

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

В. Н. Диесперов

**ЛЕКЦИИ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ**

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2017

УДК 517.95(075)

ББК 22.161.6я73

Д44

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор *В. И. Жук*

Доктор физико-математических наук, профессор *В. И. Зубов*

Диесперов, В. Н.

Д44 Лекции по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие /

В. Н. Диесперов. – М. : МФТИ, 2017. – 242 с.

ISBN 978-5-7417-0630-5

Содержит все традиционные разделы классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. Изложение проведено с полными доказательствами основных положений данной теории. Некоторым методам, связанным с теорией однопараметрических групп преобразований, с теорией пограничного слоя, с интегрированием уравнений второго порядка с помощью степенных рядов, с теорией продолжения решений уравнений, с уравнениями первого порядка, нерешенными относительно производной, было уделено особое внимание.

Предназначено для студентов 2 курса Московского физико-технического института (государственного университета).

УДК 517.95(075)

ББК 22.161.6я73

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского физико-технического института (государственного университета)

ISBN 978-5-7417-0630-5

© Диесперов В. Н., 2017

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2017

Оглавление

Предисловие	8
Глава 1. Основные понятия и определения. Простейшие типы уравнений и методы их решения	10
§1.1. Обозначения, основные понятия и определения	10
§1.2. Простейшие типы уравнений и методы их решения	15
1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах	15
1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными	19
1.2.3 Однородные уравнения	22
1.2.4 Линейные уравнения первого порядка	24
1.2.5 Уравнение Бернулли	27
1.2.6 Уравнение Риккати	28
1.2.7 Интегрирующий множитель	30
§1.3. Методы решения уравнений 1-го порядка, неразрешенных относительно производной	32
§1.4. Об одном методе понижения порядка дифференциальных уравнений	37
1.4.1 Дифференциальные уравнения высших порядков	37
1.4.2 Однопараметрические группы преобразований на плоскости	38
1.4.3 Инвариантность дифференциального уравнения относительно однопараметрической группы преобразований	45
1.4.4 Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка	47

Глава 2. Исследование задачи Коши. Продолжение решений. Уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной. Особое решение. Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных данных	58
§2.1. Основные определения и предварительные сведения для нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	58
§2.2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы уравнения	61
§2.3. Область существования решения	67
§2.4. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной	79
§2.5. Зависимость решений от начальных данных и параметров	89
§2.6. Уравнения n -го порядка, разрешенные относительно старшей производной. Задача Коши, теорема существования и единственности её решения	97
Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами	99
§3.1. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений	99
3.1.1 Основные определения, задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши	99
3.1.2 Существование фундаментальной системы решений у линейной однородной системы дифференциальных уравнений	103
3.1.3 Формула Лиувилля–Остроградского	105
3.1.4 Структура решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений	106
3.1.5 Решение задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений методом вариации постоянных	108
§3.2. Линейные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами	109

3.2.1	Теорема существования и единственности решения задачи Коши	109
3.2.2	Определитель Вронского. Формула Лиувилля– Остроградского. Фундаментальная система решений	110
3.2.3	Структура решений линейных уравнений n -го порядка	112
3.2.4	Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения	112
§3.3.	Линейные однородные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами	113
3.3.1	Предварительные сведения	113
3.3.2	Теорема сравнения Штурма	115
3.3.3	Следствия, вытекающие из теоремы сравнения Штурма	116
3.3.4	Теорема Штурма о разделении нулей	117
3.3.5	Примеры использования теоремы Штурма	118
3.3.6	Критерий Кнезера	121
§3.4.	Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений .	122

Глава 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными вещественными коэффициентами

128

§4.1.	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными вещественными коэффициентами	128
4.1.1	Линейные однородные уравнения	128
4.1.2	Линейные неоднородные уравнения (ЛНУ) с квазимногочленом в правой части	133
§4.2.	Линейные системы дифференциальных уравнений	135
4.2.1	Системы линейных однородных уравнений с постоянными вещественными коэффициентами .	135
4.2.2	Линейные неоднородные системы с квазимногочленом в правой части	144
4.2.3	Пример решения линейной неоднородной системы	147
§4.3.	Матричная экспонента	148

Глава 5. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами, содержащих малый параметр	160
§5.1. Краевые задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами	160
§5.2. Краевая задача первого рода при наличии малого параметра перед старшей производной	162
§5.3. Пример решения краевой задачи первого рода	165
Глава 6. Преобразование Лапласа	167
§6.1. Основные определения и теоремы	167
§6.2. Простейшие свойства преобразования Лапласа	169
§6.3. Вычисление преобразования Лапласа, если $f(t)$ квазимногочлен	170
§6.4. Применение преобразования Лапласа	172
Глава 7. Элементы вариационного исчисления	174
§7.1. Введение и основные определения	174
§7.2. Простейшая задача вариационного исчисления	176
§7.3. Некоторые обобщения простейшей задачи	182
7.3.1 Функционалы, содержащие вектор-функцию	182
7.3.2 Функционалы, зависящие от производных высших порядков	185
7.3.3 Задача со свободными концами	188
§7.4. Условный экстремум	189
7.4.1 Изопериметрическая задача	189
7.4.2 Задача Лагранжа	193
Глава 8. Автономные системы	197
§8.1. Основные понятия и определения	197
§8.2. Свойства решений автономных систем и теорема о поведении фазовых траекторий	198
§8.3. Фазовый портрет решений автономной линейной системы с действительными коэффициентами на плоскости	202

§8.4. Поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной автономной системы на плоскости	210
Глава 9. Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений	214
§9.1. Основные понятия и определения	214
§9.2. Достаточные условия устойчивости решений для линейной системы уравнений с постоянными вещественными коэффициентами	215
§9.3. Устойчивость по первому приближению	219
§9.4. Лемма Гронуолла	222
Глава 10. Первые интегралы нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	224
§10.1. Первые интегралы автономных систем и критерий первого интеграла	224
§10.2. Теорема о числе независимых первых интегралов	225
§10.3. Редукция автономных систем с помощью первых интегров	229
§10.4. Первые интегралы произвольных нормальных систем уравнений	230
Глава 11. Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка	231
§11.1. Основные понятия и определения	231
§11.2. Характеристики и интегральные поверхности линейного уравнения с частными производными первого порядка	232
§11.3. Задача Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка и теорема существования и единственности её решения	233
§11.4. Пример решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка	237
Литература	240

Предисловие

Настоящее учебное пособие является развёрнутым изложением годового курса лекций. «Дифференциальные уравнения», которые автор читал студентам второго курса ФОПФ и ФПФЭ МФТИ (ГУ). При чтении лекций преследовались две основные цели. Первая – дать студентам такие знания, которые позволят им свободно ориентироваться в классических вопросах дифференциальных уравнений в рамках специализации «Прикладные математика и физика» и заложить фундамент знаний, позволяющий им в будущем успешно решать различные задачи, возникающие на практике. Фундаментальные знания основ дифференциальных уравнений необходимы, в частности, для успешного применения численных методов. Вторая цель – обучить студентов современным методам, которые ученые выработали для решения задач в различных областях науки. Эти методы связаны с теорией однопараметрических групп преобразований, теорией пограничного слоя, с решением дифференциальных уравнений второго порядка с помощью спецфункций и развёрнутым изложением теорем продолжения решений дифференциальных уравнений.

В пособии приводятся решения большого количества примеров, которые помогают по существу разобраться в теоретических тонкостях, присущих курсу дифференциальных уравнений. Последний излагается подробно, просто и доступно для студентов второго курса. Все приведенные утверждения даны с доказательствами. Содержание пособия соответствует государственному стандарту и программе дисциплины «Дифференциальные уравнения».

Пособие охватывает все основные разделы теории дифференциальных уравнений, традиционно включаемые в университетские курсы. Представлены фундаментальные теоретические результаты, относящиеся к исследованию задачи Коши для нормальных систем диф-

ференциальных уравнений и уравнений высших порядков, а также для уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Дана геометрическая интерпретация полученных результатов. Изложены методы интегрирования различных типов уравнений и систем. Значительное внимание уделено автономным системам, свойствам их решений, результатам, относящимся к исследованию устойчивости положений равновесия и поведению фазовых траекторий, первым интегралам. Рассмотрены линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши для таких уравнений. Изложены основы вариационного исчисления.

В списке литературы читатели найдут книги, в которых затронутые в пособии темы раскрыты по-иному или более полным образом. Большая часть из них являются учебниками, которые доступны для всех.

Автор благодарит своих бывших студентов 21 группы ФОПФ, а именно: Алексея Слепцова, Василия Альбу и Фёдора Попова, которые помогли перевести лекции в электронный вид. Автор также благодарен профессору МФТИ В. И. Зубову, доцентам МФТИ С. В. Свирищевскому и И. И. Богданову, а также доценту ВШЭ И. В. Романову за ценные советы и замечания.

Глава 1

Основные понятия и определения.

Простейшие типы уравнений и методы их решения

1.1. Обозначения, основные понятия и определения

В этой главе все переменные и функции предполагаются вещественными. Следующие связные множества $(a, b) = \{t : a < t < b\}$; $[a, b) = \{t : a \leq t < b\}$, ... будем называть промежутками и обозначать либо J , либо $\langle a, b \rangle$. Множество функций, непрерывных на промежутке J , обозначим $\mathbf{C}(J)$. Множество функций, имеющих k непрерывных производных на J , обозначим $\mathbf{C}^k(J)$. Через $\Omega \subseteq \mathbb{R}_{t,x}^2$ обозначим область. Множество функций $f(t, x)$, непрерывных в области Ω , обозначим $\mathbf{C}(\Omega)$. Множество функций $f(t, x)$ в области Ω , для которых все частные производные порядка k существуют и непрерывны, обозначим $\mathbf{C}^k(\Omega)$. Окончание замечаний и примеров будет обозначаться символом $\diamond$.

Пусть функция $F(t, x, p)$ определена и непрерывна в области $G \subseteq \mathbb{R}^3$.

Определение 1.1.1. Уравнение

$$F(t, x, x') = 0, \quad (1.1)$$

где t — независимая переменная, $x(t)$ — неизвестная функция, а $x'(t)$ — её производная, называется дифференциальным уравнением первого порядка, неразрешенным относительно производной.

Определение 1.1.2. Функция $x = \varphi(t)$, определённая на интервале J , называется решением дифференциального уравнения (1.1), если

1) $\varphi(t) \in \mathbf{C}^1(J)$ (непрерывно дифференцируемая функция);

- 2) $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in G$ для любого $t \in J$;
- 3) $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$ для любого $t \in J$.

Определение решения на интервале естественным образом обобщается на случай любого промежутка. Пусть мы имеем некоторое решение $x = \varphi(t)$, $t \in J$, уравнения (1.1). График этого решения называется *интегральной кривой* (интегральная кривая в дальнейшем будет отождествляться с решением дифференциального уравнения).

Часто дифференциальное уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной. Ниже предполагается, что $f(t, x) \in \mathbf{C}(\Omega)$. Аналогично уравнению (1.1) определяется решение дифференциального уравнения (1.2). Таким образом, дифференциальное уравнение (1.2) имеет решение, если существуют промежуток J и непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t)$, определённая на нем, при подстановке которой в уравнение (1.2) последнее обращается в тождество. Если какое-нибудь решение задано неявно в виде уравнения $\Phi(t, x) = 0$, то последнее носит название *интеграла уравнения*.

Основной задачей теории обыкновенных дифференциальных уравнений является отыскание всех решений дифференциального уравнения (данного) и изучение свойств этих решений. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется его интегрированием.

Изучение теории дифференциальных уравнений начнём с уравнения (1.2). Ему можно дать простую геометрическую интерпретацию. Уравнение определяет в каждой точке $(t, x) \in \Omega$ интегральной кривой значение производной $x'(t)$, которое равно тангенсу угла α , образованного касательной в этой точке с положительным направлением оси Ot . Если в каждой точке области Ω задано значение некоторой величины, то говорят, что в ней определено поле этой величины. Три числа (t, x, x') определяют направление прямой, проходящей через каждую точку (t, x) в области Ω . Таким образом, дифференциальное уравнение (1.2) задаёт в области Ω поле направлений. Проведём в каждой точке маленький отрезок, указывающий направление касательной. Тогда совокупность отрезков этих прямых даёт геометрическую картину поля

направлений в области Ω . Функция $x(t)$ будет решением тогда и только тогда, когда касательная в каждой точке ее графика совпадает с полем направлений в этой точке.

Определение 1.1.3. Множество точек, в каждой из которых дифференциальное уравнение (1.2) определяет одно и то же направление с углом α , называется *изоклиной*.

Знание изоклин часто позволяет построить качественную картину поведения интегральных кривых уравнения (1.2). Изоклины задаются уравнением $\operatorname{tg} \alpha = f(t, x)$.

Пример 1.1.1. Построить методом изоклин качественную картину поведения интегральных кривых уравнения, которое не интегрируется в элементарных функциях:

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2, \quad R^2 = t^2 + x^2 \geq 0,$$

$$R^2 > 0 - \text{окружность}, \quad R^2 = 0 - \text{точка.} \diamond$$

Рассмотрим пример простейшего уравнения (1.2), когда его правая часть не зависит от x :

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \quad t \in J. \quad (1.3)$$

Все решения дифференциального уравнения (1.3) описываются однопараметрическим семейством функций:

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + C, \quad C \in (-\infty, \infty), \quad t_0, t \in J, \quad (1.4)$$

где C — произвольная постоянная, играющая роль параметра. Если мы хотим выделить какое-либо решение, то можно потребовать $x(t_0) = x_0$. Это условие называется начальным. Из него следует, что $C = x_0$. Интегральная кривая, проходящая через точку с координатами (t_0, x_0) , принимает вид $\varphi(t) = \int_{t_0}^t f(t) dt + x_0$. Мы пришли к одному из основных понятий в теории дифференциальных уравнений, а именно: *задаче Коши*.

Задача Коши. Пусть $(t_0, x_0) \in \Omega$. Найти интервал J , содержащий точку t_0 , и решение $\varphi(t), t \in J$, уравнения (1.2), определённое на нём

и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Задача Коши обозначается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \Omega. \quad (1.5)$$

Числа t_0, x_0 называются *начальными данными*. Задачу Коши часто называют задачей на начальные значения.

Таким образом, решение задачи Коши (1.5) существует, если существует интервал $J \ni t_0$ и решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1.2), определенное на J , такое, что выполняется $x_0 = \varphi(t_0)$.

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши

Теорема 1.1. Пусть $f(t, x), \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega)$. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ можно указать интервал $J = J(t_0, x_0) \ni t_0$, на котором существует единственное решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $x_0 = \varphi(t_0)$.

На основании определений, данных выше, теорему 1.1 кратко можно сформулировать следующим образом:

если $f(t, x), \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ решение задачи Коши (1.5) существует и единственно.

Теорему 1.1 существования и единственности решения задачи Коши в силу её важности будем называть **основной**.

Замечание 1.1.1. Теорема 1.1 называется теоремой Коши [5, 6, 7, 13] и в общем случае носит локальный характер. $\diamond$

Замечание 1.1.2. Требование непрерывности $f(t, x)$ обеспечивает **существование** решения задачи Коши (1.5) (теорема Пеано [2, 10]), а требование непрерывности $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ обеспечивает **единственность** решения задачи Коши (1.5). $\diamond$

Определение 1.1.4. Совокупность всех решений уравнения (1.2) называется общим решением.

В ряде случаев все решения уравнения (1.2) можно описать с помощью функции $\varphi(t, C)$ переменного t и параметра C . Дадим понятие общего решения и общего интеграла в той форме, в какой они используются обычно при решении студентами задач (см. также [5, 6]). Ниже

при их определении будем предполагать, что в области Ω выполнены условия теоремы 1.1.

Определение 1.1.5. Мы говорим, что функция

$$x = \varphi(t, C) \quad (1.6)$$

является общим решением дифференциального уравнения (1.2) в области $D \subseteq \Omega$, если

1) для любого допустимого значения C функция $\varphi(t, C)$ является решением уравнения;

2) любое решение уравнения (1.2), график которого проходит через область D , может быть описано с помощью функции $\varphi(t, C)$ при соответствующем выборе параметра C .

При фиксированном $C = C_0$ функция $x = \varphi(t, C_0)$ определяет частное решение. Множество значений параметра C , которые соответствуют всем интегральным кривым, проходящим через область D , будет обозначаться $(C)_D$. Под словами *произвольная постоянная* C подразумевается, что параметр C может принимать любое значение из множества $(C)_D$. Такое значение C будет называться допустимым. Ниже в примере 1.2.2 (раздел 1.2.2) уравнение определено в $\Omega \equiv \mathbb{R}^2$ и его правая часть — непрерывно дифференцируемая функция. Согласно определению 1.1.5 общие решения уравнения (1.2) в областях $x > 0$ и $x < 0$ описываются функцией $x = -1/(t + C)$. Но описать с её помощью общее решение уравнения во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ согласно определению 1.1.5 невозможно.

Определение 1.1.6. Уравнение

$$\Phi(t, x, C) = 0 \quad (1.7)$$

называется общим интегралом дифференциального уравнения (1.2) в области $D \subseteq \Omega$, если

1. для любого допустимого значения C уравнение (1.7) определяет неявно решение уравнения (1.2);
2. любое решение уравнения (1.2), график которого проходит через область D , может быть описано неявно уравнением (1.7) при соответствующем выборе постоянной C .

Из определения следует, что общий интеграл определяет в неявном виде все решения уравнения (1.2) в области D .

Теорема 1.2. Пусть в области Ω выполняются условия теоремы 1.1. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ можно указать такую её окрестность, в которой все решения уравнения (1.2) можно описать с помощью общего решения (1.6) (или с помощью общего интеграла вида $\Delta(t, x) = C$) [5, 10].

Следовательно, при условиях теоремы 1.1 все решения уравнения (1.2) локально описываются однопараметрическим семейством функций $x = \varphi(t, C)$, $C \in (C)_D$.

Определение 1.1.7. Говорят, что дифференциальное уравнение интегрируемо в конечном виде, если все его решения могут быть представлены в виде элементарных функций и квадратур с помощью конечного числа алгебраических операций и суперпозиций.

1.2. Простейшие типы уравнений и методы их решения

Ниже рассматриваются дифференциальные уравнения (1.2) с такими правыми частями, которые позволяют проинтегрировать уравнение в конечном виде и доказать существование и единственность решения задачи Коши (1.5) при более слабых условиях, наложенных на функцию $f(t, x)$, чем в теореме 1.1.

1.2.1. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение (1.2) можно представить в виде

$$dx - f(t, x)dt = 0, \quad (t, x) \in \Omega \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) называется уравнением в дифференциалах. В более общей форме его можно записать следующим образом:

$$P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.9)$$

Функции $P(t, x)$, $Q(t, x)$ предполагаются непрерывными. Переменные t и x входят в уравнение (1.9) равноправно. Поэтому его решение можно искать либо в виде $x = \varphi(t)$, $t \in J$, либо $t = \psi(x)$, $x \in I$. В первом

случае интегрируется уравнение $\frac{dx}{dt} = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$, $Q(t,x) \neq 0$, во-втором – уравнение $\frac{dt}{dx} = -\frac{Q(t,x)}{P(t,x)}$, $P(t,x) \neq 0$.

Функция $x = \varphi(t)$, $t \in J$ называется решением уравнения (1.9), если

$$P(t, \varphi(t)) + Q(t, \varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0, \quad t \in J. \quad (1.10)$$

Аналогично для $t = \psi(x)$, $x \in I$.

Задача Коши для уравнения (1.9) ставится следующим образом: найти решение уравнения (1.9), график которого проходит через точку $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Определение 1.2.1. Уравнение (1.9) называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $U(t, x) \in C^1(\Omega)$ такая, что

$$P(t, x)dt + Q(t, x)dx = dU(t, x), \quad (t, x) \in \Omega.$$

Из определения дифференциала функции $U(t, x)$ следует

$$P(t, x) = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad Q(t, x) = \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Теорема 1.3. Если $P, Q \in C(\Omega)$, $Q \neq 0$ и уравнение (1.9) является уравнением в полных дифференциалах, то

1) функция $\varphi(t)$, $t \in J$, является решением уравнения (1.9) в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$U(t, \varphi(t)) \equiv C, \quad t \in J;$$

2) через любую точку области Ω проходит единственная интегральная кривая.

Доказательство. ► 1) Пусть $\varphi(t)$, $t \in J$, — решение уравнения в полных дифференциалах. Тогда из формул (1.10) и (1.11) следует

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, \varphi(t))dt + \frac{\partial U}{\partial x}(t, \varphi(t))d\varphi(t) = 0 \Rightarrow U(t, \varphi(t)) = C, \quad t \in J.$$

Обратно. Всякая функция $x = \varphi(t)$, $t \in J$, определяемая неявно уравнением $U(t, x) = C$, где C — допустимая постоянная, будет также решением уравнения (1.10). Действительно, дифференцируя тождество

$U(t, \varphi(t)) \equiv C$, $t \in J$, по t , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x} d\varphi(t) &\equiv 0 \Rightarrow P(t, \varphi(t))dt + Q(t, \varphi(t))d\varphi(t) \equiv 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(t, \varphi(t)) + Q(t, \varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0, \quad t \in J; \end{aligned}$$

2) Для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ имеем $U(t_0, x_0) = C$. Так как $Q(t_0, x_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$, то из теоремы о неявной функции следует, что в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) уравнение $U(t, x) = C$ задаёт единственным образом решение в виде функции $x = \varphi(t)$, $t \in J$, $\varphi(t_0) = x_0$. Она, очевидно, будет решением задачи Коши (1.5). Здесь уравнение $U(t, x) = C$, $t \in J$ является примером общего интеграла, определённого выше. Постоянная C принимает значения из множества $\{U(t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in \Omega\}$, которое является множеством её допустимых значений. Для каждого решения $x = \varphi(t)$, $t \in J$, постоянная C своя.

Таким образом, решение $x = \varphi(t)$, $t \in J$, принимающее заданное значение $x_0 = \varphi(t_0)$, $(t_0, x_0) \in \Omega$, находится из общего интеграла $U(t, x) = U(t_0, x_0)$. Если $Q(t_0, x_0) = 0$, а $\frac{\partial U}{\partial t}(t_0, x_0) = P(t_0, x_0) \neq 0$, то решение уравнения (1.9), график которого проходит через точку (t_0, x_0) , будет иметь вид $t = \psi(x)$, $x \in I$. Исключением в смысле теоремы 1.1 существования и единственности служат точки (t_0, x_0) , для которых одновременно $P(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0) = 0$. Если существует такая окрестность точки (t_0, x_0) , в которой $P^2(t, x) + Q^2(t, x) > 0$, то точка (t_0, x_0) называется изолированной особой точкой. Отсюда следует, что для изолированной неособой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ решение задачи Коши существует и единственно. Оно может быть представлено либо в виде $x = \varphi(t)$, либо в виде $t = \psi(x)$. ■

Теорема 1.4. (Признак уравнения в полных дифференциалах).

Если $P, Q, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial t} \in C(\Omega)$ и область Ω односвязная, то уравнение (1.9) будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда в области Ω выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Теорема доказывается в курсе математического анализа. Решение уравнения в полных дифференциалах, выраженное через функции $P(t, x)$ и $Q(t, x)$, можно получить в виде общего интеграла, как показывает приведенная ниже теорема.

Теорема 1.5. Пусть в области $\Omega = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$ выполняются условия теоремы 1.4, уравнение (1.9) является уравнением в полных дифференциалах и $Q(t, x) \neq 0$. Тогда функцию $U(t, x)$ для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ можно представить в виде

$$U(t, x) = \int_{t_0}^t P(\tau, x) d\tau + \int_{x_0}^x Q(t_0, z) dz, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.13)$$

При этом решение задачи Коши (1.5) единственно и в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) представимо в виде $x = \varphi(t)$, $t \in J$.

Доказательство. ► Согласно соотношениям (1.11) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial t} = P(t, x).$$

Проинтегрируем это уравнение по t , считая x постоянным:

$$U(t, x) = \int_{t_0}^t P(\tau, x) d\tau + \phi(x).$$

Функция $\phi(x)$ здесь предполагается непрерывно дифференцируемой. Дифференцируя найденную функцию $U(t, x)$ по x и используя (1.11) и (1.12), получим

$$\begin{aligned} Q(t, x) = \frac{\partial U}{\partial x} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial P}{\partial x} dt + \phi'(x) = \int_{t_0}^t \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \phi'(x) = \\ &= Q(t, x) - Q(t_0, x) + \phi'(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что одним из значений функции $\phi(x)$ будет

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x Q(t_0, z) dz.$$

В результате получаем формулу (1.13). Так как $Q(t_0, x_0) \neq 0$, то из теоремы 1.3 следует существование и единственность решения задачи Коши. ■

Замечание 1.2.1. Если $Q(t_0, x_0) = 0$, а $P(t_0, x_0) \neq 0$, то функцию $U(t, x)$ можно представить в виде $U(t, x) = \int_{t_0}^t P(\tau, x_0) d\tau + \int_{x_0}^x Q(t, z) dz$. Согласно теореме о неявной функции решение уравнения (1.9), график которого проходит через точку $(t_0, x_0) \in \Omega$, существует и единственно. Оно может быть представлено в виде $t = \psi(x), x \in I$. $\diamond$

Если функция $Q(t, x) \neq 0$, $(t, x) \in \Omega$, то область Ω будет областью единственности решения.

1.2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнение (1.9), в котором $P(t, x) = T_1(t)X_1(x)$, $Q(t, x) = T_2(t)X_2(x)$:

$$T_1(t)X_1(x)dt + T_2(t)X_2(x)dx = 0, (t, x) \in \Omega. \quad (1.14)$$

Оно называется уравнением с разделяющимися переменными в симметричной форме.

Будем считать, что $\Omega = \{(t, x) : a_1 < t < a_2, b_1 < x < b_2\}$ и функции $P(t, x)$, $Q(t, x)$ непрерывны в ней. Обозначим через S множество: $S = \{(t, x) \in \Omega : T_2(t)X_1(x) = 0\}$, а через $D = \{(t, x) : c_1 < t < c_2, d_1 < x < d_2\}$ – любую компоненту связности открытого множества $\Omega \setminus S$.

Разделим уравнение (1.14) на $T_2(t)X_1(x)$. В результате в области D получим уравнение

$$\frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx = 0, \quad (1.15)$$

которое называется уравнением с разделёнными переменными. Его коэффициенты удовлетворяют условиям теоремы 1.4. Функция (1.13) и общий интеграл уравнения (1.15) принимают вид

$$U(t, x) = \int_{t_0}^t \frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \int_{x_0}^x \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \int_{x_0}^x \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx = C.$$

Последняя формула показывает, что сумма первообразных функций $\frac{T_1}{T_2}$ и $\frac{X_2}{X_1}$, приравненная к допустимой постоянной C , определяет общий интеграл. Его можно записать в виде

$$\int \frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \int \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx = C. \quad (1.16)$$

Заметим, что отрезки прямых $x = \text{const}$, $t = \text{const}$, принадлежащие множеству S , являются решениями уравнения (1.14).

Если $T_2(t)X_2(x) \neq 0$, то уравнение (1.16) можно представить в виде (уравнения разрешённого относительно производной):

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{T_1(t)X_1(x)}{T_2(t)X_2(x)} = f(t)g(x). \quad (1.17)$$

Пример 1.2.1. Рассмотрим уравнение с разделяющимися переменными в форме (1.17):

$$\frac{dx}{dt} = |x|^{\frac{2}{3}}, (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.18)$$

Решение. Нетрудно видеть, что $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, — решение уравнения (1.18). Так как правая часть уравнения непрерывная функция, то решение задачи Коши с начальным условием $x(t_0) = 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, существует (теорема Пеано). Однако она не дифференцируемая при $x = 0$ функция, поэтому единственность решения задачи Коши не гарантируется.

1. Пусть $x > 0$. Тогда $x = \left(\frac{t+A}{3}\right)^3$, $t + A > 0$, $A \in \mathbb{R}$;
2. Если $x < 0$, то $x = \left(\frac{t+B}{3}\right)^3$, $t + B < 0$, $B \in \mathbb{R}$.

Если $A = B$, то функция $x = \left(\frac{t+A}{3}\right)^3$ является решением уравнения (1.18) в $\mathbb{R}^2$.

Если $A \neq B$, то для любых $t_1 < t_2$ имеются также решения вида

$$x(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-t_1}{3}\right)^3, & t < t_1, \\ 0, & t \in [t_1, t_2], \\ \left(\frac{t-t_2}{3}\right)^3, & t > t_2, \end{cases}$$

которые называются составными или композиционными. Таким образом, интегральными кривыми уравнения (1.18) будут все дифференцируемые кривые, составленные из графиков решений, описанных в пунктах 1), 2), и решения $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. $\diamond$

Через произвольную точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ во всей плоскости проходит бесконечно много (континуум) интегральных кривых, касающихся

оси Ot . Локально через любую точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2, x_0 \neq 0$, проходит одна интегральная кривая. Такая ситуация возникает потому, что решение $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, является особым (рис. 1.1).

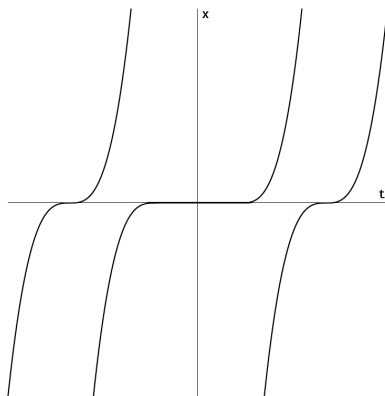


Рис. 1.1. Пример особого решения

Определение 1.2.2. Решение $\varphi(t), t \in J$ дифференциального уравнения (1.2) (также как и уравнения (1.1)) называется особым, если в любой окрестности каждой его точки $(t_0, \varphi(t_0)), t_0 \in J$ проходит другая интегральная кривая, имеющая с ним в этой точке общую касательную.

Это определение можно перефразировать следующим образом: решение $\varphi(t), t \in J$, называется особым, если в любой окрестности каждой его точки нарушается единственность решения задачи Коши.

Если через точку (t_0, x_0) проходят две или более интегральные кривые уравнения (1.2), то она называется точкой Пеано для этого уравнения. Говорят, что в этой точке имеет место **явление Пеано**. Все точки оси Ot являются точками Пеано уравнения (1.18).

Пример 1.2.2. Рассмотрим ещё одно уравнение с разделяющимися переменными в форме (1.17), правая часть которого является непрерывно дифференцируемой функцией:

$$\frac{dx}{dt} = x^2, (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.19)$$

Решение. Заметим, что функция $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, является решением. Пусть $x \neq 0$. Тогда уравнение (1.19) эквивалентно уравнению

$$\frac{dx}{x^2} = dt.$$

Функция $x = -1/(t + C)$ будет решением уравнения, где C — произвольная постоянная. Вопрос: в каких областях функция $x = -1/(t + C)$ является общим решением? Этот пример показывает, что теорема 1.1 носит локальный характер. Несмотря на то, что правая часть уравнения (1.19) является непрерывно дифференцируемой функцией в $\mathbb{R}^2$, любое его нетривиальное решение при стремлении t к некоторому конечному значению стремится к бесконечности (рис. 1.2).

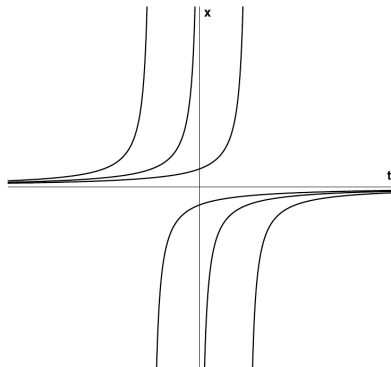


Рис. 1.2. $\frac{dx}{dt} = x^2$

Согласно **определению 1.5** функция $x = -1/(t + C)$ является общим решением либо в области $x > 0$, либо в области $x < 0$. $\diamond$

1.2.3. Однородные уравнения

Уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right), \quad t \neq 0, \quad (1.20)$$

называется однородным дифференциальным уравнением. При этом предполагается, что функция $f(z)$ определена и непрерывна на интервале $I = (a, b)$. Произведём замену $x(t) = tz(t)$, где $z(t)$ — новая неизвестная функция. Если функция $f(z)$ определена на интервале I ,

то функция $f\left(\frac{x}{t}\right)$ будет определена при $a < \frac{x}{t} < b$, то есть в областях Ω_1 и Ω_2 . Они представлены на рис. 1.3 в предположении $a < 0$ и $b > 0$. Обозначим $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Множество Ω не содержит точку $(0, 0)$.

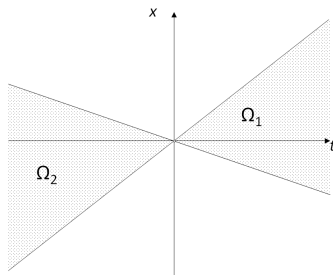


Рис. 1.3. Области Ω_1 и Ω_2

Теорема 1.6. Если $f(z) \in C(I)$, $f(z) \neq z$, $z \in I$, то через каждую точку $(t_0, x_0) \in \Omega$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1.20).

Доказательство. ► Положим $x(t) = tz(t)$. Тогда уравнение (1.20) последовательно принимает вид: $z + t \frac{dz}{dt} = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{f(z) - z}{t}$. В результате получается уравнение с разделяющимися переменными, для которого справедлива теорема 1.5. Если $f(z) - z \neq 0$, то решения уравнения (1.20) будут описываться общим интегралом

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|t| + C.$$

Пусть теперь при некотором $z = z_0$, $f(z_0) = z_0$. Тогда функции $x = z_0 t$, $t < 0$ и $x = z_0 t$, $t > 0$ будут решениями уравнения (1.20) в областях Ω_1 и Ω_2 . При этом они могут быть как особыми, так и частными. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{\frac{x}{t}}, \quad t > 0,$$

решениями которого будут функции: $x_1(t) = 4(\sqrt{t} - C)^2$, $t \geq C^2$, $C > 0$; $x = 0$; $x = 4t$, $t > 0$. Решение $x = 0$, $t > 0$ является особым,

а решение $x = 4t$, $t > 0$ — частным. При этом $x_1(t) < 4t$, $t > 0$, если $C > 0$. Если же $C < 0$, то $x_1(t) > 4t$, $t > 0$. ■

Уравнение в дифференциалах $P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0$ будет однородным, если P и Q — однородные функции одного и того же порядка. Оно подстановкой $x = tz(t)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

К однородному уравнению приводится и уравнение более общего вида, а именно:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{\alpha t + \beta x + \gamma}{at + bx + c}\right). \quad (1.21)$$

Если $\alpha b - a\beta \neq 0$, то произведём замену переменных:

$$\begin{cases} t = \tau + t_0, \\ x = y + x_0. \end{cases}$$

Определим t_0 и x_0 , решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha t_0 + \beta x_0 + \gamma = 0, \\ at_0 + bx_0 + c = 0. \end{cases}$$

В результате получим однородное уравнение относительно переменных y и τ . Пусть теперь $\alpha b - a\beta = 0$, $\beta \neq 0$, тогда подстановка $y = \alpha t + \beta x$ приводит уравнение (1.21) к уравнению с разделяющимися переменными.

1.2.4. Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.2.3. Дифференциальное уравнение вида

$$x'(t) + p(t)x = q(t), \quad t \in J, \quad (1.22)$$

называется приведенным линейным уравнением первого порядка.

Будем предполагать, что $p(t), q(t) \in C(J)$, где J — некоторый промежуток. Если $q \equiv 0$, то уравнение называется однородным. В противном случае — неоднородным. Через Ω_Π обозначим множество точек: $\Omega_\Pi = \{(t, x) : t \in J, |x| < \infty\}$.

Теорема 1.7. Пусть $p(t), q(t) \in C(J)$. Тогда через любую точку $(t_0, x_0) \in \Omega_\Pi$ проходит единственная интегральная кривая, определённая на всем промежутке J .

Доказательство. ► Рассмотрим однородное уравнение

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0, t \in J.$$

Все его решения описываются функцией

$$x_{\text{од}}(t) = \tilde{C} e^{-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau}, \quad t_0, t \in J,$$

где $\tilde{C}$ — произвольная постоянная.

Задание: получить самостоятельно формулу общего решения однородного уравнения.

Найдем общее решение уравнения (1.22) методом вариации постоянной Лагранжа. Будем искать его в виде

$$x(t) = C(t) e^{-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau}, \quad (1.23)$$

где неизвестная функция $C(t) \in \mathbf{C}^1(J)$. Подставляя функцию $x(t)$, $t \in J$ (1.23) в уравнение (1.22), для определения $C(t)$ получим уравнение: $\frac{dC}{dt} = q(t) e^{\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau}$. Интегрирование последнего даёт

$$C(t) = \int_{t_0}^t q(\omega) e^{\int_{t_0}^{\omega} p(\tau) d\tau} d\omega + D, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Подставляя найденное значение $C(t)$ в (1.23), получим общее решение неоднородного уравнения (1.22):

$$x(t) = D \exp\left(-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau\right) + \exp\left(-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau\right) \int_{t_0}^t q(\omega) e^{\int_{t_0}^{\omega} p(\tau) d\tau} d\omega. \quad (1.24)$$

Общее решение (1.24) состоит из двух слагаемых, первое из которых является общим решением линейного однородного уравнения, а второе — частным решением линейного неоднородного уравнения. Из этой формулы легко получить решение задачи Коши (1.5). Из начального условия (1.5) находим $D = x_0$. В результате имеем

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^t q(\omega) e^{\int_{t_0}^{\omega} p(\tau) d\tau} d\omega\right) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau\right). \quad (1.25)$$

Докажем единственность решения задачи Коши (1.5). Предположим, что существуют два её решения: $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Составим разность

$X = x_1 - x_2$. Функция $X(t)$ удовлетворяет уже однородному уравнению с однородным начальным условием:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} + px_1 = q, \\ \frac{dx_2}{dt} + px_2 = q \end{cases} \Rightarrow \frac{dX}{dt} = -pX \Rightarrow X = C \exp\left(-\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau\right),$$

$$X(t_0) = x_1(t_0) - x_2(t_0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow X(t) \equiv 0, t \in J \Rightarrow x_1 \equiv x_2, t \in J.$$

■

Замечание 1.2.2. Предполагалось, что (t_0, x_0) – фиксированная точка. Формула (1.25) показывает зависимость решения задачи Коши (1.5) от начальных данных. Её можно записать в виде: $x = \phi(t; t_0, x_0)$. Функция $x = \phi(t; t_0, x_0)$ называется общим решением в форме Коши. ◇

Предположим, что можно установить такую зависимость между t_0, x_0 и некоторым параметром τ :

$$t_0 = t_0(\tau), x_0 = x_0(\tau),$$

что при изменении τ точка (t_0, x_0) пробегает все интегральные кривые и при этом разным значениям τ соответствуют разные кривые. Тогда общее решение в форме Коши $x = \phi(t; t_0, x_0)$ превращается в общее решение $x = \phi(t; t_0(\tau), x_0(\tau)) = \varphi(t; \tau)$. Воспользуемся этим замечанием и построим функцию, которая будет описывать все решения уравнения (1.19) во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Для этого положим $x_0 = \tau$ и $t_0 = -\tau$. Тогда общее решение будет описываться функцией, зависящей от одного параметра τ :

$$x = -\frac{\tau}{\tau(t + \tau) - 1}, \tau \in (-\infty, +\infty).$$

Например, если зафиксировать значение x_0 и положить $t_0 = \tau$, то величина t_0 играет роль параметра или произвольной постоянной. Ниже это замечание будет использовано при исследовании решений уравнения Риккати.

Вопрос: может ли решение линейного однородного уравнения (1.22) касаться или пересекать ось $x = 0$?

1.2.5. Уравнение Бернулли

Определение 1.2.4. Уравнение вида

$$x' + p(t)x = q(t)x^n, n \neq 0, 1; t \in J, \quad (1.26)$$

называется уравнением Бернулли. Предполагается, что $q(t), p(t) \in \mathbf{C}(J)$.

