считать, что переменные $x_1 \cdots x_n$ выбраны так, что $x_{l+1} \cdots x_n$ суть эти независимые решения. Тогда $X_1 f \cdots X_r f$ примут вид,

$$X_k f = \sum_{\lambda=1}^{l} \xi_{k\lambda}(x_1 \cdots x_l, x_{l+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \quad (k = 1 \cdots r),$$

где, разумеется, не все определители порядка l матрицы,

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \xi_{1l}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \xi_{rl}(x) \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль тождественно, иначе уравнения (20) имели бы больше, чем $n - l$ независимых совместных решений.

Если бы число r, которое больше или равно l, равнялось в точности l, то $X_1 f \cdots X_r f$ были бы заведомо не связаны никакими соотношениями вида

$$\chi_1(x_{l+1} \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_r(x_{l+1} \cdots x_n) \cdot X_r f = 0;$$

но поскольку r не обязано быть равным l, то вышеупомянутые соотношения вполне могут иметь место, и при этом не все функции $\chi_1 \cdots \chi_r$ обращаются в нуль. Поэтому мы предполагаем, что $X_1 f \cdots X_m f$ никакими подобными соотношениями не связаны, а $X_{m+1} f \cdots X_r f$ — напротив, можно выразить через $X_1 f \cdots X_m f$ следующим образом:

$$X_{m+\nu} f \equiv \sum_{\mu=1}^{m} \vartheta_{\nu\mu}(x_{l+1} \cdots x_n) \cdot X_\mu f \quad (\nu = 1 \cdots r - m). \tag{21}$$

Само собой разумеется, что при этом m удовлетворяет неравенству $l \leqslant m \leqslant r$. Соединяя уравнения (21) с соотношениями

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \cdots r),$$

которые имеют место при любых условиях, мы также видим, что $X_1 f \cdots X_m f$ находятся попарно в соотношениях

$$(X_\lambda X_\mu) = \sum_{\pi=1}^{m} \left\{ c_{\lambda\mu\pi} + \sum_{\nu=1}^{r-m} c_{\lambda,\mu,m+\nu}\, \vartheta_{\nu\pi}(x_{i+1} \cdots x_n) \right\} X_\pi f$$

$$(\lambda, \mu = 1 \cdots m).$$

Если теперь заменить переменные $x_{l+1} \cdots x_n$ произвольными константами $a_{l+1} \cdots a_n$ и рассматривать в качестве переменных лишь $x_1 \cdots x_n$, то ясно, что r инфинитезимальных преобразований

$$\overline{X}_k f = \sum_{\lambda=1}^{l} \xi_{k\lambda}(x_1 \cdots x_i, a_{l+1} \cdots a_n) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \quad (k = 1 \cdots r)$$

от l переменных $x_1 \cdots x_l$ больше не являются независимыми друг от друга, а получаются линейно из m независимых инфинитезимальных преобразований

$$\overline{X}_\mu f = \sum_{\lambda=1}^{l} \xi_{\mu\lambda}(x_1 \cdots x_l, a_{l+1} \cdots a_n) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

Эти m инфинитезимальных преобразований $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_m f$, в свою очередь, связаны соотношениями

$$(\overline{X}_\lambda \overline{X}_\mu) = \sum_{\pi=1}^{m} \left\{ c_{\lambda\mu\pi} + \sum_{\nu=1}^{r-m} c_{\lambda,\mu,m+\nu} \vartheta_{\nu\pi}(a_{l+1} \cdots a_n) \right\} \overline{X}_\pi f, \qquad (22)$$

таким образом, они всегда порождают, какие бы значения не придавались параметрам $a_{l+1} \cdots a_n$, m-параметрическую группу в переменных $x_1 \cdots x_l$, причем, разумеется, транзитивную группу.

Если придавать параметрам $a_{l+1} \cdots a_n$ последовательно все возможные значения, то получится ∞^{n-l} m-параметрических групп в l переменных. При этом возможно, но не обязательно, что эти ∞^{n-l} групп подобны между собой. Если это не так, то они упорядочиваются в $\infty^{n-l-\sigma}$ семейств, состоящих из ∞^σ групп каждое, причем таким образом, что две группы одного и того же семейства подобны, и наоборот, две группы, относящиеся к различным семействам, не являются подобными.

В любом случае наши ∞^{n-l} групп относятся к одной и той же категории типов; эта категория зависит в последнем случае от существенных параметров (ср. стр. 492 и ниже).

Теперь понятно, как можно найти все интранзитивные группы от n переменных. Два числа, l и m, выбираются такими, что $l \leqslant m \leqslant r$ и, кроме того, $l < n$, затем рассматриваются все категории транзитивных m-параметрических групп от l переменных. Если $Y_1 f \cdots Y_m f$:

$$Y_k f = \sum_{i=1}^{l} \eta_{ki}(x_1 \cdots x_l, \alpha_1, \alpha_2 \cdots) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots m)$$

— такая категория с существенными параметрами $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$, то их следует трактовать как неизвестные функции от $x_{l+1} \cdots x_n$, положить

$$X_k f = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}(x_{l+1} \cdots x_n) \cdot Y_i f \quad (k = 1 \cdots r)$$

и, наконец, попытаться выбрать наиболее общим образом еще неизвестные функции α_j, β_{ki} от $x_{l+1} \cdots x_n$ так, чтобы $X_1 f \cdots X_r f$ были независимыми инфинитезимальными преобразованиями r-параметрической группы. Это требование ведет к некоторым *конечным соотношениям* между α, β и структурными константами c_{iks} искомой r-параметрической группы, которые должны выполняться наиболее общим образом. Выражения заданных таким образом инфинитезимальных преобразований содержат, помимо некоторых произвольных констант c_{iks}, еще некоторые произвольные функции инвариантов этой группы.

Тем самым, мы прежде всего, имеем следующую теорему.

Теорема 83. *Описание всех интранзитивных r-параметрических групп $X_1 f \cdots X_r f$ от n переменных не требует интегрирования, если найдены все транзитивные группы с r или менее параметрами, а требует лишь выполнимых операций*[3].

Пожалуй, надо заметить, что вычисления, необходимые для описания всех интранзитивных групп, зависят лишь от чисел r, l и m. Число n, напротив, не имеет непосредственного значения. Отсюда следует

Теорема 84. *Описание всех r-параметрических групп от произвольного числа переменных может быть сведено к описанию всех r-параметрических групп от r или менее переменных.*

Еще одно краткое замечание, касающееся описания всех интранзитивных r-параметрических групп с заданной структурой.

Если группа с соответствующей структурой содержит лишь конечное число инвариантных подгрупп, то должно выполняться равенство $m = r$ (утверждение 8, стр. 343), и, следовательно, решение поставленной выше задачи просто сводится к описанию всех транзитивных групп с соответствующей структурой. Если же имеется бесконечно много инвариантных подгрупп, то m может быть меньше r; тогда согласно процитированным результатам вышеупомянутая m-параметрическая группа $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_m f$ должна быть мероэдрически изоморфна искомой r-параметрической. Подробнее мы здесь не будем останавливаться на том, как задача решается в этом случае.

[3] Ли, Archiv for Math. og Naturv., том 10, Христиания, 1885 г.; Math. Ann., том XVI, стр. 528, 1880 г.

Глава 23

Инвариантные семейства многообразий

Если $x_1 \cdots x_n$ — координаты точек n-мерного пространства, то семейство многообразий этого пространства представлено уравнениями вида

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0, \cdots \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0, \qquad (1)$$

в которых, помимо переменных $x_1 \cdots x_n$, встречаются еще некоторые произвольные параметры $l_1 \cdots l_m$. Если выполнить преобразование

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

пространства $x_1 \cdots x_n$, то каждое из многообразий (1) переходит в новое многообразие пространства $x_1 \cdots x_n$, все семейство (1) превращается поэтому в новое семейство многообразий. Уравнения этого нового многообразия получаются, если исключить $x_1 \cdots x_n$ из (1) с помощью n уравнений $x_i' = f_i(x)$. Если же теперь, в частности, новое семейство многообразий совпадает с исходным семейством (1), то есть под действием преобразования $x_i' = f_i(x)$ всякое многообразие семейства (1) переходит в многообразие того же семейства, то мы говорим, *что семейство* (1) *допускает соответствующее преобразование, и что оно остается под его действием инвариантным.*

Если семейство многообразий пространства $x_1 \cdots x_n$ допускает все преобразования r-параметрической группы, то мы говорим, *что оно допускает эту группу.*

Примеры инвариантных семейств многообразий нам уже часто встречались; так, всякая интранзитивная группа разбивала пространство на инвариантное семейство отдельных инвариантных многообразий (гл. 13, стр. 240), всякая импримитивная группа разбивала пространство на инвариантное семейство многообразий, которые оно переставляло между собой (стр. 244 и ниже); каждое отдельное инвариантное относительно группы многообразие также может быть истолковано как инвариантное семейство многообразий, а именно как инвариантное семейство точек.

В последующем мы рассмотрим совершенно произвольное семейство многообразий. Сначала выясним, при каких условиях это семейство допускает отдельное заданное преобразование и заданную r-параметрическую группу. Затем допустим, что нам дана группа, относительно которой это семейство остается инвариантным и зададим правило, согласно которому многообразия этого семейства под действием преобразований этой группы переставляются между собой. Таким образом, мы получим новый способ описания групп, изоморфных заданной группе. Наконец, мы дадим метод нахождения всех инвариантных относительно заданной группы семейств многообразий.

§ 110

Пусть уравнения

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n-q) \tag{1}$$

с m произвольными параметрами $l_1 \cdots l_m$ представляют семейство многообразий.

Разумеется, поскольку $l_1 \cdots l_m$ — совершенно произвольные параметры, то x не могут все одновременно исключаться из (1); следовательно, уравнения (1) должны быть разрешимы относительно $n-q$ из переменных $x_1 \cdots x_n$.

Напротив, l вполне можно исключить из (1), и то, что из (1) можно получить соотношения только между x, ни о чем не говорит. Только число независимых, не содержащих l уравнений, следующих из (1), должно быть меньше, чем $n-q$, иначе параметры $l_1 \cdots l_r$ в (1) оказались бы фиктивными, а уравнения (1) представляли бы не семейство многообразий, а лишь одно отдельное многообразие.

Прежде чем выяснить, как ведет себя семейство многообразий (1) по отношению к преобразованиям переменных x, мы должны сделать несколько замечаний по поводу свойств уравнений (1) как таковых.

Уравнения (1) содержат m параметров $l_1 \cdots l_m$; если мы придадим этим параметрам все возможные значения, то получим ∞^m различных систем значений $l_1 \cdots l_m$, но не обязательно ∞^m различных многообразий. Поэтому надо установить, при каких условиях заданная система уравнений представляет в точности ∞^m различных многообразий, другими словами, надо задать критерий того, являются ли параметры в уравнениях (1) *существенными* или нет.

Чтобы найти такой критерий, предположим, что уравнения $\Omega_k = 0$ разрешены относительно $n-q$ переменных из x, скажем относительно

$x_{q+1} \cdots x_n$:

$$x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q, l_1 \cdots l_m) \quad (k = 1 \cdots n-q), \tag{2}$$

и что функции ψ_{q+k} в окрестности какой-либо системы значений $x_1^0 \cdots x_q^0$ разложены по степеням $x_1 - x_1^0, \cdots x_q - x_q^0$. Коэффициенты разложения в ряд, число которых в общем случае бесконечно велико, будут аналитическими функциями от $l_1 \cdots l_m$, обозначим их так:

$$\Lambda_j(l_1 \cdots l_m) \quad (j = 1, 2 \cdots).$$

Все зависит теперь лишь от того, сколько имеется друг от друга независимых среди всех функций $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots$.

Так, если среди Λ имеется ровно m друг от друга независимых функций (больше, чем m, их заведомо быть не может), то ∞^m различным системам значений $l_1 \cdots l_m$, очевидно, соответствуют также ∞^m различных систем значений $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots$, а стало быть, и ∞^m различных многообразий (2), то есть параметры $l_1 \cdots l_m$ в уравнениях (2), а значит, и в уравнениях (1) являются существенными.

Иначе будет, если среди функций $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots$ не m, а меньше, скажем, лишь $m-h$ друг от друга независимых. В этом случае все Λ_j можно выразить через $m-h$ из них, скажем через $\Lambda_1' \cdots \Lambda_{m-h}'$, которые, конечно же, должны быть независимы друг от друга. Поэтому ∞^m различным системам значений $l_1 \cdots l_m$ соответствуют ∞^{m-h} различных систем значений $\Lambda_1' \cdots \Lambda_{m-h}'$ и ∞^{m-h} различных систем значений $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots$, так что уравнения (2), а стало быть, и уравнения (1) представляют лишь ∞^{m-h} различных многообразий. Отчетливее всего это видно, если учесть, что функции $\psi_{q+k}(x, l)$ содержат параметры $l_1 \cdots l_m$ лишь в связях $\Lambda_1' \cdots \Lambda_{m-h}'$, то есть что уравнения (2) имеют вид

$$x_{q+k} = \overline{\psi}_{q+k}(x_1 \cdots x_n, \Lambda_1' \cdots \Lambda_{m-h}') \quad (k = 1 \cdots n-q). \tag{2'}$$

А отсюда следует, что мы можем непосредственно ввести в (2) $\Lambda_1' \cdots \Lambda_{m-h}'$ в качестве новых параметров вместо $l_1 \cdots l_m$, за счет чего число всех встречающихся в (2) произвольных параметров снижается до $m-h$.

Следовательно, мы можем сказать:

Уравнения

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n-q)$$

только тогда представляют различные многообразия, когда невозможно задать $m-h < m$ *таких функций* $\pi_1 \cdots \pi_{m-h}$ *от* $l_1 \cdots l_m$, *что в разрешенных уравнениях*

$$x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q, l_1 \cdots l_m) \quad (k = 1 \cdots n-q)$$

функции $\psi_{q+1} \cdots \psi_n$ выражаются только через $x_1 \cdots x_q$ и $\pi_1 \cdots \pi_{m-h}$. Если же можно задать $m - h < m$ функций π_μ с таким свойством, то уравнения $\Omega_k = 0$ представляют максимум ∞^{m-h} различных многообразий, а потому параметры $l_1 \cdots l_m$ не являются существенными.

К этому добавим еще одно краткое замечание.

Если вышеупомянутые функции $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots$ принимают при подстановке $l_1 = l_1^0, \cdots l_m = l_m^0$ значения $\Lambda_1^0, \Lambda_2^0 \cdots$, то уравнения

$$\Lambda_j(l_1 \cdots l_m) = \Lambda_j^0 \quad (j = 1, 2 \cdots)$$

определяют совокупность всех систем значений $l_1 \cdots l_m$, которые, будучи подставлены в (2) или (l), дают то же многообразие, что и система значений $l_1^0 \cdots l_m^0$. Если же среди функций $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots$ имеется m независимых друг от друга, т. е. все параметры $l_1 \cdots l_m$ являются существенными, то, очевидно, выполняется следующее: всякую систему значений $l_1^0 \cdots l_m^0$ общего положения можно окружить такой областью, что две различные системы значений $l_1 \cdots l_m$ из этой области всегда будут также давать два различных многообразия.

Данное выше определение существенности или несущественности параметров $l_1 \cdots l_m$ только тогда имеет смысл, когда уравнения $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-q} = 0$ уже разрешены относительно $n - q$ из x. Однако и для последующего, и само по себе желательно так изменить это определение, чтобы оно подходило и для неразрешенной системы уравнений $\Omega_k = 0$.

Это несложно.

Пусть параметры $l_1 \cdots l_m$ в уравнениях

$$x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q, l_1 \cdots l_m) \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{2}$$

не являются существенными, то есть можно задать $m - h < m$ таких функций $\pi_1(l) \cdots \pi_{m-h}(l)$, что $\psi_{q+1}(x, l) \cdots \psi_n(x, l)$ можно выразить лишь через $x_1 \cdots x_q$ и $\pi_1(l) \cdots \pi_{m-h}(l)$. Очевидно, тогда существует хотя бы одно линейное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$Lf = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu} = 0,$$

с коэффициентами $\lambda_1(l) \cdots \lambda_\mu(l)$, не содержащими x, которому все функции $\pi_1(l) \cdots \pi_{m-h}(l)$, а стало быть, и все функции $x_{q+i} - \psi_{q+i}(x - l)$ удовлетворяют тождественно. Таким образом, мы можем также сказать (ср. гл. 7, теорема 15, стр. 130): если в (2) параметры не являются существенными, то система уравнений (2), истолкованная как система уравнений от

переменных $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$, допускает инфинитезимальное преобразование Lf только от переменных $l_1 \cdots l_m$.

Но верно также и обратное: если система уравнений (2), истолкованная как система уравнений от переменных $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$, допускает инфинитезимальное преобразование Lf только от l, то параметры $l_1 \cdots l_m$ в этой системе уравнений не являются существенными, а именно: непосредственно ясно, что $\psi_{q+1}(x, l) \cdots \psi_n(x, l)$ являются при наложенном условии решениями линейных дифференциальных уравнений в частных производных $Lf = 0$, то есть можно уменьшить число встречающихся в (2) произвольных параметров.

Если теперь учесть, что система уравнений (2) является лишь другим видом системы уравнений (1), то мы сразу видим (ср. стр. 124), что имеет место следующее

Утверждение 1. *Разрешимая относительно $n - q$ из n переменных $x_1 \cdots x_n$ система уравнений*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{1}$$

с m параметрами $l_1 \cdots l_m$ задает ∞^m различных многообразий пространства $x_1 \cdots x_n$ тогда и только тогда, когда она, рассматриваемая как система уравнений от $n + m$ переменных $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$, не допускает никакого инфинитезимального преобразования

$$Lf = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu}$$

только от переменных l.

§ 111

Пусть в пространстве $x_1 \cdots x_n$ задано семейство из ∞^m различных многообразий при помощи уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ или равносильных им:

$$x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q, l_1 \cdots l_m) \quad (k = 1 \cdots n - q). \tag{2}$$

Чтобы это семейство под действием преобразования $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ оставалось инвариантным, всякое многообразие этого семейства должно при этом преобразовании снова переходить в многообразие этого семейства. Поэтому если мы под $l_1' \cdots l_m'$ понимаем параметры того многообразия семейства, в которое переходит многообразие с параметрами $l_1 \cdots l_m$

под действием преобразования $x'_i = f_i(x)$, то уравнения (2) после введения новых переменных $x'_1 = f_1(x), \cdots x'_n = f_n(x)$ должны принимать вид

$$x'_{q+k} = \psi_{q+k}(x'_1 \cdots x'_q, l'_1 \cdots l'_m) \quad (k = 1 \cdots n-q),$$

где параметры $l'_1 \cdots l'_m$ зависят, конечно, лишь от l.

Но тогда уравнения (2) при введении x', очевидно, принимают вид

$$x'_{q+k} = \Psi_{q+k}(x'_1 \cdots x'_q, l_1 \cdots l_m) \quad (k = 1 \cdots n-q);$$

то есть для того чтобы семейство (2) под действием преобразования $x'_i = f_i(x)$ оставалось инвариантным, необходимо, чтобы $n-q$ уравнений

$$\psi_{q+k}(x'_1 \cdots x'_q, l'_1 \cdots l'_m) = \Psi_{q+k}(x'_1 \cdots x'_q, l_1 \cdots l_m) \quad (k = 1 \cdots n-q) \quad (3)$$

могли выполняться независимо от значений переменных $x'_1 \cdots x'_q$.

Если разложить обе части (3) в окрестности какой-либо системы значений $x'^0_1 \cdots x'^0_n$ по степеням $x'_1 - x'^0_1, \cdots x'_n - x'^0_n$, сравнить коэффициенты и учесть, что $l'_1 \cdots l'_m$ — существенные параметры, то мы видим, что $l'_1 \cdots l'_m$ должны быть совершенно определенными функциями от $l_1 \cdots l_m$:

$$l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

И наоборот, разумеется, l также должны представляться как функции от l', поскольку и при переходе от x' к x семейство наших многообразий должно оставаться неизменным.

Таким образом, мы видим, что уравнения

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n), \qquad l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

взятые вместе, представляют преобразование в $n+m$ переменных $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$, оставляющее систему уравнений $x_{q+k} = \psi_{q+k}(x, l)$ в этих $n+m$ переменных инвариантной. Следовательно, мы можем сказать:

Семейство из ∞^m многообразий

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n-q)$$

пространства $x_1 \cdots x_n$ допускает преобразование

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

тогда и только тогда, когда можно добавить к этому преобразованию в переменных x соответствующее преобразование

$$l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

в переменных l, такое, что система уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ от $n + m$ переменных $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ допускает преобразование

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n), \qquad l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m).$$

Из рассуждений выше следует, что преобразование $l_\mu' = \chi_\mu(l)$, если оно вообще существует, единственно в своем роде; оно полностью определено, если преобразование $x_i' = f_i(x)$ известно. Поэтому преобразование $l_\mu' = \chi_\mu(l)$ не содержит [никаких] произвольных параметров.

Если семейство из ∞^m многообразий $\Omega_k(x, l) = 0$ допускает два различных преобразования

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n); \quad x_i'' = F_i(x_1' \cdots x_n'),$$

то оно, очевидно, допускает также преобразование

$$x_i'' = F_i(f_1(x) \cdots f_n(x)),$$

возникающее в результате последовательного выполнения этих двух преобразований. Отсюда мы заключаем:

Совокупность всех преобразований $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$, оставляющих семейство из ∞^m многообразий пространства $x_1 \cdots x_n$ инвариантным, образует группу.

Эта группа не обязательно должна быть конечной или непрерывной; мы можем в общем случае сказать только следующее: ее преобразования упорядочиваются в пары взаимно обратных. Поэтому если она, в частности, содержит только конечное число произвольных параметров, то относится к категории групп, обсуждавшихся в гл. 18, и содержит согласно теореме 56, стр. 349, совершенно определенную, порожденную инфинитезимальными преобразованиями конечную непрерывную подгруппу. Эта подгруппа, очевидно, — наибольшая непрерывная группа, относительно которой семейство $\Omega_k(x, l) = 0$ остается инвариантным.

Теперь мы переходим к рассмотрению конечных непрерывных групп, оставляющих семейство из ∞^m многообразий

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{1}$$

инвариантным; но для простоты мы ограничимся случаем однопараметрической группы с таким свойством.

Пусть семейство из ∞^m многообразий (1) допускает все преобразования

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{4}$$

однопараметрической группы

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Пусть преобразование в переменных l, соответствующее согласно стр. 510 общему преобразованию $x_i' = f_i(x, \varepsilon)$, будет таким:

$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, \varepsilon) \quad (\mu = 1 \cdots m). \tag{4'}$$

Легко видеть, что совокупность всех преобразований вида

$$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon) & (i = 1 \cdots n), \\ l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, \varepsilon) & (\mu = 1 \cdots m), \end{cases} \tag{4''}$$

в свою очередь, образует однопараметрическую группу от $n + m$ переменных $x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m$.

Действительно, преобразования (4'') согласно стр. 510 оставляют систему уравнений (1) инвариантной; поэтому если сначала выполнить преобразование (4''), а затем преобразование того же вида с параметром ε_1, то получится преобразование

$$\begin{aligned} x_i'' &= f_i(f_1(x, \varepsilon) \cdots f_n(x, \varepsilon), \varepsilon_1) \quad (i = 1 \cdots n), \\ l_\mu'' &= \chi_\mu(\chi_1(l, \varepsilon) \cdots \chi_1(l, \varepsilon), \varepsilon_1) \quad (\mu = 1 \cdots m), \end{aligned}$$

также оставляющее систему уравнений (1) инвариантной. Тогда преобразование

$$x_i'' = f_i(f_1(x, \varepsilon) \cdots f_n(x, \varepsilon), \varepsilon_1) \tag{5}$$

принадлежит однопараметрической группе Xf, и потому его можно привести к виду

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon_2) \quad (i = 1 \cdots n),$$

где ε_2 зависит лишь от ε и ε_1. Следовательно, то преобразование в переменных l, которое соответствует преобразованию (5), имеет вид

$$l_\mu'' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, \varepsilon_2) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

и поэтому

$$\chi_\mu(\chi_1(l, \varepsilon) \cdots \chi_m(l, \varepsilon), \varepsilon_1) = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, \varepsilon_2) \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

Тем самым доказано, что уравнения $(4'')$ действительно представляют однопараметрическую группу в $n+m$ переменных $x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m$, причем она имеет такую же группу параметров, что и заданная группа $x_i' = f_i(x, \varepsilon)$. В то же время ясно, что уравнения $(4')$, взятые сами по себе, представляют группу от переменных $l_1 \cdots l_m$, правда, мы не знаем, является ли эта группа однопараметрической, так как вполне возможно, что параметр ε в уравнениях $(4')$ совсем отсутствует.

Преобразования группы (4) упорядочиваются в пары взаимно обратных, для преобразований группы $(4'')$ очевидно выполняется то же самое. Отсюда следует (ср. гл. 9, стр. 188), что и группа $(4'')$ содержит тождественное преобразование и, кроме того, инфинитезимальное преобразование

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu} = Xf + Lf,$$

которым она порождена.

Полученные результаты обобщим в следующем утверждении.

Утверждение 2. *Если семейство из ∞^m многообразий*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

в пространстве $x_1 \cdots x_n$ допускает все преобразования

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon) \quad (i = 1 \cdots n)$$

однопараметрической группы

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

то описанные выше преобразования

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon) \quad (i = 1 \cdots n),$$
$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, \varepsilon) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

оставляющие инвариантной систему уравнений $\Omega_1(x, l) = 0, \cdots \Omega_{n-q}(x, l) = 0$ от $n+m$ переменных $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$, образуют однопараметрическую группу, отвечающую инфинитезимальному преобразованию вида

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu} = Xf + Lf.$$

Теперь дадим следующее

Определение. *Семейство многообразий*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

пространства $x_1 \cdots x_n$ *допускает инфинитезимальное преобразование*

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

если в переменных $l_1 \cdots l_m$ *существует такое инфинитезимальное преобразование*

$$Lf = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu},$$

что система уравнений $\Omega_1(x, l) = 0, \cdots \Omega_{n-q}(x, l) = 0$ *от* $n + m$ *переменных* $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ *допускает инфинитезимальное преобразование* $Xf + Lf$.

Еще здесь остается вопрос, полностью ли инфинитезимальное преобразование Lf определено преобразованием Xf. Легко видно, что это так; если система уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ допускает два инфинитезимальных преобразования, $Xf + Lf$ и $Xf + \mathfrak{L}f$, то она одновременно допускает преобразование

$$Xf + Lf - (Xf + \mathfrak{L}f) = Lf - \mathfrak{L}f,$$

а поскольку параметры семейства $\Omega_k(x, l) = 0$ являются существенными, то выражение $Lf - \mathfrak{L}f$ должно обращаться в нуль тождественно, поэтому преобразование $\mathfrak{L}f$ не может отличаться от преобразования Lf.

Взяв за основу данное выше определение, мы можем, очевидно, выразить содержание утверждения 2 еще и так:

Если семейство из ∞^m многообразий

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

допускает однопараметрическую группу Xf, то оно в то же время допускает инфинитезимальное преобразование Xf.

И наоборот, если семейство из ∞^m многообразий $\Omega_k(x, l) = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование Xf, то оно также допускает однопараметрическую группу Xf.

При наложенном условии система уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ допускает в $n + m$ переменных x, l инфинитезимальное преобразование вида

$$Xf + Lf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu},$$

поэтому она в то же время допускает все преобразования однопараметрической группы $Xf + Lf$, но это означает, что семейство из ∞^m многообразий $\Omega_k(x, l) = 0$ пространства $x_1 \cdots x_n$ допускает все преобразования однопараметрической группы Xf.

Тем самым доказано

Утверждение 3. *Семейство, состоящее из ∞^m многообразий,*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

пространства $x_1 \cdots x_n$, допускает однопараметрическую группу Xf тогда и только тогда, когда оно допускает инфинитезимальное преобразование Xf.

Если мы хотим знать, допускает ли семейство из ∞^m многообразий $\Omega_k(x, l) = 0$ заданное инфинитезимальное преобразование Xf, то сначала надо разрешить уравнения $\Omega_k(x, l)$ относительно $n - q$ переменных из x:

$$x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q, l_1 \cdots l_m) \quad (k = 1 \cdots n - q), \tag{2}$$

а затем постараться найти m таких функций $\lambda_1(l) \cdots \lambda_m(l)$ от l, чтобы система уравнений (2) от $n + m$ переменных x, l допускала инфинитезимальное преобразование

$$Xf + Lf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu}.$$

Если обозначить подстановку $x_{q+1} = \psi_{q+1}, \cdots x_n = \psi_n$ знаком $[\ ]$, то для $\lambda_1(l) \cdots \lambda_m(l)$, очевидно, получаются следующие уравнения:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(l) \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial l_\mu} = [\xi_{q+k}] - \sum_{j=1}^{q} [\xi_j] \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial x_j} \quad (k = 1 \cdots n - q),$$

которые должны выполняться независимо от значений переменных $x_1 \cdots x_q$. Теоретически совсем несложно понять, возможно ли это. Либо мы обнаружим, что не существует системы функций $\lambda_\mu(l)$ с требуемым свойством, либо найдем такую систему, но тогда только одну, так как инфинитезимальное преобразование Lf, если оно вообще существует, полностью определено преобразованием Xf.

Теперь докажем, что верно следующее

Утверждение 4. *Если семейство, состоящее из ∞^m многообразий*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

пространства $x_1 \cdots x_n$, допускает два инфинитезимальных преобразования

$$X_1(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{1i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad X_2(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

то оно допускает не только всякое преобразование

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f,$$

которое может быть линейно получено из $X_1 f$ и $X_2 f$, но также и преобразование $(X_1 X_2)$.

При условиях, наложенных в этом утверждении, имеется два инфинитезимальных преобразования $L_1 f$ и $L_2 f$ только от l, таких, что система уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ от $n + m$ переменных x, l допускает оба инфинитезимальных преобразования $X_1 f + L_1 f$, $X_2 f + L_2 f$. Тогда согласно гл. 7, утв. 5, стр. 131, система уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ допускает также возникающее в результате комбинации инфинитезимальное преобразование $(X_1 X_2) + (L_1 L_2)$; но это означает не что иное, как то, что семейство из ∞^m многообразий $\Omega_k(x, l) = 0$ допускает также $(X_1 X_2)$. Таким образом, утверждение доказано.

Из рассуждений, примененных при проведении этого доказательства, следует также:

Если семейство из ∞^m многообразий $\Omega_k(x, l) = 0$ допускает два инфинитезимальных преобразования, $X_1 f$ и $X_2 f$, а $L_1 f$ и $L_2 f$ являются соответствующими инфинитезимальными преобразования только в переменных $l_1 \cdots l_m$, то преобразованию $(X_1 X_2)$ соответствует преобразование $(L_1 L_2)$.

Допустим теперь, что семейство из ∞^m многообразий $\Omega_k(x, l) = 0$ пространства $x_1 \cdots x_n$ допускает все преобразования какой-либо r-параметрической группы

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n). \tag{6}$$

Пусть эта группа порождена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

так что между $X_1 f \cdots X_r f$ могут иметь место соотношения известного вида

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \cdots r).$$

Если

$$l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m) \tag{6'}$$

— такое преобразование в переменных l, которое соответствует общему преобразованию группы $X_1 f \cdots X_r f$, то уравнения (6) и (6'), вместе взятые, представляют r-параметрическую группу от $n + m$ переменных $x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m$.

Действительно, если $T_{(a_1 \cdots a_r)}$, или кратко $T_{(a)}$, и $T_{(b_1 \cdots b_r)}$ — два преобразования группы $x'_i = f_i(x, a)$, то, выполненные последовательно, они, как известно, дают в результате преобразование $T_{(a)}T_{(b)} = T_{(c)}$ той же самой группы, причем параметры $c_1 \cdots c_r$ зависят только от a и b.

Если, с другой стороны, $S_{(a)}$ и $S_{(b)}$ — такие преобразования (6'), которые соответствуют преобразованиям $T_{(a)}$ и $T_{(b)}$, то преобразование в переменных l, соответствующее преобразованию $T_{(a)}T_{(b)}$, очевидно, получается, если выполнить последовательно преобразования $S_{(a)}$ и $S_{(b)}$, то есть преобразованию $T_{(a)}T_{(b)}$ соответствует преобразование $S_{(a)}S_{(b)}$. Однако $T_{(a)}T_{(b)} = T_{(c)}$, и преобразованию $T_{(c)}$ соответствует в переменных l преобразование $S_{(c)}$, то есть должно быть $S_{(a)}S_{(b)} = S_{(c)}$.

Тем самым доказано, что уравнения (6) и (6') действительно представляют r-параметрическую группу от переменых $x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m$, причем группу, голоэдрически изоморфную группе $x'_i = f_i(x, a)$; эти две группы, очевидно, имеют одну и ту же группу параметров (ср. гл. 21, стр. 465 и ниже).

Одновременно с этим доказано, что и уравнения (6'), в свою очередь, представляют группу от переменных $l_1 \cdots l_m$, а именно: как следует из одновременного выполнения символических соотношений

$$T_{(a)}T_{(b)} = T_{(c)}$$

и

$$S_{(a)}S_{(b)} = S_{(c)},$$

группу, изоморфную группе $x'_i = f_i(x, a)$ (ср. гл. 21, стр. 465 и ниже). Если каждому преобразованию группы (6) поставить в соответствие то преобразование группы (6'), которое им задается, то группы (6) и (6') окажутся связанными между собой изоморфизмом.

Изоморфизм этих двух групп не обязательно должен быть голоэдрическим, группа (6') при определенных условиях может даже сводиться к тождественному преобразованию, а именно, если группа $x'_i = f_i(x, a)$ оставляет каждое отдельно взятое из ∞^m многообразий неподвижным.

Мы покажем, что группа, представляемая уравнениями (6) и (6′) в совокупности, порождена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями.

Поскольку семейство из ∞^m многообразий $\Omega_k(x,l)=0$ допускает все преобразования группы $x_i'=f_i(x,a)$, то оно, в частности, допускает любую из r однопараметрических групп $X_1f\cdots X_rf$, то есть согласно утв. 3, стр. 515, оно также допускает любое из r инфинитезимальных преобразований $X_1f\cdots X_rf$. Отсюда следует, что всякому инфинитезимальному преобразованию X_kf соответствует совершенно определенное преобразование

$$L_kf=\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{k\mu}(l_1\cdots l_m)\frac{\partial f}{\partial l_\mu},$$

такое, что система уравнений $\Omega_k(x,l)=0$ от $n+m$ переменных $x_1\cdots x_n$, $l_1\cdots l_m$ допускает инфинитезимальное преобразование X_kf+L_kf.

В то же время система уравнений $\Omega_k(x,l)=0$, конечно, допускает всякое инфинитезимальное преобразование $e_1(X_1f+L_1f)+\cdots+e_r(X_rf+L_rf)$ и вследствие этого также всякую однопараметрическую группу $e_1(X_1f+$ $+L_1f)+\cdots+e_r(X_rf+L_rf)$. Поскольку группа $x_i'=f_i(x,a)$ состоит из совокупности всех однопараметрических групп $e_1X_1f+\cdots+e_rX_rf$, то группа, представленная уравнениями (6) и (6′), должна, очевидно, быть идентична совокупности всех однопараметрических групп, то есть должна порождаться r независимыми инфинитезимальными преобразованиями X_kf+L_kf, что и требовалось доказать.

Тогда отсюда следует, что любые два из этих инфинитезимальных преобразований удовлетворяют соотношениям вида

$$(X_if+L_if,X_kf+L_kf)=\sum_{s=1}^{r}c_{iks}'(X_sf+L_sf).$$

Проверяя это непосредственно, мы получим новое доказательство того, что все конечные преобразования $x_i'=f_i(x,a)$, $l_\mu'=\chi_\mu(l,a)$ образуют группу. В то же время мы видим, что $c_{iks}'=c_{iks}$, что согласуется с тем, что наша группа в пременных x и l имеет ту же группу параметров, что и заданная группа $x_i'=f_i(x,a)$.

Система уравнений $\Omega_k(x,l)=0$ допускает одновременно с r инфинитезимальными преобразованиями $X_1f+L_1f,\cdots X_rf+L_rf$ преобразования

$$(X_iX_k)+(L_iL_k)=\sum_{s=1}^{r}c_{iks}X_sf+(L_i,L_k)\quad(i,k=1\cdots r),$$

а стало быть, и следующие:

$$(X_iX_k) + (L_iL_k) - \sum_{s=1}^{r} c_{iks}(X_sf + L_sf) = (L_i, L_k) - \sum_{s=1}^{r} c_{iks}L_sf$$

только в переменных $l_1 \cdots l_m$. Однако в силу характера системы уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ это возможно лишь тогда, когда вышеупомянутые инфинитезимальные преобразования обращаются в нуль тождественно, то есть когда имеют место соотношения

$$(L_iL_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}L_sf.$$

Отсюда немедленно следует:

$$(X_iX_k) + (L_iL_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}(X_sf + L_sf),$$

чем доказано указанное свойство объединенных уравнений (6), (6′).

Само собой разумеется, что из вышесказанного следует, что группа (6′) порождена r инфинитезимальными преобразованиями $L_1f \cdots L_rf$. В то же время мы имеем в вышестоящих рассуждениях доказательство того, что уравнения (6′) представляют группу в переменных $l_1 \cdots l_m$, изоморфную группе $X_1f \cdots X_rf$.

Упомянутая на стр. 516 изоморфная связь между группами (6) и (6′) может теперь быть еще определена так, что всякому инфинитезимальному преобразованию $e_1X_1f + \cdots + e_rX_rf$ она ставит в соответствие инфинитезимальное преобразование $e_1L_1f + \cdots + e_rL_rf$ в переменных l.

Таким образом, мы имеем следующее

Утверждение 5. *Если семейство, состоящее из ∞^m многообразий*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

пространства $x_1 \cdots x_n$, допускает r независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_kf = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

r-параметрической группы со структурой:

$$(X_iX_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}X_sf \quad (i, k = 1 \cdots r),$$

так что каждому $X_k f$ отвечает вполне определенное инфинитезимальное преобразование

$$L_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_{k\mu}(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu}$$

с тем свойством, что система уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ от $n+m$ переменных $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ допускает r инфинитезимальных преобразований $X_k f + L_k f$, то r инфинитезимальных преобразований $L_k f$ находятся попарно в соотношениях

$$(L_i L_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} L_s f \quad (i, k = 1 \cdots r),$$

то есть порождают группу, изоморфную группе $X_1 f \cdots X_r f$.

Здесь мы хотим четко сформулировать и независимо доказать еще одно утверждение.

Утверждение 6. *Если r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_n$ содержит ровно $p \leqslant r$ независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих инвариантным семейство из ∞^m многообразий*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q),$$

то эти p независимых инфинитезимальных преобразований порождают p-параметрическую подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Доказательство очень простое. Пусть

$$\Xi_\pi f = \sum_{j=1}^{r} g_{\pi j} X_j f \quad (\pi = 1 \cdots p)$$

— независимые инфинитезимальные преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$, оставляющие семейство $\Omega_k(x, l) = 0$ инвариантным, так что любое другое инфинитезимальное преобразование $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, для которого это справедливо, можно получить линейно из $\Xi_1 f \cdots \Xi_p f$. Тогда согласно утв. 4, стр. 515, семейство $\Omega_k(x, l) = 0$ также допускает всякое инфинитезимальное преобразование $(\Xi_\mu \Xi_\nu)$ группы $X_1 f \cdots X_r f$, кроме того, имеют место соотношения

$$(\Xi_\mu \Xi_\nu) = \sum_{\pi=1}^{p} g_{\mu\nu\pi} \Xi_\pi f \quad (\mu, \nu = 1 \cdots p),$$

в которых $g_{\mu\nu\pi}$ означают константы. Отсюда следует, что $\Xi_1 f \cdots \Xi_p f$ действительно порождают p-параметрическую группу.

Если заданы семейство из ∞^m многообразий

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

и r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_n$, то можно спросить, сколько независимых инфинитезимальных преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$ допускает заданное семейство. Посмотрим, как можно ответить на этот вопрос.

Если семейство $\Omega_k(x, l) = 0$ допускает инфинитезимальное преобразование вида $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, то должно существовать такое инфинитезимальное преобразование Lf только от l, что система уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ от $n+m$ переменных $x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m$ допускает инфинитезимальное преобразование $\sum e_k X_k f + Lf$. Поэтому если мы предположим, что уравнения $\Omega_k(x, l) = 0$ разрешены относительно $n - q$ из переменных x:

$$x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q, l_1 \cdots l_m) \quad (k = 1 \cdots n - q),$$

и обозначим подстановку $x_{q+1} = \psi_{q+1}, \cdots x_n = \psi_n$, как и на стр. 515, через [ ], то нам надо лишь задать константы $e_1 \cdots e_r$ и функции $\lambda_1(l) \cdots \lambda_m(l)$ в общем виде так, чтобы $n - q$ уравнений

$$\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu(l) \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial l_\mu} = \sum_{\sigma=1}^{r} e_\sigma \left\{ [\xi_{\sigma, q+k}] - \sum_{j=1}^{q} [\xi_{\sigma j}] \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial x_j} \right\} \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

выполнялись независимо от значений переменных $x_1 \cdots x_n$. Таким образом, мы найдем наиболее общее инфинитезимальное преобразование $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, оставляющее семейство $\Omega_k(x, l) = 0$ инвариантным.

§ 112

Если семейство из ∞^m многообразий

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{1}$$

допускает преобразование $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$, то, как мы видели на стр. 509, существует совершенно определенное преобразование $l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m)$, такое, что система уравнений $\Omega_k(x, l) = 0$ от $n + m$ переменных x, l

допускает преобразование

$$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) & (i = 1 \cdots n), \\ l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) & (\mu = 1 \cdots m). \end{cases}$$

На стр. 509 мы уже замечали, что уравнения $l_\mu' = \chi_\mu(l)$ задают параметры $l_1' \cdots l_m'$ того многообразия инвариантного семейства (1), в которое многообразие с параметрами $l_1 \cdots l_m$ переходит под действием преобразования $x_i' = f_i(x)$. Поэтому если мы рассмотрим $l_1 \cdots l_m$ просто как координаты отдельных многообразий семейства (1), то уравнения $l_\mu' = \chi_\mu(l)$ зададут правило, по которому многообразия нашего инвариантного семейства переставляются между собой преобразованием $x_i' = f_i(x)$.

Если, например, специальная система значений $l_1^0 \cdots l_m^0$ допускает преобразование

$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

то многообразие

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1^0 \cdots l_m^0) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

одновременно допускает преобразование

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Действительно, многообразие $\Omega_k(x, l^0) = 0$ переходит при выполнении преобразования $x_i' = f_i(x)$ в новое:

$$\Omega_k(x_1' \cdots x_n', \chi_1(l^0) \cdots \chi_m(l^0)) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q);$$

однако при наложенном условии

$$\chi_\mu(l_1^0 \cdots l_m^0) = l_\mu^0 \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

то есть новое многообразие совпадает со старым, и многообразие $\Omega_k(x, l^0) = 0$ действительно остается инвариантным.

Обратное же выполняется не всегда. Если специальное многообразие

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1^0 \cdots l_m^0) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

семейства (1) допускает преобразование $x_i' = f_i(x)$, то отсюда не обязательно следует, что система значений $l_1^0 \cdots l_m^0$ допускает преобразование $l_\mu' = \chi_\mu(l)$. Вполне возможно, что система значений $l_1^0 \cdots l_m^0$ входит в непрерывное множество систем значений $l_1 \cdots l_m$, которые, будучи

подставленными в (1), дают то же многообразие, что и система значений $l_1^0 \cdots l_m^0$; в этом случае из инвариантности многообразия $l_1 \cdots l_m$ следует лишь то, что отдельные системы значений $l_1 \cdots l_m$ только что определенного множества преобразований $l'_\mu = \chi_\mu(l)$ переставляются между собой, а не то, что система значений $l_1^0 \cdots l_m^0$ остается под действием этого преобразования инвариантной.

Если же l_k имеют не специальные, а общие значения, то многообразие $\Omega_k(x, l) = 0$ допускает преобразование $x'_i = f_i(x)$ только тогда, когда система значений l_k допускает соответствующее преобразование $l'_\mu = \chi_\mu(l)$, тем самым это условие является необходимым и достаточным.

Рассмотрим теперь общий случай, когда семейство из ∞^m многообразий

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{1}$$

допускает r-параметрическую группу

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

с r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$. Пусть группа от переменных l, соответствующая группе $x'_i = f_i(x, a)$, имеет вид

$$l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

и порождена r инфинитезимальными преобразованиями $L_1 f \cdots L_r f$, которые, разумеется, в свою очередь соответствуют инфинитезимальным преобразованиям $X_1 f \cdots X_r f$.

Теперь, прежде всего, спрашивается, как выяснить, оставляет ли инфинитезимальное преобразование $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ определенное, входящее в семейство (1) многообразие

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1^0 \cdots l_m^0) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{7}$$

инвариантным?

Легко видеть, что многообразие (7) допускает инфинитезимальное преобразование $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ всякий раз тогда, когда система значений $l_1^0 \cdots l_m^0$ допускает инфинитезимальное преобразование $e_1^0 L_1 f + \cdots + e_r^0 L_r f$.

Действительно, система уравнений (1) от $n+m$ переменных $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ допускает при наложенных условиях инфинитезимальное преобразование $\sum e_j^0 (X_j f + L_j f)$; то есть $n - q$ выражений

$$\sum_{j=1}^{r} e_j^0 (X_j \Omega_k + L_j \Omega_k) = \sum_{j=1}^{r} e_j^0 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x) \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_{j\mu} \frac{\partial \Omega_k}{\partial l_\mu} \right\}$$

одновременно обращаются в нуль в силу $\Omega_1(x,l)=0,\cdots\Omega_{n-q}(x,l)=0$. Это также справедливо, если положить $l_1=l_1^0,\cdots l_m=l_m^0$; однако теперь система значений $l_1^0\cdots l_m^0$ допускает инфинитезимальное преобразование $\sum e_j^0 L_j f$, и потому m выражений

$$e_1^0\lambda_{1\mu}(l^0)+\cdots+e_r^0\lambda_{r\mu}(l^0)\quad(\mu=1\cdots m)$$

одновременно обращаются в нуль. Следовательно, все $n-q$ выражений

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{r}e_j^0\xi_{ji}(x)\right\}\frac{\partial\Omega_k(x,l^0)}{\partial x_i}\quad(k=1\cdots n-q)$$

обращаются в нуль в силу (7), то есть многообразие (7) действительно допускает инфинитезимальное преобразование $\sum e_j^0 X_j f$.

Однако найденный таким образом достаточный критерий не является необходимым.

Если наше семейство многообразий $\Omega_k(x,l)=0$ относительно группы $X_1 f\cdots X_r f$ остается инвариантным, то для того, чтобы специальное многообразие $\Omega_k(x,l^0)=0$ при этом допускало инфинитезимальное преобразование $e_1^0X_1f+\cdots+e_r^0X_rf$, необходимо, чтобы $n-q$ выражений

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}e_j^0\lambda_{j\mu}(l^0)\frac{\partial\Omega_k(x,l^0)}{\partial l_\mu}$$

в силу системы уравнений $\Omega_k(x,l^0)=0$ стали равны нулю; но вовсе не обязательно, чтобы r выражений $\sum_j e_j^0\lambda_{j\mu}(l^0)$ сами обращались в нуль.

Поэтому если мы желаем знать, допускает ли многообразие $\Omega_k(x,l)=$ $=0$ инвариантного семейства одно или более инфинитезимальных преобразований, и если мы хотим, кроме того, для каждого многообразия l_k найти соответствующие инфинитезимальные преобразования, то надо задать e_k в общем виде как функции от l такими, что уравнения

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}e_j\lambda_{j\mu}(l)\frac{\partial\Omega_k(x,l)}{\partial l_\mu}=0\qquad(8)$$

становятся следствием системы уравнений $\Omega_k(x,l)=0$. Но поскольку, согласно предположению выше о том, что l являются существенными параметрами, система уравнений $\Omega_k(x,l)=0$ от $n+m$ переменных x,l не

может допускать никакого не обращающегося тождественно в нуль преобразования

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} e_j\lambda_{j\mu}(l)\frac{\partial f}{\partial l_\mu},$$

то следует с необходимостью:

$$e_1\lambda_{1\mu}(l)+\cdots+e_r\lambda_{r\mu}(l)=0 \quad (\mu=1,2\cdots m).$$

Таким образом, мы имеем следующее:

Если $\sum e_k^0 L_k f$ *— самое общее инфинитезимальное преобразование, входящее в группу* $L_1 f\cdots L_r f$, *оставляющее систему значений общего положения* $l_1^0\cdots l_m^0$ *инвариантной, то* $\sum e_k^0 X_k f$ *— самое общее инфинитезимальное преобразование, входящее в группу* $X_1 f\cdots X_r f$ *и оставляющее многообразие* (7) *общего положения инвариантным.*

Мы можем предположить, что из r инфинитезимальных преобразований $L_1 f\cdots L_r f$ ровно $m-p$, скажем $L_1 f\cdots L_{m-p} f$, не связаны никакими линейными соотношениями вида

$$\alpha_1(l_1\cdots l_m)L_1 f+\cdots+\alpha_{m-p}(l_1\cdots l_m)L_{m-p}f=0,$$

в то время как $L_{m-p+1}f\cdots L_r f$ можно выразить линейно через $L_1 f\cdots L_{m-p}f$:

$$L_{m-p+j}f\equiv\sum_{\mu=1}^{m-p}\alpha_{j\mu}(l_1\cdots l_m)L_\mu f \quad (j=1\cdots r-m+p).$$

Это условие мы можем всегда налагать, даже если инфинитезимальные преобразования $L_1 f\cdots L_r f$ не являются независимыми друг от друга, что вполне возможно.

Теперь ясно, что $r-m+p$ инфинитезимальных преобразований

$$L_{m-p+j}f-\sum_{\mu=1}^{m-p}\alpha_{j\mu}(l_1^0\cdots l_m^0)L_\mu f \quad (j=1\cdots r-m+p) \tag{9}$$

оставляют систему значений $l_1^0\cdots l_0^m$ инвариантной; а поскольку $l_1^0\cdots l_0^m$, кроме того, является системой значений общего положения, то мы сразу видим, что всякое инфинитезимальное преобразование $\sum e_k L_k f$, при котором эта система значений остается инвариантной, может быть линейно

получена из $r-m+p$ преобразований (9). Следовательно, наиболее общее инфинитезимальное преобразование $\sum e_k X_k f$, оставляющее многообразие (7) в общем положении инвариантным, может быть линейно получено из $r-m+p$ преобразований:

$$X_{m-p+j}f - \sum_{\mu=1}^{m-p} \alpha_{j\mu}(l_1^0 \cdots l_m^0) X_\mu f \quad (j = 1 \cdots r-m+p). \tag{10}$$

Само собой разумеется, что инфинитезимальные преобразования (10) являются независимыми друг от друга и порождают $(r-m+p)$-параметрическую группу, а именно наиболее общую подгруппу, содержащуюся в группе $X_1 f \cdots X_r f$, относительно которой многообразие (7) остается инвариантным.

Если, в частности, группа $L_1 f \cdots L_r f$ транзитивна, то целое число p имеет значение нуль; стало быть, в этом случае всякое многообразие семейства (1), находящееся в общем положении, допускает в точности $r-m$ независимых инфинитезимальных преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Таким образом, мы получаем

Утверждение 7. *Если семейство, состоящее из ∞^m многообразий*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n-q),$$

допускает r-параметрическую группу $X_1 f \cdots X_r f$, если, далее, $L_1 f \cdots L_r f$ — инфинитезимальные преобразования только от переменных l, соответствующие $X_j f$, и если, наконец, $L_1 f \cdots L_r f$ связаны $r-m+p$ независимыми соотношениями вида $\sum \beta_j(l) L_j f = 0$, то группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит ровно $r-m+p$ независимых инфинитезимальных преобразований, которые оставляют инвариантным многообразие $l_1^0 \cdots l_m^0$ общего положения. Эти преобразования порождают $(r-m+p)$-параметрическую группу. Если группа $L_1 f \cdots L_r f$ от m переменных $l_1 \cdots l_m$ транзитивна, то каждое находящееся в общем положении многообразие из семейства $\Omega_k(x,l) = 0$ допускает ровно $r-m$ независимых инфинитезимальных преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, и эти инфинитезимальные преобразования порождают $(r-m)$-параметрическую подгруппу.