Уравнение Бернулли всегда интегрируется в конечном виде. Действительно, разделим обе части уравнения на x^n , считая $x \neq 0$. Тогда

$$\frac{x'}{x^n} + \frac{p(t)}{x^{n-1}} = q(t).$$

Если произвести подстановку $z = x^{1-n}$, то в результате для определения $z(t)$ получим линейное уравнение

$$z'(t) + (1 - n)p(t)z = (1 - n)q(t).$$

Согласно формуле (1.24) общее решение линейного уравнения имеет вид

$$x^{1-n} = CA(t) + B(t),$$

где C — произвольная постоянная. Если $n > 0$, то при делении на x^n мы могли потерять нулевое решение. Проверка показывает, что $x(t) = 0, t \in J$, — решение уравнения Бернулли.

Решим теперь уравнение Бернулли одноимённым методом. Произведём подстановку $x(t) = u(t)v(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ — неизвестные непрерывно дифференцируемые функции. В результате получим уравнение

$$vu' + u(v' + p(t)v) = q(t)v^n u^n. \quad (1.27)$$

Для определения функции $v(t)$ положим

$$v'(t) + p(t)v(t) = 0.$$

Нетривиальные решения этого уравнения описываются формулой (1.23) с постоянной $C \neq 0$. Среди них выбирается самое простое (например, постоянная C полагается равной единице). Уравнение (1.27) становится уравнением с разделяющимися переменными относительно функции $u(t)$.

1.2.6. Уравнение Риккати

Определение 1.2.5. Уравнение вида

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)x^2 + f(t), \quad t \in J,$$

называется уравнением Риккати. Предполагается, что $p(t), q(t), f(t) \in \mathbf{C}(J)$.

Уравнение Риккати в общем случае не интегрируется. Если известно какое-либо его решение $x_1(t)$, то произведя подстановку

$$y(t) = x(t) - x_1(t),$$

мы получим уравнение Бернулли.

Пример 1.2.3. Решить уравнение Риккати ([8], §3, 94)

$$t^2 x' - 5tx + t^2 x^2 + 8 = 0, \quad t > 0. \quad (\text{P})$$

Решение. Из **основной теоремы** (теоремы существования и единственности решения задачи Коши) следует, что при $t > 0$ через каждую точку полуплоскости $t > 0$ проходит единственная интегральная кривая. Найдём частные решения уравнения Риккати. Будем искать их в виде $\phi(t) = \frac{A}{t}$. Чтобы найти значения A , подставим функцию $\phi(t) = \frac{A}{t}$ в уравнение (P):

$$-A - 5A + A^2 + 8 = 0 \Rightarrow A^2 - 6A + 8 = 0 \Rightarrow A_1 = 2, A_2 = 4.$$

В результате мы получили два частных решения, а именно $\phi_1 = \frac{4}{t}$ и $\phi_2 = \frac{2}{t}$. Будем искать решения уравнения Риккати в виде

$$x(t) = \frac{4}{t} + u(t).$$

Подставив его в уравнение (P), для определения функции $u(t)$ получим уравнение Бернулли:

$$u' + \frac{3}{t}u + u^2 = 0.$$

Произведём подстановку $\omega = \frac{1}{u}$. Функция $\omega(t)$ удовлетворяет линейному уравнению, интегрируя которое найдём решения уравнения (P):

$$\begin{aligned} \omega' - \frac{3}{t}\omega = 1 &\Rightarrow \omega = D_1 t^3 - \frac{t}{2} \Rightarrow u = \frac{2}{t(2D_1 t^2 - 1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) = \frac{4}{t} + \frac{2}{t(2D_1 t^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Все решения уравнения (Р) при $t > 0$ описываются функциями

$$\left[\begin{array}{l} \phi_1 = \frac{4}{t}, \\ x(t) = \frac{4}{t} + \frac{2}{t(2D_1t^2-1)}. \end{array} \right.$$

Картина поведения решений уравнения Риккати (Р) при $t > 0$ представлена на рис. 1.4.

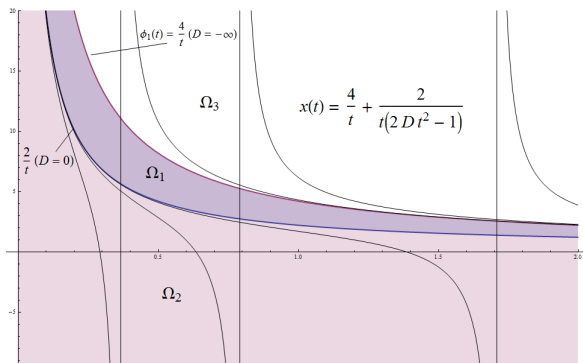


Рис. 1.4. $x(t) = \frac{4}{t} + \frac{2}{t(2D_1t^2-1)}$

Функция $x(t) = \frac{4}{t} + \frac{2}{t(2D_1t^2-1)}$, $D_1 \in (-\infty, 0]$, является общим решением в области $\Omega_1 = \{(t, x) : 2 < xt < 4, t > 0\}$. По заданной точке (t_0, x_0) в полуплоскости $t > 0$ постоянная D_1 определяется по формуле

$$D_1 = \frac{x_0t_0 - 2}{2t_0^2(x_0t_0 - 4)}.$$

Если искать решения уравнения Риккати в виде

$$x(t) = \frac{2}{t} + v(t),$$

то все решения уравнения (Р) при $t > 0$ будут описываться функциями

$$\left[\begin{array}{l} \phi_2 = \frac{2}{t}, t > 0, \\ x(t) = \frac{2}{t} + \frac{2t}{t^2 + D_2}. \end{array} \right.$$

При $D_2 = 0$ мы получим решение $\phi_1 = \frac{4}{t}$, а при $D_2 = \infty - \phi_2$. Если произвести замену $D_1 = \frac{-1}{2D_2}$, то множество решений $x_1(t) \cup \phi_1(t)$ перейдет

во множество решений $x_2(t) \cup \phi_2(t)$. Рассмотрим решение уравнения Риккати в форме Коши, положив $x_0 = 1, t_0 = \tau > 0$. В результате при $\tau \in (2, 4)$ мы получим функцию, описывающую все решения уравнения Риккати в области Ω_1 в зависимости от параметра τ :

$$x = \frac{2}{t} + \frac{2(\tau - 2)t}{(\tau - 2)t^2 + \tau^2(4 - \tau)}.$$

Построенная функция удовлетворяет всем условиям определения 1.1.5 общего решения уравнения первого порядка в области Ω_1 .

Вопрос: *можно ли построить функции, описывающие все решения уравнения Риккати в областях Ω_2 и Ω_3 ?* $\diamond$

1.2.7. Интегрирующий множитель

Если левая часть уравнения (1.9) не является полным дифференциалом, то возникает вопрос: нельзя ли найти такую функцию, при умножении на которую уравнение (1.9) станет уравнением в полных дифференциалах?

Определение 1.2.6. Функция $\mu(t, x) \in C(\Omega)$, $\mu(t, x) \neq 0$, называется интегрирующим множителем уравнения (1.9), если при умножении на нее последнее становится уравнением в полных дифференциалах.

Это означает, что существует функция $U \in C^1(\Omega)$, $(t, x) \in \Omega$ такая, что $\mu(Pdt + Qdx) = dU$:

$$\mu(Pdt + Qdx) = dU, \quad U \in C^1(\Omega), (t, x) \in \Omega.$$

Если $\mu(t, x) \in C^1(\Omega)$, а функции μP , μQ и область Ω удовлетворяют условиям теоремы 1.4, то

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}, \quad (t, x) \in \Omega.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$Q \frac{\partial \mu}{\partial t} - P \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} \right), \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.28)$$

Для определения интегрирующего множителя $\mu(t, x)$ мы получили уравнение в частных производных первого порядка. Его решение

является более сложной задачей, чем задача решения уравнения (1.9). Однако нам требуются не все решения уравнения (1.28), а только одно. На практике интегрирующий множитель часто ищут либо как функцию только от t , либо от x . Остановимся на первом случае. Пусть $\mu = \mu(t) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$. Из уравнения (1.28) получаем

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q}, \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q} dt, (t, x) \in \Omega.$$

Если правая часть последнего уравнения является только функцией от t , т.е. $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = \omega(t)$, то мы получим $\mu = Ce^{\int \omega(t) dt}$.

Как показывает теорема, доказанная ниже, число интегрирующих множителей для данного уравнения бесконечно.

Теорема 1.8. Если $\mu(t, x)$ — интегрирующий множитель уравнения (1.9), т.е. $\mu(Pdt + Qdx) = dU$, то интегрирующим множителем будет функция $\mu\phi(U)$, где ϕ — некоторая непрерывная функция, отличная от нуля.

▷ Имеем $\phi(U)\mu(Pdt + Qdx) = \phi(U)dU = F'(U)dU = dF(U)$. В качестве функции $F(U)$ можно взять $F(U) = \int \phi(U)dU$. Следовательно, $\mu_1 = \phi(U)\mu$ также является интегрирующим множителем уравнения (1.9). Можно показать, что полученная формула описывает всё множество интегрирующих множителей уравнения (1.9) [9].

Теорема 1.8 на практике оказывается очень полезной. Покажем это на примере.

Пример 1.2.4. Решить уравнение

$$x^3 dt + (e^{-2t} - x^2) dx = 0, x > 0.$$

В силу теоремы 1.8 функция $\frac{\phi(t-\ln x)}{x^3}$ будет интегрирующим множителем уравнения $x^3 dt - x^2 dx = 0$. Действительно, умножая уравнение на интегрирующий множитель, получим $\frac{\phi(t-\ln x)}{x^3}(x^3 dt - x^2 dx) = \phi(t - \ln x)(dt - \frac{dx}{x}) = \phi(t - \ln x)d(t - \ln x)$. Функция $\psi(x)e^{2t}$ будет интегрирующим множителем уравнения $e^{-2t} dx = 0$. Подберем функции ϕ и ψ таким образом, чтобы $\frac{\phi(t-\ln x)}{x^2} \equiv e^{2t}\psi(x) = \mu(t, x)$. Положим $x = 1$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \phi(t) = Ce^{2t}, C = \psi(1) \neq 0 &\Rightarrow \phi(t - \ln x) = Ce^{2(t - \ln x)} = Cx^{-2}e^{2t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(t, x) = C \frac{e^{2t}}{x^{-5}} \Rightarrow \frac{2e^{2t}}{x^2} - \frac{1}{x^4} = C. \diamond \end{aligned}$$

Линейное уравнение (1.22), как нетрудно видеть из пункта 1.2.4 (Линейные уравнения), имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \exp \left(- \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \right).$$

Уравнение с разделяющимися переменными (1.14), как следует из пункта 1.2.2 (Уравнения с разделяющимися переменными), имеет интегрирующий множитель $\frac{1}{T_2(t)X_1(x)}$.

Из этого результата вытекает следующий: если уравнение в дифференциалах (1.9) является однородным с показателем однородности m , то оно имеет интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{t^{m+1}Q}$. Действительно, произведя подстановку $x = tu(t)$, находим

$$\begin{aligned} P(t, tu)dt + Q(t, tu)(udt + tdu) &= 0 \Rightarrow \\ t^m[P(1, u)dt + Q(1, u)(udt + tdu)] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t^m[P(1, u) + Q(1, u)u]dt + t^{m+1}Q(1, u)du &= 0. \end{aligned}$$

После умножения уравнения на

$$\mu = \frac{1}{t^{m+1}[P(1, u) + Q(1, u)u]},$$

мы получим уравнение с разделяющимися переменными. Отсюда следует справедливость нашего утверждения.

1.3. Методы решения уравнений 1-го порядка, неразрешенных относительно производной

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной:

$$F(t, x, x') = 0, \tag{1.29}$$

в котором t — независимая переменная, а $x(t)$ — искомая функция. Положим $x' = p$. Будем предполагать, что функция $F(t, x, p)$ определена в области $G \subseteq \mathbb{R}_{t,x,p}^3$, $F \in \mathbf{C}^1(G)$, $|\nabla(F)| \neq 0$.

Пусть уравнение (1.29) разрешимо относительно $x'(t)$. В результате его решения мы получаем одно или несколько уравнений, разрешенных относительно производной:

$$\frac{dx}{dt} = f_k(t, x), \quad k \geq 1. \tag{1.30}$$

Если вещественные функции $f_k(t, x)$ определены в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}_{t,x}^2$ и удовлетворяют условиям теоремы 1.1, то через любую точку $(t_0, x_0) \in D$ проходит одна и только одна интегральная кривая $x = x_k(t)$ каждого из уравнений (1.30). Эти интегральные кривые также являются интегральными кривыми уравнения (1.29).

Наклон касательной к интегральной кривой $x = x_k(t)$ в точке (t_0, x_0) определяется значением $p_{0k} = f_k(t_0, x_0)$. Отметим, что числа (t_0, x_0, p_{0k}) удовлетворяют уравнению (1.29), т.е. $F(t_0, x_0, p_{0k}) = 0$. Пусть значения p_{0k} различны, и их число равно n . Тогда через точку (t_0, x_0) проходит n различных интегральных кривых уравнения (1.29). Поэтому если требуется выделить одну из них, то необходимо задать не только начальные данные (t_0, x_0) , но и значение $p_{0k} = x'_k(t_0)$.

Пример 1.3.1. Рассмотрим уравнение $t^2 x'^2 + t x x' - 2x^2 = 0$, $t > 0$. Разрешая его относительно x' , получим $x' = \frac{x}{t}$, $x' = -\frac{2x}{t}$. Решениями этих уравнений являются функции $x = C_1 t$, $x = \frac{C_2}{t^2}$. Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные. Отсюда видно, что через каждую точку (t_0, x_0) , $t_0 > 0$ плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$ проходят две интегральные кривые. Чтобы выделить одну из них (например, первую), нужно потребовать $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = \frac{x_0}{t_0}$. $\diamond$

Если уравнение (1.29) не удастся разрешить относительно производной $x'(t)$, то его решения часто находятся в параметрической форме.

Определение 1.3.1. Пара функций $\langle \phi(\tau), \psi(\tau), \tau \in T \rangle$, называется решением уравнения (1.29) в параметрической форме, если

- 1) функции $\phi(\tau), \psi(\tau) \in \mathbf{C}^1(T)$; $\phi'(\tau) \neq 0$, $\tau \in T$;
- 2) $\left(\phi(\tau), \psi(\tau), \frac{\psi'(\tau)}{\phi'(\tau)} \right) \in G$ для любого $\tau \in T$;
- 3) $F\left(\phi(\tau), \psi(\tau), \frac{\psi'(\tau)}{\phi'(\tau)} \right) = 0$ для любого $\tau \in T$.

Здесь предполагается, что T является интервалом. Интегральной кривой уравнения (1.29) будет кривая $t = \phi(\tau)$, $x = \psi(\tau)$, $\tau \in T$, на плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$. В силу определения она является гладкой.

Положим $x' = p$ и запишем уравнение (1.29) в виде $F(t, x, p) = 0$. Будем рассматривать t, x, p как декартовы координаты. Уравнение $F(t, x, p) = 0$ задает в области $G \subseteq \mathbb{R}_{t,x,p}^3$ некоторое множество S . Если оно не пусто, то S — гладкая поверхность, заданная неявно. Каждому решению $\varphi(t)$, $t \in J$, в пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$ отвечает кривая

$\Gamma = \{(t, x, p) : x = \varphi(t), p = \varphi'(t), t \in J\}$. Назовём её интегральной кривой уравнения в $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$. Так как $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$, то она лежит на поверхности S : $\Gamma \subset S$. Но не всякая гладкая кривая, лежащая на поверхности S , является интегральной кривой уравнения $F(t, x, p) = 0$, т.к. в каждой её точке должно выполняться соотношение $dx - p dt = 0$. Пусть некоторая кривая Γ на поверхности S удовлетворяет данному соотношению и описывается функциями $t = \phi(\tau), x = \psi(\tau), p = \chi(\tau)$. Первые две функции определяют кривую γ в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$. Будем предполагать, что $\phi'(\tau) \neq 0$, и, следовательно, функция $\phi(\tau)$ обратима и τ можно выразить через t . В результате кривая γ будет описываться некоторой функцией $x = \varphi(t)$. Вдоль кривой Γ мы, по предположению, имеем $dx - p dt = 0 \Rightarrow p = \varphi'(t)$. Так как кривая Γ лежит на поверхности S , то $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$. Следовательно, она – интегральная кривая. Кривая γ является проекцией Γ на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$ и является интегральной кривой уравнения (1.29) в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$.

Гладкая поверхность, заданная неявно, описывается локально с помощью двух параметров. Обозначим их u, v . Пусть уравнение $F(t, x, p) = 0$ допускает в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}_{u,v}^2$ параметрическое представление: $t = \phi(u, v), x = \psi(u, v), p = \chi(u, v), (u, v) \in D$, где $\chi(u, v) \in \mathbf{C}(D)$, а $\phi(u, v), \psi(u, v) \in \mathbf{C}^1(D)$. Под этим следует понимать:

1) отображение $(u, v) \longrightarrow (\phi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$ является взаимно однозначным отображением D на S ;

2) $F(\phi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) = 0$ для любых $(u, v) \in D$.

Покажем, что в этом случае интегрирование уравнения (1.29) сводится к интегрированию уравнения, разрешенного относительно производной. Считая параметры u и v независимыми переменными, вычислим дифференциалы функций $t = \phi(u, v)$ и $x = \psi(u, v)$. Имеем $dt = \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv, dx = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$. Мы получим некоторую кривую на поверхности S , если установим соответствующим образом связь между u и v . Однако она будет интегральной кривой тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $dx - p dt = 0$. Из него мы получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv - \chi(u, v) \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} - \chi \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) dv &= \left(\chi \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) du, \end{aligned} \quad (1.31)$$

которое свяжет между собой u и v нужным образом. Уравнение (1.31) является уравнением в дифференциалах. Предположим, что оно в некоторой области имеет общее решение $v = w(u, C)$, $C = \text{const}$. Тогда при подстановке функций $t = \phi(u, w(u, C))$, $x = \psi(u, w(u, C))$, $x' = p = \chi(u, w(u, C))$ в уравнение (1.29) оно обратится в тождество. Следовательно, мы получили общее решение уравнения (1.29) в параметрической форме.

Частные случаи уравнения (1.29)

Если уравнение (1.29) можно разрешить относительно x или t , то его интегрирование не представляет сложности.

1. Пусть уравнение (1.29) разрешено относительно x : $x = f(t, x')$. Положив $x' = p$, получим $x = f(t, p)$. В качестве параметров (u, v) возьмём t и p . Будем считать, что функция f непрерывно дифференцируемая. Из соотношения $dx = p dt$ получим уравнение

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} - p \right) dt + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0, \quad (1.32)$$

которое служит для определения связи между p и t . Уравнение (1.32) также можно получить из уравнения (1.31). Предположим, что уравнение (1.32) в некоторой области имеет общее решение либо в виде $p = p(t, C)$, либо в виде $t = t(p, C)$. Тогда мы получим общее решение уравнения (1.32) либо в виде $x = x(t, p(t, C))$, либо в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t(p, C), p), \\ t = t(p, C). \end{cases}$$

2. Пусть теперь уравнение (1.1) можно представить в виде

$$t = f(x, x'). \quad (1.33)$$

Положив $x' = p$, будем иметь $t = f(x, p)$. В качестве параметров возьмём x и p . Функцию $f(x, p)$ будем считать непрерывно дифференцируемой. Тогда из уравнений (1.33) и $dx = p dt$ следует уравнение

$$\left(p \frac{\partial f}{\partial x} - 1 \right) dx + p \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0.$$

Предположим, что оно в некоторой области имеет общее решение либо в виде $p = p(x, C)$, либо в виде $x = x(p, C)$. Тогда уравнение (1.33)

(а значит, и уравнение (1.29)) будет иметь соответственно общее решение либо в виде $t = f(x, p(x, C))$, либо в параметрической форме:

$$\begin{cases} t = f(x(p, C), p), \\ x = x(p, C). \end{cases}$$

3. Рассмотрим линейное относительно x и t уравнение: $x = \phi(p)t + \psi(p)$, в котором $\phi(p)$ и $\psi(p)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Если $\phi(p) \neq p$, то это уравнение называется уравнением Лагранжа. Из соотношения $dx = p dt$ получаем дифференциальное уравнение

$$\phi(p)dt + \phi'(p)tdp + \psi'(p)dp = p dt \Rightarrow (p - \phi(p))dt = (t\phi'(p) + \psi'(p))dp,$$

которое служит для определения связи между t и p . Это уравнение относительно переменной t является линейным:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{t\phi'(p)}{p - \phi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p - \phi(p)}.$$

Интегрируя его, получаем решения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} t = B(p) \cdot C + A(p), \\ x = \phi(p)t + \psi(p), \quad C = \text{const.} \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.24) для общего решения линейного уравнения. Пусть уравнение $\phi(p) - p = 0$ имеет решения $p = p_i$. Тогда функции $x = p_i t + \psi(p_i)$, графики которых являются прямыми линиями, могут быть как частными решениями уравнения Лагранжа, так и особыми.

4. Если $\phi(p) \equiv p$, то мы будем иметь уравнение Клеро:

$$x = pt + \psi(p), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Для его решения используем схему решения уравнения Лагранжа. Из соотношения $dx = p dt$ находим $p dt = t dp + p dt + \psi'(p)dp$, что даёт нам $(t + \psi'(p))dp = 0$. Отсюда следует:

а) $dp = 0 \Rightarrow p = C$. Значит, найденное однопараметрическое семейство решений имеет вид

$$x = Ct + \psi(C),$$

а соответствующие им интегральные кривые являются прямыми линиями;

$$\text{б) } t = -\psi'(p).$$

В этом случае уравнение Клеро имеет решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} t = -\psi'(p), \\ x = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Если $\psi(p)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция и выполняется неравенство $\psi''(p) \neq 0$, то решение $t = -\psi'(p)$, $x = pt + \psi(p)$ является особым. Ниже в разделе 2.4 главы 2 это утверждение будет доказано.

1.4. Об одном методе понижения порядка дифференциальных уравнений

1.4.1. Дифференциальные уравнения высших порядков

Пусть функция $F(t, x, x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ ($n \geq 1$).

Определение 1.4.1. Уравнение вида

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1.34)$$

в котором t – независимая переменная, $x(t)$ – неизвестная функция, а $x', \dots, x^{(n)}$ – её производные, называется дифференциальным уравнением n -го порядка. (Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения.)

Определение 1.4.2. Функция $x = \phi(t)$, определенная на интервале $J_t \subseteq \mathbb{R}^1$, называется решением уравнения (1.34), если

- 1) $\phi(t) \in C^{(n)}(J_t)$;
- 2) $(t, \phi(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) \in G$ для любого $t \in J_t$;
- 3) $F(t, \phi(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) = 0$ для любого $t \in J_t$.

Ниже будут рассмотрены некоторые частные случаи уравнения (1.34), когда его интегрирование или понижение порядка возможно осуществить на основании теории однопараметрических групп преобразований.

1.4.2. Однопараметрические группы преобразований на плоскости

В плоскости $\mathbb{R}^2$ точек (t, x) рассмотрим семейство $\{T_\alpha, \alpha \in J\}$ обратимых преобразований

$$T_\alpha : \quad \tau = \phi(t, x; \alpha), \quad \eta = \psi(t, x; \alpha), \quad (1.35)$$

зависящих от одного параметра $\alpha \in J$, где J – интервал из $\mathbb{R}^1$. Функции ϕ и ψ , так же как и все встречающиеся ниже функции, предполагаются достаточно гладкими по совокупности аргументов. Каждому фиксированному значению параметра $\alpha \in J$ соответствует конкретное преобразование T_α , которое переводит точки (t, x) в новые точки (τ, η) плоскости $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $T_\beta T_\alpha$ произведение двух преобразований T_α и T_β , через I – тождественное преобразование, а через T_α^{-1} – обратное к T_α преобразование. По определению имеем $T_\alpha T_\alpha^{-1} = T_\alpha^{-1} T_\alpha = I$. Прежде чем продолжить изложение, напомним определение группы.

Определение 1.4.3. Операцией умножения на множестве $\mathcal{G}$ называется правило, по которому любым двум элементам $x, y \in \mathcal{G}$ ставится в соответствие некоторый элемент $\gamma(x, y) \in \mathcal{G}$.

Определение 1.4.4. Семейство $\mathcal{G} = \{T_\alpha, \alpha \in J\}$ преобразований (1.35) образует однопараметрическую группу преобразований, если

- 1) для любых $\alpha, \beta \in J$ существует единственный параметр $\gamma(\alpha, \beta) \in J$ такой, что $T_\beta T_\alpha = T_{\gamma(\alpha, \beta)} \in \mathcal{G}$;
- 2) существует $\alpha_0 \in J$ такой, что

$$T_{\alpha_0} = I \in \mathcal{G};$$

- 3) для любого $\alpha \in J$ существует $\alpha_{-1} \in J$ такой, что $T_\alpha^{-1} = T_{\alpha_{-1}} \in \mathcal{G}$.

Первое условие означает, что последовательное применение двух преобразований сначала $T_\alpha \in \mathcal{G}$, а затем $T_\beta \in \mathcal{G}$ равносильно применению преобразования $T_\gamma \in \mathcal{G}$ с параметром $\gamma(\alpha, \beta) \in J$, который однозначно определяется значениями α и β . Функция $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ задает закон умножения преобразований на множестве $\mathcal{G} = \{T_\alpha, \alpha \in J\}$ и ниже предполагается достаточное число раз дифференцируемой. Заметим, что в случае группы преобразований свойство ассоциативности

всегда имеет место (доказать самим). Так как преобразование $T_{\alpha_0} = I$, то $T_{\alpha_0}T_\alpha = T_\alpha$, а значит, $\gamma(\alpha, \alpha_0) = \alpha$. С другой стороны, $T_\beta T_{\alpha_0} = T_\beta$ и $\gamma(\alpha_0, \beta) = \beta$. В результате для любых $\alpha, \beta \in J$ имеем

$$\gamma(\alpha, \alpha_0) = \alpha, \quad \gamma(\alpha_0, \beta) = \beta. \quad (1.36)$$

Замечание 1.4.1. Преобразования, образующие однопараметрическую группу, могут быть заданы как на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, так и в некоторой области $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Во втором случае преобразование (1.35) при любом $\alpha \in J$ переводит точку (t, x) , принадлежащую X , в точку (τ, η) , также принадлежащую X . $\diamond$

Определение 1.4.5. Параметр α называется каноническим, если функция $\gamma(\alpha, \beta)$ имеет вид: $\gamma(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$. Тогда в терминах функций (1.35) формула умножения преобразований $T_\beta T_\alpha = T_{\alpha+\beta}$ запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi(\phi(t, x; \alpha), \psi(t, x; \alpha); \beta) &= \phi(t, x; \alpha + \beta), \\ \psi(\phi(t, x; \alpha), \psi(t, x; \alpha); \beta) &= \psi(t, x; \alpha + \beta). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Замечание 1.4.2. Если ввести новый параметр $\theta = \theta(\alpha)$, где $\theta(\alpha)$ — строго монотонная функция, то, вообще говоря, функция γ и интервал J изменятся. При этом θ станет новым параметром группы. Ниже будет показано, что всегда существует замена, приводящая к каноническому параметру. $\diamond$

Для пояснения вышеприведенных определений проиведём несколько примеров преобразований (1.35).

1. Группа переносов $\mathcal{G}$ вдоль оси x состоит из преобразований

$$T_\alpha : \quad \tau = t, \quad \eta = x + \alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R}^1),$$

определенных на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. В результате двух последовательных переносов получим

$$\tau_1 = t, \quad \eta_1 = x + (\alpha + \beta).$$

Значит, $\gamma(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ и параметр α является каноническим. Далее $\alpha_{-1} = -\alpha$ и $\alpha_0 = 0$. Нетрудно видеть, что преобразования, образующие группу переносов вдоль оси x , могут быть также заданы на любой

полосе $X = \{a \leq t \leq b, |x| < \infty\}$. Аналогично определяется группа переносов вдоль оси t .

2. Семейство преобразований

$$T_\alpha: \quad \tau = \alpha t, \quad \eta = \alpha^2 x, \quad (\alpha \in (0, +\infty)),$$

действующих на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, образуют однопараметрическую группу растяжений. Здесь мы имеем $\gamma(\alpha, \beta) = \alpha\beta$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{-1} = \frac{1}{\alpha}$. Это семейство будет также образовывать однопараметрическую группу преобразований, если их задать в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, t > 0\}$ или $\mathbb{R}_-^2 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, t < 0\}$, либо, например, в любом из четырех квадрантов. В этом примере параметр $\theta = \ln \alpha$ будет каноническим.

3) Следует отметить, что не всякая совокупность преобразований (1.35) образует однопараметрическую группу. Возьмем

$$\tau = t + \alpha, \quad \eta = x + \alpha^2, \quad \alpha \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда $\tau_1 = t + (\alpha + \beta)$, $\eta_1 = x + (\alpha^2 + \beta^2)$, $\beta \in (-\infty, +\infty)$. Однако здесь не выполняется условие 1 определения однопараметрической группы, т.к. $(\alpha + \beta)^2 \neq \alpha^2 + \beta^2$.

Определение 1.4.6. Функция $U(t, x)$ называется инвариантом однопараметрической группы преобразований (1.35), если для всех допустимых (t, x) и всех $\alpha \in J$ выполняется равенство

$$U(\tau, \eta) = U(t, x).$$

Выше в пункте 1 инвариантом группы переносов является функция $U(t, x) = t$. В пункте 2 – функция $U = xt^{-2}$ (при $t \neq 0$).

Теория однопараметрических групп широко применяется при решении многих нелинейных задач механики и физики. Используемые при их исследовании преобразования часто рассматриваются не на всём открытом множестве $X \times J$, на котором они определены, а на некотором его сужении $X_1 \times J_{\alpha_0}$ таком, что $X_1 \subset X$, $J_{\alpha_0} \subset J$, где J_{α_0} – некоторая окрестность точки α_0 . Однопараметрические группы могут также рассматриваться на множестве $X \times J_{\alpha_0}$.

Определение 1.4.7. Пусть условия 1–3 в определении однопараметрической группы преобразований $\mathcal{G}$ выполняются не для всех значений

$(t, x) \in X$ и всех значений параметра из некоторого фиксированного интервала J , а только для $(t, x) \in X_1$ и значений параметров α , β и $\gamma(\alpha, \beta)$ в некоторой достаточно малой окрестности значения α_0 . Тогда $\mathcal{G}$ называют **локальной** однопараметрической группой преобразований.

Если рассматривать эти преобразования сразу на множестве $X_1 \times J_{\alpha_0}$, то группу $\mathcal{G}$ можно называть просто однопараметрической группой. Это связано с тем, что её преобразования удовлетворяют требованиям 1–3 определения однопараметрической группы.

Более подробно с теорией однопараметрических групп можно ознакомиться в работе [3], в которой она довольно просто изложена. $\diamond$

Сформулируем и докажем лемму и теорему, что позволит лучше понимать излагаемый ниже материал.

Лемма 1.1. *Во всякой локальной однопараметрической группе можно ввести канонический параметр.*

Теорема 1.9. *Всякая локальная однопараметрическая группа преобразований при помощи подходящей замены переменных*

$$(t, x) \rightarrow (u(t, x), v(t, x))$$

и замены параметра $\alpha \rightarrow \theta(\alpha)$ приводится к локальной группе переносов

$$T_\theta : \tilde{u} = u, \quad \tilde{v} = v + \theta.$$

Переменные u и v , представленные в теореме 1.9 (так же как и параметр θ), называются **каноническими**.

Для доказательства высказанных утверждений запишем групповое свойство 1) определения 1.18 в виде

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \phi(\tau, \eta; \beta) = \phi(t, x; \gamma(\alpha, \beta)), \\ \eta_1 &= \psi(\tau, \eta; \beta) = \psi(t, x; \gamma(\alpha, \beta)). \end{aligned}$$

Функция $\gamma(\alpha, \beta)$ подчиняется условиям (1.36). Дифференцируя обе части этих равенств по β и полагая $\beta = \alpha_0$, получим согласно (1.36) уравнения

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \beta}(\tau, \eta; \beta) \right|_{\beta=\alpha_0} = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(x, t; \alpha) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \beta}(\alpha, \beta) \right) \Big|_{\beta=\alpha_0}, \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial \beta}(\tau, \eta; \beta) \right|_{\beta=\alpha_0} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(x, t; \alpha) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \beta}(\alpha, \beta) \right) \Big|_{\beta=\alpha_0}. \end{cases}$$

Если ввести обозначения

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\alpha_0}, \quad \xi(\tau, \eta) = \frac{\partial \phi}{\partial \beta}(\tau, \eta; \beta) \Big|_{\beta=\alpha_0}, \quad \zeta(\tau, \eta) = \frac{\partial \psi}{\partial \beta}(\tau, \eta; \beta) \Big|_{\beta=\alpha_0},$$

то полученная система вместе с начальными условиями принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} &= \lambda(\alpha) \xi(\tau, \eta), \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \lambda(\alpha) \zeta(\tau, \eta), \\ \tau &= t, \quad \eta = x \text{ при } \alpha = \alpha_0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Решением задачи Коши (1.38) при заданных ξ и ζ и фиксированных t и x являются функции (1.35), определяющие исходную однопараметрическую группу преобразований. Зафиксируем t и x и введем новый параметр $\theta = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \lambda(\sigma) d\sigma$. В результате задача Коши (1.38) преобразуется к каноническому виду:

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \xi(\tau, \eta), \quad \frac{d\eta}{d\theta} = \zeta(\tau, \eta), \quad (1.39)$$

$$\tau = t, \quad \eta = x \text{ при } \theta = 0, \quad (\alpha = \alpha_0). \quad (1.40)$$

Уравнения (1.39) называются уравнениями Ли. Они лежат в основе использования теории однопараметрических групп при решении дифференциальных уравнений [3]. Предполагается, что в области, в которой рассматриваются уравнения (1.39), функции $\xi(\tau, \eta)$, $\zeta(\tau, \eta)$ непрерывно дифференцируемые, а величина $\xi^2 + \zeta^2 \neq 0$. Точки, в которых $\xi^2 + \zeta^2 = 0$, называются **стационарными** точками однопараметрической группы.

Предположим, что в окрестности точки (t, x) , в которой система уравнений Ли (1.39) определена, величина $\xi > 0$. Поэтому её можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\zeta(\tau, \eta)}{\xi(\tau, \eta)}, \quad \frac{d\tau}{\xi(\tau, \eta)} = d\theta.$$

Из теоремы 1.2 [5, 10] следует, что все решения первого уравнения системы в некоторой окрестности точки (t, x) могут быть описаны

общим интегралом $\Delta_1(\tau, \eta) = C_1$. Используя его при интегрировании второго уравнения системы, получим

$$\Delta_2(\tau, \eta) = C_2 + \theta.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий (1.40). В результате имеем

$$\Delta_1(\tau, \eta) = \Delta_1(t, x), \quad \Delta_2(\tau, \eta) = \Delta_2(t, x) + \theta. \quad (1.41)$$

Эти соотношения дают решение задачи Коши (1.39) $\wedge$ (1.40). Если произвести невырожденную замену переменных (это следует из теорем 10.2 и 10.3 в главе 10):

$$u = \Delta_1(t, x), \quad v = \Delta_2(t, x),$$

то согласно формулам (1.41) локальная однопараметрическая группа преобразований, порождённая решением задачи Коши (1.39), (1.40), при достаточно малых θ приводится к группе переносов:

$$u_1 = u, \quad v_1 = v + \theta.$$

Подчеркнём, что одна из переменных, а именно u , является инвариантом группы. Обратим также внимание, что теорема носит, вообще говоря, локальный характер (замечание 1.4.1). В ней показано, что в окрестности любой точки, не являющейся стационарной, локальная однопараметрическая группа приводится к локальной группе переносов.

Замечание 1.4.3. Правые части системы уравнений (1.39) не зависят от переменной θ . Такие системы называются *автономными*. Элементы теории автономных систем изложены в главе 8. Задача Коши для всякой автономной системы порождает локальную однопараметрическую группу преобразований, для которой независимая переменная системы (в нашем случае θ) является каноническим параметром. Это утверждение будет доказано в главе 8. Стационарные точки однопараметрических групп для автономных систем в этой главе носят название точек равновесия. Фазовые траектории автономной системы в некоторой окрестности точки, не являющейся стационарной, ведут себя как прямые линии. $\diamond$

Замечание 1.4.4. Будем считать здесь, что в (1.35) параметр α является каноническим. Возьмём $\alpha = \alpha_0$ и рассмотрим преобразование

$$\tau = \phi(t, x; \alpha_0 + \Delta\alpha), \quad \eta = \psi(t, x; \alpha_0 + \Delta\alpha), \quad \alpha_0 + \Delta\alpha \in J.$$

Если $\Delta\alpha \rightarrow 0$, то преобразование будет отличаться от тождественного на бесконечно малую величину и по этой причине называться инфинитезимальным (или бесконечно малым) преобразованием. Разложим функции $\phi(t, x; \alpha), \psi(t, x; \alpha)$ по формуле Тейлора по параметру α в окрестности точки α_0 и запишем инфинитезимальное преобразование в виде

$$\begin{aligned} \tau = \phi(t, x; \alpha_0 + \Delta\alpha) &= \phi(t, x; \alpha_0) + \frac{\partial\phi(t, x; \alpha_0)}{\partial\alpha} \Delta\alpha + o(\Delta\alpha) = \\ &= t + \xi(t, x) \Delta\alpha + o(\Delta\alpha), \\ \eta = \psi(t, x; \alpha_0 + \Delta\alpha) &= \psi(t, x; \alpha_0) + \frac{\partial\psi(t, x; \alpha_0)}{\partial\alpha} \Delta\alpha + o(\Delta\alpha) = \\ &= x + \zeta(t, x) \Delta\alpha + o(\Delta\alpha). \end{aligned} \tag{1.42}$$

При выводе этих формул использовались соотношения, определяющие функции ξ и ζ . Вектор (ξ, ζ) является касательным в точке (t, x) к кривой, которая описывается точками (τ, η) в $\mathbb{R}^2$ при изменении параметра α согласно формулам (1.35). Такие кривые называются **орбитами** точки (t, x) . Однопараметрическая группа преобразований однозначно определяется своим касательным векторным полем (ξ, ζ) , если $\xi^2 + \zeta^2 \neq 0$.

Сказанное выше резюмирует теорема Ли.

Теорема 1.10. Если функции $\phi(t, x; \alpha), \psi(t, x; \alpha)$ в формулах (1.35) удовлетворяют групповому свойству (1.37) и имеют разложения (1.42), то они являются решением задачи Коши (1.39), (1.40).

Если же задано гладкое векторное поле (ξ, ζ) ($\xi^2 + \zeta^2 \neq 0$), то решение задачи Коши (1.39), (1.40) однозначно определяет однопараметрическую группу преобразований (1.35) (свойство 6 автономных систем в главе 8), для которой это поле является касательным. $\diamond$

Определение 1.4.8. Две однопараметрические группы преобразований называются подобными, если одну можно привести к другой при помощи невырожденной замены переменных и невырожденной замены параметра.

Рассмотрим семейство преобразований из пункта 2, которые действуют на полуплоскости $\mathbb{R}^+$. Они образуют однопараметрическую группу преобразований. В этом случае уравнения (1.38) принимают вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = \frac{\tau}{\alpha}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 2 \frac{\eta}{\alpha}, \quad t > 0.$$

Уравнения Ли и начальные условия запишем следующим образом:

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\eta}{2\eta} = \frac{d\alpha}{\alpha} = d\theta,$$

$$\tau = t, \quad \eta = x \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad \left(\theta = \int_{\alpha_0=1}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} = \ln \alpha \right).$$

Решение этой задачи Коши при $t > 0$ нетрудно представить в виде

$$\frac{\eta}{\tau^2} = C_1, \quad \ln \tau - \theta = C_2.$$

Учитывая начальные условия, находим

$$\frac{\eta}{\tau^2} = \frac{x}{t^2}, \quad \ln \tau = \ln t + \theta.$$

Следовательно, мы можем перейти к каноническим переменным

$$u = \frac{x}{t^2}, \quad v = \ln t, \quad t > 0$$

сразу во всей полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$. Замена переменных является невырожденной, и в результате неё полуплоскость $\mathbb{R}_+^2$ взаимно однозначно отображается на всю плоскость (u, v) . Следовательно, однопараметрическая группа $\mathcal{G} = \{T_\alpha, \alpha \in (0, +\infty)\}$, действующая на полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$, подобна группе переносов с каноническим параметром $\theta = \ln \alpha$, действующей на всей плоскости (u, v) .

1.4.3. Инвариантность дифференциального уравнения относительно однопараметрической группы преобразований

Мы будем говорить, что два дифференциальных уравнения n -го порядка равносильны, если каждое решение одного уравнения является также решением другого, и наоборот.

Определение 1.4.9. Уравнение (1.34) называется инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований $\mathcal{G}$, если при замене переменных (t, x) в нём по формулам (1.35) мы получим в новых переменных (τ, η) для определения решения $\eta = \eta(\tau)$ уравнение, равносильное исходному при всех $\alpha \in J$.

В этом случае также говорят, что уравнение (1.34) допускает группу $\mathcal{G}$. Возьмём $n = 1$. Тогда новые переменные (τ, η) и производная $\frac{d\eta}{d\tau}$ выражаются через старые координаты (t, x) и производную $\frac{dx}{dt}$ следующим образом:

$$\tau = \phi(t, x; \alpha), \quad \eta = \psi(t, x; \alpha), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) x'}{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) x'}.$$

Аналогично находятся величины $(\tau, \eta, \frac{d\eta}{d\tau}, \frac{d^2\eta}{d\tau^2})$, если $n = 2$, и т.д.

Пример 1.4.1. Уравнение

$$txx'' + tx'^2 - 2x^2 = 0$$

инвариантно относительно группы растяжений

$$\mathcal{G}: \quad \tau = t, \quad \eta = \alpha x, \quad \alpha > 0.$$

Действительно,

$$\alpha^{-2}(\tau\eta\eta'' + \tau\eta'^2) - w\alpha^{-2}\eta^2 = 0.$$

Отсюда имеем

$$\alpha^{-2}(\tau\eta\eta'' + \tau\eta'^2 - 2\eta^2) = 0.$$

Для определения решения $\eta(\tau)$ получилось уравнение, равносильное исходному. $\diamond$

Порядок уравнения (1.34) заведомо можно понизить, если оно имеет вид

$$F(t, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.43}$$

так как функция x не входит явно в уравнение. Действительно, произведём замену

$$y = x'.$$

В результате уравнение (1.34) становится уравнением $(n-1)$ -го порядка относительно функции y .

Теорема 1.11. Пусть в переменных (u, v) уравнение (1.34) инвариантно относительно группы переносов. Тогда уравнение (1.34) в переменных (u, v) имеет вид

$$\Phi\left(u, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^n v}{du^n}\right) = 0. \quad (1.44)$$

Доказательство. ► При переходе к новым переменным (u, v) уравнение (1.34) преобразуется к виду

$$\Phi\left(u, v, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^n v}{du^n}\right) = 0. \quad (1.45)$$

По условию теоремы имеем, что уравнение

$$\Phi\left(u, v + \theta, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^n v}{du^n}\right) = 0$$

при любом θ эквивалентно уравнению (1.45). Следовательно, Φ не зависит явно от v , и мы приходим к уравнению (1.44). Приняв dv/du за новую неизвестную функцию, понизим порядок уравнения. ■

Резюме. Пусть уравнение (1.34) допускает однопараметрическую группу преобразований $\mathcal{G}$ и из уравнений Ли мы можем найти канонические переменные (u, v) (например, в виде элементарных функций) и канонический параметр θ . При переходе к ним однопараметрическая группа $\mathcal{G}$ приводится к группе переносов. Свойство инвариантности уравнения относительно какой-либо группы не зависит от выбора переменных, поэтому уравнение (1.34) после перехода к каноническим переменным (u, v) перейдёт в уравнение, в которое явно не входит одна из этих переменных. Следовательно, оно интегрируемо в квадратурах в случае уравнения первого порядка или допускает понижение в случае уравнения более высокого порядка.

1.4.4. Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка

В параграфе изучаются некоторые типы уравнений, которые допускают либо группу переносов, либо ту или иную группу растяжений. При рассмотрении уравнений относительно этих групп одна из канонических переменных, являющаяся инвариантом группы, может быть

найдена непосредственно, без использования уравнений Ли. В качестве другой канонической переменной в пунктах а), б), в) берётся логарифмическая функция либо от переменной t , либо x , в зависимости от вида группы. Несмотря на то, что определение канонических переменных в рассматриваемых задачах можно произвести без использования уравнений Ли, их применение является полезным с методической точки зрения. Задача Коши для уравнений Ли (1.39, (1.40) в этих случаях всегда разрешима в элементарных функциях. В результате мы можем перейти в рассматриваемых уравнениях к каноническим переменным и либо понизить их порядок, либо получить решение в квадратурах.

а) Рассмотрим случай, когда уравнение (1.34) имеет вид

$$F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0.$$

Так как в уравнение (1.34) не входит явно t , то оно инвариантно относительно группы переносов вдоль оси t :

$$\mathcal{G}: \quad \tau = t + \alpha, \quad \eta = x, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

Каноническими переменными здесь будут $u = x, v = t$. Мы перейдём к ним, если поменяем ролями t и x . Тогда уравнение (1.34) примет вид

$$\Phi\left(x, \frac{dt}{dx}, \dots, \frac{d^n t}{dx^n}\right) = 0.$$

Замена $z(x) = dt/dx$ понижает порядок уравнения (1.34) на единицу. При таком способе понижения порядка можно потерять решения $x = \text{const}$. Это устанавливается непосредственно проверкой. Отсюда, в частности, следует, что замена

$$p(x) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{z(x)}$$

также понижает порядок уравнения. Имеем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} p(x) = \frac{dp(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = p \frac{dp}{dx} \quad \text{и т.д.}$$

б) Пусть теперь для $\alpha > 0$

$$F(t, \alpha x, \alpha x', \dots, \alpha x^{(n)}) = \alpha^k F(t, x, x', \dots, x^{(n)}).$$

Это означает, что уравнение (1.34) инвариантно относительно группы растяжений

$$G : \quad \tau = t, \quad \eta = \alpha x, \quad \alpha \in (0, +\infty). \quad (1.46)$$

Здесь $\alpha_0 = 1$. Уравнения (1.38) для группы (1.46) принимают вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{\eta}{\alpha}.$$

Вводя параметр $\theta = \ln \alpha$, нетрудно получить решение задачи Коши (1.39), (1.40) для уравнений Ли. Возьмём $x > 0$, тогда

$$\tau = t, \quad \ln \eta = \ln x + \theta.$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1.11, введём новые переменные:

$$u = t, \quad v = \ln x, \quad x > 0.$$

В переменных (u, v) однопараметрическая группа (1.46) при $x > 0$ и уравнение (1.34) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : u_1 = u, \quad v_1 = v + \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}^1, \\ \Phi \left(u, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^n v}{du^n} \right) = 0. \end{aligned}$$

Уравнение в новых переменных инвариантно относительно группы переносов, так как свойство инвариантности уравнения относительно какой-либо группы не зависит от выбора переменных. Поэтому после замены, которая приводит рассматриваемую группу к группе переносов, мы придём к уравнению (1.44), не зависящему явно от переменной v . Возьмём

$$z(u) = \frac{dv}{du} = \frac{d \ln x}{dt} = \frac{dx/dt}{x}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} x' = xz, \quad x'' = x'z + xz' = x(z^2 + z'), \dots, \\ x^{(n)} = x\sigma_n(z, z', \dots, z^{(n-1)}). \end{aligned}$$

В результате

$$\begin{aligned} F\left(t, x, x', \dots, x^{(n)}\right) &= F\left(t, xz, x(z^2 + z'), \dots, x\sigma_n\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = \\ &= x^k F\left(t, z, z^2 + z', \dots, \sigma_n\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = x^k \Psi\left(t, z, \dots, z^{(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1.34) в канонических переменных относительно функции $z(t)$ будет $(n-1)$ -го порядка и примет вид

$$\Psi\left(t, z, z', \dots, z^{(n-1)}\right) = 0.$$

в) Рассмотрим теперь случай, когда при $\alpha > 0$:

$$F\left(\alpha t, \alpha x, \frac{dx}{dt}, \frac{1}{\alpha} \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{1}{\alpha^{n-1}} \frac{d^n x}{dt^n}\right) = \alpha^k F(t, x, x', \dots, x^{(n)}).$$

Это означает, что уравнение (1.34) инвариантно относительно группы растяжений

$$\mathcal{G}: \quad \tau = \alpha t, \quad \eta = \alpha x, \quad \alpha \in (0, +\infty). \quad (1.47)$$

Решая задачу Коши (1.39), (1.40) при $t > 0$, найдём новые переменные, в которых группа $\mathcal{G}$, действующая на $\mathbb{R}_+^2$, подобна группе переносов:

$$u = \frac{x}{t}, \quad v = \ln t, \quad \theta = \ln \alpha.$$

Отсюда следует, что уравнение (1.34) в новых переменных имеет вид (1.44). Замена

$$z(u) = \frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{1}{x' - x/t}, \quad x' - x/t \neq 0$$

понижает порядок уравнения (1.34). Произведём процедуру понижения порядка уравнения, используя полученные формулы:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{z(u)} + u, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{du}{dt} \frac{d}{du} \left[\frac{1}{z(u)} + u \right] = \frac{1}{t} \frac{1}{z(u)} \left[1 - \frac{z'}{z^2} \right], \dots,$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{1}{t^{n-1}} \sigma_n(z, z', \dots, z^{(n-1)}), \quad n > 1.$$

Функция σ_n не содержит явно u . В результате уравнение (1.34) приводится к виду

$$\begin{aligned} F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) &= F\left(t, tu, \frac{1}{z(u)} + u, \frac{1}{t} \frac{1}{z(u)} \left[1 - \frac{z'}{z^2}\right], \dots, \frac{1}{t^{n-1}} \sigma_n\right) = \\ &= t^k F\left(1, u, \frac{1}{z(u)} + u, \dots, \sigma_n\right) = t^k \Psi(u, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0. \end{aligned}$$

Так как $t > 0$, то для определения функции $z(u)$ мы получаем уравнение $(n-1)$ -го порядка:

$$\Psi(u, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0. \quad (1.48)$$

При таком способе понижения порядка уравнения можно потерять решения вида

$$x' - x/t = 0 \Rightarrow x = Ct, \quad C - \text{постоянная},$$

существование которых устанавливается непосредственной проверкой.

На практике также поступают следующим образом: переменные (t, x) выражают через (u, v) и в уравнении (1.34) делают замену:

$$t = e^v, \quad x = ue^v.$$

В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dt} = e^{-v} \left[e^v \frac{du}{dv} + e^v u \right] = \frac{du}{dv} + u, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= e^{-v} \frac{d}{dv} \left[\frac{du}{dv} + u \right], \dots, \frac{d^n x}{dt^n} = e^{-(n-1)v} \chi_n(u, u', \dots, u^{(n)}). \end{aligned}$$

Функция χ не содержит явно v . Тогда

$$\begin{aligned} F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) &= F\left(e^v, e^v u, \frac{du}{dv} + u, \dots, e^{-(n-1)v} \chi_n\right) = \\ &= e^{kv} F\left(1, u, \frac{du}{dv} + u, \dots, \chi_n\right) = 0. \end{aligned}$$

Мы получили уравнение n -го порядка

$$F\left(1, u, \frac{du}{dv} + u, \dots, \chi_n\right) = 0,$$

которое не содержит явно v . Следовательно, его порядок можно понизить на единицу (см. пункт а)), положив $p(u) = du/dv$. Если теперь в уравнении для $p(u)$ сделать замену $p(u) = 1/z(u)$, то для определения функции $z(u)$ мы опять придём к уравнению (1.48).

г) В этом пункте мы обобщим результаты пункта в) и рассмотрим случай, когда уравнение (1.34) инвариантно относительно группы растяжений:

$$\mathcal{G} : \tau = \alpha t, \quad \eta = \alpha^m x, \quad \alpha \in (0, \infty).$$

Будем считать, что $t > 0$. Нетрудно видеть, что инвариантом группы является функция $u = x/t^m$. В качестве канонических переменных и канонического параметра возьмём следующие:

$$u = \frac{x}{t^m}, \quad v = \ln t, \quad \theta = \ln \alpha.$$

В новых переменных u, v группа $\mathcal{G}$ будет подобна группе переносов:

$$\tilde{u} = u, \quad \tilde{v} = v + \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}^1.$$

Уравнение (1.34) в новых переменных имеет вид (1.44). Произведём соответствующую замену:

$$z(u) = \frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{1}{t} \frac{t^{m+1}}{tx' - mx}, \quad tx' - mx \neq 0.$$

Отсюда

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{tz(u)}, \quad z(u) = \frac{t^m}{tx' - mx}.$$

В результате

$$\begin{aligned} x' &= t^{m-1} \left[mu + \frac{1}{z(u)} \right], \\ x'' &= t^{m-2} \left[(m-1) \left(mu + \frac{1}{z(u)} \right) + \frac{1}{z(u)} \frac{d}{du} \left(mu + \frac{1}{z(u)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$x^{(n)} = t^{m-n} \sigma_n(u, z, \dots, z^{n-1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) &= F \left(t, t^m u, t^{m-1} \left(mu + \frac{1}{z(u)} \right), \dots, t^{m-n} \sigma_n \right) = \\ &= t^k F \left(1, u, mu + \frac{1}{z(u)}, \dots, \sigma_n(u, z, \dots, z^{n-1}) \right) = \\ &= t^k \Psi(u, z, z', \dots, z^{n-1}) = 0 \Rightarrow \Psi(u, z, z', \dots, z^{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы понизили порядок уравнения. При таком способе понижения можно потерять решение вида

$$tx' - mx = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{mdt}{t} \Rightarrow x = Ct^m.$$

Их существование проверяется непосредственной проверкой. Однако на практике часто поступают следующим образом: переменные (t, x) выражают через (u, v) и в уравнении (1.34) производят замену:

$$t = e^v, x = ue^{mv}. \quad (1.49)$$

Вычисляя производные, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dt} = e^{(m-1)v} \left(mu + \frac{du}{dv} \right), \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= e^{-v} \frac{d}{dv} \left[e^{(m-1)v} \left(mu + \frac{du}{dv} \right) \right] = \\ &= e^{(m-2)v} \left[m(m-1)u + (2m-1) \frac{du}{dv} + \frac{d^2u}{dv^2} \right], \dots, \\ \frac{d^nx}{dt^n} &= e^{(m-n)v} \sigma_n(u, \dots, u^{(n)}). \end{aligned} \quad (1.50)$$

В результате находим

$$F\left(e^v, ue^v, \dots, e^{(m-n)v} \sigma_n(u, \dots, u^{(n)})\right) = e^{kv} F\left(1, u, \dots, \sigma_n(u, \dots, u^{(n)})\right),$$

Мы получили уравнение из пункта а). Отметим, что в этом пункте не были использованы уравнения Ли.

Пример 1.4.2. Решить уравнение

$$t^2 xx'' = (x - tx')^2. \quad (1.51)$$

Решение. Уравнение (1.51) инвариантно относительно однопараметрической группы (1.47). Произведём в нём при $t > 0$ замену (см. случай в)):

$$x = tu, \quad x' = u + \frac{1}{z(u)}, \quad x'' = \frac{z^2 - z'}{tz^3}.$$

Функция $z(u)$ удовлетворяет уравнению Бернулли:

$$uz' + z = uz^2.$$

Положив далее $p(u) = 1/z(u)$, для определения $p(u)$ получим линейное уравнение:

$$up' - p = -u.$$

Решив его, найдём уравнение для функции $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \ln \frac{x}{t} + \frac{x}{t}.$$

Оно является однородным. Его интегрирование позволяет определить все решения уравнения (1.51) на интервале $(0, +\infty)$:

$$x = C_2 t e^{-\frac{C_1}{t}}. \quad (1.52)$$

Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

На интервале $(-\infty, 0)$ решения уравнения (1.51) находятся аналогично и имеют тот же вид (1.52). Если положить $C_1 = 0$ в формуле (1.52), то функции $x = C_2 t$ будут также решениями уравнения (1.51) на интервале $(-\infty, +\infty)$. Отметим, что все функции, описываемые формулой (1.52) при $t > 0$, $C_1 > 0$ и $t < 0$, $C_1 < 0$, стремятся к нулю соответственно при $t \rightarrow \pm 0$. Доопределим их при $t = 0$ значением, равным нулю. Рассмотрим теперь функцию, которая на интервале $(-\infty, 0)$ совпадает с решением уравнения (1.51) при каком-либо значении постоянной $C_1 > 0$. Она будет определена при всех t и дважды непрерывно дифференцируема в нуле. Построенные таким образом функции также будут решениями уравнения (1.51) на интервале $(-\infty, +\infty)$. $\diamond$

Заметим, что использование переменных (1.49) при $m = 1$ технически упрощает интегрирование уравнения.

Как мы уже отмечали, наличие однопараметрической группы преобразований у уравнения первого порядка позволяет его проинтегрировать. Это связано с тем, что в канонических переменных, выпрямляющих группу (т.е. группа приводится к группе параллельного переноса), оно не будет содержать явно одну из них.

Пример 1.4.3. Решить уравнение

$$\frac{2}{3} t x x' = \sqrt{x^4 - t^6} + x^2, \quad t > 0. \quad (1.53)$$

Решение. Уравнение (1.53) инвариантно относительно группы растяжений:

$$G: \quad \tau = \alpha t, \quad \eta = \alpha^{3/2} x, \quad \alpha > 0.$$

Здесь $\alpha_0 = 1$. Рассмотрим задачу Коши (1.39), (1.40):

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{d\eta}{\eta} = d\theta = d \ln \alpha, \quad \tau = t, \eta = x \quad \text{при} \quad \theta = 0.$$

Её решение при $t > 0$ имеет вид

$$\frac{\eta}{\tau^{3/2}} = \frac{x}{t^{3/2}}, \quad \ln \tau = \ln t + \theta.$$

Введём канонические переменные

$$u = \frac{x}{t^{3/2}}, \quad v = \ln t. \quad (1.54)$$

В пункте в) эти переменные были введены без использования уравнений Ли.

Перейдём в уравнении (1.53) к переменным (1.54). Имеем для производной

$$\frac{du}{dv} = -\frac{3}{2}u + t^{-1/2}x'. \quad (1.55)$$

Используя (1.54) и (1.55), получим уравнение, которое не содержит явно переменную v :

$$\frac{1}{3} \frac{d(u^2)}{dv} = \sqrt{u^4 - 1}.$$

Его интегрирование даёт

$$x^2 = Ct^6 + \frac{1}{4C}, \quad t \geq (2C)^{-1/3}, \quad C > 0; \quad x^2 = |t|^3. \quad (1.56)$$

Область существования решения (1.56) зависит от величины постоянной C . Аналогично находятся решения уравнения (1.53) при значениях переменной $t < 0$. Они имеют тот же самый вид (1.56), но для решений, описываемых первой формулой при $t \leq -(2C)^{-1/3}$. Используя решения уравнения (1.53), найденные на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, нетрудно также построить функции, которые будут определены при всех t , непрерывно дифференцируемы в нуле и являются решениями уравнения на интервале $(-\infty, +\infty)$. $\diamond$

Пример 1.4.4. Решить следующие задачи Коши ([9], §7, 65):

$$\begin{aligned} & t^2 x'' + 2t^2 x x' + 2tx^2 - 2x = 0, \\ \text{a) } & x(1) = -1, x'(1) = 1; \text{ b) } x(1) = 2, x'(1) = 0. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Решение. Рассмотрим группу растяжений $t \rightarrow \alpha t, x \rightarrow \alpha^m x$. При $m = -1$ уравнение (1.57) инвариантно относительно этой группы. Следовательно, согласно (1.49) каноническими переменными будут

$$u = tx, v = \ln t. \quad (1.58)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} z(u) = \frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} &= \frac{1}{t} \frac{t}{t^2 x' + x} = \frac{1}{t^2 x' + u} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = \frac{1}{z} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{tz} \\ x' = t^{-2} \left(-u + \frac{1}{z} \right) \end{array} \right.; \\ x'' = \frac{d}{dt} \left[t^{-2} \left(-u + \frac{1}{z} \right) \right] &= -\frac{2}{t^3} \left(-u + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{t^2} \frac{1}{tz} \frac{d}{du} \left(-u + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{x'' = t^{-3} \left(2u - \frac{3}{z} - \frac{z'}{z^3} \right)}. \end{aligned}$$

Подставляя x' и x'' в уравнение (1.57), получим

$$\begin{aligned} \frac{2u}{t} - \frac{3}{tz} - \frac{z'}{tz^3} - \frac{2u^2}{t} + \frac{2u}{tz} + \frac{2u^2}{t} - \frac{2u}{t} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow z' = (2u - 3)z^2 \Rightarrow z &= \frac{1}{3u - u^2 + C} \Rightarrow \\ \Rightarrow x' = \left[t^{-2} \left(-u + \frac{1}{z} \right) \right] &= t^{-2} (2u - u^2 + C) = t^{-2} (2tx - t^2 x^2 + C) \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{x' = \frac{2x}{t} - x^2 + \frac{C}{t^2}}. \end{aligned}$$

Если постоянная C не равна нулю, то в итоге мы получили уравнение Риккати.

а) Найдём постоянную C , используя начальные условия $x(1) = -1$, $x'(1) = 1$. В результате имеем

$$1 = -2 - 1 + C \Rightarrow C = 4 \Rightarrow x' = \frac{2x}{t} - x^2 + \frac{4}{t^2} - \text{уравнение Риккати.}$$

Его решение — $x = -\frac{1}{t}$. Оно удовлетворяет начальным условиям а).

б) Если начальными условиями будут $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$, то $C = 0$ и для определения решения задачи Коши получим уравнение Бернулли: $x' = \frac{2x}{t} - x^2$. Его решением будет функция

$$x = \frac{6t^2}{1 + 2t^2}. \diamond$$

Замечание 1.4.5. Если воспользоваться формулами (1.49) и (1.50), то для x' и x'' будем иметь

$$\begin{aligned} t &= e^v, x = e^{-v}u \Rightarrow \\ \Rightarrow x' &= e^{-2v}(u' - u), x'' = e^{-3v}(2u - 3u' + u''). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Отсюда находим

$$u'' - 3u' + 2uu' = 0.$$

Левая часть найденного уравнения является полным дифференциалом. Его интегрирование даёт

$$u' + u^2 - 3u = C.$$

Из а) получаем, используя (1.59) ($v = \ln t \Rightarrow v = 0, t = 1$):

$$1 = u' - u, u(0) = -1 \Rightarrow u'(0) = 0.$$

Следовательно, $C = 4$ и $u' = 3u - u^2 + 4$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} x' &= t^{-2}(-u^2 + 3u + 4 - u) = t^{-2}(-t^2x^2 + 2tx + 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow x' &= -x^2 + \frac{2x}{t} + \frac{4}{t^2} - \text{уравнение Риккати.} \end{aligned}$$

Решением уравнения Риккати, удовлетворяющим начальным условиям а), будет функция $x = -\frac{1}{t}$. В случае начальных условий б) будем иметь: $C = 0 \Rightarrow x = \frac{6t^2}{1+2t^3}. \diamond$

Глава 2

Исследование задачи Коши. Продолжение решений. Уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной. Особое решение. Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных данных

2.1. Основные определения и предварительные сведения для нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), i = \overline{1, n}.$$

Функции $f_i(t, \vec{x}) = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ определены в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}_{t, \vec{x}}^{n+1}$. Введём вектор-функции, отождествляя их со столбцами:

$$\vec{x}(t) = \text{colon}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \vec{f}(t, \vec{x}) = \text{colon}(f_1(t, \vec{x}), \dots, f_n(t, \vec{x})).$$

Под дифференцированием вектор-функций будем понимать их покомпонентное дифференцирование: $\vec{f}'(t) = \text{colon}(f'_1(t), \dots, f'_n(t))$. Тогда систему уравнений можно записать в виде одного векторного дифференциального уравнения

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}), (t, \vec{x}) \in \Omega. \quad (2.1)$$

Слова *векторное дифференциальное уравнение* и *система дифференциальных уравнений* ниже считаются эквивалентными.

В качестве нормы вектора $\vec{x}$ берётся евклидова норма в n -мерном пространстве, а именно: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}$. Далее предполагается, что функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\vec{f}(t, \vec{x}) \in \mathbf{C}(\Omega); \quad (2.2)$$

$$\vec{f}(t, \vec{x}) \in \text{Lip}_{\vec{x}}(\bar{\Omega}_L). \quad (2.3)$$

Из условия (2.3) следует, что функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{x}$ (равномерно по t) в любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}_L$ такой, что $\bar{\Omega}_L \subset \Omega$. Это означает, что для любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}_L \subset \Omega$ существует постоянная $L > 0$ такая, что для любых точек $(t, \vec{x}), (t, \vec{y}) \in \bar{\Omega}_L$ справедливо неравенство

$$\|\vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{y})\| \leq L \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Постоянная $\bar{L} = \inf L$ называется постоянной Липшица. Ее величина зависит как от вида функции $\vec{f}(t, \vec{x})$, так и от области $\bar{\Omega}_L$.

Будем говорить, что функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{x}$ в области Ω , если существует постоянная L такая, что для любых точек $(t, \vec{x}), (t, \vec{y}) \in \Omega$ справедливо вышеприведенное неравенство. В этом случае будем писать:

$$\vec{f}(t, \vec{x}) \in \text{Lip}_{\vec{x}}(\Omega).$$

Из определения нормы вектора вытекает, что если условие Липшица справедливо для вектор-функции, то оно выполняется и для каждой её координатной компоненты.

Определение 2.1.1. Вектор-функция $\vec{\varphi}(t)$, определённая на интервале J , называется решением системы уравнений (2.1), если

- 1) $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}^1(J)$;
- 2) $(t, \vec{\varphi}(t)) \in \Omega$ для любого $t \in J$;
- 3) $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$ для любого $t \in J$.

Задача Коши. Пусть точка $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$. Требуется найти решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ системы дифференциальных уравнений (2.1) такое, что

$$\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (2.4)$$

Условия (2.4) называются начальными.

Задача Коши обозначается следующим образом:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (t_0, \vec{x}_0) \in \Omega. \quad (2.5)$$

Из определения следует, что решение задачи Коши (2.5) существует, если существует интервал $J \ni t_0$ и решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, определённое на нём, такое, что $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. Кривая в пространстве $\mathbb{R}_{t, \vec{x}}^{n+1}$, являющаяся графиком решения системы (2.1), называется *интегральной кривой*.

Лемма 2.1. Пусть функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ дифференцируема по переменным $x_i, i = \overline{1, n}$ в выпуклой области Ω . Если все ее производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = \overline{1, n}$ ограничены в области Ω , то найдётся такая постоянная $L > 0$, что для всех точек $(t, \vec{x}), (t, \vec{y}) \in \Omega$ выполняется условие Липшица $\vec{f}(t, \vec{x}) \in Lip_{\vec{x}}(\Omega)$.

Если на $[a, b]$ задана непрерывная вектор-функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, то по определению на $[a, b]$ вектор-функция $\vec{\psi}(t) = \int_{t_0}^t \vec{\varphi}(\tau) d\tau, t_0, t \in [a, b]$ имеет координаты $\psi_i(t) = \int_{t_0}^t \varphi_i(\tau) d\tau, i = \overline{1, n}, t_0, t \in [a, b]$.

Лемма 2.2. Для $\vec{\varphi}(t) \in C([a, b])$ справедлива оценка

$$\left\| \int_{t_0}^t \vec{\varphi}(\tau) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\vec{\varphi}(\tau)\| d\tau \right|, \quad t, t_0 \in [a, b].$$

Доказательство. ► Разобьём $[a, b]$ на k частей: $t_i = t_0 + i\delta, \delta = \frac{t-t_0}{k}, i = \overline{1, k}$. Тогда согласно определению интеграла от вектор-функции и согласно неравенству $\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_k\| \leq \|\vec{x}_1\| + \dots + \|\vec{x}_k\|$ имеем

$$\left\| \int_{t_0}^t \vec{\varphi}(\tau) d\tau \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k \vec{\varphi}(t_i) \delta \right\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \|\vec{\varphi}(t_i)\| \delta = \left| \int_{t_0}^t \|\vec{\varphi}(\tau)\| d\tau \right|.$$

■

2.2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы уравнения

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (2.5) будет доказана методом последовательных приближений Пикара. Этот метод позволяет также приближенно вычислять решение. Первым шагом в доказательстве является переход от задачи Коши к интегральному уравнению. Покажем, что найти решение задачи Коши (2.5) на J эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{x}(\tau)) d\tau, \quad t_0, t \in J. \quad (2.6)$$

Определение 2.2.1. Вектор-функция $\vec{\varphi}(t)$, определённая на интервале J , называется решением векторного интегрального уравнения (2.6), если

- 1) $\vec{\varphi}(t) \in C(J)$;
- 2) $(t, \vec{\varphi}(t)) \in \Omega$ для любого $t \in J$;
- 3) для любого $t \in J$ выполняется равенство

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) d\tau, \quad t_0 \in J.$$

Лемма 2.3. Если вектор-функция $\vec{\varphi}(t) \in C^1(J)$ является решением задачи Коши (2.5), то она также будет решением векторного интегрального уравнения (2.6). Наоборот, если вектор-функция $\vec{\varphi}(t) \in C(J)$ – решение векторного интегрального уравнения (2.6), то она также будет решением задачи Коши (2.5).

Доказательство. ► Если $\vec{\varphi}(t) \in C^1(J)$ является решением задачи Коши (2.5), то при $t \in J$ справедливо тождество

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \equiv \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t)).$$

Проинтегрировав обе его части от t_0 до t , получим, что $\vec{\varphi}(t)$ является решением (2.6).

Пусть теперь $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}(J)$ является решением векторного интегрального уравнения (2.6). Подставив $\vec{\varphi}(t)$ в (2.6), получим тождество

$$\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) d\tau, \quad t, t_0 \in J.$$

При $t = t_0$ имеем $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. Справа в тождестве стоит дифференцируемая функция, поэтому $\vec{\varphi}(t)$ также функция дифференцируемая. Продифференцировав его, находим $\frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt} \equiv \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$. Значит, $\vec{\varphi}(t)$ – решение задачи Коши (2.5). ■

Возьмём произвольную точку с координатами $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$. Обозначим через R открытый цилиндр:

$$R = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| < a, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b, \bar{R} \subset \Omega\}$$

с центром в точке $(t_0, \vec{x}_0)$. Обозначим через $M = \max_{(t, \vec{x}) \in R} |f(t, \vec{x})|$, $h = \min(a, \frac{b}{M})$. Через Q обозначим открытый цилиндр

$$Q = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| < h, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b, \bar{Q} \subseteq \bar{R} \subset \Omega\}$$

также с центром в точке $(t_0, \vec{x}_0)$.

Отрезок $[t_0 - h; t_0 + h]$ с определённым выше h называется отрезком Пеано. Определим последовательные приближения Пикара на отрезке Пеано.

Определение 2.2.2. Функции вида

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_0(t) &= \vec{x}_0, \\ &\dots\dots\dots, \\ \vec{\varphi}_n(t) &= \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n \in N; \quad t, t_0 \in J, \end{aligned} \quad (2.7)$$

определённые на отрезке $[t_0 - h; t_0 + h]$, называются последовательными приближениями решения интегрального уравнения (2.6) на отрезке Пеано $[t_0 - h; t_0 + h]$.

Ниже показано, что все последовательные приближения (2.7) определены на отрезке Пеано, причём при $t \in [t_0 - h; t_0 + h]$ справедливо включение $(t, \vec{\varphi}_n(t)) \in \bar{Q}$. Ниже отрезок Пеано будет обозначаться

$J_p(t_0, \vec{x}_0)$, так как его длина зависит от выбора точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$.

Сформулируем теорему существования и единственности решения задачи Коши (**основную теорему**), которая носит название теоремы Пикара [8, 10].

Теорема 2.1. Пусть вектор-функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет условиям (2.2), (2.3). Тогда

1) для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$ существует решение $\vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (2.5), определённое на отрезке Пеано $J_p(t_0, \vec{x}_0)$;

2) если два решения $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ совпадают хотя бы при одном значении t_0 , т.е. $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{\psi}(t_0)$, то они совпадают при всех значениях переменного t , при которых одновременно определены.

• **Существование.** Доказательство существования решения разобьём на три этапа.

1. Сначала докажем, что все функции (2.7) $\{\vec{\varphi}_n\}$, $n \in \{0\} \cup N$, последовательных приближений определены, непрерывны на отрезке Пеано $J_p(t_0, \vec{x}_0)$ и $(t, \vec{\varphi}(t)) \in \bar{Q}$. Необходимо показать, что для любого $n \in \{0\} \cup N$ имеют место неравенства $\|\vec{\varphi}_n(t) - \vec{x}_0\| \leq b$, $|t - t_0| \leq h$.

Возьмём $\vec{\varphi}_0(t) = \vec{x}_0$, $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. График этой функции не выходит из $\bar{Q}$. Возьмём далее $\vec{\varphi}_1(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau)) d\tau$. Отсюда получаем

$$\|\vec{\varphi}_1(t) - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau)) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau))\| d\tau \right| \leq M |t - t_0|,$$

так как $\bar{Q} \subseteq \bar{R}$ и $\|\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau))\| \leq M$. Вспоминая, что $h = \min(a, \frac{b}{M})$, находим: $\|\vec{\varphi}_1 - \vec{x}_0\| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b$. Таким образом, $(t, \vec{\varphi}_1) \in \bar{Q}$, $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Пусть наше утверждение справедливо для $\vec{\varphi}_{n-1}(t)$, тогда для $\vec{\varphi}_n(t)$ из (2.7) имеем

$$\|\vec{\varphi}_n - \vec{x}_0\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_{n-1}(\tau))\| d\tau \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b. \quad (2.8)$$

Мы показали, что все последовательные приближения (2.7) определены для $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Непрерывность $\vec{\varphi}_n(t)$ следует из непрерывности функции $\vec{f}(t, \vec{x})$ в области Ω .

2. Докажем теперь, что последовательность (2.7), определенная на отрезке Пеано $J_p(t_0, \vec{x}_0)$, сходится на нем равномерно. Отсюда будет следовать, что предельная функция $\vec{\varphi}(t)$ непрерывна на отрезке Пеано. Заметим, что сходимость последовательности (2.7) равносильна сходимости ряда

$$\vec{S} = \vec{\varphi}_0 + (\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_0) + (\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1) + \dots \quad (2.9)$$

Частичные суммы ряда $\vec{S}_n = \vec{\varphi}_n(t)$. Таким образом, из равномерной сходимости ряда (2.9) на отрезке Пеано следует равномерная сходимость последовательности (2.7). Построим мажорирующий ряд для функционального ряда (2.9). Используя (2.7), рассмотрим разность $\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1\| &= \left\| \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_1) d\tau - \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_1) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0)\| d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|\vec{\varphi}_1(\tau) - \vec{\varphi}_0(\tau)\| d\tau \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t M|t - t_0| d\tau \right| \leq ML \frac{(t - t_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс и используя метод математической индукции, получим

$$\|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}_{n-1}\| \leq ML^{n-1} \frac{(t - t_0)^n}{n!}. \quad (2.10)$$

Из оценки (2.10) вытекает, что ряд (2.9) мажорируется на отрезке Пеано $J_p(t_0, \vec{x}_0)$ числовым рядом:

$$\|\vec{\varphi}_0\| + Mh + ML \frac{h^2}{2} + \dots + ML^{n-1} \frac{h^n}{n!} + \dots \quad (2.11)$$

Ряд (2.11) сходится по признаку Даламбера, а значит, по признаку Вейерштрасса ряд (2.9) сходится равномерно. Отсюда следует равномерная сходимость на отрезке Пеано последовательности (2.7):

$$\vec{\varphi}_n(t) \rightrightarrows \vec{\varphi}(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Согласно теоремам математического анализа предельная функция $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h])$.

3. Осталось показать, что график предельной функции $\vec{\varphi}(t)$, $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$, не выходит из замкнутой области $\overline{Q}$ и она удовлетворяет интегральному уравнению (2.6). Рассмотрим неравенство (2.8) и перейдем в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\|\vec{\varphi}(t) - \vec{x}_0\| \leq b$, $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Покажем теперь, что функция $\vec{\varphi}(t)$, $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$, является решением интегрального уравнения (2.6). Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ & \leq \left| \int_{t_0}^t \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau)) \right\| d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|\varphi(\tau) - \varphi_n(\tau)\| d\tau \right| \leq \\ & \leq L \sup_{|t-t_0| \leq h} |\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}_n(t)| \cdot \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| \leq hL \sup_{|t-t_0| \leq h} \|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}_n(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к пределу $n \rightarrow \infty$ в (2.7). Тогда получим

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) d\tau, \quad t \in J_p(t_0, \vec{x}_0).$$

Следовательно, $\vec{\varphi}(t)$ является решением интегрального уравнения (2.6), когда $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Нетрудно показать, что $\vec{\varphi}(t)$ имеет производную справа в точке $t_0 - h$ и слева в точке $t_0 + h$ и эти производные равны значениям функции $f(t, \vec{\varphi}(t))$ в этих точках.

• **Единственность.** Доказательство единственности построенного решения разобьём на два этапа [7].

1. Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ и $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ — два решения задачи Коши (2.5) при $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$ и $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{\psi}(t_0)$. Рассмотрим замкнутый цилиндр $\overline{Q}_\beta$:

$$\overline{Q}_\beta = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| \leq \beta, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq b, \overline{Q}_\beta \subseteq \overline{Q}\}.$$

Значение β будет выбрано ниже. Имеем

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t [f(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) - f(\tau, \vec{\psi}(\tau))] d\tau \right\| \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \left| \int_{t_0}^t \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau)) \right\| d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|\vec{\varphi}(\tau) - \vec{\psi}(\tau)\| d\tau \right| \leq \\ & \leq \beta L \sup_{|t-t_0| \leq \beta} \|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\|. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\sup_{|t-t_0| \leq \beta} |\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)| \leq L\beta \sup_{|t-t_0| \leq \beta} |\vec{\varphi} - \vec{\psi}|.$$

Выберем $\beta L < 1$ и положим $\beta < \min \left\{ a; \frac{b}{M}; \frac{1}{L} \right\}$. Неравенство будет выполняться, если только $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$, $|t - t_0| \leq \beta$.

2. Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ и $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ — два решения задачи Коши (2.5), определенные одновременно на интервале (α_1, α_2) и $t_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Докажем, что в этом случае $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$ при $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Предположим противное, а именно: существует $t^* \in (\alpha_1, \alpha_2)$ такое, что $\vec{\varphi}(t^*) \neq \vec{\psi}(t^*)$, $t^* \neq t_0$. Для определенности предположим, что $t^* > t_0$. Рассмотрим множество P , для всех элементов которого $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$, $t \in [t_0, t^*)$. Покажем, что это множество замкнутое. Возьмём последовательность $\{\tau_n\} \in P$. Последовательность $\{\tau_n\}$ предполагается сходящейся к τ . Тогда в силу непрерывности функций $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ будем иметь

$$\vec{\varphi}(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\varphi}(\tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\psi}(\tau_n) = \vec{\psi}(\tau).$$

Отсюда получаем, что $\tau \in P$. Значит, P — замкнутое множество. Обозначим $\sup P = T$, $\vec{x}_T = \vec{\varphi}(T)$, $(T < t^*)$. Рассмотрим точку $(T, \vec{x}_T)$ и поставим в ней задачу Коши. Тогда существует отрезок $[T, T + \beta]$, $\beta > 0$, на котором решения $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ равны. Мы пришли к противоречию, а именно: T не может быть точной верхней гранью множества P .