Добавим к этому естественное замечание, что группа $L_1 f \cdots L_r f$ от переменных $l_1 \cdots l_m$ транзитивна тогда и только тогда, когда всякое многообразие семейства $\Omega_k(x,l) = 0$, находящееся в общем положении, может быть переведено в любое другое при помощи как минимум одного преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$.

§ 113

Пусть в n-мерном пространстве $x_1 \cdots x_n$ задана r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ и, кроме того, какое-либо многообразие, которое мы обозначим через M. Мы предполагаем, что в уравнениях для M не встречается никаких произвольных параметров.

Если выполнить все ∞^m преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, то оно перейдет во множество новых многообразий. Мы докажем, что совокупность всех этих многообразий остается инвариантной относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$, и что они образуют инвариантное относительно этой группы семейство.

Пусть M' — какое-либо многообразие, соответствующее вышеупомянутому многообразию, а T_1 — такое преобразование группы $X_1 f \cdots X_r f$, которое переводит M в M'. Таким образом, имеет место символическое уравнение

$$(M)T_1 = (M').$$

Тогда, если T — произвольное преобразование этой группы, мы имеем

$$(M')T = (M)T_1 T = (M)T_2,$$

где преобразование T_2 опять же принадлежит группе; следовательно, многообразие M' переходит под действием преобразования T в другое многообразие упомянутой совокупности. Поскольку это выполняется для любого многообразия M' этой совокупности, то мы видим, что многообразия, принадлежащие этой совокупности, переставляются между собой преобразованием T, а стало быть, и вообще всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$, и что определенная выше совокупность многообразий действительно образует семейство, инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Легко видеть, что любое многообразие этого инвариантного семейства может быть переведено в другое многообразие этого семейства по меньшей мере одним преобразованием группы. Так, если

$$(M') = (M)T_1, \quad (M'') = (M)T_2,$$

то $(M) = (M')T_1^{-1}$, следовательно,

$$(M'') = (M')T_1^{-1}T_2,$$

тем самым утверждение доказано. В то же время отсюда следует, что мы также получим упомянутое семейство многообразий, если применим к какому-либо из его многообразий все ∞^r преобразований этой группы.

Таким образом, мы имеем следующее

Утверждение 8. *Если к заданному многообразию пространства R_n применить все ∞^r преобразований r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ этого пространства, то совокупность всех положений, принимаемых в результате этим многообразием, образует инвариантное относительно этой группы семейство многообразий. Каждое многообразие из этого семейства может быть переведено в любое другое по крайней мере одним преобразованием группы. Из каждого отдельного из данных многообразий это семейство можно получить таким же образом, как из исходного.*

Многообразие M будет допускать некоторое число, предположим, ровно $r - m$ независимых инфинитезимальных преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$[1]. Тогда эти преобразования порождают $(r - m)$-параметрическую подгруппу (ср. теорему 31, стр. 230).

Пусть S — общий символ преобразования этой подгруппы, то есть, $(M)S = (M)$; пусть, далее, T_1 — какое-то преобразование группы $X_1 f \cdots X_r f$, и пусть M переходит под действием T_1 в новое положение M': $(M') = (M)T_1$. Тогда легко можно задать *все* преобразования T группы $X_k f$, переводящие M в M'.

Итак, мы имеем

$$(M)\mathsf{T} = (M') = (M)T_1,$$

следовательно,

$$(M)\mathsf{T}T_1^{-1} = (M),$$

то есть $\mathsf{T}T_1^{-1}$ — это преобразование S, а ST_1 — общий символ всех преобразований группы $X_k f$, переводящих M в M'. Но преобразований ST_1 имеется ровно столько, сколько имеется различных преобразований S, то есть ∞^{r-m}.

Подобным образом находятся все преобразования $\mathfrak{S}$ нашей группы, оставляющие M' инвариантным. Из $(M')\mathfrak{S} = (M')$ и $(M)T_1 = (M')$ получаем

$$(M)T_1\mathfrak{S}T_1^{-1} = (M),$$

[1] Совокупность всех конечных преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, оставляющей многообразие M инвариантным, всегда образует подгруппу (теорема 32, стр. 231), которая, однако, не обязана быть конечной непрерывной группой. Если мы тем не менее в последующих рассуждениях неявно сделаем предположение, что эта подгруппа порождается инфинитезимальными преобразованиями, то это не должно рассматриваться как существенное ограничение, так как мы можем оговоренную на стр. 16 область $((a))$ всегда подходящим образом сузить.

следовательно,

$$T_1 \mathfrak{S} T_1^{-1} = S, \quad \mathfrak{S} = T_1^{-1} S T_1.$$

Таких преобразований также ∞^{r-m} различных, и их совокупность образует $(r-m)$-параметрическую подгруппу, которая внутри группы $X_k f$ является равноправной с группой, образованной преобразованием S.

Обобщим эти результаты следующим образом.

Утверждение 9. *Если многообразие M пространства R_n допускает ровно $r-m$ независимых инфинитезимальных преобразований r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$, или короче — G_r, и S — общий символ для ∞^{r-m} конечных преобразований той $(r-m)$-параметрической подгруппы, которая порождена этими $r-m$ инфинитезимальными преобразованиями, если, наконец, T — какое-нибудь преобразование из G_r: $X_1 f \cdots X_r f$, и M принимает в результате применения T новое положение M', то G_r содержит ровно ∞^{r-m} различных преобразований, которые также переводят M в M', их общий символ имеет вид ST. Более того, G_r содержит ровно ∞^{r-m} преобразований, оставляющих M' инвариантным, последние записываются в виде $T^{-1}ST$ и образуют $(r-m)$-параметрическую подгруппу, которая равноправна в G_r с группой S.*

Если мы предположим, что над уравнениями многообразия M произведены ∞^r преобразований $x_i' = f_i(x, a)$ группы $X_1 f \cdots X_r f$, то мы получим аналитическое выражение указанного инвариантного семейства многообразий. Формально это выражение содержит r параметров $a_1 \cdots a_r$, но не все они обязательно должны быть существенными. Определим число m' существенных параметров среди $a_1 \cdots a_r$.

Наше инвариантное семейство состоит из $\infty^{m'}$ различных многообразий, и любое из этих многообразий может быть переведено в любое другое преобразованием группы $X_1 f \cdots X_r f$. Поэтому согласно утверждению 7, стр. 526, каждое отдельное из $\infty^{m'}$ многообразий допускает $r - m'$ независимых инфинитезимальных преобразований группы G_r; однако, из вышесказанного мы знаем, что при наложенных условиях любое из этих многообразий допускает ровно ∞^{r-m} конечных преобразований группы G_r, следовательно, $m' = m$, и из r параметров $a_1 \cdots a_r$ ровно m являются существенными.

Итак, мы имеем

Утверждение 10. *Если многообразие M n-мерного пространства R_n допускает ровно $r-m$ независимых инфинитезимальных преобразований r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ этого пространства, то под действием ∞^r преобразований этой группы оно принимает ровно ∞^m различных положений.*

§ 114

В уравнениях нашего инвариантного семейства многообразий, как уже было сказано, не все параметры $a_1 \cdots a_r$ обязательно должны быть существенными, но мы можем всегда предположить, что $m \leqslant r$ функций $l_1 \cdots l_m$ от a введены как новые параметры, тогда уравнения нашего семейства принимают вид

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q),$$

где теперь $l_1 \cdots l_m$ — существенные параметры.

Семейство $\Omega_k = 0$ остается инвариантным относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$, в то время как его отдельные многообразия переставляются между собой. Как они переставляются, это задает группа $L_1 f \cdots L_r f$, действующая только на переменные l, которая, как уже было ранее показано, полностью определена группой $X_1 f \cdots X_r f$.

Группа $L_k f$ от переменных $l_1 \cdots l_m$ изоморфна группе $X_k f$, то есть имеет максимум r существенных параметров; с другой стороны, при наложенных условиях она заведомо транзитивна (ср. стр. 526 и ниже), т. е. имеет минимум m существенных параметров. Нам остается лишь задать простой критерий для выяснения того, сколько существенных параметров имеет группа $L_k f$ на самом деле.

Пусть группа $L_1 f \cdots L_r f$ — ϱ-параметрическая, где $m \leqslant \varrho \leqslant r$. Поскольку она мероэдрически изоморфна группе G_r, порожденной $X_1 f \cdots X_r f$, то в последней должна иметься $(r - \varrho)$-параметрическая инвариантная подгруппа, соответствующая тождественному преобразованию группы $L_k f$ (ср. теорему 54, стр. 333). Таким образом, эта $(r - \varrho)$-параметрическая инвариантная подгруппа группы G_r оставляет каждое отдельное из ∞^m многообразий $\Omega_k(x, l) = 0$ неподвижным, то есть содержится в той $(r - m)$-параметрической подгруппе g_{r-m} группы G_r, которая оставляет вышеупомянутое многообразие M инвариантным, и в то же время она содержится во всех $(r - m)$-параметрических подгруппах группы G_r, равноправных вышеупомянутой подгруппе g_{r-m} внутри G_r.

Если, наоборот, эта g_{r-m} является $(r - \varrho)$-параметрической подгруппой, которая инвариантна в G_r, то она в то же время содержится во всех подгруппах группы G_r, равносоставленных с g_{r-m}, поэтому она оставляет всякое $\Omega_k(x, l) = 0$ неподвижным, и в группе $L_1 f \cdots L_r f$ ей соответствует тождественное преобразование.

Чтобы выяснить, сколько параметров содержит группа $L_1 f \cdots L_r f$, нам надо лишь найти наибольшую содержащуюся в g_{r-m} группу, которая

инвариантна в G_r. Если такая группа является в точности $(r-\varrho)$-параметрической ($\varrho \geqslant m$), то группа $L_1 f \cdots L_r f$ является в точности ϱ-параметрической.

Этот результат мы не будем формулировать в специальном утверждении, но все результаты из двух последних параграфов мы теперь обобщим в теореме.

Теорема 85. *Если заданы r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$, или короче — G_r, пространства $x_1 \cdots x_n$ и какое-либо многообразие M, допускающее ровно $r-m$ независимых инфинитезимальных преобразований из G_r и, следовательно, порожденную ими $(r-m)$-параметрическую подгруппу g_{r-m} группы G_r, то под действием ∞^r преобразований группы G_r многообразие M принимает в целом ∞^m различных положений, совокупность которых остается инвариантной относительно группы G_r. Если отдельные положения, принимаемые M, охарактеризовать m параметрами $l_1 \cdots l_m$, то мы получим некоторую группу от переменных $l_1 \cdots l_m$:*

$$l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m; a_1 \cdots a_r) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

которая показывает, каким образом отдельные положения, принимаемые M, переставляются между собой при действии группы $X_1 f \cdots X_r f$. Эта группа от переменных l транзитивна и изоморфна группе $X_1 f \cdots X_r f$. Если наибольшая содержащаяся в g_{r-m} инвариантная подгруппа группы G_r является в точности $(r-\varrho)$-параметрической, то группа $l'_\mu = \chi_\mu(l, a)$ имеет ровно ϱ существенных параметров. В частности, если G_r — простая, то эта группа от l всегда является r-параметрической и голоэдрически изоморфной G_r, за исключением единственного случая $m = 0$, в котором группа $l'_\mu = \chi_\mu(l, a)$ состоит лишь из тождественного преобразования[2].

Упомянутое в теореме число $r - \varrho$ может принимать любое из значений $0, 1 \cdots r - m$; если $r - \varrho = 0$, то $(r-\varrho)$-параметрическая подгруппа группы g_{r-m} состоит из тождественного преобразования, поэтому группа $l'_\mu = \chi_\mu(l, a)$ голоэдрически изоморфна группе G_r; а если $r - \varrho = r - m$, то сама g_{r-m} инвариантна в G_r, и группа $l'_\mu = \chi_\mu(l, a)$ является лишь m-параметрической.

§ 115

В предпоследнем параграфе мы дали метод нахождения таких семейств многообразий, которые остаются инвариантными относительно за-

[2] Ли, Archiv for Mathematik og Naturv., том 10, Христиания, 1885 г.

данной r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$. Инвариантные семейства, которые мы таким образом получили, отличались тем, что любое многообразие подобного семейства могло быть переведено посредством как минимум одного преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$ в любое другое многообразие этого семейства.

Теперь мы хотим так обобщить упомянутый метод, чтобы он давал *все* инвариантные относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$ семейства многообразий.

К этому нас ведет естественное замечание, что рассуждения на стр. 527– 529 остаются верными и тогда, когда уравнения многообразия M содержат произвольные параметры, то есть если мы вместо одного отдельно взятого многообразия M используем сразу все семейство многообразий. Исходя из этого, мы можем поступить также следующим образом для того, чтобы найти инвариантные семейства многообразий.

Возьмем какое-нибудь семейство

$$V_k(x_1 \cdots x_n, u_1 \cdots u_h) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{11}$$

из ∞^h многообразий и применим к нему все ∞^r преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$; совокупность всех преобразований, которые мы таким образом получим, всегда образует семейство, инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Ясно, что мы получим все инвариантные относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$ семейства многообразий, если выберем семейство (11) *всеми возможными способами.* Так как если задано произвольное семейство, инвариантное относительно этой группы, например

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q), \tag{1}$$

то его в любом случае можно получить, просто выбрав в качестве семейства (11) само семейство (1). Впрочем, можно легко задать бесконечно много других семейств (11), из которых получается как раз семейство (1), однако мы не будем на этом останавливаться.

Остается ответить еще на один вопрос.

Если задано семейство (11), и на его многообразиях выполнены все преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$, то очевидно, что уравнения возникающего инвариантного семейства имеют вид

$$W_k(x_1 \cdots x_n, u_1 \cdots u_h, a_1 \cdots a_r) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q), \tag{12}$$

и, следовательно, формально имеют $h + r$ произвольных параметров, а именно $u_1 \cdots u_h$, $a_1 \cdots a_r$. Сколько из этих параметров являются суще-

ственными? Всякое многообразие семейства (11), находящееся в общем положении, принимает относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$ определенное число, скажем ∞^p, различных положений; из этих ∞^p положений опять-таки определенное число, скажем ∞^o, различных положений будет принадлежать семейству (11). Таким образом, все семейство (11) разбивается на ∞^{h-o} многообразий таких, что любое многообразие семейства (11) всегда может быть переведено в любое многообразие, принадлежащее одному и тому же подсемейству, посредством по меньшей мере одного преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$, и что любое многообразие семейства (11), если оно под действием преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$ остается в семействе (11), в то же время остается в подсемействе, которому принадлежит.

Если мы теперь представим, что на каких-либо двух многообразиях семейства (11), принадлежащих *одному и тому же* подсемейству, последовательно выполнены все преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$, то в обоих случаях, очевидно, получается одно и то же семейство из ∞^p многообразий; если же представить, что все преобразования этой группы выполнены на двух многообразиях семейства (11), принадлежащих *различным* подсемействам, то мы получим два различных семейства, по ∞^p многообразий в каждом, не имеющие вообще никаких общих многообразий.

Поэтому если мы выберем из каждого подсемейства семейства (11), состоящего из ∞^{h-o} подсемейств, одно многообразие и выполним на полученных таким образом ∞^{h-o} многообразиях все преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$, то получим ∞^{h-o} различных семейств, по ∞^p многообразий в каждом, то есть в целом ∞^{h-o+p} различных многообразий. В то же время ясно, что таким образом мы получим такое же точно семейство многообразий, как в случае, если выполнить все преобразования нашей группы над самими многообразиями (11).

Тем самым доказано, что семейство (12) состоит из ∞^{h-o+p} различных многообразий, то есть что из $h + r$ параметров уравнений (12) ровно $h - o + p$ являются существенными.

Еще мы хотим показать, что надо делать, чтобы найти вышеупомянутые числа p и o.

Очевидно, что $r - p$ — это число независимых инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, оставляющих одно многообразие семейства (11), находящееся в общем положении, инвариантным. Но тогда наиболее общее инфинитезимальное преобразование $\sum e_j X_j f$, оставляющее многообразие

$$V_k(x_1 \cdots x_n, u_1 \cdots u_h) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{13}$$

инвариантным, необходимо имеет вид

$$\sum_{j=1}^{r} e_j(u_1 \cdots u_h) \cdot X_j f, \tag{14}$$

где $e_j(u_1 \cdots u_h)$ — функции от u. Поэтому нам надо лишь самым общим образом задать функции $e_j(u)$ так, чтобы система уравнений (13) в переменных $x_1 \cdots x_n$ допускала инфинитезимальное преобразование (14).

Если мы предположим, что уравнения (13) разрешены относительно $n-q$ из x:

$$x_{q+k} = \omega_{q+k}(x_1 \cdots x_q, u_1 \cdots u_h) \quad (k = 1 \cdots n-q),$$

и обозначим подстановку $x_{q+1} = \omega_{q+1}, \cdots x_n = \omega_n$ через $[\ ]$, то для функций $e_j(u)$ очевидно получим уравнения

$$\sum_{j=1}^{r} e_j(u_1 \cdots u_h) \left\{ [\xi_{j,q+k}] - \sum_{\pi=1}^{q} [\xi_{j\pi}] \frac{\partial \omega_{q+k}}{\partial x_\pi} \right\} = 0 \tag{15}$$

$$(k = 1 \cdots n-q),$$

которые должны выполняться независимо от значений $x_1 \cdots x_q$.

Если мы из этих уравнений задали $e_j(u)$ самым общим образом, то нам известно самое общее инфинитезимальное преобразование $\sum e_j X_j f$, оставляющее многообразие (13) инвариантным, а отсюда мы можем непосредственно вывести число независимых инфинитезимальных преобразований $\sum e_j X_j f$ с этим свойством.

Для нахождения числа o мы поступим следующим образом.

Сначала найдем самое общее инфинитезимальное преобразование $\sum \varepsilon_j(u_1 \cdots u_h) X_j f$, переводящее многообразие (13) в бесконечно близкое многообразие семейства (11), иначе говоря, мы ищем самое общее инфинитезимальное преобразование

$$\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j(u_1 \cdots u_h) X_j f + \sum_{\sigma=1}^{h} \Phi_\sigma(u_1 \cdots u_h) \frac{\partial f}{\partial u_\sigma},$$

оставляющее систему уравнений (13) от $n+h$ переменных $x_1 \cdots x_n$, $u_1 \cdots u_h$ инвариантной.

Если сохранить выбранные выше обозначения, то функции $\varepsilon_j(u)$ и $\Phi_\sigma(u)$, очевидно, задаются уравнениями

$$\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j(u) \left\{ [\xi_{j,q+k}] - \sum_{\pi=1}^{q} [\xi_{j\pi}] \frac{\partial \omega_{q+k}}{\partial x_\pi} \right\} = \sum_{\sigma=1}^{h} \Phi_\sigma(u) \frac{\partial \omega_{q+k}}{\partial u_\sigma} \tag{15'}$$

$$(k = 1 \cdots n-q),$$

которым они должны удовлетворять независимо от значений переменных $x_1 \cdots x_q$.

Предположим, что $\varepsilon_j(u)$ и $\Phi_\sigma(u)$ из этих уравнений заданы самым общим образом, и рассмотрим выражение

$$\sum_{\sigma=1}^{h} \Phi_\sigma(u_1 \cdots u_h) \frac{\partial f}{\partial u_\sigma}.$$

То же самое можно получить из совершенно определенного числа, скажем $h' \leqslant h$, выражений:

$$\sum_{\sigma=1}^{h} \Phi_{\tau\sigma}(u_1 \cdots u_h) \frac{\partial f}{\partial u_\sigma} \quad (\tau = 1 \cdots h'),$$

путем их перемножения с функциями от u и сложения. Соответствующие h' уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{h} \Phi_{\tau\sigma}(u_1 \cdots u_h) \frac{\partial f}{\partial u_\sigma} = 0 \quad (\tau = 1 \cdots h')$$

образуют согласно природе вещей h'-параметрическую полную систему с $h - h'$ независимыми решениями:

$$w_1(u_1 \cdots u_h) \cdots w_{h-h'}(u_1 \cdots u_h),$$

и понятно, что уравнения

$$w_1 = \text{const}, \cdots w_{h-h'} = \text{const}$$

задают те ∞^{h-o} подсемейств, на которые, как мы видели выше, разбивается семейство (11). Следовательно, $h - o = h - h'$ и $o = h'$.

Нельзя не упомянуть, что результаты настоящей главы можно и дальше обобщить.

Например, вместо одного отдельного многообразия можно исходить из дискретного числа многообразий или еще более общо: вместо одного отдельного семейства многообразий — из нескольких таких семейств. Множество из нескольких многообразий назовем для краткости *фигурой*.

§ 116

Теорема 85, стр. 531, содержит способ описания транзитивных групп, изоморфных заданной r-параметрической группе; способ описания *всех* таких групп мы излагали еще в гл. 22, стр. 480 и ниже. Теперь мы покажем, что наш новый метод, по сути дела, сводится к старому, и придем, таким образом, к тому, чтобы сформулировать ранее найденный важный результат в новом, намного более общем виде.

Пусть

$$V_k(x_1 \cdots x_n) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{16}$$

— какое-либо многообразие, а

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

— какая-нибудь r-параметрическая группа, порожденная r независимыми инфинитезимальными преобразованиями. И пусть в результате разрешения уравнений $x_i' = f_i(x, a)$ относительно x получается

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Наконец, мы хотим еще предположить, что многообразие (16) допускает ровно $r-m$ независимых инфинитезимальных преобразований группы $x_i' = f_i(x, a)$.

Если мы применим к многообразию (16) общее преобразование $x_i' = f_i(x, a)$ нашей группы, то согласно теореме 85, стр. 531, получим семейство из ∞^m многообразий, инвариантное относительно этой группы. Уравнения этого семейства будут такими:

$$V_k(F_1(x', a) \cdots F_n(x', a)) = W_k(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) = 0 \qquad (17)$$

$$(k = 1 \cdots n - q),$$

то есть получают формально r произвольных параметров. Но среди этих r только m — существенные, поэтому можно задать m таких независимых функций $\omega_1(a) \cdots \omega_m(a)$ от a, что уравнения (17) принимают вид

$$\Omega_k(x_1' \cdots x_n', \omega_1(a) \cdots \omega_m(a)) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q). \qquad (17')$$

Наконец, здесь мы можем вместо a ввести $l_1 = \omega_1(a) \cdots l_m = \omega_m(a)$ в качестве новых параметров; в возникающей таким образом системе уравнений

$$\Omega_k(x_1' \cdots x_n', l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \qquad (18)$$

параметры $l_1 \cdots l_m$ будут тогда существенными.

Новое представление нашего инвариантного семейства мы найдем, если применим к системе уравнений (18) какое-либо преобразование $x_i'' = f_i(x', b)$ нашей группы. При этом (18) согласно теореме 85, стр. 531, принимает вид

$$\Omega_k(x_1'' \cdots x_n'', l_1' \cdots l_m') = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q), \qquad (18')$$

где l' — совершенно определенные функции от l и b:

$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, b_1 \cdots b_r) \quad (\mu = 1 \cdots m). \qquad (19)$$

Это же представление нашего семейства мы должны получить, если мы сразу же применим к многообразию (16) преобразование

$$x_i'' = f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1' \cdots a_r'),$$

в котором a' — совершенно определенные функции от a и b:

$$a'_k = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r). \tag{20}$$

Если мы так сделаем, то уравнения нашего семейства сначала примут вид

$$V_k(F_1(x'', a') \cdots F_n(x'', a')) = W_k(x''_1 \cdots x''_n, a'_1 \cdots a'_r) = 0,$$

но мы можем, очевидно, записать их и так:

$$\Omega_k(x''_1 \cdots x''_n, \omega_1(a') \cdots \omega_m(a')) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q).$$

Поскольку эти уравнения должны совпадать с уравнениями (18′), то получается, что параметры l' связаны с a' соотношениями

$$l'_\mu = \omega_\mu(a'_1 \cdots a'_r) \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

Таким образом, вследствие уравнений (19) имеем

$$\omega_\mu(a') = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, b_1 \cdots b_r) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

или

$$\omega_\mu(a') = \chi_\mu(\omega_1(a) \cdots \omega_m(a), b_1 \cdots b_r) \quad (\mu = 1 \cdots m). \tag{21}$$

Если произвести здесь подстановку $a'_1 = \varphi_1(a, b)$, $\cdots a'_r = \varphi_r(a, b)$, то должны будут получиться одни лишь тождества, так как параметры $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$ совершенно произвольны и потому не связаны соотношениями.

Если теперь вспомнить, что уравнения (20) представляют просто транзитивную группу от переменных $a_1 \cdots a_r$, равносоставленную с группой $x'_i = f_i(x, a)$, а именно соответствующую группу параметров (гл. 21, стр. 447), и что уравнения (19) представляют транзитивную группу, изоморфную группе $x'_i = f_i(x, a)$, то сразу ясно следующее:

Уравнения

$$\omega_1(a_1 \cdots a_r) = \text{const}, \quad \omega_m(a_1 \cdots a_r) = \text{const} \tag{22}$$

представляют инвариантное относительно группы (20) разбиение r-мерного пространства $a_1 \cdots a_r$, причем разбиение на ∞^m $(r - m)$-мерных многообразий. Группа же

$$l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, b_1 \cdots b_r) \quad (\mu = 1 \cdots m) \tag{19}$$

задает, каким образом ∞^m многообразий (22) под действием преобразований просто транзитивной группы (20) переставляются между собой.

Таким образом, мы видим, что группа (19) может быть получена из просто транзитивной группы $a'_k = \varphi_k(a, b)$ по правилам из предыдущей главы (стр. 480 и ниже).

Это обстоятельство мы можем использовать, чтобы решить, при каких условиях мы получим две подобные группы (19), если исходить из двух различных многообразий (16). При помощи простых рассуждений мы увидим, что справедливо следующее утверждение, частным случаем которого, по сути, является теорема 80 в гл. 22, стр. 491.

Теорема 86. *Если в пространстве $x_1 \cdots x_n$ заданы r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$, а также два многообразия M и M', и если к каждому из этих многообразий применить все ∞^r преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, то отдельные многообразия из полученных таким образом инвариантных семейств будут преобразовываться двумя транзитивными группами, изоморфными группе $X_1 f \cdots X_r f$, которые будут подобны друг другу тогда и только тогда, когда выполнены два следующих условия:*

Во-первых, оба многообразия M и M' должны допускать одинаковое число независимых инфинитезимальных преобразований вида $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, и

во-вторых, должен существовать такой голоэдрический изоморфизм группы $X_1 f \cdots X_r f$ на себя, при котором каждое инфинитезимальное преобразование, оставляющее неподвижным одно многообразие, соответствует инфинитезимальному преобразованию, оставляющее инвариантным другое.

Само собой разумеется, что эта теорема остается верной и тогда, когда эти два многообразия заменены двумя фигурами.

§ 117

Особого упоминания заслуживает случай, когда имеется многообразие или фигура, не допускающие вообще никакого инфинитезимального преобразования группы G_r: $X_1 f \cdots X_r f$. Тогда группа (19), изоморфная группе G_r имеет вид

$$l'_k = \chi_k(l_1 \cdots l_r, a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

является просто транзитивной и потому голоэдрически изоморфной группе G_r[3].

[3] Ли, Научное общество Христиании, 1884 г.

Таким образом, мы имеем здесь общий метод описания просто транзитивных групп, равносоставленных с заданной r-параметрической.

Метод, использованный в предыдущей главе, утв. 1, стр. 477, — это всего лишь частный случай теперешнего общего. А именно: тогда — так мы можем теперь выразиться, — мы использовали в качестве фигуры совокупность r различных точек пространства R_n. Если на положение этих точек не наложено никаких особых условий, то состоящая из них фигура не может допускать никаких инфинитезимальных преобразований группы $X_k f$. Так как группа $X_k f$ заведомо не оставляет ни одной точки общего положения инвариантной, то в ней может быть максимум $r-1$ независимых инфинитезимальных преобразований, которые фиксируют такую точку; из этих возможных $r-1$ можно снова линейно получить максимум $r-2$ независимых инфинитезимальных преобразований, для которых вторая точка общего положения остается неподвижной и т. д.; так, в конце концов, становится понятно, что в этой группе нет инфинитезимальных преобразований, под действием которых r точек общего положения оставались бы инвариантными.

Поэтому если мы возьмем фигуру, состоящую из r таких точек, и применим к ней ∞^r преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, то эта фигура принимает ∞^r различных положений, совокупность которых относительно этой группы остается инвариантной. Эти ∞^r положений преобразуются просто транзитивной группой.

Если мы действительно построим эту просто транзитивную группу, то получим в точности ту же группу, что и при помощи метода из предыдущей главы.

§ 118

Общие результаты §§ 114 и 116 желательно также пояснить на специальном примере. При этом мы ограничимся указаниями и предоставим читателю выполнение соответствующих простых вычислений.

Наиболее общая проективная группа плоскости, оставляющая инвариантным невырожденное коническое сечение $x^2-2y=0$, является трехпараметрической и содержит следующие три независимых инфинитезимальных преобразования:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_3 f = (x^2 - y)\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Сразу видно, что эта группа — назовем ее кратко G_3, — транзитивна, и что ее структура определяется соотношениями

$$(X_1X_2) = X_1f, \quad (X_1X_3) = X_2f, \quad (X_2X_3) = X_3f.$$

Отсюда, с учетом утв. 8, гл. 15, стр. 292, следует, что G_3 не содержит никакой двухпараметрической инвариантной подгруппы; в том, что она не содержит также никакой однопараметрической инвариантной подгруппы, нетрудно убедиться. Следовательно, G_3 является *простой* (гл. 15, стр. 293).

Всякая касательная фиксированного конического сечения $x^2 - 2y = 0$ допускает ровно два независимых инфинитезимальных преобразования этой группы, кроме того, можно показать, что касательные являются единственными кривыми на плоскости, имеющими такое свойство. Точно так же те конические сечения, которые касаются фиксированного конического сечения в двух точках, являются единственными кривыми, допускающими одно и только одно инфинитезимальное преобразование группы G_3; в качестве дважды касающегося конического сечения должна, однако, рассматриваться любая прямая на плоскости, пересекающая коническое сечение в двух различных точках. Наконец, ясно, что любая не лежащая на коническом сечении точка допускает одно и только одно инфинитезимальное преобразование.

Если же выбрать в качестве многообразия какую-нибудь другую кривую, то есть такую, которая не допускает вообще никаких инфинитезимальных преобразований группы G_3, то она принимает при действии группы ∞^3 различных положений, а совокупность этих положений будет, очевидно, преобразовываться трехпараметрической группой. Итак, мы получаем просто транзитивную группу пространства R_3, равносоставленную с исходной группой G_3. Все группы, найденные таким образом, подобны между собой; одна из них, например, это трехпараметрическая группа всех проективных преобразований пространства R_3, оставляющих кривую третьего порядка инвариантной.

Если ввести в качестве многообразия M коническое сечение, касательное в двух отдельных точках (неприводимое или распадающееся), то получится группа двумерного многообразия, голоэдрически изоморфная G_3; все полученные таким образом группы подобны между собой. Если же использовать в качестве многообразия M коническое сечение с четырьмя точками касания, то получится совершенно другой тип трехпараметрических групп двумерного многообразия.

Наконец, если ввести в качестве многообразия M касательную фиксированного конического сечения, то получится трехпараметрическая группа одномерного пространства, подобная общей проективной группе прямой.

§ 119

Пусть задана линейная однородная группа

$$X_k f = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{k\mu\nu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \cdots r)$$

пространства R_n. Она оставляет семейство из ∞^n плоских многообразий M_{n-1}:

$$u_1 x_1 + \cdots u_n x_n + 1 = 0,$$

пространства R_n инвариантным. Построим соответствующую группу в действующую на параметры $u_1 \cdots u_n$.

Инфинитезимальные преобразования

$$U_k f = \sum_{\nu=1} v_{k\nu}(u_1 \cdots u_n) \frac{\partial f}{\partial u_\nu}$$

искомой группы должны согласно § 111 задаваться таким образом, чтобы уравнение $\sum u_\nu x_\nu + 1 = 0$ допускало инфинитезимальное преобразование $X_k f + U_k f$. Стало быть, r выражений

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{k\mu\nu} x_\mu u_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu v_{k\nu}$$

должны обращаться в нуль в силу $\sum u_\nu x_\nu + 1 = 0$. Это возможно лишь тогда, когда они обращаются в нуль тождественно, то есть когда $v_{k\nu} = -\sum_\mu a_{k\nu\mu} u_\mu$.

Итак, мы находим

$$U_k f = -\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{k\nu\mu} u_\mu \frac{\partial f}{\partial u_\nu}.$$

Следовательно, группа $U_k f$ также является линейной и однородной; о том, что она изоморфна группе $X_k f$, мы знаем изначально.

Назовем группу $U_1 f \cdots U_r f$ *двойственной* к группе $X_1 f \cdots X_r f$.

Для примера найдем группу, двойственную к присоединенной группе r-параметрической группы $Y_1 f \cdots Y_r f$ со структурой

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s f.$$

Присоединенная группа имеет вид (ср. стр. 305)

$$\sum_{i,s=1}^{r} c_{iks} e_i \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (k = 1 \cdots r),$$

тогда ее двойственной будет группа[4]

$$\sum_{i,s=1}^{r} c_{kis} \varepsilon_s \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

причем используется соотношение $c_{iks} = -c_{kis}$.

Аналогичные рассуждения можно провести вообще для всех проективных групп пространства R_n, поскольку они оставляют семейство из ∞^n плоских $(n-1)$-мерных многообразий пространства R_n инвариантным. Но мы здесь не будем этим заниматься, а отсылаем, скорее, к следующей части книги, в которой понятие двойственности рассматривается с более общей точки зрения, а именно как частный случай общего понятия «контактное преобразование».

§ 120

Наконец, рассмотрим еще один важный пример общей природы.

Предположим, что нам известны все q-параметрические подгруппы группы G_r: $X_1 f \cdots X_r f$. Тогда речь идет лишь о том, чтобы решить, какие имеются различные *типы* таких q-параметрических подгрупп.

Понятие «типов подгрупп» мы объяснили еще в гл. 16, стр. 311; в соответствии с этим мы причисляем две q-параметрические подгруппы к одному и тому же типу, если они равноправны внутри группы G_r; поэтому нам надо задать только одну из всех подгрупп, относящихся к одному типу, остальные будут ею полностью определены.

Мы знаем, что любая подгруппа группы $X_1 f \cdots X_r f$ представлена рядом линейных однородных соотношений между параметрами $e_1 \cdots e_r$ общего инфинитезимального преобразования $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ (гл. 12, стр. 235).

Более того, мы знаем, что две подгруппы тогда и только тогда равноправны внутри группы $X_1 f \cdots X_r f$, когда система уравнений между па-

[4] Ли, Math. Ann., том XVI, стр. 496, ср. также Archiv for Mathematik, том 1, Христиания, 1876 г.

раметрами e, представляющая одну подгруппу, при помощи преобразования присоединенной группы может быть переведена в систему уравнений, представляющую другую подгруппу (гл. 16, стр. 310).

Так, если, по нашему предположению, нам известны все q-параметрические подгруппы группы G_r, то нам также известны все системы из $r-q$ независимых линейных однородных уравнений между e:

$$\sum_{j=1}^{r} h_{kj} e_j = 0 \quad (k = 1 \cdots r-q),$$

представляющие q-параметрические подгруппы.

Для простоты мы выделим из всех этих систем уравнений такие, которые можно разрешить относительно $e_{q+1} \cdots e_r$, то есть привести к виду

$$e_{q+k} = g_{q+k,1} e_1 + \cdots g_{q+k,q} e_q \qquad (23)$$

$$(k = 1 \cdots r-q);$$

остальные, которые нельзя привести к такому виду, оставим в стороне; с ними, конечно, можно было бы поступить так же, как с уравнениями вида (23).

Все системы значений $g_{q+k,j}$, которые, будучи подставлены в (23), дают q-параметрические подгруппы, определяются известными уравнениями между $g_{q+k,j}$; однако в общем случае нельзя представить все эти системы значений при помощи одной единственной системы уравнений между g, наоборот, потребуется дискретное число таких систем уравнений, если мы хотим получить все q-параметрические подгруппы, задаваемые соотношениями (23). Две различные системы уравнений такого рода дают, разумеется, также различные типы q-параметрических подгрупп.

Мы ограничиваемся одной из таких систем уравнений, например следующей:

$$\Omega_\mu (g_{q+1,1}, g_{q+1,2} \cdots g_{rq}) = 0 \quad (\mu = 1, 2 \cdots), \qquad (24)$$

и хотим посмотреть, какие типы q-параметрических подгрупп она задает. Уравнения (23) представляют (если $g_{q+k,j}$ совершенно произвольны) семейство всех плоских q-мерных многообразий пространства $e_1 \cdots e_r$, которые проходят через точку $e_1 = 0, \cdots e_r = 0$. Само собой разумеется, что это семейство многообразий остается инвариантным относительно присоединенной группы

$$e'_k = \sum_{j=1}^{r} \varrho_{kj}(a_1 \cdots a_r) e_j \quad (k = 1 \cdots r) \qquad (25)$$

группы $X_1 f \cdots X_r f$. Поэтому если выполнить над системой (23) преобразование (25), то мы получим в переменных e' систему уравнений соответствующего вида:

$$e'_{q+k} = \sum_{j=1}^{q} g'_{q+k,j} \cdot e'_j \quad (k = 1 \cdots r-q),$$

где g' — линейные однородные функции от g с коэффициентами, зависящими от a:

$$g'_{q+k,j} = \sum_{\mu=1}^{r-q} \sum_{\nu=1}^{q} \alpha_{kj\mu\nu}(a_1 \cdots a_r) \cdot g_{q+\mu,\nu} \tag{26}$$

$$(k = 1 \cdots r-q,\ j = 1 \cdots q).$$

Согласно стр. 515 уравнения (26) задают группу от переменных g. Система уравнений (24) остается инвариантной относительно этой группы, так как всякая система значений $g_{q+k,j}$, дающая подгруппу, разумеется, переходит в систему значений $g'_{q+k,j}$, также задающую подгруппу; но поскольку группа (26) непрерывна, то она оставляет все дискретные области подобных систем значений $g_{q+k,j}$ по отдельности инвариантными, то есть, в частности, и систему уравнений

$$\Omega_\mu(g_{q+1,1} \cdots g_{rq}) = 0 \quad (\mu = 1, 2 \cdots). \tag{24}$$

Теперь спрашивается, как системы значений из (24) преобразуются при действии группы (26), может ли любая система значений быть переведена в любую другую или нет.

Этот вопрос получает более наглядный смысл, если мы рассмотрим $g_{q+k,j}$ как координаты точек в пространстве размерности $q(r-q)$. Тогда уравнения (24) в этом пространстве представляют некоторое многообразие, остающееся инвариантным относительно группы (26). Каждая точка этого многообразия принадлежит некоторой наименьшей инвариантной подобласти многообразия, и точки каждой такой подобласти представляют только равноправные q-параметрические подгруппы группы G_r, а именно все q-параметрические подгруппы группы G_r, которые относятся к одному и тому же типу.

Впрочем, необходимо заметить, что к такой наименьшей инвариантной подобласти относятся только те ее точки $g_{q+k,j}$, которые, со своей стороны, не содержатся ни в какой меньшей инвариантной подобласти; так как только в том случае, когда подобласть ограничена указанным образом, любая

ее точка может быть переведена невырожденным преобразованием группы (26) в любую другую точку.

Поэтому если мы хотим описать все типы q-параметрических подгрупп, содержащихся в системе уравнений (24), то надо лишь найти все наименьшие инвариантные подмножества многообразия $\Omega_\mu = 0$. Каждое такое подмножество задает все подгруппы, относящиеся к одному и тому же типу, и любая точка этого подмножества дает группу, которая может быть выбрана в качестве представителя соответствующего типа.

Кстати, чтобы найти упомянутые инвариантные подмножества, ни в коей мере не требуется знать конечные уравнения (25) присоединенной группы; достаточно иметь инфинитезимальные преобразования этой группы, тогда можно непосредственно задать инфинитезимальные преобразования группы (26), а затем определить согласно правилам в главе 14 искомые инвариантные подмножества; в данном случае это определение требует лишь выполнимых операций.

Надо учесть, что эти результаты могут быть применимы даже в том случае, когда известна не r-параметрическая *группа*, а только возможная *структура* таковой, то есть система констант c_{iks}, удовлетворяющая известным соотношениям

$$\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{r} \{c_{ik\nu}c_{\nu js} + c_{kj\nu}c_{\nu is} + c_{ji\nu}c_{\nu ks}\} = 0, \\ (i,k,j,s = 1 \cdots r). \end{cases}$$

Если G_r: $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантна в большей группе $\mathfrak{G}$, то часто возникает вопрос, являются ли две подгруппы группы G_r в этой бóльшей группе $\mathfrak{G}$ равноправными. В этом случае можно дать также другое определение понятия «типы подгрупп группы G_r», отнеся две подгруппы группы G_r к различным типам только тогда, когда они и в $\mathfrak{G}$ не равноправны между собой.

Если мы хотим описать все подгруппы группы G_r в этом смысле, то это не особенно сложно. Но эта задача, очевидно, — часть более общей: найти все типы подгрупп группы $\mathfrak{G}$, где слово «тип» понимается в смысле гл. 16, стр. 311.

Это исследование является особо важным, если группа $\mathfrak{G}$ — наибольшая группа пространства R_n, в которой G_r: $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантна.

Глава 24

Систатические и асистатические группы преобразований

Пусть в s-мерном пространстве $x_1 \cdots x_s$ задана r-параметрическая группа

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

или короче — G_r. Пусть из r инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ в точности n, скажем $X_1 f \cdots X_n f$, не связаны никакими линейными соотношениями, тогда как $X_{n+1} f \cdots X_r f$ выражаются следующим образом:

$$X_{n+j} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (j = 1 \cdots r - n). \tag{1}$$

Тогда если $x_1^0 \cdots x_s^0$ — точка, для которой не все определители порядка n матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{ns}(x) \end{vmatrix} \tag{2}$$

обращаются в нуль, то согласно главе 11, стр. 226, в группе G_r имеется ровно $r - n$ независимых инфинитезимальных преобразований, разложения в ряд которых по $x_i - x_i^0$ не содержит членов нулевого порядка, а лишь первого и выше; таким образом, точка $x_1^0 \cdots x_s^0$ допускает ровно $r - n$ независимых инфинитезимальных преобразований группы G_r, порождающей $(r - n)$-параметрическую подгруппу G_{r-n} группы G_r (ср. гл. 12, утверждение 2, стр. 228). Инфинитезимальные преобразования этой подгруппы G_{r-n} можно согласно стр. 226 линейно получить из $r - n$ независимых:

$$X_{n+j} f - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot X_\nu f \quad (j = 1 \cdots r - n).$$

В последующем мы будем называть точку $x_1^0 \cdots x_s^0$, для которой не все определители порядка n матрицы (2) обращаются в нуль, коротко также точкой *общего положения*.

§ 121

Каждой точке $x_1^0 \cdots x_s^0$ общего положения соответствует, согласно изложенному выше, совершенно определенная $(r-n)$-параметрическая подгруппа группы G_r, а именно самая общая подгруппа группы G_r, относительно которой эта точка остается инвариантной.

Если мы позволим точке x^0 изменить свое положение, то получим другую $(r-n)$-параметрическую подгруппу группы G_r, а поскольку имеется ∞^s различных точек, то в целом мы получим ∞^s таких подгрупп; однако не сказано, что мы получим ∞^s различных подгрупп.

Например, если $r=n$, то все вышеупомянутые ∞^s подгрупп совпадают, а именно: они сводятся к тождественному преобразованию, так как G_r не содержит никакого инфинитезимального преобразования, которое оставляло бы точку x общего положения неподвижной.

Но и помимо этого специального случая, может случиться так, что ∞^s точкам пространства $x_1 \cdots x_s$ соответствуют лишь ∞^{s-1} или еще меньше различных групп указанного выше вида; это, очевидно, будет происходить всякий раз, когда *имеется непрерывное семейство отдельных точек, которые одновременно сохраняют свое положение при действии одной и той же $(r-n)$-параметрической подгруппы группы G_r.*

Теперь мы хотим найти аналитические условия, при которых такое происходит. Поэтому прежде всего зададим себе вопрос: когда две точки общего положения остаются инвариантными относительно одной и той же $(r-n)$-параметричекой подгруппы группы G_r?

Ответ на этот вопрос имеет большое сходство с рассуждениями в гл. 19, стр. 395 и д.

Пусть одной из точек будет $x_1^0 \cdots x_s^0$, соответствующую ей $(r-n)$-параметрическую подгруппу группы G_r обозначим через G_{r-n}; тогда общее инфинитезимальное преобразование подгруппы G_{r-n} таково:

$$\sum_{j=1}^{r-n} \varepsilon_j \left(X_{n+j} f - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu}^0 X_\nu f \right),$$

где под ε понимаются произвольные параметры.

Другой точкой пусть будет $\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_s$, а общее инфинитезимальное преобразование соответствующей ей подгруппы $\overline{G}_{r-n}$ таким:

$$\sum_{j=1}^{r-n} \overline{\varepsilon}_j \left(X_{n+j} f - \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\varphi}_{j\nu} X_\nu f \right).$$

Теперь обе точки должны оставаться инвариантными относительно одной и той же $(r-n)$-параметрической подгруппы, то есть, G_{r-n} и $\overline{G}_{r-n}$ должны совпадать; для этого необходимо и достаточно, чтобы все инфинитезимальные преобразования одной принадлежали также и другой, и наоборот. Выражаясь аналитически, уравнение

$$\sum_{j=1}^{r-n} \varepsilon_j \left\{ X_{n+j} f - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi^0_{j\nu} X_\nu f \right\} = \sum_{j=1}^{r-n} \overline{\varepsilon}_j \left\{ X_{n+j} f - \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\varphi}_{j\nu} X_\nu f \right\}$$

должно при произвольно выбранных ε всегда тождественно выполняться за счет подходящих значений $\overline{\varepsilon}$, а при произвольно выбранном $\overline{\varepsilon}$ — за счет подходящих значений ε.

Последнее уравнение можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{r-n} (\varepsilon_j - \overline{\varepsilon}_j) \cdot X_{n+j} f - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=1}^{r-n} (\varepsilon_j \varphi^0_{j\nu} - \overline{\varepsilon}_j \overline{\varphi}_{j\nu}) \cdot X_\nu f = 0,$$

таким образом, оно в силу независимости инфинитезимальных преобразований не может иметь место иначе, как если $\overline{\varepsilon}_j = \varepsilon_j$; так как, кроме того, ε_j совершенно произвольны, то получается

$$\varphi_{j\nu}(x^0_1 \cdots x^0_s) = \varphi_{j\nu}(\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_s) \quad (j = 1 \cdots r-n; \nu = 1 \cdots n).$$

Согласно этому обе $(r-n)$-параметрические подгруппы группы G_r, относящиеся к двум различным точкам общего положения, идентичны друг другу тогда и только тогда, когда любая из $n(r-n)$ функций $\varphi_{j\nu}$ принимает для одной точки то же самое числовое значение, что и для другой.

Поэтому если мы желаем знать все точки общего положения, которые одновременно с точкой $x^0_1 \cdots x^0_s$ сохраняют свое положение относительно группы G_{r-n}, то нам надо лишь описать все системы значений x, удовлетворяющие уравнениям

$$\varphi_{j\nu}(x_1 \cdots x_s) = \varphi^0_{j\nu} \quad (j = 1 \cdots n-q; \nu = 1 \cdots q); \tag{3}$$

каждая такая система значений дает одну точку с требуемым свойством.

Здесь различают два случая.

Во-первых, число независимых друг от друга среди $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x)$ может быть в точности равно s. В этом случае $(r-n)$-параметрическая подгруппа G_{r-n}, фиксирующая точку $x_1^0 \cdots x_n^0$, оставляет неподвижными еще максимум дискретное число точек общего положения.

Во-вторых, число независимых среди $\varphi_{k\nu}(x)$ может быть меньше s. В этом случае имеется непрерывное многообразие из точек общего положения, которые остаются инвариантными относительно группы G_{r-n}; каждой точке этого многообразия тогда соответствует та же самая $(r-n)$-параметрическая подгруппа группы G_r, что и точке $x_1^0 \cdots x_s^0$. При этом точка $x_1^0 \cdots x_s^0$, очевидно, лежит внутри некоторого многообразия, то есть в этом многообразии имеются и такие точки, которые бесконечно близки к точке $x_1^0 \cdots x_s^0$.

Предположим, что имеет место второй случай, то есть среди $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x)$ имеется лишь $s-\varrho < s$ независимых друг от друга, которые можно обозначить через $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$.

При этом условии все $\varphi_{k\nu}(x)$ можно выразить только через $\varphi_{s-\varrho}(x)$, а уравнения (3) могут быть заменены $s-\varrho$ независимыми друг от друга уравнениями

$$\varphi_1(x_1 \cdots x_s) = \varphi_1(x_1^0 \cdots x_s^0), \cdots \varphi_{s-\varrho}(x_1 \cdots x_s) = \varphi_{s-\varrho}(x_1^0 \cdots x_s^0). \tag{3'}$$

Таким образом, мы видим, что всякая точка общего положения $x_1^0 \cdots x_s^0$ принадлежит совершенно определенному ϱ-мерному многообразию (3'), образуемому совокупностью всех точек, которым соответствует та же самая $(r-n)$-параметрическая подгруппа группы $X_1 f \cdots X_r f$, что и точке $x_1^0 \cdots x_s^0$.

Возможно, что уравнения

$$\varphi_{j\nu}(x_1 \cdots x_s) = \varphi_{j\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \qquad (j = 1 \cdots r-n; \quad \nu = 1 \cdots n)$$

представляют для каждой системы значений $x_1^0 \cdots x_s^0$ многообразие, распадающееся на дискретное число конечным образом различных многообразий[1]. Например, для трехпараметрической группы

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 f = \frac{1}{\cos x_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_3 f = \operatorname{tg} x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

имеем

$$X_3 f \equiv \sin x_2 \cdot X_2 f,$$

[1] Имеются в виду многообразия, не являющиеся бесконечно близкими, то есть не образующие непрерывных семейств. – *Прим. ред.*

тогда как $X_1 f$ и $X_2 f$ не связаны никаким линейным соотношением. Поэтому если зафиксировать точку x_1^0, x_2^0, то и все точки, координаты которых x_1, x_2 удовлетворяют уравнению

$$\sin x_2 = \sin x_2^0,$$

остаются фиксированными; это значит, что одновременно с точкой x_1^0, x_2^0 каждая точка, лежащая на одной из бесконечно многих прямых, параллельных оси x_1:

$$x_2 = x_2^0 + 2k\pi,$$

сохраняет свое положение; под k понимается произвольное положительное или отрицательное число.

Поскольку группа $X_1 f \cdots X_r f$ при наложенных условиях сопоставляет каждой точке $x_1^0 \cdots x_s^0$ проходящее через нее ϱ-мерное многообразие, то она, очевидно, разбивает все пространство $x_1 \cdots x_s$ на семейство, состоящее из $\infty^{s-\varrho}$ ϱ-мерных многообразий:

$$\varphi_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const}, \cdots \varphi_{s-\varrho}(x_1 \cdots x_s) = \text{const}, \qquad (4)$$

причем таких, что все преобразования этой группы, фиксирующие произвольно выбранную точку общего положения, одновременно оставляют все точки проходящего через эту точку многообразия неподвижными.

Кстати, здесь надо заметить, что речь о действительном разбиении может идти лишь тогда, когда число ϱ меньше s; если $\varrho = s$, то настоящего разбиения пространства не происходит, и тогда всякое преобразование нашей группы, фиксирующее точку общего положения, оставляет вообще все точки пространства инвариантными; другими словами, тождественное преобразование — это единственное преобразование группы, оставляющее точку общего положения неподвижной.