Замечание 2.2.1. Для существования решения задачи Коши (2.5) достаточно выполнения условия (2.2) (теорема Пеано). Для единственности решения достаточно дополнительно наложить условие Липшица. $\diamond$

Замечание 2.2.2. Рассмотрим случай уравнения $x' = f(t, x)$. Если функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3), то каждая точка $(t_0, x_0) \in \Omega$ обладает такой окрестностью $U(t_0, x_0)$, в которой все решения уравнения $x' = f(t, x)$ описываются общим решением $x = \varphi(t, C)$ [5, 10]. $\diamond$

Замечание 2.2.3. Метод последовательных приближений позволяет оценить решение $\vec{\varphi}(t)$. Используя приближение $\vec{\varphi}_n(t)$, получим оценку: $\|\vec{\varphi} - \vec{\varphi}_n\| \leq ML^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$, $|t - t_0| \leq h$. $\diamond$

2.3. Область существования решения

При доказательстве **основной теоремы** было показано, что найдётся отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$, называемый отрезком Пеано, на котором решение задачи Коши (2.5) существует и единственно. Его длина зависит от выбора точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$. Как было определено ранее, величина $h = \min(a, \frac{b}{M})$. Здесь $M = \inf_{(t, \vec{x}) \in \bar{R}} \|\vec{f}(t, \vec{x})\|$, где через R обозначен цилиндр $R = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| < a, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b, \vec{R} \in \Omega\}$. Числа a и b выбираются так, чтобы замкнутый цилиндр $\bar{R}$ принадлежал области Ω . Решения задачи Коши могут отличаться друг от друга областью определения. Чтобы показать это, рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1, \quad x(0) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.12)$$

Её решением является функция $x = tg t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. В качестве прямоугольной области возьмём $R = \{(t, x) : |t| < 1, \|x\| < b, \vec{R} \in \mathbb{R}^2\}$. Тогда $M = \max_{(t, x) \in \bar{R}} |x^2 + 1| = b^2 + 1$, а $h = \min(1, \frac{b}{M}) = \frac{b}{b^2 + 1}$. Основная теорема гарантирует существование решения задачи Коши (2.12) в замкнутом прямоугольнике $\bar{Q} = \{(t, x) : |t| \leq h, \|x\| \leq b\}$, в котором величина h может принимать различные значения. Действительно, так как $M = b^2 + 1$, то $\frac{b}{M} = \frac{b}{b^2 + 1}$. Максимальным значением величины h будет $h^* = \max \frac{b}{M} = \max \frac{b}{b^2 + 1}, b > 0$. Если $b \in (0, \infty)$, то максимальное значение h достигается при $b = 1$ и равно $h^* = \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $h \leq \frac{1}{2}$. Если теперь, например, взять $b = 2$, то $h = \frac{2}{5}$. Таким образом, на промежутках $(-\frac{\pi}{2}, -h)$ и $(h, \frac{\pi}{2})$ имеются части интегральной кривой, проходящей через точку $(0, 0)$. Возникает вопрос: как показать их существование, если решение задачи Коши (2.12) было бы неизвестно? Вторая часть теоремы (о единственности решения на общем промежутке определения) позволяет преодолеть указанную трудность. С этой целью вводится понятие продолжения решения.

Определение 2.3.1. Решение $\vec{\varphi}(t), t \in (a, b)$, системы (2.1) называется продолжаемым вправо, если существует решение $\vec{\psi}(t), t \in$

$\in \langle a, b_1 \rangle, \langle a, b \rangle \subset \langle a, b_1 \rangle$, такое, что его сужение на промежуток $\langle a, b \rangle$ совпадает с $\vec{\varphi}(t)$, т.е. $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Если $b = b_1$, то $(a, b) \subset (a, b]$.

Аналогично определяется продолжение влево. Слова *решение продолжаемо* и *решение можно продолжить* имеют один и тот же смысл.

Определение 2.3.2. Решение $\vec{\varphi}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ называется непродолжаемым, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо. Примером непродолжаемого служит решение задачи Коши (2.12), приведенное выше.

Теорема 2.2. Пусть в области Ω выполняются условия основной теоремы и $\vec{\varphi}(t)$ — решение системы (2.1), определенное на промежутке $[\alpha, \beta)$. Если существует $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \vec{\varphi}(t) = \vec{B}$, $(\beta, \vec{B}) \in \Omega$, то решение $\vec{\varphi}(t)$ может быть продолжено вправо.

Доказательство. ► Решим задачу Коши, приняв за начальную точку $(\beta, \vec{B})$. Такое решение существует согласно теореме 2.1. Обозначим его $\vec{\varphi}_1(t)$. Предположим, что решение $\vec{\varphi}_1$ определено на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$, $\beta \in [\alpha_1, \beta_1]$. Обозначим функцию

$$\vec{\psi}(t) = \begin{cases} \vec{\varphi}(t), & t \in [\alpha, \beta), \\ \vec{\varphi}_1(t), & t \in [\beta, \beta_1]. \end{cases}$$

Она по построению является непрерывной. Рассмотрим функцию

$$\vec{\phi}(t) = \varphi(\alpha) + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau)) d\tau.$$

Если $t \in [\alpha, \beta)$, то функция $\vec{\phi} = \vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$. При $t \in [\beta, \beta_1]$ имеем

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &= \vec{\varphi}(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau)) d\tau + \int_{\beta}^t \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau)) d\tau = \\ &= B + \int_{\beta}^t \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau)) d\tau = \vec{\varphi}_1(t) = \vec{\psi}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\vec{\psi}(t)$ для любого $t \in [\alpha, \beta_1]$ является решением интегрального уравнения

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\psi}(\alpha) + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau)) d\tau,$$

а значит, и решением векторного дифференциального уравнения (2.1). Сужение решения $\vec{\psi}(t)$, $t \in [\alpha, \beta_1]$, на промежуток $t \in [\alpha, \beta)$ совпадает с решением $\vec{\varphi}(t)$. Согласно определению функция $\vec{\psi}(t)$ является продолжением решения $\vec{\varphi}(t)$ вправо. ■

Из доказанной теоремы следует, что непродолжаемое решение может быть определено только на интервале. Ниже он будет обозначаться (T_1, T_2) . Если решение определено на отрезке, то оно может быть продолжено как влево, так и вправо. Непродолжаемое решение задачи Коши 2.12 существует на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Определение 2.3.3. Пусть M и N — два замкнутых множества, заданные в пространстве с евклидовой метрикой. По определению расстояние ρ между ними, обозначаемое как $\text{dist}(M, N)$, равно

$$\rho = \text{dist}(M, N) = \inf_{P \in M, Q \in N} |PQ|.$$

Если $M \cap N = \emptyset$, то в математическом анализе доказывается, что $\rho > 0$.

Замечание 2.3.1. Если $M \subset N$, то расстояние ρ между множеством M и границей ∂N области N определяется аналогично

$$\rho = \text{dist}(M, \partial N) = \inf_{P \in M, Q \in \partial N} |PQ|. \diamond$$

Теорема 2.3. Пусть в области Ω выполняются условия основной теоремы 2.1, а $\bar{\Omega}_0$ — произвольная замкнутая ограниченная область такая, что $\Omega_0 \subset \Omega$. Тогда для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$ решение $\vec{\varphi}(t)$ с начальными данными в этой точке может быть продолжено в обе стороны до выхода на границу $\partial\Omega_0$.

Последняя фраза означает, что интегральная кривая, соответствующая решению $\vec{\varphi}(t)$, пересекает границу $\partial\Omega_0$.

Доказательство. ► Поскольку $\overline{\Omega}_0$ — замкнутая область, то расстояние ρ от неё до границы $\partial\Omega$ положительно. Пусть D — множество всех точек области $\Omega \setminus \overline{\Omega}_0$, расстояние каждой из которых до замкнутой области $\overline{\Omega}_0$ не превосходит $\rho/2$ (если $\rho = +\infty$, то в качестве расстояния берется 1). Рассмотрим множество $\overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_0 \cup \overline{D}$. Очевидно, $\overline{\Omega}_1$ — замкнутая ограниченная область и $\overline{\Omega}_0 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ непрерывна в $\overline{\Omega}_1$ и, следовательно, ограничена в ней: $\|\vec{f}(t, \vec{x})\| \leq M$. Если $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$, а положительные числа a и b удовлетворяют неравенству $a^2 + b^2 \leq \rho^2/4$, то замкнутый прямоугольник

$$\overline{R}^* = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| \leq a, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq b\}$$

принадлежит области Ω_1 . Положив $h = \min(a, \frac{b}{M})$, получим замкнутый прямоугольник

$$\overline{Q}^* = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| \leq h, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq b\},$$

который содержится в области Ω_1 независимо от выбора точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$. (Например, можно взять прямоугольник со сторонами $a = \frac{\rho}{2\sqrt{M^2+1}}$ и $b = \frac{\rho M}{2\sqrt{M^2+1}}$. Тогда для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$ величина $h = \frac{\rho}{2\sqrt{M^2+1}}$.)

Из основной теоремы следует, что решение задачи Коши с начальными данными $t_0, \vec{x}_0$ существует на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Таким образом, какую бы мы ни взяли точку $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$, решение задачи Коши будет определено на отрезке длины $2h$. Возьмём далее точку с координатами $t_1 = t_0 + h, \vec{x}_1 = \vec{\varphi}(t_0 + h)$. Если она принадлежит области Ω_0 , то продолжим решение вправо на отрезок длины h . Так как Ω_0 -ограниченная область и $h < \rho/2$, то, продолжая эту процедуру, мы на некотором шаге попадём либо на границу $\partial\Omega_0$, либо в область $\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0$. Это означает, что интегральная кривая, соответствующая решению $\vec{\varphi}(t)$, пересечет границу $\partial\Omega_0$. **Особо отметим, что она остаётся при этом в области Ω_1 .** ■

Замечание 2.3.2. Применим процедуру продолжения, использованную при доказательстве теоремы 2.2, к решению задачи Коши (2.12) на отрезке $[-h, h]$. Возьмём точку с координатами $(h, \varphi(h))$ за начальную. Согласно основной теореме решение будет существовать в замкнутом прямоугольнике

$$\overline{Q}_1^* = \{(t, x) : |t - h| \leq h_1, |x - \varphi(h)| \leq b\}.$$

Здесь $h_1 = \min \left(1, \frac{b}{(\varphi(h) + b)^2 + 1} \right)$, $h_1 < h$. Продолжая этот процесс, мы получим на n -м шаге $h_{n+1} < h_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как $\varphi(x)$ -монотонно возрастающая функция. В отличие от теоремы 2.2 здесь длины отрезков Пеано $2h_n$ при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. При этом ясно, что $\sum_{k=1}^n h_k \rightarrow \pi/2$ при $n \rightarrow \infty$. $\diamond$

Замечание 2.3.3. Возьмём ограниченные области $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n \dots$ такие, что $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$. Тогда согласно основной теореме интегральная кривая, являющаяся графиком решения задачи Коши (2.5), в случае $\rho < \infty$ может приблизиться к границе $\partial\Omega$ на любое сколь угодно малое расстояние. $\diamond$

Возникает вопрос: каким образом интегральная кривая приближается к границе $\partial\Omega$ и что мы получаем в конечном итоге?

Теорема 2.4. Пусть в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ выполняются условия основной теоремы. Тогда для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$ решение $\vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (2.5) может быть продолжено единственным образом на максимальный интервал существования (T_1, T_2) . При этом решение $\vec{\varphi}(t)$ стремится к границе $\partial\Omega$ области Ω при $t \rightarrow T_2$ и $t \rightarrow T_1$.

Утверждение «решение $\vec{\varphi}(t)$ стремится к границе $\partial\Omega$ области Ω при $t \rightarrow T_2$ » означает, что при t , стремящихся к T_2 , точки с координатами $(t, \vec{\varphi}(t))$ покидают любую замкнутую ограниченную область, принадлежащую области Ω .

Доказательство. ► Рассмотрим множество всех решений системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. Они отличаются областью определения. Обозначим через T_2 точную верхнюю грань множества P_r правых концов промежутков, на которых определены решения задачи Коши (2.5), аналогично через T_1 – точную нижнюю грань множества P_l левых концов. Если множество P_l неограничено снизу, то полагаем $T_1 = -\infty$; если множество P_r неограничено сверху, то полагаем $T_2 = \infty$. Построим решение задачи Коши (2.5) $\vec{\varphi}(t)$ на интервале $J = (T_1, T_2)$. Возьмем произвольную точку $t_* \in J$. Для определённости будем считать, что $t_* > t_0$. Так как T_2 – точная верхняя грань множества P_r , то существует решение $\vec{x} = \vec{\psi}(t), t \in (t_1, t_2) \subset J, t_* \in (t_1, t_2), t_0 \in (t_1, t_2)$. Положим $\vec{\varphi}(t_*) = \vec{\psi}(t_*)$. В силу основной теоремы данное определение корректно. Полученное таким образом значение $\vec{\varphi}(t_*)$ не зависит от случайно вы-

бранного решения $\vec{\psi}(t)$. Действительно, пусть $\vec{\phi}(t)$ — какое-либо другое решение, удовлетворяющее начальному условию $\vec{\phi}(t_0) = \vec{x}_0$ и определённое на интервале, содержащем точку t_* . Тогда $\vec{\psi}(t_*) = \vec{\phi}(t_*)$ в силу основной теоремы 2.1, так как $\vec{\psi}(t_0) = \vec{\phi}(t_0)$. Таким образом, функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ однозначно определена на всём интервале $J = (T_1, T_2)$ и $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. Она является решением системы уравнений (2.1) с начальными данными $t_0, \vec{x}_0$, так как в окрестности каждой точки t_* интервала (T_1, T_2) функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ совпадает по построению с некоторым решением.

Построенное решение $\vec{\varphi}$ — непродолжаемое, так как в противном случае должно существовать решение $\vec{\psi}(t)$, определённое на большем интервале $(A, B) \supseteq J$. Но тогда $T_2 \leq B, T_1 \geq A$ и согласно основной теореме $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t)$ при $t \in (T_1, T_2)$. Однако это невозможно, так как по построению решения $\vec{\varphi}(t)$ значение T_2 является точной верхней гранью множества правых концов всех промежутков, на которых определены решения задачи Коши (2.5), T_1 — точной нижней гранью. Это означает, что $T_2 \geq B, T_1 \leq A$. Следовательно, $T_2 = B, T_1 = A$. Полученное решение $\vec{\varphi}(t), t \in (T_1, T_2)$, согласно основной теореме является единственным непродолжаемым решением. ■

Рассмотрим отдельно важный случай, когда векторное дифференциальное уравнение (2.1) определено во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Теорема 2.5. Пусть $\vec{f}(t, \vec{x}) \in C(\mathbb{R}^2)$ и удовлетворяет условию Липшица по $\vec{x}$ в любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}_L \subset \mathbb{R}^2$. Тогда всякая интегральная кривая при возрастании t либо может быть неограниченно продолжена вправо до $t = +\infty$, либо имеет вертикальную асимптоту при конечном значении $t = \beta$.

Последнее утверждение означает, что интегральная кривая с начальными данными $t_0, \vec{x}_0$ при $t \rightarrow \beta_{-0}$ выходит из любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}_L$, удовлетворяющей включению $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_L$.

Замечание 2.3.4. Пусть задано непродолжаемое решение $\vec{\varphi}(t), t \in (T_1, T_2)$. Как интегральная кривая приближается к границе области $\partial\Omega$ при $t \rightarrow T_1 + 0, t \rightarrow T_2 - 0$? Ответ на этот вопрос ниже даётся на примерах решений уравнений на плоскости:

1. $\lim_{t \rightarrow T_2 - 0} \vec{\varphi}(t) = +\infty : x' = x^2, x(-1) = 1$. Решением задачи Коши будет функция $x = -\frac{1}{t}$. Отсюда получаем $T_2 = 0$.

2. Предел $\lim_{t \rightarrow T_1+0} \vec{\varphi}(t)$ не существует: $x' = x - \sin(\frac{1}{t}) - \frac{1}{t^2} \cos(\frac{1}{t})$, $x(\frac{1}{\pi}) = 0$. Решением этой задачи Коши будет функция $\varphi = \sin \frac{1}{t}$, предел которой при $t \rightarrow +0$ не существует. Значит, $T_1 = 0$.
3. Существует предел $\lim_{t \rightarrow T_1+0} \vec{\varphi}(t) = B : 2x' = \frac{x}{t}$, $t > 0$, $x = C\sqrt{t}$.
Здесь $T_1 = 0, B = 0$. $\diamond$

Пример 2.3.1. [2]. При каких α каждое решение уравнения

$$x' = |x|^\alpha \quad (2.13)$$

может быть продолжено на бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$?

Решение

1. Пусть $\alpha < 0$. Тогда уравнение (2.13) определено в двух полуплоскостях: $x > 0$ и $x < 0$. Через каждую точку в этих полуплоскостях проходит единственная интегральная кривая в силу теоремы существования и единственности. Если $x > 0$, то уравнение (2.13) принимает вид

$$x' = x^\alpha. \quad (2.14)$$

Все решения уравнения (2.14) описываются функцией

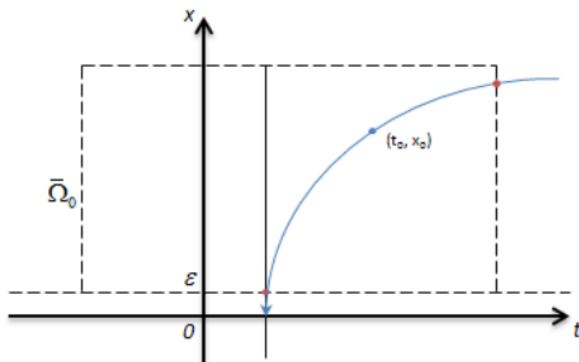
$$x = (1 - \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (t - C)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t - C > 0, \quad x > 0. \quad (2.15)$$

При значении постоянной $C = t_0 - \frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ интегральная кривая, соответствующая решению (2.15), проходит через точку (t_0, x_0) . Решение (2.15) определено на интервале $(C, +\infty)$ и не может быть продолжено влево за точку $t = C$. Следовательно, максимальным интервалом существования решения (2.15) будет $(C, +\infty)$, т.е. $T_1 = C$, $T_2 = +\infty$. Интегральная кривая уравнения (2.14), проходящая через точку (t_0, x_0) , $x_0 > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, при $t \rightarrow C$ ($t > C$) покидает любую замкнутую область $x \geq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и сколь угодно близко приближается к границе области $x = 0$, но достичь её не может. К границе $x = 0$ интегральная кривая приближается таким образом, что существует предел $\lim_{t \rightarrow T_1} x(t) = 0$. Производная решения (2.15) при $t \rightarrow C$ стремится к $+\infty$.

Аналогично ведут себя интегральные кривые уравнения (2.13) в полуплоскости $x < 0$. Они описываются функцией

$$x = -(1 - \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (C_1 - t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C_1 - t > 0, \quad x < 0. \quad (2.16)$$

При любом значении постоянной C_1 решение (2.16) не может быть продолжено вправо за точку $t = C_1$. Здесь $T_1 = -\infty$, $T_2 = C_1$.



2. Пусть $\alpha > 1$. В плоскости $\mathbb{R}^2$ правая часть уравнения (2.13) удовлетворяет условиям теоремы 2.1 существования и единственности решения задачи Коши. Значит, через каждую точку плоскости $\mathbb{R}^2$ проходит единственная интегральная кривая. Функция $x = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$ является решением уравнения (2.13). Рассмотрим сначала случай $x > 0$. Уравнение (2.13) становится уравнением (2.14). Все его решения имеют вид

$$x_1 = (\alpha - 1)^{\frac{1}{1-\alpha}} (C_1 - t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C_1 - t > 0, \quad \frac{1}{1-\alpha} < 0, \quad x_1 > 0. \quad (2.17)$$

При $x_0 > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}^1$ и значении $C_1 = t_0 + \frac{x_0^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ решение ((2.17)) удовлетворяет начальному условию $x_1(t_0) = x_0$. При $t \rightarrow C_1$ ($t < C_1$) оно стремится к $+\infty$. Вертикальная прямая $t = C_1$ является асимптотой решения (2.17). Последнее не может быть продолжено вправо за точку $t = C_1$ и максимальным интервалом существования решения будет $(-\infty, C_1)$, где $T_1 = -\infty$, $T_2 = C_1$. При $t \rightarrow C_1$ интегральная кривая, соответствующая решению (2.17), которое удовлетворяет начальному условию, при возрастании x выходит из любого прямоугольника $\bar{\Omega}_L$ такого, что имеет место включение $(t_0, x_0) \in \Omega_L$.

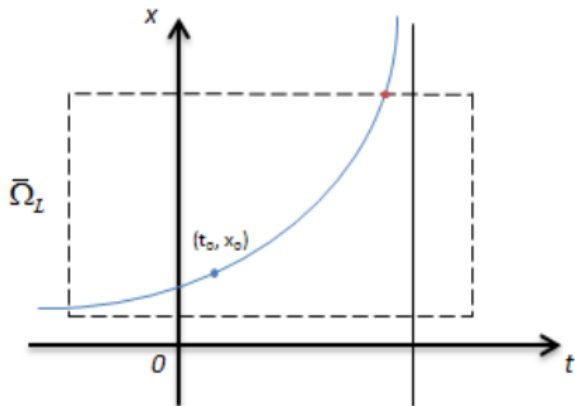
При $x < 0$ уравнение (2.13) принимает вид

$$x' = (-x)^\alpha. \quad (2.18)$$

Все его решения описываются функцией

$$x_2 = -(\alpha - 1)^{\frac{1}{1-\alpha}} (t - C_2)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t - C_2 > 0, \quad x < 0. \quad (2.19)$$

Решение (2.19) не может быть продолжено влево за точку $t = C_2$. Вертикальная прямая $t = C_2$ является асимптотой решения (2.19). Максимальным интервалом существования решения будет интервал $(C_2, +\infty)$, т.е. $T_1 = C_2$, $T_2 = +\infty$.



3. Пусть теперь $\alpha = 0$. Отсюда следует, что $x \neq 0$ (операция 0^0 не определена). Уравнение (2.13) примет вид $x' = 1$, $x \neq 0$. Его решения при $x > 0$ описываются функцией $x = t + C$, $t + C > 0$. При фиксированном C решение не может быть продолжено влево за точку $t = -C$. Максимальным интервалом существования решения будет интервал $(-C, +\infty)$. Здесь $T_1 = -C$, $T_2 = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow T_1} x(t) = 0$. Аналогично при $x < 0$. Картина поведения интегральных кривых качественно подобна случаю 1.

4. Пусть $\alpha = 1$. Функция $x = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$ – решение уравнения (2.13): $x' = |x|$. При $x > 0$ решения уравнения (2.13) описываются функцией $x = Ce^t$, $C > 0$, а при $x < 0$ – функцией $x = -Ce^{-t}$, $C > 0$. В результате получаем, что все решения уравнения (2.13) при $\alpha = 1$ могут быть продолжены на интервал $(-\infty, +\infty)$. Здесь следует обратить внимание на следующий факт: функция $|t|$ не дифференцируемая при $t = 0$. Однако она удовлетворяет условию Липшица. Поэтому че-

рез каждую точку плоскости $\mathbb{R}^2$ проходит единственная интегральная кривая.

5. Рассмотрим, наконец, случай $0 < \alpha < 1$. Правая часть уравнения — непрерывная функция. Следовательно, для любой точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ решение задачи Коши существует согласно теореме Пеано. Однако в полосе $|x| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, функция $|x|^\alpha$ не удовлетворяет условию Липшица (она также не дифференцируема при $x = 0$). **Следовательно, не выполняется достаточное условие теоремы существования и единственности решения задачи Коши с начальными данными в точках $(t_0, 0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. К чему это приводит?** Функция $x = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$ является решением уравнения (2.13). Пусть $x > 0$. Все решения уравнения (2.14) описываются функцией

$$x_1 = (1 - \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (t - C_1)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t - C_1 > 0, \quad x > 0. \quad (2.20)$$

Любое решение $x_1(t)$ (2.20) может быть продолжено на промежуток $[C_1, +\infty)$. При этом производная справа в точке $t = C_1$ равна нулю. Если $x < 0$, то все решения уравнения (2.18) описываются функцией

$$x_2 = -(1 - \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (C_2 - t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C_2 - t > 0, \quad x < 0. \quad (2.21)$$

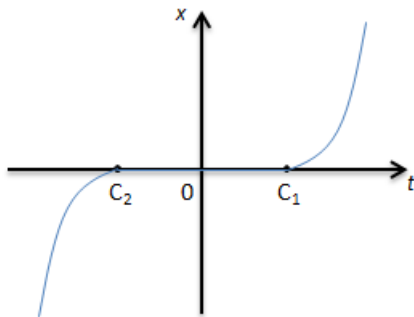
Любое решение $x_2(t)$ (2.21) может быть продолжено на промежуток $(-\infty, C_2]$. Производная слева решения в точке $t = C_2$ равна нулю. Составим непрерывно дифференцируемую функцию

$$x(t) = \begin{cases} x_2(t), & t \in (-\infty, C_2], \\ 0, & t \in (C_1, C_2), \\ x_1(t), & t \in [C_1, +\infty). \end{cases}$$

Она является решением уравнения (2.13), которое называется составным (или композиционным). Отсюда следует, что любое решение $x_2(t)$ (2.21) может быть продолжено вправо на весь интервал $(-\infty, +\infty)$ бесконечным числом способов. Любое решение $x_1(t)$ уравнения (2.18) также может быть продолжено влево на весь интервал $(-\infty, +\infty)$ бесконечным числом способов.

Если взять точку (t_0, x_0) , $x_0 < 0$, то через нее проходит бесконечно много (континуум) интегральных кривых в $\mathbb{R}^2$. В достаточно малой ее окрестности через нее проходит единственная интегральная кривая, продолжение которой в полуплоскость $x > 0$ будет неединственным. Это связано с тем,

что в любой сколь угодно малой окрестности произвольной точки $(t_0, 0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, через нее проходит бесконечно много интегральных кривых и единственность решения задачи Коши нарушается. Ответ: $\alpha \in (0, 1]$. $\diamond$



Пример 2.3.2. [2]. Доказать, что решение уравнения

$$x' = t^3 - x^3, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.22)$$

с произвольным начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.23)$$

- 1) может быть продолжено на промежуток $[t_0, +\infty)$ при любом t_0 ;
- 2) но не каждое решение задачи Коши может быть продолжено на промежуток $(-\infty, t_0]$.

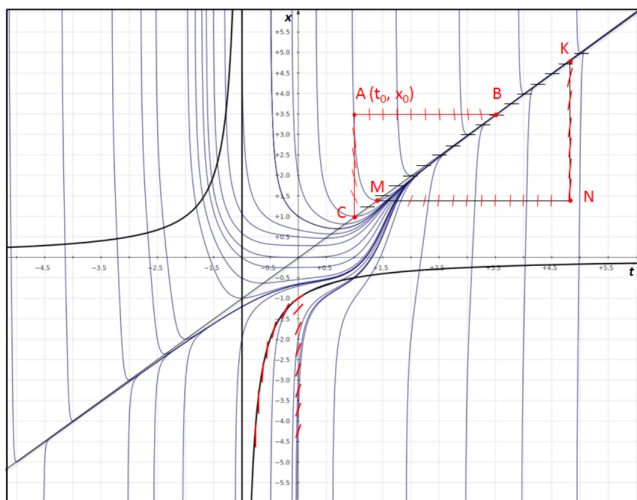
Решение

Так как правая часть уравнения (2.22) удовлетворяет в любой $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ всем условиям теоремы существования и единственности, то через любую точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ проходит единственная интегральная кривая. Данное уравнение не интегрируется в конечном виде. Поэтому при его изучении большую роль играют теоремы продолжения и качественный анализ поведения интегральных кривых.

1. Покажем сначала, что любое решение задачи Коши может быть продолжено вправо на промежуток $[t_0, +\infty)$. Обозначим через R_- область, в которой $t - x < 0$, а через R_+ — область, где $t - x > 0$. В R_-

производная решения уравнения (2.22) $x' < 0$, а в R_+ , естественно, $x' > 0$. Пусть $(t_0, x_0) \in R_-$. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором точка с координатами (t_0, x_0) обозначена A , точки B и C лежат на прямой $x = t$, а стороны $AB \parallel Ot$ и $AC \parallel Ox$. На отрезках AB и AC изображен наклон пересекающих их интегральных кривых. В силу основной теоремы решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) существует, и интегральная кривая, выходящая из точки A , имеет отрицательный наклон. При возрастании t она не может пересечь стороны треугольника AB и AC , так как значения функции $f(t, x)$ конечны в точках треугольника ABC , а значит, конечны значения производной $\varphi'(t)$. Поэтому согласно теореме **продолжения** она может достигнуть границы области ABC , только пересекая отрезок BC . Точку пересечения обозначим M . Рассмотрим далее $\triangle MNK$, в котором точка $N \in R_+$, точка K на прямой $x = t$, причем $MN \parallel Ot$, $NK \parallel Ox$, а точка N выбрана произвольно. Наклон интегральных кривых, пересекающих стороны MN и NK , изображен на рисунке ниже. В R_+ $x' > 0$. Вследствие этого интегральная кривая, выходящая из точки M , с возрастанием t может выйти на границу области MNK , только достигнув отрезка NK . Согласно теореме **продолжения** в силу произвольности выбора точки N решение задачи Коши может быть продолжено вплоть до $t = +\infty$.

Случай, когда $(t_0, x_0) \in R_+$, доказывается аналогично.



2. Возьмем точку $(t_0, x_0) \in R_-$ и продолжим решение задачи Коши влево. Произведем в уравнении (2.22) замену $t = -\tau$ и рассмотрим уравнение $\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{\tau^3 + y^3}$ с начальными данными (τ_0, x_0) , $x_0 + \tau_0 > 0$. В полуплоскости $x + \tau > 0$ производная $x'_\tau > 0$. Следовательно, с ростом τ растет и x . Справедлива оценка $\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\tau^3 + x^3} \leq \frac{1}{\tau_0^3 + x^3}$, $\tau \geq \tau_0$. Отсюда получаем $\tau - \tau_0 \leq \int_{x_0}^x \frac{dz}{\tau_0^3 + z^3}$. Так как интеграл при $x \rightarrow +\infty$ сходится, то величина $\tau - \tau_0$ при любом поведении интегральной кривой ограничена. Таким образом, решение задачи Коши не может быть продолжено на весь промежуток $(-\infty, x_0]$. Возьмём теперь точку $(t_0, x_0) \in R_+$. Ниже мы выберем её таким образом, чтобы решение задачи Коши нельзя было продолжить на промежуток $(-\infty, t_0]$.

Рассмотрим функцию $x = -\frac{1}{t+1}$, $t > -1$, графиком которой является нижняя ветвь гиперболы, сдвинутая влево вдоль оси Ot на 1. Её производная равна $x' = \frac{1}{(t+1)^2}$. Угловым коэффициентом касательных к интегральным кривым уравнения (2.22) в точках графика функции $x(t)$ равен $x' = t^3 + \left(\frac{1}{t+1}\right)^3$. При этом, как нетрудно видеть, для $t \in (-1, 0]$, $x' > 0$ на указанном промежутке. Для $t \in (-1, 0]$ имеем

$$\frac{1}{(t+1)^2} \leq t^3 + \frac{1}{(t+1)^3} \iff t^2 - \frac{1}{(t+1)^3} \leq 0 \iff t^2(t+1)^3 \leq 1.$$

Так как в последнем неравенстве оба сомножителя меньше единицы, то угол наклона касательных к интегральным кривым в точках графика функции $x(t)$ больше, чем угол наклона касательных к самому графику функции $x(t)$. Следовательно, интегральные кривые, выходящие из точек $(0, x_0)$, $x_0 < -1$, при $t \in (-1, 0]$ будут лежать ниже графика функции $x(t)$, проходящего через точку $(0, -1)$. Интегральная кривая, выходящая из точки $(0, -1)$, также располагается ниже графика функции $x(t)$. Поэтому интегральные кривые не могут пересечь её график, и, следовательно, они не могут быть продолжены влево за точку $t = -1$. $\diamond$

2.4. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной

Рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка неразрешенное относительно производной

$$F(t, x, x') = 0. \quad (2.24)$$

Положим $p = x'$ и предположим, что функция $F(t, x, p)$ определена в области $G \subseteq \mathbb{R}_{t,x,p}^3$ и $F \in \mathbf{C}^1(G)$, $|\nabla(F)| \neq 0$. Определим множество $S = \{(t, x, p) \in G : F(t, x, p) = 0\}$. Если оно не пусто, то S — гладкая поверхность, заданная неявно.

Как мы уже указывали в разделе 1.3, каждому решению $\varphi(t), t \in J$, в пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$ отвечает кривая $\Gamma = \{(t, x) : x = \varphi(t), p = \varphi'(t), t \in J\}$. Она была названа интегральной кривой в $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$ и принадлежит поверхности S : $\Gamma \subset S$. Но не всякая гладкая кривая, принадлежащая поверхности S , является интегральной кривой в $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$, т.к. в каждой точке интегральной кривой должно выполняться соотношение $dx - p dt = 0$. Было также показано, что если некоторая гладкая кривая на S удовлетворяет данному соотношению, то она — интегральная кривая. Проекция Γ на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$, обозначенная γ , является интегральной кривой уравнения (2.24) в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$.

Возьмём точку (t_0, x_0) в $\mathbb{R}_{t,x}^2$ и рассмотрим в этой точке уравнение $F(t_0, x_0, p) = 0$ относительно p . Пусть мы имеем в результате его решения k различных значений $p_i, i = \overline{1, k}$. Эти значения p_i называются допустимыми. В плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$ через точку (t_0, x_0) проходит k различных интегральных кривых со значениями производных, равными p_i . Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим простой пример:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 1, \\ p_2 = -1. \end{cases}$$

Значит, для любой точки (t_0, x_0) в $\mathbb{R}_{t,x}^2$ допустимыми значениями будут $p_1 = 1$ и $p_2 = -1$. Покажем, что через неё проходит две интегральные кривые с различными значениями производной. Для этого решим уравнение

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dx}{dt} = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t + C_1, \\ x_2 = -t + C_2. \end{cases}$$

Таким образом, через любую точку (t_0, x_0) в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$ проходят две интегральные кривые. Чтобы выделить какую-либо из них, нужно задать либо значение производной $x'(t_0) = 1$, либо $x'(t_0) = -1$.

Рассмотрим теперь интегральные кривые Γ_1 и Γ_2 в пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$, соответствующие интегральным кривым $x_1 = t + C_1$ и $x_2 = -t + C_2$ в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$. Интегральные кривые $\Gamma_1 = \{(t, x) : x_1 = t + C_1, p_1 = 1; t, C_1 \in \mathbb{R}\}$ лежат в плоскости $p_1 = 1$, а интегральные

кривые $\Gamma_2 = \{(t, x) : x_1 = -t + C_2, p_2 = -1; t, C_2 \in \mathbb{R}\}$ — в плоскости $p_2 = -1$. Мы получили, что интегральные кривые Γ_1 и Γ_2 в пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$ лежат в различных плоскостях.

Таким образом, чтобы выделить единственную интегральную кривую, кроме начальных данных (t_0, x_0) необходимо задать ещё значение p_0 , являющееся решением уравнения $F(t_0, x_0, p_0) = 0$. Поэтому задача Коши для уравнения, неразрешенного относительно производной, должна ставиться следующим образом.

Задача Коши. Пусть задана точка $(t_0, x_0, p_0) \in G$ и в этой точке $F(t_0, x_0, p_0) = 0$. Требуется найти решение $\varphi(t), t \in J$ уравнения (2.24) такое, что

$$\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = p_0. \quad (2.25)$$

Ещё раз обратим внимание, что значение p_0 не является произвольным, а находится из уравнения $F(t_0, x_0, p_0) = 0$.

Теорема 2.1. Если $F(t, x, p) \in C^1(G)$ и в некоторой точке $(t_0, x_0, p_0) \in G$ выполняются соотношения

$$F(t_0, x_0, p_0) = 0 \text{ и } \frac{\partial F}{\partial p}(t_0, x_0, p_0) \neq 0, \quad (2.26)$$

то решение задачи Коши (2.24), (2.25) существует и единственно.

Доказательство. ► Согласно теореме о неявной функции, при условиях $F(t, x, p) \in C^1(G)$ и (2.26) существуют такие окрестности $U(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_{t,x}^2$ и $U(p_0)$ точек (t_0, x_0) и p_0 соответственно, что для любой точки $(t, x) \in U(t_0, x_0)$ уравнение $F(t, x, p) = 0$ имеет единственное решение $p = f(t, x) \in U(p_0)$, $p_0 = f(t_0, x_0)$. При этом $f(t, x) \in C^1(U)$. Отсюда получаем задачу Коши для уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной:

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0, (t, x) \in U(t_0, x_0), f(t, x) \in C^1(U).$$

Возьмём прямоугольник $\Pi(t_0, x_0)$ с центром в точке (t_0, x_0) такой, что $\Pi(t_0, x_0) \subset U(t_0, x_0)$. Так как он является выпуклой областью, то функция $f(t, x)$, согласно лемме 2.1, удовлетворяет условию Липшица. В силу теоремы 2.1 (доказанной выше) задача Коши имеет единственное решение. ■

Точки поверхности S , в которых $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, называются особыми. Множество особых точек на поверхности S , для которых мы не можем применить теорему 2.1, описывается системой уравнений

$$\begin{cases} F(t, x, p) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p}(t, x, p) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Исключим p из системы (2.27), предполагая, что она совместная. В результате получим уравнение, связывающее между собой переменные t и x . Обозначим множество решений этого уравнения через $D(t, x) \subset \mathbb{R}_{t,x}^2$. Это множество называется *дискриминантным*. Если оно представляет собой кривую γ_D , то она называется *дискриминантной кривой*. Она может оказаться решением уравнения.

Определение 2.4.1. Решение $\varphi(t), t \in J$ уравнения (2.24) называется особым, если в любой окрестности каждой точки $(t_0, \varphi(t_0)), t_0 \in J$ его интегральной кривой проходит другая интегральная кривая, имеющая с ней в точке $(t_0, \varphi(t_0))$ общую касательную.

Теорема 2.2. Если $\varphi(t), t \in J$, — особое решение уравнения (2.24), то в каждой точке его интегральной кривой в пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$ справедлива система (2.27).

Доказательство. ► Если $\varphi(t), t \in J$ — особое решение, то $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$ для любого $t \in J$. Возьмём точку с координатами $(t_0, x_0 = \varphi(t_0), p_0 = \varphi'(t_0))$ на интегральной кривой в $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$, соответствующей особому решению. Такую интегральную кривую ниже будем называть *особой* и обозначать Γ_S . Предположим, что $\frac{\partial F}{\partial p}(t_0, x_0, p_0) \neq 0$, тогда по теореме 2.1 найдётся окрестность точки (t_0, x_0) на плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$, в которой через неё проходит единственная интегральная кривая. Противоречие. Следовательно, $\frac{\partial F}{\partial p}(t_0, x_0, p_0) = 0$. ■

Дадим также другое (эквивалентное) определение особого решения.

Определение 2.4.2. Решение $\varphi(t), t \in J$, называется особым решением уравнения (2.24), если в любой окрестности каждой его точки нарушается единственность решения задачи Коши (2.24), (2.25).

Пусть система (2.27) задаёт кривую Γ_D в пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$. Следуя [1], будем называть её *криминантой*. Понятно, что $\Gamma_D \subset S$.

Будем дополнительно предполагать, что $F \in \mathbf{C}^2(G)$. Согласно теореме о неявной функции криминанта Γ_D является гладкой кривой в пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$, если в каждой её точке ранг производной отображения $(t, x, p) \mapsto (F, \frac{\partial F}{\partial p})$ области G на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$ максимален и равен 2. Кривая γ_D является проекцией криминанты Γ_D на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$.

Возьмём точку $(t_0, x_0, p_0) \in \Gamma_D$. Тогда в ней $\frac{\partial F}{\partial p}(t_0, x_0, p_0) = 0$. Отсюда следует, что в этой точке касательная плоскость к S параллельна оси p , так как мы первоначально потребовали, чтобы поверхность S была гладкой.

Плоскость $x - x_0 = p_0(t - t_0)$, проходящая через точку (t_0, x_0, p_0) , принадлежащую криминанте Γ_D , называется *контактной* [1]. Касательная плоскость к криминанте в этой точке может либо совпадать с ней, либо пересекать её. Если эти плоскости совпадают, то существует особое решение. Через каждую точку кривой Γ_D проходят сама кривая Γ_D и некоторая интегральная кривая. Её проекция на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$ касается особого решения.