Предыдущие рассуждения дают повод для нового важного деления всех r-параметрических групп $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$, а именно деления на два различных класса.

Если группа пространства $x_1 \cdots x_s$ такова, что все ее преобразования, оставляющие точку общего положения инвариантной, в то же время фиксируют все точки непрерывного, проходящего через эту точку многообразия, то мы относим эту группу к одному классу и называем ее систатической. Все остальные группы, то есть те, что не являются систатическими, мы относим к другому классу и называем асистатическими[2].

[2]Понятия «систатические и асистатические группы», а также соответствующая теория, развитая в данном тексте, восходят к Ли (Научн. об-во Христиании, 1884, Archiv for Math. том 10, Христиания, 1885 г.) Выразительные названия *систатический* (mitstehenlassend) и *асистатический* (nichtmitstehenlassend) принадлежат Энгелю. В остальном в данной работе введена терминология, принадлежащая Ли.

Используя эти понятия, мы можем сформулировать полученные результаты следующим образом.

Теорема 87. *Если независимые инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ r-параметрической группы от s переменных $x_1 \cdots x_s$ связаны $r - n$ линейными соотношениями вида:*

$$X_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

тогда как между самими $X_1 f \cdots X_n f$ никаких подобных соотношений нет, то эта группа является систатической, если среди $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ имеется меньше, чем s, друг от друга независимых; если же среди функций $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ ровно s друг от друга независимых, то эта группа — асистатическая.

§ 122

Все условия, которые были нами наложены на r-параметрическую группу $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$ в вводной части к данной главе, остаются в силе, но мы хотим добавить еще условие, что группа должна быть систатической, то есть мы полагаем, что среди $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ имеется лишь $0 \leqslant s - \varrho < s$ друг от друга независимых, которые, как и выше, могут быть обозначены через $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$.

Сначала рассмотрим случай, когда число $s - \varrho$ имеет значение нуль.

Если $s - \varrho$ обращается в нуль, то очевидно, что n равно r, то есть r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ не связаны никакими линейными соотношениями вида

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_r(x_1 \cdots x_s) \cdot X_r f = 0.$$

Отсюда следует, что число r во всяком случае не больше числа s переменных x, то есть что группа $X_r f \cdots X_r f$ является либо интранзитивной, либо в крайнем случае просто транзитивной. Поэтому группа $X_1 f \cdots X_r f$ в обоих случаях является импримитивной (ср. гл. 13, стр. 245, и гл. 20, утверждение 6, стр. 423).

Таким образом, мы видим, что систатическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ всегда импримитивна, если целое число $s - \varrho$ имеет значение нуль.

Теперь рассмотрим случай $s - \varrho > 0$.

В этом случае уравнения

$$\varphi(x_1 \cdots x_s) = \text{const}, \cdots \varphi_{s-\varrho}(x_1 \cdots x_s) = \text{const} \qquad (4)$$

дают разбиение пространства $x_1 \cdots x_s$ на $\infty^{s-\varrho}$ ϱ-мерных многообразий, а именно, как мы видели выше, разбиение, полностью определенное группой $X_1 f \cdots X_r f$ и находящееся с ней в совершенно своеобразной связи. Вполне можно предположить, что это разбиение остается инвариантным относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$; тогда отсюда следовало бы, что систатическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ и в случае $s - \varrho > 0$ является импримитивной (гл. 13, стр. 223).

Очень просто понять, что только что высказанное предположение справедливо. Действительно, согласно гл. 19, стр. 380 и далее, $r(s-\varrho)$ выражений $X_k\varphi_1 \cdots X_k\varphi_{s-\varrho}$ можно представить как функции только от $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$:

$$X_k\varphi_j = \pi_{kj}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \quad (k = 1 \cdots r;\ j = 1 \cdots s-\varrho).$$

Это означает (ср. гл. 8, стр. 155 и 159), что разбиение (4) допускает r инфинитезимальных преобразований $X_k f$, а стало быть, и вообще всю группу $X_1 f \cdots X_r f$.

Проведенные только что рассуждения доказывают, что систатическая группа пространства $x_1 \cdots x_s$ всегда импримитивна. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 88. *Любая систатическая группа является импримитивной.*

Нелишним будет доказать при помощи рассуждений в более общих терминах, что в случае $s - \varrho > 0$ разбиение (4) остается инвариантным относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Обозначим через M какое-либо из $\infty^{s-\varrho}$ ϱ-мерных многообразий (4), через P — общий символ точки многообразия M, общим символом ∞^{r-n} преобразований нашей группы, оставляющих все точки M неподвижными, пусть будет S, наконец, под T мы понимаем произвольное преобразование нашей группы.

Применив преобразование T к M, мы получим некоторое ϱ-мерное многообразие M', ∞^{ϱ} точек которого P' определены уравнением

$$(P') = (P)T.$$

Так как любая точка P относительно всех ∞^{r-n} преобразований S нашей группы остается инвариантной, то ясно, что любая точка P' сохраняет свое положение относительно ∞^{r-n} преобразований $T^{-1}ST$, которые также принадлежат нашей группе. Отсюда следует, что и M' принадлежит к $\infty^{s-\varrho}$ многообразиям (4); таким образом, доказано, что $\infty^{s-\varrho}$ многообразий (4) переставляются между собой любым преобразованием группы

$X_1 f \cdots X_r f$, так что разбиение (4) действительно остается инвариантным относительно нашей группы.

Поскольку согласно теореме 88 любая систатическая группа является импримитивной, то и, наоборот, любая примитивная группа должна быть асистатической. Однако имеются импримитивные группы, которые являются асистатическими, например четырехпараметрическая группа

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, x\frac{\partial f}{\partial y}, y\frac{\partial f}{\partial y}$$

плоскости x, y. Эта группа импримитивна, так как оставляет семейство прямых $x = \text{const.}$ инвариантным, в то же время она является асистатической, поскольку из тождеств

$$x\frac{\partial f}{\partial y} \equiv x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} \equiv y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

явствует, что относящиеся к этой группе функции $\varphi_{k\nu}$ — не что иное, как сами x и y; но они, очевидно, друг от друга независимы. О том, что существуют даже интранзитивные асистатические группы, свидетельствует следующая трехпараметрическая интранзитивная группа:

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

§ 123

Если известны r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ r-параметрической группы пространства $x_1 \cdots x_s$, то согласно теореме 87, стр. 551, можно легко определить, является данная группа систатической или нет.

Для этой цели построим матрицу:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rs}(x) \end{vmatrix},$$

и исследуем ее определители. Если все определители порядка $n+1$, но не все порядка n (в частности, не все, которые можно образовать из n верхних строк этой матрицы) обращаются в нуль тождественно, то имеют место тождества вида

$$X_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r-n), \tag{1}$$

тогда как $X_1 f \cdots X_n f$ не связаны никакими линейными соотношениями. Если тождества (1) составлены, то определяющим является число независимых среди $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$.

Но для того чтобы решить, является ли некоторая r-параметрическая группа систатической, конечные выражения для инфинитезимальных преобразований этой группы вовсе не нужны, достаточно уже того, что известны *определяющие уравнения* этой группы. Этот факт основан на том, что если определяющие уравнения группы заданы, то всегда можно задать интегрируемую без ограничений систему уравнений в полных дифференциалах, единственными интегральными функциями которой являются как раз $\varphi_{k\nu}(x)$ и функции от них. А отсюда, очевидно, следует, что можно определить число независимых среди $\varphi_{k\nu}(x)$, не зная самих $\varphi_{k\nu}(x)$.

Выведем этот важный результат.

Независимые среди уравнений

$$d\varphi_{k\nu} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \varphi_{k\nu}(x)}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n;\ \nu = 1 \cdots n) \tag{5}$$

образуют интегрируемую без ограничений систему уравнений в полных дифференциалах, единственными интегральными функциями которой являются $\varphi_{k\nu}(x)$ и функции от них (ср. гл. 5, стр. 101 и д.). Мы исходим из этой системы уравнений в полных дифференциалах.

Равенство

$$\xi_{n+j,i} - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu} \xi_{\nu i} \equiv 0 \quad (j = 1 \cdots r-n;\ i = 1 \cdots s)$$

выполняется тождественно в силу (1), следовательно, в результате дифференцирования получается

$$d\xi_{n+j,i} - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu} d\xi_{\nu i} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\nu i} d\varphi_{j\nu}$$

или, поскольку по условию не все определители порядка n матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{ns}(x) \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль

$$d\varphi_{j\pi} \equiv \sum_{i=1}^{s} \chi_{\pi i}(x_1 \cdots x_s) \left\{ d\xi_{n+j,i} - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu} d\xi_{\nu i} \right\}$$
$$(j = 1 \cdots r-n;\ \pi = 1 \cdots n).$$

Отсюда следует, что система уравнений в полных дифференциалах (5) может быть заменена следующей:

$$\sum_{\pi=1}^{s}\left\{\frac{\partial\xi_{n+j,i}}{\partial x_\pi}-\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_{j\nu}\frac{\partial\xi_{\nu i}}{\partial x_\pi}\right\}dx_\pi=0\quad(j=1\cdots r-n;\ i=1\cdots s).\tag{6}$$

Очевидно, что независимые среди уравнений (6) образуют интегрируемую без ограничений систему уравнений в полных дифференциалах, единственными интегральными функциями которой являются как раз $\varphi_{k\nu}(x)$ и функции от них.

Правда, без интегрирования невозможно составить отдельные уравнения (6), если известны лишь определяющие уравнения группы $X_1f\cdots X_rf$; однако можно заменить систему уравнений (6) другой, содержащей, помимо dx_π, только коэффициенты определяющих уравнений. К этому мы приходим следующим образом.

Под $x_1^0\cdots x_s^0$ мы понимаем точку общего положения. Согласно стр. 226 самое общее инфинитезимальное преобразование $e_1X_1f+\cdots+e_rX_rf$, разложение которого в ряд по степеням $x_i-x_i^0$ содержит члены лишь первого порядка и выше, выглядит так:

$$\sum_{j=1}^{r-n}\mathfrak{e}_j\left(X_{n+j}f-\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_{j\nu}(x_1^0\cdots x_s^0)X_\nu f\right),$$

где $\mathfrak{e}_j$ — произвольные параметры. Однако это выражение, если мы действительно выполним разложение по $x_i-x_i^0$ и при этом будем учитывать лишь члены первого порядка, принимает вид

$$\sum_{j=1}^{r-n}\mathfrak{e}_j\sum_{i,\pi=1}^{s}\left\{\left[\frac{\partial\xi_{n+j,i}}{\partial x_\pi}\right]_{x=x_0}-\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_{j\nu}(x^0)\left[\frac{\partial\xi_{\nu i}}{\partial x_\pi}\right]_{x=x_0}\right\}(x_\pi-x_\pi^0)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\cdots.\tag{7}$$

Члены первого порядка в выражении (7) мы также можем получить из определяющих уравнений этой группы, причем без интегрирования. А именно: согласно гл. 11, стр. 211 и далее, самое общее инфинитезимальное преобразование $e_1X_1f+\cdots+e_rX_rf$, разложение в ряд которого по $x_i-x_i^0$ содержит лишь члены первого порядка и выше, имеет вид

$$\sum_{i,\pi=1}^{s}g'_{\pi i}(x_\pi-x_\pi^0)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\cdots,$$

где из s^2 величин $g'_{\pi i}$ известное число, которое мы тогда обозначали через $\varepsilon_1 - \nu_1$, были произвольны, тогда как остальные $\varepsilon_1 - \nu_1$ являлись линейными однородными функциями этих $\varepsilon_1 - \nu_1$ с коэффициентами, которые можно вычислить непосредственно из определяющих уравнений. Таким образом, если исходить из определяющих уравнений, то мы получаем для выражения (7) следующее представление:

$$\sum_{j=1}^{\varepsilon_1-\nu_1} \mathfrak{e}'_j \sum_{i,\pi=1}^{s} \alpha_{j\pi i}(x_1^0 \cdots x_s^0)(x_\pi - x_\pi^0)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots, \qquad (7')$$

где $\mathfrak{e}'_j$ означают произвольные параметры, а $\alpha_{j\pi i}(x^0)$ — совершенно определенные аналитические функции от x^0, которые, как только что было сказано, могут быть вычислены из определяющих уравнений.

Поскольку (7) и (7′) являются лишь различными представлениями одних и тех же инфинитезимальных преобразований, то множители при $(x_\pi - x_\pi^0)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в обоих выражениях должны быть одинаковыми, то есть имеют место следующие s^2 соотношений:

$$\sum_{j=1}^{r-n} \mathfrak{e}_j \left[\frac{\partial \xi_{n+j,i}}{\partial x_\pi} - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu}(x)\frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi}\right]_{x=x^0} = \sum_{j=1}^{s_1-\nu_1} \mathfrak{e}'_j \alpha_{j\pi i}(x^0) \quad (i,\pi = 1 \cdots s).$$

Эти соотношения должны всегда выполняться для подходящих значений $\mathfrak{e}'_j$ при произвольно выбранных $\mathfrak{e}_j$ и для подходящих значений $\mathfrak{e}_j$ при произвольно выбранных $\mathfrak{e}'_j$.

Все это справедливо для любой точки $x_1^0 \cdots x_s^0$ общего положения, то есть и тогда, когда мы рассматриваем x^0 как переменную и заменяем на $x_1 \cdots x_s$. Следовательно, если мы выбрали $\mathfrak{e}$ совершенно произвольным образом как функции от x, то можем всегда задать $\mathfrak{e}'$ как такие функции от x, что уравнения

$$\sum_{j=1}^{r-n} \mathfrak{e}_j \left\{\frac{\partial \xi_{n+j,i}}{\partial x_\pi} - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu}(x)\frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi}\right\} = \sum_{j=1}^{s_1-\nu_1} \mathfrak{e}'_j \alpha_{j\pi i}(x) \qquad (7'')$$
$$(j,\pi = 1 \cdots s)$$

выполняются тождественно, а если мы выбрали $\mathfrak{e}'$ совершенно произвольным образом как функции от x, то мы всегда можем при подходящих функциях $\mathfrak{e}_1 \cdots \mathfrak{e}_{r-n}$ от x тождественно выполнить (7″).

Теперь, очевидно, можно заменить уравнения (6) следующими s уравнениями:

$$\sum_{j=1}^{r-n} \mathfrak{e}_j \sum_{\pi=1}^{s} \left\{ \frac{\partial \xi_{n+j,i}}{\partial x_\pi} - \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{j\nu} \frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi} \right\} dx_\pi = 0, \tag{6'}$$

но лишь при условии, что в последних $\mathfrak{e}$ рассматриваются как произвольные функции от x. Таким образом, из сказанного выше следует, что совокупность всех уравнений (6) эквивалентна совокупности всех уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{\varepsilon_1-\nu_1} \mathfrak{e}'_j \sum_{\pi=1}^{s} \alpha_{j\pi i}(x_1 \cdots x_s) dx_\pi = 0 \quad (i = 1 \cdots s),$$

в которых $\mathfrak{e}'$ трактуются как произвольные функции от x. Последние уравнения могут быть, очевидно, заменены следующими $(\varepsilon_1 - \nu_j)s$ уравнениями:

$$\sum_{\pi=1}^{s} \alpha_{j\pi i}(x_1 \cdots x_s)\, dx_\pi = 0 \quad (j = 1 \cdots \varepsilon_1 - \nu_1;\ i = 1 \cdots s). \tag{8}$$

Тем самым доказано, что системы уравнений в полных дифференциалах, (6) и (8), эквивалентны; то есть получается, что независимые среди уравнений (8) образуют интегрируемую без ограничений систему уравнений в полных дифференциалах, а именно систему, единственными интегральными функциями которой являются $\varphi_{k\nu}(x)$ и функции от них.

Поэтому мы можем утверждать следующее.

Теорема 89. *Если заданы определяющие уравнения r-параметрической группы пространства $x_1 \cdots x_s$, то определить, является ли эта группа систатической, можно следующим образом.*

Пусть $x_1^0 \cdots x_s^0$ — произвольная точка, в окрестности которой коэффициенты разрешенных определяющих уравнений ведут себя регулярно. Найдем члены нулевого и первого порядка в разложении в ряд общего инфинитезимального преобразования этой группы по степеням $x_1 - x_1^0, \cdots x_s - x_s^0$. Затем найдем члены первого порядка в общем инфинитезимальном преобразовании этой группы, не содержащем членов нулевого порядка. Эти члены будут иметь вид

$$\sum_{j=1}^{\varepsilon_1-\nu_1} \mathfrak{e}'_j \sum_{i,\pi=1}^{s} \alpha_{j\pi i}(x_1^0 \cdots x_s^0)(x_\pi - x_\pi^0) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

где $\mathfrak{e}'_j$ — означают произвольные параметры, а $\alpha_{j\pi i}(x^0)$ — совершенно определенные аналитические функции, которые вычисляются из коэффициентов определяющих уравнений без интегрирования. Теперь образуем систему уравнений в полных дифференциалах:

$$\sum_{\pi=1}^{s} \alpha_{j\pi i}(x_1 \cdots x_s)\, dx_\pi = 0 \quad (j = 1 \cdots \varepsilon_1 - \nu_1;\ i = 1 \cdots s), \tag{8}$$

и найдем число $s - \varrho$ независимых среди этих уравнений. Если $s - \varrho < s$, то группа является систатической, а если $s - \varrho = s$, то асистатической[3].

Мы можем добавить.

Утверждение 1. *$s - \varrho$ независимых дифференциальных уравнений из системы (8) образуют интегрируемую без ограничений систему с $s - \varrho$ интегральными функциями $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$. Эти интегральные функции находятся в следующем соответствии с группой $X_1 f \cdots X_r f$: если из r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ ровно n, скажем $X_1 f \cdots X_n f$, не связаны никакими линейными соотношениями, тогда как $X_{n+1} f \cdots X_r f$ выражаются линейно через $X_1 f \cdots X_n f$:*

$$X_{n+k} f \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

то все $n(r - n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x)$ можно выразить только через $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$.

Нам не нужно даже знать сами определяющие уравнения, чтобы решить, является группа систатической или нет. *Для этого нужны лишь начальные члены разложения в ряд инфинитезимального преобразования этой группы в окрестности одной единственной точки общего положения: $x_1^0 \cdots x_s^0$.* Так, если известны эти начальные члены, можно, очевидно, вычислить числовые значения $\alpha^0_{j\pi i}$, которые принимают функции $\alpha_{j\pi i}(x)$ при $x_1 = x_1^0, \cdots x_s = x_s^0$. Тогда определенное выше число $s - \varrho$ — не что иное, как число друг от друга независимых среди линейных уравнений от $dx_1 \cdots dx_s$:

$$\sum_{\pi=1}^{s} \alpha^0_{j\pi i} dx_\pi = 0 \quad (i = \varepsilon_1 - \nu_1; \quad i = 1 \cdots s).$$

[3] Ли, Archiv for Math., том 10, Христиания, 1885 г.

Система уравнений в полных дифференциалах (6) имеет очень простой геометрический смысл. А именно: как непосредственно легко видеть, она определяет все точки $x_1 + dx_1, \cdots x_s + dx_s$, бесконечно близкие с точкой $x_1 \cdots x_s$, остающиеся инвариантными при всех преобразованиях нашей группы, оставляющих точку $x_1 \cdots x_s$ неподвижной. В этом заключается внутренняя причина того, что $\varphi_{k\nu}(x)$ и их функции являются единственными интегральными функциями системы (6) или (8), так как уравнения

$$\varphi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \quad (k = 1 \cdots r - n; \quad \nu = 1 \cdots n)$$

определяют все точки $y_1 \cdots y_s$, остающиеся вместе с точкой $x_1 \cdots x_s$ инвариантными.

§ 124

Мы выяснили, что r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$ может быть систатической или асистатической в зависимости от того, сколько имеется определенных на стр. 367 и 545 функций $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$: ровно s или меньше, чем s. При этом согласно теореме 67, гл. 20, стр. 416, инфинитезимальное преобразование Zf, перестановочное со всеми $X_k f$, существует тогда и только тогда, когда число независимых среди функций $\varphi_{k\nu}(x)$ меньше s. Стало быть, мы можем также сформулировать следующее

Утверждение 2. *r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$ является систатической тогда и только тогда, когда существует инфинитезимальное преобразование Zf, перестановочное со всеми $X_k f$; если такого инфинитезимального преобразования нет, то группа $X_1 f \cdots X_r f$ будет асистатической*[4].

Кроме того, поскольку всякое выделенное инфинитезимальное преобразование группы перестановочно со всеми другими ее инфинитезимальными преобразованиями, то мы имеем

Утверждение 3. *Любая группа, содержащая одно или несколько выделенных инфинитезимальных преобразований, является систатической.*

Для таких групп уже из их структуры видно, что они систатические.

Вспомнив еще, наконец, что группа, присоединенная к группе без выделенных инфинитезимальных преобразований, содержит r существенных параметров (ср. теорему 49, стр. 308), мы видим, что справедливо следующее.

[4] Ли, Archiv for Math., том 10, стр. 377, Христиания, 1885 г.

Утверждение 4. *Группа, присоединенная к асистатической, всегда будет r-параметрической.*

Утверждения 2 и 4 являются обобщениями утверждений 1 и 2 в главе 16 (стр. 308 и далее), о которых в свое время упоминалось.

Еще в главе 20 мы могли бы использовать полученные там результаты для деления всех групп на два класса; к одному классу мы бы причислили тогда всякую r-параметрическую группу $X_1 f \cdots X_r f$, для которой имеется хотя бы одно перестановочное со всеми $X_k f$ инфинитезимальное преобразование, ко второй — все остальные группы. Согласно вышесказанному, ясно, что это разделение совпало бы с нашим теперешним делением групп на систатические и асистатические; первый класс состоял бы из всех систатических, второй — из всех асистатических групп. Мы хотим в последующем объяснить это обстоятельство при помощи более общих рассуждений и в то же время вывести ряд новых важных результатов.

Пусть Θ — преобразование, перестановочное со всеми преобразованиями заданной r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$, кроме того, пусть S — общий символ всех преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, оставляющих какую-либо точку P общего положения пространства $x_1 \cdots x_s$ инвариантной.

Если P при выполнении преобразования Θ переходит в P_1, то $\Theta^{-1} S \Theta$, очевидно, является общим символом всех преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, оставляющих точку P_1 инвариантной. А поскольку Θ перестановочна со всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$, то совокупность всех преобразований $\Theta^{-1} S \Theta$ идентична совокупности всех преобразований S, то есть мы видим, что все преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$, фиксирующие точку P, оставляют также и точку P_1 неподвижной.

Применим это к случаю, когда имеется непрерывное семейство преобразований Θ, перестановочных со всеми преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$.

Так как P — точка общего положения, то она принимает при выполнении преобразований Θ непрерывную последовательность различных положений. Но любое из этих положений, как мы только что видели, остается при всех преобразованиях S инвариантным, следовательно, группа $X_1 f \cdots X_r f$ является систатической.

Тем самым доказано, что r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$ во всяком случае является систатической, если имеется инфинитезимальное преобразование, перестановочное со всеми $X_k f$. Остается еще лишь показать, что верно также и обратное: что для любой систатической группы $X_1 f \cdots X_r f$ можно задать непрерывное семейство преобразований, перестановочных со всеми преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$.

Итак, представим себе r-параметрическую систатическую группу $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$. Опишем конструкцию, дающую бесконечно много преобразований, являющихся перестановочными со всеми преобразованиями этой группы.

Всякое преобразование Θ, перестановочное со всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$, переводит любую точку P пространства в точку P_1, которая допускает точно такие же преобразования этой группы, что и точка P; это мы показали выше. *Поэтому выберем какие-либо две точки P и P_1, допускающие одни и те же преобразования нашей группы, и попробуем найти преобразование Θ, являющееся перестановочным со всеми преобразованиями нашей группы и, кроме того, переводящее P в P_1.*

Пусть P' — точка, в которую можно перевести P при помощи преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$; кроме того, пусть S, как и раньше, общий символ всех преобразований этой группы, оставляющих P, а значит, и P_1 инвариантными. Тогда ST — общий символ всех преобразований нашей группы, переводящих P в P' (гл. 14, утверждение 1, стр. 253). Очевидно, что P при всех этих преобразованиях ST принимает одно и то же положение, поскольку

$$(P_1)ST = (P_1)T.$$

Теперь мы, предполагая существование *одного* преобразования Θ с требуемым свойством, можем легко видеть, что любая точка $P' = (P)T$ принимает при всех возможных Θ совершенно определенное положение; это непосредственно следует из уравнений

$$(P')\Theta = (P)T\Theta = (P)\Theta T = (P_1)T.$$

Поэтому если T — произвольное преобразование нашей группы, то точка $(P)T$ при любом преобразовании Θ, если такое вообще существует, принимает новое положение $(P_1)T$.

Добавим к этому, что таким образом мы не получим переопределенности нового положения точки P'. Так, если в последних уравнениях заменить преобразование T другим произвольным преобразованием группы $X_1 f \cdots X_r f$, которое также переводит P в P', то есть записать ST вместо T, то снова получится

$$(P')\Theta = (P)ST\Theta = (P)\Theta ST = (P_1)ST = (P_1)T.$$

Сначала рассмотрим специальный случай, когда систатическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ *транзитивна.*

Если группа $X_1 f \cdots X_r f$ транзитивна, то точкой $(P)T$ при подходящем выборе T можно накрыть любую точку пространства; поэтому если

мы поставим в соответствие любой точке $(P)T$ пространства точку $(P_1)T$, то зададим тем самым совершенно определенное преобразование Θ'. Если нам удастся еще доказать, что Θ' перестановочно со всеми преобразованиями нашей группы, то станет ясно, что Θ' имеет все свойства, которые мы требовали от преобразования Θ, и является единственным преобразованием Θ, которое вообще имеется.

Увидеть, что Θ' перестановочно со всеми преобразованиями нашей группы, можно довольно просто. Мы имеем

$$(P)T\Theta' = (P_1)T = (P)\Theta'T,$$

где T — произвольное преобразование нашей группы. Поэтому если под T также понимать произвольное преобразование нашей группы, то мы получим

$$(P)T\mathsf{T}\Theta' = (P)\Theta'T\mathsf{T} = (P)T\Theta'\mathsf{T},$$

таким образом, преобразование $\mathsf{T}\Theta'\mathsf{T}^{-1}\Theta'^{-1}$ оставляет точку $(P)T$, то есть любую точку пространства, инвариантной. Отсюда следует, что $\mathsf{T}\Theta'\mathsf{T}^{-1}\Theta'^{-1}$ — тождественное преобразование, то есть Θ действительно перестановочно со всеми преобразованиями нашей группы.

Поэтому если систатическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ транзитивна, то всякой паре точек P, P_1 с определенным выше свойством соответствует одно и только одно преобразование, перестановочное со всеми преобразованиями этой группы. Если выбирать эту пару точек всеми возможными способами, то мы получим бесконечно много таких преобразований; сколько — легко определить: если всякий раз ∞^ϱ различных точек при всех преобразованиях группы, оставляющих произвольно выбранную точку инвариантной, остаются неподвижными, то имеется в точности ∞^ϱ различных преобразований, перестановочных со всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$. Это согласуется с теоремой 67, стр. 416, так как благодаря только что наложенному условию среди $n(r-n)$ функций $\varphi_{k\nu}(x)$ имеется в точности $s - \varrho$ друг от друга независимых, то есть имеется ровно ϱ независимых преобразований $Z_1 f \cdots Z_\varrho f$, перестановочных со всеми $X_k f$.

Поэтому мы можем сформулировать следующее

Утверждение 5. *Если r-параметрическая систатическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$ транзитивна, а P и P_1 — две точки, допускающие одни и те же инфинитезимальные преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$, то имеется одно и только одно преобразование Θ, перестановочное со всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$ и переводящее P в P_1. Если под T понимать общий символ преобразования группы*

$X_1 f \cdots X_r f$, то Θ можно также определить как такое преобразование, которое переводит точку $(P)T$ в точку $(P_1)T$. Если всякий раз ровно ∞^ϱ различных точек допускают одни и те же инфинитезимальные преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$, то имеется ровно ∞^ϱ различных преобразований, перестановочных со всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$.

Рассуждения о просто транзитивных группах, проведенные нами в гл. 20, стр. 431–436, очевидно, входят в только что проведенные рассуждения в качестве специального случая.

Теперь обратимся к случаю, когда r-параметрическая систатическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ *интранзитивна*, но будем краткими.

Если систатическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ — интранзитивна, то преобразование, переводящее точку P в определенную на стр. 560 точку P_1 и перестановочное со всеми преобразованиями нашей группы, — не единственное, напротив, имеется бесконечно много различных преобразований с таким свойством. Мы укажем, как найти такие преобразования.

Интранзитивная систатическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ определяет несколько инвариантных разбиений пространства $x_1 \cdots x_s$.

Первое разбиение представлено $s - \varrho < s$ уравнениями

$$\varphi_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const}, \cdots \varphi_{s-\varrho}(x_1 \cdots x_s) = \text{const}. \qquad \text{(a)}$$

Второе определяют некоторые $s - n > 0$ независимых решений $u_1(x) \cdots u_{s-n}(x)$ n-параметрической полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$; аналитическое выражение для этого разбиения таково:

$$u_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const}, \cdots u_{s-n}(x_1 \cdots x_s)) = \text{const}. \qquad \text{(b)}$$

В дальнейшем мы всегда будем понимать под M_ϱ одно из $\infty^{s-\varrho}$ ϱ-мерных многообразий (a), а под M_n — одно из ∞^{s-n} n-мерных многообразий (b).

Среди решений полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ имеется несколько, скажем $s - q \leqslant s - n$, выражающихся только через $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$; мы полагаем, что такими решениями являются $u_1(x) \cdots u_{s-q}(x)$, то есть что имеют место $s - q \leqslant s - \varrho$ соотношений вида

$$u_1(x) = \mathfrak{U}\big(\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)\big), \cdots u_{s-q}(x) = \mathfrak{U}_{s-q}\big(\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)\big),$$

и что всякое решение полной системы $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, которое выражается только через $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$, является функцией от $u_1(x) \cdots u_{s-q}(x)$ (ср. гл. 19, стр. 382). Тогда $s - q$ уравнений

$$u_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const}, \cdots u_{s-n}(x_1 \cdots x_s) = \text{const}. \qquad \text{(c)}$$

представляют третье инвариантное относительно группы $X_1 f \cdots X_r f$ разбиение. Отдельные многообразия этого разбиения очевидно являются наименьшими многообразиями, состоящими как из M_ϱ, так и из M_n (ср. гл. 8, стр. 165). Под $\mathfrak{M}_q$ мы будем всегда в дальнейшем понимать одно из ∞^{s-q} q-мерных многообразий (c).

И наконец, четвертое инвариантное разбиение определено многообразиями, являющимися пересечениями M_ϱ и M_n (ср. гл. 8, стр. 161), оно определяется, очевидно, $s - \varrho + q - n$ уравнениями:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \text{const}, & \cdots \varphi_{s-\varrho}(x) = \text{const}, \\ u_{s-q+1}(x) = \text{const}, & \cdots u_{s-n}(x) = \text{const}, \end{cases} \tag{d}$$

которые согласно гл. 19, стр. 382, друг от друга независимы. Мы будем в дальнейшем под $N_{\varrho+n-q}$ всегда понимать $\infty^{s-\varrho+q-n}$ $(\varrho+n-q)$-мерных многообразий (d).

Чтобы теперь найти преобразование Θ, перестановочное со всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$, мы поступим следующим образом.

Внутри каждого $\mathfrak{M}_q$ поставим в соответствие каждому M_n другое M_n, которое обозначим M'_n, а именно установим это соответствие согласно произвольному аналитическому закону. Затем выберем на каждом из ∞^{s-n} многообразий M_n произвольную точку P и сопоставим каждой из выбранных ∞^{s-n} точек произвольную точку P_1 на том $N_{\varrho+n-q}$, по которому M_ϱ, проходящее через эту точку, пересекается с M'_n, соответствующим проходящему через эту точку M_n.

Существует одно и только одно преобразование Θ', переводящее любую из ∞^{s-n} выбранных точек P в соответствующую ей точку P_1. Это преобразование Θ определено символическим уравнением

$$(P)T\Theta = (P_1)T,$$

в котором P — это общий символ выбранных ∞^{s-n} точек, а T — общий символ ∞^r преобразований нашей группы.

Легко убедиться, что только что определенное преобразование Θ перестановочно со всеми преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$, и что все преобразования Θ с этим свойством получаются, если в определении Θ самым общим образом выбрать содержащиеся в этом определении произвольные элементы.

Нам не надо задерживаться на том, чтобы это доказывать; заметим лишь следующее: если составить аналитическое выражение преобразования Θ, то сразу видно, что число встречающихся в этом выражении произвольных функций и число встречающихся в этих функциях аргументов согласуются с теор. 67, стр. 416.

Наконец, еще одно замечание, относящееся как к интранзитивным, так и к транзитивным группам: если многообразие

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) = \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \quad (k = 1 \cdots r-n;\ \nu = 1 \cdots n)$$

разбивается для всякой системы значений $x_1^0 \cdots x_s^0$ на несколько дискретных многообразий, то и совокупность всех преобразований, перестановочных с преобразованиями группы $X_1 f \cdots X_r f$, разбивается на несколько дискретных семейств.

§ 125

Функции $\varphi_{k\nu}(x)$, определяющие, является группа систатической или нет, играли большую роль еще в главе о подобии r-параметрических групп. Здесь мы хотим продолжить и в определенном смысле дополнить прежние рассуждения.

Если заданы две r-параметрические группы от одинакового числа переменных:

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Y_k f = \sum_{i=1}^{s} \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

и при этом имеют место соотношения

$$(X_i\, X_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} X_\sigma f \quad \text{и} \quad (Y_i Y_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} Y_\sigma f$$

в обоих случаях с теми же константами $c_{ik\sigma}$, то согласно гл. 19, стр. 391 и далее, преобразование

$$y_\nu = \Phi_\nu(x_1 \cdots x_s) \quad (\nu = 1 \cdots s),$$

переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно, существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: если между $X_1 f \cdots X_r f$ имеют место соотношения вида

$$X_{n+k} f = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

тогда как $X_1 f \cdots X_n f$ не связаны линейными соотношениями, то между $Y_1 f \cdots Y_r f$ имеют место аналогичные соотношения:

$$Y_{n+k} f = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

причем $Y_1 f \cdots Y_n f$ не должны быть связаны линейными соотношениями; кроме того, $n(r-n)$ уравнений

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) = \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \quad (k = 1 \cdots r - n;\ \nu = 1 \cdots n) \qquad \text{(e)}$$

не должны ни противоречить друг другу, ни давать соотношений только между x или y.

Если среди функций $\varphi_{k\nu}(x)$ было меньше, чем s, друг от друга независимых, то нахождение преобразования, переводящего $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно, требовало некоторого интегрирования; когда же независимых функций среди $\varphi_{k\nu}(x)$ было ровно s, то уравнения (e) сами представляли преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$, причем самое общее преобразование такого рода. Поэтому если мы вспомним, что в последнем случае группа $X_1 f \cdots X_r f$ и, разумеется, также группа $Y_1 f \cdots Y_r f$ являются асистатическими, то получим

Утверждение 6. *Если известно, что r-параметрические асистатические группы от s переменных подобны, и если в каждой из этих групп уже выбраны такие независимые инфинитезимальные преобразования*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{s} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

и

$$Y_k f = \sum_{i=1}^{r} \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

что существует преобразование $y_1 = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$, то самое общее преобразование, осуществляющее этот переход, можно задать без интегрирования; это самое общее преобразование не содержит ни произвольных функций, ни произвольных параметров.

Отсюда следует, что можно без интегрирования найти самое общее преобразование, которое вообще переводит асистатическую группу $X_1 f \cdots X_r f$ в подобную ей группу $Y_1 f \cdots Y_r f$. Для этого необходимо действовать следующим образом.

В группе $Y_1 f \cdots Y_r f$ самым общим образом находятся такие независимые инфинитезимальные преобразования

$$\mathsf{Y}_j f = \sum_{k=1}^{r} \overline{g}_{jk} Y_k f \quad (j = 1 \cdots r),$$

что, во-первых, имеют место соотношения

$$(\mathsf{Y}_i \mathsf{Y}_k) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{ik\sigma} \mathsf{Y}_\sigma f$$

и, во-вторых, существует преобразование, переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в $Y_1 f \cdots Y_r f$ соответственно. Тогда, согласно вышесказанному, можно без интегрирования найти самое общее преобразование, осуществляющее такой переход, и в то же время получить самое общее преобразование, превращающее группу $X_1 f \cdots X_r f$ в группу $Y_1 f \cdots Y_r f$. Очевидно, что это преобразование содержит лишь произвольные параметры.

Если, в частности, допустить, чтобы группа $Y_1 f \cdots Y_r f$ совпала с группой $X_1 f \cdots X_r f$, то указанным образом можно получить все преобразования, оставляющие группу $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантной. Совокупность всех этих преобразований образует согласно гл. 19, стр. 399, группу, причем, в нашем случае, очевидно, конечную группу. Отсюда следует

Теорема 90. *Наибольшая группа, в которой содержится асистатическая r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_s$ в качестве инвариантной подгруппы, имеет лишь конечное число параметров. Конечные уравнения этой группы можно найти без интегрирования, если заданы инфинитезимальные преобразования группы $X_1 f \cdots X_r f$*[5].

Важно то, что даже конечные уравнения асистатической группы $X_1 f \cdots X_r f$ можно найти без интегрирования, если известны ее инфинитезимальные преобразования.

Надо просто составить конечные уравнения:

$$e'_k = \sum_{j=1}^{r} \psi_{kj}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r) \cdot e_j \quad (k = 1 \cdots r), \tag{f}$$

группы, присоединенной к группе $X_1 f \cdots X_r f$; для этого требуются лишь выполнимые операции (ср. гл. 16, стр. 273). Тогда если искомые конечные уравнения группы $X_1 f \cdots X_r f$ имеют вид $x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)$, то согласно теор. 48, стр. 305, инфинитезимальное преобразование $X_k f$ при введении новых переменных $x'_i = f_i(x, \varepsilon)$ принимает вид

$$X_k f = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r) \cdot X'_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

где, как обычно, положено

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x'_1 \cdots x'_s) \frac{\partial f}{\partial x'_i} = X'_k f.$$

[5] Ли, Archiv for Math., том 10, стр. 378, Христиания, 1885 г.

Так как группа $X_1 f \cdots X_r f$ — асистатическая, то имеется совершенно определенное преобразование между x и x', переводящее $X_1 f \cdots X_r f$ в

$$\sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r) \cdot X'_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

соответственно. Вычисляя это преобразование по прежним правилам, мы находим искомые уравнения $x'_i = f_i(x, \varepsilon)$.

В частности, если уравнения (f) являются канонической формой присоединенной группы (ср. гл. 9, стр. 171), то конечные уравнения группы $X_1 f \cdots X_r f$ тоже, очевидно, получаются в канонической форме. Таким, образом, мы имеем

Утверждение 7. *Если известны инфинитезимальные преобразования асистатической группы пространства $x_1 \cdots x_s$, то всегда можно найти конечные уравнения этой группы при помощи выполнимых операций, причем в канонической форме.*

Существуют более общие случаи, в которых конечные уравнения r-параметрической группы, инфинитезимальные преобразования которой $X_1 f \cdots X_r f$ известны, находятся без интегрирования. Однако мы не будем здесь подробно рассматривать такие вопросы, а лишь заметим, что нахождение конечных уравнений будет среди прочего успешным, если не существует инфинитезимальных преобразований, перестановочных со всеми $X_k f$, которые бы не принадлежали группе $X_1 f \cdots X_r f$.

§ 126

Пусть $X_1 f \cdots X_r f$, или кратко G_r, — r-параметрическая *систатическая* группа пространства $x_1 \cdots x_s$ и G_{r-n} — такая $(r-n)$-параметрическая подгруппа группы G_r, которая соответствует определенной точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ общего положения. Многообразие

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) = \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \quad (k = 1 \cdots r-n; r = 1 \cdots n),$$

состоящее из всех инвариантных относительно G_{r-n} точек, обозначим через M.

Поскольку G_{r-n} фиксирует все точки M, то она, разумеется, оставляет само M инвариантным; однако возможно, что G_r содержит также другие преобразования, оставляющие многообразие M инвариантным, не фиксируя всех его точек. Предположим, что наибольшая подгруппа группы G_r,

оставляющая M инвариантным, содержит ровно $r-l$ параметров, и обозначим эту подгруппу G_{r-l}.

Разумеется, G_{r-n} либо совпадает с G_{r-l}, либо содержится в ней как подгруппа. Последнее происходит всегда, когда G_r транзитивна; а именно, в этом случае точка $x_1^0 \cdots x_s^0$ может быть переведена подходящим преобразованием во все точки M, а поскольку всякое преобразование группы G_r, переводящее $x_1^0 \cdots x_s^0$ в точку из M, очевидно, оставляет многообразие M инвариантным, то G_r содержит непрерывное семейство преобразований, оставляющих M инвариантным, не фиксируя всех точек M; таким образом, в случае транзитивной группы G_r число $r-l$ заведомо больше, чем $r-n$. Если же G_r интранзитивна, то вполне возможно, что все ее преобразования, оставляющие M инвариантным, также фиксируют все его точки, то есть что $r-l=r-n$. Это видно на примере трехпараметрической интранзитивной систатической группы

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad x_2^2\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

плоскости x_1, x_2.

Легко видеть, что G_{r-n} в G_{r-l} инвариантна. Действительно, G_{r-n} порождается всеми инфинитезимальными преобразованиями, оставляющими все точки многообразия M неподвижными; но эти инфинитезимальные преобразования порождают согласно утверждению 7, гл. 17, стр. 341 инвариантную подгруппу группы G_{r-n}. Итак, мы имеем

Утверждение 8. *Пусть $X_1 f \cdots X_r f$, или G_r, — r-параметрическая систатическая группа пространства $x_1 \cdots x_s$, пусть, кроме того, P — точка общего положения и, наконец, M — многообразие тех же точек, остающихся инвариантными относительно всех преобразований группы G_r, что и P. Тогда наибольшая подгруппа группы G_r, оставляющая P инвариантной, либо идентична наибольшей подгруппе, оставляющей M неподвижным, либо содержится в ней в качестве инвариантной подгруппы. Первый случай возможен лишь тогда, когда G_r интранзитивна; если она транзитивна, то имеет место второй случай.*

С другой стороны, если известна какая-либо r-параметрическая группа пространства $x_1 \cdots x_s$ и известно, что ее наибольшая подгруппа G_{r-n}, оставляющая какую-либо точку P общего положения неподвижной, является инвариантной в еще большей подгруппе G_{r-h} с $r-h>r-n$ параметрами, то можно заключить, что G_r относится к классу систатических групп.

Действительно, точка P допускает ровно $r-n$ независимых инфинитезимальных преобразований группы G_{r-h} и принимает, таким образом, (гл. 23, теор. 85, стр. 531) при всех ∞^{r-h} преобразованиях группы G_{r-h} ровно ∞^{n-h} различных положений, где число $n-h$ при наложенных условиях больше либо равно 1. Но тогда, поскольку G_{r-n} в G_{r-h} инвариантна, каждому из этих ∞^{n-h} положений точки P соответствует та же самая $(r-n)$-параметрическая подгруппа группы G_r, что и для точки P. Это значит, что G_r действительно является систатической. Следовательно, имеет место

Утверждение 9. *Если r-параметрическая группа G_r пространства $x_1 \cdots x_s$ такова, что ее наибольшая подгруппа G_{r-n}, оставляющая какую-либо точку общего положения инвариантной, инвариантна также в еще большей подгруппе группы G_r или вообще в самой G_r, то группа G_r относится к классу систатических групп.*

Из этого утверждения непосредственно следует, что для r-параметрической асистатической группы пространства $x_1 \cdots x_s$ подгруппа, соответствующая точке общего положения, не является инвариантной ни в самой G_r, ни в одной большей ее подгруппе. Если же G_r такова, что подгруппа, соответствующая точке общего положения, не является инвариантной ни в одной большей подгруппе, то она не обязательно будет асистатической, это лишь тогда неибежно, когда она одновременно является также и транзитивной; это очевидно следует из утверждения 8, стр. 569. Поэтому мы можем сформулировать

Утверждение 10. *Транзитивная r-параметрическая группа G_r пространства $x_1 \cdots x_s$ является асистатической тогда и только тогда, когда подгруппа, соответствующая точке общего положения, не является инвариантной ни в одной большей подгруппе.*

В главе 22, теорема 79, стр. 443, мы дали метод описания всех транзитивных групп, равносоставленных с заданной r-параметрической группой Γ. Теперь мы можем так конкретизировать этот метод, что он будет, в частности, давать все *транзитивные асистатические* группы, равносоставленные с группой Γ.

Найдем все подгруппы группы Γ, не содержащие ни одной подгруппы, инвариантной в Γ, и не являющиеся инвариантными ни в одной большей подгруппе группы Γ. Каждая из этих подгрупп, если следовать правилам теоремы 78, дает транзитивную асистатическую группу, равносоставленную с Γ, и именно таким образом находятся все транзитивные асистатические группы с подобной структурой.

На основании утверждения 10 можно ответить на вопрос, является заданная транзитивная группа систатической или асистатической. Можно сформулировать утверждение, похожее на то, которое позволяло ответить на вопрос, является заданная группа примитивной или нет.

Пусть r-параметрическая транзитивная группа G_r пространства $x_1 \cdots x_s$ импримитивна, и пусть

$$u_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const}, \cdots u_{s-m}(x_1 \cdots x_s) = \text{const} \quad (0 < m < s)$$

— инвариантное относительно этой группы разбиение пространства на ∞^{s-m} m-мерных многообразий.

Поскольку G_r — транзитивна, то все ее преобразования, оставляющие точку $x_1^0 \cdots x_s^0$ общего положения инвариантной, образуют $(r-s)$-параметрическую подгруппу G_{r-s}, с другой стороны, все ее преобразования, оставляющие инвариантным m-мерное многообразие

$$u_1(x_1 \cdots x_s) = u_1(x^0), \cdots u_{s-m}(x_1 \cdots x_s) = u_{s-m}(x^0),$$

образуют $(r-s+m)$-параметрическую подгруппу G_{r-s+m} (ср. гл. 23, стр. 531). При этом, разумеется, G_{r-s} входит в качестве подгруппы в группу G_{r-s+m}, которая в свою очередь является подгруппой группы G_r.

Теперь предположим, что, наоборот, задана какая-либо r-параметрическая транзитивная группа $\mathfrak{G}_r$ пространства $x_1 \cdots x_s$, и что $(r-s)$-параметрическая подгруппа $\mathfrak{G}_{r-s}$ группы $\mathfrak{G}_r$, соответствующая точке P общего положения, содержится в большей подгруппе:

$$\mathfrak{G}_{r-s+h} \quad (r-s < r-s+h < r).$$

Если к P применить все преобразования $\mathfrak{G}_{r-s+h}$, то эта точка примет ∞^h различных положений. Эти ∞^h положений образуют h-мерное многообразие M, остающееся инвариантным относительно $\mathfrak{G}_{r-s+h}$ (ср. гл. 23, стр. 531). Если, наконец, подействовать на M всеми преобразованиями, то мы получим ∞^{s-h} различных h-мерных многообразий, определяющих разбиение пространства $x_1 \cdots x_s$.

Действительно, поскольку многообразие M остается инвариантным относительно $\mathfrak{G}_{r-s+h}$, то оно принимает при ∞^r преобразованиях группы $\mathfrak{G}_r$ максимум ∞^{s-h} различных положений (ср. гл. 23, стр. 531), а с другой стороны, по причине транзитивности $\mathfrak{G}_r$ оно принимает минимум ∞^{s-h} положений, то есть относительно $\mathfrak{G}_r$ получается именно ∞^{s-h} различных положений, заполняющих пространство и потому определяющих его разбиение. То, что это разбиение остается инвариантным относительно $\mathfrak{G}_r$, следует из теоремы 85, стр. 531.

Отсюда следует, что группа $\mathfrak{G}_r$ при наложенных условиях является импримитивной. Соединив этот результат с полученным выше, мы, прежде всего, получим следующую теорему.

Теорема 91. *r-параметрическая транзитивная группа G_r пространства $x_1 \cdots x_s$ примитивна тогда и только тогда, когда $(r-s)$-параметрическая подгруппа G_{r-s}, сопоставленная какой-либо точке общего положения, не содержится ни в какой большей подгруппе.*

Но, кроме этого, мы, очевидно, получаем еще и метод нахождения всех возможных разбиений пространства $x_1 \cdots x_s$, остающихся инвариантными относительно заданной транзитивной группы этого пространства.

Теорема 92. *Если задана r-параметрическая транзитивная группа G_r пространства $x_1 \cdots x_s$, то все возможные инвариантные относительно этой группы разбиения находятся следующим образом.*

Сначала найдем $(r-s)$-параметрическую подгруппу G_{r-s} группы G_r, относительно которой некоторая точка P, не лежащая ни на одном инвариантном относительно G_r многообразии, остается инвариантной. Затем найдем все подгруппы группы G_r, содержащие G_{r-s}. Если G_{r-s+h} — одна из этих групп, то применим к P все преобразования из G_{r-s+h}; при этом точка P будет принимать ∞^h различных положений, образующих h-мерное многообразие M; если теперь подействовать на M всеми преобразованиями группы G_r, то M принимает ∞^{s-h} различных положений, определяющих инвариантное разбиение пространства относительно G_r. Если таким образом поступить со всеми подгруппами G_r, в которые входит G_{r-s}, то мы получим все инвариантные относительно G_r разбиения.

Теперь мы можем также указать, как конкретизировать изложенный в гл. 22, теорема 79, метод нахождения всех примитивных групп, равносоставленных с заданной r-параметрической группой Γ.

Поскольку все примитивные группы транзитивны, то надо действовать следующим образом.

Находим все подгруппы группы Γ, не содержащие никаких инвариантных в Γ подгрупп и не входящие ни в какую бóльшую подгруппу группы Γ. Каждая из этих подгрупп, если действовать согласно указаниям теоремы 78, дает примитивную группу, равносоставленную с Γ, причем таким образом находятся все подобные примитивные группы.

Теорема 92 показывает, что все инвариантные относительно *транзитивной* группы разбиения можно найти без интегрирования, если известны конечные уравнения этой группы. То же самое верно и для интранзитивных групп, но чтобы это понять, необходимы довольно долгие рассуждения, излагать здесь которые не представляется целесообразным.

Глава 25

Дифференциальные инварианты

Предположим, что нам дано преобразование от n переменных:

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n), \tag{1}$$

и что это преобразование применено к системе из $n - q$ независимых уравнений

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q). \tag{2}$$

Мы получаем, таким образом, новую систему уравнений

$$\overline{\Omega}(y_1 \cdots y_n) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{2'}$$

от y.

Тогда в силу уравнений (2) можно представить $n - q$ из переменных $x_1 \cdots x_n$ как функции от q остальных, и эти $n - q$ имеют, конечно, определенные производные p_1, $p_2 \cdots$ по q остальным. С другой стороны, в силу уравнений (2') можно представить $n - q$ из переменных $y_1 \cdots y_n$ как функции от q остальных, и эти $n - q$ имеют, в свою очередь, определенные производные p'_1, $p'_2 \cdots$ по q остальным.

Между этими двумя определенными описанным способом наборами производных существует некоторая связь, которая, по существу, не зависит от вида $n-q$ соотношений (2). По ходу этой главы мы подробно рассмотрим эту связь, а здесь лишь напомним, что производные p' порядка от 1 до m можно представить как функции от $x_1 \cdots x_n$ и производных p порядка от 1 до m, тогда как p выражаются как функции от $x'_1 \cdots x'_n$ и p'. Отсюда следует, что из преобразования (1) можно вывести новое преобразование, которое, помимо x, преобразует также производные порядка от 1 до m. Мы будем говорить, что *это новое преобразование получается путем продолжения преобразования* (1).