Теорема 2.2 утверждает, что особое решение принадлежит дискриминантному множеству. Обратное утверждение неверно. Ниже приведены примеры, показывающие, что дискриминантное множество может состоять из 1): точки, 2): особого решения, 3): точек возврата, 4): точек прикосновения, 5): частного решения.

Для этого в соответствии с нумерацией рассмотрим уравнения:

$$1) \quad tx' = x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Дискриминантное множество определяется из системы уравнений (2.27):

$$\begin{cases} tp - x = 0, \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow (t, x) = (0, 0) - \text{дискриминантное множество} - \text{точка}.$$

Нетрудно показать, интегрируя уравнение, что все решения, определённые при $t \in \mathbb{R}$, описываются функцией $x = Ct$. Здесь C — произвольная постоянная. Чтобы выделить интегральную кривую в точке $(0; 0)$, необходимо дополнительно задать в ней значение производной.

$$2) \quad x'^2 = 4x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что $x \geq 0$. Дискриминантное множество находится из системы (2.27):

$$\begin{cases} p^2 - 4x = 0 \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 0, p = 0$ — дискриминантное множество состоит из точек оси Ot .

Проинтегрируем уравнение, считая $x > 0$. Имеем

$$\begin{cases} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow x = (t + C_1)^2, (t + C_1) > 0; \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = -dt \Rightarrow x = (t + C_2)^2, (t + C_2) < 0. \end{cases}$$

Покажем, что решение $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, — особое. Обозначим

$$x_1(t) = 0, x_2(t) = (t + C)^2, t \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}.$$

График решения $x_2(t)$ проходит через точку $(t_0, 0)$ при значении постоянной $C = -t_0$. Покажем, что в каждой точке $(t_0, 0)$ оси Ot оба решения касаются друг друга. Действительно,

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_2(t_0) \Rightarrow 0 = (t - t_0)^2, \\ x'_1(t_0) = x'_2(t_0) \Rightarrow 0 = 2(t - t_0), \end{cases} \Rightarrow t = t_0.$$

Следовательно, решение $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, — особое. В пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$ интегральные кривые Γ и особая интегральная кривая Γ_S имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{t, x, p : x = (t + C)^2, p = 2(t + C), t \in \mathbb{R}\}, \\ \Gamma_S &= \{t, x, p : x = 0, p = 0, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Мы видим, что через каждую точку особой интегральной кривой Γ_S проходит интегральная кривая Γ , имея в ней касательный вектор с координатами $(1, 0, 2)$. В результате единственность решения задачи Коши (2.24), (2.25) нарушается. Проекцией особой интегральной кривой Γ_S на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$ будет кривая $\gamma_S = \{(t, x) : x(t) = 0, t \in \mathbb{R}\}$, которая является графиком особого решения уравнения (2.24) в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$.

Кривая, которая является проекцией интегральной кривой Γ на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$, касается графика особого решения γ_S . Кривая ①, расположенная на рис. 2.1 в верхней части поверхности $p^2 = 4x$, проектируется на интегральную кривую $x = (t + C)^2, (t + C) \leq 0$ в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$. Кривая ②, расположенная в нижней части поверхности,

проектируется в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$ на интегральную кривую $x = (t + C)^2$, $(t + C) \geq 0$. Заметим, что контактная плоскость $x = 0$ совпадает с касательной плоскостью, в которой лежит криванта. Интегральные кривые в пространстве $R_{t,x,p}^3$ в точках криванты касаются одновременно касательной и контактной плоскостей.

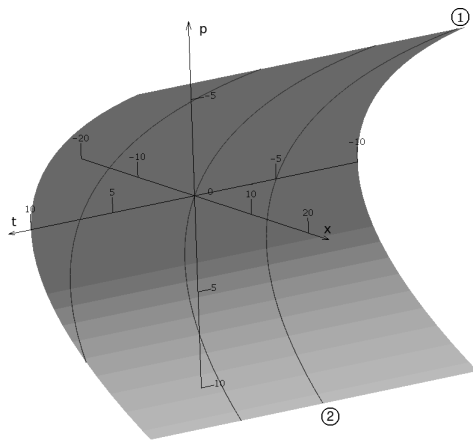


Рис. 2.1

$$3) x'^2 = \frac{9}{4}t, t \geq 0.$$

Определим дискриминантное множество. Из системы (2.27) имеем

$$\begin{cases} p^2 - \frac{9}{4}t = 0, \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = 0, p = 0 \Rightarrow t = 0, x \in \mathbb{R}$ — дискриминантное множество — ось Ox .

Интегрирование уравнения даёт

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{2}\sqrt{t}, \\ x' = -\frac{3}{2}\sqrt{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t^{\frac{3}{2}} + C_1, t \geq 0, C_1 \in \mathbb{R}; \\ x_2 = -t^{\frac{3}{2}} + C_2, t \geq 0, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Найденные решения $x_1(t), x_2(t)$ в точках $(0; x_0)$ имеют нулевую производную. Следовательно, дискриминантное множество — точки возврата интегральных кривых, расположенные на оси Ox . В них нарушается единственность решения задачи Коши.

Касательный к криванте вектор $(0, 1, 0)$ не лежит в контактной

плоскости $x = x_0$, и, следовательно, кривинанта пересекает её. Интегральные кривые пересекают кривинанту, имея направление оси Ox . В результате их проекции на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$ мы получаем точки возврата.

В следующем пункте 4) рассмотрен случай, когда в пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$ вдоль Γ_D пересекаются две поверхности. Предполагается, что каждая из них взаимно однозначно проектируется на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$. Кривая Γ_D при каждом проектировании будет отображаться на одну и ту же кривую $\gamma_D \subset \mathbb{R}_{t,x}^2$. Для простоты в качестве этих поверхностей взяты две плоскости. В этом случае Γ_D является прямой линией. В результате пересечения мы получим четыре поверхности, две из которых теряют гладкость в точках Γ_D .

$$4) x'^2 = 4t^2, t \in \mathbb{R}.$$

Определим дискриминантное множество:

$$\begin{cases} p^2 - 4t^2 = 0 \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = 0, p = 0 \Rightarrow t = 0, x \in \mathbb{R}$ — дискриминантное множество — ось Ox .

Проинтегрируем это уравнение

$$\begin{cases} x' = 2t, \\ x' = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t^2 + C_1, t \in R, C_1 \in \mathbb{R}; \\ x_2 = -t^2 + C_2, t \in R, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Возьмем точку A в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$ с координатами t_0, x_0 при условии $t_0 > 0, x_0 > 0$. Если $p_0 = 2t_0$, то через точку A локально проходит одна интегральная кривая. Однако во всей плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$ при условии $p_0 = 2t_0$ через неё проходят две интегральные кривые:

$$x_1(t) = t^2 + C_1; x_2(t) = \begin{cases} t^2 + C_1, t \geq 0, \\ -t^2 + C_1, t < 0. \end{cases}$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная.

Через точку A , расположенную на оси Ox , проходит (и локально, и глобально) четыре интегральные кривые (построить их самим). В этом случае такие точки называют *точками прикосновения*. В них нарушается единственность решения задачи Коши.

Обозначим через $\Pi_1 = S_1 \cup \Gamma \cup S_3$ плоскость $p = 2t$, а через $\Pi_2 = S_2 \cup \Gamma \cup S_4$ — плоскость $p = -2t$. Здесь $S_i, i = \overline{1,4}$ являются полуплоскостями. Интегральными кривыми в плоскости Π_1 будут

$\Gamma_1 = \{(t, x, p) : x = t^2 + C, p = 2t, t \in \mathbb{R}\}$, а в плоскости Π_2 — кривые $\Gamma_2 = \{(t, x, p) : x = -t^2 + C, p = -2t, t \in \mathbb{R}\}$. Кривинантой является ось Ox : $\Gamma_D = \{(t, x, p) : t = 0, p = 0, x \in \mathbb{R}\}$. Она является линией пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 . В точках кривой Γ_D имеем $|\nabla(F)| = 0$. Контактная плоскость имеет вид: $x = x_0$. Интегральные кривые Γ_1 и Γ_2 пересекают кривинанту Γ_D под прямым углом, касаясь контактной плоскости.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}_{t,x,p}^3$ кривые

$$\Gamma_3 = \Gamma_1(t \geq 0) \cup \Gamma_2(t \leq 0) \text{ и } \Gamma_4 = \Gamma_1(t \leq 0) \cup \Gamma_2(t \geq 0).$$

Кривые Γ_3 и Γ_4 лежат на поверхностях $S_1 \cup \Gamma_D \cup S_2$ и $S_3 \cup \Gamma_D \cup S_4$ и теряют гладкость в точках Γ_D . Проекция кривых $\Gamma_i, i = 3, 4$ на плоскость $\mathbb{R}_{t,x}^2$ дают интегральные кривые, проходящие через точки оси Ox , касаясь друг друга. Как уже отмечалось выше, через точку $(0, x_0)$ в плоскости $\mathbb{R}_{t,x}^2$ проходят четыре касающиеся друг друга интегральные кривые уравнения.

В пункте 5) кривая Γ_D является линией пересечения двух гладких поверхностей S_1 и S_2 , имеющих общую касательную плоскость в её точках. Поверхность $S = S_1 \cup \Gamma \cup S_2$ теряет гладкость на Γ_D .

$$5) x'^2 = 4x^3, t \in \mathbb{R}.$$

Определим дискриминантное множество

$$\begin{cases} p^2 - 4x^3 = 0, \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 0, p = 0$ — дискриминантным множеством является ось Ot .

Нетрудно видеть, что $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ — решение уравнения. Интегрируя его, считая $x \neq 0$, получим семейство решений $x(t) = \frac{1}{(t+C)^2}$. Отсюда видно, что $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ — частное решение.

На практике при решении уравнения (2.24) необходимо произвести следующие действия:

- 1) найти все решения уравнения;
- 2) определить дискриминантное множество;
- 3) проверить, входят ли какие-либо решения уравнения в дискриминантное множество;
- 4) если да, то проверить, являются ли они особыми;
- 5) изобразить графики решений.

В разделе 1.3 было рассмотрено уравнение Клеро:

$$x = tp + \psi(p), p \in (\alpha, \beta).$$

Функции

$$x = Ct + \psi(C), \quad C - \text{постоянные}; \quad (2.28)$$

$$x = -p\psi'(p) + \psi(p), \quad t = -\psi'(p) \quad (2.29)$$

являются его решениями. Покажем, что если $\psi(p)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\psi''(p) \neq 0$, то решение (2.29) является особым. Предположим, что $\psi'' > 0$. Тогда уравнение $t = -\psi'(p)$ локально разрешимо. В результате решения имеем $p = p(t)$ и можем рассматривать решение как функцию t : $x = x(p(t))$. Отсюда получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dp}\right)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} = \frac{-\psi'(p) - \psi''(p)p + \psi'(p)}{-\psi''(p)} = p,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dp}} = \frac{1}{-\psi''(p)} < 0.$$

Значит, функция $x = x(p(t))$, описывающая решение (2.29), выпукла вверх. При $t = t_0$ функция $p = p(t)$ принимает значение: $p(t_0) = p_0$. Обозначим через $x_1(t)$ функцию (2.28), а через $x_2(t)$ – (2.29). Покажем, что в каждой точке $(t_0, x(p_0))$, $p_0 \in (\alpha, \beta)$, происходит касание графиков функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Так как $\frac{dx_2}{dt}(t_0) = p_0$ и $t_0 = -\psi'(p_0)$, то условия касания принимают вид

$$\begin{cases} Ct_0 + \psi(C) = t_0 p_0 + \psi(p_0), \\ C = p_0. \end{cases}$$

Мы получили тождество, которое показывает, что прямые (2.28) в каждой точке $(t_0, x(p_0))$, $p_0 \in (\alpha, \beta)$, касаются графика решения (2.29). Следовательно, решение (2.29) особое, а среди решений уравнения Клеро имеются составные.

Сформулируем без доказательства условия, выполнение которых является достаточным, чтобы решение уравнения (2.24) было особым.

Определение 2.4.3. Пусть интегральная кривая Γ описывается параметрическими уравнениями $t = \phi(p), x = \psi(p)$. Если правые части этих уравнений являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, то кривая Γ называется интегральной кривой класса 2.

Теорема 2.3. Если параметрические уравнения

$$t = \phi(p), x = \psi(p),$$

описывающие кривую Γ класса 2, удовлетворяют условиям

$$F(t, x, p) = 0, F_p(t, x, p) = 0, F_t(t, x, p) + pF_x(t, x, p) = 0, F_x(t, x, p) \neq 0,$$

то кривая Γ является особой интегральной кривой уравнения (2.24).

Теорему можно использовать для проверки, является ли решение особым или нет. Применим теорему к уравнению пункта 2) и уравнению Клеро.

1. В пункте 2) решение $x(t) = 0$ является дискриминантной кривой, для которой $p = 0$. В её точках для двух последних уравнений получаем $F_t + pF_x = 0, F_x = -1$. Следовательно, решение $x(t) = 0$ является особым.
2. Рассмотрим решение уравнения Клеро: $t = -\psi'(p), x = -p\psi'(p) + \psi(p)$. В его точках для двух последних уравнений будем иметь $F_x = 1, F_t(t, x, p) + pF_x(t, x, p) = -p + p = 0$. Значит, это решение является особым. Из монотонности функции $t(p)$ вытекает требование $\psi''(p) \neq 0$.

2.5. Зависимость решений от начальных данных и параметров

Если правая часть системы дифференциальных уравнений зависит от параметров, то возникает вопрос: как изменяется решение задачи Коши при малом изменении параметров и начальных данных. Обозначив через t_0, x_0 — начальные данные, а через μ — параметр, рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x, x(t_0, t_0, x_0, \mu) = x_0.$$

Её решение имеет вид

$$x(t, t_0, x_0, \mu) = x_0 e^{\mu(t-t_0)}, \quad -\infty < t, t_0, x_0, \mu < \infty.$$

Мы видим, что на любом отрезке $[a, b]$ малое изменение параметра μ и начальных данных t_0, x_0 приводит к малому изменению решения. Какие требования необходимо наложить на правую часть системы дифференциальных уравнений, чтобы это свойство решения заведомо выполнялось?

Если начальные данные $t_0, \vec{x}_0$ предполагаются фиксированными и изучается зависимость решения задачи Коши только от параметров, то её решение будет обозначаться $\vec{x} = \phi(t, \vec{\mu})$.

Рассмотрим задачу Коши и исследуем зависимость её решения от параметров:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu}), \quad \vec{x}(t_0, \vec{\mu}) = \vec{x}_0. \quad (2.30)$$

Здесь $\vec{f} = \text{colon}(f_1, \dots, f_n)$, $\vec{x} = \text{colon}(x_1, \dots, x_n)$, $\vec{\mu} = \text{colon}(\mu_1, \dots, \mu_k)$;

$$f_i(t, \vec{x}, \vec{\mu}) = f_i(t, x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_k), \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим через I_μ область в пространстве $\mathbb{R}_\mu^k$: $I_\mu = \{\vec{\mu} : \|\vec{\mu} - \vec{\mu}_\star\| < q\}$, где q — некоторое число, а $\vec{\mu}_\star$ — фиксированный вектор. Область определения функции $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ обозначим через

$$\Omega_\mu = I_\mu \times \Omega = \{t, \vec{x}, \vec{\mu} : (t, \vec{x}) \in \Omega, \vec{\mu} \in I_\mu\},$$

где область $\Omega \subset \mathbb{R}_{t, \vec{x}}^{n+1}$.

Будем предполагать, что

$$1. \quad \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu}) \in \mathbf{C}(\Omega_\mu); \quad (2.31)$$

$$2. \quad \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu}) \in \text{Lip}_{\vec{x}}(\overline{\Omega}_L). \quad (2.32)$$

Условие (2.32) означает, что функция $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{x}$ (равномерно по t и $\vec{\mu}$) в любой замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega}_L$ такой, что $\overline{\Omega}_L \subset \Omega_\mu$.

Возьмем произвольную точку $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$. Определим, как и ранее, через R цилиндр с центром в точке $(t_0, \vec{x}_0)$:

$$R = \{t, \vec{x} : |t - t_0| < a, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b, \overline{R} \subset \Omega\}.$$

Числа a и b выбираются произвольно, но так, чтобы $\bar{R} \subset \Omega$. Пусть область $J_\mu = \{\vec{\mu} : \|\vec{\mu} - \vec{\mu}_\star\| < r, r < q\}$. Ясно, что $\bar{J}_\mu \subset I_\mu$. На компакте $\bar{R} \times \bar{J}_\mu$ функция $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ достигает своей точной грани. Обозначим

$$\sup_{(t, \vec{x}, \vec{\mu}) \in \bar{R} \times \bar{J}_\mu} \|\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})\| = M, \quad h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\},$$

и рассмотрим цилиндр Q также с центром в точке $(t_0, \vec{x}_0)$:

$$Q = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| < h, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b, \bar{Q} \subseteq \bar{R}\}.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}_{t, \vec{x}, \vec{\mu}}^{n+k+1}$ область $V_\mu = Q \times J_\mu$. Нетрудно видеть, что $\bar{V}_\mu \subseteq \Omega_\mu$. Решение задачи Коши (2.30) так же, как и в лемме 2.3, является решением векторного интегрального уравнения в классе непрерывных функций:

$$\vec{x}(t, \vec{\mu}) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{x}(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu}) d\tau. \quad (2.33)$$

Для решения векторного интегрального уравнения (2.33) определим последовательные приближения следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_0(t, \vec{\mu}) &= \vec{x}_0, \\ &\dots \\ \vec{\phi}_n(t, \vec{\mu}) &= \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\phi}_{n-1}(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu}) d\tau, \quad |t - t_0| \leq h, \quad \vec{\mu} \in J_\mu, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Обозначим через $U_{t\mu}$ область: $U_{t\mu} = \{t, \vec{\mu} : |t - t_0| < h, \vec{\mu} \in J_\mu\}$.

Теорема 2.4. Пусть вектор-функция $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ в области Ω_μ удовлетворяет условиям (2.31), (2.32). Тогда для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$ найдётся такое $h > 0$, что решение задачи Коши (2.30) $\vec{\phi}(t, \vec{\mu})$ является непрерывной функцией при $|t - t_0| \leq h, \vec{\mu} \in J_\mu$ ($\vec{\phi}(t, \vec{\mu}) \in C(\bar{U}_{t\mu})$).

Доказательство. ► Возьмём произвольную точку $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$ и цилиндр Q с центром в этой точке. Для доказательства теоремы 2.4 построим решение интегрального уравнения (2.33) в замкнутой области $\bar{V}_\mu = \bar{Q} \times \bar{J}_\mu$, используя последовательные приближения (2.34).

График функции $\vec{\phi}_0(t, \vec{\mu}) = \vec{x}_0$ не выходит из замкнутой области $\bar{V}_\mu$. Рассмотрим функцию $\vec{\phi}_1(t, \vec{\mu})$ и произведем оценку

$$\|\vec{\phi}_1 - \vec{x}_0\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\vec{f}(t, \vec{\phi}_0(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu})\| d\tau \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b. \quad (2.35)$$

Таким образом, $\vec{\phi}_1 \in \bar{V}_\mu$. Нетрудно по индукции доказать, что $\vec{\phi}_n(t, \vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$ для любого $n \geq 2$. Действительно, предположим, что $\vec{\phi}_{n-1}(t, \vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$. Тогда

$$\|\vec{\phi}_n - \vec{x}_0\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\vec{f}(t, \vec{\phi}_{n-1}(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu})\| d\tau \right| \leq Mh \leq b \quad (2.36)$$

и $\vec{\phi}_n(t, \vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$. Из непрерывности функции $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ также следует, что все функции последовательных приближений $\vec{\phi}_n(t, \vec{\mu})$ (2.34) являются непрерывными в замкнутой области $\bar{V}_\mu$.

Покажем, что последовательность $\{\vec{\phi}_n(t, \vec{\mu})\}, n = 0, 1, 2, \dots$ сходится равномерно при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим ряд

$$\vec{\phi}_0 + (\vec{\phi}_1 - \vec{\phi}_0) + \dots + (\vec{\phi}_n - \vec{\phi}_{n-1}) + \dots \quad (2.37)$$

Так как $\vec{S}_n = \vec{\phi}_n$, то равномерная сходимость последовательности $\{\vec{\phi}_n\}_{n=0}^\infty$ эквивалентна сходимости ряда (2.37). Оценим его члены. Так как функция $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ удовлетворяет условию Липшица (2.32) в области $\bar{V}_\mu$, то существует постоянная L такая, что для любых точек $(t, \vec{x}_1, \vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$ и $(t, \vec{x}_2, \vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$ справедливо неравенство

$$\|\vec{f}(t, \vec{x}_2, \vec{\mu}) - \vec{f}(t, \vec{x}_1, \vec{\mu})\| \leq L\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|.$$

Отсюда и из оценки (2.35) имеем

$$\|\vec{\phi}_2 - \vec{\phi}_1\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\vec{f}(t, \vec{\phi}_1(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu}) - \vec{f}(t, \vec{\phi}_0(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu})\| d\tau \right| \leq LM \frac{|t - t_0|^2}{2}.$$

Далее, используя метод математической индукции, нетрудно получить оценки, справедливые в замкнутой области $\bar{V}_\mu$:

$$\|\vec{\phi}_n - \vec{\phi}_{n-1}\| \leq ML^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

Из них следует, что функциональный ряд (2.37) мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$\|\vec{\phi}_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!}.$$

Так как $\vec{S}_n = \vec{\phi}_n$, то согласно теореме Вейерштрасса последовательность $\{\vec{\phi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в замкнутой области $\bar{V}_\mu$ равномерно сходится при $n \rightarrow \infty$ к предельной функции:

$$\vec{\phi}_n(t, \vec{\mu}) \Rightarrow \vec{\phi}(t, \vec{\mu}).$$

Предельный переход при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве (2.36)

$$\|\vec{\phi}_n(t, \vec{\mu}) - \vec{x}_0\| \leq b,$$

показывает, что $\vec{\phi}(t, \vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$. Из известной теоремы математического анализа вытекает, что $\vec{\phi}(t, \vec{\mu}) \in \mathbf{C}(\bar{U}_{t\mu})$. Осталось доказать, что $\vec{\phi}(t, \vec{\mu})$ является решением векторного интегрального уравнения (2.33). Для этого произведем оценку

$$\left\| \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\phi}(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu}) d\tau - \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\phi}_n(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu}) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\phi}(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu}) - \vec{f}(\tau, \vec{\phi}_n(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu}) \right\| d\tau \right| \leq hL \sup_{(t, \vec{x}, \vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu} \|\vec{\phi} - \vec{\phi}_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

так как последовательность $\{\vec{\phi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится равномерно. Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$ в (2.34), получим, что предельная функция $\vec{\phi}(t, \vec{\mu})$ удовлетворяет векторному интегральному уравнению. Из основной теоремы 2.1 следует, что найденное решение единственно. ■

Исследование зависимости решения ЗК (2.30) от начальных данных $t_0, \vec{x}_0$ можно свести к задаче об изучении зависимости решения от

параметров, входящих только в правую часть некоторой новой системы. Для этого надо произвести замену переменных в уравнении (2.30)

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}, t = t_0 + \tau.$$

В результате получим новую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{y}}{d\tau} &= \vec{\Phi}(\tau, \vec{y}, \vec{\mu}, t_0, \vec{x}_0), \quad \vec{y}(0, t_0, \vec{x}_0, \vec{\mu}) = \vec{0}, \\ \vec{\Phi}(\tau, \vec{y}, \vec{\mu}, t_0, \vec{x}_0) &\equiv \vec{f}(t_0 + \tau, \vec{x}_0 + \vec{y}, \vec{\mu}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

В задаче Коши (2.39) начальные данные $t_0, \vec{x}_0$ теперь играют роль параметров. В результате мы получили задачу Коши, исследованную выше.

Приведём без доказательства теорему о дифференцируемости найденного в теореме 2.4 решения.

Теорема 2.5. Пусть выполняются условия теоремы 2.4 и $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \mu_j} \in C(\overline{V}_\mu)$, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}$. Тогда определенное в теореме 2.4 решение $\vec{\phi}(t, \vec{\mu}) \in C^1(\overline{U}_{t\mu})$. Кроме того, смешанные производные $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \mu_j}$, $j = \overline{1, k}$, непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования.

Пусть в области Ω_μ выполнены условия теоремы 2.5 и $\vec{\phi}(t, \vec{\mu})$ – решение задачи Коши (2.30). Зафиксируем какое-либо значение $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0$, $\vec{\mu}_0 \in J_\mu$. Покажем, что можно найти производные $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}$, $j = \overline{1, k}$ при $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0$ не только определив решение нелинейной задачи Коши (2.39), но и решив систему линейных дифференциальных уравнений относительно каждой производной $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}(t, \vec{\mu}_0)$, $j = \overline{1, k}$. Действительно, рассмотрим тождество

$$\frac{d\vec{\phi}(t, \vec{\mu})}{dt} = \vec{f}(t, \vec{\phi}(t, \vec{\mu}), \vec{\mu}).$$

Продифференцируем его по μ_j , $j = \overline{1, k}$ и положим $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0$. Тогда

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j} \right) \right|_{\vec{\mu}=\vec{\mu}_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(t, \vec{\phi}(t, \vec{\mu}_0), \vec{\mu}_0) \frac{\partial \phi_i}{\partial \mu_j}(t, \vec{\mu}_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \mu_j}(t, \vec{\phi}(t, \vec{\mu}_0), \vec{\mu}_0).$$

Отсюда следует, что производные $\vec{z}_j = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}(t, \vec{\mu}_0)$ удовлетворяют линейным векторным уравнениям

$$\frac{d\vec{z}_j}{dt} = A(t)\vec{z}_j + \vec{b}_j, j = \overline{1, k},$$

где $A(t) = \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(t, \vec{\phi}(t, \vec{\mu}_0), \vec{\mu}_0) \right)$, $m = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n}$, $\vec{b}_j(t) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \mu_j} \left(t, \vec{\phi} \times \right.$
 $\left. \times (t, \vec{\mu}_0), \vec{\mu}_0 \right)$, $j = \overline{1, k}$. Поскольку $\vec{\phi}(t_0, \vec{\mu}) = \vec{x}_0$ при любом $\vec{\mu} \in J_\mu$, то

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}(t_0, \vec{\mu}_0) = \vec{0}.$$

Следовательно, для отыскания производной $\vec{z}_j = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}(t, \vec{\mu}_0)$ нужно решить задачу Коши:

$$\frac{d\vec{z}_j}{dt} = A(t)\vec{z}_j + \vec{b}_j, \quad \vec{z}_j(t_0, \vec{\mu}_0) = \vec{0}. \quad (2.40)$$

Система уравнений (2.40) называется *системой уравнений в вариациях*. Если обозначить $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{\mu}} = Z$, где

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mu_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial \mu_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial \mu_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial \mu_k} \end{pmatrix},$$

то уравнение в вариациях в матричной форме имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} Z + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\mu}}, \\ Z(t_0, \vec{\mu}_0) = (0)_{n \times k}. \end{cases}$$

Уравнение в вариациях получено в результате формального дифференцирования исходной задачи (2.30) по параметрам. Теорема 2.5 позволяет дать строгое обоснование этой операции. Оно приведено в [7, 8]. Аналогично находятся уравнения в вариациях по начальным данным.

Пример 2.5.1. ([14], 1066)

Найти производную по начальному данному x_0 при $x_0 = 0$ от решения следующей задачи Коши:

$$x' = x + x^2 + tx^3, \quad x(2) = x_0. \quad (2.41)$$

Решение

1) Первый способ.

Отметим сразу, что при $x_0 = 0$ единственным решением задачи

Коши (2.41) будет функция $x(t) = 0$. С помощью подстановки, указанной в параграфе выше, сведём задачу Коши (2.41) к новой, подобной (2.39), в которой параметры входят только в правую часть уравнения. Для этого произведем замену $t = 2 + \tau$ ($t_0 = 2$), $x = x_0 + z(\tau, 2, x_0)$. В новых переменных задача Коши (2.41) станет следующей

$$z'_\tau = (x_0 + z) + (x_0 + z)^2 + (\tau + 2)(x_0 + z)^3 = (x_0 + z) Z_1, \quad (2.42)$$

$$z(0, 2, x_0) = 0,$$

где $Z_1 = 1 + (x_0 + z) + (\tau + 2)(x_0 + z)^2$. При $x_0 = 0$ единственным решением задачи Коши (2.42) будет функция $z(\tau, 2, 0) = 0$. Обозначим $\frac{\partial z}{\partial x_0}(\tau, 2, x_0) = u(\tau, 2, x_0)$ и продифференцируем по x_0 уравнение (2.42):

$$u'_\tau = (1 + u)Z_1 + (x_0 + z) \frac{\partial Z_1}{\partial x_0}, \quad u(0, 2, x_0) = 0.$$

Положим $x_0 = 0$. Тогда $x_0 + z = 0$ и для определения функции $u(\tau, 2, 0)$ получим задачу Коши:

$$u'_\tau = 1 + u, \quad u(0, 2, 0) = 0.$$

В результате её решения находим

$$u = -1 + Ce^\tau \Rightarrow C = 1, \quad u = -1 + e^\tau.$$

Отсюда имеем

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) \Big|_{x_0=0} = 1 + u(\tau, 2, 0) = 1 - 1 + e^\tau = e^\tau = e^{t-2}.$$

2) Второй способ.

Обозначим решение задачи Коши (2.41) через $x = \phi(t, 2, x_0)$. Здесь $t_0 = 2$. Как отмечалось выше, единственным решением задачи Коши при $x_0 = 0$ будет функция $\phi(t, 2, 0) \equiv 0$, $t \in J$. Продифференцируем уравнение и начальное условие (2.41) по x_0 и положим $x_0 = 0$. В результате для определения функции $u = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, 2, 0)$ получим задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = u, \quad u(2, 2, 0) = 1.$$

Её решение даёт $u = e^{t-2}$.

3) Третий способ.

На практике задачу Коши (2.41) часто решают следующим образом. Её решение представляют в виде разложения по малому параметру x_0 :

$$x = x_0\phi_1(t) + x_0^2\phi_2(t) + o(x_0^2), \quad \phi_1(2) = 1.$$

Затем это разложение подставляется в уравнение (2.41). В результате приравнивания членов при одинаковых степенях малого параметра x_0 для определения функции $\phi_1(t)$ получается задача Коши, решение которой даёт

$$\phi_1' = \phi_1, \quad \phi_1(2) = 1 \Rightarrow \phi_1(t) = e^{t-2}. \diamond$$

2.6. Уравнения n -го порядка, разрешенные относительно старшей производной. Задача Коши, теорема существования и единственности её решения

Предположим, что функция $f(t, \vec{z}) \in C(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Уравнение вида

$$x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)}), \quad (2.43)$$

в котором t — независимая переменная, $x(t)$ — неизвестная функция, а $x'(t), \dots, x^{(n)}(t)$ — её производные, называется уравнением n -го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Определение 2.6.1. Функция $x(t), t \in J$, называется решением уравнения (2.43) на интервале J , если

- 1) $x(t) \in C^n(J)$ для любого $t \in J$;
- 2) $(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in \Omega$ для любого $t \in J$;
- 3) $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ для любого $t \in J$.

Пусть $(t_0, x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}) \in \Omega$.

Задача Коши. Найти решение $\varphi(t), t \in J$, уравнения n -го порядка (2.43), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0', \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, t_0 \in J. \quad (2.44)$$

Уравнение (2.43) может быть приведено к системе уравнений с помощью замены:

$$z_1 = x, z_2 = x', \dots, z_n = x^{(n-1)}. \quad (2.45)$$

В результате для определения неизвестных функций $z_i(t), i = \overline{1, n}$ будем иметь систему уравнений [13]:

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ \dots \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = f(t, z_1, \dots, z_n). \end{cases} \quad (2.46)$$

Если $x = \varphi(t), t \in J$, — решение уравнения n -го порядка (2.43), то вектор-функция

$$\vec{z}(t) = \text{colon} \left(\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t) \right)$$

даёт решение соответствующей системы (2.46). Обратно, если $\vec{z}(t) = \text{colon} (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))$ — решение системы (2.46), то n раз непрерывно дифференцируемая функция $x = z_1(t)$ ($z_1^{(n)} = z_n'$) будет решением уравнения n -го порядка (2.43).

Из сказанного следует, что все утверждения, полученные для системы уравнений, могут быть перенесены на уравнение n -го порядка.

Начальные условия для системы (2.46) согласно соотношениям (2.45) и (2.44) принимают вид

$$\vec{z}(t_0) = \text{colon} \left(x_0, x_0', x_0'', \dots, x_0^{(n-1)} \right). \quad (2.47)$$

Теорема 2.6. Пусть $f(t, \vec{z}) \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f(t, \vec{z}) \in Lip_{\vec{z}}(\overline{\Omega}_L)$. Тогда найдется такое $\alpha > 0$, что решение задачи Коши (2.43), (2.44) существует и единственно на интервале $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$.

Доказательство. ► При условиях, наложенных на функцию $f(t, \vec{z})$, задача Коши (2.46), (2.47) имеет единственное решение согласно теореме 2.1. В силу произведенной замены (2.45) задача Коши (2.43), (2.44) эквивалентна задаче Коши (2.46), (2.47) для системы. Отсюда вытекает справедливость сформулированной выше теоремы 2.6. ■

Чтобы в дальнейшем при использовании этого утверждения не повторяться, оно будет кратко обозначаться следующим образом: ЗК (2.43), (2.44) $\Leftrightarrow$ ЗК (2.46), (2.47). Также будут обозначаться аналогичные утверждения для других уравнений и систем.

Глава 3

Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

3.1. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений

3.1.1. Основные определения, задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши

Определение 3.1.1. Система вида

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, \vec{x}) \equiv \sum_{i=1}^n p_{ki}(t)x_i + g_k(t), k = \overline{1, n}; t \in J,$$

называется нормальной линейной системой дифференциальных уравнений. Ниже предполагается, что $p_{ki}(t), g_k(t) \in \mathbf{C}(J); i, k = \overline{1, n}$.

Согласно теореме продолжения 2.4 каждое решение линейной системы может быть продолжено на весь промежуток J . Поэтому можно считать, что любое рассматриваемое решение определено на этом промежутке.

Определение 3.1.2. Непрерывно дифференцируемые функции $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t \in J$, называются решением линейной системы, если при подстановке их в уравнения системы последние обращаются в тождества при $t \in J$.

Линейную систему можно записать в векторно-матричной форме в виде одного уравнения

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = P(t)\vec{x} + \vec{g}(t), \quad (3.1)$$

где

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \cdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.1) называют как дифференциальным уравнением, имея в виду его векторную форму, так и системой дифференциальных уравнений согласно первоначальному определению.

Если $\vec{g}(t) \equiv \vec{0}, t \in J$, то система

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = P(t)\vec{x} \quad (3.2)$$

называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Ниже при формулировке задачи Коши предполагается, что $J = \langle a, b \rangle$.

Задача Коши. Найти решение $\vec{\varphi}(t), t \in J$ системы (3.1), удовлетворяющее начальному условию

$$\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0, \quad t_0 \in (a, b), \quad (3.3)$$

где $\vec{x}_0 = \text{colon}(x_{01}, \dots, x_{0n})$. Числа $t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}$ задаются произвольно.

Здесь мы ещё раз обращаем внимание на то, что точка t_0 является внутренней точкой промежутка J . В дальнейшем это всегда предполагается при постановке задачи Коши.

Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы проводится в случае, когда $J = [a, b]$.

Последовательные приближения решения задачи Коши на отрезке $[a, b]$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_0(t) &= \vec{x}_0, \\ &\dots, \\ \vec{\varphi}_{n+1}(t) &= \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t (P(\tau)\vec{\varphi}_n(\tau) + \vec{g}(\tau))d\tau, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заметим, что правая часть векторного уравнения (3.1) определена в замкнутой выпуклой области $\bar{\Omega} = [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Так как функции

$p_{ij}(t), g_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то они ограничены. Следовательно, производные $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| = |p_{ij}(t)|; i, j = \overline{1, n}$, где $f_i(t, \vec{x}) = p_{i1}(t)x_1 + \dots + p_{in}(t)x_n + g_i(t)$, также являются ограниченными. Согласно лемме 2.1 правая часть системы (3.1) удовлетворяет условию Липшица.

В отличие от общего случая последовательные приближения (3.4) определены для всех $t \in [a, b]$. Однако в силу неограниченности замкнутой области $\bar{\Omega}$ из непрерывности функции $\vec{f}(t, \vec{x})$ не следует её ограниченности. Поэтому при доказательстве существования решения задачи Коши (3.1), (3.3) мы не можем следовать схеме, которая была использована в общем случае выше [7, 8].

Теорема 3.1. Пусть функции $p_{ij}(t), g_i(t) \in C([a, b])$. Тогда решение задачи Коши (3.1), (3.3) существует на всем отрезке $[a, b]$ и единственно.

Доказательство. ► Функции $\vec{\varphi}_0(t), \vec{\varphi}_1(t)$ в (3.4) на отрезке $[a, b]$ непрерывны. Следовательно, их разность также непрерывна и $\|\vec{\varphi}_1(t) - \vec{\varphi}_0(t)\| \leq C$ (по теореме Вейерштрасса). Здесь C — некоторая постоянная. Далее, из (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \|\vec{\varphi}_2(t) - \vec{\varphi}_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_1(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau))] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \left\| [\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_1(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau))] \right\| d\tau \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|\vec{\varphi}_1(\tau) - \vec{\varphi}_0(\tau)\| d\tau \right| \leq LC|t - t_0| \leq LC(b - a). \end{aligned}$$

Используя метод математической индукции, находим аналогично для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|\vec{\varphi}_{n+1}(t) - \vec{\varphi}_n(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_{n-1}(\tau)) \right\| d\tau \right| \leq \\ &\leq CL^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq CL^n \frac{(b - a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Из найденных оценок вытекает, что ряд

$$\vec{\varphi}_0(t) + (\vec{\varphi}_1(t) - \vec{\varphi}_0(t)) + \dots + (\vec{\varphi}_{n+1}(t) - \vec{\varphi}_n(t)) + \dots \quad (3.5)$$

мажорируется на отрезке $[a, b]$ сходящимся (по признаку Даламбера) числовым рядом

$$\|\vec{\varphi}_0\| + C + LC(b-a) + \dots + CL^n \frac{(b-a)^n}{n!} + \dots$$

Согласно теореме Вейерштрасса ряд (3.5) сходится равномерно. Так как частичная сумма ряда $\vec{S}_n(t) = \vec{\varphi}_n(t)$, то последовательность $\{\vec{\varphi}_n(t)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует существование предельной функции $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}([a, b])$.

Покажем, что предельная функция $\vec{\varphi}(t)$ является решением задачи Коши (3.1), (3.3). Для этого произведем оценку

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [a, b]} \left\| \int_{t_0}^t [\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))] d\tau \right\| \leq \\ & \leq \sup_{t \in [a, b]} \left| \int_{t_0}^t \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) \right\| d\tau \right| \leq \\ & \leq L(b-a) \sup_{t \in [a, b]} \|\vec{\varphi}_n(t) - \vec{\varphi}(t)\|. \end{aligned}$$

Так как $\vec{\varphi}_n(t) \Rightarrow \vec{\varphi}(t), n \rightarrow \infty$ ($t \in [a, b]$), то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} \|\vec{\varphi}_n(t) - \vec{\varphi}(t)\| = 0$. Таким образом, мы получаем, что

$$\int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau)) d\tau \Rightarrow \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) d\tau, n \rightarrow \infty, t \in [a, b].$$

Следовательно, функция $\vec{\varphi}(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t [P(\tau)\vec{\varphi}(\tau) + \vec{g}(\tau)] d\tau,$$

а значит, и соответствующей задачи Коши. Единственность следует из **основной теоремы**. Теорема справедлива в случае любого промежутка $< a, b >$. ■

Следствие 3.1.1. *Единственным решением задачи Коши для однородной системы (3.2) с нулевым начальным условием (3.3) является функция $\vec{x}(t) = \vec{0}, t \in [a, b]$.*

Замечание 3.1.1. Отметим особенности теоремы: во-первых, начальные данные могут быть выбраны произвольным образом; во-вторых, решение задачи Коши существует сразу на всем отрезке $[a, b]$, на котором заданы непрерывные функции $p_{ij}(t), g_i(t); i, j = \overline{1, n}$. $\diamond$

3.1.2. Существование фундаментальной системы решений у линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Решения линейной однородной системы уравнений образуют линейное векторное пространство. Действительно, пусть $\vec{x}_i(t), t \in [a, b], i = \overline{1, m}$, — решения линейной однородной системы уравнений (3.2), тогда их любая линейная комбинация также будет решением. Нам необходимо определить размерность данного пространства и найти его базис. Ниже будет показано, что размерность пространства равна n , а базисом могут являться любые n линейно независимые решения системы.