Очевидно, что продолжение преобразования (1) может происходить самыми различными способами, поскольку мы можем по своему усмотрению решить, сколько и какие из переменных $x_1 \cdots x_n$ рассматриваются как

функции от остальных. Можно даже еще увеличить число возможностей, добавив вспомогательные переменные $t_1, t_2 \cdots$, которые совсем не преобразуются преобразованием (1), то есть добавив к уравнениям преобразования (1) тождественное преобразование от вспомогательных переменных t_1, $t_2 \cdots$.

Если задана r-параметрическая группа, то мы можем продолжить все ее ∞^r преобразований и получим, таким образом, ∞^r продолженных преобразований; последние, как мы увидим, образуют, в свою очередь, r-параметрическую группу, которая является равносоставленной с исходной группой.

§ 127

Сначала рассмотрим один очень простой вид продолжения. В преобразовании

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{1}$$

рассмотрим переменные $x_1 \cdots x_n$ как функции вспомогательной переменной t, которая вообще не преобразуется преобразованием (1). Тогда и $y_1 \cdots y_n$ понимаются как функции от t; поэтому если положить

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i^{(1)}, \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i^{(1)},$$

то в результате дифференцирования (1) по t получается

$$y_i^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} \quad (i = 1 \cdots n). \tag{3}$$

Взяв (1) и (3) вместе, получаем преобразование от $2n$ переменных, x_i и $x_i^{(1)}$.

Преобразование (1), (3) является в некотором смысле самым простым преобразованием, получающимся из (1) путем продолжения.

Если мы применим вышеупомянутое специальное продолжение ко всем ∞^r преобразованиям r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ или:

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n), \tag{4}$$

то получим ∞^r продолженных преобразований, которые имеют вид

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r), \; y_i^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,a)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} \quad (i = 1 \cdots n). \tag{5}$$

Можно легко доказать, что уравнения (5) представляют r-параметрическую группу от $2n$ переменных x_i, $x_i^{(1)}$.

В самом деле, уравнения

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad \text{и} \quad z_i = f_i(y_1 \cdots y_n, b_1 \cdots b_r)$$

по условию имеют следствием

$$z_i = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r),$$

где c зависят только от a и b. Таким образом, из

$$y_i^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,a)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} \quad \text{и} \quad z_j^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_j(y,b)}{\partial y_i} y_i^{(1)}$$

в результате исключения $y_i^{(1)}$ мы получаем

$$\begin{aligned} z_j^{(1)} &= \sum_{i,\nu=1}^{n} \frac{\partial f_j(y,b)}{\partial y_i} \frac{\partial f_i(x,a)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_j(y,b)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_j(x,c)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)}, \end{aligned}$$

и тем самым необходимое доказательство выполнено.

Кроме того, из сказанного следует, что эта новая группа имеет те же параметры, что и исходная:

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r).$$

Новая группа:

$$y_k = f_k(x,a), \quad y_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} x_i^{(1)} \quad (k = 1 \cdots n), \tag{5}$$

являющаяся первым примером продолженной группы, имеет очень простой геометрический смысл.

А именно: если $x_1 \cdots x_n$ толковать как обычные координаты точек n-мерного пространства, то $2n$ величин $x_1 \cdots x_n, x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)}$ могут быть истолкованы как определяющие компоненты направления, проходящего через точку $x_1 \cdots x_n$, то есть как компоненты, определяющие *линейный элемент*;

при этом $x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)}$ — однородные координаты в области ∞^{n-1} направлений, проходящих через точку $x_1 \cdots x_n$.

Новая группа (5) *от переменных* $x, x^{(1)}$ *указывает, каким образом линейные элементы пространства* $x_1 \cdots x_n$ *переставляются между собой исходной группой* $y = f_i(x, a)$.

Поскольку группа $y_i = f_i(x, a)$ порождена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1 f \cdots X_r f$, то ее конечные уравнения в канонической форме таковы:

$$y_k = x_k + \sum_{j=1}^{r} e_j \xi_{jk} + \cdots \qquad (k = 1 \cdots n).$$

Возьмем эту запись группы $y_i = f_i(x, a)$ за основу, чтобы образовать продолженную группу (5), тогда уравнения последней принимают вид

$$y_k = x_k + \sum_{j=1}^{r} e_j \xi_{jk} + \cdots, \quad y_k^{(1)} = x_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{r} e_j \xi_{jk}^{(1)} + \cdots \qquad (k = 1 \cdots n), \tag{6}$$

где для краткости положено

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_{jk}}{\partial x_i} x_i^{(1)} = \xi_{jk}^{(1)}.$$

Отсюда мы сразу видим, что продолженная группа содержит тождественное преобразование, и в то же время приходим к предположению, что она порождена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями

$$X_k^{(1)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}} \qquad (k = 1 \cdots r).$$

Правильность этого предположения можно доказать следующим образом.

Согласно теореме 3, стр. 36, n функций $y_i = f_i(x, a)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial y_i}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(y_1 \cdots y_r) \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r). \tag{7}$$

Если мы продифференцируем эти уравнения по t и примем во внимание, что a не зависят от t, то получим

$$\frac{\partial y_i^{(1)}}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \xi_{ji}(y)}{\partial y_\nu} y_\nu^{(1)} \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r). \tag{8}$$

Если теперь $a_1^0 \cdots a_r^0$ — параметры тождественного преобразования в группе $y_i = f_i(x, a)$, то определитель $\sum \pm \psi_{11}(a) \cdots \psi_{rr}(a)$ при $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$ не обращается в нуль; но $a_1^0 \cdots a_r^0$ являются также параметрами тождественного преобразования продолженной группы (5), следовательно, мы можем из уравнений (7) и (8) известным образом (ср. гл. 4, стр. 76 и ниже) заключить, что продолженная группа действительно порождена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_k^{(1)} f$. Мы назовем $X_k^{(1)} f$ *продолженными инфинитезимальными преобразованиями.*

Будучи независимыми инфинитезимальными преобразованиями r-параметрической группы, $X_k^{(1)} f$ удовлетворяют попарно соотношениям вида

$$X_k^{(1)} X_j^{(1)} f - X_j^{(1)} X_k^{(1)} f = \sum_{s=1}^{r} c'_{kjs} X_s^{(1)} f.$$

Здесь коэффициенты при $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ слева и справа должны совпадать, то есть должно выполняться $X_k X_j f - X_j X_k f = \sum_s c'_{kjs} X_s f$, а стало быть:

$$\sum_{s=1}^{r} (c'_{kjs} - c_{kjs}) X_s f = 0$$

или, в силу независимости $X_1 f \cdots X_r f$,

$$c'_{kjs} = c_{kjs} \quad (k, j, s = 1 \cdots r).$$

Следовательно, продолженная группа (5) голоэдрически изоморфна исходной группе, что соответствует тому, что обе группы согласно стр. 575 имеют одну и ту же группу параметров.

Дадим еще другое непосредственное доказательство только что полученного результата.

Если $X_k f$ и $X_j f$ — *произвольные* инфинитезимальные преобразования, и если соответствующие продолженные инфинитезимальные преобразова-

ния, как и прежде, обозначить $X_k^{(1)} f$ и $X_j^{(1)} f$, то получается:

$$X_k^{(1)} X_j^{(1)} f - X_j^{(1)} X_k^{(1)} f = X_k X_j f - X_j X_k f + \\ + \sum_{\pi,i,\nu=1}^{n} \left\{ \xi_{ki} \frac{\partial^2 \xi_{j\pi}}{\partial x_i \partial x_\nu} - \xi_{ji} \frac{\partial^2 \xi_{k\pi}}{\partial x_i \partial x_\nu} \right\} x_\nu^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_\pi^{(1)}} + \\ + \sum_{\pi,i,\nu=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \xi_{j\pi}}{\partial x_i} - \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \xi_{k\pi}}{\partial x_i} \right\} x_\nu^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_\pi^{(1)}}$$

или

$$\begin{cases} X_k^{(1)} X_j^{(1)} f - X_j^{(1)} X_k^{(1)} f = \sum_{\pi,i=1}^{n} \left\{ \xi_{ki} \frac{\partial \xi_{j\pi}}{\partial x_i} - \xi_{ji} \frac{\partial \xi_{k\pi}}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\pi} + \\ + \sum_{\pi,i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left\{ \xi_{ki} \frac{\partial \xi_{j\pi}}{\partial x_i} - \xi_{ji} \frac{\partial \xi_{k\pi}}{\partial x_i} \right\} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\pi^{(1)}} . \end{cases} \tag{9}$$

Допустим, в частности, что $X_k f$ — инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы, и что при этом

$$X_k X_j f - X_j X_k f = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X_s f.$$

Тогда

$$X_k^{(1)} X_j^{(1)} f - X_j^{(1)} X_k^{(1)} f = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} \sum_{\pi=1}^{n} \xi_{s\pi} \frac{\partial f}{\partial x_\pi} + \\ + \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} \sum_{\pi=1}^{n} \frac{d}{dt} \xi_{s\pi} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\pi} = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X_s^{(1)} f,$$

что и требовалось доказать[1].

Особый интерес в только что проведенном вычислении представляет общая формула (9), которую словами можно выразить так:

[1] Вышеизложенные аналитические результаты имеют большое сходство с некоторыми результатами главы 20 (ср. стр. 409 и ниже). Внутренняя причина этой связи заключается в том, что величины ζ на стр. 409 суть не что иное, как некоторые производные $\frac{\delta y}{\delta t}$ от y по t.

Утверждение 1. *Если для двух произвольных инфинитезимальных преобразований*

$$X_1 f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad X_2 f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

построить продолженные инфинитезимальные преобразования

$$X_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}} \quad (k = 1, 2),$$

то $X_1^{(1)} X_2^{(1)} f - X_2^{(1)} X_1^{(1)} f$ *будет продолженным инфинитезимальным преобразованием, соответствующим преобразованию* $X_1 X_2 f - X_2 X_1 f$.

§ 128

Теперь мы спрашиваем, как можно определить, допускает ли уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu(x_1 \cdots x_n) \cdot x_\nu^{(1)} = 0$$

всякое конечное преобразование продолженной однопараметрической группы

$$X^{(1)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,\nu=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}.$$

Согласно гл. 7, стр. 125, это верно тогда и только тогда, когда $X^{(1)}(\sum U_\nu x_\nu^{(1)})$ обращается в нуль в силу $\sum U_\nu x_\nu^{(1)} = 0$. Вычисляя, получаем выражение

$$X^{(1)} \left(\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu x_\nu^{(1)} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} X U_\nu \cdot x_\nu^{(1)} + \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i} x_i^{(1)},$$

которое является по $x_i^{(1)}$ линейным. Таким образом, уравнение $\sum U_\nu x_\nu^{(1)} = 0$ допускает однопараметрическую группу $X^{(1)} f$ тогда и только тогда, когда имеет место соотношение

$$X^{(1)} \left(\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu x_\nu^{(1)} \right) = \varrho \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu x_\nu^{(1)},$$

где под ϱ понимается функция только от $x_1 \cdots x_n$.

Попутно можно заметить, что выражение $\sum U_\nu x_\nu^{(1)}$ остается инвариантным при любом конечном преобразовании продолженной группы $X^{(1)}f$ тогда и только тогда, когда выражение $X^{(1)}(\sum U_\nu x_\nu^{(1)})$ обращается в нуль тождественно.

Наконец, система из m уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot x_i^{(1)} = 0 \quad (k = 1 \cdots m) \tag{10}$$

будет допускать все преобразования продолженной группы $X^{(1)}f$ тогда и только тогда, когда каждое выражение $X^{(1)}(\sum U_\nu x_\nu^{(1)})$ обращается в нуль в силу этой системы, то есть когда имеют место соотношения

$$X^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{n} U_{ki} x_i^{(1)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \varrho_{kj} \sum_{i=1}^{n} U_{ji} x_i^{(1)} \quad (k = 1 \cdots m),$$

где ϱ_{kj} означают функции лишь от x.

Если мы свяжем утверждение 5, гл. 7, стр. 131, с доказанным выше утверждением 1 (стр. 579), то, очевидно, получим следующее

Утверждение 2. *Если система уравнений вида*

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot x_i^{(1)} = 0 \quad (k = 1 \cdots m) \tag{10}$$

допускает две однопараметрические группы, $X_1^{(1)}f$ и $X_2^{(1)}f$, полученные из $X_1 f$ и $X_2 f$ путем определенного выше продолжения, то она в то же время допускает однопараметрическую группу $X_1^{(1)}X_2^{(1)}f - X_2^{(1)}X_1^{(1)}f$, полученную путем продолжения группы $X_1X_2f - X_2X_1f$.

Мы получили этот результат, применив утверждение 5 главы 7 к специальному случаю системы уравнений вида (10). Однако необходимо упомянуть, что наше теперешнее утверждение будет намного проще доказать, чем общее утверждение 5 главы 7. Так, можно без труда при помощи вычислений убедиться, что система уравнений (10), допускающая $X_1^{(1)}f$ и $X_2^{(1)}f$, допускает также и $X_1^{(1)}X_2^{(1)}f - X_2^{(1)}X_1^{(1)}f$.

Уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} U_i(x_1 \cdots x_n) \cdot dx_i = 0$$

мы называем *уравнением Пфаффа*, а его левую часть — *формой Пфаффа*.

Из рассуждений, приведенных выше в данной главе, получаются важные утверждения относительно систем уравнений Пфаффа:

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot dx_i = 0 \quad (k = 1 \cdots m). \tag{10'}$$

Применение преобразования $y_i = f_i(x_1 \cdots x_n)$ к дифференциальному выражению $\sum_i U_{ki}(x_1 \cdots x_n)\, dx_i$ происходит, очевидно, таким образом, что $2n$ величин $x_1 \cdots x_n$, $dx_1 \cdots dx_n$ преобразуются при помощи продолженного преобразования:

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n), \quad dy_i = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}\, dx_\nu \quad (i = 1 \cdots n).$$

Отсюда следует, что система уравнений Пфаффа

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot dx_i = 0 \quad (k = 1 \cdots m) \tag{10'}$$

остается инвариантной относительно однопараметрической группы Xf тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot x_i^{(1)} = 0 \quad (k = 1 \cdots m)$$

допускает продолженную однопараметрическую группу

$$X^{(1)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}},$$

то есть, выполняются m соотношений вида

$$\sum_{i=1}^{n} XU_{ki} \cdot d\,x_i + \sum_{n=1}^{n} U_{ki}\, d(Xx_i) = \sum_{j=1}^{m} \varrho_{kj}(x) \sum_{i=1}^{n} U_{ji} d\,x_i \quad (k = 1 \cdots m).$$

Поэтому если мы введем сокращенное обозначение:

$$\sum_{i=1}^{n} XU_{ki} \cdot d\,x_i + \sum_{i=1}^{n} U_{ki} d(Xx_i) = X\left(\sum_{i=1}^{n} U_{ki}\, d\,x_i\right),$$

то получим

Утверждение 3. *Для того чтобы система из m уравнений Пфаффа*

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot dx_i = 0 \quad (k = 1 \cdots m) \tag{10'}$$

допускала все преобразования $y_i = x_i + \varepsilon X x_i + \cdots$ однопараметрической группы Xf, то есть чтобы для любого ε имели место соотношения вида:

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ki}(y_1 \cdots y_n) \cdot dy_i = \sum_{j=1}^{m} \omega_{kj}(x_1 \cdots x_n, \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} U_{ji}(x)\, dx_i \quad (k = 1 \cdots m),$$

необходимо и достаточно, чтобы m выражений $X(\sum U_{ki}\, dx_i)$ можно было представить в виде

$$X\left(\sum_{i=1}^{n} U_{ki} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \varrho_{kj}(x) \sum_{i=1}^{n} U_{ji}\, dx_i \quad (k = 1 \cdots m)$$

Наконец, используя следующую терминологию: *система уравнений Пфаффа* $(10')$ *допускает инфинитезимальное преобразование Xf, если имеют место m соотношений вида*

$$X\left(\sum_{i=1}^{n} U_{ki} dx_i\right) = \sum_{j=1}^{m} \varrho_{kj}(x) \sum_{i=1}^{n} U_{ji}\, dx_i,$$

последнее утверждение можно будет сформулировать еще и так:

Система из m уравнений Пфаффа $(10')$ *допускает все преобразования однопараметрической группы Xf тогда и только тогда, когда она допускает инфинитезимальное преобразование Xf.*

Кроме того, из утверждения 2 непосредственно следует

Теорема 93. *Если система из m уравнений Пфаффа*

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot dx_i = 0 \quad (k = 1 \cdots m)$$

допускает две однопараметрические группы, $X_1 f$ и $X_2 f$, то она в то же время допускает и однопараметрическую группу $X_1 X_2 f - X_2 X_1 f$.

Необходимо еще заметить, что *форма* Пфаффа $\sum_i U_i(x_1 \cdots x_n)\,dx_i$ остается инвариантной при любом преобразовании однопараметрической группы Xf тогда и только тогда, когда выражение $X(\sum U_i dx_i)$ обращается в нуль тождественно.

Ранее (стр. 58 и ниже) мы условились, что будем иногда писать $\frac{\delta x_i}{\delta t}$ вместо ξ_i, а также $\frac{\delta f}{\delta t}$ вместо Xf. Аналогичным образом запишем $\frac{\delta}{\delta t}\sum U_i\,dx_i$ вместо $X(\sum U_i\,dx_i)$ и тогда получим уравнение

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} U_i dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta U_i \cdot d\,x_i + \sum_{i=1}^{n} U_i\,d\delta\,x_i,$$

которое в этом же смысле используется в вариационном исчислении.

§ 129

Утверждений из предыдущего параграфа совершенно достаточно, чтобы в полной общности вывести теорию продолжения групп путем добавления производных. Однако, прежде чем приступить к обсуждению общего случая, мы хотим рассмотреть один частный. При этом мы будем опираться на известные геометрические понятия трехмерного пространства.

Пусть под x, y, z понимаются обычные координаты точек трехмерного пространства и пусть

$$x' = \Xi(x, y, z), \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z} \tag{11}$$

— преобразование этого пространства.

При действии преобразования (11) все точки x, y, z преобразуются, то есть переходят в новые положения x', y', z'. В то же время все поверхности принимают новые положения: всякая поверхность $\chi(x, y, z) = 0$ переходит в новую поверхность $\psi(x', y', z') = 0$, уравнение которой получается в результате исключения x, y, z из уравнений (11) этого преобразования в сочетании с $\chi = 0$.

Вполне естественно, что преобразование (11) переводит соприкасающиеся поверхности, по крайней мере в общем случае, в поверхности с аналогичным свойством. Поэтому если мы назовем *элементом поверхности* совокупность точки x, y, z, лежащей на поверхности и касательной плоскости:

$$z_1 - z = p(x_1 - x) + q(y_1 - y) \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

то мы сможем сказать, что наше преобразование (11) превращает всякий элемент поверхности x, y, z, p, q в новый элемент поверхности x', y', z', p', q'. Другими словами, должны иметь место некоторые уравнения

$$p' = \Pi(x, y, z, p, q), \quad q' = \mathsf{K}(x, y, z, p, q), \tag{12}$$

которые мы ниже действительно выпишем. Уравнения (11) и (12), вместе взятые, представляют преобразование, возникшее из преобразования (11) в результате продолжения.

Предположим теперь, что нам даны ∞^r преобразований

$$x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z} \tag{13}$$

представляющие r-параметрическую группу точечных преобразований пространства, и что для каждого из этих ∞^r преобразований выписано определенное выше продолженное преобразование. Мы утверждаем, что ∞^r продолженных преобразований

$$\begin{cases} x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), & y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z}, \\ p' = \Pi(x, y, z, p, q, a_1 \cdots a_r), & q' = \mathsf{K}, \end{cases} \tag{14}$$

полученных таким образом, образуют r-параметрическую группу от переменных x, y, z, p, q.

Для доказательства рассмотрим ∞^r преобразований (13) как операции и заметим, что эти операции переставляют между собой как точки x, y, z, так и элементы поверхности x, y, z, p, q. Рассматриваемые как перестановки точек, эти операции образуют группу, следовательно, они должны образовывать группу и как перестановки элементов поверхности, а это находит свое аналитическое выражение как раз в том, что уравнения (14) представляют группу.

Уточним прежние рассуждения, развивая их чисто аналитически.

Пусть

$$x' = \Xi(x, y, z), \quad y' = \mathsf{H}(x, y, z), \quad z' = \mathsf{Z}(x, y, z) \tag{11}$$

— преобразование между переменными x, y, z и x', y', z'. Если предположить, что z — это произвольно выбранная функция $z = \varphi(x, y)$ от x и y, то имеют место дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка от z по x и y; они определены уравнением

$$dz - pdx - qdy = 0.$$

С другой стороны, наше преобразование превращает всякое отношение зависимости $z = \varphi(x, y)$ между x, y, z в такое же отношение между x', y', z', которое в общем случае может принимать вид $z' = \overline{\varphi}(x', y')$; поэтому и z' также имеет две частные производные p' и q', удовлетворяющие, в свою очередь, условию

$$dz' - p'dx' - q'dy' = 0.$$

Подставляя в только что записанное уравнение вместо z', y', z' их значения Z, Ξ, H и группируя в полученном выражении члены при dz, dx, dy, получаем

$$\left(\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial z} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial x} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial x} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x}\right) dx + \\ + \left(\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial y} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial y} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y}\right) dy = 0$$

или, поскольку $dz = p\,dx + q\,dy$

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{\partial \mathsf{Z}}{\partial x} - p'\dfrac{\partial \Xi}{\partial x} - q'\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p\left(\dfrac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z} - p'\dfrac{\partial \Xi}{\partial z} - q'\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right)\right\} dx + \\ + \left\{\dfrac{\partial \mathsf{Z}}{\partial y} - p'\dfrac{\partial \Xi}{\partial y} - q'\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} + q\left(\dfrac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z} - p'\dfrac{\partial \Xi}{\partial z} - q'\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right)\right\} dy = 0. \end{cases} \tag{15}$$

В уравнении (15) множители dx и dy должны обращаться в нуль, так как dx и dy не связаны никаким соотношением. Поэтому получаем два уравнения:

$$\begin{cases} p'\left(\dfrac{\partial \Xi}{\partial x} + p\dfrac{\partial \Xi}{\partial z}\right) + q'\left(\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial \mathsf{Z}}{\partial x} + p\dfrac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z}, \\ p'\left(\dfrac{\partial \Xi}{\partial y} + q\dfrac{\partial \Xi}{\partial z}\right) + q'\left(\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} + q\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial \mathsf{Z}}{\partial y} + q\dfrac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z}. \end{cases} \tag{16}$$

Их можно разрешить относительно p и q. Действительно, если бы определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Xi}{\partial x} + p\dfrac{\partial \Xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \Xi}{\partial y} + q\dfrac{\partial \Xi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial z} & \dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} + q\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{17}$$

обращался в нуль для произвольной функции z от x и y, то он должен был бы сам по себе обращаться в нуль тождественно для каждого значения

переменных x, y, z, p, q. Последнее может, очевидно, иметь место только тогда, когда все определители второго порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Xi}{\partial x} & \frac{\partial \Xi}{\partial y} & \frac{\partial \Xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} & \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} & \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z} \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль тождественно, то есть когда Ξ и H не являются независимыми функциями от x, y, z. Это, однако, с самого начала исключено. Таким образом, мы видим, что уравнения (16) в общем случае разрешимы относительно p' и q', какой бы функцией от x и y ни было z, и что это разрешение лишь тогда невозможно, когда функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, возникающему в результате приравнивания определителя (17) нулю. Выполняя в действительности разрешение уравнений (16), мы получим для p' и q' совершенно определенные функции от x, y, z, p, q:

$$p' = \Pi(x, y, z, p, q), \quad q' = \mathsf{K}(x, y, z, p, q).$$

Это утверждение всегда верно, так как мы не налагали специальных условий на функцию $z = \varphi(x, y)$.

Все это, впрочем, давно известно.

Уравнение (15) показывает, что можно задать величину $\mathfrak{a}$ такой, что соотношение

$$d\mathsf{Z} - p'\, d\Xi - q'\, d\mathsf{H} = \mathfrak{a}(dz - p\, dx - q\, dy) \tag{18}$$

по dx, dy, dz выполняется тождественно. Так, если разложить (18) по dx, dy, dz, то сначала путем сравнения множителей при dz в обеих частях получается

$$\mathfrak{a} = \frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z} - p' \frac{\partial \Xi}{\partial z} - q' \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z};$$

если же это значение подставить в уравнение (18), то оно превращается в (15).

Уравнение (18), в свою очередь, имеет очень простой смысл, оно свидетельствует о том, что продолженное преобразование

$$x' = \Xi, \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z}, \quad p' = \Pi, \quad q' = \mathsf{K}$$

оставляет уравнение Пфаффа $dz - p\, dx - q\, dy = 0$ инвариантным[2].

[2] Ли, Göttinger Nachr, 1872 г., стр. 480, Verhandl. d. G. d. W. zu Christiania (Слушания Научного общества Христиании), 1873 г.; Math. Ann., том VIII.

Для последующего очень важно отметить, что продолженное преобразование $x' = \Xi, \cdots q' = \mathsf{K}$ полностью определено благодаря этому свойству. Другими словами, если известны $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$, то Π и K в силу того требования, что преобразование $x' = \Xi, \cdots q' = \mathsf{K}$ оставляет уравнение Пфаффа $dz - pdx - qdy = 0$ инвариантным, однозначно определены.

Теперь мы снова переходим к рассмотрению r-параметрической группы

$$x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \quad y = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z} \tag{19}$$

и предполагаем, что любое из ∞^r преобразований этой группы является продолженным вышеуказанным образом путем добавления уравнений

$$p' = \Pi(x, y, z, p, q, a_1 \cdots a_r), \quad q' = \mathsf{K}. \tag{20}$$

О том, что уравнения (19) и (20) вместе взятые представляют r-параметрическую группу, мы уже знаем (ср. стр. 583), но хотим теперь доказать это также и аналитически. Если уравнения

$$x'' = \Xi(x', y', z', b_1 \cdots b_r), \quad y'' = \mathsf{H}, \quad z'' = \mathsf{Z},$$

связаны с (19), то известным образом получается

$$x'' = \Xi(x, y, z, c_1 \cdots c_r), \quad y'' = \mathsf{H}, \quad z'' = \mathsf{Z},$$

где c зависят только от a и b. С другой стороны, уравнения

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = \mathfrak{a}(dz - p\,dx - q\,dy),$$
$$dz'' - p''\,dx'' - q''\,dy'' = \mathfrak{a}'(dz' - p'\,dx' - q'\,dy')$$

дают аналогичное уравнение

$$dz'' - p''\,dx'' - q''\,dy'' = \mathfrak{a}\mathfrak{a}'(dz - p\,dx - q\,dy),$$

которое, согласно замечанию выше, показывает, что p'' и q'' точно так же зависят от c, как p' и q' от x, y, z, p, q и a. Таким образом, мы имеем

Утверждение 4. *Если уравнения*

$$x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z} \tag{19}$$

представляют r-параметрическую группу, и функции $\Pi(x, y, z, a_1 \cdots a_r)$, $\mathsf{K}(x, y, z, a_1 \cdots a_r)$ заданы так, что продолженные уравнения преобразований

$$x' = \Xi, \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = Z, \quad p' = \Pi, \quad q' = \mathsf{K} \tag{21}$$

оставляют уравнение Пфаффа $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ *инвариантным, так что имеет место соотношение вида*

$$dz - p\,dx - q\,dy = \mathfrak{a}(x, y, z, p, q, a_1 \cdots a_r) \cdot (dz - p\,dx - q\,dy),$$

то эти уравнения преобразований также представляют r*-параметрическую группу, а именно группу, имеющую с исходной общую группу параметров.*

Теперь мы утверждаем: если r-параметрическая группа (19) порождена независимыми инфинитезимальными преобразованиями — а мы это здесь, как и везде, разумеется, предполагаем, — то это же справедливо одновременно для продолженной группы (21).

Докажем это утверждение сначала для простого случая $r = 1$. Итак, пусть $r = 1$, и пусть группа (19) порождена инфинитезимальным преобразованием

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Чтобы доказать, что присоединенная группа также порождена инфинитезимальным преобразованием, нам надо лишь показать, что из Xf можно получить продолженное инфинитезимальное преобразование

$$X^{(1)}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \pi \frac{\partial f}{\partial p} + \varkappa \frac{\partial f}{\partial q},$$

оставляющее уравнение Пфаффа

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \tag{22}$$

инвариантным. Если это показано, то ясно, что однопараметрическая группа, порожденная $X^{(1)}f$ в переменных x, y, z, p, q, идентична однопараметрической группе (21), она оставляет уравнение Пфаффа (22) инвариантным и возникает в результате продолжения группы Xf, которая, по предположению, как раз и является группой (19).

Согласно стр. 582 инфинитезимальное преобразование $X^{(1)}f$ оставляет уравнение Пфаффа (22) инвариантным тогда и только тогда, когда π и $\varkappa$ удовлетворяют уравнению вида

$$d\zeta - p\,d\xi - q\,d\eta - \pi\,dx - \varkappa\,dy = \mathfrak{b}(dz - p\,dx - q\,dy),$$

где под $\mathfrak{b}$ понимается функция от x, y, z, p, q. Это уравнение разбивается на три следующих:

$$\mathfrak{b} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - p \frac{\partial \xi}{\partial z} - q \frac{\partial \eta}{\partial z},$$

$$\pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - p\frac{\partial \xi}{\partial x} - q\frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathfrak{b}p,$$
$$\varkappa = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - p\frac{\partial \xi}{\partial y} - q\frac{\partial \eta}{\partial y} + \mathfrak{b}q,$$

то есть для π и $\varkappa$ получаются вполне определенные значения:

$$\pi = \frac{d\zeta}{dx} - p\frac{d\xi}{dx} - q\frac{d\eta}{dx}, \quad \varkappa = \frac{d\zeta}{dy} - p\frac{d\xi}{dy} - q\frac{d\eta}{dy},$$

где для краткости положено

$$\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial z} = \frac{d\Phi}{dx}; \quad \frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial z} = \frac{d\Phi}{dy}.$$

Тем самым существование инфинитезимального преобразования $X^{(1)}f$ доказано, а вместе с ним и правильность выдвинутого выше утверждения для $r = 1$.

Теперь пусть r произвольно. Тогда если $e_1X_1f + \cdots + e_rX_rf$ — какое-либо преобразование группы (19), то та однопараметрическая группа, которая порождена продолженным инфинитезимальным преобразованием $e_1X_1^{(1)}f + \cdots + e_rX_r^{(1)}f$, очевидно, принадлежит группе (21), поскольку эта однопараметрическая группа возникает в результате продолжения однопараметрической группы $e_1X_1f + \cdots + e_rX_rf$. Отсюда следует, что группа (21) содержит ∞^{r-1} однопараметрических групп $e_1X_1^{(1)}f + \cdots + e_rX_r^{(1)}f$, то есть что она порождена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_1^{(1)}f \cdots X_r^{(1)}f$.

Само собой разумеется, $X_k^{(1)}f$ попарно удовлетворяют соотношениям вида

$$X_i^{(1)}X_k^{(1)}f - X_k^{(1)}X_i^{(1)} = \sum_{s=1}^{r} c'_{iks}X_s^{(1)}f.$$

Мы проверим это при помощи вычисления и, кроме того, увидим, что c'_{iks} имеют те же значения, что и c_{iks} в соотношениях

$$X_iX_kf - X_kX_if = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}X_sf.$$

Уравнение Пфаффа $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ согласно теор. 93, стр. 582, одновременно с инфинитезимальными преобразованиями $X_i^{(1)}f$ и $X_k^{(1)}f$ также

допускает и следующее: $X_i^{(1)}X_k^{(1)}f - X_k^{(1)}X_i^{(1)}f$, очевидно, имеющее вид

$$X_i^{(1)}X_k^{(1)}f - X_k^{(1)}X_i^{(1)}f = X_iX_kf - X_kX_if + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \beta\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Отсюда следует, что инфинитезимальное преобразование $X_i^{(1)}X_k^{(1)}f - X_k^{(1)}X_i^{(1)}f$ получается путем продолжения из

$$X_iX_kf - X_kX_if = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}X_sf,$$

так что имеют место соотношения

$$X_i^{(1)}X_k^{(1)}f - X_k^{(1)}X_i^{(1)}f = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}X_s^{(1)}f.$$

Отсюда мы видим, что продолженная группа (21) голоэдрически изоморфна группе (19), что соответствует тому, что обе группы имеют одну и ту же группу параметров (утверждение 4, стр. 587).

Группу

$$x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z} \tag{19}$$

можно продолжить и далее, а именно рассмотрев также производные порядка выше первого. Здесь мы рассмотрим только продолжение в результате добавления производных второго порядка.

Поскольку z рассматривается как функция от x и y, то помимо p и q мы должны также учитывать три производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

При преобразованиях нашей группы x', y', z' известным образом зависят от x, y, z, а p', q', согласно вышесказанному, точно так же зависят от x, y, z, p, q. Как теперь следует показать, r', s', t' тоже можно представить как функции от x, y, z, p, q, r, s, t:

$$r' = \mathsf{P}(x, y, z, p, q, r, s, t; a_1 \cdots a_r), \quad s' = \Sigma, \quad t' = \mathsf{T}.$$

Величины r', s', t' определены через

$$dp' - r'\,dx - s'\,dy = 0, \quad dq' - s'\,dx' - t'\,dy' = 0.$$

Если здесь разложить dx', dy', dp', dq' по dx, dy, dz, dp, dq, а затем подставить вместо dz, dp, dq их значения из

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dp - r\,dx - s\,dy = 0, \quad dq - s\,dx - t\,dy = 0,$$

то получаются два уравнения вида $A\,dx + B\,dy = 0$, коэффициенты, в которых, помимо x', y', z' и производных по x, y, z, содержат также $p', q', r', s', t', p, q, r, s, t$. Поскольку dx и dy друг от друга независимы, то A и B в обоих случаях должны по отдельности обращаться в нуль, и таким образом мы находим четыре уравнения:

$$r'\left(\frac{\partial \Xi}{\partial x} + p\frac{\partial \Xi}{\partial z}\right) + s'\left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) = \frac{\partial \Pi}{\partial x} + p\frac{\partial \Pi}{\partial z} + r\frac{\partial \Pi}{\partial p} + s\frac{\partial \Pi}{\partial q},$$

$$r'\left(\frac{\partial \Xi}{\partial y} + q\frac{\partial \Xi}{\partial z}\right) + s'\left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + q\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) = \frac{\partial \Pi}{\partial y} + q\frac{\partial \Pi}{\partial z} + s\frac{\partial \Pi}{\partial p} + t\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

и т. д.

Первые два из этих уравнений разрешимы относительно r' и s', а два последних — относительно s' и t' точно так же, как уравнения (16) были разрешимы относительно p' и q'. Спрашивается еще только, совпадают ли оба значения, которые мы таким образом находим для s'. Это, как известно, верно, иначе мы получили бы нетождественное соотношение между x, y, z, p, q, r, s, t, которое при подстановке $z = \varphi(x, y)$ должно было бы выполняться тождественно, но это невозможно, так как на φ не наложены вообще никакие ограничения.

Здесь, как и прежде, мы видим, что величины r', s', t' определены как функции от x, y, z, p, q, r, s, t тем условием, что уравнения вида

$$dp' - r'\,dx' - s'\,dy' = \alpha_1(dz - p\,dx - q\,dy) + \beta_1(dp - r\,dx - s\,dy) + \gamma_1(dq - s\,dx - t\,dy),$$

$$dq' - s'\,dx' - t'\,dy' = \alpha_2(dz - p\,dx - q\,dy) + \beta_2(dp - r\,dx - s\,dy) + \gamma_2(dq - s\,dx - t\,dy)$$

выполняются тождественно по dp, dq, dz, dy, dx. Если к тому же вспомнить тождество выше:

$$dz' - p\,dx' - q\,dy' = \mathfrak{a}(dz - p\,dx - q\,dy),$$

которое определяло p и q, то мы можем сказать, что при заданных $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$ уравнения преобразований

$$x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \cdots t' = \mathsf{T}(x, y, z, p, q, r, s, t, a_1 \cdots a_r) \qquad (23)$$

полностью и однозначно определены тем требованием, что они должны оставлять систему уравнений Пфаффа

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dp - r\,dx - s\,dy = 0, \quad dq - s\,dx - t\,dy = 0 \quad (24)$$

инвариантной.

Отсюда следует, что в результате последовательного выполнения двух преобразований (23) снова возникает преобразование, оставляющее систему (24) инвариантной. Однако уравнения

$$\begin{aligned} x' &= \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), & y' &= \mathsf{H}, & z' &= \mathsf{Z}, \\ x'' &= \Xi(x', y', z', b_1 \cdots b_r), & y'' &= \mathsf{H}, & z'' &= \mathsf{Z} \end{aligned}$$

по предположению имеют следствием

$$x'' = \Xi(x, y, z, c_1 \cdots c_r), \qquad y'' = \mathsf{H}, \qquad z' = \mathsf{Z}, \qquad (19')$$

где c зависят только от a и b. Кроме того, преобразования

$$\begin{aligned} x' &= \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \cdots t' = \mathsf{T}(x, y, z, p, q, r, s, t, a_1 \cdots a_r), \\ x'' &= \Xi(x', y', z', b_1 \cdots b_r), \cdots t'' = \mathsf{T}(x', y', z', p', q', r', s', t', b_1 \cdots b_r) \end{aligned}$$

выполненные последовательно, дают преобразование, получающееся из (19′) в результате того же продолжения, в результате которого из

$$x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z} \qquad (19)$$

возникло (23), то есть преобразование, также принадлежащее семейству (23). Таким образом, преобразования (23) образуют r-параметрическую группу.

Мы непосредственно убедимся в том, что группа (23) порождена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями.

Если же, наоборот, сначала предположить, что $r = 1$ и что группа (19) порождена инфинитезимальным преобразованием Xf, то нам, очевидно, надо лишь доказать, что существует продолженное инфинитезимальное преобразование

$$X^{(2)}f = Xf + \pi\frac{\partial f}{\partial p} + \varkappa\frac{\partial f}{\partial q} + \varrho\frac{\partial f}{\partial r} + \sigma\frac{\partial f}{\partial s} + \tau\frac{\partial f}{\partial t},$$

оставляющее систему уравнений Пфаффа (24) инвариантной. Но это несложно: для π и $\varkappa$ найдем те же значения, что и раньше, аналогичным образом для ϱ, σ, τ получаются выражения, зависящие линейно и однородно от ξ, η, ζ и их производных первого и второго порядка.

Здесь мы также сначала находим четыре уравнения для ϱ, σ, τ; однако легко можно доказать, что эти уравнения друг с другом совместны. Мы переносим проведение этого доказательства на рассмотрение общего случая, который приобретает большую наглядность.

Из существования $X^{(2)}f$ следует, конечно, что группа (23) в случае $r = 1$ порождена именно преобразованием $X^{(2)}f$.

Точно так же мы видим, что при произвольном r группа (23) порождена r инфинитезимальными преобразованиями $X_1^{(2)}f \cdots X_r^{(2)}f$, получающимися в результате продолжения инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ группы (19). Тем самым одновременно доказано, что имеют место соотношения вида

$$X_i^{(2)} X_k^{(2)} f - X_k^{(2)} X_i^{(2)} f = \sum_{s=1}^{r} c''_{iks} X_s^{(2)} f.$$

Можно легко убедиться, что $c''_{iks} = c_{iks}$. Действительно, система уравнений Пфаффа (24) допускает одновременно с $X_i^{(2)}f$ и $X_k^{(2)}f$ также инфинитезимальное преобразование $X_i^{(2)}X_k^{(2)}f - X_k^{(2)}X_i^{(2)}f = (X_i^{(2)}X_k^{(2)})$, но оно, очевидно, имеет вид

$$(X_i^{(2)}\, X_k^{(2)}) = (X_i X_k) + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \beta\frac{\partial f}{\partial q} + \lambda\frac{\partial f}{\partial r} + \mu\frac{\partial f}{\partial s} + \nu\frac{\partial f}{\partial t},$$

то есть возникает из преобразования

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f$$

в результате продолжения и может быть представлено следующим образом:

$$(X_i^{(2)} X_k^{(2)}) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s^{(2)} f.$$

Это означает, что продолженная группа является равносоставленной с исходной.

§ 130

После проведения специальных исследований предыдущего параграфа развитие общей теорий продолжения конечной непрерывной группы путем добавления производных для нас уже не будет представлять трудности.

Сначала рассмотрим отдельное преобразование от $n+m$ переменных $x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m$, например следующие:

$$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m) & (i = 1 \cdots n), \\ z_k' = F_k(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m) & (k = 1 \cdots m). \end{cases} \tag{25}$$

Если мы хотим продолжить его при помощи добавления производных, то мы должны сначала решить, сколько и какие из переменных $x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m$ надо рассматривать как независимые, а какие — как зависимые. Это может происходить очень разными способами, и каждому возможному способу соответствует совершенно определенное продолжение преобразования (25).

В последующем мы будем всегда рассматривать $x_1 \cdots x_n$ как независимые переменные, а $z_1 \cdots z_m$ — как функции, причем произвольно выбираемые функции от $x_1 \cdots x_n$. При этом условии $x_1' \cdots x_n'$ являются в общем случае друг от друга независимыми, тогда как $z_1' \cdots z_m'$ становятся функциями от $x_1' \cdots x_n'$.

Для производных z по x и z' по x' введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} = z_{\nu,k}, \quad \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} z_\mu}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = z_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}, \quad \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} z_\mu'}{\partial x_1'^{\alpha_1} \cdots \partial x_n'^{\alpha_n}} = z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}.$$

Мы утверждаем, что $z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ можно выразить через $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ и производные $z_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_n}$ от первого порядка до $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$-го:

$$z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n} = F_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, z_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_n}) \tag{26}$$
$$(\nu = 1 \cdots m, \beta_1 \cdots \beta_n \leqslant \alpha_1 \cdots \alpha_n).$$

Если положить $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N$, то справедливость уравнений вида (26) для $N = 0$ очевидна; чтобы доказать то же самое для любого N, нам надо лишь показать, что уравнения вида (26) выполняются также для $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N+1$, если они имеют место для $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n < N$.

Итак, пусть функции $F_{\mu,\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$ $(\alpha_1 \cdots \alpha_n \leqslant N)$ известны; тогда значения $z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N+1)$ определяются из уравнений

$$d\, z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n} - \sum_{i=1}^{n} z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_i+1,\cdots \alpha_n}\, dx_i' = 0 \quad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N), \tag{27}$$

а именно: (27) должны выполняться тождественно в силу системы уравнений

$$d\, z'_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_n} - \sum_{i=1}^{n} z'_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_i+1,\cdots \beta_n}\, dx_i = 0 \tag{28}$$
$$(\nu = 1 \cdots m,\ 0 \leqslant \beta_1 + \cdots + \beta_n \leqslant N),$$

тогда как $dx_1 \cdots dx_n$ совершенно независимы друг от друга. Поэтому для $z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_i+1,\cdots \alpha_n}$ мы получаем уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_i+1,\cdots \alpha_n} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{m} z_{\nu,k} \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} \right\} = \frac{dF_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}}{dx_k}, \qquad (29)$$

$$(k = 1 \cdots n),$$

где правая часть означает полную производную

$$\frac{\partial F_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{m} z_{\nu,k} \frac{\partial F_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}}{\partial z_\nu} + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\beta} z_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_k+1,\cdots \beta_n} \frac{\partial F_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}}{\partial z_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_n}}$$

$$(1 < \beta_1 + \cdots + \beta_n \leqslant \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$$

от $F_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ по x_k.

Если бы уравнения (29) не были разрешимы относительно $z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_i+1,\cdots \alpha_n}$ $(i = 1 \cdots n)$, то определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum\limits_{\mu=1}^{m} z_{\mu,1} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_\mu} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \sum\limits_{\mu=1}^{m} z_{\mu,n} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + \sum\limits_{\mu=1}^{m} z_{\mu,1} \dfrac{\partial f_n}{\partial z_\mu} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} + \sum\limits_{\mu=1}^{m} z_{\mu,n} \dfrac{\partial f_n}{\partial z_\mu} \end{vmatrix}$$

должен был бы равняться нулю, какие бы функции от $x_1 \cdots x_n$ не вводились в качестве $z_1 \cdots z_m$, то есть он должен был бы тождественно обращаться в нуль для всех значений переменных $x_i, z_\mu, z_{\mu,i}$. Легко убедиться, что это происходит только тогда, когда все определители порядка m матрицы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_m} \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль тождественно, то есть когда функции $f_1 \cdots f_n$ не являются независимыми друг от друга. Это исключено, следовательно, уравнения (29) разрешимы относительно $z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_i+1,\cdots \alpha_n}$ $(i = 1 \cdots n)$.

Еще одно сомнение надо устранить. Уравнения (29), очевидно, дают для производных $z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_i+1, \cdots \alpha_n}$, вообще говоря, различные значения. На самом деле это только так кажется, поскольку в противном случае между x_i, z_μ и производными последних получились бы нетождественные соотношения, которые должны были бы тождественно выполняться для совершенно произвольных функций $z_1 \cdots z_m$ от $x_1 \cdots x_n$, что невозможно.

Итак, мы видим: уравнения (29) полностью и однозначно определяют все $z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_i+1, \cdots \alpha_n}$, следовательно, уравнения вида (26) выполняются при наложенных условиях также для $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N + 1$, чем доказана их справедливость в общем случае. Кроме того, мы видим, что преобразование

$$\begin{cases} x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m), \quad z'_\mu = F_\mu(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m), \\ z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n} = F_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, z_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_n}) \\ (\sum_\varkappa \beta_\varkappa \leqslant \sum_\varkappa \alpha_\varkappa) \\ (i = 1 \cdots n; \quad \mu = 1 \cdots m; \quad 0 < \alpha_1 + \cdots \alpha_n < N) \end{cases} \tag{30}$$

оставляет систему уравнений Пфаффа

$$d\, z_{\mu,\beta_1 \cdots \beta_n} - \sum_{i=1}^{n} z_{\mu,\beta_1 \cdots \beta_i+1, \cdots \beta_n}\, dx_i = 0 \tag{31}$$

$$(\mu = 1 \cdots m;\ 0 < \sum \beta_\varkappa < N)$$

инвариантной, и что оно благодаря этому свойству полностью определено. Наконец, ясно также, что последовательность из двух преобразований (30), оставляющая систему уравнений Пфаффа (31) инвариантной, опять же дает в результате преобразование с этим свойством.

Предположим теперь, что исходные уравнения преобразований (25) содержат определенное число, скажем r параметров:

$$\begin{cases} x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, a_1 \cdots a_r), \quad (i = 1 \cdots n), \\ z'_\mu = F_\mu(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, a_1 \cdots a_r), \quad (\mu = 1 \cdots m), \end{cases} \tag{32}$$

и представляют r-параметрическую группу, порожденную r независимыми инфинитезимальными преобразованиями. Допустим, из (32) мы вывели все уравнения вида (26), в которых $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n < N$; мы утверждаем, что они, взятые вместе с уравнениями (32):

$$\begin{cases} x'_i = f_i(x, z, a), \quad z'_\mu = F_\mu(x, z, a), \\ z_{\mu',\alpha_1 \cdots \alpha_n} = F_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}(x, z, z_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_n}, a) \\ (i = 1 \cdots n; \quad \mu = 1 \cdots m; \quad 0 < \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant N), \end{cases} \tag{33}$$

снова представляют r-параметрическую группу.

Доказательство очень простое.

Преобразования

$$x_i' = f_i(x, z, a), \quad z_k' = F_k(x, z, a),$$
$$x_i'' = f_i(x', z', b), \quad z_k'' = F_k(x', z', b)$$

дают в результате их последовательного выполнения преобразование

$$x_i'' = f_i(x, z, c), \quad z_k'' = F_k(x, z, c),$$

в котором c — некоторые функции от a и b. Поэтому, согласно вышесказанному, $z''_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ выражаются через $x_i, z_k, z_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_n}$, и c_j точно так же, как $z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}$, выражаются через $x_i, z_k, z_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_n}$ и a. Тем самым наше утверждение доказано.

Остается еще доказать, что продолженная группа (33), как и исходная группа (32), порождена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями. Для проведения этого доказательства мы сначала проведем следующие рассуждения.

Мы исходим из произвольного инфинитезимального преобразования

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, z) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu(x, z) \frac{\partial f}{\partial z_\mu}.$$

Попробуем образовать из него продолженное инфинитезимальное преобразование

$$X^{(N)}f = Xf + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\alpha} \zeta_{\nu,\alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{\partial f}{\partial z_{\nu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}},$$

оставляющее систему уравнений Пфаффа

$$dz_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_n} - \sum_{i=1}^{n} z_{\nu,\beta_1 \cdots \beta_i+1, \cdots \beta_n} dx_i = 0 \qquad (31)$$
$$(\nu = 1 \cdots m;\ 0 \leqslant \beta_1 + \cdots + \beta_n < N)$$

инвариантной.

Для $N = 0$ и $N = 1$ заведомо имеется инфинитезимальное преобразование $X^{(N)}f$ с только что описанным свойством, это не требует более подробного обоснования. Поэтому мы можем провести общее доказательство существования $X^{(N)}f$, показав следующее: если существуют $X^{(N-1)}f$ и $X^{(N)}f$, то существует также и $X^{(N+1)}f$.

Итак, пусть $X^{(N-1)}f$ и $X^{(N)}f$ существуют. Тогда для существования инфинитезимального преобразования $X^{(N+1)}f$, оставляющего систему уравнений Пфаффа

$$dz_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n} - \sum_{i=1}^{n} z_{\nu,\beta_1\cdots\beta_i+1,\cdots\beta_n}dx_i = 0 \tag{34}$$
$$(\nu = 1\cdots m,\ 0 \leqslant \beta_1 + \cdots + \beta_n < N+1)$$

инвариантной, неизвестные пока еще

$$\frac{\delta z_{\mu,\gamma_1\cdots\gamma_n}}{\delta t} = \zeta_{\mu,\gamma_1\cdots\gamma_n} \quad (\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = N+1)$$

должны удовлетворять некоторым уравнениям вида

$$d\zeta_{\mu,\alpha_1,\cdots,\alpha_n} - \sum_{i=1}^{n} z_{\nu,\alpha_1,\cdots,\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}d\xi_i - \sum_{i=1}^{n}\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}\,dx_i = 0,$$
$$= \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\beta}\mathsf{P}_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}\left\{dz_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n} - \sum_{i=1}^{n} z_{\nu,\beta_1\cdots\beta_i+1,\cdots\beta_n}dx_i\right\}$$
$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N,\ 0 \leqslant \beta_1 + \cdots + \beta_n < N+1),$$

причем независимо от дифференциалов $dx_1, dz_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}$.

Отсюда сначала однозначно определяются $\mathsf{P}_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}$, и остаются лишь уравнения между независимыми друг от друга дифференциалами: $dx_1\cdots dx_n$. Поэтому если подставить значения $\mathsf{P}_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}$ и сравнить коэффициенты dx_i в обеих частях, то для $\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_1+1,\cdots\alpha_n}$ получается следующее выражение:

$$\frac{\delta}{\delta t}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n} = \zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n} =$$
$$= \frac{d\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{dx_i} - \sum_{j=1}^{n} z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_n}\frac{d\xi_j}{dx_i} \tag{35}$$
$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N),$$

где $\dfrac{d}{dx_i}$ означает полную производную по x_i[3].

Но теперь остается еще одна сложность: в общем случае для каждого $\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}$ мы получаем несколько различных по виду выражений.

[3]Формула (35), по сути, идентична одной из формул *Пуассона* в вариационном исчислении.

Выражение справа согласно своему происхождению — это значение производной:

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial x_i}=\frac{\delta}{\delta t}\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}.$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{\delta}{\delta t}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}=\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}}{\partial x_h}=$$

$$=\frac{d\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}}{d\,x_h}-\sum_{j=1}^{n}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}\frac{d\,\xi_j}{d\,x_h},\tag{36}$$

где h — какое-либо из чисел $1,2,\cdots n$, отличное от i. Этим все возможности исчерпаны. Поэтому необходимо лишь доказать, что последнее значение $\frac{\delta}{\delta t}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}$ совпадает со значением (35). Чтобы это доказать, мы напомним, что имеют место следующие уравнения:

$$\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}=\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}}{\partial x_h}=$$

$$=\frac{d\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}}{d\,x_h}-\sum_{j=1}^{n}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}\frac{d\xi_j}{dx_h}$$

и

$$\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\alpha_n}=\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}}{\partial x_i}=$$

$$=\frac{d\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}}{dx_i}-\sum_{j=1}^{n}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}\frac{d\xi_j}{dx_i}.$$

Подставляя значение $\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}$ в (35), получаем:

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial x_i}=\frac{d}{d\,x_i}\frac{d}{d\,x_h}\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1\cdots\alpha_n}\frac{d\,\xi_j}{d\,x_h}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_n}\frac{d\,\xi_j}{d\,x_i}-\sum_{j=1}^{n}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}\frac{d}{d\,x_i}\frac{d\xi_j}{dx_h}.$$

Если же подставить значение $\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}$ в (36) и учесть, что $\frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_h}=\frac{d}{dx_h}\frac{d}{dx_i}$, то мы находим

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}}{\partial x_h}=\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial x_i}.$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что $\zeta_{\mu,\gamma_1\cdots\gamma_n}$ $(\gamma_1+\cdots+\gamma_n=N+1)$ при наложенных условиях действительно существуют и однозначно определены; кроме того, согласно вышесказанному, ясно, что преобразованию Xf для каждого значения N соответствует совершенно определенное инфинитезимальное преобразование $X^{(N)}f$.

Коэффициенты в $X^{(N)}f$, очевидно, линейны и однородны по ξ_i, ζ_k и их производным по x и z. Поэтому если X_if и X_jf — два инфинитезимальных преобразования вида Xf, а $X_i^{(N)}f$ и $X_j^{(N)}f$ — соответствующие продолженные указанным образом инфинитезимальные преобразования, то из $c_iX_if+c_jX_jf$ в результате такого продолжения получается

$$c_iX_i^{(N)}f+c_jX_j^{(N)}f.$$

Поскольку, кроме того, $X_i^{(N)}f$ и $X_j^{(N)}f$, наряду с $X_i^{(N)}X_j^{(N)}f-X_j^{(N)}X_i^{(N)}f$, оставляют систему уравнений Пфаффа (31) инвариантной, то из X_iX_jf- $-X_jX_if$ должно также возникать

$$X_i^{(N)}X_j^{(N)}f-X_j^{(N)}X_i^{(N)}f$$

в результате этого продолжения.

Пусть, наконец, $X_1f\cdots X_rf$ будут независимыми инфинитезимальными преобразованиями r-параметрической группы (32), которые также удовлетворяют известным соотношениям

$$X_iX_jf-X_jX_if=\sum_{s=1}^{r}c_{ijs}X_sf.$$

Если образовать продолженные инфинитезимальные преобразования $X_i^{(N)}f\cdots X_r^{(N)}f$, то из $X_iX_jf-X_jX_if$, а стало быть, и из $\sum c_{ijs}X_sf$ мы также получим $X_i^{(N)}X_j^{(N)}f-X_j^{(N)}X_i^{(N)}f$, что опять же означает, что

$$X_i^{(N)}X_j^{(N)}f-X_j^{(N)}X_i^{(N)}f=\sum_{s=1}^{r}c_{ijs}X_s^{(N)}f.$$

Поэтому r инфинитезимальных преобразований $X_i^{(N)}f$ порождают для каждого значения N группу, равносоставленную с X_if, которая, очевидно, идентична ранее описанной группе (33), получающейся в результате продолжения конечных уравнений (32) группы $X_1f \cdots X_rf$.

Теорема 94. *Если ∞^r преобразований*

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$
$$z'_k = F_k(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1 \cdots m)$$

образуют в переменных $x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m$ r-параметрическую группу, и если рассматривать z_k как произвольно выбираемые функции от x_i, то производные z_k также преобразуются в соответствии с x_i. Если взять все производные от первого до, скажем, N-го порядка, то получаются некоторые уравнения:

$$z'_{\mu,\alpha_1,\cdots,\alpha_n} = F_{\mu,\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, z_{\nu,\beta_1,\cdots,\beta_n}; a_1 \cdots a_r)$$
$$(\beta_1 + \cdots + \beta_n \leqslant \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant N),$$

которые, будучи объединены с уравнениями исходной группы, представляют r-параметрическую группу, равносоставленную с исходной[4].

Выше мы уже упоминали, что всякая заданная группа может быть продолжена многими различными способами; какие переменные выбираются в качестве независимых, предоставляется на наше усмотрение.

Кроме того, можно с самого начала заменить заданную группу на равносоставленную с ней, добавив несколько переменных $t_1 \cdots t_\sigma$, которые относительно этой группы совсем не преобразуются или, иначе говоря, преобразуются только тождественным преобразованием:

$$t'_1 = t_1, \cdots t'_\sigma = t_\sigma.$$

Рассматривая некоторые переменные из исходных и t_i как независимые, а остальные — как зависимые, можно добавить производные и таким образом продолжить; мы всегда приходим к равносоставленной группе.

Как мы видим, число возможностей при этом очень велико.

§ 131

Изложенную в гл. 13 теорию инвариантов произвольной группы можно непосредственно применить к нашим продолженным группам.

[4] Ли, Math. Annalen, том XXIV, 1884 г.; Archiv for Math., Христиания, 1883 г.

Так как число N можно выбрать таким большим, что инфинитезимальные преобразования $X_i^{(N)} f$ будут содержать больше, чем r, переменных, то всегда можно устроить так, что r уравнений $X_k^{(N)} f = 0$ образуют полную систему с одним или более решениями. Эти решения являются функциями от x, z и производных от z, они допускают всякое конечное преобразование продолженной группы $X_k^{(N)} f$, а потому являются абсолютными инвариантами этой группы и называются *дифференциальными инвариантами* исходной группы.

Функция Ω от $x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m$ и производных от z по x называется дифференциальным инвариантом r-параметрической группы

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m; a_1 \cdots a_r),$$
$$z'_k = F_k(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m; a_1 \cdots a_r),$$

если соотношение вида

$$\Omega(x'_1 \cdots x'_n, z'_1 \cdots z'_m, z'_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n}) = \\ = \Omega(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, z_{\mu,\alpha_1 \cdots \alpha_n})$$

выполняется тождественно.

Поскольку мы можем выбирать N произвольно большим, то имеем следующую теорему.

Теорема 95. *Всякая конечная непрерывная группа преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ задает бесконечное множество дифференциальных инвариантов, которые можно определить как решения полных систем*[5].

Если конечные уравнения группы $X_1 f \cdots X_r f$ известны, то вышеизложенным образом находятся конечные уравнения продолженной группы, а затем, согласно указанию в гл. 13, — дифференциальные инварианты любого порядка без интегрирования. Однако в общем случае этот метод не может быть практически применен для нахождения дифференциальных инвариантов. В большинстве случаев предпочтительно непосредственное интегрирование полной системы $X_k^{(N)} f = 0$.

На этом моменте заострять внимание не будем. Заметим лишь, что из достаточно многих известных дифференциальных инвариантов можно получить новые при помощи дифференцирования и взятия определителей.

Если в переменных $x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m$ задана группа, представленная *несколькими* системами уравнений с r параметрами каждая, то, естественно, существуют

[5] Ли, Gesellsch. d. W. zu Christiania (Научное общество Христиании), 1882 г.; Math. Ann., том XXIV, 1884 г.

также и продолженные группы, инварианты которых являются дифференциальными инвариантами исходной группы. Прежние общие результаты показывают не только то, что каждая такая группа имеет дифференциальные инварианты, но и то, как они могут быть найдены.

§ 132

Можно также задать вопрос о возможных *системах дифференциальных уравнений*, остающихся инвариантными относительно заданной группы. Такую систему, очевидно, можно найти, продолжив данную группу надлежащим образом и применив к продолженной группе результаты главы 14, на основании которых могут быть описаны все системы уравнений, инвариантные относительно продолженной группы. Каждая найденная таким образом система уравнений представляет тогда систему дифференциальных уравнений, инвариантную относительно исходной группы.

Однако в каждом отдельном случае надо еще исследовать, удовлетворяет ли эта система дифференциальных уравнений условиям интегрируемости.

Напротив, можно предположить, что система дифференциальных уравнений — интегрируемая или неинтегрируемая — задана, и можно задать себе вопрос, допускает ли она данную группу. На этот вопрос ответить тоже несложно. Надо только правильным образом продолжить заданную группу, а затем исследовать, допускает ли заданная система уравнений продолженную группу; это исследование может согласно гл. 7 быть проверено без интегрирования.

§ 133

Чтобы дать простое приложение предшествующим теориям, мы найдем условия, при которых система дифференциальных уравнений вида

$$A_k\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

допускает r-параметрическую группу

$$X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1 \cdots r)$$

от переменных $x_1 \cdots x_n$; при этом, конечно, предполагается, что q уравнений $A_k\varphi = 0$ независимы друг от друга.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, мы должны добавить к переменным $x_1 \cdots x_n$ группы $X_k f$ еще одну переменную φ, которая, очевидно, совсем не преобразуется этой группой. Переменные x рассматриваются как независимые, φ — как зависимая, а группа $X_1 f \cdots X_r f$ должна соответственно быть продолжена путем добавления n производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_i \quad (i = 1 \cdots n).$$

Затем требуется выяснить, допускает ли система уравнений $\sum \alpha_{ki}\varphi_i = 0$ продолженную группу.

Сначала вычислим бесконечно малое приращение $\delta\varphi_i$, которое получает φ_i при инфинитезимальном преобразовании $X_j f$. Его надо определить так, чтобы выражение

$$\delta\left(d\varphi - \sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu dx_\nu\right) = d\,\delta\varphi - \sum_{\nu=1}^{n}\{\varphi_\nu d\,\delta x_\nu + \delta\varphi_\nu d\,x_\nu\}$$

в силу $d\varphi = \sum \varphi_\nu\, dx_\nu$ обращалось в нуль. Поскольку $\delta\varphi$, как замечено выше, равно нулю, то мы получаем для $\delta\varphi_\nu$ следующее уравнение:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\{\varphi_\nu\, d\xi_{j\nu}\cdot\delta t + \delta\,\varphi_\nu\cdot d\,x_\nu\} = 0,$$

которое должно тождественно выполняться. Следовательно,

$$\delta\varphi_\nu = -\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial\xi_{j\mu}}{\partial x_\nu}\varphi_\mu\cdot\delta t,$$

а продолженное инфинитезимальное преобразование $X_j f$ имеет вид

$$X_j^{(1)}f = \sum_{i=1}^{n}\xi_{ji}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial\xi_{j\mu}}{\partial x_i}\varphi_\mu\right\}\frac{\partial f}{\partial\varphi_i}.$$

Чтобы теперь система уравнений $\sum_I \alpha_{ki}(x)\varphi_i = 0$ от $2n$ переменных $x_1\cdots x_n$, $\varphi_1\cdots\varphi_n$ допускала инфинитезимальное преобразование $X_j^{(1)}f$, все q выражений

$$X_j^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}X_j\alpha_{ki}\cdot\varphi_i - \sum_{\mu=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\frac{\partial\xi_{j\mu}}{\partial x_i}\right\}\varphi_\mu \quad (k=1\cdots q)$$

в силу этой системы уравнений должны обращаться в нуль. Это необходимое и в то же время достаточное условие выполняется только тогда, когда имеют место соотношения вида

$$X_j^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\varphi_i\right) = \sum_{\sigma=1}^{q}\varrho_{jk\sigma}(x)\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma i}\varphi_i,$$

где $\varrho_{jk\sigma}$ означают функции только от $x_1\cdots x_n$ и не зависят от φ_i.

Тем самым мы нашли искомые условия, их можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{r}(X_j\alpha_{ki} - A_k\xi_{ji})\,\varphi_i = \sum_{\sigma=1}^{q}\varrho_{jk\sigma}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma i}\varphi_i,$$

или, если вместо φ_i снова подставить $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$:

$$X_j\big(A_k(\varphi)\big) - A_k\big(X_j(\varphi)\big) = \sum_{\sigma=1}^{q} \varrho_{jk\sigma}(x)\cdot A_\sigma\varphi.$$

Такие соотношения должны иметь место для произвольной функции $\varphi(x_1 \cdots x_n)$. Всегда, когда они имеют место, и только в этом случае, система из q линейных частных дифференциальных уравнений $A_1\varphi = 0, \cdots A_q\varphi = 0$ остается при любом преобразовании группы $X_1 f \cdots X_r f$ инвариантной.

Этот результат не представляет для нас ничего нового в случае, когда q уравнений $A_k\varphi = 0$ образуют q-параметрическую систему. Только что найденный необходимый и достаточный критерий для этого специального случая мы указали еще в гл. 8, теорема 20, стр. 156. Однако последние наши результаты весомее по сравнению с прежними, поскольку мы теперь показали, что данный критерий остается справедливым и в общем случае, даже если уравнения $A_k\varphi = 0$ не образуют никакой q-параметрической полной системы.

Начало теории дифференциальных инвариантов уходит далеко в прошлое, так как математики еще в прошлом столетии рассматривали и интегрировали инвариантные дифференциальные уравнения для многих особенно простых групп.

Так, например, давно известно, что всякое дифференциальное уравнение первого порядка между x и y, в которое одна переменная, скажем y, входит неявно, может быть проинтегрировано при помощи квадратуры; однако очевидно, что

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0 = f(x, y')$$

есть не что иное, как самое общее дифференциальное уравнение первого порядка, допускающее однопараметрическую группу

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y + a \tag{37}$$

с параметром a. Из частного интегрального уравнения $y = \varphi(x)$ такого дифференциального уравнения самое общее интегральное уравнение может быть получено путем, как мы можем теперь сказать, применения общего преобразования однопараметрической группы (37) к этому частному интегральному уравнению; благодаря этому получается уравнение $\mathfrak{y} = \varphi(\mathfrak{x}) + a$ с произвольной константой a.

Кроме того, однородное дифференциальное уравнение

$$f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right) = 0 = f\left(\frac{y}{x}, y'\right)$$

является общим видом дифференциального уравнения первого порядка, допускающее однопараметрическую группу $\mathfrak{x} = ax, \mathfrak{y} = ay$; здесь $f\left(\dfrac{y}{x}, y'\right)$ — самый общий дифференциальный инвариант первого порядка, имеющийся у этой группы.

Давно замечено, что любое частное интегральное уравнение $F(x, y) = 0$ однородного дифференциального уравнения $f = 0$ в результате выполнения общего преобразования $\mathfrak{x} = ax$, $\mathfrak{y} = ay$ переходит в общее интегральное уравнение:

$$F\left(\frac{\mathfrak{x}}{a}, \frac{\mathfrak{y}}{a}\right) = 0.$$

Уравнение $xy' - y = 0$ здесь, однако, не рассматривается.

Третий пример дают дифференциальные уравнения вида

$$f\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}\right) = 0 = f(y^{(m)}, y^{(m+1)});$$

однако группу, отвечающую всем уравнениям этого вида, выписывать нет необходимости.

В теории инвариантов линейных преобразований часто встречаются настоящие дифференциальные инварианты по отношению ко всем линейным преобразованиям. Они были впервые рассмотрены *Кэли*. Однако надо заметить, *во-первых*, что дифференциальные инварианты *Кэли* не являются самыми простыми, относящимися к общей линейной однородной группе; *во-вторых*, что *Кэли* не рассматривает инвариантные дифференциальные *уравнения* и тем более не интегрирует их.

В представленной в 1867 г. и опубликованной в 1871 г. известной работе (Нахождение специальной минимальной поверхности, Берлинская акад. наук) *Г. Шварц* рассматривает дифференциальные уравнения вида

$$J = \frac{y'y''' - \frac{3}{2}y''^2}{y'^2} - f(x) = 0,$$

которые, как он сам указывал, иногда встречались еще у *Лагранжа*. *Шварц* замечает, что из любого частного решения $y = \varphi(x)$ можно получить самое общее, и последнее будет иметь вид

$$y = \frac{a + b\varphi}{c + d\varphi}$$

с произвольными константами $a : b : c : d$. Поэтому мы можем сказать, что выражение J — это дифференциальный инвариант, причем самый общий дифференциальный инвариант третьего порядка группы

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = \frac{a + by}{c + dy}.$$

Но насколько несомненно ценными являются эти специальные теории, настолько же важно отметить, что внутренняя связь между ними — общий принцип, из которого

все они вытекают, — математиками была упущена. Они не заметили, что *каждой* конечной непрерывной группе соответствуют дифференциальные инварианты.

В 1869–1871 гг. *Ли* занимался дифференциальными уравнениями, допускающими перестановочные инфинитезимальные преобразования, и в 1874 г. опубликовал представленную еще в 1872 г. *общую теорию интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих произвольную непрерывную группу преобразований*[6].

Затем *Альфан* вычислил простейшие дифференциальные инварианты для всех проективных преобразований и, кроме того, показал их интересные приложения к теории линейных дифференциальных уравнений[7].

Позже, в 1882–1884 гг., *Ли* развил *общую теорию дифференциальных инвариантов* конечных и бесконечных непрерывных групп, уделив при этом особое внимание конечным группам от двух переменных[8]. Эта общая теория в части, касающейся конечных групп, изложена в вышеупомянутых источниках.

Наконец, после 1884 г. *Сильвестр* и многие другие английские и американские математики опубликовали подробные, но *специальные* исследования в области дифференциальных инвариантов.

[6]Слушания Научного общества Христиании, 1870–1874 гг.; Math. Ann. том V, XI; Gött. Nachr., 1874 г.

[7]Thèse sur les invariants différentiels 1878; Journal de l'ecole pol., 1880 г. Ср. также Comptes rendus, т 81, 1875 г., стр. 1053; Journal de Liouville, ноябрь 1876 г. Mémoire sur la réduction des équat. diff. lin. aux formes intégrables, 1880–1883 гг.

[8]Слушания Научного общества Христиании, 1882, 1883 и февраль 1875 гг.; Archiv for Math. 1882, 1883 гг.; Math. Ann., том XXIV, 1884 г.

Глава 26

Общая проективная группа

Уравнения

$$x'_\nu = \frac{a_{1\nu}x_1 + \cdots + a_{n\nu}x_n + a_{n+1,\nu}}{a_{1,n+1}x_1 + \cdots + a_{n,n+1}x_n + a_{n+1,n+1}} \quad (\nu = 1 \cdots n) \qquad (1)$$

задают, как легко убедиться, группу, так называемую *общую проективную* группу многообразия $x_1 \cdots x_n$. Мы хотим в настоящей главе исследовать эту важную группу, которая также называется группой всех *коллинеаций* пространства $x_1 \cdots x_n$, обратив особое внимание на ее подгруппы.

§ 134

Не все из $(n+1)^2$ параметров a являются существенными, важны лишь их отношения; поэтому один из параметров, лучше всего $a_{n+1,n+1}$, может быть положен равным 1. На значения параметров наложено ограничение, что определитель $\sum \pm a_{11} \cdots a_{n+1,n+1}$ не может быть равен нулю, поскольку одновременно с ним обращался бы в нуль и функциональный определитель $\sum \pm \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_n}$.

Тождественное преобразование в нашей группе содержится, оно относится к значениям параметров

$$a_{\nu\nu} = 1, \quad a_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1 \cdots n+1, \mu \neq \nu),$$

для которых $x'_i = x_i$. Вследствие этого мы получаем инфинитезимальное преобразование группы, придавая $a_{\mu\nu}$ значения

$$a_{\nu\nu} = 1 + \omega_{\nu\nu} \quad a_{n+1,n+1} = 1, \quad a_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}$$

и считая ω бесконечно малыми величинами. Таким образом, мы находим

$$x'_\nu = \left(x_\tau + \sum_{\mu=1}^{n} \omega_{\mu\nu}x_\mu + \omega_{n+1,\nu}\right)\left(1 - \sum_{\mu=1}^{n} \omega_{\mu,n+1}x_\mu + \ldots\right)$$

или, если опустить величины второго и третьего порядка

$$x'_\nu - x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \omega_{\mu\nu} x_\mu + \omega_{n+1,\nu} - x_\nu \sum_{\mu=1}^{n} \omega_{\mu,n+1} x_\mu.$$

Если здесь положить все $\omega_{\mu\nu}$, за исключением одного, равными нулю, то шаг за шагом станет ясно, что наша группа содержит $n(n+2)$ инфинитезимальных преобразований

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ x_i \frac{\partial f}{\partial x_k},\ x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (i,k = 1 \cdots n). \tag{2}$$

Общая проективная группа n-мерного пространства $x_1 \cdots x_n$ содержит $n(n+2)$ существенных параметров и порождена инфинитезимальными преобразованиями. Аналитические выражения последних ведут себя для любой точки этого пространства регулярно.

Вместо $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ мы будем отныне, как правило, писать p_i.

Кроме того, мы хотим в этой главе для удобства ввести сокращения:

$$x_i\, p_k = T_{ik}, \quad x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\, p_k = P_i.$$

Наконец, мы хотим еще ввести соглашение, что ε_{ik} всякий раз означает нуль, если i и k различны, в то время как ε_{ii}, напротив, имеет значение 1, — соглашение, которое мы иногда уже использовали выше. На основании этого мы можем соотношения, получающиеся в результате комбинации инфинитезимальных преобразований p_i, T_{ik}, P_i, записать следующим образом:

$$(p_i\, p_k) = 0, \quad (P_i P_K) = 0, \quad (p_i P_k) = T_{ki} + \varepsilon_{ik} \sum_{\nu=1}^{n} T_{\nu\nu},$$

$$(p_i T_{k\nu}) = \varepsilon_{ik} p_\nu, \quad (P_i T_{k\nu}) = -\varepsilon_{i\nu} P_k,$$

$$(T_{ik} T_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} T_{i\nu} - \varepsilon_{\nu i} T_{\mu k}.$$

Легко убедиться, что эти соотношения остаются неизменными, если заменить в них p_i, T_{ik} и P_i соответственно выражениями, стоящими под ними, согласно следующей схеме:

$$\begin{matrix} p_i, & T_{ik}, & P_i, \\ P_i, & -T_{ki}, & p_i. \end{matrix} \tag{3}$$

Таким образом, можно связать общую проективную группу саму с собой голоэдрическим изоморфизмом.

Можно было бы предположить, что существует преобразование $x_i' = \Phi(x_1 \cdots x_n)$, переводящее инфинитезимальные преобразования

$$p_i, \quad x_i p_k, \quad x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\, p_k$$

в

$$x_i' \sum_{k=1}^{n} x_k'\, p_k', \quad -x_k'\, p_i', \quad p_i'$$

соответственно. Однако такого преобразования не существует по той простой причине, что n инфинитезимальных преобразований $p_1 \cdots p_n$ порождают n-параметрическую *транзитивную* группу, тогда как $x_1' \sum x_k' p_k' \cdots x_n' \sum x_k' p_k'$ порождают n-параметрическую *интранзитивную* группу.

Лишь в следующей части книги, где будут введены понятие контактного преобразования, а главное — понятие двойственности, мы увидим и полностью осознаем значение этого важного свойства проективной группы.

Общее инфинитезимальное преобразование

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, p_i + \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\, T_{ik} + \sum_{i=1}^{n} c_i\, P_i$$

нашей группы разложено по степеням $x_1 \cdots x_n$ и содержит, очевидно, лишь члены нулевого, первого и второго порядка по x. Легко видеть, что группа n содержит независимые инфинитезимальные преобразования нулевого порядка по x, из которых нельзя линейно получить ни одного инфинитезимального преобразования первого или второго порядка по x. Например, $p_1 \cdots p_n$ — n таких инфинитезимальных преобразований. Отсюда следует, что общая проективная группа является транзитивной.

Кроме того, имеется еще n^2 инфинитезимальных преобразований первого порядка по x_i, например все $x_i p_k = T_{ik}$, из которых нельзя линейно получить никаких преобразований второго порядка. Наконец, есть еще n преобразований второго порядка по x:

$$x_i \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = P_i.$$

В соответствии с утверждением 9, гл. 15, стр. 294, P_i являются попарно перестановочными, и, кроме того, T_{ik} порождают вместе с P_i подгруппу, в которой группа P_i содержится как инвариантная подгруппа.

Как мы видим (и как следует из сделанного нами выше замечания относительно соотношений между p_i и P_i), преобразования p_i также являются попарно перестановочными и порождают вместе с T_{ik} подгруппу, в которой группа из p_i является инвариантной.

§ 135

Для самых важных подгрупп общей проективной группы рекомендуется использовать специальные названия. Если в общем выражении (1) знаменатель можно считать равным 1, то получится *линейное* преобразование:

$$x'_\nu = a_{1\nu}x_1 + \cdots + a_{n\nu}x_n + a_{n+1,\nu} \quad (\nu = 1 \cdots n);$$

все преобразования этого вида образуют так называемую *общую линейную*[1] группу. Ее инфинитезимальные преобразования мы указали еще в конце предыдущего параграфа; они могут быть линейно получены из следующих $n(n+1)$:

$$p_i, x_i p_k \quad (i, k = 1 \cdots n).$$

Если трактовать $x_1 \cdots x_n$ как координаты точек в n-мерном пространстве R_n и перенести терминологию из обычного пространства, то можно сказать, что общая линейная группа состоит из всех проективных преобразований, оставляющих бесконечно удаленное $(n-1)$-мерное плоское многообразие, или короче — *бесконечно удаленное плоское* — M_{n-1} инвариантным.

Если вспомнить, что при последовательном выполнении двух конечных линейных преобразований определители преобразований $\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ перемножаются, то непосредственно видно, что совокупность всех линейных преобразований, определители которых $\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ равны 1, образует в общей линейной группе подгруппу, а именно инвариантную подгруппу, которую мы назовем *специальной линейной группой*. Легко понять, что в качестве ее $n(n+1)-1$ независимых инфинитезимальных преобразований могут быть выбраны следующие:

$$p_i,\ x_i\, p_k,\ x_i\, p_i - x_k\, p_k \quad (i \gtrless k).$$

Если выбрать из всех линейных преобразований те, что однородны по x, то получится *общая линейная однородная группа*[2]:

$$x'_\nu = a_{1\nu}x_1 + \cdots + a_{n\nu}x_n \quad (\nu = 1 \cdots n),$$

[1] В современной терминологии: (общая) аффинная группа. — *Прим. ред.*

[2] В современной терминологии: общая линейная группа. — *Прим. ред.*

все инфинитезимальные преобразования которой имеют вид $\sum b_{ik} x_i p_k$ и потому могут быть линейно получены из n^2 преобразований $x_i p_k$. Эта группа также, очевидно, содержит инвариантную подгруппу, *специальную линейную однородную*, для которой $\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ имеет значение 1. Ее $n^2 - 1$ инфинитезимальных преобразований таковы:

$$x_i\, p_k, x_i\, p_i - x_k\, p_k \quad (i \gtrless k);$$

поэтому общее инфинитезимальное преобразование этой группы имеет вид $\sum_{ik} \alpha_{ik} x_i p_k$, где n^2 произвольных констант α_{ik} подчинены лишь условию $\sum \alpha_{ii} = 0$.

Так как выражение $(x_i\, p_k, \sum_j x_j\, p_j)$ всегда обращается в нуль, то очевидно, что две упомянутые последними группы являются *систатическими*, а стало быть, *импримитивными*. Действительно, если положить

$$\frac{x_i}{x_n} = y_i, \quad \frac{x_i'}{x_n'} = y_i' \quad (i = 1 \cdots n-1),$$

то мы получаем

$$y_\nu' = \frac{a_{1\nu} y_1 + \cdots + a_{n-1,\nu} y_{n-1} + a_{n\nu}}{a_{1,n-1} y_1 + \cdots + a_{n-1,n-1} y_{n-1} + a_{n,n-1}} \quad (\nu = 1 \cdots n-1).$$

Отсюда, кроме того, следует, что в обоих случаях y преобразуются $(n^2 - 1)$-параметрической общей проективной группой $(n-1)$-мерного многообразия. Поэтому этой группе изоморфна как общая, так и специальная линейная однородная группа n-мерного многообразия, но этот изоморфизм, разумеется, только для специальной линейной однородной группы является голоэдрическим, поскольку она содержит $n^2 - 1$ параметров.

Теорема 96. *Специальная линейная однородная группа*

$$x_i p_k,\ x_i p_i - x_k p_k \quad (i \gtrless k = 1 \cdots n)$$

от переменных $x_1 \cdots x_n$ является импримитивной и голоэдрически изоморфной общей проективной группе $(n-1)$-мерного многообразия.

Формально наиболее простыми инфинитезимальными преобразованиями общей проективной группы являются $p_1 \cdots p_n$; они сами по себе порождают, как уже было замечено, группу всех переносов:

$$x_i' = x_i + a_i \quad (i = 1 \cdots n),$$

которая, очевидно, является просто транзитивной.

Вообще любые m инфинитезимальных переносов, скажем $p_1 \cdots p_m$, всегда порождают m-параметрическую группу. Для всех этих групп справедливо следующее

Утверждение 1. *Все m-параметрические группы переносов являются внутри общей проективной и даже уже внутри общей линейной групп равноправными между собой.*

Так, m независимых инфинитезимальных преобразований такой группы всегда имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} p_\nu \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

где не все определители порядка m из $b_{\mu\nu}$ обращаются в нуль.

Однако, мы можем легко показать, что при помощи линейного преобразования могут быть введены новые переменные $x'_1 \cdots x'_n$, для которых будет выполняться

$$p'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} p_\nu \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

Действительно, $p'_\mu = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial x'_\mu} + \cdots + p_n \dfrac{\partial x_n}{\partial x'_\mu}$. Следовательно, требуется лишь положить

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = b_{\mu\nu} \quad (\nu = 1 \cdots n,\ \mu = 1 \cdots m),$$

в то время как $\dfrac{\partial x_\nu}{\partial x'_{m+1}} \cdots \dfrac{\partial x_\nu}{\partial x'_n}$ остаются произвольными. Этим последним мы можем придать такие значения, что уравнения

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} b_{\mu\nu} x'_\mu + \sum_{\pi=m+1}^{n} c_{\pi\nu} x'_\pi \quad (\nu = 1 \cdots n)$$

задают преобразование, которое затем будет переводить заданную группу переносов в группу $p'_1 \cdots p'_m$. Отсюда непосредственно следует наше утверждение.

Второе доказательство этого же утверждения мы хотим хотя бы обозначить. Как уже было замечено, общая линейная группа оставляет бесконечно удаленное плоское многообразие M_{n-1} инвариантным, а именно: она даже является самой

общей проективной группой с этим свойством. Тогда всякий инфинитезимальный перенос направлен на некоторую бесконечно удаленную точку и полностью ею определен; *поэтому каждую m-параметрическую группу переносов можно представить при помощи m-мерного бесконечно удаленного плоского многообразия M_m*. Но два бесконечно удаленных плоских многообразия M_m всегда переводятся друг в друга линейным преобразованием, которое оставляет бесконечно удаленную плоскость инвариантной. Следовательно, все m-параметрические группы переносов внутри общей линейной, а также внутри общей проективной группы равноправны между собой.

Вышеупомянутое соответствие, имеющее место между p_i и P_i, дает, как мы сейчас покажем,

Утверждение 2. *Все m-параметрические группы, инфинитезимальные преобразования которых имеют вид $\sum e_i P_i$, являются внутри общей проективной группы равноправными.*

При доказательстве мы исходим из того, что две подгруппы внутри группы G_r равноправны тогда, когда при помощи преобразования соответствующей присоединенной группы одна из них может быть переведена в другую; эти подгруппы мы себе при этом представляем как плоские многообразия в пространстве $e_1 \cdots e_r$, которое преобразуется под действием присоединенной группы (ср. гл. 16, стр. 310). Если теперь записать преобразования проективной группы сначала в порядке p_i, T_{ik}, P_i, а затем — в порядке P_i, $-T_{ki}$, p_i, то оба раза получается абсолютно та же самая присоединенная группа. Но поскольку две m-параметрические группы переносов всегда могут быть переведены присоединенной группой друг в друга, то это всегда должно быть верным и для двух таких m-параметрических групп, инфинитезимальные преобразования которых можно линейно получить из P_i. Получается даже, что две такие m-параметрические группы уже в группе P_i, T_{ik} равноправны между собой. Тем самым наше утверждение доказано.

§ 136

Рассмотрим теперь по очереди общую проективную, общую линейную и линейную однородную группы. Мы хотим выяснить, содержатся ли в этих трех группах инвариантные подгруппы и какие именно.

Прежде всего — общая проективная группа. Пусть

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} x_i p_k + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

— инфинитезимальное преобразование инвариантной подгруппы, тогда $(p_\nu S)$ и $\big(p_\mu(p_\nu S)\big)$ — также обязательно ее преобразования. В нашей инвариантной подгруппе поэтому заведомо имеется инфинитезимальный перенос $\sum \varrho_i p_i$. Поскольку внутри общей проективной группы все инфинитезимальные переносы равноправны между собой, то все они должны туда входить. Далее эта подгруппа, поскольку она инвариантна, обязательно содержит все преобразования $(p_k, x_i \sum x_j p_j)$, или, после вычислений:

$$x_i\, p_k \quad (i \gtrless k), \quad x_i\, p_i + \sum_{j=1}^{n} x_j\, p_j.$$

Если сложить n преобразований $x_i\, p_i + \sum_j x_j\, p_j$, то получаем $(n + 1)\sum x_j\, p_j$, отсюда $x_i\, p_i$, а стало быть, и все $x_i\, p_k$. Наконец, пусть инвариантная подгруппа содержит все преобразования $(x_i\, p_i,\ x_i \sum x_k\, p_k)$, то есть все $x_i \sum x_k p_k$ и потому совпадает с самóй общей проективной группой. Отсюда наш первый результат —

Теорема 97. *Общая проективная группа от n переменных является простой*[3].

В соответствии с этим специальная линейная однородная группа

$$x_i\, p_k,\ x_i\, p_i - x_k\, p_k \quad (i \gtrless k) \tag{4}$$

также является простой.

Общая линейная однородная группа с n^2 инфинитезимальными преобразованиями $x_i\, p_k$ содержит, как мы видели выше, инвариантную подгруппу с $n^2 - 1$ параметрами, а именно вышеупомянутую группу (4).

Если имеется вторая инвариантная подгруппа, то она, очевидно, не может содержать группу (4), а также не может иметь с ней общих инфинитезимальных преобразований, так как последние образовывали бы (ср. утверждение 10 в гл. 15, стр. 293) в простой группе (4) инвариантную подгруппу. Поэтому, с учетом утверждения 7, гл. 12, стр. 235, отсюда следует, что любая другая инвариантная подгруппа может содержать только одно инфинитезимальное преобразование следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\, x_i\, p_k \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = 0\Big).$$

Это преобразование согласно утверждению 11, гл. 15, стр. 293, должно, кроме того, быть перестановочно с любым преобразованием группы (4),

[3] Ли. Math. Ann., том XXV, стр. 130.

откуда следует, что преобразование

$$\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\, x_i\, p_k \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = 0\right)$$

должно быть выделенным внутри группы (4). Однако такого преобразования не существует, а значит, все α_{ik} обращаются в нуль, и получается, что $x_1\, p_1 + \cdots + x_n\, p_n$ и (4) — единственные две инвариантные подгруппы группы $x_i\ p_k$.

Теорема 98. *Общая линейная однородная группа $x_i\, p_k$ от n переменных содержит только две инвариантные подгруппы, а именно, специальную линейную однородную группу и однопараметрическую группу $x_1\, p_1 + \cdots + x_n\, p_n$.*

Теперь легко можно выписать все инвариантные подгруппы общей линейной группы. Пусть

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, p_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\, x_i\, p_k$$

— преобразование такой подгруппы. Тогда $(p_j S)$ одновременно с S также принадлежит инвариантной подгруппе; поэтому она заведомо содержит один перенос, а в силу утверждения 1, стр. 613, — все. Таким образом, наименьшая инвариантная подгруппа состоит из самих переносов; всякая другая должна кроме переносов содержать еще какие-то инфинитезимальные преобразования вида $\sum_i \sum_k \alpha_{ij} x_i\, p_k$. Но последние, очевидно, порождают инвариантную подгруппу линейной однородной группы $x_i\, p_k$. Следовательно, имеет место

Теорема 99. *Общая линейная однородная группа p_i, $x_i\, p_k$ содержит только три инвариантных подгруппы*[4]*, а именно:*

$$p_i, \qquad p_i, x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n, \qquad p_i, x_i p_k, x_i p_i - x_k p_k \quad (i \gtrless k)$$

с n, $n+1$ и n^2+n-1 параметрами соответственно.

Пользуясь, как мы это уже неоднократно делали, терминологией, употребительной для обычного пространства, мы можем сказать, что три инвариантных подгруппы общей линейной группы — это, во-первых, группа всех переносов, во-вторых, группа всех преобразований подобия $(x_1 - x_1^0)p_1 + \cdots + (x_n - x_n^0)p_n$ и, наконец, самая общая линейная группа, оставляющая все объемы неизменными.

[4] Ли, Math. Ann., том XXV, стр. 130.

§ 137

Прежде чем перейти к описанию самых больших подгрупп общей проективной группы, мы сделаем предварительное замечание, которое будет впоследствии часто использоваться.

Пусть $X_1 f \cdots X_r f$ — независимые инфинитезимальные преобразования r-параметрической группы G_r, и пусть семейство из ∞^{r-m-1} ее инфинитезимальных преобразований задано m независимыми уравнениями вида

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} e_j = 0 \quad (k = 1 \cdots m). \tag{5}$$

Пусть, кроме того, откуда-то известно, что среди инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ этого семейства нет ни одного преобразования вида $e_1 X_1 f + \cdots + e_m X_m f$. Тогда можно, прежде всего, заключить, что уравнения (5) разрешимы относительно $e_1 \cdots e_m$, так как если в этих уравнениях положить $e_{m+1} = \cdots = e_r = 0$, то из них должно следовать $e_1 = \cdots = e_m = 0$, что имеет место лишь тогда, когда определитель $\sum \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{mm}$ не обращается в нуль. Поэтому если выбрать $e_{m+1} \cdots e_r$ произвольными, но не все равными нулю, то $e_1 \cdots e_m$ получают некоторые определенные значения, и семейство содержит, таким образом, $r - m$ независимых друг от друга инфинитезимальных преобразований вида

$$X_{m+j} f + e_{1j} X_1 f + \cdots + e_{mj} X_m f \quad (j = 1 \cdots r - m).$$

Следовательно, справедливо следующее

Утверждение 3. *Если среди инфинитезимальных преобразований $\sum e_k X_k f$ r-параметрической группы $X_1 f \cdots X_r f$ при помощи m независимых линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} e_j = 0 \quad (k = 1 \cdots m)$$

выделить семейство, в которое не входит ни одно инфинитезимальное преобразование вида $e_1 X_1 f + \cdots + e_m X_m f$, то оно будет содержать $r - m$ инфинитезимальных преобразований вида

$$X_{m+j} + \sum_{\nu=1}^{m} e_{j\nu} X_\nu f \quad (j = 1 \cdots r - m).$$

§ 138

После этих приготовлений обратимся непосредственно к общей проективной группе. Число ее параметров $n(n+2)$ обозначим для краткости через N и будем искать сначала все подгруппы с более чем $N-n$ параметрами, то есть все G_{N-m}, для которых $m < n$. Такая постановка вопроса, разумеется, имеет смысл только тогда, когда число n больше 1.

Согласно замечанию выше (ср. гл. 12, утверждение 7, стр. 235), искомая подгруппа G_{N-m} имеет с n-параметрической группой $p_1 \cdots p_n$ по меньшей мере $n-m$ общих независимых инфинитезимальных преобразований, то есть G_{N-m} содержит во всяком случае $n-m$ независимых инфинитезимальных переносов. Если их содержится не больше, чем $n-m$, то в силу утверждения 1 мы можем предположить, что этими переносами являются $p_{m+1} \cdots p_n$, и что нет ни одного переноса вида $e_1 p_1 + \cdots + e_m p_m$. Тогда из утверждения 3 следует, что в подгруппе имеется преобразование вида

$$x_{m+1} p_1 + e_1 p_1 + \cdots + e_m p_m,$$

но в комбинации с p_{m+1}[5] оно давало бы p_1, что было бы противоречием. Поэтому в нашей G_{N-m} имеется заведомо больше, чем $n-m$, скажем $n-q$ $(q < m)$, инфинитезимальных переносов, например $p_{q+1} \cdots p_m \cdots p_n$; напротив, если $q > 0$, то никаких переносов вида $e_1 p_1 + \cdots + e_q p_q$ нет. Тогда в G_{N-m} имеется во всяком случае *одно* (ср. гл. 12, утверждение 7, стр. 235) преобразование:

$$\lambda_n x_n p_1 + \cdots + \lambda_{q+1} x_{q+1} p_1 + e_q p_q + \cdots + e_1 p_1,$$

в котором, согласно вышесказанному, не все λ могут обращаться в нуль. Поэтому в результате комбинации с одним из переносов $p_{q+1} \cdots p_n$ получается по крайней мере один раз p_1, что было, по предположению, исключено. Следовательно, число q не может быть больше нуля, $q = 0$, и искомая G_{N-m}, таким образом, включает в себя все переносы, если $m < n$.

При помощи совершенно аналогичных рассуждений можно видеть, что G_{N-m} $(m < n)$ должна содержать все преобразования P_i. Эти рассуждения будут даже дословно совпадать с изложенными выше, если только заменить p_i, $x_i p_k$, P_i на P_i, $-x_k p_i$, p_i соответственно и сослаться на утверждение 2, стр. 614.

Поэтому наша группа G_{N-m} содержит все p_i и в то же время все P_i, но тогда, как уже раньше (на странице 614) в этой связи было показано, она содержит также и все $x_i p_k$, и потому совпадает с самóй общей проективной группой. Итак,

[5] Здесь и ниже под комбинацией понимается скобка Ли. — *Прим. ред.*

Теорема 100. *Общая проективная группа многообразия $x_1 \cdots x_n$ не содержит ни одной подгруппы с более чем $n(n+2) - n = n(n+1)$ параметрами.*

§ 139

Теперь речь пойдет об описании всех подгрупп с $N - n = n(n+1)$ параметрами, содержащихся в общей проективной группе. Чтобы полностью справиться с этой задачей, мы должны будем рассмотреть по отдельности несколько различных возможностей.

Сначала найдем все $n(n+1)$-параметрические подгруппы, не содержащие никаких инфинитезимальных переносов $\sum e_k p_k$. Тогда согласно утверждению 3, стр. 617, эта подгруппа заведомо содержит преобразование

$$U = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_i) p_i,$$

а для каждого значения i и k — также преобразование вида

$$T = (x_i - \alpha_i) p_k + \sum_{j=1}^{n} (\beta_{ikj}) p_j.$$

В результате комбинации двух инфинитезимальных преобразований U и T получается выражение $(UT) = -\sum_j \beta_{ikj} p_j$, а поскольку наша группа не содержит никаких инфинитезимальных преобразований этого вида, то все β_{ikj} должны обращаться в нуль.

Наконец, имеются еще n инфинитезимальных преобразований

$$P_i + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} p_k$$

или, что тоже самое,

$$P_i' = (x_i - \alpha_i) \sum_{j=1}^{n} (x_j - \alpha_j) p_j + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} p_k.$$

Комбинируя P_i' с $\sum (x_k - \alpha_k) p_k = U$, получаем

$$(UP_i') = (x_i - \alpha_i) \sum_{j=1}^{n} (x_j - \alpha_j) p_j - \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} p_k,$$

так что все δ_{ik} обращаются в нуль.

Поэтому в искомую $n(n+1)$-параметрическую подгруппу должны входить следующие $n(n+1)$ независимых инфинитезимальных преобразований:

$$(x_i - \alpha_i)p_k, \quad (x_i - \alpha_i)\sum_{j=1}^{n}(x_j - \alpha_j)p_j \quad (i,k = 1 \cdots n). \tag{6}$$

При помощи попарной комбинации легко убедиться, что эти инфинитезимальные преобразования действительно порождают $n(n+1)$-параметрическую группу. Это, кстати, следует еще и из того, что все инфинитезимальные преобразования (6) оставляют неподвижной некоторую точку $x_i = \alpha_i$, лежащую в конечной области. Эти преобразования независимы друг от друга, и их число — $n(n+1)$, то есть ровно столько, сколько имеется в $n(n+2)$-параметрической проективной группе независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих точку $x_i = \alpha_i$ инвариантной. Поэтому согласно утверждению 2, стр. 228, инфинитезимальные преобразования (6) порождают $n(n+1)$-параметрическую группу.

Таким образом, всякая $n(n+1)$-параметрическая проективная группа R_n, в которой нет ни одного инфинитезимального переноса $\sum e_k p_k$, состоит из всех проективных преобразований, которые оставляют неподвижной некоторую лежащую в конечной области точку.

Если бы мы в вычислении выше везде записали P_i, $-x_i p_k$, p_i вместо p_i, $x_k p_i$, P_i соответственно, то мы нашли бы все $n(n+1)$-параметрические подгруппы, которые не содержат инфинитезимальных преобразований $\sum e_k P_k$. Поэтому мы можем сразу сделать такую замену в выражениях (6) и получить:

$$x_k p_i + \alpha P_k, \quad p_i + \alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_j p_j + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_j p_i + \alpha_i P_j).$$

Здесь можно просто опустить член $\sum \alpha_j (x_j p_i + \alpha_i P_j)$, и поэтому в качестве общего вида $n(n+1)$-параметрических групп, не содержащих ни одного преобразования $\sum e_k P_k$, получается следующая группа:

$$p_i + \alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_j p_j, \quad x_i p_k + \alpha_k P_i. \tag{7}$$

Тот факт, что эти инфинитезимальные преобразования порождают группу, следует из их построения; разумеется, это можно и непосредственно подтвердить.

Если все α_i обращаются в нуль, то мы имеем уже упомянутую выше общую линейную группу, которая оставляет бесконечно удаленное плоское многообразие M_{n-1} инвариантным. Поэтому напрашивается предположение, что в общем случае, когда не все α_i равны нулю, существует также плоское многообразие $M_{n-1}: \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda = 0$, допускающее все инфинитезимальные преобразования (7).

В результате выполнения инфинитезимальных преобразований $p_i + + \alpha_i \sum x_j p_j$ для λ_i выполняются следующие условия:

$$\lambda_i + \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 = \lambda_i - \alpha_i \lambda.$$

Поэтому величина λ в любом случае не может обращаться в нуль и может быть положена равной 1; то есть если вообще существует инвариантное плоское M_{n-1}, то оно может иметь только следующий вид: $\alpha_1 x_1 + \cdots + + \alpha_n x_n + 1 = 0$. В действительности же последнее также допускает инфинитезимальные преобразования $x_i p_k + \alpha_k P_i$.

Следовательно, всякая подгруппа (7) оставляет плоское многообразие M_{n-1} пространства R_n инвариантным и, кроме того, является самой общей проективной группой пространства R_n, оставляющей это плоское M_{n-1} неподвижным. Действительно, любое другое инфинитезимальное проективное преобразование, которое оставляло бы плоское M_{n-1}: $\alpha_1 x_1 + \cdots + + \alpha_n x_n + 1 = 0$ инвариантным, принимало бы вид

$$\sum_{k=1}^{n} e_k P_k = \sum_{k=1}^{n} e_k x_k \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Если же применить это инфинитезимальное преобразование к M_{n-1}, то получается

$$\sum_{k=1}^{n} e_k x_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 = -\sum_{k=1}^{n} e_k x_k,$$

откуда $e_1 = \cdots e_n = 0$.

Таким образом, если $n(n+1)$-параметрическая проективная группа пространства R_n не содержит инфинитезимального преобразования $\sum e_k P_k$, то она состоит из всех проективных преобразований, оставляющих инвариантным плоское M_{n-1}, не проходящее через начало координат.

Из прежних результатов мы можем при помощи простого преобразования получить еще некоторые другие, которые нам в дальнейшем пригодятся. Так, если мы переместим прежнее начало координат при помощи

коллинеации

$$x_1 = \frac{1}{x_1'}, \quad x_2 = \frac{x_2'}{x_1'}, \cdots x_n = \frac{x_n'}{x_1'} \tag{7'}$$

в бесконечность, то получим

$$p_1' = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial x_1'} = -\frac{1}{x_1'^2}\left(p_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i' p_i\right),$$

следовательно,

$$p_1' = -x_1 \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = -P_1,$$

$$x_k' p_1' = -x_k \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = -P_k \quad (k = 2 \cdots n).$$

Аналогичным образом получается:

$$x_1' \sum_{i=1}^{n} x_i' p_i' = -p_1, \quad x_1' p_k' = -p_k \quad (k = 2 \cdots n),$$

и вообще, любое инфинитезимальное проективное преобразование при введении x' переходит в такое же преобразование (ср. гл. 4, утверждение 4, стр. 89).

Отсюда мы видим: наша коллинеация (7') превращает всякую $n(n+1)$-параметрическую проективную группу, в которой нет ни одного инфинитезимального преобразования $\sum e_k P_k$, в такую, которая не содержит никакого преобразования $e_1 p_1 + e_2 x_2 p_1 + \cdots + e_n x_n p_1$. Так же всякая не содержащая $\sum e_k p_k$ проективная группа переходит в такую, которая не содержит никакого преобразования $e_1 P_1 + e_2 x_1 p_2 + \cdots + e_n x_1 p_n$.

Поэтому если в $n(n+1)$-параметрической проективной группе не имеется никакого инфинитезимального преобразования $e_1 p_1 + e_2 x_2 p_1 + \cdots + e_n x_n p_1$, то эта группа состоит из всех проективных преобразований, которые оставляют некоторое плоское M_{n-1} инвариантным. Если, напротив, в группе нет никакого инфинитезимального преобразования $e_1 P_1 + e_2 x_1 p_2 + \cdots + e_n x_1 p_n$, то она состоит из всех проективных преобразований, оставляющих некоторую точку инвариантной.

Общая проективная группа обладает тем свойством, что может переводить *любую* точку пространства R_n в *любую* другую и *любое* плоское M_{n-1} в любое другое. Отсюда следует, что всякая $n(n+1)$-параметрическая проективная группа пространства R_n, оставляющая точку инвариантной, является равноправной с любой другой группой такого рода внутри общей проективной группы пространства R_n, и что также всякая $n(n+1)$-параметрическая проективная группа пространства R_n, оставляющая плоское M_{n-1} инвариантным, равноправна с любой другой проективной группой этого рода.

Теперь мы можем наконец-то приступить к нахождению всех $n(n+1)$-параметрических проективных групп.

Поскольку нам известны все такие группы, которые не содержат никаких переносов, то остается найти лишь те, в которых инфинитезимальные переносы встречаются. Предположим, что таких имеется ровно q независимых, скажем $p_n \cdots p_{n-q+1}$, т. е. что если $n-q>0$, то не имеется никаких переносов вида $e_1 p_1 + \cdots + e_{n-q} p_{n-q}$.

В нашей группе тогда обязательно имеется инфинитезимальное преобразование вида

$$\sum_{i=1}^{q} x_{n-q+i} \sum_{k=1}^{n-q} \lambda_{ik} p_k + e_1 p_1 + \cdots + e_{n-q} p_{n-q}, \tag{8}$$

если число $(n-q)(q+1)$ содержащихся в этом инфинитезимальном преобразовании членов больше n.

Это верно только тогда, когда $(n-q)(q+1)-n = q(n-q-1)$ больше нуля, откуда следует, что мы пока не должны рассматривать случаи $q=n-1$ и $q=n$. Однако если мы предположим, что $q<n-1$, и скомбинируем преобразование (8), в котором, очевидно, не все λ_{ik} обращаются в нуль, с каждым из имеющихся в подгруппе переносов $p_{n-q+1} \cdots p_n$, то в любом случае получим преобразование вида $\mu_1 p_1 + \cdots + \mu_{n-q} p_{n-q}$, не обращающееся тождественно в нуль, а это противоречие. Поэтому число q не может быть меньше $n-1$.