Определение 3.1.3. Вектор-функции $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t), t \in J$, называются линейно независимыми на промежутке J , если равенство

$$C_1 \vec{x}_1(t) + \dots + C_n \vec{x}_n(t) = \vec{0}, \quad (3.6)$$

где $C_i, i = \overline{1, n}$, — постоянные, справедливо для любого $t \in J$ лишь тогда и только тогда, когда $C_i = 0, i = \overline{1, n}$.

Введем в рассмотрение определитель Вронского системы вектор-функций $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t \in J$:

$$W(t) \equiv W[\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Здесь $\vec{x}_k = \text{colon}(x_{k1}, \dots, x_{kn}), k = \overline{1, n}$.

Лемма 3.1. Если вектор-функции $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t), t \in J$, — линейно зависимые, то $W(t) \equiv 0, t \in J$.

Доказательство. ► Если функции $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t), t \in J$, линейно зависимые, то в равенстве (3.6) хотя бы одна постоянная отлична

от нуля. Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда

$$\vec{x}_1(t) = - \sum_{i=2}^n \frac{C_i}{C_1} \vec{x}_i(t)$$

Подставляя $\vec{x}_1(t)$ в (3.7), получим $W(t) \equiv 0, t \in J$. ■

Лемма 3.2. *Если вектор-функции $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t), t \in J$, — решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений (3.2), то следующие условия эквивалентны:*

- 1) $W(t) = 0$ для любого $t \in J$;
- 2) существует $t_0 \in J$ такое, что $W(t_0) = 0$;
- 3) решения $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ — линейно зависимые.

Доказательство. ► Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) является очевидной. Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим равенство (3.6) при $t = t_0$ как систему уравнений относительно постоянных $C_i, i = \overline{1, n}$. Так как $W(t_0) = 0$, то она имеет нетривиальное решение $C_i = \hat{C}_i, i = \overline{1, n}$. Составим функцию

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{C}_i \vec{x}_i(t).$$

Очевидно, что $\vec{x}(t)$ — решение. Так как $\vec{x}(t_0) = 0$, то из следствия к теореме 3.1 следует $\vec{x}(t) \equiv 0$. Значит, решения $\vec{x}_i(t), i = \overline{1, n}$, — линейно зависимые на промежутке J .

Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) следует из леммы 3.1. ■

Лемма 3.3. *Пусть $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t), t \in J$, — решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений (3.2). Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) решения $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ — линейно независимые;
- 2) $W(t) \neq 0$ для любого $t \in J$;
- 3) существует $t_0 \in J$ такой, что $W(t_0) \neq 0$.

Доказать лемму самим.

Теорема 3.2. *В предположении теоремы 3.1 любая линейная однородная система дифференциальных уравнений (3.2) имеет n линейно независимых решений.*

Доказательство. ► Выберем следующие начальные условия

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}_1(t_0) &= \text{colon}(1, 0, \dots, 0), \\ \vec{\varphi}_2(t_0) &= \text{colon}(0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ \vec{\varphi}_n(t_0) &= \text{colon}(0, 0, \dots, 1).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Так как при $t = t_0$ определитель Вронского $W(t_0) \neq 0$, то согласно лемме 3.3 решения задачи Коши с начальными условиями (3.8) являются линейно независимыми. ■

Определение 3.1.4. Любые n линейно независимые решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений называются фундаментальной системой решений (ФСР).

Было показано, что для любой линейной однородной системы (3.2) с непрерывными коэффициентами фундаментальная система решений существует. Количество ФСР у однородной системы уравнений бесконечно. Если начальные условия (3.8) выбрать такими, чтобы $W(t_0) \neq 0$, то получим другую фундаментальную систему решений.

3.1.3. Формула Лиувилля–Остроградского

Теорема 3.3. Пусть $\vec{x}_i(t) = \text{colon}(x_{i1}, \dots, x_{in})$, $t \in J$, $i = \overline{1, n}$, — решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений (3.2). Тогда для любых $t, t_0 \in J$ имеет место формула Лиувилля – Остроградского:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n p_{kk}(\tau) d\tau}.\tag{3.9}$$

Доказательство. ► Из (3.7) находим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW^T}{dt} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & \frac{dx_{1k}}{dt} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & \frac{dx_{nk}}{dt} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n W_k.$$

Согласно однородной системе уравнений (3.2) для функций x_{lk} , $l, k = \overline{1, n}$ имеем

$$\frac{dx_{lk}}{dt} = \sum_{i=1}^n p_{ki}x_{li}.$$

Подставляя в определитель W_k , получаем

$$\begin{aligned}
 W_k &= \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & \sum_{i=1}^n p_{ki} x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & \sum_{i=1}^n p_{ki} x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & p_{kk} x_{1k} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & p_{kk} x_{nk} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = p_{kk} W, \\
 \frac{dW}{dt} &= \sum_{k=1}^n p_{kk} W \Rightarrow W(t) = C e^{\int_0^t \sum_{k=1}^n p_{kk}(\tau) d\tau}.
 \end{aligned}$$

Из начальных условий находим: $C = W(t_0)$. ■

Следствие 3.3.1. Если $W(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in J$, то $W(t) = 0$ для любого $t \in J$. Если $W(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in J$, то $W(t) \neq 0$ для любого $t \in J$.

Замечание 3.1.2. Результат интегрирования уравнения для $W(t)$ можно представить в виде

$$W(t) = C e^{\int \sum_{k=1}^n p_{kk}(t) dt}. \diamond$$

Замечание 3.1.3. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t), \quad a_0 \neq 0, \quad t \in J. \quad (3.10)$$

Произведя замену $y = x'$, получим систему, являющуюся системой (2.46) при $n = 2$:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\frac{a_2}{a_0} x - \frac{a_1}{a_0} y - \frac{f(t)}{a_0}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Из системы (3.11) следует

$$\sum_{k=1}^n p_{kk} = -\frac{a_1}{a_0} \Rightarrow W(t) = C e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}. \diamond$$

3.1.4. Структура решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Теорема 3.4. Пусть $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t), t \in J$ — ФСР линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Тогда для любого её решения $\vec{x}(t), t \in J$, существует такой набор постоянных $C_i, i = \overline{1, n}$,

что

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t).$$

Доказательство. ► Возьмем какое-либо значение переменной $t_0 \in J$. Векторы $\vec{\varphi}_i(t_0)$ образуют базис, поэтому вектор $\vec{x}(t_0)$ может быть разложен по этому базису.

$$\vec{x}(t_0) = \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t_0).$$

Рассмотрим решение

$$\vec{x}_*(t) = \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t).$$

При $t = t_0$ по построению имеем $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_*(t_0)$. Тогда по теореме существования и единственности получаем $\vec{x}(t) = \vec{x}_*(t) = \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t)$ для любого $t \in J$. ■

Отсюда следует, что функция $\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t)$, где $C_i, i = \overline{1, n}$, — произвольные постоянные, является общим решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений: любое решение может быть представлено в таком виде и любая линейная комбинация функций $\sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t)$ также является решением. Отсюда вытекает, что размерность пространства решений линейной однородной системы (3.2) равна n .

Теорема 3.5. Пусть $\vec{X}(t), t \in J$, — какое-либо частное решение линейной неоднородной системы уравнений (3.1), а $\vec{\varphi}_i(t), i = \overline{1, n}$, — фундаментальная система решений соответствующей линейной однородной системы (3.2). Тогда для любого решения $\vec{x}(t), t \in J$, линейной неоднородной системы (3.1) существует такой набор постоянных, что

$$\vec{x}(t) = \vec{X}(t) + \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t).$$

Доказательство. ► Произведем замену $\vec{z}(t) = \vec{x}(t) - \vec{X}(t)$ в системе (3.1):

$$\frac{d\vec{z}}{dt} + \frac{d\vec{X}}{dt} = P\vec{z} + P\vec{X} + \vec{f}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{z}}{dt} = P\vec{z}.$$

Из предыдущей теоремы вытекает

$$\vec{z}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t) \Rightarrow \vec{x}(t) = \vec{X}(t) + \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t).$$

Таким образом, решение $x(t), t \in J$ неоднородной линейной системы уравнений (3.1) состоит из двух слагаемых, одно из которых является общим решением однородной системы, а другое – частным решением неоднородной системы. Определённая в теореме 3.5 функция $x(t), t \in J$ является общим решением неоднородной линейной системы уравнений (3.1). ■

3.1.5. Решение задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений методом вариации постоянных

Пусть $\vec{\varphi}_i(t), t \in J, i = \overline{1, n}$, — фундаментальная система решений однородной системы (3.2). Решим задачу Коши (3.1), (3.3). Матрица $\Phi(t)$, столбцами которой являются координаты вектор-функций $\vec{\varphi}_i(t)$, называется фундаментальной. Из теоремы 3.4 следует, что любое решение системы (3.2) можно представить в виде $\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C}$. Возьмём фундаментальную матрицу такой, чтобы $\Phi(t_0) = E$, где $t_0 \in J$. Будем искать решение неоднородной системы (3.1) в виде

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C}(t), \vec{C}(t) \in \mathbf{C}^1(J). \quad (3.12)$$

Подставляя функцию (3.12) в систему (3.1), получим

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}\vec{C}(t) + \Phi \frac{d\vec{C}}{dt} = P\Phi\vec{C}(t) + \Phi \frac{d\vec{C}}{dt} = P\Phi\vec{C}(t) + \vec{f}(t),$$

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \Phi^{-1}(t)\vec{f}(t) \Rightarrow \vec{C}(t) = \vec{C}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau.$$

Подставляя найденное значение $\vec{C}(t)$ в формулу (3.12), находим

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C}(t_0) + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau.$$

При $t = t_0$ имеем $\vec{x}(t_0) = \vec{C}(t_0) = \vec{x}_0$. В результате решение задачи Коши можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \vec{f}(\tau) d\tau.$$

Последняя формула носит название формулы Коши. Она была получена методом вариации постоянных.

3.2. Линейные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами

3.2.1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Уравнение вида

$$p_0(t)x^{(n)} + \dots + p_n(t)x = g(t), \quad p_0(t) \neq 0, \quad t \in J, \quad (3.13)$$

называется линейным уравнением n -го порядка. Ниже предполагается $p_i(t), g(t) \in \mathbf{C}(J), i = \overline{0, n}; p_0(t) \neq 0$.

Обозначим его левую часть через $L[x(t)]$. Тогда оно может быть записано в компактной форме $L[x(t)] = g(t)$. Если $g(t) \equiv 0$, то уравнение

$$L[x(t)] \equiv p_0(t)x^{(n)} + \dots + p_n(t)x = 0 \quad (3.14)$$

называется однородным. В противном случае – неоднородным. В случае уравнения (3.13) в соответствующей ему системе (2.46) будем иметь

$$f(t, \vec{z}) = -\frac{p_n}{p_0}z_1 - \dots - \frac{p_1}{p_0}z_n + \frac{g(t)}{p_0}. \quad (3.15)$$

В сформулированной ниже теореме использовано второе обозначение промежутка: $J = \langle a, b \rangle$. При этом считается, что $t_0 \in (a, b)$.

Теорема 3.6. *Если $p_i(t), g(t) \in \mathbf{C}(J), i = \overline{0, n}, p_0(t) \neq 0$, то решение задачи Коши (3.13), (2.44) существует сразу на всем промежутке J и единственно. При этом начальные данные $t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ могут быть выбраны произвольно.*

Доказательство. ► Доказательство следует из утверждения ЗК (3.13), (2.44) $\Leftrightarrow$ ЗК (2.46), (2.47) и теоремы 3.1. В системе (2.46) функция $f(t, \vec{z})$ описывается формулой (3.15). ■

Следствие 3.6.1. *Единственным решением линейного однородного уравнения (3.14) с нулевыми начальными условиями является функция $x(t) \equiv 0, t \in J$.*

3.2.2. Определитель Вронского.

Формула Лиувилля–Остроградского.

Фундаментальная система решений

Введём определитель Вронского для функций $x_i(t), i = \overline{1, n}, t \in J$,

$$W(t) \equiv W[x_1(t), \dots, x_n(t)] = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x'_1 & \cdots & x'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (3.16)$$

Определение 3.2.1. Функции $x_1(t), \dots, x_n(t), t \in J$, называются линейно независимыми на промежутке J , если равенство

$$\sum_{i=1}^n C_i x_i(t) = 0 \quad (C_i - \text{постоянные})$$

возможно для любого $t \in J$, если и только если $C_i = 0, i = \overline{1, n}$.

Лемма 3.4. *Если функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ линейно зависимы на промежутке J , то*

$$W[x_1(t), \dots, x_n(t)] \equiv 0, t \in J.$$

Обратное утверждение неверно! Действительно, достаточно взять функции

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0, \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ e^{-\frac{1}{t^2}}, & t < 0. \end{cases}$$

Доказать лемму самим.

Докажем формулу Лиувилля–Остроградского и теорему о существовании фундаментальной системы решений.

Для этого рассмотрим линейное однородное уравнение (3.14). В этом случае в соответствующей ему системе (2.46) функция $f(t, \vec{z}) = -\frac{p_n}{p_0}z_1 - \dots - \frac{p_1}{p_0}z_n$ и $\sum_{i=1}^n p_{ik} = -\frac{p_1}{p_0}$, $p_0(t) \neq 0$. Здесь использованы обозначения (2.45): $x = z_1, \dots, x^{(n-1)} = z_n$. Отсюда и из формулы (3.9) получим формулу Лиувилля–Остроградского для решений линейного однородного уравнения (3.14):

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \frac{p_1(\tau)}{p_0(\tau)} d\tau}, p_0(\tau) \neq 0. \quad (3.17)$$

Для уравнения второго порядка (3.10) она была получена ранее в подпараграфе 3.1.3. Из формулы Лиувилля–Остроградского следует:

- 1) Если существует t_0 такой, что $W(t_0) = 0$, то $W(t) = 0$ для любого $t \in J$;
- 2) Если существует t_0 такой, что $W(t_0) \neq 0$, то $W(t) \neq 0$ для любого $t \in J$.

Лемма 3.5. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t), t \in J$, – решения линейного однородного уравнения (3.14). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) функции $x_1(t), \dots, x_n(t), t \in J$, – линейно независимые;
- 2) $W(t) \neq 0, \forall t \in J$;
- 3) существует $t_0 \in J$ такой, что $W(t_0) \neq 0$.

Доказательство. ► Лемма 3.5 следует из леммы 3.3 согласно связи между уравнением (3.14) и системой (2.46), а также формулы Лиувилля–Остроградского (3.17). ■

Определение 3.2.2. Любые n линейно независимые решения линейного однородного уравнения (3.14) называются фундаментальной системой решений (ФСР).

Теорема 3.7. Для любого линейного однородного уравнения (3.14) с непрерывными коэффициентами и $p_0(t) \neq 0$ существует фундаментальная система решений.

Доказательство. ► Возьмем $t_0 \in J$. Из теоремы 3.6 следует, что существуют решения со следующими начальными условиями:

$$x_k^{(l-1)}(t_0) = \delta_{lk}, 1 \leq l, k \leq n.$$

Согласно лемме 3.5 построенные решения являются линейно независимыми и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений. Мы получим новую фундаментальную систему решений, если возьмём другие начальные данные при условии $W(t_0) \neq 0$. ■

3.2.3. Структура решений линейных уравнений n -го порядка

Теорема 3.8. Если $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), t \in J$, — фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (3.14), то для любого его решения $x(t), t \in J$, найдётся такой набор постоянных $C_i, i = \overline{1, n}$, что $x(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t)$.

Доказательство. ► Теорема 3.8 следует из теоремы 3.4 согласно связи между уравнением (3.14) и системой (2.46). Из неё вытекает, что линейное пространство, образованное решениями линейного однородного уравнения n -го порядка, имеет размерность n . В качестве базиса этого пространства можно взять любую фундаментальную систему решений. ■

Замечание 3.2.1. Функция $x(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t)$ является общим решением однородного уравнения (3.14).

Теорема 3.9. Пусть $X(t), t \in J$, — какое-нибудь частное решение линейного неоднородного уравнения (3.13), а $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$, — фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения. Тогда для любого решения $x(t), t \in J$, уравнения (3.13) существует такой набор постоянных $C_i, i = \overline{1, n}$, что $x(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t) + X(t)$.

Доказательство. ► Теорема 3.9 следует из теоремы 3.5 согласно связи между уравнением (3.13) и системой (2.46). Из неё вытекает, что функция $x(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t) + X(t)$ является общим решением неоднородного уравнения (3.13). ■

3.2.4. Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения

Пусть $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ — фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (3.14). Будем искать решение уравнения

(3.13) в виде $x(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)\varphi_i(t), t \in J, C_i(t) \in C^1(J), t \in J$. Рассмотрим соответствующую уравнению (3.13) систему (2.46) с $f(t, \vec{z}) = -\frac{p_n}{p_0}z_1 - \dots - \frac{p_1}{p_0}z_n + \frac{g(t)}{p_0}$.

Согласно обозначениям, принятым в системе (3.1), фундаментальная матрица Φ и вектор-функция $\vec{g}(t)$ соответствующей системы имеют вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \frac{g(t)}{p_0} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем систему уравнений для определения производных от функций $C_i(t), i = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} \Phi \frac{d\vec{C}}{dt} &= \vec{g}(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 C'_1(t) + \cdots + \varphi_n C'_n(t) = 0, \\ \varphi'_1 C'_1(t) + \cdots + \varphi'_n C'_n(t) = 0, \\ \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} C'_1(t) + \cdots + \varphi_n^{(n-1)} C'_n(t) = \frac{g(t)}{p_0}. \end{cases} \end{aligned}$$

Система разрешима, ибо $\det \Phi = W(t) \neq 0$. Определив $C'_i(t), i = \overline{1, n}$, нетрудно найти общее решение уравнения (3.13).

3.3. Линейные однородные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

3.3.1. Предварительные сведения

Ниже рассматривается линейное однородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, t \in (a, b) \quad (3.18)$$

Основные предположения: коэффициенты $q(t) \in \mathbf{C}(a, b), p(t) \in \mathbf{C}^1(a, b), (-\infty \leq a, b \leq +\infty)$.

Штурм - . С помощью непосредственного изучения уравнений второго порядка французский математик Штурм, живший в позапрошлом столетии, открыл, что поведение их решений имеет большое сходство с тригонометрическими и показательными функциями, и установил ряд

чрезвычайно важных свойств нулей решения [9], [12].

Ниже будут рассматриваться только нетривиальные решения.

Лемма 3.6. Пусть $x(t)$ — нетривиальное решение уравнения (3.18). Тогда множество нулей решения $x(t)$, содержащихся на любом отрезке $[t_1, t_2] \subset (a, b)$, — конечно.

Доказательство. ► Предположим противное, а именно: существует бесконечно много нулей решения $x(t)$ на отрезке $[t_1, t_2] \subset (a, b)$. Из ограниченного числового множества, содержащего бесконечно много элементов, можно выбрать сходящуюся последовательность $\{t_k\}$ такую, что $t_k \rightarrow t_0, k \rightarrow \infty, t_0 \in [t_1, t_2]$. Так как $x(t_k) = 0$ для любого $k \in N$, то в силу непрерывности решения $x(t)$ имеем

$$x(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = 0.$$

Производная решения $x'(t)$ существует и непрерывна. Из определения производной в точке $t_0 \in [t_1, t_2] \subset (a, b)$ имеем

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(t_k) - x(t_0)}{t_k - t_0} = 0.$$

Таким образом, $x(t_0) = x'(t_0) = 0$. Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши следует $x(t) \equiv 0, t \in [t_1, t_2]$. Противоречие. ■

Следствие 3.9.1. Если нетривиальное решение $x(t)$ уравнения (3.18) имеет больше одного нуля на (a, b) и если $x(t_0) = 0, t_0 \in (a, b)$, то существует такой нуль $t_1 \neq t_0$ решения $x(t)$, что интервал (t_0, t_1) не содержит других нулей этого решения.

Значения t_0, t_1 называются последовательными нулями. Введем вместо $x(t)$ новую неизвестную функцию $y(t)$ по формуле

$$x(t) = y(t)e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau}. \quad (3.19)$$

Тогда для функции $y(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$y''(t) + Q(t)y(t) = 0, \quad (3.20)$$

в котором

$$Q(t) = q(t) - \frac{p^2(t)}{4} - \frac{p'(t)}{2} \in C(a, b).$$

Отметим, что в силу (3.19) функции $x(t)$ и $y(t)$ меняют знак при одних и тех же значениях $t \in (a, b)$.

3.3.2. Теорема сравнения Штурма

Рассмотрим уравнения

$$y'' + Q_1(t)y = 0, \quad (3.21)$$

$$z'' + Q_2(t)z = 0, \quad (3.22)$$

где $Q_1(t), Q_2(t) \in C(a, b)$.

Теорема 3.10. (Теорема сравнения Штурма.) Пусть $t_1, t_2 \in (a, b)$ — два последовательных нуля решения $y(t)$ уравнения (3.21) и $Q_1(t) \leq Q_2(t)$ на $[t_1, t_2]$. Тогда любое решение $z(t)$ уравнения (3.22) имеет хотя бы один нуль на отрезке $[t_1, t_2]$.

Доказательство. ► По условию теоремы $y(t_1) = y(t_2) = 0$ и на интервале (t_1, t_2) функция $y(t)$ сохраняет знак. Будем считать, что $y(t) > 0, t \in (t_1, t_2)$. Пусть $z(t)$ — произвольное решение уравнения (3.22). Допустим, что $z(t)$ не имеет нулей на отрезке $[t_1, t_2]$, и будем считать $z(t) > 0$ на $[t_1, t_2]$.

Умножая уравнение (3.21) на $z(t)$, а (3.22) — на $y(t)$ и вычитая одно из другого, получим

$$y''z - z''y = [Q_2(t) - Q_1(t)]yz. \quad (3.23)$$

Равенство (3.23) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(y'z - z'y) = [Q_2(t) - Q_1(t)]yz. \quad (3.24)$$

Проинтегрировав соотношение (3.24) от t_1 до t_2 и воспользовавшись равенствами $y(t_1) = y(t_2) = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} & y'(t_2)z(t_2) - \underbrace{z'(t_2)y(t_2)}_{=0} - y'(t_1)z(t_1) + \underbrace{y(t_1)z'(t_2)}_{=0} = \\ & = y'(t_2)z(t_2) - y'(t_1)z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [Q_2(t) - Q_1(t)] yz dt. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из условия $y(t) > 0$ на (t_1, t_2) следует, что $y'(t_1) > 0$ и $y'(t_2) < 0$. Действительно, так как равенства $y'(t_i) = 0$ в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши исключены, из формулы Тейлора имеем

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{y(t_2)}_{=0} + y'(t_2)(t - t_2) + o(t - t_2) \Rightarrow y'(t_2) < 0, \\ y(t) &= \underbrace{y(t_1)}_{=0} + y'(t_1)(t - t_1) + o(t - t_1) \Rightarrow y'(t_1) > 0. \end{aligned}$$

Так как $z(t) > 0$ при $t \in [t_1, t_2]$ и $Q(t_2) - Q(t_1) \geq 0$ по условию, то мы приходим к противоречию:

$$0 > y'(t_2)z(t_2) - y'(t_1)z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [Q_2 - Q_1] yz dt \geq 0.$$

■

Замечание 3.3.1. Предположим дополнительно, что $Q_2(t) > Q_1(t)$ для некоторых значений $t \in [t_1, t_2]$. Тогда

1) решение $z(t)$ будет иметь хотя бы один нуль на интервале (t_1, t_2) . Действительно, предположим противное: $z(t) > 0, t \in (t_1, t_2)$. Тогда правая часть (3.25) будет строго больше нуля, а левая не положительна. Мы приходим к противоречию;

2) если $z(t_1) = 0$, то следующий нуль $z(t_*)$ лежит левее t_2 , т.е. $t_* < t_2$. Здесь

$$y(t_1) = y(t_2) = 0; \quad z(t_1) = 0, \quad z(t_*) = 0, \quad t_* < t_2.$$

3.3.3. Следствия, вытекающие из теоремы сравнения Штурма

Следствие 3.10.1. Если $Q(t) \leq 0$ на интервале (a, b) , то всякое решение уравнения

$$y'' + Q(t)y = 0 \tag{3.26}$$

имеет на (a, b) не более одного нуля.

Доказательство. ► Предположим противное. Тогда найдется нетривиальное решение уравнения $y(t)$ (3.26), имеющее более одного

нуля на (a, b) . Пусть t_1 и t_2 — последовательные нули этого решения. Рассмотрим уравнение

$$z'' = 0, \quad (3.27)$$

для которого $Q_2(t) = 0 \geq Q_1(t) = Q(t)$. По теореме сравнения Штурма любое решение $z(t)$ уравнения (3.27) имеет хотя бы один нуль на отрезке $[t_1, t_2]$. Однако это не так: решение $z(t) = 1$, $t \in [t_1, t_2]$, уравнения (3.27) вообще не имеет нулей. Противоречие доказывает следствие. ■

Предположим теперь, что

$$0 < m^2 \leq Q(t) \leq M^2, t \in (a, b), \quad (3.28)$$

и обозначим через δ расстояние между последовательными нулями любого решения уравнения (3.26) при условии (3.28).

Следствие 3.10.2. *Если $Q(t)$ удовлетворяет условию (3.28), то расстояние между последовательными нулями любого решения уравнения (3.20) удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{\pi}{M} \leq \delta \leq \frac{\pi}{m}.$$

Доказательство. ► Рассмотрим уравнения

$$y'' + m^2 y = 0, \quad y'' + M^2 y = 0. \quad (3.29)$$

Общие решения уравнений (3.29) имеют вид: $y = A \sin [m(t - \phi)]$, $y = B \sin [M(t - \psi)]$. Подбором ϕ, ψ всегда можно совместить некоторые нули решений уравнений (3.29) с нулём решения уравнения (3.20). Расстояние между последовательными нулями первого уравнения (3.29) равно $\frac{\pi}{m}$, а второго — $\frac{\pi}{M}$. Если теперь воспользоваться теоремой сравнения Штурма и замечанием к ней, то получим утверждение следствия 3.10.2. ■

3.3.4. Теорема Штурма о разделении нулей

Теорема 3.11. (Теорема Штурма о разделении нулей.) Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — линейно-независимые решения уравнения

$$y'' + Q(t)y = 0, t \in (a, b).$$

Если t_1, t_2 — два последовательных нуля решения $y_1(t)$, то решение $y_2(t)$ имеет на интервале (t_1, t_2) в точности один нуль.

Доказательство. ► Вначале докажем, что на интервале (t_1, t_2) имеется хотя бы один нуль решения $y_2(t)$. В самом деле, пусть в теореме Штурма сравнения уравнения (3.21), (3.22) совпадают, т.е.

$$Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t).$$

Тогда решение $y_2(t)$ имеет на отрезке $[t_1, t_2]$ хотя бы один нуль. Но ни t_1 , ни t_2 не могут быть нулями $y_2(t)$, так как в противном случае определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

обращался бы в нуль при $t = t_1$ или при $t = t_2$ и решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ были бы линейно зависимы. Следовательно, $y_2(t)$ имеет на интервале (t_1, t_2) по крайней мере один нуль.

Обозначим его $\xi \in (a, b)$. Докажем, что других нулей у решения $y_2(t)$ на интервале (t_1, t_2) нет. Допустим, что решение $y_2(t)$ имеет на интервале (t_1, t_2) более одного нуля. Тогда в силу следствия к лемме 3.6 в интервале (t_1, t_2) имеется такой нуль η решения $y_2(t)$, что между ξ и η других нулей нет, т.е. ξ и η — последовательные нули решения $y_2(t)$. Тогда по теореме Штурма сравнения на $[\eta, \xi]$ должен быть хотя бы один нуль решения $y_1(t)$, а это противоречит тому, что t_1 и t_2 — последовательные нули решения $y_1(t)$. ■

3.3.5. Примеры использования теоремы Штурма

Пример 1. Доказать, что при $x \rightarrow \infty$ расстояние между последовательными нулями любого решения уравнения Бесселя

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \nu^2)x(t) = 0. \quad (3.30)$$

стремится к π .

Решение. В силу симметрии будем предполагать, что $t > 0$, а $\nu^2 \geq 0$. Уравнение (3.30) можно преобразовать с помощью подстановки $x = \frac{z}{\sqrt{t}}$ к приведенному уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2}\right) z = 0, \quad Q(t) = \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2}\right).$$

Будем рассматривать значения t большими или равными некоторой положительной величины η , которая выбирается следующем образом:

- 1) при $\frac{1}{4} - \nu^2 \geq 0$ она может быть выбрана произвольной;
- 2) при $\frac{1}{4} - \nu^2 < 0$ она принимается такой, чтобы $\eta > \sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}$ ($Q(t) > 0$).

При этих условиях можно утверждать, что если $t \geq \eta$, то

- 1) $1 \leq Q(t) \leq 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{\eta^2}$, если $\frac{1}{4} - \nu^2 \geq 0$;
- 2) $0 < 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\eta^2} \leq Q(t) \leq 1$, если $\frac{1}{4} - \nu^2 < 0$.

Отсюда и из следствия 3.10.2 вытекает, что при $t \geq \eta$ расстояние δ между двумя последовательными нулями уравнения Бесселя (3.30) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} \pi \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{\eta^2} \right)^{-\frac{1}{2}} &\leq \delta \leq \pi, \quad \text{если } \left(\frac{1}{4} - \nu^2 \geq 0 \right); \\ \pi &\leq \delta \leq \pi \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{\eta^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{если } \left(\frac{1}{4} - \nu^2 < 0 \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

При $\nu^2 = \frac{1}{4}$ мы имеем $\delta = \pi$. Действительно, при $\nu^2 = \frac{1}{4}$ из уравнения (3.30) получаем

$$z''(t) + z(t) = 0 \Rightarrow x(t) = A \frac{\sin(t - \theta)}{\sqrt{t}}.$$

Здесь A, θ – произвольные постоянные. Если $\eta \rightarrow \infty$, то из формул (3.31) следует, что расстояние между последовательными нулями вещественных решений уравнения Бесселя стремится к π и их бесконечное счётное множество. $\diamond$

Пример 2. Доказать, что в случае $q(t) \leq 0$ краевая задача

$$y'' + q(t)y = 0, \quad y(t_1) = a, \quad y(t_2) = b, \quad (3.32)$$

при любых a, b и $t_1 \neq t_2$ имеет единственное решение. Доказать, что это решение – монотонная функция, если $b = 0$ ([13], 725).

Решение. Если $q(t) = 0, t \in [t_1, t_2]$, то общим решением уравнения $y'' = 0$ будет функция $y = At + B$. Постоянные A, B определяются из краевых условий:

$$A^* = \frac{b - a}{t_2 - t_1}, \quad B^* = \frac{at_2 - bt_1}{t_2 - t_1}.$$

Функция $y = A^*t + B^*$ дает единственное решение краевой задачи (3.32).

Пусть теперь $q(t) \not\equiv 0$. Обозначим через $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ решения уравнения (3.32), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\varphi_1(t_1) = 0, \varphi_1'(t_1) = 1; \varphi_2(t_1) = 1, \varphi_2'(t_1) = 0.$$

Они образуют ФСР, так как $W[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]|_{t=t_1} \neq 0$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t), t \in [t_1, t_2].$$

Постоянные C_1, C_2 определяются из системы уравнений, полученной из краевых условий (3.32):

$$\begin{cases} C_1\varphi_1(t_1) + C_2\varphi_2(t_1) &= a, \\ C_1\varphi_1(t_2) + C_2\varphi_2(t_2) &= b. \end{cases}$$

В результате её решения находим $C_2 = a$, а $C_1\varphi_1(t_2) = b - a\varphi_2(t_2)$. Постоянная C_1 определена, так как значения $\varphi_1(t_2), \varphi_2(t_2)$ получены в результате решения задачи Коши, при этом $\varphi_1(t_2) \neq 0$. Последнее утверждение вытекает из следствия 10.1, а именно: любое решение уравнения (3.32) имеет не более одного нуля на отрезке $[t_1, t_2]$. Таким образом, решение краевой задачи (3.32) существует и единственно.

Изучим теперь поведение решения краевой задачи при $b = 0$ и $a < 0$. Если $a = 0$, то единственным решением задачи будет монотонная функция $y = 0$.

Таким образом, краевые условия принимают вид: $y(t_1) = a < 0, y(t_2) = 0$. Обозначим через $\varphi(t), t \in [t_1, t_2]$, решение краевой задачи. Покажем, что $\varphi(t) < 0$ при любом $t \in (t_1, t_2)$. Действительно, так как $\varphi(t_2) = 0$, предположение о существовании $\xi \in (t_1, t_2)$ такого, что $\varphi(\xi) = 0$, приводит к противоречию в силу следствия 10.1.

Производная $\varphi'(t)$ не возрастает на отрезке $[t_1, t_2]$, так как на нём $\varphi''(t) = -q(t)\varphi(t) \leq 0$. Если предположить, что $\varphi'(t_2) = 0$, то в силу основной теоремы будем иметь $\varphi(t) = 0, t \in [t_1, t_2]$. Знак производной при $t = t_2$ определяется из формулы Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi'(t_2)(t - t_2) + o(t - t_2) \rightarrow \varphi'(t_2) > 0.$$

Отсюда получаем оценку:

$$\varphi'(t) \geq \varphi'(t_2) > 0, t \in [t_1, t_2].$$

Следовательно, решение $\varphi(t), t \in [t_1, t_2]$, является монотонной функцией. Случай $a > 0$ рассматривается аналогично. $\diamond$

3.3.6. Критерий Кнезера

Теорема 3.12. (Критерий Кнезера.) *Если в уравнении (3.20) коэффициент $Q(t) < \frac{1}{4t^2}$ на некотором промежутке $[t_0, +\infty)$, $t_0 > 0$, то каждое его решение $y(t)$ имеет не более одного нуля. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ коэффициент $Q(t) > \frac{1+\varepsilon}{4t^2}$, $t > t_0$, то каждое его решение имеет бесконечно много нулей (решение колеблется).*

Доказательство. ► а) Пусть $Q(t) < \frac{1}{4t^2}$, $[t_0, +\infty)$, $t_0 > 0$. Предположим, что решение $y(t)$ имеет больше одного нуля $y(t_1) = y(t_2) = 0$. Рассмотрим два уравнения

$$y'' + Q(t)y = 0, \quad z'' + \frac{1}{4t^2}z = 0.$$

Так как $Q(t) < \frac{1}{4t^2}$, то по теореме сравнения Штурма любое решение $z(t)$ второго уравнения имеет нуль на (t_1, t_2) . Очевидно, что $z(t) = t^{\frac{1}{2}}$ — решение второго уравнения. Оно не обращается в нуль при $t > 0$. Противоречие, которое доказывает первую часть теоремы.

б) Рассмотрим теперь случай, когда $Q(t) > \frac{1+\varepsilon}{4t^2}$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и $t > t_0$. Рассмотрим два уравнения

$$y'' + Q(t)y = 0, \quad z'' + \frac{1+\varepsilon}{4t^2}z = 0.$$

Второе уравнение является уравнением Эйлера. Будем искать его решение в виде $z = t^\lambda$. Для определения λ получаем уравнение

$$\lambda(\lambda - 1) + \frac{1+\varepsilon}{4} = 0.$$

Его решение даёт: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}$. Отсюда следует, что функция

$$z(t) = \sqrt{t} \sin \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}} \ln t \right)$$

будет решением уравнения для $z(t)$. Она имеет бесконечно много нулей. По теореме сравнения Штурма решение $y(t)$ также имеет бесконечно много нулей. Теорема доказана. Она полезна при решении задач.

■

3.4. Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений

В этой главе изучаются некоторые свойства решений уравнения Бесселя ν — го порядка:

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \nu^2) x = 0, \quad t > 0. \quad (3.33)$$

Ниже будут построены два линейно независимые решения уравнения (3.33). Уравнение рассматривается в области $t > 0$, т.к. изменение знака t его не меняет. Решение будем искать в виде обобщенного степенного ряда

$$x(t) = t^\rho \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k. \quad (3.34)$$

Уравнение (3.33) можно представить в виде

$$t (tx'(t))' + (t^2 - \nu^2)x(t) = 0. \quad (3.35)$$

Дифференцируя формально ряд (3.34), будем иметь

$$tx'(t) = t^\rho \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) C_k t^k, \quad t (tx'(t))' = t^\rho \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)^2 C_k t^k.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (3.35), окончательно находим

$$t^\rho \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [(\rho + k)^2 - \nu^2] C_k t^k + \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2} t^k \right\} = 0.$$

Приравнявая далее коэффициенты при одинаковых степенях t к нулю, получим

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad [\rho^2 - \nu^2] C_0 = 0, \\ k = 1 : & \quad [(\rho + 1)^2 - \nu^2] C_1 = 0, \\ k = 2 : & \quad [(\rho + 2)^2 - \nu^2] C_2 + C_0 = 0, \\ k \geq 2 : & \quad [(\rho + k)^2 - \nu^2] C_k + C_{k-2} = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Последнее соотношение (3.36) определяет рекуррентную формулу для определения C_k через C_{k-2} . Отсюда заключаем, что все нечетные коэффициенты $C_{2m+1} = 0, m \in \mathbb{N}$. Пусть $k = 2m$. Тогда если $\rho = \nu$, то

$$C_{2m} = -\frac{C_{2m-2}}{2^2 m(m + \nu)}.$$

Последовательное применение этой формулы дает связь между C_{2m} и C_0 :

$$C_{2m} = (-1)^m \frac{C_0}{2^{2m} m! (\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+m)}.$$

Воспользуемся свойствами гамма — функции:

$$\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu)\nu, \quad \Gamma(m+1) = m!, \quad \Gamma(\nu+1+m) = (\nu+1) \dots (\nu+m)\Gamma(\nu+1)$$

и положим сначала $\rho = \nu \geq 0$. В результате получаем первое решение уравнения Бесселя (3.33):

$$x_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)} = J_{\nu}(t). \quad (3.37)$$

Ряд (3.37) сходится с радиусом сходимости $R = \infty$ (признак Даламбера). При этом он сходится быстрее экспоненты и равномерно на любом конечном отрезке, а также является бесконечно дифференцируемой функцией. Этот ряд называется функцией Бесселя первого рода ν — го порядка. Используя теперь корень $\rho = -\nu < 0$, построим второе решение уравнения (3.33). Пусть $\nu \neq n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда второе решение может быть получено из решения (3.37) простой заменой ν на $-\nu$, так как уравнение (3.33) при этом не меняется. Следовательно,

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\nu+m+1)}.$$

Решения $J_{\nu}(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ линейно независимые, т.к.

$$W(J_{\nu}(t), J_{-\nu}(t)) = -\frac{2 \sin(\nu\pi)}{\pi t}. \quad (3.38)$$

При вычислении мы воспользовались соотношением $\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi\nu}{\sin(\pi\nu)}$, $\nu \notin \mathbb{Z}$. Решение $J_{-\nu}(t)$ при $t \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Общее решение уравнения Бесселя можно представить в виде

$$x(t) = C_1 J_{\nu}(t) + C_2 J_{-\nu}(t).$$

Изучим теперь случай $\nu = n, n \in \mathbb{Z}_+$. Докажем, что в этом случае $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$. Действительно,

$$J_{-n}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(m-n+1)\Gamma(m+1)} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(m-n+1)\Gamma(m+1)},$$

поскольку $\Gamma(m - n + 1) = \infty$, $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. В последней сумме произведем замену переменной суммирования: $m = s + n$. В результате получим

$$J_{-n}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{t}{2}\right)^{2s+n}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)} = (-1)^n J_n(t).$$

Таким образом, для целых значений $\nu = n$ функции $J_n(t)$ и $J_{-n}(t)$ линейно зависимы.