Таким образом, если $n(n+1)$-параметрическая проективная группа содержит *один* инфинитезимальный перенос $\sum e_k p_k$, то она содержит по крайней мере $n-1$ независимых переносов.

В этом утверждении мы снова можем, как это уже часто бывало, заменить p_i на P_i и найти, что в любой группе указанного вида имеется $n-1$ независимых преобразований $\sum e_k P_k$, если имеется хотя бы одно такое преобразование.

Теперь найдем все $n(n+1)$-параметрические проективные группы с ровно $n-1$ независимыми инфинитезимальными переносами $\sum e_k p_k$, например с $p_2 \cdots p_n$. Ни одна такая группа не может содержать преобразования вида

$$e_1 p_1 + e_2 x_2 p_1 + \cdots + e_n x_n p_1,$$

поскольку в результате комбинации с $p_2 \cdots p_n$ получилось бы p_1, что исключено. Согласно вышесказанному, все эти группы относятся поэтому к категории таких $n(n+1)$-параметрических проективных групп, которые оставляют плоское M_{n-1} инвариантным. Соответственно, получается, что всякая $n(n+1)$-параметрическая группа, содержащая ровно $n-1$ независимых преобразований $\sum e_k p_k$, оставляет некоторую точку инвариантной.

Остается еще описать $n(n+1)$-параметрические проективные группы, содержащие все n переносов $p_1 \cdots p_n$. Отметим кстати, что P_i не могут все одновременно входить в эту группу, так как иначе она совпала бы с самóй проективной группой.

Поэтому, согласно вышесказанному, имеются лишь две возможности: либо вообще никакого преобразования $\sum e_k P_k$ нет, либо их будет $n-1$ независимых. Оба случая уже разобраны выше.

Таким образом, наше исследование подошло к концу. Результат его таков:

Теорема 101. *Наибольшие подгруппы общей проективной группы n-мерного многообразия содержат $n(n+1)$ параметров. Каждая такая подгруппа состоит либо из всех проективных преобразований, оставляющих инвариантным плоское M_{n-1}, либо из всех преобразований, оставляющих одну точку инвариантной. В первом случае она равноправна внутри общей проективной группы с общей линейной группой p_i, $x_i p_k$, во втором — с группой $x_i p_k$, P_k*[6].

Поскольку группы из первой категории получаются из групп второй в результате замены p_i, $x_i p_k$, P_i на P_i, $-x_k p_i$, p_i, то все $n(n+1)$-параметрические подгруппы общей проективной группы голоэдрически изоморфны между собой. Кроме того, из вышесказанного следует

Утверждение 4. *Общая проективная группа пространства $x_1 \cdots x_n$ может быть так связана с самой собой изоморфизмом, что наибольшая подгруппа, оставляющая одну точку инвариантной, всякий раз соответствует наибольшей подгруппе, оставляющей плоское M_{n-1} инвариантным.*

[6] Ли, Math. Ann., том XXV, стр. 130.

Если $n = 1$, то различие между точкой и плоским M_{n-1} исчезает; поэтому общая трехпараметрическая проективная группа простого многообразия содержит лишь одну категорию двухпараметрических подгрупп, и все они равноправны между собой в трехпараметрической.

Общая проективная группа n-мерного пространства содержит согласно полученным ранее результатам $n(n+1)$ независимых инфинитезимальных преобразований, оставляющих заданную точку неподвижной, а именно: они порождают подгруппу, которая не содержится ни в какой бóльшей подгруппе. Отсюда следует (гл. 24, теор. 91, стр. 571), что общая проективная группа является примитивной и, более того, асистатической.

§ 140

Добавим к этому некоторые общие рассуждения, касающиеся описания всех подгрупп общей линейной группы p_i, $x_i\,p_k$ $(i, k = 1 \cdots n)$ пространства R_n.

Общее инфинитезимальное преобразование линейной группы пространства R_n можно записать так:

$$\left\{ \sum_{i,k}^{i \gtrless k} a_{ik} x_i\,p_k + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (x_i p_i - x_n\,p_n) + c \sum_{k=1}^{n} x_k\,p_k + \sum_{k=1}^{n} d_k\,p_k. \right. \tag{9}$$

Если скомбинировать два инфинитезимальных преобразования такого типа, то получится преобразование

$$\sum_{i,k}^{i \gtrless k} A_{ik} x_i\,p_k + \sum_{i=1}^{n-1} B_i (x_i\,p_i - x_n\,p_n) + C \sum_{k=1}^{n} x_k\,p_k + \sum_{k=1}^{p} D_k\,p_k,$$

в котором A_{ik}, B_i и C $(C = 0)$ зависят только от a_{ik}, b_i и c. Следовательно, укороченное инфинитезимальное преобразование

$$\sum_{i,k}^{i \gtrless k} a_{ik} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (x_i p_i - x_n p_n) + c \sum_{k=1}^{n} x_k p_k, \tag{10}$$

в свою очередь, является общим инфинитезимальным преобразованием линейной однородной группы от $x_1 \cdots x_n$.

Отсюда мы видим, что задача нахождения всех подгрупп общей линейной группы разбивается на две задачи, которые должны решаться одна за

другой. Сначала необходимо найти все подгруппы общей линейной однородной группы $x_i\,p_k$ $(i, k = 1 \cdots n)$; затем к инфинитезимальным преобразованиям каждой из найденных групп надо самым общим образом добавить члены $\sum \beta_k p_k$ так, чтобы вновь получилась группа. Таким образом, если $X_1 f \cdots X_r f$ — одна из найденных линейных однородных групп, то надо описать все группы вида

$$X_k f + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\, p_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_{\mu i}\, p_i \quad (k = 1 \cdots r, \quad \mu = 1 \cdots m, \quad m \leqslant n).$$

О дальнейшем решении обеих этих упрощенных задач мы здесь более ничего не скажем, а отошлем читателя к третьей части, в которой будут даны более подробные исследования проективных групп на плоскости и в трехмерном пространстве.

С другой стороны, мы не преминем обратить внимание на геометрический смысл, который имеет только что упомянутое разбиение данной задачи.

Для этого предположим, что группу (9) мы продолжили, рассматривая x, как и в гл. 25, стр. 574, в качестве вспомогательной переменной и добавляя производные $\frac{dx_i}{dt} = x_i'$. При этом получится группа

$$\sum a_{ik} x_i p_i + \sum b_i (x_i p_i - x_n p_n) + c \sum x_k p_k + \sum d_k p_k + \sum a_{ik} x_i' p_k' + \\ + \sum b_i (x_i' p_i' - x_n' p_n') + c \sum x_k' p_k',$$

в которой члены, отвечающие x_i', сами по себе задают группу, причем именно найденную выше группу (10). Но тогда, как мы там же видели, можно трактовать x_i' как однородные координаты направлений, проходящих через точки $x_1 \cdots x_n$ пространства R_n. Поэтому то, что x_i' относительно вышеупомянутой группы преобразуются сами по себе, означает не что иное, как то, что параллельная прямая при любом линейном преобразовании x переходит в точно такую же прямую; ведь направления, ставящие в соответствие всем точкам пространства R_n определенную систему значений x_i', параллельны между собой. Однако каждый пучок параллельных прямых дает одну совершенно определенную точку на бесконечно удаленном плоском многообразии M_{n-1} пространства R_n, то есть $x_1' \cdots x_n'$ *могут трактоваться просто как однородные координаты бесконечно удаленного плоского многообразия* M_{n-1}, и, следовательно, группа

$$\sum a_{ik}\, x_i'\, p_k' + \sum b_i (x_i'\, p_i' - x_n'\, p_n') + c \sum x_k'\, p_k' \qquad (11)$$

задает то, как бесконечно удаленные точки пространства R_n преобразуются группой (9). При этом надо еще заметить, что инфинитезимальное преобразование $\sum x'_k p'_k$ оставляет неподвижными все бесконечно удаленные точки, так что эти точки преобразуются последней выписанной группой точно так, как если бы c было равно нулю.

Теперь мы имеем внутреннее основание для указанного выше разделения задачи описания всех линейных групп пространства R_n. При этом мы полагаем, что эти группы поделены на классы, и к каждому классу относятся те группы, для которых группа (11) — одна и та же, то есть те, которые преобразуют бесконечно удаленные точки пространства R_n одинаковым образом (ср. т. же теорему 40, стр. 258).

§ 141

Чтобы дать хотя бы *одно* приложение изложенным выше общим рассуждениям, мы опишем все линейные группы пространства R_n, которые преобразуют бесконечно удаленные точки пространства R_n наиболее общим образом. Для всех этих групп соответствующая группа (11) имеет вид

$$x'_i p'_k, \quad x'_i p'_i - x'_k p'_k \quad (i, k = 1 \cdots n, \quad i \gtrless k),$$

к чему при определенных обстоятельствах может еще добавиться преобразование $x'_1 p'_1 + \cdots + x'_n p'_n$, оставляющее все бесконечно удаленные точки по отдельности неподвижными. Эти бесконечно удаленные точки будут согласно этому (n^2-1)-параметрически преобразовываться общей проективной группой $(n-1)$-мерного пространства.

Каждая из искомых групп должна содержать n^2-1 инфинитезимальных преобразований, из которых не может быть получено ни одного такого, которое оставляло бы все бесконечно удаленные точки инвариантными, то есть такого, которое имело бы вид $\gamma \sum_j x_j p_j + \sum_k \gamma_k p_k$. Эта группа поэтому заведомо содержит n^2-1 инфинитезимальных преобразований вида

$$\begin{cases} x_i\, p_k + \alpha_{ik} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\, p_j + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \beta_{ik\nu} p_\nu \quad (i \gtrless k), \\ x_i\, p_i - x_n\, p_n + \alpha_i \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\, p_j + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \beta_{i\nu}\, p_\nu. \end{cases} \tag{12}$$

Кроме того, могут встретиться еще одно или более инфинитезимальных преобразований вида $\gamma \sum_j x_j\, p_j + \sum_\nu \gamma_\nu p_\nu$.

Если группа требуемого типа содержит один перенос, то она содержит их все. Так, если этим переносом является $p_1 + e_2 p_2 + \cdots + e_n p_n$, то комбинируя его с

$$x_1 p_k + \alpha_{1k} \sum_{j=1}^{n} x_j p_j + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{1k\nu} p_\nu \quad (k = 2 \cdots n),$$

мы получаем таким образом $p_2 \cdots p_n$ и тем самым все p_i.

Поэтому мы сначала предположим, что все переносы там появляются. Если существует еще и преобразование $\sum x_j p_j$, то мы имеем саму общую линейную группу. Если же преобразования $\sum x_j p_j$ нет, то при помощи комбинации преобразований (12), в которых мы до этого можем положить $\beta_{ik\nu}$ и $\beta_{i\nu}$ равными нулю, получаем

$$\left(x_i p_k + \alpha_{ik} \sum_{j=1}^{n} x_j p_j, x_k p_i + \alpha_{ki} \sum_{j=1}^{n} x_j p_j \right) = x_i p_i - x_k p_k,$$

так что все α_i равны нулю. Но, кроме того,

$$\left(x_i p_i - x_k p_k, x_i p_k + \alpha_{ik} \sum_{j=1}^{n} x_j p_j \right) = 2 x_i p_k.$$

Следовательно, эта группа является специальной линейной.

Если в искомой группе нет ни одного переноса, но есть преобразование

$$\sum_{j=1}^{n} x_j p_j + \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu p_\nu = \sum_{j=1}^{n} (x_j + \gamma_j) p_j, \tag{13}$$

то все α_{ik} и все α_i могут быть положены равными нулю. Если мы к тому же запишем инфинитезимальное преобразование (12) в виде

$$(x_i + \gamma_i) p_k + \sum_{\nu=1}^{n} \beta'_{ik\nu} p_\nu \quad (i \gtrless k),$$

$$(x_i + \gamma_i) p_i - (x_n + \gamma_n) p_n + \sum_{\nu=1}^{n} \beta'_{i\nu} p_\nu,$$

то при помощи комбинации с $\sum (x_i + \gamma_i) p_i$ сразу увидим, что все $\beta'_{ik\nu}$ и $\beta'_{i\nu}$ обращаются в нуль, и находим, таким образом, группу

$$(x_i + \gamma_i) p_k \quad (i, k = 1 \cdots n).$$

Наконец, если не встречается ни одного преобразования вида (13), то сначала в результате комбинации из (12) следует, что все α_{ik} и α_i равны нулю. Далее получается

$$\left(x_i p_k + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{ik\nu}\, p_\nu, x_k\, p_i + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{ki\nu}\, p_\nu\right) = x_i\, p_i - x_k\, p_k + \beta_{ikk}\, p_i - \beta_{kii}\, p_k,$$

и, кроме того,

$$\left((x_i + \beta_{ikk})\, p_i - (x_k + \beta_{kii}) p_k,\ x_i\, p_k + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{ik\nu}\, p_\nu\right) = \\ = 2x_i\, p_k + 2\beta_{ikk}\, p_k - \beta_{iki}\, p_i,$$

так что все $\beta_{ik\nu}$, за исключением β_{ikk} и β_{kii}, через которые также выражаются $\beta_{i\nu}$, обращаются в нуль.

Если теперь $n > 2$, то β_{ikk} могло бы варьироваться вместе с k; однако это не так. А именно: если мы в

$$(x_i + \beta_{ikk}) p_i - (x_k + \beta_{kii}) p_k$$

заменим i и k сперва на k, j, а затем — на j, i и сложим эти три получившихся преобразования, то сумма должна будет обратиться в нуль, потому что переносов возникнуть не может. Итак, мы получаем $\beta_{ikk} = \beta_{ijj}$ и т. д. Поэтому если мы вместо β_{ikk} кратко запишем β_i, то получим группу:

$$(x_i + \beta_i)\, p_k, \quad (x_i + \beta_i)\, p_i - (x_k + \beta_k)\, p_k \quad (i \gtrless k).$$

Тем самым все случаи рассмотрены. Введя в обоих последних видах группы в качестве новой x_i соответственно $x_i + \gamma_i$ и $x_i + \beta_i$, мы можем сформулировать наш результат следующим образом.

Теорема 102. *Общая линейная группа от n переменных содержит только три различных типа подгрупп, которые так же, как и сама эта группа, (n^2-1)-параметрически преобразуют точки бесконечно удаленной плоскости: таковыми являются, во-первых, специальная линейная группа, и, во-вторых, все подгруппы, равноправные с однородными группами*[7]

$$x_i\, p_k; \quad x_i\, p_k,\ x_i\, p_i - x_k\, p_k \quad (i \gtrless k).$$

[7] Ли, Archiv for Math. og Nat., том IX, стр. 103 и 104, Христиания, 1884 г.

Таким образом, мы имеем здесь характеристическое свойство, которое является общим для всех уже известных нам групп. Напротив, признаки отличия этих четырех групп вкратце таковы: общая линейная группа оставляет отношения всех объемов, а специальная линейная группа — все объемы инвариантными. Общая и специальная линейные однородные группы отличаются от общей и специальной линейных соответственно тем, что они еще оставляют точку $x_i = 0$ инвариантной.

§ 142

В начале предыдущего параграфа мы видели, что описание всех линейных групп пространства R_n значительно упрощается, если известны все линейные однородные группы пространства R_n. Последнюю же задачу решить несложно, если известны все проективные группы пространства R_{n-1}. Это мы сейчас покажем.

Общая линейная однородная группа пространства R_n : $x_i p_k$ $(i, k = 1 \cdots n)$ содержит, как мы знаем, инвариантную подгруппу с $n^2 - 1$ параметрами, а именно: специальную линейную однородную группу

$$x_i\, p_k, \quad x_i\, p_i - x_k\, p_k \quad (i, k = 1 \cdots n,\ i \gtrless k).$$

Последняя является равносоставленной с общей проективной группой пространства R_{n-1}, поэтому ее подгруппы можно сразу выписать, если известны все проективные группы пространства R_{n-1} (ср. в связи с этим следующую главу). Тогда подгруппы группы $x_i p_k$ находятся при помощи следующих рассуждений.

r-параметрическая подгруппа G_r группы $x_i p_k$ либо содержится также в группе $x_i\, p_k, x_i\, p_i - x_k\, p_k\, (i \gtrless k)$, либо не содержится. В первом случае она была бы уже известна, во втором она имела бы согласно утверждению 7, стр. 235, подгруппу G_{r-1}, общую со специальной линейной однородной группой. Поэтому чтобы найти все линейные однородные G_r второго типа, нам надо лишь к каждой подгруппе G_{r-1} : $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ группы $x_i\, p_k, x_i\, p_i - x_k p_k$ $(i \gtrless k)$ добавить инфинитезимальное преобразование вида

$$Yf = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i + \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_{kj}\, x_k\, p_j \quad \left(\sum_k \alpha_{kk} = 0\right)$$

и при помощи комбинации с $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ найти все значения α_{kj}, которые приводят к группе. При этом надо заметить, что $(r-1)$-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_{r-1} f$, очевидно, должна быть в искомой r-параметрической группе инвариантной; поэтому мы можем сказать, что найдем самые

общие значения α_{kj}, если будем искать самое общее линейное однородное инфинитезимальное преобразование Yf, которое оставляет заданную $(r-1)$-параметрическую группу инвариантной. Кстати, *одну* r-параметрическую группу мы всегда получим, если положим все a_{kj} равными нулю.

Если принять во внимание инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_{r-1} f$, то ясно, что $r-1$ из a_{kj} могут быть приравнены нулю. Поэтому чем меньше число r, тем больше констант должно быть определено. Для малых значений r (но не только) зачастую более удобным является следующий метод.

r-параметрические подгруппы группы $x_i\, p_k$ можно еще и по-другому поделить на две категории: 1) те, что содержат преобразование $\sum x_i\, p_i$, — их мы можем при наложенных условиях немедленно выписать, — и 2) те, что преобразования $x_1\, p_1 + \cdots + x_n\, p_n$ не содержат. В последнем случае r инфинитезимальных преобразований группы должны иметь вид

$$X_k f + \alpha \sum_{i=1} x_i\, p_i, \tag{14}$$

где $X_k f$ представляют собой инфинитезимальные преобразования специальной линейной однородной группы. Поскольку преобразование $\sum x_i\, p_i$ перестановочно со всеми $X_k f$, то при вычислении скобки безразлично, обращаются α_i в нуль или нет; поэтому $X_1 f \cdots X_r f$ должны сами порождать группу, а именно: r-параметрическую подгруппу группы x_i, p_k, $x_i\, p_i - x_k\, p_k$ $(i \gtrless k)$, одну из тех, которые мы предполагаем известными. Следовательно, остается лишь так задать α_k самым общим образом, чтобы инфинитезимальные преобразования (14) порождали группу. При известных условиях можно сразу видеть, что некоторые из α_k обращаются в нуль; так, если имеет место уравнение вида

$$(X_i\, X_k) = X_j f,$$

то α_j обязательно должно быть равно нулю.

Если все $(X_i\, X_k)$ порождают ϱ-параметрическую группу (гл. 15, утверждение 6, стр. 290), то можно предположить, что инифинитезимальные преобразования $X_k f$ выбраны так, что все $(X_i\, X_k)$ могут быть линейно получены из $X_1 f \cdots X_\varrho f$. Тогда $\alpha_1 = \cdots = \alpha_\varrho = 0$, в то время как все другие α_i могут быть отличны от нуля. Поэтому если $\varrho < r$, то возникают произвольные параметры. Дают ли различные значения этих параметров различные *типы* линейных однородных групп, другими словами, являются ли соответствующие параметры существенными, должно быть в каждом отдельном случае исследовано особо. Решение этой задачи для $n = 2$ см. в третьей части.

§ 143

Если задана линейная однородная группа G_r, которая не содержится в специальной линейной, то эта G_r, как мы уже выше замечали, включает в себя инвариантную $(r-1)$-параметрическую подгруппу, инфинитезимальные преобразования которой характеризуются тем, что имеют вид

$$\sum_{i,k}^{i \gtrless k} a_{ik}\, x_i\, p_k + \sum_{i=1}^{n-1} a_i (x_i\, p_i - x_n\, p_n).$$

Если применить это замечание к присоединенной группе:

$$E_\nu f = \sum_{k,s=1}^{r} c_{k\nu s}\, e_k \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (\nu = 1 \cdots r),$$

соответствующей *произвольной* r-параметрической группе $X_1 f \cdots X_r f$, то мы непосредственно увидим, что она (если не все r сумм $\sum_k c_{k\nu k}$ обращаются в нуль) содержит инвариантную подгруппу, инфинитезимальные преобразования которой $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_r E_r f$ определены уравнениями, задающими условие инвариантности:

$$\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \sum_{k=1}^{r} c_{k\nu k} = 0.$$

Если, наконец, вспомнить, что всякая группа изоморфна своей присоединенной, то мы получим следующее

Утверждение 5. *Если r независимых инфинитезимальных преобразований $X_1 f \cdots X_r f$ r-параметрической группы находятся попарно в соотношениях $(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$, и если по крайней мере одна из r сумм $\sum_k c_{\nu kk}$ отлична от нуля, то все инфинитезимальные преобразования $\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \sum_{k=1}^{r} c_{\nu kk} = 0,$$

порождают инвариантную $(r-1)$-параметрическую подгруппу[8].

[8] Ли, Archiv for Math., том IX, стр. 89, Христиания, 1884 г.; Fortschritte der Mathematik, том XVI, стр. 325.

При более подробом исследовании общей проективной группы необходимо, конечно, особое внимание уделить ее присоединенной группе $\sum e_k E_k f$, а также соответствующим инвариантным системам уравнений в переменных e_k. Здесь же — лишь два кратких, но важных замечания.

Если, как обычно, интерпретировать e_k как однородные координаты точек пространства размерности n^2+2n-1, то среди всех инвариантных многообразий этого пространства имеется одно, размерность которого имеет наименьшее значение. Это важное многообразие состоит из всех точек e_k, которые представляют либо переносы, либо равноправные с ними преобразования. Оно не содержится ни в одном плоском многообразии этого пространства. Впрочем, известная классификация всех проективных преобразований дает, разумеется, сразу все инвариантные многообразия пространства $e_1 \cdots e_r$.

При любом инфинитезимальном проективном преобразовании, равноправном с переносом, все точки плоского M_{n-1} в пространстве x_k, а также все плоские M_{n-1}, проходящие через некоторую точку этого M_{n-1}, остаются инвариантными. Всякое такое преобразование полностью определено упомянутым первым инвариантным плоским M_{n-1} и его выделенной инвариантной точкой.

Если $n=2$, то мы можем сказать, что любое равноправное с инфинитезимальным переносом проективное преобразование плоскости x_1, x_2 полностью представлено *линейным элементом*. В соответствии с этим в трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3 всякое равноправное с инфинитезимальным переносом проективное преобразование будет представлено *элементом поверхности* и т. д. Эти замечания найдут применение в третьей части книги.

Глава 27

Линейные однородные группы

Общую линейную однородную группу от n переменных $x_1 \cdots x_n$ мы в предыдущей главе, стр. 629, определили как общую проективную группу n-мерного пространства $x_1 \cdots x_n$ (или кратко R_n), оставляющую бесконечно удаленное плоское многообразие M_{n-1} и одновременно точку $x_1 = \cdots = x_n = 0$ инвариантными. Другой смысл эта группа приобретает, если трактовать $x_1 \cdots x_n$ как однородные координаты в $(n-1)$-мерном пространстве. Эту трактовку следует положить в основу настоящей главы.

§ 144

Мы полагаем, что переход от обычных декартовых координат $y_1 \cdots y_{n-1}$ $(n-1)$-мерного пространства R_{n-1} к однородным координатам $x_1 \cdots x_n$ происходит при помощи соотношений

$$y_k = \frac{x_k}{x_n} \quad (k = 1 \cdots n-1).$$

Тогда n^2-параметрической общей линейной однородной группе

$$x_1' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \quad (i = 1 \cdots n) \tag{1}$$

соответствует в переменных $y_1 \cdots y_{n-1}$ мероэдрически изоморфная группа

$$y_1' = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} y_k + \alpha_{in}}{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{nk} y_k + \alpha_{nn}} \quad (i = 1 \cdots n-1), \tag{2}$$

т. е. (n^2-1)-параметрическая общая проективная группа пространства R_{n-1}. Всякому линейному однородному преобразованию (1) соответствует

согласно этому единственное проективное преобразование (2), то есть совершенно определенная коллинеация пространства R_{n-1}, тогда как всякому проективному преобразованию (2), напротив, соответствуют в целом ∞^1 различных линейных однородных преобразований.

Можно, кстати, установить однозначно обратимое соответствие между линейными однородными преобразованиями в координатах $x_1 \cdots x_n$ и проективными преобразованиями в координатах $y_1 \cdots y_{n-1}$, если на константы α_{ik} наложить условие $\sum \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{nn} = 1$, то есть если вместо общей рассматривать специальную линейную однородную группу, являющуюся голоэдрически изоморфной общей проективной группе (2) (ср. гл. 26, стр. 613). Мы хотим подробно описать это соответствие для инфинитезимальных преобразований обеих групп.

Специальная линейная однородная группа от $x_1 \cdots x_n$ содержит следующие $n^2 - 1$ независимых инфинитезимальных преобразований:

$$x_i p_k, \quad x_i p_i - x_k p_k \quad (i \gtrless k). \tag{3}$$

Чтобы найти соответствующие инфинитезимальные преобразования в $y_1 \cdots y_{n-1}$, нам требуется лишь подсчитать для каждого отдельного из вышеупомянутых преобразований приращения

$$\delta y_i = \frac{x_n \delta x_i - x_i \delta x_n}{x_n^2} \quad (i = 1 \cdots n-1).$$

Таким образом, мы найдем следующую таблицу:

$$\begin{cases} x_n p_k \equiv q_k, \quad x_k p_n \equiv -y_k (y_1 q_1 + \cdots y_{n-1} q_{n-1}), \\ x_k p_k - x_n p_n \equiv y_k q_k + y_1 q_1 + \cdots + y_{n-1} q_{n-1}, \quad x_i p_k \equiv y_i q_k \\ (i, k = 1 \cdots n-1; \quad i \gtrless k), \end{cases} \tag{4}$$

где вместо $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ пишется q_i. И так же наоборот, всякому инфинитезимальному преобразованию проективной группы (2) эта таблица ставит в соответствие инфинитезимальное преобразование специальной линейной однородной группы (3); из уравнений (4) мы непосредственно получим следующие формулы:

$$n(y_1 q_1 + \cdots + y_{n-1} q_{n-1}) \equiv x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n - n x_n p_n,$$
$$n y_k q_k \equiv n x_k p_k - (x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n).$$

Теперь можно также легко указать, какие ∞^1 инфинитезимальных преобразований общей линейной группы (1) соответствуют заданному инфинитезимальному преобразованию проективной группы (2). А именно: инфинитезимальное преобразование $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ сводится в переменных

$y_1 \cdots y_{n-1}$ к тождеству, поскольку для него все приращения y_k обращаются в нуль. Поэтому если инфинитезимальному преобразованию Xf специальной однородной группы (3) соответствует инфинитезимальное преобразование Yf проективной группы (2), то все ∞^1 инфинитезимальных преобразований общей однородной группы (1), соответствующих Yf, содержатся в выражении $Xf + c(x_1p_1 + \cdots + x_np_n)$, где c означает произвольную константу.

Если система уравнений

$$\Omega_k(y_1 \cdots y_{n-1}) = 0 \quad (k = 1 \cdots m)$$

допускает в переменных $y_1 \cdots y_{n-1}$ конечное или инфинитезимальное проективное преобразование, то соответствующая система уравнений от x:

$$\Omega_k\left(\frac{x_1}{x_n} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 0 \quad (k = 1 \cdots m),$$

естественно, допускает соответствующее конечное или инфинитезимальное преобразование группы (3); кроме того, она также допускает в силу своей однородности инфинитезимальное преобразование $x_1p_1 + \cdots + x_np_n$.

И наоборот, всякая система уравнений от $x_1 \cdots x_n$, допускающая $x_1\,p_1 + \cdots + x_n\,p_n$, является однородной. Но тогда, если мы запишем проективную группу пространства R_{n-1} в однородных переменных $x_1 \cdots x_n$, все сводится лишь к отношениям между x, то есть лишь к системам уравнений, однородных по x. Поэтому мы будем добавлять инфинитезимальное преобразование $x_1\,p_1 + \cdots + x_n\,p_n$ всякий раз, когда, записав инфинитезимальные преобразования проективной группы пространства R_{n-1} при помощи таблицы (4) в однородном виде, мы хотим найти соответствующие инвариантные системы уравнений от $x_1 \cdots x_n$. Полученная таким образом группа от $x_1 \cdots x_n$ является аналитическим представлением соответствующей проективной группы пространства R_{n-1} в однородных переменных.

Если мы хотим при исследовании проективной группы рассматривать также бесконечно удаленные точки, то необходимо записывать эту группу в однородных переменных.

§ 145

В предыдущем параграфе мы показали, что инфинитезимальные проективные преобразования пространства R_{n-1} могут быть заменены инфинитезимальными линейными однородными преобразованиями от n пере-

менных. Теперь представим себе, что нам дано произвольное преобразование этого типа от переменных $x_1 \cdots x_n$, например

$$Xf = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} x_i p_k,$$

и исследуем его более подробно. А именно: нас интересуют плоские многообразия пространства R_{n-1}, допускающие соответствующее инфинитезимальное преобразование. Таким образом, нам удастся показать, что Xf может всегда быть приведена к определенному каноническому виду в результате введения надлежащих новых переменных $x_i' = \sum c_{ik} x_k$.

Если плоское многообразие M_{n-2}: $\sum c_i x_i = 0$ пространства R_{n-1} допускает инфинитезимальное преобразование Xf, то согласно теореме 14, стр. 125, оно в то же время допускает все конечные преобразования соответствующей однопараметрической группы. Тогда M_{n-2} допускает инфинитезимальное преобразование Xf тогда и только тогда, когда выражение $X(\sum c_i x_i)$ обращается в нуль одновременно с $\sum c_i x_i$. Поскольку $X(\sum c_i x_i)$ является линейным по x_i, то это условие сводится к тождественному выполнению соотношения вида

$$X\left(\sum_{k=1}^{n} c_k x_k\right) = \varrho \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

где ϱ — константа. Следующее отсюда уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} c_k - \varrho c_i\right) x_i = 0$$

разбивается на n уравнений:

$$a_{1i} c_i + \cdots + (a_{ii} - \varrho) c_i + \cdots + a_{ni} c_n = 0 \quad (i = 1 \cdots n), \tag{5}$$

которые могут выполняться, если определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \varrho & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = \Delta(\varrho) \tag{6}$$

обращается в нуль. Это дает для ϱ уравнение n-й степени с n корнями, среди которых, однако, могут быть кратные. Таким образом, при любых

условиях имеется хотя бы одно плоское многообразие $M_{n-2} : c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$, остающееся инвариантным относительно однопараметрической группы.

Как известно, точно таким же образом можно понять, что любое конечное проективное преобразование или, в однородной записи, любое преобразование $x_i' = \sum b_{ik}x_k$ также оставляет как минимум одно плоское многообразие M_{n-2} неподвижным. Это, кстати, следует из того, что преобразование $x_i' = \sum b_{ik}x_k$ принадлежит некоторой однопараметрической группе Xf.

Если найденное выше уравнение $\Delta(\varrho) = 0$ имеет в точности n различных корней ϱ, то для группы Xf в целом n отдельных плоских многообразий M_{n-2} остаются инвариантными; так, два различных корня ϱ_1 и ϱ_2 этого уравнения на ϱ в соответствии с видом уравнений (5) всегда также дают две различные системы значений $c_1 : c_2 : \cdots : c_n$. Если же имеются кратные корни ϱ, то могут возникать различные случаи. А именно: если для m-кратного корня ϱ сам определитель (6) обращается в нуль, а его миноры порядка $n-1$ — не все обращаются в нуль, то для соответствующего значения ϱ в точности $n-1$ среди уравнений (5) остаются друг от друга независимыми, и тогда все отношения между c_i однозначно определены. Следовательно, этому m-кратному корню соответствует лишь одно единственное инвариантное плоское многообразие M_{n-2}, но оно считается m-кратным. Если же для m-кратного корня не только сам определитель (6) равен нулю, но и все его миноры порядка $n-1 \cdots n-q+1$ (но не все порядка $n-q$ ($q \leqslant m$)) обращаются в нуль, то уравнения (5) сводятся ровно к $n-q$ независимым, и $q-1$ среди отношений c_i остаются произвольно выбираемыми. Поэтому m-кратный корень ϱ дает в этом случае семейство из ∞^{q-1} плоских многообразий M_{n-2}, остающихся инвариантными по отдельности.

Легко видеть, что корень уравнения $\Delta(\varrho) = 0$ является по меньшей мере q-кратным, если для него все миноры порядка $n-q+1$ из $\Delta(\varrho)$ обращаются в нуль. Дело в том, что производные порядка $(q-1)$ от $\Delta(\varrho)$ по ϱ выражаются суммами миноров порядка $n-q+1$ из $\Delta(\varrho)$.

Если бы мы хотели уже здесь исходить из того, что теория двойственности известна, то мы могли бы сразу заключить, что инфинитезимальное преобразование Xf в пространстве R_{n-1} также оставляет хотя бы одну *точку* инвариантной. Однако мы предпочитаем доказать и это непосредственно, тем более что при этом мы получим более глубокий взгляд на ситуацию.

В однородных переменных $x_1 \cdots x_n$ точка представляется $n-1$ уравнениями вида $x_ix_k^0 - x_kx_i^0 = 0$; следовательно, эта точка будет допускать все

преобразования однопараметрической группы Xf, если $Xx_i \cdot x_k^0 - Xx_k \cdot x_i^0$ в силу уравнений $x_i x_k^0 - x_k x_i^0 = 0$ обращается в нуль, то есть если имеют место n соотношений вида

$$Xx_i = \sigma x_i \quad (i = 1 \cdots n).$$

Поэтому для x_i и σ мы получим n уравнений, выражающих это условие:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + (a_{ii} - \sigma)x_i + \cdots + a_{in}x_n = 0 \quad (i = 1 \cdots n).$$

Если не рассматривать ничего не говорящее нам решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$, то σ должно быть корнем уравнения

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \sigma & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

и каждый такой корень дает одну инвариантную точку. Таким образом, нахождение точек, остающихся неподвижными под действием Xf, приводит к тому же алгебраическому уравнению, что и нахождение инвариантных плоских многообразий $M_{n-2} : c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$.

Поэтому если это уравнение n-ой степени имеет n различных корней, то в пространстве $R_{n-1} : x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ не только n различных плоских многообразий $M_{n-2} : \sum c_k x_k = 0$, но также и n отдельных точек остаются инвариантными. Причем не все эти n точек лежат в одном и том же плоском многообразии M_{n-2}, поскольку если в плоском многообразии M_{n-2} n различных точек остаются фиксированными, то бесконечно много точек многообразия M_{n-2} неизбежно сохраняют свое положение, что при наложенном условии исключено. Это свойство n инвариантных точек мы можем кратко выразить, сказав, что при действии Xf остается инвариантной невырожденная n-поверхность[1].

Если возникают кратные корни, то снова необходимо различать два случая. Если не все миноры порядка $n - 1$ обращаются в нуль для m-кратного корня, то этот корень дает одно инвариантное плоское многообразие M_{n-2} и одну инвариантную точку, которые считаются m-кратными. Если же для этого корня все миноры порядка $n - 1 \cdots n - q + 1$, но не все порядка $n - q$ равны нулю $(q \leqslant m)$, то этому корню соответствует семейство из ∞^{q-1} отдельных инвариантных плоских многообразий M_{n-2} и одно плоское многообразие, состоящее из ∞^{q-1} отдельных инвариантных точек. Таким образом, верно следующее

[1] Ли использует термин n-Flach, имея в виду систему из n гиперповерхностей, находящихся в общем положении. — *Прим. ред.*

Утверждение 1. *Всякое инфинитезимальное преобразование*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}\, x_i\, p_k$$

от однородных переменных $x_1 \cdots x_n$ *или, что то же самое, всякое инфинитезимальное проективное преобразование от* $n-1$ *переменных*

$$\frac{x_1}{x_n} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

оставляет некоторое множество точек $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ *и некоторое множество плоских многообразий* $M_{n-2}\colon c_i x_i + c_n x_n = 0$ *инвариантными. Точки, остающиеся неподвижными, заполняют конечное число, причем не более* n *отдельных плоских многообразий. Инвариантные плоские многообразия* M_{n-2} *также образуют конечное число, причем не более* n *отдельных линейных пучков.*

Если инфинитезимальное преобразование Xf имеет вид $\sum x_k\, p_k$, то оно оставляет вообще все точки $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ и, конечно же, все плоские многообразия $M_{n-2} : \sum c_i x_i = 0$ инвариантными. Из найденного до сих пор можно сделать дальнейшие выводы. Сначала рассмотрим специальный случай, когда вышеупомянутое уравнение n-го порядка имеет n различных корней. В этом случае имеется n отдельных инвариантных плоских многообразий $M_{n-2} : \sum_i c_{ki} x_i = 0$, которые, согласно вышесказанному, образуют n-поверхность[2]. Поэтому мы можем ввести

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}\, x_i \quad (k = 1 \cdots n)$$

как новую однородную переменную и должны при этом получить в переменных $x'_1 \cdots x'_n$ инфинитезимальное преобразование, которое оставляет n уравнений $x'_k = 0$ инвариантными, то есть имеет вид

$$Xf = a'_1\, x'_1\, p'_1 + \cdots + a'_n\, x'_n\, p'_n.$$

К этой канонической форме можно привести Xf при наложенных условиях. Разумеется, никакие две из величин $a'_1 \cdots a'_n$ не являются здесь одинаковыми, так как уравнение

$$(a'_1 - \varrho) \cdots (a'_n - \varrho) = 0$$

должно, очевидно, иметь n различных корней.

[2]См. комментарий выше. — *Прим. ред.*

Подобные канонические формы для Xf существуют также тогда, когда уравнение на ϱ имеет кратные корни. Однако мы не намерены их рассматривать, а лишь хотим показать, что существует каноническая форма, к которой *всякое* инфинитезимальное преобразование

$$Xf = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}\, x_i\, p_k$$

может быть приведено путем надлежащей замены переменных $x'_k = \sum h_{ki} x_i$, т. е. при помощи подходящей коллинеации пространства R_{n-1}, вне зависимости от свойств уравнения $\Delta(\varrho) = 0$.

Поскольку Xf всегда оставляет одну точку инвариантной, мы можем предположить, что наши координаты выбраны так, что точка $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$ остается фиксированной. При этом мы находим:

$$Xf = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a'_{ik}\, x_k\, p_i + \sum_{k=1}^{n} a'_{nk}\, x_k\, p_n = X'f + \sum_{k=1}^{n} a'_{nk}\, x_k\, p_n. \qquad (7)$$

К линейному инфинитезимальному преобразованию $n-1$ переменных $x_1 \cdots x_{n-1}$ мы можем применить тот же самый метод, который позволил нам привести Xf к виду (7) и, таким образом, получаем

$$Xf = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-2} a''_{ik}\, x_k\, p_i + \sum_{k=1}^{n-1} a''_{n-1,k}\, x_k\, p_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} a'_{nk}\, x_k\, p_n.$$

Здесь мы снова можем аналогично поступить с правой частью. В результате получается

Теорема 103. *Во всякое линейное однородное инфинитезимальное преобразование от n переменных можно ввести n таких линейных однородных функций этих переменных в качестве новых переменных, что данное инфинитезимальное преобразование принимает канонический вид:*

$$a_{11}\, x_1\, p_1 + (a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2)\, p_2 + \cdots + (a_{n1}\, x_1 + \cdots + a_{nn}\, x_n)\, p_n.$$

Довольно интересно было бы интерпретировать способ, которым получен этот результат, геометрически.

Поскольку Xf в любом случае оставляет одну точку инвариантной, мы выбрали выше такую точку в качестве начала координат $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$. Тогда отношения $x_1 : x_2 : \cdots : x_{n-1}$ представляют прямые,

проходящие через выбранную точку; эти прямые переставляются между собой при преобразовании Xf одновременно с точками $x_1 : \cdots : x_n$, а именно линейным инфинитезимальным преобразованием $X'f$ от $n-1$ переменных $x_1 \cdots x_{n-1}$. Но, согласно вышесказанному, при действии $X'f$ некоторая система отношений $x_1 : \cdots : x_{n-1}$, то есть прямая, проходящая через вышеуказанную точку, должна оставаться инвариантной. Эту прямую мы выбираем в качестве оси $x_1 = \cdots = x_{n-2} = 0$ нашей системы координат, тогда соотношения $x_1 : \cdots : x_{n-2}$ представляют плоские многообразия M_2, проходящие через эту ось. Эти многообразия M_2 также переставляются между собой преобразованием Xf, одно из них заведомо остается инвариантным и позволяет нам сделать следующий шаг в построении системы координат, и т. д.

Таким образом мы видим, что систему координат можно выбрать так, что Xf получает указанную выше нормальную форму. Однако мы хотим проведенные только что рассуждения сформулировать в специальном утверждении, поскольку они выражают одно общее свойство инфинитезимальных проективных преобразований пространства R_{n-1}.

Утверждение 2. *При любом инфинитезимальном проективном преобразовании пространства R_{n-1} по крайней мере одна точка остается инвариантной, через любую инвариантную точку проходит по крайней мере одна инвариантная прямая ... наконец, через любое инвариантное плоское многообразие M_{n-3} — по крайней мере одно инвариантное плоское многообразие M_{n-2}.*

§ 146

Результаты из предыдущего параграфа, по сути, уже давно известны и по существу совпадают с принадлежащим *Коши* сведением системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к нормальной форме.

Ниже мы существенно обобщим прежние результаты, но прежде необходимо включить замечания другого рода, которые, однако, строго говоря, подпадают под общие результаты главы 23, стр. 526 и ниже. Но здесь мы можем провести рассуждения несколько более простым способом.

Пусть задана какая-нибудь r-параметрическая группа G_r с $(r-m)$-параметрической *инвариантной* подгруппой G_{r-m}, T означает произвольное преобразование группы G_r, а S — произвольное преобразование подгруппы G_{r-m}. Тогда, по предположению, имеют место равенства вида

$$T^{-1}ST = S_1, \quad TS_1T^{-1} = S,$$

где S_1 — опять же преобразование подгруппы G_{r-m}, причем совершенно произвольное, если только подходящим образом выбрать S.

Если теперь любое преобразование S оставляет некоторую фигуру[3] M инвариантной, то имеет место

$$(M)S = (M),$$

а также следующее уравнение:

$$(M)TT^{-1}ST = (M)T,$$

которое показывает, что фигура $(M)T$ допускает всякое преобразование $T^{-1}ST$, следовательно, вообще всякое преобразование S.

Утверждение 3. *Если G_r — r-параметрическая группа, а G_{r-m} — ее инвариантная подгруппа, если, наконец, M — фигура, допускающая все преобразования подгруппы G_{r-m}, то и всякое положение, которое принимает M под действием преобразования группы G_r, остается при всех преобразованиях подгруппы G_{r-m} инвариантным.*

В частности, пусть эти две группы, G_r и G_{r-m}, являются проективными группами пространства R_{n-1}, причем записанными в n переменных. Пусть множество M является точкой. Тогда каждая отдельно взятая инвариантная при всех S точка переходит при выполнении всех преобразований T исключительно в такие точки, которые опять же допускают все преобразования S. Следовательно, *совокупность всех* инвариантных относительно группы G_{r-m} точек остается инвариантной также относительно группы G_r, однако в общем случае отдельные точки этой совокупности переставляются между собой группой G_r.

Выше мы видели, что все точки, остающиеся инвариантными относительно однопараметрической проективной группы, организуются не более чем в n конечным образом отличных друг от друга плоских многообразий. Это справедливо, конечно, также и для тех точек, которые сохраняют свое положение относительно нашей G_{r-m}. Поэтому пусть $M_1, M_2, \cdots M_\varrho$ ($\varrho \leqslant n$) — конечным образом различные плоские многообразия, все точки которых остаются фиксированными относительно G_{r-m}, тогда как вне этих многообразий нет ни одной инвариантной относительно G_{r-m} точки. Если бы группа G_r была разрывной, — проведенные рассуждения остаются в силе и в этом случае, — то многообразия $M_1 \cdots M_\varrho$ можно было бы группой G_r переставлять между собой. Другое дело, когда G_r непрерывна,

[3] Ли использует термин Punktfigur, понимая под этим просто некоторое множество точек. — *Прим. ред.*

то есть порождена инфинитезимальными преобразованиями. Если бы, скажем, M_1 принимала под действием содержащихся в G_r преобразований новые положения, то они должны были бы образовывать непрерывное семейство. Но мы только что видели, что M_1 может принимать самое большее $M_1 \cdots M_\varrho$ конечным образом отличных друг от друга положений. Следовательно, никакое преобразование из G_r не может изменить положение M_1. Точно так же, естественно, любое другое из ϱ многообразий M_k при всех преобразованиях группы G_r остается на своем месте.

Мы хотим теперь еще добавить условие, что m имеет значение 1. Пусть $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ — независимые инфинитезимальные преобразования из группы G_{r-1}, инвариантной в G_r, а $X_1 f \cdots X_{r-1} f$, Yf — преобразования из G_r; кроме того, пусть $x_1 = 0, \cdots x_q = 0$ — одно из плоских многообразий $M_1 \cdots M_\varrho$, все точки которого остаются инвариантными относительно $X_1 f \cdots X_{r-1} f$.

Поскольку, как нам известно, Yf заведомо оставляет многообразие $x_1 = 0, \cdots x_q = 0$ инвариантным, то оно должно иметь вид

$$Yf = \sum_{i,k=1}^{q} a_{ki}\, x_i\, p_k + \sum_{j=q+1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_{j\nu}\, x_\nu\, p_j.$$

Точки этого многообразия преобразуются под действием Yf (ср. теорему 40, стр. 258 и д.), точнее, при помощи преобразования, которое получается из Yf при подстановке $x_1 = \cdots = x_q = 0$, то есть

$$\sum_{j=q+1}^{n} \sum_{\nu=q+1}^{n} a_{j\nu}\, x_\nu\, p_j; \tag{8}$$

переменные $x_{q+1} \cdots x_n$ здесь надо рассматривать как координаты для точек этого многообразия. Тогда преобразование (8) оставляет *внутри* многообразия $x_1 = \cdots = x_q = 0$ как минимум одну точку $x_{q+1}^0 : \cdots : x_n^0$ инвариантной, затем — прямую, проходящую через эту точку, и т. д.

Тем самым мы имеем следующую теорему

Теорема 104. *Если $(r+1)$-параметрическая проективная группа $X_1 f \cdots X_r f$, Yf пространства R_{n-1} содержит r-параметрическую инвариантную подгруппу $X_1 f \cdots X_r f$, и если существуют точки пространства R_{n-1}, остающиеся при всех $X_k f$ инвариантными, то всякое состоящее из таких инвариантных точек плоское многообразие, не входящее ни в одно большее многообразие подобного рода, также допускает все преобразования $(r+1)$-параметрической группы. Точки всякого такого*

многообразия при этом переставляются между собой, но так, что хотя бы одна из этих точек сохраняет свое положение при всех преобразованиях $(r+1)$-параметрической группы.

Эту теорему мы теперь применим к специальной категории линейных однородных групп.

Пусть $X_1 f \cdots X_r f$ — инфинитезимальные преобразования r-параметрической линейной однородной группы, а $X_1 f \cdots X_\varrho f$ всегда, когда ϱ меньше r, порождают ϱ-параметрическую подгруппу, инвариантную в $(\varrho+1)$-параметрической подгруппе. Аналитически эти условия находят свое выражение в определенных соотношениях вида

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{iks} X_s f \quad (i = 1 \cdots r-1,\ k = 1 \cdots r-i).$$

Если мы, как и прежде, будем толковать $x_1 \cdots x_n$ как однородные координаты некоторого R_{n-1}, то увидим, что в этом R_{n-1} имеется по крайней мере одна точка, инвариантная относительно $X_1 f$, кроме того, по крайней мере одна такая, которая сохраняет свое положение относительно как $X_1 f$, так и $X_2 f$, и, наконец, одна такая точка, которая допускает вообще все преобразования $X_1 f \cdots X_r f$, то есть для которой имеют место соотношения вида

$$X_k\, x_i = \alpha_k\, x_i \quad (k = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n).$$

Если выбрать переменные x_i такими, что этой инвариантной точкой будет $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$, то в каждом из r выражений

$$X_k f = \xi_{k1}\, p_1 + \cdots + \xi_{kn}\, p_n$$

$n-1$ первых коэффициентов $\xi_{k1} \cdots \xi_{k,n-1}$ зависят только от $x_1 \cdots x_{n-1}$. Следовательно, и для укороченных выражений

$$X'_k f = \xi_{k1}\, p_1 + \cdots + \xi_{k,n-1}\, p_{n-1}$$

опять же выполняются соотношения

$$(X'_i\, X'_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{iks} X'_s f.$$

Конечно, $X'_1 f \cdots X'_r f$ больше не должны быть независимыми друг от друга, но тем не менее мы можем применить к ним те же рассуждения, что

и к $X_1 f \cdots X_r f$, потому что при этом независимость $X_k f$ совершенно не использовалась. Поэтому можно аналогично вышеизложенному предположить, что переменные $x_1 \cdots x_{n-1}$ выбраны так, что $\xi_{k1} \cdots \xi_{k,n-2}$ зависят лишь от $x_1 \cdots x_{n-2}$. Точно так же можно тогда поступить с выражениями

$$X_k'' f = \xi_{k1}\, p_1 + \ldots + \xi_{k,n-2}\, p_{n-2}$$

и т. д.

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 105. *Если $X_1 f \cdots X_r f$ — независимые инфинитезимальные преобразования r-параметрической линейной однородной группы от переменных $x_1 \cdots x_n$, и имеют место соотношения специального вида:*

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{iks}\, X_s f, \quad (i = 1 \cdots r-1,\ k = 1 \cdots r-i),$$

то всегда можно ввести такие линейные однородные функции от $x_1 \cdots x_n$ в качестве новых переменных, что все $X_k f$ одновременно примут канонический вид[4]*:*

$$a_{k11} x_1\, p_1 + (a_{k21}\, x_1 + a_{k22}\, x_2) p_2 + \cdots + (a_{kn1}\, x_1 + \cdots + a_{knn} x_n)\, p_n.$$

С другой стороны, если вспомнить, что $X_1 f \cdots X_r f$ также является проективной группой пространства R_{n-1}, то мы можем сформулировать

Утверждение 4. *Если $X_1 f \cdots X_r f$ — r-параметрическая проективная группа пространства R_{n-1} со специальной структурой:*

$$(X_1 X_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{iks} X_s f,$$

то в R_{n-1} имеется по меньшей мере одна инвариантная относительно этой группы точка M_0, через каждую инвариантную точку проходит по меньшей мере одна инвариантная прямая M_1, ..., через всякое инвариантное плоское многообразие M_{n-3} проходит по меньшей мере одно инвариантное плоское многообразие M_{n-2}. При известных условиях к этой группе относится больше, даже бесконечно много подобных последовательностей инвариантных многообразий $M_0, M_1 \cdots M_{n-2}$.

[4] Ли, Archiv for Math., том 3, стр. 110–111, теорема 3: Христиания, 1878 г.

Если мы сохраним условия последнего утверждения и, кроме того, предположим, что в пространстве $x_1 : x_2 : \cdots : x_r$ уже известны многие инвариантные плоские многообразия $\mathsf{M}_{\varrho_1} \cdots \mathsf{M}_{\varrho_q}$, из которых каждое содержится в последующем, то очевидно, что в последовательностях инвариантных многообразий M_0, $M_1 \cdots M_{n-2}$, упомянутых в утверждении 4, имеется по крайней мере одна, для которой M_{ϱ_1} совпадает с M_{ϱ_1}, M_{ϱ_2} — с M_{ϱ_2}, $\ldots M_{\varrho_q}$ — с M_{ϱ_q}.

§ 147

Изложенные выше результаты хотя, очевидно, и носят довольно специальный характер, но тем не менее имеют общее значение для всякой конечной непрерывной группы, потому что для каждой из них можно задать изоморфную линейную однородную группу, а именно соответствующую присоединенную группу (глава 16).

В частности, мы можем использовать вышеупомянутые теории для того, чтобы доказать, что любая группа с более чем двумя параметрами содержит двухпараметрические подгруппы, а любая с более чем тремя — трехпараметрические.

Пусть $X_1 f \cdots X_r f$ — произвольная r-параметрическая группа, а

$$E_k f = \sum_{i,j=1}^{r} c_{jki} e_j \frac{\partial f}{\partial e_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— соответствующая ей присоединенная группа, так что одновременно имеют место соотношения

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f, \quad (E_i E_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} E_s f.$$

Мы утверждаем, что $X_1 f$ в любом случае принадлежит *одной* двухпараметрической группе, то есть что существует инфинитезимальное преобразование $\lambda_2 X_2 f + \cdots + \lambda_r X_r f$, для которого получается

$$(X_1, \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_r X_r) = \varrho X_1 f + \mu \sum_{k=2}^{r} \lambda_k X_k f.$$

Это условие представляется в виде

$$\sum_{k=2}^{r} \lambda_k \sum_{s=1}^{r} c_{1ks} X_s f = \varrho X_1 f + \mu \sum_{k=2}^{r} \lambda_k X_k f$$

и разбивается на n уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=2}^{r} \lambda_k c_{1k1} = \varrho, \\ \sum_{k=2}^{r} \lambda_k c_{1ks} = \mu \lambda_s \quad (s = 2 \cdots r). \end{cases} \tag{9}$$

Здесь речь, очевидно, идет о том, чтобы выполнялись последние $r-1$ уравнений; то, что это возможно, видно проще всего непосредственно, т. к. для μ получается уравнение

$$\begin{vmatrix} c_{122} - \mu & c_{132} & \cdot & c_{1r2} \\ c_{123} & c_{133} - \mu & \cdot & c_{1r3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{12r} & c_{13r} & \cdot & c_{1rr} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

которое всегда имеет корни; поэтому также существует система из λ_k, не обращающихся одновременно в нуль, удовлетворяющих условиям выше и задающих ϱ.

Однако тот факт, что уравнения (9) могут выполняться, является непосредственным следствием изложенных нами выше теорий; даже если это замечание здесь, где все обстоит достаточно просто, кажется излишним, мы все же не хотим его пропускать, потому что в более общих случаях, которые позже будут рассматриваться, нам без этих теорий не обойтись.

В инфинитезимальном преобразовании

$$E_1 f = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} c_{k1i} e_k \frac{\partial f}{\partial e_i} = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

присоединенной группы все ε_i не зависят от e_1, так как c_{11i} всегда равны нулю. Тогда сокращенное линейное однородное инфинитезимальное преобразование $\varepsilon_2 p_2 + \cdots + \varepsilon_r p_r$ от $r-1$ переменных $e_2 \cdots e_r$ заведомо оставляет систему $e_2 : \cdots : e_r$ инвариантной; таким образом, уравнениям

$$\sum_{k=2}^{r} c_{k1i} e_k = \sigma e_i \quad (i = 2 \cdots r)$$

можно удовлетворить, но они совсем не отличаются от последних $r-1$ уравнений (9), так как $c_{k1i} = -c_{1ki}$.

Теперь мы можем точнее сформулировать наше утверждение выше о том, что всякая группа с более чем двумя параметрами содержит двухпараметрические подгруппы, следующим образом.

Утверждение 5. *Всякое инфинитезимальное преобразование группы с более чем двумя параметрами содержится как минимум в одной двухпараметрической подгруппе*[5].

Теперь предположим, что $X_1 f$ и $X_2 f$ порождают двухпараметрическую группу, то есть что имеет место соотношение вида

$$(X_1 X_2) = c_{121} X_1 f + c_{122} X_2 f.$$

Мы утверждаем, что если r больше 3, также всегда имеется трехпараметрическая подгруппа, в которой содержатся $X_1 f$ и $X_2 f$.

Прежде всего, мы всегда можем одну из констант c_{121} и c_{122} приравнять нулю (если они обе еще не равны нулю). Действительно, если, например, c_{121} отлична от нуля, то мы введем $X_1 f + \frac{c_{122}}{c_{121}} X_2 f$ в качестве нового $X_1 f$ и таким образом получим

$$(X_1 X_2) = c_{121} X_1 f.$$

Итак, любую двухпараметрическую группу можно привести к этому виду.

Для того чтобы $\lambda_3 X_3 f + \cdots + \lambda_r X_r f$ вместе с $X_1 f$ и $X_2 f$ порождала трехпараметрическую группу, нужно, чтобы были выполнены равенства

$$\begin{cases} (X_1, \lambda_3 X_3 + \cdots + \lambda_r X_r) = \alpha_1 X_1 f + \alpha_2 X_2 f + \mu(\lambda_3 X_3 f + \cdots + \lambda_r X_r f), \\ (X_2, \lambda_3 X_3 + \cdots + \lambda_r X_r) = \beta_1 X_1 f + \beta_2 X_2 f + \nu(\lambda_3 X_3 f + \cdots + \lambda_r X_r f). \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=3}^{r} \lambda_k c_{1k1} = \alpha_1, & \sum\limits_{k=3}^{r} \lambda_k c_{1k2} = \alpha_2, \\ \sum\limits_{k=3}^{r} \lambda_k c_{2k1} = \beta_1, & \sum\limits_{k=3}^{r} \lambda_k c_{2k2} = \beta_2, \\ \sum\limits_{k=3}^{r} c_{1ks} \lambda_k = \mu \lambda_s, & \sum\limits_{k=3}^{r} c_{2ks} \lambda_k = \nu \lambda_s \quad (s = 3 \cdots r). \end{cases} \tag{11}$$

Как можно заметить, требуется доказать лишь то, что $2(r-2)$ уравнений в последней строке могут выполняться, тогда и остальные уравнения всегда выполняются.

[5] Ли, Archiv for Math., том 1, стр. 192, Христиания, 1876 г.

Чтобы теперь решить этот вопрос, составим инфинитезимальные преобразования

$$E_1 f = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} c_{k1i} e_k \frac{\partial f}{\partial e_i} = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{1i} \frac{\partial f}{\partial e_i},$$

$$E_2 f = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} c_{k2i} e_k \frac{\partial f}{\partial e_i} = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{2i} \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

находящиеся, как мы знаем, в соотношении

$$(E_1 E_2) = c_{121} E_1 f.$$

Поскольку все c_{11i}, c_{22i} и $c_{122} \cdots c_{12r}$ равны нулю, то e_1 и e_2 вообще не появляются в $\varepsilon_{13} \cdots \varepsilon_{1r}$, $\varepsilon_{23} \cdots \varepsilon_{2r}$. Поэтому укороченные выражения:

$$\overline{E}_1 f = \sum_{i=3}^{r} \varepsilon_{1i} \frac{\partial f}{\partial e_i}, \quad \overline{E}_2 f = \sum_{i=3}^{r} \varepsilon_{2i} \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

являются линейными однородными инфинитезимальными преобразованиями от $e_3 \cdots e_r$ и удовлетворяют соотношению

$$(\overline{E}_1 \overline{E}_2) = c_{121} \overline{E}_1 f.$$

Отсюда, согласно вышесказанному, следует существование по меньшей мере одной системы $e_3 : \cdots : e_r$, допускающей инфинитезимальные преобразования $\overline{E}_1 f$ и $\overline{E}_2 f$, для которой, стало быть, выполняются условия вида

$$\sum_{k=3}^{r} c_{k1i}\, e_k = \sigma\, e_i, \quad \sum_{k=3}^{r} c_{k2i}\, e_k = \tau\, e_i \quad (i = 3 \cdots r).$$

Но именно это и требовалось доказать, так как последние уравнения суть не что иное, как уравнения (11), о выполнении которых и шла речь. При помощи λ_i, разумеется, определяются также величины $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Следовательно, поскольку мы в любом случае можем выбрать $\lambda_3 \cdots \lambda_r$ такими, что выполняются уравнения вида (10), мы можем сказать следующее.

Теорема 106. *Всякое инфинитезимальное преобразование, а также всякая двухпараметрическая подгруппа группы с более чем тремя параметрами содержится по меньшей мере в одной трехпараметрической группе*[6].

Можно было бы предположить, что и всякая трехпараметрическая подгруппа содержится как минимум в одной четырехпараметрической и т. д.,

[6] Ли, Archiv for Math., том 1, стр. 193, том 3, стр. 114–116, Христиания, 1876 и 1878 гг.

но это предположение не подтверждается. Ход нашего доказательства мог бы лишь тогда быть продолжен, когда можно было бы всякую трехпараметрическую группу X_1f, X_2f, X_3f привести к виду

$$(X_1X_2) = c_{121}X_1f, \quad (X_1X_3) = c_{131}X_1f + c_{132}X_2f,$$
$$(X_2X_3) = c_{231}X_1f + c_{232}X_2f,$$

то есть когда не только X_1f инвариантно в группе X_1f, X_2f, но и последняя — во всей трехпараметрической группе.

Однако для всех трехпараметрических групп со структурой

$$(X_1X_2) = X_1f, \quad (X_1X_3) = 2X_2f, \quad (X_2X_3) = X_3f$$

это не так (гл. 15, утверждение 12, стр. 298).

Мы хотим еще кратко остановиться на специальном случае, в котором m-параметрическая подгруппа действительно содержится в $(m+1)$-параметрической.

Пусть задана r-параметрическая группа $X_1f \cdots X_rf$, содержащая m-параметрическую подгруппу $X_1f \cdots X_mf$ с вышеупомянутой специальной структурой:

$$(X_iX_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{i+k,s}X_sf \quad (i < m,\ i+k \leqslant m).$$

Мы утверждаем, что всегда существует $(m+1)$-параметрическая подгруппа вида

$$X_1f \cdots X_mf, \quad \lambda_{m+1}X_{m+1}f + \cdots + \lambda_rX_rf.$$

Наше утверждение эквивалентно тому, что имеют место определенные соотношения вида

$$(X_j, \lambda_{m+1}X_{m+1} + \cdots + \lambda_rX_rf) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk}X_kf + \mu_j \sum_{s=m+1}^{r} \lambda_sX_sf$$
$$(j = 1 \cdots m).$$

В результате разложения получаем

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=m+1}^{r} \lambda_i c_{jik} = \alpha_{jk} & (j,k = 1 \cdots m), \\ \sum\limits_{i=m+1}^{r} \lambda_i c_{jis} = \mu_j\lambda_s & (j = 1 \cdots m;\ s = m+1, \cdots r). \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, спрашивается, могут ли выполняться последние $m(r-m)$ уравнений; тогда первые m^2 могут всегда выполняться.

Чтобы ответить на этот вопрос, построим m инфинитезимальных преобразований:

$$E_k f = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} c_{jki} e_j \frac{\partial f}{\partial e_i} = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{ki} \frac{\partial f}{\partial e_i} \quad (k = 1 \cdots m),$$

удовлетворяющих попарно соотношениям

$$(E_i E_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{i,i+k,s} E_s f \quad (i + k \leqslant m).$$

Мы замечаем, что все $c_{j,k,m+1} \cdots c_{jkr}$, в которых j и k меньше $m+1$, обращаются в нуль, и отсюда заключаем, что в $E_1 f \cdots E_m f$ все коэффициенты $\varepsilon_{k,m+1} \cdots \varepsilon_{kr}$ не зависят от $e_1 \cdots e_m$. Поэтому укороченные инфинитезимальные преобразования

$$\overline{E}_k f = \sum_{i=m+1}^{r} \varepsilon_{ki} \frac{\partial f}{\partial e_i} \quad (k = 1 \cdots m)$$

в переменных $e_{m+1} \cdots e_r$ находятся попарно в соотношениях

$$(\overline{E}_i \overline{E}_k) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{i,i+k,s} \overline{E}_s f \quad (i + k \leqslant m),$$

и, таким образом, согласно утверждению 4, стр. 646, существует система $e_{m+1} : \cdots : e_r$, допускающая все инфинитезимальные преобразования $\overline{E} f \cdots \overline{E}_m f$. Но это означает не что иное, как то, что можно удовлетворить всем уравнениям

$$\sum_{j=m+1}^{r} c_{jks} e_j = \sigma_k e_s \quad (k = 1 \cdots m;\ s = m+1, \cdots r).$$

Эти уравнения, однако, те же самые, что и найденные выше (12), и, таким образом, все, что мы хотели показать, действительно доказано.

Теорема 107. *Если в r-параметрической группе $X_1 f \cdots X_r f$ имеется m-параметрическая подгруппа $X_1 f \cdots X_m f$ со специальной структурой*

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{i,i+k,s} X_s f \quad (i + k \leqslant m),$$

то эта m-параметрическая подгруппа всегда содержится как минимум в одной $(m+1)$-параметрической[7].

§ 148

Мы хотим сформулированную только что теорему вывести еще при помощи абстрактных рассуждений, интерпретируя инфинитезимальные преобразования $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ нашей группы как точки $(r-1)$-мерного пространства с однородными координатами $e_1 \cdots e_r$ (как это было сделано в гл. 16).

Поскольку группа $X_1 f \cdots X_m f \cdots X_r f$ изоморфна своей присоединенной группе $E_1 f \cdots E_m f \cdots E_r f$, то $E_1 f \cdots E_m f$ удовлетворяют при наложенных условиях соотношениям вида

$$(E_i E_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i+k-1} c_{i,i+k,s} E_s f \quad (i+k \leqslant m),$$

поэтому они порождают подгруппу, которая в пространстве e_k представлена $(m-1)$-мерным плоским многообразием

$$e_{m+1} = 0, \cdots e_r = 0.$$

Это плоское многообразие, разумеется, допускает подгруппу $E_1 f \cdots E_m f$, и то же самое, очевидно, справедливо для *семейства* всех m-мерных плоских многообразий:

$$\frac{e_{m+1}}{\mathfrak{e}_{m+1}} = \frac{e_{m+2}}{\mathfrak{e}_{m+2}} = \cdots = \frac{e_r}{\mathfrak{e}_r},$$

проходящих через многообразие $e_{m+1} = 0, \cdots e_r = 0$. Поскольку параметры $\mathfrak{e}_{m+1} : \cdots : \mathfrak{e}_r$ преобразуются линейной однородной группой, изоморфной подгруппе $E_1 f \cdots E_m f$ (гл. 23, утверждение 5, стр. 519), то среди m-мерных многообразий нашего инвариантного семейства имеется по крайней мере одно, остающееся инвариантным относительно подгруппы $E_1 f \cdots E_m f$. Это m-мерное многообразие является образом $(m+1)$-параметрической подгруппы группы $X_1 f \cdots X_r f$ (ср. утверждение 5, стр. 319).

Только что изложенные абстрактные рассуждения, приведшие нас снова к теореме 107, по существу, идентичны ранее изложенным аналитическим рассуждениям. Однако синтетическое обоснование более прозрачно, чем аналитическое.

[7] Ли, Archiv for Math., том 3, стр. 114–116, Христиания, 1878 г.

Вообще целесообразно при исследовании структуры групп преобразований класть в основу интерпретацию всех инфинитезимальных преобразований $e_1X_1f+\cdots+e_rX_rf$ как точек пространства, преобразуемого линейной однородной присоединенной группой. Мы хотим на примере осветить продуктивность и простоту этого метода, который найдет широкое применение также в третьей части книги, и в то же время вывести новое замечательное утверждение.

Рассмотрим r-параметрическую группу $X_1f\cdots X_rf$, инфинитезимальные преобразования которой связаны соотношениями вида

$$(X_iX_{i+k})=\sum_{s=1}^{i+k-1}c_{i,i+k,s}X_sf.$$

Тогда инфинитезимальные преобразования $E_1f\cdots E_rf$ присоединенной группы удовлетворяют аналогичным уравнениям

$$(E_iE_{i+k})=\sum_{s=1}^{i+k-1}c_{i,i+k,s}E_sf.$$

Таким образом (утверждение 4, стр. 589), пространство e_k содержит по крайней мере одну инвариантную относительно присоединенной группы точку. Через каждую такую инвариантную точку проходит как минимум одна инвариантная прямая M_1, через каждую такую M_1 — по крайней мере одна инвариантная плоскость M_2 и т. д.

Если мы теперь истолкуем точки e_k как инфинитезимальные преобразования, то увидим, что наша r-параметрическая группа $X_1f\cdots X_rf$ содержит по меньшей мере одну инвариантную однопараметрическую подгруппу; более того, что каждая инвариантная однопараметрическая подгруппа содержится как минимум в одной инвариантной двухпараметрической подгруппе, каждая двухпараметрическая подгруппа — по крайней мере в одной трехпараметрической и т. д.

Поэтому справедлива следующая

Теорема 108. *Если r-параметрическая группа содержит r независимых инфинитезимальных преобразований $Y_1f\cdots Y_rf$, удовлетворяющих соотношениям вида*

$$(Y_iY_{i+k})=\sum_{s=1}^{i+k-1}c_{i,i+k,s}Y_sf,$$

то она в то же время содержит r независимых инфинитезимальных преобразований $Z_1 f \cdots Z_r f$, между которыми имеют место соотношения вида

$$(Z_i Z_{i+k}) = \sum_{s=1}^{i} c_{i,i+k,s} Z_s f;$$

тогда $Z_1 f \cdots Z_i f$ порождают для всякого $i < r$ i-параметрическую подгруппу $\mathfrak{G}_i$, причем каждая $\mathfrak{G}_i$ инвариантна в каждой $\mathfrak{G}_{i+k}$, а также в самой группе $Y_1 f \cdots Y_r f$[8].

Если оставить условия этой теоремы и предположить, кроме того, что несколько инвариантных подгрупп, скажем $G_{\varrho_1}, G_{\varrho_2} \cdots G_{\varrho_q}$, из которых каждая входит в последующую, уже известны, то становится ясно (ср. заключительные замечания § 146), что описанные в теореме 108 подгруппы $\mathfrak{G}_i$ могут быть выбраны такими, что $\mathfrak{G}_{\varrho_1}$ будет совпадать с G_{ϱ_1}, $\mathfrak{G}_{\varrho_2}$ — с G_{ϱ_2}, а $\mathfrak{G}_{\varrho_q}$ — с G_{ϱ_q}.

Если, с другой стороны, имеется r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ с рассмотренной здесь специальной структурой, то всегда можно получить некоторые инвариантные подгруппы путем дифференцирования. Все $(X_i X_k)$ порождают *первую производную* инвариантную подгруппу, скажем, с $r_1 < r$ независимыми инфинитезимальными преобразованиями. Если обозначить их, как в гл. 15, стр. 295, через $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$, то все $(X_i' X_k')$ порождают *вторую производную* инвариантную подгруппу r-параметрической группы, скажем, с $r_2 < r_1$ независимыми инфинитезимальными преобразованиями $X_i'' f \cdots X_{r_2}'' f$ и т. д.

Поэтому можно привести нашу группу к такому виду $U_1 f \cdots U_i f \cdots U_r f$, что, *во-первых*, для любого i инфинитезимальные преобразования $U_1 f \cdots U_i f$ порождают инвариантную подгруппу, *во-вторых*, все $(U_i U_k)$ можно линейно получить из $U_1 f \cdots U_{r_1} f$, и, *в-третьих*, что все $\big((U_i U_k)(U_\alpha U_\beta)\big)$ можно линейно получить из $U_1 f \cdots U_{r_2} f$ и т. д.

[8] Ли, Archiv for Math., том 3, стр. 112 и 113, Христиания, 1878 г.; ср. также том IX, стр. 79–82.

Глава 28

Подход к описанию всех конечных непрерывных групп n-мерного пространства

Маловероятно, что в скором времени можно будет описать все конечные непрерывные группы преобразований; да и вообще сомнительно, удастся ли это когда-нибудь сделать. Поэтому будет разумным вместо общей задачи описания *всех* конечных непрерывных групп приступить сначала к более специальным задачам, касающимся нахождения определенных категорий конечных непрерывных групп. Именно таковыми являются три следующие задачи:

Во-первых, нахождение всех r-параметрических групп от n переменных.

Во-вторых, нахождение вообще всех r-параметрических групп.

В-третьих, нахождение всех конечных непрерывных групп от n переменных.

В главе 22, стр. 475 и д., мы показали, что решение первой из этих задач, помимо выполнимых операций, всякий раз требует лишь интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, мы обнаружили, что вторая из наших задач сводится к первой (теор. 84, стр. 504).

Третья же задача никоим образом не решается при помощи результатов главы 22. Так, если $n > 1$, то для каждого значения r, каким бы большим оно ни было, всегда имеются r-параметрические группы от n переменных. Если, например, r функций $F_1 \cdots F_r$ от $x_1 \cdots x_{n-1}$ таковы, что между ними нет никаких линейных соотношений вида

$$c_1 F_1 + \cdots + c_r F_r = 0$$

с постоянными коэффициентами, то r инфинитезимальных преобразований

$$F_1(x_1 \cdots x_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial x_n}, \cdots F_r(x_1 \cdots x_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

являются независимыми друг от друга и попарно перестановочными, а потому порождают r-параметрическую группу от n переменных $x_1 \cdots x_n$.

Таким образом, несмотря на важные результаты главы 22, третья из вышеперечисленных задач еще ждет своего решения. Поэтому в настоящей главе мы рассмотрим эту задачу и дадим хотя бы одно указание к ее решению.

Задачу описания всех групп n-мерного пространства R_n мы в дальнейшем разобьем на ряд отдельных независимых друг от друга задач. Это достигается при помощи естественного деления всех групп пространства R_n на классы, которые выбраны так, что группы каждого класса могут быть определены без того, чтобы о группах остальных классов было что-либо известно. Правда, мы не можем задать никакого общего метода, который позволяет в каждом случае описать все группы одного класса, но все же дадим важные утверждения о группах, относящихся к одному классу и, с другой стороны, изложим некоторые соображения, существенно облегчающие описание всех групп одного класса; в следующей главе это будет объяснено при помощи специальных приложений. При этом общем рассмотрении мы ограничиваемся в основном транзитивными группами, так как именно для транзитивных групп наша классификация имеет особое практическое значение.

Если мы позднее (в третьей части) при описании всех конечных непрерывных групп от одной, двух или трех переменных будем частично использовать результаты настоящей главы, то это имеет свои веские причины. При описании *примитивных* групп пространства рассматриваемый здесь способ несомненно целесообразен; при описании импримитивных групп это не так, тут, скорее, рекомендуется пойти другим путем. Всякая импримитивная группа пространства R_n разбивает это пространство на инвариантное семейство многообразий и преобразует многообразия этого семейства при помощи изоморфной группы с менее чем n переменными. Отсюда следует, что будет правильным только тогда рассматривать описание всех импримитивных групп, когда уже известны все группы от менее чем n переменных. Согласно этому принципу мы и будем в части III проводить описание всех импримитивных групп пространства R_2 и некоторых групп пространства R_3.

§ 149

Пусть

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

— совершенно произвольная r-параметрическая группа n-мерного пространства $x_1 \cdots x_n$, или кратко — пространства R_n.

Согласно введению к главе 25, стр. 572 и далее, мы продолжаем эту группу, рассматривая $x_1 \cdots x_n$ как функции некоторой вспомогательной переменной t, которая относительно нашей группы вообще не преобразуется, и учитывая, что производные $\frac{dx_i}{dt} = x_i'$ преобразуются под действием этой группы. Таким образом, мы получим продолженную группу от $2n$ переменных $x_1 \cdots x_n, x_1' \cdots x_n'$:

$$\overline{X}_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} x_\nu' \right) \frac{\partial f}{\partial x_i'} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Она, как мы знаем, задает, каким образом ∞^{2n-1} линейных элементов $x_1 \cdots x_n, x_1' : x_2' : \cdots : x_n'$ пространства $x_1 \cdots x_n$ переставляются между собой группой $X_1 f \cdots X_r f$ (ср. стр. 575).

Всякая точка $x_1^0 \cdots x_n^0$ общего положения остается при совершенно определенном числе независимых инфинитезимальных преобразований $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ инвариантной, а именно: минимум при $r - n$ и максимум при $r - 1$. Обозначим число этих независимых инфинитезимальных преобразований через $r - q$ и предположим, что $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ — такие независимые инфинитезимальные преобразования; тогда они обязательно порождают $(r - q)$-параметрическую подгруппу группы $X_1 f \cdots X_r f$ (ср. гл. 12, стр. 228 и д.)

В разложениях в ряд от $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ по степеням $x_i - x_i^0$, разумеется, отсутствуют все члены нулевого порядка, а имеются лишь члены первого порядка и выше:

$$X_k^0 f = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki\nu} (x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \cdots r - q).$$

Группа $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ оставляет точку $x_1^0 \cdots x_n^0$ инвариантной, но переставляет между собой линейные элементы, проходящие через эту точку; как это происходит, показывает соответствующая продолженная группа:

$$\overline{X}_k^0 f = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki\nu} (x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki\nu} (x_1^0 \cdots x_i^0) \cdot x_n' + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} \quad (k = 1 \cdots n - q),$$

преобразующая ∞^{2n-1} линейных элементов пространства $x_1 \cdots x_n$ точно так же, как группа $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$. Поэтому если мы хотим ограничиться линейными элементами, проходящими через точку $x_1^0 \cdots x_n^0$, а остальные не принимать во внимание, то согласно введению к главе 14, стр. 258 и далее, необходимо опустить все члены с производными от f по $x_1 \cdots x_n$, а в оставшихся членах произвести подстановку $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$. Полученные таким образом укороченные инфинитезимальные преобразования

$$L_k f = \sum_{i,\nu=1}^{n} \alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot x_i' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} \quad (k = 1 \cdots r-q) \tag{1}$$

порождают *линейную однородную группу от n переменных* $x_1' \cdots x_n'$; эта группа, изоморфная группе $\overline{X}_1^0 f \cdots \overline{X}_{r-q}^0 f$ и, конечно же, группе $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$, задает, каким образом обе вышеназванные группы преобразуют ∞^{n-1} линейных элементов $x_1' : x_2' : \cdots : x_n'$, проходящих через точку $x_1^0 \cdots x_n^0$.

Линейная однородная группа $L_1 f \cdots L_{r-q} f$, очевидно, полностью определена членами первого порядка в разложениях $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ в ряд, следовательно, она содержит столько же существенных параметров, сколько группа $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ — независимых инфинитезимальных преобразований первого порядка, из которых нельзя линейно получить ни одного преобразования второго или более высокого порядка. Отсюда следует, что можно выписать группу $L_1 f \cdots L_{r-q} f$, если известно, сколько независимых инфинитезимальных преобразований первого порядка, из которых нельзя линейно получить ни одного преобразования второго или более высокого порядка, содержит группа $X_1 f \cdots X_r f$ в окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$, и, кроме того, известны члены первого порядка в разложениях в ряд этих инфинитезимальных преобразований. И наоборот, если известна группа $L_1 f \cdots L_r f$, то можно указать число членов первого порядка (и сами члены) тех независимых инфинитезимальных преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, из которых нельзя линейно получить ни одного преобразования второго или более высокого порядка по $x_i - x_i^0$.

Линейную однородную группу $L_1 f \cdots L_{r-q} f$ можно также получить следующим образом.

Поскольку речь идет о том, каким образом преобразуются направления в фиксированной точке $x_1^0 \cdots x_n^0$, то группу $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ можно заменить следующей:

$$\sum_{i,\nu=1}^{n} \alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \cdots r-q),$$

которая получается путем исключения всех членов второго и более высокого порядка. Здесь можно непосредственно трактовать $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ как однородные координаты линейных элементов, проходящих через точку $x_1^0 \cdots x_n^0$, то есть группа

$$\sum_{i,\nu=1}^{n} \alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial (x_\nu - x_\nu^0)} \quad (k = 1 \cdots r - q)$$

задает, как эти линейные элементы преобразуются. Это соответствует вышесказанному.

Мы видели, что r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ каждой точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ общего положения ставит в соответствие совершенно определенную линейную однородную группу (1), которая, однако, для различных точек в общем случае будет разной. Теперь исследуем, как ведет себя эта линейная однородная группа при введении новых переменных.

Вместо $x_1 \cdots x_n$ введем новые переменные:

$$y_i = y_i^0 + \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}(x_\nu - x_\nu^0) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n), \tag{2}$$

являющиеся обычными степенными рядами от $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$, предполагая, как всегда, при этом, что определитель

$$\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$$

отличен от нуля, с тем чтобы и, наоборот, x_i были обычными степенными рядами от $y_1 - y_1^0, \cdots y_n - y_n^0$.

Пусть $X_k f$ принимает в $y_1 \cdots y_n$ следующий вид:

$$Y_k^0 f = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki\nu} \cdot (y_i - y_i^0) + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \quad (k = 1 \cdots r - q).$$

Тогда, прежде всего, ясно, что группа, полученная из $X_1 f \cdots X_r f$ в результате введения новых переменных $y_1 \cdots y_n$, ставит в соответствие точке $y_1^0 \cdots y_n^0$ линейную однородную группу:

$$\mathfrak{L}_k f = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{ki\nu} y_i' \frac{\partial f}{\partial y_\nu'} \quad (k = 1 \cdots r - q). \tag{1'}$$

Но, с другой стороны (ср. гл. 11, стр. 218 и д.), ясно, что члены первого порядка

$$\sum_{\nu=1}^{n} \beta_{ki\nu}(y_i - y_i^0) \frac{\partial f}{\partial y_\nu}$$

для $Y_k^0 f$ получаются из членов первого порядка

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{ki\nu}(x_i - x_i^0)\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

для $X_k^0 f$ в результате введения новых переменных

$$y_i = y_i^0 + \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}(x_\nu - x_\nu^0) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Таким образом, видно, что линейная однородная группа (1′) получается из линейной однородной группы (1), если ввести в (1) с помощью линейного однородного преобразования

$$y_i' = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu' \quad (i = 1 \cdots n)$$

новые переменные $y_1' \cdots y_n'$ вместо x'.

Это значит, что линейная однородная группа (1), по существу, не зависит от аналитического представления группы $X_1 f \cdots X_r f$, то есть от выбора переменных; так как если в силу преобразования (2) ввести в группу $X_1 f \cdots X_r f$ новые переменные, то эта линейная однородная группа превращается в другую линейную однородную группу (1′), равноправную с (1) внутри общей линейной однородной группы (ср. гл. 16, стр. 310). Путем подходящего выбора констант $a_{i\nu}$ в преобразовании (2) можно, очевидно, достичь того, что группой (1′), соответствующей точке y_k^0, будет любая группа, равноправная с (1).

В частности, предположим, что преобразование (2) само принадлежит группе $X_1 f \cdots X_r f$. В этом случае (1′) — очевидно, такая линейная однородная группа, которую группа $X_1 f \cdots X_r f$ сопоставляет точке $y_1^0 \cdots y_n^0$, следовательно, (1′) получается из (1), если в $a_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0)$ заменить x^0 на y^0. Но поскольку обе группы, (1) и (1′) равноправны внутри общей линейной однородной группы пространства R_n, то мы имеем следующую теорему.

Теорема 109. *Всякая r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_n$ ставит в соответствие каждой точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ общего положения совершенно определенную однородную группу пространства R_n, которая указывает, каким образом преобразуются линейные элементы, проходящие через эту точку, при условии, что она остается*

неподвижной. Тем точкам, которые в результате преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$ могут переходить одна в другую, отвечают линейные однородные группы, равноправные внутри общей линейной однородной группы пространства R_n. В частности, если группа $X_1 f \cdots X_r f$ транзитивна, то всем точкам, не лежащим ни на каких инвариантных многообразиях, она ставит в соответствие такие линейные однородные группы, которые внутри общей линейной однородной группы являются равноправными между собой.

Итак, изложенная выше теорема, обобщающая важнейшие из полученных до сих пор результатов, дает классификацию[1] всех групп пространства R_n, о которой шла речь во введении.

Рассмотрим сначала *транзитивные* группы.

Две транзитивные группы пространства R_n, G и Γ, мы относим к одному классу, если линейная однородная группа, ставящая G в соответствие какой-либо точке общего положения, равноправна с такой линейной однородной группой, которую Γ ставит в соответствие какой-либо из таких точек. В противном случае мы относим G и Γ к различным классам.

В соответствии с этим мы различаем столько же классов транзитивных групп пространства R_n, сколько имеется *типов* подгрупп общей линейной однородной группы пространства R_n (ср. стр. 311). Позже мы увидим, что в каждый такой класс входит по крайней мере одна транзитивная группа пространства R_n.

Если две транзитивные группы G и Γ пространства $x_1 \cdots x_n$ принадлежат одному и тому же классу, то они, очевидно, содержат в окрестности любой точки $x_1^0 \cdots x_n^0$ общего положения одинаковое число независимых инфинитезимальных преобразований первого порядка по $x_i - x_i^0$, из которых нельзя линейно получить ни одного преобразования второго или более высокого порядка. Кстати, поскольку всегда можно за счет введения новых переменных так изменить вид Γ, что она будет ставить в соответствие точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ ту же самую линейную однородную группу, что и G, то всякий раз можно добиться того, чтобы члены первого порядка в соответствующих инфинитезимальных преобразованиях для обеих групп были одни и те же. Кроме того, G и Γ, так как они транзитивны, содержат в окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$ по n независимых инфинитезимальных преобразований нулевого порядка каждая, из которых нельзя линейно получить ни одного преобразования первого или более высокого порядка; зато числа и начальные члены инфинитезимальных преобразований второго, третьего $\cdots$ порядка вполне могут быть для Γ другими, чем для G. *Это означает, что две транзитив-*

[1] Под классификацией понимается разбиение на классы. — *Прим. ред.*

ные группы пространства $x_1 \cdots x_n$, принадлежащие одному и тому же классу, отнюдь не требуют одинакового числа параметров.

Обратимся теперь к *интранзитивным* группам.

Каждой транзитивной группе пространства R_n соответствует совершенно определенный тип линейных однородных групп пространства R_n, для интранзитивных групп это в общем случае не так. Всякая интранзитивная группа G пространства R_n разбивает это пространство на семейство из ∞^{n-q} $(0 < q < n)$ отдельных инвариантных q-мерных многообразий M_q, но так, что она транзитивно преобразует точки каждого отдельного из этих многообразий M_q (ср. гл. 13, стр. 240). Отсюда следует, что G_p всем точкам одного и того же M_q всегда ставит в соответствие равноправные линейные однородные группы, но не обязательно точкам различных M_q.

Наши ∞^{n-q} M_q в общем случае упорядочиваются в такие непрерывные семейства, что только таким точкам, которые принадлежат многообразиям M_q одного и того же семейства, ставятся в соответствие равноправные линейные однородные группы. Если такое семейство состоит ровно из ∞^m M_q, то все пространство R_n разбивается на ∞^{n-q-m} $(q+m)$-мерных многообразий M_{q+m}, и каждому M_{q+m} соответствует совершенно определенный тип линейных однородных групп, в то время как различным M_{q+m} также ставятся в соответствие различные типы. Так, нашей группе G соответствует семейство из ∞^{n-q-m} различных типов; совокупность всех этих типов может, конечно, быть представлена определенными аналитическими выражениями с $n-q-m$ существенными произвольными параметрами. Мы можем это сформулировать еще и так: все такие подобные типы относятся к одной и той же *категории типов*[2] (ср. гл. 22, стр. 494 выше).

Две нетранзитивные группы мы причисляем к одному и тому же классу, если если им обеим соответствует одна и та же *категория типов* линейных однородных групп пространства R_n.

§ 150

Описанную выше классификацию всех групп пространства R_n мы можем использовать для того, чтобы дать подход к описанию этих групп. Но это мы сделаем только для *транзитивных* групп.

Предположим, что переменные $x_1 \cdots x_n$ выбраны так, что начало координат $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ является точкой общего положения, тогда всякая транзитивная группа пространства R_n содержит в окрестности начала координат n независимых инфинитезимальных преобразований нулевого порядка по x_i:

$$T_i^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n),$$

[2] Ли использует термин Typengattung. — *Прим. ред.*

из которых нельзя линейно получить никаких преобразований первого или более высокого порядка.

Далее, всякая транзитивная группа пространства R_n содержит в общем случае также некоторые инфинитезимальные преобразования первого порядка по x_i; какие — зависит, согласно вышесказанному, от того класса, которому она принадлежит. А поскольку к каждому типу линейных однородных групп пространства R_n относится совершенно определенный класс транзитивных групп этого пространства, то мы выберем один такой тип и ограничимся рассмотрением тех транзитивных групп, которые принадлежат соответствующему классу.

Пусть m_1-параметрическая группа

$$\sum_{i,\nu=1}^{n} \alpha_{ji\nu} x_i' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} \quad (j = 1 \cdots m_1; \quad 0 \leqslant m_1 \leqslant n^2) \tag{3}$$

является представителем выбранного типа линейных однородных групп. Тогда, согласно сказанному ранее, всякая транзитивная группа пространства R_n, относящаяся к этому классу, путем подходящего выбора переменных $x_1 \cdots x_n$ может быть приведена к такому виду, что будет содержать в окрестности $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ следующие m_1 независимых инфинитезимальных преобразований первого порядка:

$$T_k^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji\nu} + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (j = 1 \cdots m_1).$$

Эти m_1 инфинитезимальных преобразований $T_j^{(1)}$ таковы, что из них нельзя линейно получить ни одного преобразования второго или более высокого порядка, а, с другой стороны, для всякого инфинитезимального преобразования первого порядка этой группы члены первого порядка можно линейно получить из членов первого порядка преобразований $T_1^{(1)} \cdots T_{m_1}^{(1)}$.

Кстати, мы видим уже теперь, что в любом случае имеется минимум одна транзитивная группа, принадлежащая выбранному нами классу; одну такую группу можно сразу задать, а именно $(n + m_1)$-параметрическую:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}, \qquad \sum_{i,\nu=1}^{n} \alpha_{ji\nu} x_i \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (j = 1 \cdots m_1);$$

она получается в результате отбрасывания всех членов первого порядка преобразований P_i и, соответственно, членов второго порядка и выше преобразований $T_j^{(1)}$.

Помимо уже перечисленных инфинитезимальных преобразований нулевого и первого порядка, всякая группа, принадлежащая нашему классу, может содержать в окрестности $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ еще некоторое число независимых инфинитезимальных преобразований второго порядка, из которых нельзя линейно получить никаких преобразований третьего и более высокого порядка, кроме того, она может содержать некоторое число независимых инфинитезимальных преобразований третьего, четвертого ... порядка; однако согласно теор. 29, стр. 215, всегда имеется некоторое присущее этой группе целое число $s \geqslant 1$, такое, что эта группа содержит инфинитезимальные преобразования второго, третьего, $\cdots$ s-го порядка, но не содержит ни одного преобразования $(s+1)$-го или более высокого порядка[3]. Отсюда следует, что совокупность всех групп нашего класса разбивается на ряд подклассов: каждому значению s соответствует один подкласс.

Поскольку имеется бесконечно много чисел $s \geqslant 1$, то число определенных только что подклассов бесконечно велико, но на самом деле вовсе не обязательно, чтобы каждый подкласс был представлен группами. Мы покажем, как для каждого отдельного значения s можно выяснить, принадлежат ли хоть какие-то группы соответствующему подклассу; при этом речь идет, по существу, лишь о тех числах s, которые больше 1, так как о том, что подкласс $s = 1$ содержит группы, мы уже знаем.

Пусть $s_0 \geqslant 1$ — произвольно выбранное, но определенное целое число; мы спрашиваем, имеются ли в нашем классе группы, принадлежащие подклассу $s = s_0$.

Ели такие группы имеются, то пусть, например, G будет одной из них. Тогда если для $k = 0, 1, 2 \cdots s_0$ из инфинитезимальных преобразований k-го порядка группы G отбросить все члены $(k+1)$-го и более высокого порядка, то мы, очевидно, получим независимые инфинитезимальные преобразования, порождающие некоторую группу Γ, а именно группу, принадлежащую, как и G, подклассу $s = s_0$.

Отсюда следует, что подкласс $s = s_0$, если он вообще содержит группы, содержит минимум одну группу Γ со следующим особым свойством: Γ порождена $n+m_1$ инфинитезимальными преобразованиями нулевого и первого порядка:

$$\mathsf{T}_i^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \mathsf{T}_j^{(1)} = \sum_{i,\nu=1}^{n} \alpha_{ji\nu} x_i \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

и, кроме того, m_2 независимыми инфинитезимальными преобразованиями второго, m_3 независимыми третьего, $\cdots$ m_{s_0} независимыми s_0-го порядка;

[3]То число, которое в теореме 29 мы обозначали через s, мы теперь называем $s+1$!

общий вид этих преобразований таков:

$$\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i_k,\nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$
$$(k = 2, 3 \cdots s_0; \quad i_k = 1, 2 \cdots m_k),$$

где $\xi^{(k)}$ — *целые однородные функции k-го порядка своих аргументов*. В то же время получается, что всякой группе G, принадлежащей подклассу $s = s_0$, ставится в соответствие совершенно определенная группа Γ с вышеописанным свойством.

При помощи выполнимых операций можно решить, существует ли группа Γ, обладающая вышеописанным свойством, и даже задать все имеющиеся группы Γ.

Действительно, число всех возможных систем $m_2, m_3, \cdots m_{s_0}$ прежде всего конечно. Если такая система далее выбрана, то всегда можно при помощи алгебраических операций самым общим образом задать $m_2 + \cdots + m_{s_0}$ инфинитезимальных преобразований

$$\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} \quad (k = 2, 3 \cdots s_0; \quad i_k = 1, 2, \cdots m_k),$$

вместе с $\mathsf{T}_i^{(0)}$, порождающих $\mathsf{T}_j^{(1)}$ $(n + m_1 + \cdots + m_{s_0})$-параметрическую группу. Для этого лишь требуется так задать самым общим образом неизвестные коэффициенты в функциях $\xi^{(k)}$, чтобы всякое преобразование

$$(T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}) \quad (k, \mu = 0, 1 \cdots s_0)$$

получалось линейно из

$$T_{i_k}^{(k+\mu-1)} \quad (\pi = 1 \cdots m_{k+\mu-1}),$$

если $k + \mu - 1 \leqslant s_0$, и обращалось в нуль тождественно, если $k + \mu - 1 > s_0$. Ясно, что при этом для неизвестных коэффициентов получаются только алгебраические уравнения.

Выше было показано, что для каждого *отдельного* целого числа $s_0 \geqslant 1$ при помощи выполнимых операций можно установить, есть ли в нашем классе группы, принадлежащие подклассу $s = s_0$. Но мы не располагаем общим методом, обеспечивающим то же самое *сразу* для *всех* целых чисел $s > 1$. Лишь в специальных случаях, учитывая особое свойство линейной однородной группы (3), нам удается выяснить, сколько и какие из

бесконечно многих подклассов представлены группами. При этом бывает, что для числа s существует максимум; то есть что только такие подклассы, число которых не превышает определенного максимума, действительно содержат группы (ср. главу 29); однако и для существования такого максимума мы не имеем общего критерия. Тем не менее мы думаем, что такие критерии можно получить.

Вследствие этого мы ограничимся тем, что рассмотрим, как могут быть найдены все группы нашего класса, содержащиеся в определенном подклассе, например в следующем: $s = s_0 \geqslant 1$.

Согласно стр. 665 всякой группе подкласса $s = s_0$ соответствует совершенно определенная группа Γ того же подкласса с инфинитезимальными преобразованиями, имеющими особый, описанный там вид. Тогда, поскольку, как мы знаем, все подобные группы Γ, принадлежащие подклассу $s = s_0$, могут быть заданы при помощи выполнимых операций, нам необходимо еще лишь показать, каким образом находятся эти группы подкласса $s = s_0$, к которым относится некоторая группа, произвольно выбранная из таких групп Γ.

Пусть

$$\begin{cases} \mathsf{T}_i^{(0)} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \mathsf{T}_j^{(1)} = \sum\limits_{\nu,\pi=1}^{n} \alpha_{j\nu\pi} x_\nu \dfrac{\partial f}{\partial x_\pi} = \sum\limits_{\pi=1}^{n} \xi_{j\pi}^{(1)}(x_1 \cdots x_n) \dfrac{\partial f}{\partial x_\pi}, \\ \mathsf{T}_{i_k}^{(k)} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \xi_{i_k,\nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} \end{cases} \tag{4}$$

$$(i = 1 \cdots n; \quad j = 1 \cdots m_1; \quad i_k = 1 \cdots m_k; k = 2 \cdots s_0)$$

$- n + m_1 + \cdots + m_{s_0}$ независимых инфинитезимальных преобразований какой-либо из упомянутых групп Γ, и пусть структура этой группы задана соотношениями

$$(\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} \mathsf{T}_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum_{\pi=1}^{m_{k+\mu-1}} c_{i_k j_\mu \pi} \mathsf{T}_\pi^{(k+\mu-1)} \tag{5}$$

$$(k, \mu = 0, 1 \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k; \quad j_\mu = 1 \cdots m_\mu; \quad m_0 = n),$$

в которых c в правой части рассматриваются как известные и, в частности, обращаются в нуль, если $k + \mu - 1$ превышает число s_0.

Всякая относящаяся к подклассу $s = s_0$ группа $\mathfrak{G}$, соответствующая группе (4), содержит $n + m_1 + \cdots + m_{s_0}$ параметров и порождена таким же количеством независимых инфинитезимальных преобразований;

это преобразования

$$T_i^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots, \quad T_{i_k}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i_k,\nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \tag{6}$$

$$(i = 1 \cdots n; \quad i_k = 1 \cdots m_k; \quad k = 1 \cdots s_0),$$

где опущенные члены везде имеют порядок выше, чем записанные. *Таким образом, речь идет не о чем другом, как о нахождении всех групп, инфинитезимальные преобразования которых имеют вид* (6).

Структура группы с инфинитезимальными преобразованиями (6), очевидно, представлена соотношениями вида

$$\begin{cases} (T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum\limits_{\pi=1}^{m_{k+\mu-1}} c_{i_k j_\mu \pi} T_\pi^{(k+\mu-1)} + \\ + \sum\limits_{\tau=k+\mu}^{s_0} \sum\limits_{\pi_\tau=1}^{m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau} T_{\pi_\tau}^{(\tau)} \end{cases} \tag{7}$$

$$(k, \mu = 0, 1, \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k; \quad j_m = 1 \cdots m_{\mu}, \quad m_0 = n).$$

Здесь C — определенные константы, удовлетворяющие известным соотношениям, полученным из тождества Якоби (ср. гл. 9, стр. 188 и д.).

Предположим, что соответствующие соотношения между C заданы, и вычислена общая система C, им удовлетворяющая. Поскольку все соотношения являются алгебраическими, то это вычисление требует лишь выполнимых операций. Вид соотношений (7) может быть упрощен, например, за счет того, что всякое инфинитезимальное преобразование k-го порядка $T_{i_k}^{(k)}$ заменяется другим преобразованием k-го порядка:

$$\mathfrak{T}_{i_k}^{(k)} = T_{i_k}^{(k)} + \sum_{k+1}^{s_0} \sum_{\pi_\tau=1}^{m_\tau} \mathsf{P}_{i_k \pi_\tau} T_{\pi_\tau}^{(\tau)}, \tag{8}$$

где под P понимаются какие-либо численные величины. Так, если вместо T ввести $\mathfrak{T}$, то вместо (7) получатся соотношения вида

$$\begin{cases} (\mathfrak{T}_{i_k}^{(k)} \mathfrak{T}_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum\limits_{\pi=1}^{m_{k+\mu-1}} c_{i_k j_\mu \pi} \mathfrak{T}_\pi^{(k+\mu-1)} + \\ + \sum\limits_{\tau=k+\mu}^{s_0} \sum\limits_{\pi_\tau=1}^{m_\tau} \mathfrak{C}_{i_k j_\mu \pi_\tau} \mathfrak{T}_{\pi_\tau}^{(\tau)}, \end{cases} \tag{7'}$$

где между $\mathfrak{C}$ и C имеет место легко задаваемая взаимосвязь. Можно сделать так, что коэффициенты P, являющиеся совершенно произвольными, принимают по возможности простые числовые значения; тем самым достигается некоторое упрощение.

Если в уравнении (8) все P выбраны фиксированными, то мы иногда будем говорить, что инфинитезимальное преобразование k-го порядка $\mathfrak{T}_{i_k}^{(k)}$ полностью *нормировано*.

Если известны все системы C, удовлетворяющие вышеупомянутым соотношениям, то одновременно известны и все структуры, которые может иметь группа вида (6). Спрашивается еще лишь, для всякой ли определенной таким образом структуры существуют группы вида (6), имеющие соответствующую структуру, и как эти группы могут быть найдены, если они существуют.

Итак, предположим, что в уравнениях (7) C — система значений, удовлетворяющих некоторым соотношениям, так что уравнения (7) представляют возможную структуру $(n + m_1 + \cdots + m_{s_0})$- параметрических групп (ср. стр. 297).

Прежде всего, легко видеть, что если группы вида (6), имеющие структуру (7), вообще существуют, то все они подобны между собой и относятся к одному и тому же типу транзитивных групп пространства $x_1 \cdots x_n$ (гл. 22, стр. 479).

Действительно, если у нас есть две группы, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$, обе имеющие вид (6) и структуру (7), то эти группы, благодаря выбору их инфинитезимальных преобразований, очевидно, так связаны между собой голоэдрическим изоморфизмом, что наибольшая подгруппа в $\mathfrak{G}$, оставляющая точку $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ инвариантной, соответствует наибольшей подгруппе в $\mathfrak{G}'$, фиксирующей эту точку. А поскольку точка $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ при наложенных условиях является точкой общего положения, то обе эти *транзитивные* группы, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$, согласно теореме 76, стр. 470, подобны между собой. Это и требовалось доказать.

Далее мы покажем, что всегда существуют группы вида (6) со структурой (7).

Прежде всего в пространстве R_N размерности $N = n + m_1 + \cdots + m_{s_0}$ зададим просто транзитивную группу

$$W_i f, \quad W_{i_k}^{(k)} f \quad (i = 1 \cdots n; \quad k = 1 \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k) \tag{9}$$

со структурой (7); согласно гл. 22, стр. 475–477, это всегда возможно, и максимум, что для этого требуется, — интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем выберем многообразие $\mathfrak{M}$ пространства R_N,

допускающее $(N-n)$-параметрическую подгруппу

$$W_{i_k}^{(k)} f \quad (k = 1 \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k) \tag{10}$$

группы (9), но не допускающее никакой большей подгруппы; этим свойством обладает всякое характеристическое многообразие (стр. 112) $(N-n)$-параметрической полной системы

$$W_{i_k}^{(k)} f = 0 \quad (k = 1 \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k).$$

Под действием ∞^N преобразований группы (9) $\mathfrak{M}$ принимает ровно ∞^n различных положений, совокупность которых образует инвариантное семейство. Если характеризовать отдельные многообразия этого семейства при помощи n переменных $x_1 \cdots x_n$, то получим транзитивную группу от $x_1 \cdots x_n$:

$$X_i^{(0)} f, \quad X_{i_k}^{(k)} f \quad (i = 1 \cdots n; \; k = 1 \cdots s_0; \; i_k = 1 \cdots m_k), \tag{11}$$

указывающую, каким образом многообразия нашего инвариантного семейства переставляются между собой группой (9). Эта новая группа изоморфна группе (9), так что имеют место соотношения вида

$$(X_{i_k}^{(k)} X_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum_{\pi=1}^{m_{k+\mu-1}} c_{i_k j_\mu \pi} X_\pi^{(k+\mu-1)} f + \sum_{k+\mu}^{s_0} \sum_{\pi_\tau=1}^{m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau} X_{\pi_\tau}^{(\tau)} f \tag{7''}$$

$$(k, \mu = 0, 1, \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k; \quad j_\mu = 1 \cdots m_\mu; \quad m_0 = n)$$

(ср. теорему 85, стр. 531).

Можно легко доказать, что инфинитезимальные преобразования группы (11) при подходящем выборе переменных $x_1 \cdots x_n$ принимают вид (6).