Чтобы получить второе линейно независимое решение, рассматривают функцию Неймана (функция Бесселя второго рода):

$$N_\nu = \frac{J_\nu \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}. \quad (3.39)$$

Очевидно, если $\nu \neq n$, то (3.39) является решением уравнения Бесселя (3.33) и линейно независимым решением $J_\nu(t)$. Если $\nu = n$, то функция Неймана определяется как предел:

$$N_n(t) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(t) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}, t > 0.$$

При $\nu \rightarrow n$ мы получаем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Раскрывая её по правилу Лопиталю, получаем для целых $\nu = n$:

$$\begin{aligned} N_n(t) &= \frac{\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(t) \cos(\pi\nu) - \pi \sin(\pi\nu) J_\nu(t) - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(t)}{\pi \cos(\pi n)} \Big|_{\nu=n} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(t) - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(t) \right] \Big|_{\nu=n}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, можно вычислить определитель Вронского при $\nu \neq n$:

$$W[J_\nu, N_\nu] = -\frac{1}{\sin(\nu\pi)} W[J_\nu, J_{-\nu}] = \frac{2}{\pi t}, \quad t > 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\nu \rightarrow n} W[J_\nu, N_\nu] = W[J_n, N_n] = \frac{2}{\pi t}, \quad t > 0.$$

Эта формула может служить также для определения функции $N_n(t)$. Вычисления показывают, что

$$N_n(t) = \frac{2}{\pi} J_n(t) \log\left(\frac{t}{2}\right) + t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k.$$

Из вышесказанного следует

Теорема 3.13. *Функции $J_\nu(t)$ и $N_\nu(t)$ являются линейно независимыми при любых значениях ν .*

Исследуем теперь поведение функций Бесселя и Неймана при $t \rightarrow \infty$. После замены $z = x\sqrt{t}$ уравнение Бесселя (3.33) примет вид

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2}\right) z = 0. \quad (3.40)$$

Перепишем уравнение (3.40) в форме, удобной для дальнейшего исследования:

$$z'' + z = z f(t), \quad f(t) = -\frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2}. \quad (3.41)$$

Будем искать решение уравнения (3.41) в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t = \\ &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos t \right) = A(t) \sin(t + \delta(t)). \end{aligned}$$

Здесь

$$A(t) = \sqrt{C_1^2(t) + C_2^2(t)}, \quad \sin \delta(t) = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \cos \delta(t) = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}.$$

Поскольку неизвестных функций две, мы можем подчинить их условию, а именно: производная от $z(t)$ вычисляется так, как если бы $A(t)$ и $\delta(t)$ были постоянными. Имеем

$$z'(t) = A \cos(t + \delta) + [A\delta' \cos(t + \delta) + A' \sin(t + \delta)].$$

Отсюда получаем связь между функциями $A(t)$ и $\delta(t)$:

$$z'(t) = A \cos(t + \delta), \quad A\delta' \cos(t + \delta) + A' \sin(t + \delta) = 0. \quad (3.42)$$

Вычислив вторую производную и подставляя её вместе с первой (3.42) в (3.41), получим уравнение

$$A' \cos(t + \delta) - A \left(\delta' + \frac{\gamma}{t^2} \right) \sin(t + \delta) = 0, \quad \gamma = \nu^2 - \frac{1}{4}.$$

В результате для определения $A(t)$ и $\delta(t)$ будем иметь систему

$$\begin{cases} A\delta' \cos(t + \delta) + A' \sin(t + \delta) = 0, \\ A' \cos(t + \delta) - A \left(\delta' + \frac{\gamma}{t^2} \right) \sin(t + \delta) = 0, \end{cases}$$

которую нетрудно привести к виду

$$\begin{cases} \delta' = -\sin^2(t + \delta)f(t), \\ \frac{A'}{A} = \frac{1}{2}\sin(2(t + \delta))f(t). \end{cases} \quad (3.43)$$

Из первого уравнения системы (3.43) при $t \rightarrow \infty$ имеем $\delta'(t) = O(\frac{1}{t^2}) \rightarrow$

$\rightarrow 0$. Представим функцию $\delta(t)$ в виде

$$\delta(t) = \delta_0 + \int_t^\infty \sin^2(\tau + \delta(\tau))f(\tau)d\tau.$$

Аналогично находим для $A(t)$:

$$\log A(t) = \log A_0 - \frac{1}{2} \int_t^\infty \sin(2(\tau + \delta(\tau)))f(\tau)d\tau.$$

Стоящие справа интегралы сходятся, так как

$$\begin{aligned} \left| \int_t^\infty \sin^2(\tau + \delta(\tau)) \frac{\gamma}{t^2} dt \right| &\leq \int_t^\infty \frac{|\gamma|}{t^2} dt = \frac{|\gamma|}{t}, \\ \left| \int_t^\infty \sin(2(\tau + \delta(\tau))) \frac{\gamma}{t^2} dt \right| &\leq \int_t^\infty \frac{|\gamma|}{t^2} dt = \frac{|\gamma|}{t}. \end{aligned}$$

Следовательно, найденные формулы являются решениями системы (3.43). Отсюда находим

$$x(t) = \frac{A_0 \sin(t + \delta_0)}{\sqrt{t}} + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{3}{2}}\right), t \rightarrow \infty. \quad (3.44)$$

Постоянные A_0 и δ_0 определяются на основе теории функций комплексного переменного.

Асимптотическое поведение функций Бесселя и Неймана задаётся следующими формулами:

$$\begin{aligned} J_\nu(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right), \\ N_\nu(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin\left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Функция (3.44) описывает асимптотическое поведение любого решения уравнения Бесселя при $t \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что каждое из них имеет бесконечное число нулей и расстояние между последовательными нулями стремится к π при $t \rightarrow \infty$.

Глава 4

Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными вещественными коэффициентами

4.1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными вещественными коэффициентами

4.1.1. Линейные однородные уравнения

Уравнение вида

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

называется линейным однородным уравнением n -го порядка с постоянными вещественными коэффициентами (ЛОУ). Если левую часть уравнения (4.1) обозначить через $L[x(t)]$, то оно записывается в компактном виде $L[x(t)] = 0$. Решение уравнения будем искать над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Сначала находятся все комплексные решения уравнения (4.1) в виде элементарных функций, а затем из них выделяются действительные решения. Этот подход применяется потому, что в некоторых случаях легче найти комплексные решения уравнения с действительными коэффициентами, чем их действительные решения [13].

Определение 4.1.1. Функция $x(t) : J \rightarrow \mathbb{C}$, которая ставит в соответствие каждому действительному значению $t \in J$ комплексное число

$$x(t) = u(t) + iv(t), \quad t \in J, \quad (4.2)$$

где $u(t), v(t), t \in J$, — действительные функции, называется комплекснозначной функцией действительного переменного.

Определение 4.1.2. Если $u(t), v(t) \in \mathbf{C}^n(J)$, то производной n -го порядка комплекснозначной функции (4.2) называется функция $x^{(n)}(t) = u^{(n)}(t) + iv^{(n)}(t), t \in J$.

Определение 4.1.3. Комплекснозначная функция $x(t) = u(t) + iv(t), t \in \mathbb{R}$ называется решением линейного однородного уравнения (4.1), если при подстановке её в уравнение последнее обращается в тождество.

Лемма 4.1. Пусть комплекснозначная функция $x(t) = u(t) + iv(t)$ является решением уравнения (4.1). Тогда каждая функция в отдельности $u(t) = \operatorname{Re}[x(t)], v(t) = \operatorname{Im}[x(t)]$ является действительным решением.

Доказательство. ► $L[u + iv] = L[u] + iL[v] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L[u] = 0, \\ L[v] = 0. \end{cases}$

■

Лемма 4.2. Если начальные условия для уравнения (4.1) являются действительными числами, то и решение задачи Коши будет действительной функцией.

Доказательство. ► Для мнимой части $v(t)$ решения имеем следующие начальные условия $v(t_0) = v'(t_0) = \dots = v^{(n-1)}(t_0) = 0$. Из следствия к теореме существования и единственности решения задачи Коши получаем, что $v(t) \equiv 0$. ■

Обозначим через $z = a + ib$ комплексное число.

Определение 4.1.4. Показательной функцией e^z называется функция, определяемая для любого комплексного числа $z = a + ib$ соотношением

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b). \quad (4.3)$$

Свойства показательной функции:

- 1) $\forall z \in \mathbb{C} : |e^z| \neq 0$;
- 2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$;
- 3) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$;
- 4) $\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$.

Построим фундаментальную систему решений (ФСР) линейного однородного уравнения (4.1). Будем искать его решения в виде

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

При подставке в левую часть $L[x(t)]$ уравнения (4.1) функции (4.4) получим тождество

$$L[e^{\lambda t}] = Q(\lambda)e^{\lambda t} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

$$Q(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Отсюда следует, что $x(t) = e^{\lambda t}$ является решением уравнения (4.1) тогда и только тогда, когда $Q(\lambda) = 0$. Уравнение $Q(\lambda) = 0$ называется характеристическим. Над полем комплексных чисел многочлен n -й степени имеет ровно n -корней с учетом их кратности (теорема Гаусса).

Структура фундаментальной системы решений зависит от структуры решений характеристического уравнения.

Лемма 4.3. *Если λ_* является корнем характеристического уравнения кратности k , то следующие функции*

$$\varphi_1 = e^{\lambda_* t}, \dots, \varphi_k = t^{k-1} e^{\lambda_* t}$$

будут решениями линейного однородного уравнения (4.1).

Доказательство. ► Продифференцируем l раз тождество (4.5) по λ . Используя формулу Лейбница, находим

$$L[t^l e^{\lambda t}] = \sum_{i=0}^l C_l^i Q^{(i)}(\lambda) t^{l-i} e^{\lambda t}.$$

По условию λ_* является корнем кратности k , поэтому

$$Q(\lambda_*) = Q'(\lambda_*) = \dots = Q^{(k-1)}(\lambda_*) = 0, \quad Q^{(k)}(\lambda_*) \neq 0.$$

Согласно этому результату из предыдущего уравнения будем иметь

$$L[t^l e^{\lambda_* t}] = 0, \quad 0 \leq l \leq k-1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что производная показательной функции e^z по комплексной переменной z равна e^z (так же, как и в вещественном случае). ■

Пусть характеристическое уравнение имеет m различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ с кратностями $k_1, \dots, k_m$ ($k_1 + \dots + k_m = n$). В силу леммы 4.3 n функций

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ \dots, \dots, \dots \\ e^{\lambda_m t}, \dots, t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{aligned} \quad (4.6)$$

будут решениями уравнения (4.1).

Определение 4.1.5. Функция вида $x(t) = e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \dots + e^{\lambda_m t} P_m(t)$, где $\lambda_i, i = \overline{1, m}$ — числа, а $P_i(t)$ — многочлены, называется квазимногочленом.

Лемма 4.4. Если $x(t) = e^{\lambda t} P_n(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, а $P_n(t)$ — многочлен степени n , то

$$\frac{d}{dt} x(t) = \tilde{P}_m(t) e^{\lambda t},$$

где $\tilde{P}_m(t)$ — многочлен степени

$$m = \begin{cases} n, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ n-1, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Лемма 4.5. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — различные корни характеристического уравнения, а $k_1, \dots, k_m$ — соответствующие им кратности. При этом $k_1 + \dots + k_m = n$. Тогда решения (4.6) являются линейно независимыми.

Доказательство. ► Обозначим решения (4.6) через $\varphi_i(t)$, $i \in \overline{1, n}$ и предположим противное, что они линейно зависимые. Тогда существуют $C_i, i = \overline{1, n}$, — постоянные, не все равные нулю, такие, что $\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t) = 0, t \in \mathbb{R}$. Подставляя в это равенство функции (4.6), получим

$$e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \dots + e^{\lambda_m t} P_m(t) \equiv 0, t \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Здесь $P_i(t)$ — многочлены степени не выше $k_i - 1$, где $i = \overline{1, m}$. Не все коэффициенты в этих многочленах равны нулю. Предположим, что $P_1(t)$ — многочлен степени l , в котором коэффициент при t^l не равен нулю. Умножая обе части тождества (4.7) на $e^{-\lambda_m t}$, будем иметь

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_m)t} P_1(t) + \dots + e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)t} P_{m-1}(t) + P_m(t) \equiv 0, t \in \mathbb{R}.$$

При этом $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$, $i < m$. Продифференцируем это равенство k_m раз. Согласно лемме 4.4 получим

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_m)t} P_{1,1}(t) + \dots + e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)t} P_{m-1,1}(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Проделявая эту процедуру $(m-1)$ — раз, находим

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} P_{1,m-1}(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \neq 0$, для любого $t \in \mathbb{R}$, то $P_{1,m-1}(t) \equiv 0, t \in \mathbb{R}$. Многочлен $P_{1,m-1}(t)$ (степени 1) может равняться тождественно нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Мы пришли к противоречию, что доказывает линейную независимость решений (4.6). ■

Замечание 4.1.1. Решения (4.6) образуют фундаментальную систему решений над полем комплексных чисел. Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то общее решение можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t) = e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \dots + e^{\lambda_m t} P_m(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

где $P_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ — многочлены степени не превышающей $k_i - 1$ (k_i — кратность корня λ_i). Согласно лемме 4.2 при вещественных начальных данных решение задачи Коши в конечном итоге будет вещественным. ◇

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — вещественные, то согласно теореме 3.4 общее решение линейного однородного уравнения имеет вид (4.8).

Построим теперь вещественную фундаментальную систему решений при наличии комплексных корней. Ниже она будет получена прямым способом на основе решений (4.6).

Каждому вещественному корню λ кратности k характеристического уравнения соответствуют решения

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}, \quad (4.9)$$

а комплексно - сопряженным корням $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$ кратности k соответствуют $2k$ вещественных решения

$$\begin{aligned} e^{at} \sin bt, te^{at} \sin bt, \dots, t^{k-1} e^{at} \sin bt, \\ e^{at} \cos bt, te^{at} \cos bt, \dots, t^{k-1} e^{at} \cos bt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Теорема 4.1. Если вещественным корням характеристического уравнения $Q(\lambda)$ соответствуют p решений вида (4.9), а комплексно - сопряженным корням $2q$ решений вида (4.10) и $p + 2q = n$, то эти решения образуют вещественную фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения.

Доказательство. ► Мы должны показать, что из линейной независимости комплексных решений следует линейная независимость соответствующих им вещественных решений вида (4.10). Так как коэффициенты характеристического многочлена $Q(\lambda)$ вещественны, то комплексные решения являются комплексно - сопряжёнными $\bar{\varphi}_i, \varphi_i$. По условию теоремы мы имеем $2q$ комплексно - сопряженных решений, а именно: $\varphi_i, \bar{\varphi}_i, i \in \{1, \dots, q\}$. Обозначим их следующим образом:

$$\varphi_1 = u_1(t) + iv_1(t), \dots, \varphi_q = u_q(t) + iv_q(t),$$

$$\varphi_{q+1} = \bar{\varphi}_1 = u_1(t) - iv_1(t), \dots, \varphi_{2q} = \bar{\varphi}_q = u_q(t) - iv_q(t).$$

Нам надо доказать, что $u_k(t), v_k(t), k = \overline{1, q}$, — линейно независимые вещественные решения. Предположим противное, а именно: существуют постоянные $\alpha_k, \beta_k, k = \overline{1, q}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^q (\alpha_k u_k(t) + \beta_k v_k(t)) = 0, \quad \sum_{k=1}^q (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \neq 0.$$

Вспомяная, что $u_k(t) = \frac{\varphi_k(t) + \bar{\varphi}_k(t)}{2}, v_k(t) = \frac{\varphi_k(t) - \bar{\varphi}_k(t)}{2i}$, получим

$$\sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} \varphi_k(t) + \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} \bar{\varphi}_k(t) = 0.$$

Так как функции $\varphi_k(t), \bar{\varphi}_k(t)$ линейно независимые, то $\alpha_k = \beta_k = 0, k = \overline{1, q}$. Мы пришли к противоречию. ■

4.1.2. Линейные неоднородные уравнения (ЛНУ) с квазимногочленом в правой части

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = e^{\mu_1 t} P_1(t) + \dots + e^{\mu_m t} P_m(t), t \in \mathbb{R}, \quad (4.11)$$

Правая часть уравнения (4.11) является квазимногочленом, в котором числа $\mu_i, i = \overline{1, m}$ и коэффициенты $P_i(t), i = \overline{1, m}$ могут быть комплексными. Согласно теореме 4.1 фундаментальная система решений линейного однородного уравнения известна, и, следовательно, чтобы определить общее решение уравнения (4.11), необходимо найти какое-либо частное решение.

Принцип суперпозиции. Пусть нам известны частные решения $X_k(t)$ каждого из неоднородных уравнений $L[x(t)] = f_k(t), k = \overline{1, l}$. Тогда функция

$$X(t) = X_1(t) + \dots + X_l(t)$$

будет частным решением уравнения $L[x(t)] = f_1(t) + \dots + f_l(t)$.

Отсюда следует, что задача интегрирования линейного неоднородного уравнения (4.11) сводится к задаче интегрирования уравнения

$$L[x(t)] = e^{\mu t} P(t). \quad (4.12)$$

Будем считать, что $P(t)$ — многочлен степени r . Уравнение (4.12) эквивалентно системе двух уравнений $L[u(t)] = \operatorname{Re}[e^{\mu t} P(t)], L[v(t)] = \operatorname{Im}[e^{\mu t} P(t)]$.

Теорема 4.2. Пусть число μ в правой части уравнения (4.12) не является корнем характеристического многочлена. Тогда уравнение имеет частное решение вида

$$X(t) = e^{\mu t} G(t), \quad (4.13)$$

где $G(t)$ — многочлен той же степени r , что и многочлен $P(t)$. Если же число μ является корнем характеристического многочлена кратности s , то уравнение имеет частное решение вида

$$X(t) = t^s e^{\mu t} G(t), \quad (4.14)$$

где $G(t)$ — многочлен степени r (этот случай называется резонансным).

Доказательство. ► Наша задача: найти неизвестные коэффициенты многочлена $G(t)$. Для этого подставим в уравнение (4.12) функцию (4.14). Тогда для определения неизвестных коэффициентов многочлена $G(t)$ будем иметь уравнение

$$L[t^s e^{\mu t} G(t)] = e^{\mu t} P(t). \quad (4.15)$$

Если в уравнение (4.12) подставляется функция (4.13), то мы считаем $s = 0$. Запишем многочлены $G(t), P(t)$ в следующем виде: $G(t) = b_0 t^r + G_1(t), b_0 \neq 0, P(t) = a_0 t^r + P_1(t), a_0 \neq 0$, где $\deg G_1(t), \deg P_1(t) \leq r-1$. В результате, используя эти представления многочленов $G(t), P(t)$, из уравнения (4.12) будем иметь

$$L[b_0 t^{r+s} e^{\mu t}] + L[t^s e^{\mu t} G_1(t)] = (a_0 t^r + P_1(t)) e^{\mu t}.$$

Согласно условию теоремы

$$Q(\mu) = Q'(\mu) = \dots = Q^{(s-1)}(\mu) = 0, Q^{(s)}(\mu) \neq 0.$$

Из доказательства леммы 4.3 следует

$$\begin{aligned} L[t^{r+s} e^{\mu t}] &= \sum_{i=0}^{r+s} C_{r+s}^i Q^{(i)}(\mu) t^{r+s-i} e^{\mu t} = C_{r+s}^s Q^{(s)}(\mu) t^r e^{\mu t} + \\ &+ \sum_{i=s+1}^{r+s} C_{r+s}^i Q^{(i)}(\mu) t^{r+s-i} e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} b_0 (C_{r+s}^s Q^{(s)}(\mu) t^r e^{\mu t} + \sum_{i=s+1}^{r+s} C_{r+s}^i Q^{(i)}(\mu) t^{r+s-i} e^{\mu t}) + L[t^s e^{\mu t} G_1(t)] = \\ = a_0 t^r e^{\mu t} + e^{\mu t} P_1(t) \Rightarrow b_0 = \frac{a_0}{C_{s+r}^s Q^{(s)}(\mu)}. \end{aligned}$$

Для определения следующих коэффициентов многочлена $G(t)$ имеем уравнение

$$L[t^s e^{\mu t} G_1(t)] = e^{\mu t} P_1(t) - b_0 \sum_{i=s+1}^{r+s} C_{r+s}^i Q^{(i)}(\mu) t^{r+s-i} e^{\mu t}.$$

Продолжая эту процедуру, мы найдём все коэффициенты многочлена $G(t)$ и получим требуемое утверждение. ■

4.2. Линейные системы дифференциальных уравнений

4.2.1. Системы линейных однородных уравнений с постоянными вещественными коэффициентами

Ниже изучаются решения однородной линейной системы дифференциальных уравнений (ОЛСУ)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}. \quad (4.16)$$

Здесь A — матрица с постоянными действительными элементами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждой квадратной матрице порядка n в линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ соответствует линейное преобразование $\mathcal{A}$. В этом пространстве будет построена ФСР однородной линейной системы уравнений (4.16), выраженная в элементарных функциях.

Будем искать нетривиальные решения системы (4.16) в виде

$$\vec{x} = \vec{h}e^{\lambda t}, \quad \vec{h} \neq \vec{0}, \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4.17)$$

где $\vec{h}$ — постоянный вектор.

Подставляя функцию (4.17) в систему (4.16), находим: $e^{\lambda t}(A - \lambda E)\vec{h} = \vec{0}$. Так как для любого $t \in \mathbb{R}$ показательная функция $e^{\lambda t} \neq 0$, то для определения вектора $\vec{h}$ мы получаем линейную систему алгебраических уравнений: $(A - \lambda E)\vec{h} = \vec{0}$. Следовательно, вектор-функция (4.17) будет нетривиальным решением системы (4.16), если только $\vec{h}$ — собственный вектор, а λ — собственное значение матрицы A . Для этого необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) называется *характеристическим* и служит для определения собственных значений. Его левая часть представляет собой многочлен n -й степени. Согласно теореме Гаусса уравнение (4.18) имеет n корней над полем комплексных чисел с учётом их кратностей. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения (4.18). Рассмотрим наиболее общий случай, когда среди корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ имеются кратные.

Определение 4.2.1. Набор векторов

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \quad (4.19)$$

называется жордановой цепочкой относительно матрицы A с собственным значением λ , если

$$A\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \neq \vec{0}, \quad A\vec{e}_2 = \lambda\vec{e}_2 + \vec{e}_1, \quad \dots, \quad A\vec{e}_k = \lambda\vec{e}_k + \vec{e}_{k-1}. \quad (4.20)$$

Здесь $\vec{e}_1$ — собственный вектор, с которого начинается цепочка (4.19), а $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ — присоединенные векторы.

Если λ действительное, то цепочка (4.19) называется *действительной*.

Если же λ и $\bar{\lambda}$ комплексно-сопряжённые собственные значения, то цепочки $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ и $\bar{\vec{e}}_1, \dots, \bar{\vec{e}}_k$ называются *комплексно-сопряженными*.

Теорема 4.3. (Жордана.) *Для любой квадратной матрицы A в линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ существует базис, состоящий из жордановых цепочек, которые отвечают всем собственным значениям матрицы A .*

Теорема дается без доказательства, с которым можно ознакомиться в [7].

Все пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается на прямую сумму инвариантных подпространств $R_1, \dots, R_k$. Их количество равно числу различных собственных значений $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k$ кратности $r_1, \dots, r_k$. Имеем $r_1 + \dots + r_k = n$. Подпространства $R_i, i = \overline{1, k}$ называются *корневыми*. Они состоят из таких $\vec{x}$, что $(A - \tilde{\lambda}_i E)^{r_i} \vec{x} = \vec{0}$. Таким образом,

$$\begin{array}{ccccccc} R_1 & \oplus & R_2 & \oplus & R_3 & \oplus & \dots \oplus R_k = \mathbb{R}^n \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \tilde{\lambda}_1 & & \tilde{\lambda}_2 & & \tilde{\lambda}_3 & & \tilde{\lambda}_k \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ r_1 & + & r_2 & + & r_3 & + & \dots + r_k = n \end{array} \quad (4.21)$$

$$\tilde{\lambda}_i \neq \tilde{\lambda}_j, \quad k \leq n.$$

Базисы в $R_i, i = \overline{1, k}$ образуют жордановы цепочки. Эти цепочки и собственные значения, отвечающие им, обозначим следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{k_1}; & \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k_2}; & & \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{k_l}. \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_l \end{array} \quad (4.22)$$

$$k_1 + \dots + k_l = n, \quad k \leq l \leq n.$$

Собственному значению $\tilde{\lambda}_i$ кратности $r_i > 1$ может соответствовать как одна, так и несколько жордановых цепочек. Пусть мы имеем собственное значение λ и цепочку (4.19), соответствующую λ , векторы которой удовлетворяют (4.20).

Введём вектор-функции:

$$\vec{\omega}_m(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \vec{e}_1 + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \vec{e}_2 + \dots + \vec{e}_m, \quad m = \overline{1, k}. \quad (4.23)$$

Лемма 4.6. *Вектор-функции*

$$\vec{x}_m(t) = \vec{\omega}_m(t) e^{\lambda t}, m = \overline{1, k},$$

являются решениями однородной системы (4.16). При этом $\vec{x}_m(0) = \vec{e}_m, m = \overline{1, k}$.

Доказательство. ► Доказательство зиждется на двух тождествах

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} &= \vec{\omega}_{k-1}, \\ A\vec{\omega}_k &= \lambda\vec{\omega}_k + \vec{\omega}_{k-1}. \end{aligned}$$

Первое тождество очевидное. Используя его, докажем второе. Имеем

$$\begin{aligned} A\vec{\omega}_m &= \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} A\vec{e}_1 + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} A\vec{e}_2 + \dots + A\vec{e}_m = \\ &= \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \lambda\vec{e}_1 + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} (\lambda\vec{e}_2 + \vec{e}_1) + \dots + (\lambda\vec{e}_m + \vec{e}_{m-1}) = \lambda\vec{\omega}_m + \vec{\omega}_{m-1}. \end{aligned}$$

Подставляя теперь функции $\vec{x}_m(t), m = \overline{1, k}$, в систему (4.16), будем иметь

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_m e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t} \vec{\omega}_m + e^{\lambda t} \frac{d\vec{\omega}_m}{dt} = e^{\lambda t} (\lambda\vec{\omega}_m + \vec{\omega}_{m-1}) = A(\vec{\omega}_m e^{\lambda t}).$$

Положим $t = 0$. Так как

$$\vec{x}_m(0) = e^{\lambda 0} \vec{e}_m = \vec{e}_m,$$

то последнее утверждение завершает доказательство леммы. ■

Из леммы 4.6 следует, что цепочкам (4.22) и собственным значениям, им отвечающим, соответствуют n решений однородной линейной системы уравнений, а именно:

$$\begin{aligned} k_1 : \quad & \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \left[\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \vec{h}_1 + \dots + \vec{h}_{k_1} \right] e^{\lambda_1 t}; \\ & \vdots \\ k_l : \quad & \vec{f}_1 e^{\lambda_l t}, \dots, \left[\frac{t^{k_l-1}}{(k_l-1)!} \vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_{k_l} \right] e^{\lambda_l t}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Множество базисных векторов (4.22) запишем в виде

$$\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n, \quad (4.25)$$

а соответствующие им решения (4.24) обозначим следующим образом:

$$\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t). \quad (4.26)$$

Докажем, что решения $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n$ линейно независимы. Рассмотрим определитель Вронского: $W(t) = W[\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n]$. При $t = 0$ получаем $W(0) = W[\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n] \neq 0$. Это означает, что решения линейно независимы. Отсюда вытекает

Теорема 4.4. Пусть векторы (4.25) образуют базис, состоящий из жордановых цепочек (4.22), а (4.26) — соответствующие им решения однородной линейной системы (4.16). Тогда для любого её решения $\vec{x}(t)$ существует набор постоянных C_i , $i = \overline{1, n}$, такой, что

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n \vec{\varphi}_n(t).$$

Построим ФСР, состоящую из вещественных решений. Пусть базис (4.25) состоит из $2q$ комплексно-сопряжённых решений и $n - 2q$ действительных решений: $\vec{h}_1, \vec{\bar{h}}_1, \dots, \vec{h}_q, \vec{\bar{h}}_q, \vec{h}_{2q+1}, \dots, \vec{h}_n$. Нетрудно доказать, как в теореме 4.1, что вещественные векторы $\operatorname{Re} \vec{h}_1, \operatorname{Im} \vec{h}_1, \dots, \operatorname{Re} \vec{h}_q, \operatorname{Im} \vec{h}_q, \vec{h}_{2q+1}, \dots, \vec{h}_n$, линейно независимы. Соответствующие им n решений

$$\begin{aligned} \vec{u}_1(t) &= \operatorname{Re} \vec{\varphi}_1(t), \quad \vec{v}_1(t) = \operatorname{Im} \vec{\varphi}_1(t), \\ & \dots \\ \vec{u}_q(t) &= \operatorname{Re} \vec{\varphi}_q(t), \quad \vec{v}_q(t) = \operatorname{Im} \vec{\varphi}_q(t), \\ & \vec{\varphi}_{2q+1}(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

образуют вещественную ФСР.

Теорема 4.5. Если среди решений (4.26) имеются $2q$ комплексно-сопряженных и p действительных решений и $p+2q = n$, то действительные решения (4.27) образуют ФСР системы уравнений (4.16).

Доказательство. ► Доказательство следует из леммы 3.3, так как

$$\begin{aligned} & \det (\operatorname{Re} \vec{\varphi}_1 \operatorname{Im} \vec{\varphi}_1 \dots \operatorname{Re} \vec{\varphi}_q \operatorname{Im} \vec{\varphi}_q \vec{\varphi}_{2q+1} \dots \vec{\varphi}_n) |_{t=0} = \\ & = \left| \operatorname{Re} \vec{\varphi}_1 \operatorname{Im} \vec{\varphi}_1 \dots \operatorname{Re} \vec{h}_q \operatorname{Im} \vec{h}_q \vec{h}_{2q+1} \dots \vec{h}_n \right| \neq 0, \end{aligned}$$

т.к. векторы $\operatorname{Re} \vec{h}_1, \operatorname{Im} \vec{h}_1, \dots, \operatorname{Re} \vec{h}_q, \operatorname{Im} \vec{h}_q, \vec{h}_{2q+1}, \dots, \vec{h}_n$, линейно независимы. Здесь столбцами в матрице и определителе являются координаты соответствующих векторов. ■

Пример 4.2.1. ([14], 812.)

Найти решение системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Решение. Характеристический многочлен и собственные значения матрицы системы имеют вид

$$Q(\lambda) = (2 - \lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Найдём собственные и присоединённые векторы, соответствующие найденным выше собственным значениям:

$$A\vec{h}_1 = 2\vec{h}_1 \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; A\vec{h}_2 = 2\vec{h}_2 + \vec{h}_1 \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A\vec{h}_3 = 2\vec{h}_3 + \vec{h}_2 \Rightarrow \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Составляем функции

$\vec{\omega}_1 = \vec{h}_1$; $\vec{\omega}_2 = \frac{t}{1!}\vec{h}_1 + \vec{h}_2$; $\vec{\omega}_3 = \frac{t^2}{2!}\vec{h}_1 + \frac{t}{1!}\vec{h}_2 + \vec{h}_3$ и выписываем общее решение:

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{\omega}_1 e^{2t} + C_2\vec{\omega}_2 e^{2t} + C_3\vec{\omega}_3 e^{2t}. \quad \diamond$$

Пример 4.2.2. ([14], 811.)

Найти решение системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Решение. Характеристический многочлен и собственные значения матрицы системы имеют вид

$$Q(\lambda) = -(1 - \lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Найденным собственным значениям соответствуют два собственных вектора, координаты которых находятся из уравнения $\alpha - \beta - \gamma = 0$:

$$A\vec{h}_1 = \vec{h}_1 \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A\vec{h}_2 = \vec{h}_2 \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения для определения присоединённых векторов к собственным векторам $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ оказываются несовместными. Однако согласно теореме Жордана собственный вектор, с которого начинается жорданова цепочка, должен существовать. Для его определения воспользуемся тем, что вектор $\vec{e}_2 = a\vec{h}_1 + b\vec{h}_2$, как линейная комбинация собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, также является собственным вектором. Необходимо найти такие значения a, b , чтобы система уравнений для определения присоединённого к собственному вектору $\vec{e}_2$, была совместной. Согласно определению $A\vec{e}_3 = \vec{e}_3 + \vec{e}_2$.

Отсюда для определения координат присоединённого вектора $\vec{e}_3 = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha - \beta - \lambda = a + b, \\ \alpha - \beta - \lambda = \frac{b}{2}, \\ \alpha - \beta - \lambda = -a. \end{cases}$$

Она будет совместной, если $b = -2a$. Положив $a = 1, b = -2$, в результате получим

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение примет вид

$$\vec{x} = C_1 e^t \vec{h}_1 + C_2 e^t \vec{e}_2 + C_3 e^t (\vec{e}_3 + t \vec{e}_2). \quad \diamond$$

В построенном базисе (4.25), состоящем из жордановых цепочек, линейному преобразованию соответствует уже не матрица A , а матрица $\mathcal{J}$. Она называется жордановой.

Определение 4.2.2. Жордановой клеткой порядка m с собственным значением λ называется матрица вида:

$$\mathcal{J}_m = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \lambda \end{matrix}}^m \\ \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathcal{J}_m$ соответствует жордановой цепочке

$$A\vec{h}_1 = \lambda\vec{h}_1; \quad A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2 + \vec{h}_1; \quad A\vec{h}_3 = \lambda\vec{h}_3 + \vec{h}_2; \quad \dots; \quad A\vec{h}_m = \lambda\vec{h}_m + \vec{h}_{m-1}.$$

В жордановом базисе $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$, (4.25) матрица линейного преобразования имеет вид

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{k_1} & & & 0 \\ & \mathcal{J}_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathcal{J}_{k_l} \end{pmatrix} = [\mathcal{J}_{k_1}, \mathcal{J}_{k_2}, \dots, \mathcal{J}_{k_l}],$$

Вдоль главной диагонали расположены жордановы клетки порядка k_i , $i = \overline{1, l}$. Их порядок равен длинам жордановых цепочек, из которых состоит базис (4.25) или (4.22). При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$. Таким образом, теорема 4.3 фактически является теоремой о приведении матрицы A к жордановой форме. Она утверждает, что существует

такая невырожденная матрица T , что $\mathcal{J} = T^{-1}AT$:

$$\mathcal{J} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_{k_l} \end{pmatrix}.$$

Здесь T — матрица перехода к жордановому базису (4.25) от первоначального.

Теорема Жордана позволила эффективно интегрировать системы линейных уравнений. Если произвести замену $\vec{x} = T\vec{y}$ в системе (4.16), то мы получим новую систему, удобную для интегрирования:

$$T \frac{d\vec{y}}{dt} = AT\vec{y} \Rightarrow \frac{d\vec{y}}{dt} = T^{-1}AT\vec{y} = \mathcal{J}\vec{y}.$$

Действительно, рассмотрим систему уравнений, соответствующую какой-либо клетке жордановой матрицы $\mathcal{J}$. В жордановом базисе последнее уравнение в этой системе отщепляется от остальных. Проинтегрировав его, затем можно последовательно решить оставшиеся. Аналогично интегрируются системы, связанные с другими клетками. Покажем это на примере системы уравнений ([14], 812), рассмотренной выше. Из примера 4.2.1 имеем

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2;$$

$$Ah_1 = 2\vec{h}_1 \Rightarrow \vec{h}_1 = (1, 2, 1)^T, Ah_2 = 2\vec{h}_2 + \vec{h}_1 \Rightarrow \vec{h}_2 = (1, 1, 0)^T,$$

$$Ah_3 = 2\vec{h}_3 + \vec{h}_2 \Rightarrow \vec{h}_3 = (1, 1, 1)^T.$$

Произведем замену переменных $\vec{x} = T\vec{y}$, тогда $T \frac{d\vec{y}}{dt} = AT\vec{y} \Rightarrow \frac{d\vec{y}}{dt} = T^{-1}AT\vec{y}$, $T = (\vec{h}_1 \vec{h}_2 \vec{h}_3)$ (элементами матрицы T являются координаты векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$). В жордановом базисе система будет иметь вид

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y} \Rightarrow y_3 = C_3 e^{2t}, y_2 = C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t},$$

$$y_1 = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + C_3 \frac{t^2}{2} e^{2t},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + C_3 \frac{t^2}{2} \\ C_2 + C_3 t \\ C_3 \end{pmatrix} = e^{2t} C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} + \\ + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t},$$

$$\vec{x} = T\vec{y} = C_1 e^{2t} \vec{h}_1 + C_2 e^{2t} [\vec{h}_2 + t\vec{h}_1] + C_3 e^{2t} \left[\vec{h}_3 + t\vec{h}_2 + \frac{t^2}{2} \vec{h}_1 \right].$$

4.2.2. Линейные неоднородные системы с квазимногочленом в правой части

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + e^{\mu t} \vec{P}_m(t), \quad (4.28)$$

где $\vec{P}_m(t)$ — вектор-многочлен степени m , коэффициентами которого являются фиксированные вещественные или комплексные векторы $\vec{p}_i, i = \overline{0, m}$:

$$\vec{P}_m(t) = \vec{p}_0 + \vec{p}_1 t + \dots + \vec{p}_m t^m.$$

Пусть r — максимальный размер жордановой цепочки матрицы A , соответствующей собственному значению λ .

Теорема 4.6. Система (4.28) имеет частное решение вида

$$\vec{X}(t) = \vec{G}_{m+s}(t) e^{\mu t},$$

где $\vec{G}_{m+s}(t)$ — вектор-многочлен степени $m + s$, а

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \neq \lambda, \\ r, & \text{если } \mu = \lambda. \end{cases}$$

Доказательство. ► 1) Предположим сначала, что

$$\vec{P}_m(t) = P_m^{\{1\}}(t) \vec{h}_1 + \dots + P_m^{\{k\}}(t) \vec{h}_k,$$

где $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k$ — некоторая жорданова цепочка, отвечающая собственному значению λ , а $P_m^{\{i\}}(t), i = \overline{1, k}$, — многочлены степени не выше m .

Будем искать решение системы в виде

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^k z_i(t) \vec{h}_i. \quad (4.29)$$

Подставим функцию (4.29) в систему (4.28):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{dz_i(t)}{dt} \vec{h}_i &= A \sum_{i=1}^k z_i(t) \vec{h}_i + e^{\mu t} \sum_{i=1}^k P_m^i(t) \vec{h}_i = \\ &= \lambda z_1(t) \vec{h}_1 + \sum_{i=2}^k z_i(t) (\lambda \vec{h}_i + \vec{h}_{i-1}) + e^{\mu t} \left(P_m^{\{1\}} \vec{h}_1 + \dots + P_m^{\{k\}} \vec{h}_k \right). \end{aligned}$$

Так как векторы $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k$ — линейно независимые, то в последнем соотношении можно приравнять нулю коэффициенты при векторах $\vec{h}_i, 1 \leq i \leq k$.

В результате мы получим систему уравнений для определения функций $z_i(t), 1 \leq i \leq k$:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = \lambda z_1 + z_2 + e^{\mu t} P_m^{\{1\}}(t), \\ \dots \\ \frac{dz_{k-1}}{dt} = \lambda z_{k-1} + z_k + e^{\mu t} P_m^{\{k-1\}}(t), \\ \frac{dz_k}{dt} = \lambda z_k + e^{\mu t} P_m^{\{k\}}(t). \end{cases} \quad (4.30)$$

Таким образом, в жордановом базисе последнее уравнение в системе отщепляется от остальных и может быть проинтегрировано отдельно. Затем, используя найденное решение, находится решение всей системы. Здесь может представиться два случая.