Чтобы провести соответствующее доказательство, мы прежде всего предположим, что переменные $x_1 \cdots x_n$ выбраны такими, что $\mathfrak{M}$ получает координаты $x = 0, \cdots x_n = 0$. Тогда все инфинитезимальные преобразования

$$X_{i_k}^{(k)} f \quad (k = 1 \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k),$$

очевидно, будут по x_ν иметь порядок 1 и выше, а $X_1^0 f \cdots X_n^0 f$ — будут независимыми инфинитезимальными преобразованиями нулевого порядка, из которых нельзя линейно получить ни одного преобразования первого и более высокого порядка; последнее следует из транзитивности группы (11). Таким образом, ясно, что мы, не нарушая только что наложенного нами

условия, можем выбрать переменные $x_1 \cdots x_n$ такими, что $X_1^0 f \cdots X_n^0 f$ будут иметь вид

$$X_i^{(0)} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots \quad (i = 1 \cdots n).$$

После этих приготовлений мы сначала найдем начальные члены в разложениях в ряд m_1 инфинитезимальных преобразований $X_j^{(1)} f$.

Мы имеем

$$X_j^{(1)} f = \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_{j\nu}^{(1)}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (j = 1 \cdots n),$$

где под $\zeta^{(1)}$ понимаем линейные однородные функции своих аргументов. Подставляя это выражение в n соотношений:

$$(X_i^{(0)} X_j^{(1)}) = \sum_{\pi=1}^{n} c_{ij\pi} X_\pi^{(0)} f + \sum_{\tau=1}^{s_0} \sum_{\pi_\tau=1}^{m_\tau} C_{ij\pi_\tau} X_{\pi_\tau}^{(\tau)} f \quad (i = 1 \cdots n),$$

и сравнивая в обеих частях члены нулевого порядка, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \zeta_{j\nu}^{(1)}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sum_{\pi=1}^{n} c_{ij\pi} \frac{\partial f}{\partial x_\pi} \quad (i = 1 \cdots n),$$

то есть все производные первого порядка от $\zeta_{j\nu}^{(1)}$ полностью определены, а также — в силу известного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \zeta_{j\nu}^{(1)}}{\partial x_i} = \zeta_{j\nu}^{(1)}$$

— и сами $\zeta_{j\nu}^{(1)}$. Но поскольку $\xi_{j\nu}^{(1)}$, очевидно, удовлетворяет всем дифференциальным уравнениям, которые мы только что нашли, то получается $\zeta_{j\nu}^{(1)} = \xi_{j\nu}^{(1)}$, следовательно

$$X_j^{(1)} f = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}^{(1)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (j = 1 \cdots m_1).$$

Таким же образом мы в общем случае находим

$$X_{i_k}^{(k)} f = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i_k \nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (k = 1 \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k),$$

другими словами, мы обнаруживаем, что инфинитезимальные преобразования группы (11) имеют вид (6). Это, очевидно, означает, что N инфинитезимальных преобразований (11) независимы друг от друга, то есть, что группа (11) является N-параметрической и равносоставленной с группой (9).

Так как группа (11), как мы только что видели, является N-параметрической, то группа

$$W_i^{(0)} f, \quad W_{i_k}^{(k)} f \quad (i = 1 \cdots n; \quad k = 1 \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k) \tag{9}$$

не содержат никакой инвариантной подгруппы, принадлежащей группе

$$W_{i_k}^{(k)} f \quad (k = 1 \cdots s_0; \quad i_k = 1 \cdots m_k) \tag{10}$$

(теорема 85, стр. 531). Но можно, однако, непосредственно увидеть, что такой инвариантной подгруппы группы (9) не существует; таким образом, с учетом теоремы 85 получается новое доказательство того, что группа (11) имеет N существенных параметров.

Всякая инвариантная подгруппа $\mathfrak{g}$ группы (9), принадлежащая группе (10), очевидно, содержит инфинитезимальное преобразование

$$\mathfrak{W} f = \sum_{\tau=1}^{m_p} \varrho_\tau W_\tau^{(p)} f + \sum_{k=p+1}^{s_0} \sum_{\tau_k=1}^{m_k} \sigma_{\tau_k} W_{\tau_k}^{(k)} f \quad (p \geqslant 1),$$

в котором не все m_p величин ϱ_τ обращаются в нуль. Одновременно с $\mathfrak{W} f$ в $\mathfrak{g}$ входят также n инфинитезимальных преобразований

$$(W_1^0 \mathfrak{W}) \cdots (W_n^0 \mathfrak{W});$$

поэтому, как видно из структуры (7) группы (9), в $\mathfrak{g}$ обязательно имеется преобразование вида

$$\mathfrak{W}' f = \sum_{\tau=1}^{m_{p-1}} \varrho'_\tau W_\tau^{(p-1)} + \sum_{k=p}^{s_0} \sum_{\tau_k=1}^{m_k} \sigma'_{\tau_k} W_{\tau_k}^{(k)} f,$$

в котором не все m_{p-1} величин ϱ'_τ равны нулю. Итак, в конце концов мы видим, что $\mathfrak{g}$ должна содержать инфинитезимальное преобразование, не принадлежащее группе (10); однако это противоречит условию, что $\mathfrak{g}$ должна содержаться в группе (10), следовательно, не существует ни одной группы $\mathfrak{g}$ с предполагаемым свойством.

Полученные до сих пор результаты дают следующую теорему:

Теорема 110.[4] *Пусть в переменных $x_1 \cdots x_n$ задана транзитивная группа, содержащая в окрестности точки общего положения $x_1 = 0, \cdots$*

[4] Ли, Archiv for Math., том X, стр. 381–389, 1885 г.

$x_n = 0$ *следующие инфинитезимальные преобразования: во-первых,* n *независимых преобразований нулевого порядка вида*

$$\mathsf{T}_1^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \mathsf{T}_n^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

во-вторых, для $k = 1, 2 \cdots s$ *по* $m_k > 0$ *независимых преобразований* k*-го порядка вида*

$$\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i_k,\nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \cdots s; \quad i_k = 1 \cdots m_k),$$

где $\xi^{(k)}$ *означают целые однородные функции* k*-го порядка. Пусть структура этой группы задана соотношениями*

$$(\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} \mathsf{T}_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum_{\pi=1}^{m_{k+\mu-1}} c_{i_k j_\mu \pi} \mathsf{T}_\pi^{(k+\mu-1)}$$

$$(k, \mu = 0, 1, \cdots s; \quad i_k = 1 \cdots m_k; j_\mu = 1 \cdots m_\mu; m_0 = n),$$

где все c *в правой части обращаются в нуль, если* $k + \mu - 1$ *больше* s*. Тогда все* $(n + m_1 + \cdots + m_s)$*-параметрические группы пространства* $x_1 \cdots x_n$*, инфинитезимальные преобразования которых в окрестности* $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ *имеют вид*

$$T_i^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots, \quad T_{i_k}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i_k,\nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \tag{6}$$

$$(i = 1 \cdots n; \quad k = 1 \cdots s; \quad i_k = 1 \cdots m_k),$$

находятся следующим образом.

В уравнениях

$$\begin{cases} (T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum\limits_{\pi=1}^{m_{k+\mu-1}} c_{i_k j_\mu \pi} T_\pi^{(k+\mu-1)} + \\ \sum\limits_{\tau=k+\mu}^{s} \sum\limits_{\pi_\tau=1}^{m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau} T_{\pi_\tau}^{(\tau)} \end{cases} \tag{7}$$

$$(k, \mu = 0, 1, \cdots s; \quad i_k = 1 \cdots m_k; \quad j_\mu = 1 \cdots m_\mu; \quad m_0 = n)$$

самым общим образом зададим константы C *так, чтобы соотношения, следующие из тождества Якоби, выполнялись. Когда это сделано, то уравнения* (7) *будут представлять все структуры, которые могут иметь искомые группы. Каждой отдельной из этих структур соответствуют группы вида* (6)*, которые все подобны между собой и могут всегда быть найдены при помощи интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.*

§ 151

Задачу описания всех транзитивных групп пространства R_n мы в предыдущих параграфах сводили к следующим четырем задачам:

$\mathfrak{A}$. *Найти все типы линейных однородных групп от n переменных.*

Если эта задача решена, то в окрестности любой точки общего положения будут известны возможные виды начальных членов во всех преобразованиях первого порядка, которые могут встретиться в транзитивной группе пространства R_n.

$\mathfrak{B}$. *В окрестности точки общего положения заданы начальные члены инфинитезимальных преобразований первого порядка транзитивной группы пространства R_n; требуется найти возможные виды начальных членов в инфинитезимальных преобразованиях второго и более высокого порядка.*

$\mathfrak{C}$. *Найти все структуры, которые может иметь транзитивная группа пространства R_n, содержащая в окрестности точки общего положения некоторые инфинитезимальные преобразования первого, второго $\cdots$ s-го порядка с заданными начальными членами, но не содержащая преобразований $(s+1)$-го или более высокого порядка.*

$\mathfrak{D}$. *Задана одна из искомых в предыдущих задачах структур. Требуется получить транзитивную группу, которая имеет эту структуру и инфинитезимальные преобразования которой первого $\cdots$ s-го порядка имеют вид, заданный в предыдущих задачах.*

Если нам известна *одна* группа со свойством, требуемым в последней задаче, то известны и *все* остальные, поскольку согласно теореме 110 они подобны между собой.

Решение первой из этих четырех задач требует лишь выполнимых, точнее говоря, лишь алгебраических операций (ср. гл. 12, стр. 233, и гл. 23, стр. 542 и д.). Однако свести задачу $\mathfrak{B}$ к конечному числу выполнимых операций нам не удалось. Задача $\mathfrak{C}$ опять же требует лишь алгебраических операций. И наконец, задача $\mathfrak{D}$, как мы показали в предыдущем параграфе, может быть решена при помощи интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теперь мы хотим подробнее рассмотреть специальный случай, допускающий своеобразное упрощение.

Пусть $(n+m_1+\cdots+m_s)$-параметрическая группа

$$\mathsf{T}_i^{(0)}=\frac{\partial f}{\partial x_i},\quad \mathsf{T}_{i_k}^{(k)}=\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i_k\nu}^{(k)}(x_1\cdots x_n)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \tag{12}$$

$$(i=1\cdots n;\quad k=1\cdots s;\quad i_k=1\cdots m_k),$$

которую мы полагали заданной в теореме 110, стр. 672, среди своих инфинитезимальных преобразований первого порядка

$$e_1\mathsf{T}_1^{(1)} + \cdots + e_{m_1}\mathsf{T}_{m_1}^{(1)}$$

содержит, в частности, одно следующего вида:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

а именно: пусть, например, $\mathsf{T}_{m_1}^{(1)}$ имеет такой вид. Мы покажем, что при этом условии можно всегда описать все $(n+m_1+\cdots+m_s)$-параметрические транзитивные группы пространства, инфинитезимальные преобразования которого в окрестности точки общего положения $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ имеют вид

$$T_i^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots, \quad T_{i_k}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i_k\nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \qquad (12')$$

$$(i = 1 \cdots n;\ k = 1 \cdots s;\ i_k = 1 \cdots m_k).$$

Вместо

$$T_{m_1}^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots$$

запишем U, обозначение, которое мы и позднее будем порой применять.

Прежде всего, ясно, что между U и инфинитезимальными преобразованиями s-го порядка группы вида (12′) имеют место следующие соотношения:

$$(T_\pi^{(s)}\,U) = (1-s)T_\pi^{(s)} \quad (\pi = 1 \cdots m_s).$$

Подобным образом между U и инфинитезимальными преобразованиями $(s-1)$-го порядка имеют место соотношения вида

$$(T_j^{(s-1)}U) = (2-s)T_j^{(s-1)} + \sum_{\pi=1}^{m_s} K_{j\pi}T_\pi^{(s)} \quad (j = 1 \cdots m_{s-1}),$$

где K — неизвестные константы. Чтобы упростить эти соотношения, положим (ср. стр. 668)

$$\mathfrak{T}_j^{(s-1)} = T_j^{(s-1)} + \sum_{\pi=1}^{m_s} \mathsf{P}_{j\pi}T_\pi^{(s)} \quad (j = 1 \cdots m_{s-1})$$

и получим

$$(\mathfrak{T}_j^{(s-1)}\,U) = (2-s)\mathfrak{T}_j^{(s-1)} + \sum_{\pi=1}^{m_s}\big(K_{j\pi} + (1-s-2+s)\mathsf{P}_{j\pi}\big)T_{j\pi}^{(s)},$$

то есть если выбрать P подходящим образом, то

$$(\mathfrak{T}_j^{(s-1)}U) = (2-s)\mathfrak{T}_j^{(s-1)} \quad (j = 1 \cdots m_{s-1}).$$

Тем самым инфинитезимальные преобразования $(s-2)$-го порядка группы $(12')$ являются *нормированными*.

Точно так же мы можем нормировать преобразования $(s-2)$-го порядка, положив

$$\mathfrak{T}_j^{(s-2)} = T_j^{(s-2)} + \sum_{\pi=1}^{m_{s-1}} \mathsf{P}_{j\pi}\mathfrak{T}_\pi^{(s-1)} + \sum_{\pi=1}^{m_s} \mathsf{P}''_{j\pi}T_\pi^{(s)}$$

и имея в своем распоряжении подходящие P' и P''; следовательно

$$(\mathfrak{T}_j^{(s-2)}U) = (3-s)\mathfrak{T}_j^{(s-2)} \quad (j = 1 \cdots m_{s-2}).$$

Продолжая таким образом, если везде опять заменить T на $\mathfrak{T}$, мы наконец получаем

$$(T_{i_k}^{(k)}U) = (1-k)\,T_{i_k}^{(k)} \quad (k = 0, 1 \cdots s;\ i_k = 1 \cdots m_k;\ m_0 = n). \tag{13}$$

Итак, все инфинитезимальные преобразования нулевого и от первого до s-го порядка нормированы, *за исключением самого* U.

Теперь вспомним, что согласно структуре группы $(12')$ между T имеют место соотношения вида

$$\left\{(T_{i_k}^{(k)}T_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum_{\pi=1}^{m_{k+\mu-1}} c_{i_k j_\mu \pi}\, T_\pi^{m_{k+\mu-1}} + \sum_{\tau=k+\mu}^{s}\sum_{\pi_\tau=1}^{m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau} T_{\pi_\tau}^{(\tau)}\right. \tag{14}$$

$$(k, \mu = 0, 1, \cdots s;\quad i_k = 1 \cdots m_k;\quad j_\mu = 1 \cdots m_\mu;\quad m_0 = n),$$

в которых c везде обращаются в нуль, коль скоро $k+\mu-1 > s$. Для того чтобы задать здесь неизвестные константы C, составим тождество Якоби:

$$\big((T_{i_k}^{(k)}T_{j_\mu}^{(\mu)})\,U\big) + \big((T_{j_\mu}^{(\mu)}U)\,T_{i_k}^{(k)}\big) + \big((UT_{i_k}^{(k)})\,T_{j_\mu}^{(\mu)}\big) = 0,$$

принимающее, очевидно, в силу (13) следующий вид:

$$\big((T_{i_k}^{(k)}T_{j_\mu}^{(\mu)})U\big) = (2-k-\mu)(T_{i_k}^{(k)}T_{j_\mu}^{(\mu)}).$$

Подставляя здесь выражение (14) и снова используя уравнения (13), получаем

$$\sum_{\pi=1}^{m_{k+\mu-1}} c_{i_k j_\mu \pi}(2-k-\mu)T_\pi^{(k+\mu-1)} + \sum_{\tau=k+\mu}^{s}\sum_{\pi_\tau=1}^{m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau}(1-\tau)\,T_{\pi_\tau}^{(\tau)} =$$

$$= (2-k-\mu)(T_{i_k}^{(k)}T_{j\mu}^{(\mu)})$$

или, поскольку T являются независимыми инфинитезимальными преобразованиями,

$$C_{i_k j_\mu \pi_\tau}(\tau + 1 - k - \mu) = 0 \quad (k + \mu \leqslant \tau \leqslant s).$$

Отсюда следует, что все C обращаются в нуль.

Согласно этому при наложенном условии все группы вида (12′) имеют ту же структуру, что и группа (12), таким образом, все они согласно теореме 110, стр. 672, подобны между собой и группе (12).

Следовательно, мы можем сказать следующее.

Теорема 111. *Если транзитивная* $(n+m_1+\cdots+m_s)$*-параметрическая группа от переменных* $x_1 \cdots x_n$ *в окрестности точки общего положения* $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ *содержит, помимо* n *независимых инфинитезимальных преобразований нулевого порядка от* x*:*

$$T_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

еще по m_k *независимых инфинитезимальных преобразований* k*-го порядка для каждого* $k = 1, 2 \cdots s$*, из которых нельзя линейно получить преобразования* $(k+1)$*-го или более высокого порядка, и если она, в частности, содержит инфинитезимальное преобразование первого порядка вида*

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots,$$

то можно путем введения новых переменных $x'_1 \cdots x'_n$ *привести ее к виду*

$$T_i = \mathsf{T}_i = \frac{\partial f}{\partial x'_i}, \quad T^{(k)}_{ik} = \mathsf{T}^{(k)}_{i_k} = \sum_{\nu=1}^{n} \xi^{(k)}_{i_k \nu}(x'_1 \cdots x'_n) \frac{\partial f}{\partial x'_\nu}$$
$$(i = 1 \cdots n;\ k = 1 \cdots s;\ i_k = 1 \cdots m_k);$$

здесь $\xi^{(k)}$ *— такие целые однородные функции* k*-го порядка, которые задают в инфинитезимальных преобразованиях* k*-го порядка*

$$T^{(k)}_{i_k} = \sum_{\nu=1}^{n} \xi^{(k)}_{i_k \nu}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (k = 1 \cdots s;\ i_k = 1 \cdots m_k)$$

этой группы члены порядка k*.*

Глава 29

Характеристические свойства групп, подобных некоторым известным проективным группам

В предыдущей главе мы дали классификацию всех транзитивных групп $X_1 f \cdots X_r f$ n-мерного пространства $x_1 \cdots x_n$. Мы выбирали точку $x_1^0 \cdots x_n^0$ общего положения и рассматривали все инфинитезимальные преобразования группы, оставляющие эту точку неподвижной, то есть все те, разложения которых в ряд по $x_i - x_i^0$ имеют вид

$$\sum_{i,\nu=1}^{n} \alpha_{ji\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots \qquad (j = 1, 2 \cdots),$$

где опущенные члены имеют порядок два и выше. Затем линейная однородная группа

$$L_j f = \sum_{i,\nu=1}^{n} \alpha_{ji\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0)\, x_i' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} \qquad (j = 1, 2 \cdots)$$

показывала, каким образом ∞^{n-1} линейных элементов $x_1' : x_2' : \cdots : x_n'$ в точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ преобразуются при помощи тех преобразований группы $X_1 f \cdots X_r f$, которые оставляют эту точку инвариантной.

В настоящей главе мы прежде всего решим задачу описания всех *транзитивных* групп $X_1 f \cdots X_r f$ пространства $x_1 \cdots x_n$, для которых линейная однородная группа $L_1 f, L_2 f \cdots$, соответствующая точке общего положения, совпадает с общей или специальной линейной однородной группой[1].

[1] Легко видеть, что группа пространства R_n, сопоставляющая точке *общего положения* $x_1 \cdots x_n$ общую или специальную линейную однородную группу, всегда транзитивна. А именно: эта группа в окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$ заведомо содержит инфинитезимальное преобразование нулевого порядка по $x_i - x_i^0$, то есть преобразование $\sum \alpha_i p_i + \cdots$, в котором не все α_i равны нулю. Кроме того, эта группа обязательно содержит $n(n-1)$ преобразований первого порядка следующего вида:

$$(x_i - x_i^0)\, p_k + \cdots \qquad (i, k = 1 \cdots n; i \neq k).$$

Комбинируя последние с $\sum \alpha_i p_i + \cdots$, можно увидеть, что в группу входят n преобразований вида $p_1 + \cdots, \cdots p_n + \cdots$, то есть что группа действительно транзитивна.

При этом мы получаем удивительный результат — всякая такая группа $X_1 f \cdots X_r f$ подобна либо общей проективной, либо специальной линейной группе пространства $x_1 \cdots x_n$.

Кроме того, в последнем параграфе этой главы мы покажем, что в пространстве $x_1 \cdots x_n$ не существует ни одной конечной непрерывной группы, которая переводила бы $m > n+2$ выбранных точек общего положения в m таких же точек; в то же время мы докажем, что общая проективная и подобные ей группы являются единственными группами пространства $x_1 \cdots x_n$, которые могут перевести $n+2$ произвольно выбранных точек общего положения в $n+2$ таких же точек.

§ 152

Всякая транзитивная группа G пространства R_n содержит в окрестности точки $x_1^0 \cdots x_n^0$ общего положения n независимых инфинитезимальных преобразований нулевого порядка по $x_i - x_i^0$:

$$p_1 + \cdots, \; p_2 + \cdots, \; \cdots p_n + \cdots,$$

где в соответствии с соглашением на стр. 609 мы пишем p_i вместо $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Если G ставит теперь в соответствие точке $x_1^0 \cdots x_n^0$ общую линейную однородную группу как группу $L_1 f, L_2 f \cdots$, то она содержит в окрестности $x_1^0 \cdots x_n^0$ наибольшее возможное число, а именно n^2 таких независимых инфинитезимальных преобразований первого порядка по $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$, из которых нельзя линейно получить ни одного преобразования второго или более высокого порядка. Эти преобразования первого порядка имеют вид

$$(x_i - x_i^0)\, p_k + \cdots \quad (i, k = 1 \cdots n).$$

Если же G ставит в соответствие точке $x_1 \cdots x_n$ специальную линейную однородную группу, то она содержит в окрестности этой точки только $n^2 - 1$ независимых инфинитезимальных преобразований первого порядка, из которых нельзя линейно получить ни одного преобразования второго или более высокого порядка, и они имеют следующий вид:

$$(x_i - x_i^0)\, p_k + \cdots, \; (x_i - x_i^0) p_i - (x_k - x_k^0)\, p_k + \cdots$$
$$(i, k = 1 \cdots n, \; i \gtrless k).$$

Поэтому мы можем, выбрав точку $x_1^0 \cdots x_n^0$ началом координат, сформулировать изложенную во вводной части этой главы задачу следующим образом:

Требуется найти все группы $X_1 f \cdots X_r f$, или кратко G, от переменных $x_1 \cdots x_n$, содержащие в окрестности точки общего положения $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ следующие инфинитезимальные преобразования нулевого и первого порядка.
либо $n + n^2$ преобразований

$$p_i + \cdots, x_i\, p_k + \cdots \qquad (i, k = 1 \cdots n),$$

либо $n + n^2 - 1$ преобразований

$$p_i + \cdots, x_i\, p_k + \cdots, x_i\, p_i - x_k\, p_k + \cdots$$
$$(i, k = 1 \cdots n;\ i \gtrless k).$$

Сначала можно рассматривать оба случая одновременно, надо лишь как можно дольше не обращать внимания на то, что в первом случае, кроме преобразований, встречающихся во втором случае, имеется еще одно преобразование: $\sum_i x_i p_i + \cdots$.

Пусть группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит инфинитезимальные преобразования, разложения которых в ряд по x начинаются членами второго или более высокого порядка соответственно, короче, инфинитезимальными преобразованиями второго или более высокого порядка. Мы хотим найти самый высокий порядок s имеющихся преобразований и задать сами эти преобразования. Число s мы можем считать большим 1, так как все встречающиеся инфинитезимальные преобразования первого порядка нам уже известны. Пусть

$$K = \vartheta_1\, p_1 + \cdots + \vartheta_n\, p_n + \cdots$$

— инфинитезимальное преобразование s-го порядка этой группы; при этом ϑ означают целые однородные функции s-го порядка от $x_1 \cdots x_n$; опущенные члены имеют более высокий порядок. Очевидно, что не все $\vartheta_1 \cdots \vartheta_n$ обращаются в нуль, поскольку не существует инфинитезимального преобразования $\sum e_k X_k f$, разложение в ряд которого начинается с членов $(s + 1)$-го порядка; поэтому мы можем всегда предположить, что ϑ_1 не равна нулю.

Пусть самая низкая степень x_1, встречающаяся в ϑ_1, будет α_1 и пусть

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = s)$$

— соответствующий член в ϑ_1 с необращающимся в нуль коэффициентом. Теперь скомбинируем преобразование $x_1\,p_2+\cdots$ с K, результат снова скомбинируем с $x_1\,p_2+\cdots$ и т. д., всего α_2 раз. Полученное таким образом инфинитезимальное преобразование s-го порядка скомбинируем с $x_1 p_3+\cdots$, и так поступим последовательно α_3 раз, наконец, применим $x_1 p_n+\cdots$ также последовательно α_n раз. В результате мы, таким образом, увидим, что преобразование вида

$$K' = x_1^s\,p_1 + \vartheta_2'\,p_2 + \cdots + \vartheta_n'\,p_n + \cdots$$

принадлежит нашей группе.

Все остальные члены ϑ_1 исчезают; действительно, они либо тоже содержат степень $x_1^{\alpha_1}$, либо более высокую, в обоих случаях степень какой-то переменной x_i $(i>1)$ заведомо не α_i, а более низкая; поэтому соответствующий член обращается в нуль при α_i-разовой комбинации с $x_1\,p_i+\cdots$. Члены $(s+1)$-го порядка и выше, как всегда, здесь не рассматриваются (ср. гл. 11, теорема 30, стр. 216).

Чтобы подробнее описать преобразование K', воспользуемся вспомогательным утверждением, которое может быть многократно и с пользой применено.

Утверждение 1. *Если инфинитезимальные преобразования Cf и $B_1 f + \cdots + B_m f$ принадлежат некоторой группе, и, кроме того, имеют место соотношения вида $(CB_k) = \varepsilon_k B_k f$, где все константы ε_k различны, то эта группа содержит все m инфинитезимальных преобразований $B_1 f \cdots B_m f$.*

Доказывается это утверждение очень просто. Помимо $B_1 f+\cdots+B_m f$, группа содержит еще следующие инфинитезимальные преобразования:

$$\begin{aligned}
&(C, B_1+\cdots+B_m) = \varepsilon_1 B_1 f + \cdots + \varepsilon_m B_m f,\\
&(C, \varepsilon_1 B_1+\cdots+\varepsilon_m B_m) = \varepsilon_1^2 B_1 f + \cdots + \varepsilon_m^2 B_m f,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&(C, \varepsilon_1^{m-2} B_1+\cdots+\varepsilon_m^{m-2} B_m) = \varepsilon_1^{m-2} B_1 f + \cdots + \varepsilon_m^{m-1} B_m f.
\end{aligned}$$

Но поскольку определитель

$$\begin{vmatrix}
1 & \cdots & 1\\
\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_m\\
\cdot & \cdots & \cdot\\
\varepsilon_1^{m-1} & \cdots & \varepsilon_m^{m-1}
\end{vmatrix} = \prod_{i,k}(\varepsilon_i - \varepsilon_k)$$

по условию не обращается в нуль, то каждое отдельное преобразование $B_k f$ можно получить из только что найденных путем умножения на подходящие константы и последующего сложения. Тем самым утверждение доказано.

Чтобы его применить, скомбинируем теперь преобразование K' в развернутом виде:

$$x_1^s p_1 + \Big\{\sum A_\beta x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}\Big\}p_2 + \cdots + \Big\{\sum N_\nu x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}\Big\}p_n + \cdots$$
$$(\beta_1 + \cdots + \beta_n = \cdots = \nu_1 + \cdots + \nu_n = s),$$

с преобразованием

$$x_1 p_1 - x_i p_i + \cdots,$$

где под i понимается любое из чисел $2\cdots n$. При этом получается

$$(s-1)\,x_1^s\,p_1 + \Big\{\sum A_\beta(\beta_1 - \beta_i + \varepsilon_{2i})x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}\Big\}\,p_2 + \cdots +$$
$$+\Big\{\sum N_\nu(\nu_1 - \nu_i + \varepsilon_{ni})x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}\Big\}\,p_n + \cdots, \qquad (1)$$

где ε_{ii} имеет значение 1, тогда как все ε_{ki} $(i \neq k)$ обращаются в нуль. Следовательно, члены s-го порядка инфинитезимального преобразования K' имеют указанный выше вид $B_1 f + \cdots + B_m f$, где $B_k f$ при взятии комбинации с $x_1\,p_1 - x_i\,p_i$ воспроизводятся, но с различными коэффициентами. Поскольку из разложения в ряд инфинитезимальных преобразований нашей группы можно получить инфинитезимальные преобразования новой группы Γ, оставив в каждом разложении лишь члены самого низкого порядка (гл. 28, стр. 665), то наше утверждение 1 показывает, что каждое отдельное $B_k f$ принадлежит группе Γ. Тогда, очевидно, существует $B_k f$, включающий в себя член $x_1^s\,p_1$ и поэтому воспроизводящийся с коэффициентом $s-1$. Остальные члены этого $B_k f$ определены уравнениями

$$\beta_1 - \beta_i + \varepsilon_{2i} = \cdots = \nu_1 - \nu_i + \varepsilon_{ni} = s - 1,$$

из которых мы, поскольку $\varepsilon_{23}\cdots\varepsilon_{2n}$ обращаются в нуль, немедленно получаем $\beta_3 = \cdots = \beta_n$, а следовательно,

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \beta_1 + \beta_2 + (n-2)\beta_3 = s,$$

кроме того,

$$\beta_2 = \beta_1 - s + 2, \quad \beta_3 = \beta_1 - s + 1.$$

Путем исключения β_2 и β_3 получаем

$$(\beta_1 - s + 1)\, n = 0,$$
$$\text{то есть } \beta_1 = s - 1, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0.$$

Аналогично находятся ν_k и т. д. Короче говоря, мы видим, что наша группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит инфинитезимальное преобразование вида

$$K'' = x_1^s\, p_1 + A_2\, x_1^{s-1} x_2\, p_2 + \cdots + A_n\, x_1^{s-1} x_n\, p_n + \cdots .$$

Если скомбинировать K'' с $p_1 + \cdots$, то получается

$$s\, x_1^{s-1}\, p_1 + (s-1) A_2\, x_1^{s-2} x_2\, p_2 + \cdots + (s-1) A_n\, x_1^{s-2} x_n\, p_n + \cdots = L,$$

и, таким образом, наша группа содержит инфинитезимальное преобразование, а именно (LK''), имеющее вид

$$s\, x_1^{2s-2}\, p_1 + \eta_2\, p_2 + \cdots + \eta_n\, p_n + \cdots .$$

Но поскольку $2s-2$ не может быть больше s, а s в, свою очередь, больше 1, то отсюда следует —

$$s = 2,$$

так что

$$K'' = x_1^2\, p_1 + A_2\, x_1\, x_2\, p_2 + \cdots + A_n\, x_1\, x_n\, p_n + \cdots .$$

Кроме того,

$$(x_1 p_i + \cdots, K'') = (A_i - 1)\, x_1^2\, p_i + \cdots .$$

Если бы A_i не было равно 1, то мы получили бы последовательно два преобразования:

$$(x_1^2\, p_i + \cdots, x_i\, p_1 + \cdots) = x_1^2\, p_1 - 2 x_1\, x_i\, p_i + \cdots ,$$
$$(x_1^2\, p_i - 2 x_1\, x_i\, p_i + \cdots, x_i^2\, p_1 + \cdots) = 4 x_1^3 p_i + \cdots .$$

А поскольку инфинитезимальные преобразования третьего порядка появляться не должны, то все $A_i = 1$. Итак, K'' имеет вид

$$x_1 (x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \cdots + x_n\, p_n) + \cdots ,$$

а отсюда мы, наконец, при помощи комбинации с $x_i\,p_1+\cdots$ вообще получаем

$$x_i(x_1\,p_1+\cdots+x_n\,p_n)+\cdots.$$

Поэтому если группа $X_1f\cdots X_rf$ с требуемым на стр. 680 и ниже свойством содержит инфинитезимальные преобразования более, чем первого порядка, то таковыми являются лишь преобразования второго порядка, причем среди них заведомо есть n преобразований вида

$$x_i\,(x_1\,p_1+\cdots+x_n\,p_n)+\cdots\qquad(i=1\cdots n).$$

Сложив все n преобразований

$$\left(p_i+\cdots,\,x_i\sum_{k=1}^{n}x_k\,p_k+\cdots\right)=x_i\,p_i+\sum_{k=1}^{n}x_k\,p_k+\cdots,$$

мы получаем преобразование $x_1\,p_1+\cdots+x_n\,p_n+\cdots$. Поэтому если группа $X_1f\cdots X_rf$ содержит инфинитезимальные преобразования второго порядка, то соответствующая линейная группа $L_1f, L_2f\cdots$ является общей линейной однородной. И наоборот:

Группа $X_1f\cdots X_rf$ никогда не содержит инфинитезимального преобразования порядка выше первого, если соответствующая группа L_1f, $L_2f\cdots$ является специальной линейной однородной.

Для краткости запишем инфинитезимальные преобразования $x_i\,(x_1\,p_1+\cdots+x_n\,p_n)+\cdots$ в виде $H_i+\cdots$, понимая под H_i члены второго порядка. Вполне возможно, что в группе $X_1f\cdots X_rf$, помимо этих n преобразований, имели место еще и другие второго порядка. Например, такое:

$$\tau_1\,p_1+\cdots+\tau_n\,p_n+\cdots=\mathsf{T}+\cdots,$$

где τ_i — однородные функции второго порядка от $x_1\cdots x_n$, а T — сумма $\sum\tau_kp_k$. Тогда, очевидно, выражение $(H_i\mathsf{T})$ должно обращаться в нуль, поскольку оно представляет младшие члены инфинитезимального преобразования третьего порядка. Следовательно, $\tau_1\cdots\tau_n$ удовлетворяют уравнению

$$\left(x_i\sum_{k=1}^{n}x_k\,p_k,\quad\sum_{j=1}^{n}\tau_j\,p_j\right)=0;$$

оно распадается на n следующих:

$$x_i\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial\tau_j}{\partial x_k}-\tau_j\right)-x_j\tau_i=0,$$

а отсюда, кроме само собой разумеющегося уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial \tau_j}{\partial x_k} = 2\tau_j,$$

следует еще и $x_i\tau_j - x_j\tau_i = 0$. Поэтому τ_i и T имеют вид

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k x_i, \quad \mathsf{T} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k H_k.$$

Тем самым доказано, что группа $X_1 f \cdots X_r f$ с заданным свойством не может содержать никаких других инфинитезимальных преобразований второго порядка, кроме n преобразований $H_k + \cdots$.

В итоге мы имеем следующие три случая

Если линейная однородная группа $L_1 f, L_2 f \cdots$ является общей линейной однородной, то соответствующая группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит ровно n инфинитезимальных преобразований нулевого порядка:

$$P_i = p_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

и n^2 — первого:

$$T_{ik} = x_i p_k + \cdots \quad (i, k = 1 \cdots n).$$

Преобразований более высокого порядка либо нет вообще, либо имеется n следующих:

$$S_i = x_i (x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n).$$

Если группа $L_1 f, L_2 f \cdots$ — специальная линейная однородная, то группа $X_1 f \cdots X_r f$ содержит ровно n инфинитезимальных преобразований нулевого порядка:

$$P_i = p_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

и еще $n^2 - 1$ — первого:

$$T_{ik} = x_i p_k + \cdots, \quad T_{ii} - T_{kk} = x_i p_i - x_k p_k + \cdots \quad (i \gtrless k = 1 \cdots n),$$

но никаких других более высокого порядка.

Эти три случая мы рассмотрим по порядку. Сначала приведем соотношения между инфинитезимальными преобразованиями, а затем и сами эти преобразования к наиболее простому виду. При этом заметим, что первые два из этих трех случаев уже разобраны благодаря результатам параграфа 151, стр. 674 и д. Тем не менее мы считаем целесообразным рассмотреть подробно и эти оба случая.

§ 153

Первый случай, когда имеется n преобразований нулевого и n^2 — первого порядка, — самый простой.

Соотношения между n^2 инфинитезимальными преобразованиями первого порядка мы можем задать непосредственно:

$$(T_{ik}, T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{k\nu}\, T_{i\pi} - \varepsilon_{\pi i}\, T_{\nu k},$$

причем ε_{ik} обращается в нуль, если i и k различны, тогда как ε_{ii} имеет значение 1. Особенно важно, что любое выражение

$$\left(T_{ik}, \sum_{\nu=1}^{n} T_{\nu\nu}\right)$$

обращается в нуль. Кроме того, если для краткости ввести обозначение

$$U = \sum_{\nu=1}^{n} T_{\nu\nu},$$

то имеют место соотношения

$$(P_i U) = P_i + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\pi=1}^{n} \alpha_{\nu\pi}\, T_{\nu\pi},$$

или, если ввести правую часть в качестве нового P_i, $(P_i U) = P_i$. Наконец, имеют место соотношения вида

$$(P_i T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j + \sum\sum \beta_{\nu\pi} T_{\nu\pi},$$
$$(P_i P_k) = \sum \gamma_\nu P_\nu + \sum\sum \delta_{\nu\pi} T_{\nu\pi}.$$

Но тождества Якоби

$$\big((P_i T_{kj})U\big) - (P_i T_{kj}) = 0,$$
$$\big((P_i P_k)U\big) - 2(P_i P_k) = 0$$

показывают непосредственно, что все константы β, γ, δ обращаются в нуль, то есть выполняется

$$(P_i T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j, \quad (P_i P_k) = 0.$$

Итак, все соотношения между инфинитезимальными преобразованиями нашей группы известны.

Далее r инфинитезимальных преобразований $P_i = p_i + \cdots$ порождают просто транзитивную группу, равносоставленную с группой $p'_1 \cdots p'_n$ и потому также подобную ей (гл. 19, утверждение 1, стр. 376). Поэтому мы можем ввести такие новые переменные $x'_1 \cdots x'_n$, что

$$P_i = p'_i \quad (i = 1 \cdots n).$$

Вид $\xi_1 p'_1 + \cdots + \xi_n p'_n$, который принимает U в новых переменных, определяется соотношениями $(P_i U) = P_i$, из которых следует:

$$U = \sum_{k=1}^{n} (x'_k + \alpha_k)\, p'_k,$$

и если ввести $x'_k + \alpha_k$ в качестве нового x_k, что не меняет вида P_i, то получится $U = \sum x_k p_k$. Из соотношений

$$(P_i T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j$$

мы также находим

$$T_{kj} = x_k\, p_j + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{kj\nu}\, p_\nu;$$

но поскольку $(T_{kj} U)$ должно обращаться в нуль, то все $\alpha_{kj\nu}$ равны нулю. Следовательно, мы имеем группу

$$P_i = p_i, \quad T_{ik} = x_i\, p_k \quad (i = 1 \cdots n),$$

то есть все группы, подпадающие под первый случай, подобны общей линейной группе многообразия $x_1 \cdots x_n$.

§ 154

Теперь перейдем ко второму случаю, где, кроме n преобразований нулевого порядка $P_i = p_i + \cdots$ и n^2 преобразований первого порядка $T_{ik} = x_i\, p_k + \cdots$, еще имеют место n преобразований второго порядка:

$$S_i = x_i (x_1\, p_1 + \cdots + x_n\, p_n) + \cdots .$$

Следующие соотношения мы получаем непосредственно:

$$(S_i\, S_k) = 0, \quad (T_{ik} S_j) = \varepsilon_{kj} S_i, \quad (US_j) = S_j.$$

Далее имеют место уравнения вида

$$(T_{ik}\, U) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ikj} S_j.$$

Если мы сначала предположим, что i и k оба не равны n, то мы можем ввести $T_{ik} + \sum \alpha_{ikj} S_j$ в качестве новых T_{ik} и получим для соответствующих значений i и k соотношение $(T_{ik}\, U) = 0$. Поскольку к тому же $(UU) = 0$, то и вообще получается

$$(T_{ik}\, U) = 0 \quad (i, k = 1 \cdots n).$$

Кроме того,

$$(T_{ik}\, T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{k\nu} T_{i\pi} - \varepsilon_{\pi i} T_{\nu k} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j S_j;$$

но тождество

$$\big((T_{ik}\, T_{\nu\pi})\, U\big) = 0$$

дает понять, что все β_j обращаются в нуль, следовательно,

$$(T_{ik}\, T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{k\nu}\, T_{i\pi} - \varepsilon_{\pi i}\, T_{\nu k}.$$

Из соотношения

$$(P_i\, U) = P_i + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\pi=1}^{n} \gamma_{\nu\pi}\, T_{\nu\pi} + \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu S_\nu,$$

если ввести

$$P_i + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\pi=1}^{n} \gamma_{\nu\pi} T_{\nu\pi} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu S_\nu$$

в качестве новых P_i, получается

$$(P_i\, U) = P_i.$$

Далее,

$$(P_i\, S_k) = \varepsilon_{ik}\, U + T_{ki} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu S_\nu;$$

однако если использовать тождество

$$\big((P_i S_k)\,U\big) + (P_i S_k) - (P_i S_k) = 0,$$

то мы обнаружим, что λ_ν — нули; таким образом, мы имеем

$$(P_i S_k) = \varepsilon_{ik}\,U + T_{ki}.$$

Наконец, имеют место соотношения вида

$$(P_i\,T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j + \sum\sum a_{\nu\pi} T_{\nu\pi} + \sum \lambda_\nu S_\nu,$$

$$(P_i P_k) = \sum g_\nu P_\nu + \sum\sum h_{\nu\pi} T_{\nu\pi} + \sum \lambda_\nu S_\nu;$$

но и здесь все константы обращаются в нуль в силу тождеств

$$\big((P_i\,T_{kj})\,U\big) - (P_i\,T_{kj}) = 0,$$

$$\big((P_i\,P_k)\,U\big) - 2(P_i\,P_k) = 0.$$

Таким образом,

$$(P_i\,T_{kj}) = \varepsilon_{ik}\,P_j, \quad (P_i\,P_k) = 0.$$

Теперь все соотношения между инфинитезимальными преобразованиями нашей группы заданы. Можно заметить, что инфинитезимальные преобразования P_i, T_{ik} порождают подгруппу, имеющую рассмотренный в первом случае вид, и принимающие поэтому при надлежащем выборе переменных следующий вид:

$$P_i = p_i, \quad T_{ik} = x_i\,p_k \quad (i,k = 1 \cdots n).$$

Инфинитезимальное преобразование S_i в новых переменных запишется в виде $\sum \xi_{ik} p_k$, где ξ_{ik} удовлетворяют соотношениям:

$$(P_\nu S_i) = \varepsilon_{\nu i}\,U + T_{i\nu}, \quad (U S_i) = S_i.$$

Отсюда мы находим:

$$\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu} = \varepsilon_{\nu i} x_k + \varepsilon_{\nu k} x_i, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu} = 2\xi_{ik},$$

то есть $\xi_{ik} = x_i\,x_k$ и

$$S_i = x_i\,(x_1\,p_1 + \cdots + x_n\,p_n).$$

Итак, мы имеем группу

$$P_i = p_i, \quad T_{ik} = x_i\,p_k, \quad S_i = x_i\,(x_1\,p_1 + \cdots + x_n\,p_n) \quad (i,k = 1 \cdots n);$$

то есть все группы, относящиеся ко второму случаю, подобны общей проективной группе многообразия $x_1 \cdots x_n$.

§ 155

Остается третий и последний случай с n инфинитезимальными преобразованиями нулевого порядка $P_i = p_i + \cdots$, и $n^2 - 1$ преобразованиями первого порядка:

$$T_{ik} = x_i\, p_k + \cdots, \quad T_{ii} - T_{kk} = x_i\, p_i - x_k\, p_k + \cdots \qquad (i \gtrless k = 1 \cdots n),$$

тогда как преобразования более высокого порядка не встречаются.

Удобно заменить инфинитезимальные преобразования $T_{ii} - T_{kk}$ одним единственным вида $\alpha_1\, T_{11} + \cdots + \alpha_n\, T_{nn}$, если предположить, что α_i — произвольные константы, удовлетворяющие условию $\sum_i \alpha_i = 0$. Тогда прежде всего выполняются соотношения

$$(T_{ik}\, T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{k\nu} T_{i\pi} - \varepsilon_{\pi i} T_{\nu k} \quad (i \gtrless k, \nu \gtrless \pi),$$

$$\left(T_{ik}, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, T_{\nu\nu}\right) = (\alpha_k - \alpha_i) T_{ik}, \qquad \left(T_{ii} - T_{kk}, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, T_{\nu\nu}\right) = 0.$$

Более того, имеет место уравнение вида

$$\left(P_i, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, T_{\nu\nu}\right) = \alpha_i\, P_i + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ikj} T_{kj} \quad \left(\sum_k \lambda_{ikk} = 0\right).$$

Поэтому, если положить

$$P_i' = P_i + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_{ikj} T_{kj} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} l_{ikk} = 0\right),$$

получится

$$\left(P_i', \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, T_{\nu\nu}\right) = \alpha_i P_i' + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \{\lambda_{ikj} - (\alpha_i + \alpha_k - \alpha_j) l_{ikj}\}\, T_{kj}.$$

Теперь предположим, что для $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ выбрана совершенно определенная система значений, удовлетворяющая условию $\sum \alpha_i = 0$ и имеющая, кроме того, свойство, что ни одно выражение $\alpha_i + \alpha_k - \alpha_j$ не обращается в нуль — требование, которое всегда выполнимо. При этих условиях мы можем выбрать l_{ikj} такими, что имеют место уравнения

$$\lambda_{ikj} - (\alpha_i + \alpha_k - \alpha_j)\, l_{ikj} = 0,$$

причем условие $\sum_k l_{ikk} = 0$ будет выполнено само по себе. Следовательно, снова применяя первоначальное обозначение, получаем

$$\left(P_i, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu T_{\nu\nu}\right) = \alpha_i P_i \quad \left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = 0\right).$$

Если подставить выражение

$$\left(P_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k T_{kk}\right) = \beta_i P_i + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\pi=1}^{n} g_{\nu\pi} T_{\nu\pi} \quad \left(\sum \beta_k = \sum g_{\nu\nu} = 0\right)$$

в тождество

$$\left(\left(P_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k T_{kk}\right) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_{kk}\right) - \alpha_i \left(P_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k T_{kk}\right) = 0,$$

то получится

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\pi=1}^{n} (\alpha_\pi - \alpha_\nu - \alpha_i)\, g_{\nu\pi}\, T_{\nu\pi} = 0.$$

Отсюда следует в силу свойств α, что все $g_{\nu\pi}$ равны нулю, то есть справедливо равенство

$$\left(P_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k T_{kk}\right) = \beta_i T_i$$

для всех систем значений $\beta_1 \cdots \beta_n$, удовлетворяющих условию $\sum \beta_k = 0$. Далее имеет место соотношение вида

$$(P_i, T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\pi=1}^{n} h_{\nu\pi} T_{\nu\pi} \quad \left(k \gtrless j, \sum_{\nu} h_{\nu\nu} = 0\right).$$

Поэтому тождество

$$\left((P_i, T_{kj}) \sum_{\tau=1}^{n} \beta_\tau T_{\tau\tau}\right) = (\beta_i + \beta_j - \beta_k)(P_i\, T_{kj}) = 0$$

принимает вид

$$\varepsilon_{ik}(\beta_k - \beta_i)\, P_j + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\pi=1}^{n} (\beta_\pi - \beta_\nu - \beta_i + \beta_k - \beta_j)\, h_{\nu\pi}\, T_{\nu\pi} = 0;$$

следовательно, поскольку β_ν, несмотря на условие $\sum_\nu \beta_\nu = 0$, совершенно произвольны, $h_{\nu\pi}$ должны обращаться в нуль:

$$(P_i, T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j \quad (k \gtrless j).$$

Наконец, надо еще исследовать соотношения

$$(P_i P_k) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu P_\nu + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\pi=1}^{n} m_{\nu\pi} T_{\nu\pi} \quad \left(\sum_{\nu=1}^{n} m_{\nu\nu} = 0\right).$$

Произведя вычисления в тождестве

$$\left((P_i P_k)\sum_{\tau=1}^{n} \beta_\tau T_{\tau\tau}\right) - (\beta_i + \beta_k)(P_i P_k) = 0,$$

мы находим

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\beta_\nu - \beta_i - \beta_k)\, m_\nu P_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} = \sum_{\pi=1}^{n}(\beta_\pi - \beta_\nu - \beta_i - \beta_k)\, m_{\nu\pi} T_{\nu\pi} = 0;$$

поэтому в силу произвольности β_ν все m_ν и $m_{\nu\pi}$ должны равняться нулю. Следовательно,

$$(P_i P_k) = 0,$$

и, таким образом, нам известны все соотношения между инфинитезимальными преобразованиями нашей группы.

Точно так же, как мы делали в первом случае, приведем $P_1 \cdots P_n$ при помощи подходящего выбора переменных к виду

$$P_i = p_i \quad (i = 1 \cdots n).$$

Действуя, как в конце параграфа 153, мы заключаем отсюда, что *все группы, подпадающие под третий случай, подобны специальной линейной группе многообразия* $x_1 \cdots x_n$.

Объединяя найденные результаты, мы таким образом получаем следующую теорему.

Теорема 112. *Если транзитивная группа* G *от* n *переменных такова, что все ее преобразования, оставляющие точку общего положения инвариантной, преобразуют проходящие через нее линейные элементы при помощи общей или специальной линейной однородной группы* $L_1 f, L_2 f \cdots$, *то* G *подобна общей проективной, общей линейной или специальной линейной группе от* n *переменных*[2].

[2] Ли, Archiv for Math., том 3, Христиания, 1878 г.; ср. также Math. Ann., том XVI, том XXV и Götting. Nachr., 1874 г., стр. 539.

Назовем r-параметрическую группу пространства $x_1 \cdots x_n$ m кратно транзитивной, если она содержит по крайней мере одно преобразование, переводящее m заданных точек общего взаимного положения в m других произвольно заданных точек общего положения, тогда мы можем легко доказать, *во-первых*, что всегда $m \leqslant n+2$, и, *во-вторых*, что группа, для которой $m = n+2$, подобна общей проективной группе m-мерного пространства.

Действительно, если инфинитезимальные преобразования $X_1 f \cdots X_r f$ порождают m-кратную транзитивную группу от переменных $x_1 \cdots x_n$, то непосредственно ясно, что линейная однородная группа $L_1 f, L_2 f \cdots$, соответствующая точке x_k^0 общего положения, преобразует ∞^{n-1} линейных элементов, проходящих через эту точку при помощи $(m-1)$-кратной транзитивной проективной группы. Но поскольку общая проективная группа $(n-1)$-мерного пространства, как известно, является $(n+1)$-кратно транзитивной, то мы видим, что

$$m - 1 \leqslant n + 1, \text{ а значит, } m \leqslant n + 2.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 113. *Конечная непрерывная группа от n переменных является максимум $(n+2)$-кратно транзитивной.*

Если r-параметрическая группа $X_1 f \cdots X_r f$ от n переменных является ровно $(n+2)$ раз транзитивной, то группой, $L_1 f, L_2 f \cdots$, соответствующей точке x_k^0 общего положения, как уже раньше отмечалось, будет общая или специальная линейная однородная группа от n переменных; следовательно, группа $X_1 f \cdots X_r f$ подобна общей проективной, общей линейной или специальной линейной группе от n переменных. А поскольку лишь первая из этих трех перечисленных групп является $(n+2)$ раз транзитивной, мы получаем следующую теорему.

Теорема 114. *Если r-параметрическая группа от n переменных $(n+2)$ кратно транзитивна, то она подобна общей проективной группе n-мерного пространства.*

Во второй и третьей частях будет, помимо всего прочего, проведен ряд исследований, аналогичных изложенным в данной главе.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой: **subscribe@rcd.ru**

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин: **http://shop.rcd.ru**

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414,
   тел.: (499) 135–54–37, (495) 641–69–38
2. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
3. Магазины:

   Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)
   «Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
   Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный, Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409–93–28)

   С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

ISBN 978-5-4344-0009-1



Софус Ли

Теория групп преобразований: в 3-х частях
Часть 1

Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка А. В. Моторин
Корректор О. А. Шемякина

Подписано в печать 27.06.2011. Формат 60 × 84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 41,39. Уч. изд. л. 44,45.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная № 1. Заказ № 11-27.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295
Переплет выполнен в ГУП УР «Ижевский полиграфический комбинат»
426039, г. Ижевск, Воткинское шоссе, 180.