а) Сначала рассмотрим случай, когда $\mu \neq \lambda$. Частные решения уравнений системы (4.30), согласно теореме 4.2, имеют вид

$$Z_k(t) = e^{\mu t} G_m^{\{k\}}(t), \dots, Z_1(t) = e^{\mu t} G_m^{\{1\}}(t).$$

Подставляя найденные решения в формулу (4.29), получим

$$\vec{X}(t) = e^{\mu t} \sum_{i=1}^k G_m^{\{i\}}(t) \vec{h}_i = e^{\mu t} \vec{G}_m(t).$$

б) Если $\mu = \lambda$, то из теоремы 4.2 следует, что частными решениями уравнений системы (4.30) будут следующие функции:

$$Z_k(t) = e^{\mu t} t G_m^{\{k\}}(t), \dots, Z_1(t) = e^{\mu t} t G_{m+k-1}^{\{1\}}(t).$$

Обращаясь к формуле (4.29), находим

$$\vec{X}(t) = e^{\mu t} \sum_{i=1}^k t G_{m+k-i}^{\{i\}} \vec{h}_i = e^{\mu t} \vec{G}_{m+k}(t).$$

2) Рассмотрим теперь общий случай системы (4.28). Разложим векторы $\vec{p}_0, \dots, \vec{p}_m$ по векторам базиса (4.22). Считая, что $\mu = \lambda = \lambda_1, k = k_1 = r$, представим правую часть системы уравнений (4.28) в виде

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + e^{\mu t} (P_{m,1}^{\{1\}} \vec{h}_1 + \dots + P_{m,1}^{\{k_1\}} \vec{h}_{k_1}) + \dots + e^{\mu t} (P_{m,l}^{\{1\}} \vec{f}_1 + \dots + P_{m,l}^{\{k_l\}} \vec{f}_{k_l}).$$

Нетрудно видеть, что случай 2) сводится к случаю 1). В самом деле, если μ не является собственным значением, то $\vec{X}(t) = e^{\mu t} \vec{G}_m(t)$. Если же, например, $\mu = \lambda_1$, то $\vec{X}(t) = e^{\mu t} \vec{G}_{m+r}(t)$. Действительно, согласно принципу суперпозиции $\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^l \vec{X}_i(t)$. Так как $\mu = \lambda = \lambda_1$, то $\vec{X}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{G}_{m+r}^{\{1\}}(t)$, а $\vec{X}_i(t) = e^{\lambda_1 t} \sum_{i=2}^l \vec{G}_m^{\{i\}}(t), i = \overline{2, l}$. Многочлены $\vec{G}_m^{\{i\}}(t)$ имеют степень не выше m . В результате получаем

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{G}_{m+r}^{\{1\}}(t) + \sum_{i=2}^l e^{\lambda_1 t} \vec{G}_m^{\{i\}}(t).$$

Теорема доказана. ■

Если μ не является собственным значением, то на практике частное решение можно искать в виде

$$\vec{X}(t) = e^{\mu t} \vec{G}_m(t) = e^{\mu t} [\vec{g}_0 + t \vec{g}_1 + \dots + t^m \vec{g}_m].$$

Подставляя его в (4.27), получим

$$(A - \mu E) \vec{G}_m = \frac{d\vec{G}_m}{dt} - \vec{P}_m(t), \\ \vec{g}_m = -(A - \mu E)^{-1} \vec{p}_m; \quad \vec{g}_{m-1} = -(A - \mu E)^{-1} [\vec{p}_{m-1} - m \vec{g}_m]$$

и так далее.

4.2.3. Пример решения линейной неоднородной системы

Решим линейную неоднородную систему, используя вышедодказанные теоремы:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы системы, которая ниже обозначается A , равны $\lambda_1 = 2$, $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Найдём соответствующие им собственные векторы $\vec{h}_1, \vec{e}_1$ и присоединённый вектор $\vec{e}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = 2 &\Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda = 1 &\Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda = 1 &\Rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + e^t (\vec{h}_1 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2). \quad (4.31)$$

Общее решение однородной системы (4.32) имеет вид

$$\vec{x}_{\text{одн}}(t) = C_1 e^{2t} \vec{h}_1 + C_2 e^t \vec{e}_1 + C_3 \left[\vec{e}_2 + t \vec{e}_1 \right] e^t,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Согласно теореме 4.6 частное решение неоднородной системы (4.32) будем искать в виде

$$\vec{X}(t) = a_1 \vec{h}_1 e^t + \left[\left(a_2 t + \frac{1}{2} a_3 t^2 \right) \vec{e}_1 + a_3 t \vec{e}_2 \right] e^t.$$

Подставим найденную функцию $\vec{X}(t)$ в систему. В результате получим уравнение, позволяющие определить постоянные $a_i, i = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned} a_1 \vec{h}_1 + (a_2 t + \frac{1}{2} a_3 t^2) \vec{e}_1 + (a_2 + a_3 t) \vec{e}_1 + a_3 t \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_2 = \\ = 2a_1 \vec{h}_1 + (a_2 t + \frac{1}{2} a_3 t^2) \vec{e}_1 + a_3 t (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \vec{h}_1 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1, \\ a_2 = +1, \\ a_3 = -1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{X}(t) = \left\{ - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - t^2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} e^t = \vec{G}_2(t) e^t.$$

Частное решение системы можно сразу искать в виде $\vec{X}(t) = \vec{G}_2(t) e^t$, где вектор-многочлен $\vec{G}_2(t)$ содержит девять неизвестных постоянных. Однако такой способ определения решения является технически более сложным, чем представленный выше. $\diamond$

4.3. Матричная экспонента

Рассмотрим матрицу $P(t) = (p_{ij}(t))$, $i, j = \overline{1, n}$, в которой $p_{ij}(t)$ — вещественные или комплексные функции от t . Если $p_{ij}(t)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то по определению

$$|P| = (|p_{ij}(t)|), \quad \frac{dP(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt} p_{ij}(t) \right), \quad \int_{t_0}^t P dt = \left(\int_{t_0}^t p_{ij}(t) dt \right), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Ниже квадратные матрицы размерности $n \times n$, элементами которых являются числа, обозначаются A , а матрицы, элементами которых являются функции, обозначаются $A(t), A_k(t)$.

Определение 4.3.1. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$, где $A_k(t) = (a_{i,j}^{(k)}(t))$, называется сходящимся при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ к матрице $A(t) = (a_{i,j}(t))$, если при этом t ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)}(t)$ сходятся к $a_{i,j}(t)$ при всех $i, j = \overline{1, n}$.

Если ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)}(t)$ сходятся абсолютно при всех $i, j = \overline{1, n}$ и $t \in \mathbb{R}$, то матричный ряд называется абсолютно сходящимся.

Определение 4.3.2. Мы говорим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$, где $A_k(t) = (a_{i,j}^{(k)}(t))$, сходится равномерно к матрице $A(t) = (a_{i,j}(t))$ на конечном промежутке J , если на этом промежутке ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)}(t)$ сходятся равномерно к $a_{i,j}(t)$ при всех $i, j = \overline{1, n}$.

Для функциональных рядов матриц остаются справедливыми теоремы, сформулированные для рядов функций. Это следует из определений, приведенных выше, и тем, что ряды, составленные из ij -х элементов матриц, этим теоремам подчиняются.

Норма матрицы $A = (a_{i,j}), i, j = \overline{1, n}$ определяется следующим образом:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Из этого определения следует, что если $\|A\| = 0$, то $a_{ij} = 0 \iff A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$.

Лемма 4.7. Если $\|A_k(t)\| \leq \alpha_k, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, t \in J$, и числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$ сходится, при этом абсолютно и равномерно на любом конечном промежутке J .

Доказательство. ► Для элементов $a_{ij}^{(k)}(t)$ матрицы $A_k(t)$ при любых $i, j = \overline{1, n}$ справедливо неравенство

$$|a_{ij}^{(k)}(t)| \leq \|A_k(t)\| \leq \alpha_k.$$

Отсюда следует, что ряды, состоящие из i, j — элементов матриц $A_k(t)$ сходятся, и при этом абсолютно и равномерно на любом конечном промежутке J . Следовательно, ряд матриц сходится аналогичным образом. ■

Лемма 4.8. Для любой квадратной матрицы A и любого $t \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots \quad (4.32)$$

сходится, при этом абсолютно и равномерно на любом конечном промежутке J . Здесь $A_0(t) = E, A_k(t) = \frac{t^k}{k!}A^k, k > 0$.

Доказательство. ► Существует такое число b , что $|a_{ij}| \leq b$ для любых $i, j = \overline{1, n}$. Введём обозначения

$$A^2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right), \dots, A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right), k = 3, 4, \dots$$

Тогда для элементов матрицы $A^2 = A \cdot A = (a_{ij}^{(2)})$ будем иметь оценку

$$|a_{ij}^{(2)}| = \left| \sum_{s=1}^n a_{is} a_{sj} \right| \leq \sum_{s=1}^n |a_{is} a_{sj}| \leq nb^2, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Нетрудно доказать методом математической индукции, что $|a_{ij}^{(k)}| \leq n^{k-1}b^k, \quad i, j = \overline{1, n}.$

Так как $a_{i,j}^{(k)}(t) = \frac{t^k}{k!} a_{i,j}^{(k)}, k > 0$, то $\|A_k(t)\| = n \left| \frac{t^k}{k!} a_{i,j}^{(k)} \right| \leq \frac{|t|^k n^k b^k}{k!}, k > 0; \|A_0(t)\| = \sqrt{n}$, согласно найденным оценкам. Следовательно, для каждого $t \in \mathbb{R}$ можно взять $\alpha_k = \frac{|t|^k n^k b^k}{k!}, k > 0; \alpha_0 = \sqrt{n}$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ сходится по признаку Даламбера при любом выборе b и t . По лемме 4.7 ряд (4.32) сходится к некоторой матрице. Каждый элемент этой матрицы является сходящимся рядом при любом выборе b и t . Из доказательства леммы также следует, что ряд (4.32) сходится абсолютно. Если $t \in J$, то ряд (4.32) сходится на любом конечном промежутке $J =]c, d[$ равномерно. Действительно, предполагая, например, $c, d > 0$, числа α_k можно выбрать следующим образом: $\alpha_k = \frac{|d|^k n^k b^k}{k!}, k > 0$. ■

Определение 4.3.3. Ряд (4.32) называется экспоненциальной функцией от матрицы tA и обозначается e^{tA} .

Свойства:

1. Если матрицы A и B коммутируют, т.е. $[A, B] \equiv AB - BA = 0$, то

$$e^{tA} e^{tB} = e^{t(A+B)}. \quad (4.33)$$

Если $[A, B] \neq 0$, то формула (4.32) может не выполняться. Проиллюстрируем это на примере

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{tA} e^{tB} &= \begin{pmatrix} e^t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{t(A+B)}. \end{aligned}$$

2. Для $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, и $\forall A$ имеет место равенство: $e^{t_1 A} e^{t_2 A} = e^{(t_1+t_2)A}$,

3. Матрица e^{-tA} является обратной к матрице e^{tA} : $e^{-tA}e^{tA} = e^{(t-t)A} = e^{(0)}_{n \times n} = E$;

4. $\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A$;

Действительно, из равномерной сходимости ряда (4.32) имеем

$$\begin{aligned} \frac{de^{tA}}{dt} &= A + \frac{t}{1!}A^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k + \dots \implies \\ \implies A \left(E + \frac{t}{1!}A + \dots \right) &= Ae^{tA} = \left(E + \frac{t}{1!}A + \dots \right) A = e^{tA}A. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую **задачу Коши**:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t); \quad \vec{f}(t) \in \mathbf{C}(J), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad t_0 \in J. \quad (4.34)$$

Теорема 4.7. *Вектор-функция*

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}\vec{f}(\tau)d\tau \quad (4.35)$$

является единственным решением задачи Коши (4.34), определенным на всем промежутке J .

Доказательство. ►

Существование. Произведем в уравнении (4.34) подстановку $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{u}(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d(e^{tA}\vec{u})}{dt} &= Ae^{tA}\vec{u}(t) + \vec{f}(t), \\ Ae^{tA}\vec{u}(t) + e^{tA}\frac{d\vec{u}(t)}{dt} &= Ae^{tA}\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = e^{-tA}\vec{f}(t). \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\vec{u}(t) = \vec{C} + \int_{t_0}^t e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)d\tau.$$

Здесь $\vec{C}$ — произвольный n -мерный числовой вектор. В результате будем иметь

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C} + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}\vec{f}(\tau)d\tau. \quad (4.36)$$

При $t = t_0$, $\vec{x}_0 = e^{t_0A}\vec{C} \Rightarrow \vec{C} = e^{-t_0A}\vec{x}_0$. Подставив $\vec{C}$ в (4.36), получим формулу (4.35):

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}\vec{f}(\tau)d\tau.$$

Единственность. Пусть мы имеем два решения $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ задачи Коши (4.34). Обозначим $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Тогда для определения $\vec{y}$ получаем однородную задачу Коши

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}, \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 = \vec{0}$$

. Из неё сразу находим

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 \equiv \vec{0}, \quad \forall t \in J.$$

Действительно,

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{u}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}(t) = \vec{C} \Rightarrow \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y}(t) \equiv \vec{0}, \quad t \in J.$$

Обратим внимание на то, что формула (4.35) получена методом вариации постоянных Лагранжа. ■

Рассмотрим ФСР $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ однородной системы уравнений (4.16). Составим матрицу $\Phi = (\vec{\varphi}_1 \dots \vec{\varphi}_n)$, которая называется **фундаментальной**. Её столбцами являются координаты векторов $\{\vec{\varphi}_i\}, i = \overline{1, n}$. Из неединственности выбора ФСР следует неединственность выбора фундаментальной матрицы. Так как $\frac{d\vec{\varphi}_i}{dt} = A\vec{\varphi}_i, \quad i = \overline{1, n}$, то фундаментальные матрицы Φ удовлетворяют матричному уравнению

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi. \quad (4.37)$$

Матрица e^{tA} удовлетворяет матричному уравнению (4.37). Её определитель $\det e^{tA} \neq 0$ для $\forall t \in \mathbb{R}$. Поэтому она также является фундаментальной и общее решение однородной системы уравнений (4.16) можно представить в виде: $\vec{x}(t) = \Phi \vec{C}$, где $\vec{C}$ – произвольный числовой вектор.

Однако встаёт вопрос: как вычислить матрицу e^{tA} ?

Лемма 4.9. Если $A = TBT^{-1}$, то $e^{tA} = Te^{tB}T^{-1}$.

Доказательство. ► Имеем

$$\begin{aligned} e^{tA} &= E + \frac{t}{1!}TBT^{-1} + \frac{t^2}{2!}TBT^{-1}TBT^{-1} + \dots = \\ &= TET^{-1} + \frac{t}{1!}TBT^{-1} + \frac{t^2}{2!}TB^2T^{-1} + \dots = \\ &= T \left(E + \frac{t}{1!}B + \frac{t^2}{2!}B^2 + \dots \right) T^{-1} = Te^{tB}T^{-1}. \end{aligned}$$

■

В жордановом базисе матрица A принимает следующий вид: $\mathcal{J} = T^{-1}AT$. Матрица $\mathcal{J}$ называется **жордановой**. Значит, $A = T\mathcal{J}T^{-1}$ и из леммы 4.9 имеем: $e^{tA} = Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}$. Из формулы (4.36) для однородной системы (4.16) ($f(t) \equiv 0, t \in J$) получаем, что её общее решение можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C} = Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}\vec{C} = Te^{t\mathcal{J}}\vec{C}^\dagger,$$

где $\vec{C}^\dagger = T^{-1}\vec{C}$ – новый произвольный вектор. Следовательно, матрица $Te^{t\mathcal{J}}$ так же, как и e^{tA} , является фундаментальной.

Рассмотрим случай, когда

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

$$\mathcal{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
 e^{t\mathcal{J}} &= E + \frac{t}{1!}\mathcal{J} + \frac{t^2}{2!}\mathcal{J}^2 + \dots = \\
 &= E + \frac{t}{1!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots = \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Если использовать фундаментальную матрицу $Te^{t\mathcal{J}}$, то все решения однородной системы (4.16) в конечном итоге будут описываться традиционной формулой:

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t) &= Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}\vec{C} = (\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^\dagger \\ \vdots \\ C_n^\dagger \end{pmatrix} = \\
 &= C_1^\dagger \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n^\dagger \vec{h}_n e^{\lambda_n t}.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Пусть теперь $\mathcal{J}$ имеет вид: $\mathcal{J} = [\mathcal{J}_{k_1}, \dots, \mathcal{J}_{k_l}]$. Нетрудно убедиться (доказать самим), что

$$\mathcal{J}^n = [\mathcal{J}_{k_1}^n, \dots, \mathcal{J}_{k_l}^n] \text{ и } e^{t\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} e^{t\mathcal{J}_{k_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\mathcal{J}_{k_l}} \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{J} = \mathcal{J}_m$, где $\mathcal{J}_m$ — жорданова клетка (см. определение 4.7). Имеем

$$\mathcal{J}_m = \lambda E_m + N_m, \text{ где } N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы λE_m и N_m коммутируют, то

$$e^{t\mathcal{J}_m} = e^{t\lambda E_m} e^{tN_m} = e^{t\lambda} E_m e^{tN_m} = e^{\lambda t} e^{tN_m} = e^{\lambda t} \left[E + \frac{t}{1!} N_m + \frac{t^2}{2!} N_m^2 \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N_m^{m-1} + \dots \right],$$

где

$$N_m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, N_m^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_m^{m+i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad i \geq 0.$$

Значит,

$$\begin{aligned} e^{t\mathcal{J}_m} &= e^{\lambda t} \left[E + \frac{t}{1!} N_m + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N_m^{m-1} \right] = \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Покажем, используя фундаментальную матрицу $Te^{t\mathcal{J}}$, что общее решение однородной системы уравнений (4.16) так же, как и выше, можно представить в традиционной форме:

$$\vec{x}(t) = Te^{t\mathcal{J}_m} \vec{C}^\dagger =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_m) \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \vec{C}^\dagger = \\
 &= e^{\lambda t} \left(\vec{h}_1, \dots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \vec{h}_1 + \dots + \frac{t}{1!} \vec{h}_{m-1} + \vec{h}_m \right) \begin{pmatrix} C_1^\dagger \\ \vdots \\ C_m^\dagger \end{pmatrix} = \\
 &= C_1^\dagger \vec{h}_1 e^{\lambda t} + \dots + C_m^\dagger \left(\vec{h}_m + \frac{t}{1!} \vec{h}_{m-1} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \vec{h}_1 \right) e^{\lambda t}.
 \end{aligned}$$

Для лучшего понимания полученных выше результатов найдём непосредственно матрицу $e^{t\mathcal{J}}$ для приведенной ниже системы.

Пример 4.3.1. $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}.$

Собственные значения матрицы системы, которая ниже будет обозначаться A , имеют вид: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Определим собственные векторы матрицы A и жорданову матрицу $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = 1 &\implies (A - E)\vec{h}_1 = \vec{0} \implies \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \lambda_2 = -1 &\implies (A + E)\vec{h}_2 = \vec{0} \implies \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \lambda_3 = -1 &\implies (A + E)\vec{h}_3 = \vec{h}_2 \implies \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \end{aligned}} \right\} \implies$$

$$\implies \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, жордановый базис состоит из двух жордановых цепочек. Матрицы $e^{t\mathcal{J}_1}$ и $e^{t\mathcal{J}_2}$ имеют вид

$$e^{t\mathcal{J}_1} = (e^t), \quad e^{t\mathcal{J}_2} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Если воспользоваться формулой (4.39), то можно сразу написать:

$$e^{t\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} e^{t\mathcal{J}_1} & 0 \\ 0 & e^{t\mathcal{J}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Этот результат можно получить непосредственно, представив матрицу $\mathcal{J}$ в виде

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A + B.$$

Матрицы A, B коммутируют. Действительно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $AB = BA$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} e^{t\mathcal{J}} &= e^{tA}e^{tB} = \exp \left[t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \exp \left[t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определим общее решение системы, используя фундаментальную матрицу e^{tA} :

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C} = Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}\vec{C} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 2(e^t - e^{-t}) & 2e^t - (1+2t)e^{-t} & -2e^t + 2(1+2t)e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t - (1+t)e^{-t} & -e^t + 2(1+t)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}. \diamond
 \end{aligned}$$

Пример нахождения матричной экспоненты.

Рассмотрим матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 3E + 4\sigma_2, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь σ_2 — матрица Паули. Вычислим матричную экспоненту. Имеем

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= e^{3Et} e^{4\sigma_2 t}; \sigma_2^2 = -E, \sigma_2^3 = -\sigma_2, \sigma_2^4 = E, \dots, \\
 \sigma_2^{2n-1} &= (-1)^{n+1} \sigma_2, \sigma_2^{2n} = (-1)^n E.
 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
 e^{4\sigma_2 t} &= E + 4\sigma_2 t - E \frac{(4t)^2}{2!} - \sigma_2 \frac{(4t)^3}{3!} + \dots = \\
 &= E \left(1 - \frac{(4t)^2}{2!} + \dots \right) + \sigma_2 \left(4t - \frac{(4t)^3}{3!} + \dots \right) = \begin{pmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

В результате будем иметь

$$e^{At} = e^{3Et} e^{4\sigma_2 t} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix}. \diamond$$

Матричный метод решения системы линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Случай различных собственных значений.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \quad \vec{z}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Будем искать матрицу e^{tA} в виде

$$e^{tA} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где A_1, A_2 — неизвестные числовые матрицы. Выбор формы, в которой ищется матрица e^{tA} , вытекает из формул

$$e^{tA} = Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}, \quad e^{t\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Производная от матрицы e^{tA} равна

$$Ae^{tA} = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Положив в уравнениях $t = 0$, для определения матриц A_1, A_2 получим систему:

$$\begin{cases} E = A_1 + A_2, \\ A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{\lambda_2 E - A}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Если собственные значения являются комплексно-сопряженными $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то задача определения матричной экспоненты упрощается. Нетрудно показать, что её можно искать в виде

$$e^{tA} = e^{\alpha t} [A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t].$$

2. Случай отсутствия базиса из собственных векторов: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Так как

$$e^{t\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

то матрицу e^{tA} можно искать в виде

$$e^{tA} = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t},$$

где A_1, A_2 — неизвестные числовые матрицы. Производная от неё имеет вид

$$Ae^{tA} = \lambda A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{\lambda t} + \lambda A_2 t e^{\lambda t}$$

Для определения матриц A_1, A_2 получим при $t = 0$ систему

$$\begin{cases} E = A_1, \\ A = \lambda A_1 + A_2. \end{cases}$$

Решая её, находим: $A_1 = E, A_2 = A - \lambda E$. В результате будем иметь

$$e^{tA} = E e^{\lambda t} + (A - \lambda E) t e^{\lambda t} = (E + t(A - \lambda E)) e^{\lambda t}. \diamond$$

Глава 5

Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами, содержащих малый параметр

5.1. Краевые задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами

В этом параграфе будет рассматриваться дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными вещественными коэффициентами ε, a, b :

$$\varepsilon x'' + ax' + bx = f(t), t \in [\alpha, \beta]. \quad (5.1)$$

Предполагается, что $f(t) \in \mathbf{C}^1([\alpha, \beta])$, $\varepsilon \neq 0, a \neq 0$.

Решение уравнения (5.1) можно выделить не только с помощью начальных условий, но и с помощью краевых условий (КУ). КУ наиболее простого типа имеют вид

$$x(\alpha) = x_\alpha, \quad (5.2)$$

$$x(\beta) = x_\beta. \quad (5.3)$$

Здесь x_α и x_β – заданные числа. Однако для уравнения (5.1) часто ставятся КУ более общего вида:

$$h_1 x(\alpha) + h_2 x'(\alpha) = x_\alpha, k_1 x(\beta) + k_2 x'(\beta) = x_\beta, \quad (5.4)$$

где h_1, h_2, k_1, k_2 – заданные числа, причём $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ и $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$. Формулы (5.2) и (5.3) являются частым случаем формулы (5.4). Они получаются из (5.4), если положить $h_2 = k_2 = 0$. Условия (5.2) и

(5.3) называются *краевыми условиями первого рода*. Если положить $h_1 = 0$ или $k_1 = 0$, то соответствующее краевое условие (5.4) называется *краевым условием второго рода*. Если одновременно $h_i \neq 0$ или $k_i \neq 0 (i = 1, 2)$ – условием третьего рода.

Краевые задачи (КЗ) для однородного уравнения с однородными граничными условиями будем называть однородными краевыми задачами. В противном случае – неоднородными. Все решения уравнения (5.1) описываются функцией

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + X(t), t \in [\alpha, \beta].$$

Здесь $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – ФСР однородного уравнения (5.1), а $X(t)$ – какое-либо частное решение ЛНУ (5.1). Отсюда видно, что задача отыскания решения КЗ (5.1), (5.4) сводится к отысканию постоянных C_1 и C_2 из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} C_1A_1(\alpha) + C_2A_2(\alpha) = x_\alpha - [h_1X(\alpha) + h_2X'(\alpha)], \\ C_1B_1(\beta) + C_2B_2(\beta) = x_\beta - [k_1X(\beta) + k_2X'(\beta)]. \end{cases} \quad (5.5)$$

Здесь $A_i(\alpha) = h_1\varphi_i(\alpha) + h_2\varphi'_i(\alpha)$, $B_i(\beta) = k_1\varphi_i(\beta) + k_2\varphi'_i(\beta)$, $i = 1, 2$. Для существования единственного решения СЛАУ (5.5) необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1(\alpha) & A_2(\alpha) \\ B_1(\beta) & B_2(\beta) \end{vmatrix} \neq 0.$$

С другой стороны, если $x_\alpha = x_\beta = 0$, т.е. краевые условия (5.2), (5.3) и (5.4) являются однородными, то обращение $\Delta = 0$ необходимо и достаточно, чтобы однородная краевая задача ($f \equiv 0$) имела нетривиальное решение.

Теорема 5.1. *Для того чтобы КЗ (5.1), (5.4) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная КЗ (5.1), (5.4) ($x_\alpha = x_\beta = 0; f(t) \equiv 0 \Leftrightarrow X(t) \equiv 0$) обладала только тривиальным решением.*

Доказательство. ► В самом деле, если однородная КЗ задача (5.1), (5.4) допускает только решение $x(t) \equiv 0$, то $\Delta \neq 0$, и наоборот.

■

Замечание 5.1.1. Если неоднородная КЗ имеет два различных решения x_1 и x_2 , то разность $x_1 - x_2 = x^*$ является нетривиальным решением соответствующей однородной задачи. Обратно, если однородная задача обладает нетривиальным решением, то неоднородная задача либо не имеет ни одного решения, либо же обладает бесконечным множеством решений. Причём все они получаются из одного добавлением любого решения однородной задачи. $\diamond$

5.2. Краевая задача первого рода при наличии малого параметра перед старшей производной

Исследуем разрешимость КЗ (5.1), (5.2), (5.3) при фиксированных $\alpha, \beta, a, b, x_\alpha, x_\beta$ и заданной функции $f(t)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и исследуем поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Уравнение

$$ax' + bx = f(t), \quad (5.6)$$

которое получается из (5.1) при $\varepsilon = 0$, называется *предельным*.

Теорема 5.2. Пусть $a > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда решение КЗ (5.1), (5.2), (5.3) для достаточно малых ε существует и единственно. Это решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$ представимо в виде

$$x(t; \varepsilon) = \omega(t) + [x_\alpha - \omega(\alpha)]e^{-\frac{a}{\varepsilon}(t-\alpha)} + g(t; \varepsilon), \quad (5.7)$$

где $\omega(t)$ – решение ЗК (5.6), (5.3), а $g(t; \varepsilon) = O(\varepsilon)$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$.

Доказательство. ► ЗК (5.6), (5.3) имеет единственное решение $x = \omega(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ (см. основную теорему). В общем случае $\omega(\alpha) \neq x_\alpha$. Обозначим $u(t; \varepsilon) = x(t; \varepsilon) - \omega(t)$. Для $u(t; \varepsilon)$ мы получим уравнение

$$\varepsilon u'' + au' + bu = -\varepsilon \omega'' \quad (5.8)$$

и граничные условия

$$u(\alpha; \varepsilon) = x_\alpha - \omega(\alpha), u(\beta; \varepsilon) = 0. \quad (5.9)$$

Так как функции $f(t)$ и $\omega(t)$ непрерывно дифференцируемые, то вторая производная $\omega'' = (f' - b\omega')/a$ функции $\omega(t)$, полученная дифференцированием уравнения (5.6), будет непрерывной. Общее решение однородного уравнения (5.8) в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$ известно и имеет вид

$$u_{\text{од}} = C_1(\varepsilon)e^{\lambda_1 t} + C_2(\varepsilon)e^{\lambda_2 t}.$$

Здесь λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения. Они равны

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b\varepsilon}}{2\varepsilon}, \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ эти формулы дают

$$\lambda_1 = -\frac{b}{a} + O(\varepsilon), \lambda_2 = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{b}{a} + O(\varepsilon), \quad (5.10)$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -\frac{a}{\varepsilon} + 2\frac{b}{a} + O(\varepsilon).$$

Решение неоднородного уравнения (5.8) найдём методом вариации постоянных Лагранжа. Будем искать общее решение уравнения (5.8) в виде

$$u(t; \varepsilon) = C_1(t; \varepsilon)e^{\lambda_1 t} + C_2(t; \varepsilon)e^{\lambda_2 t}. \quad (5.11)$$

Здесь C_1 и C_2 – неизвестные непрерывно дифференцируемые по t функции. Имеем из (5.11)

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + \left[e^{\lambda_1 t} \frac{dC_1}{dt} + e^{\lambda_2 t} \frac{dC_2}{dt} \right].$$

Величину, стоящую в квадратных скобках, положим равной нулю. Дифференцируя далее функцию $u(t; \varepsilon)$ второй раз и подставляя её в уравнение (5.1), для определения $C_1(t; \varepsilon)$ и $C_2(t; \varepsilon)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} \frac{dC_1}{dt} + e^{\lambda_2 t} \frac{dC_2}{dt} = 0, \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \frac{dC_1}{dt} + \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \frac{dC_2}{dt} = -\omega''. \end{cases}$$

Определитель этой системы – определитель Вронского фундаментальной системы решений $\varphi_1 = e^{\lambda_1 t}$ и $\varphi_2 = e^{\lambda_2 t}$ однородного уравнения (5.8):

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2 + \lambda_1)t} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} \neq 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В результате решения системы находим

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \omega'', \quad \frac{dC_2}{dt} = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \omega''.$$

Интегрирование этих уравнений дает

$$C_1 = e^{-\lambda_1 \alpha} C_1^0 + \int_{\alpha}^t \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \omega'' dt; \quad C_2 = e^{-\lambda_2 \alpha} C_2^0 - \int_{\alpha}^t \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \omega'' dt.$$

Здесь C_1^0 и C_2^0 — произвольные постоянные.

Подставляя эти формулы в (5.11), получим общее решение неоднородного уравнения (5.8):

$$u = C_1^0 e^{\lambda_1(t-\alpha)} + C_2^0 e^{\lambda_2(t-\alpha)} + \underbrace{e^{\lambda_1 t} \int_{\alpha}^t \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \omega'' dt - e^{\lambda_2 t} \int_{\alpha}^t \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \omega'' dt}_{K(t; \xi)}. \quad (5.12)$$

Обозначим два последних интегральных члена в (5.12) через $K(t; \varepsilon)$. Чтобы найти постоянные C_1^0 и C_2^0 , воспользуемся краевыми условиями (5.9). Из (5.9) и (5.12) для их определения получим СЛАУ:

$$\begin{cases} C_1^0 + C_2^0 = u(\alpha; \varepsilon) (= x_{\alpha} - \omega(\alpha)), \\ \underbrace{e^{\lambda_1(\beta-\alpha)}}_{O(1)} C_1^0 + \underbrace{e^{\lambda_2(\beta-\alpha)}}_{O(e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}})} C_2^0 = \underbrace{K(\beta; \varepsilon)}_{O(\varepsilon)}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Определитель системы (5.13) при малых ε отличен от нуля

$$\Delta = e^{\lambda_1(\beta-\alpha)} [1 - e^{(\lambda_2-\lambda_1)(\beta-\alpha)}] \neq 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно, система (5.13) имеет единственное решение, т.е. КЗ (5.1), (5.2) $\wedge$ (5.3) разрешима при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Оценим интегральные члены в (5.12) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Имеем

$$|I_1| = \left| e^{\lambda_1 t} \int_{\alpha}^t \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \omega'' dt \right| \leq \frac{\max |\omega''|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} e^{\lambda_1 t} \left| \left[\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right]_{\alpha}^t \right|.$$

Используя оценки (5.10), получаем при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$|I_1| \leq \frac{\max |\omega''|}{\left| -\frac{b}{a} + O(\varepsilon) \right| - \frac{a}{\varepsilon} + 2\frac{b}{a} + O(\varepsilon)} \max \left| 1 - e^{(-\frac{b}{a} + O(\varepsilon))(t-\alpha)} \right| = O(\varepsilon).$$

Далее,

$$|I_2| = \left| -e^{\lambda_2 t} \int_{\alpha}^t \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \omega'' dt \right| \leq \frac{\max |\omega''|}{|\lambda_2| |\lambda_2 - \lambda_1|} \max \left| 1 - e^{\lambda_2(t-\alpha)} \right| = O(\varepsilon^2).$$

Значит,

$$|K(t; \varepsilon)| = |I_1 + I_2| \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} O(\varepsilon) \text{ для всех } t \in [\alpha, \beta]. \quad (5.14)$$

Оценим теперь C_1^0 и C_2^0 , используя систему (5.13) и оценку (5.14). В результате имеем

$$C_2^0 = u(\alpha; \varepsilon) + O(\varepsilon), C_1^0 = O(\varepsilon).$$

Подстановка полученных оценок в формулу (5.12) дает (5.7). При этом мы воспользовались соотношением

$$\left| e^{\lambda_2(t-\alpha)} - e^{-\frac{a}{\varepsilon}(t-\alpha)} \right| \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} O(\varepsilon), t \in [\alpha, \beta].$$

■

5.3. Пример решения краевой задачи первого рода

Пример 5.3.1. Решим краевую задачу с помощью доказанной теоремы:

$$\varepsilon x'' + x' + x = 1, \quad x(0) = 0, x(1) = 1.$$

Решение. Так как $\varepsilon > 0$, $a > 0$, то согласно теореме для определения функции $\omega(t)$ служит задача Коши:

$$\omega' + \omega = 1, \quad \omega(1) = 1 \longrightarrow \omega(t) = 1.$$

Значит,

$$x(t; \varepsilon) = 1 - e^{-t\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad t \in [0, 1], \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ t=0}} x(0; \varepsilon) = 0, \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ t>0}} x(t; \varepsilon) = 1.$$

Поведение решения в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ изображено ниже на рис. 5.1.

Резюме. Если ε положить равным нулю в уравнении (5.1), то оно становится уравнением первого порядка (5.6), решение которого не может одновременно удовлетворить двум краевым условиям (5.2) и (5.3). Какое из этих двух краевых условий должно быть опущено?

При $\varepsilon > 0$, $a > 0$ опускается краевое условие слева. В окрестности точки $t = \alpha$ решение $x(t; \varepsilon)$ при малых ε меняется очень быстро и выходит на заданное граничное значение (5.2). Такое поведение решения $x(t; \varepsilon)$ сильно отличается от поведения решения предельного уравнения $\omega(t)$. Это область, ширина которой $O(\varepsilon)$, называется *пограничным*

слоем. Поведение решения в ней называется *поведением типа пограничного слоя*.

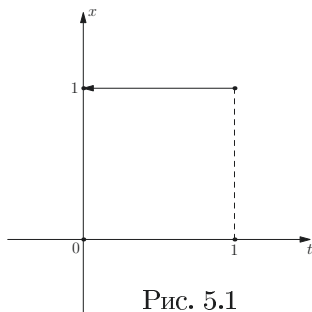


Рис. 5.1

Случай $\varepsilon > 0$, $a < 0$ сводится к рассмотренному заменой t на $-t$ в однородном уравнении (5.1). Поэтому область погранслоя будет находиться справа. Значит,

$\frac{\varepsilon}{a} > 0$ – пограничный слой находится в окрестности точки $t = \alpha$,

$\frac{\varepsilon}{a} < 0$ – пограничный слой находится в окрестности точки $t = \beta$.

Случай $a = 0$ не рассматривается.

Качественное поведение пограничного слоя в случае $\frac{\varepsilon}{a} > 0$ изображено на рис. 5.2.

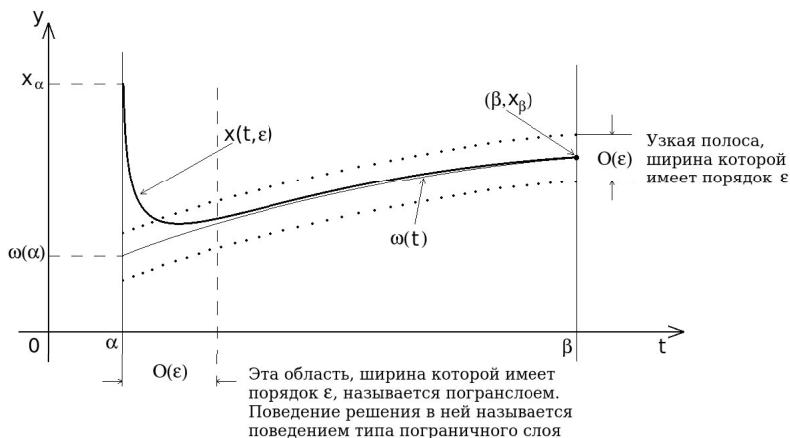


Рис. 5.2

Глава 6

Преобразование Лапласа

6.1. Основные определения и теоремы

В этой главе даются начальные сведения о преобразовании Лапласа. С его свойствами можно также ознакомиться в [8, 12].

Комплекснозначная функция $f(t)$ действительного переменного t называется *оригиналом* если:

1. $f(t)$ определена при $t \geq 0$,
2. $f(t)$ кусочно-непрерывная при $t \geq 0$,
3. $f(t)$ имеет конечный порядок роста, то есть существуют такие постоянные $M, \alpha \in R$, что при всех $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}. \quad (6.1)$$

Число $\beta = \inf \alpha$ называется показателем роста.

Если возникает необходимость продолжить оригинал при $t < 0$, то его предполагают равным нулю $f(t) = 0$ для любого $t < 0$.

Теорема 6.1. Пусть $f(t)$ – оригинал и комплексные числа p удовлетворяют условиям $\operatorname{Re} p > \alpha$. Тогда интеграл $\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ определён в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Доказательство. ► Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt. \quad (6.2)$$

Для подынтегральной функции справедлива оценка:

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{\alpha t} e^{-\operatorname{Re} p t} = Me^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t}.$$

Отсюда имеем

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} Me^{-(\operatorname{Re} p - \alpha)t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re} p - \alpha} < \infty.$$

Из сходимости мажорирующего интеграла следует сходимость интеграла $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$. ■

Пусть $f(t)$ оригинал.

Определение 6.1.1. Функция $F(p)$, определённая при $\operatorname{Re} p > \alpha$ формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (6.3)$$

называется изображением по Лапласу оригинала $f(t)$. Здесь $F(p)$ — функция комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$.

Замечание 6.1.1. Мы определили функцию $F(p)$ формулой (6.3) только при $\operatorname{Re} p > \alpha$. ◇

Определение 6.1.2. Оператор, который ставит функцию $f(t)$ в соответствие функции $F(p)$, называется преобразованием Лапласа и обозначается $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$.

Теорема 6.2. Пусть оригинал $f(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha$. Тогда для $\sigma > \alpha$ в любой точке $t > 0$ непрерывности $f(t)$ имеет место формула обращения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F(\sigma + i\tau) e^{-(\sigma + i\tau)t} d\tau. \quad (6.4)$$

При $t = 0$ правая часть формулы равна $\frac{1}{2}f(0)$. Интеграл (6.4) берётся вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = \sigma > \alpha$.

При применении преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений редко приходится пользоваться непосредственно формулой обращения (6.4). Обычно используются таблицы оригиналов и изображений, в основе построения которых лежит теорема, сформулированная ниже.

Теорема 6.3. (Теорема единственности.) Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — оригиналы и $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_1$; $f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_2$. Пусть также $F_1(p) = F_2(p)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда при $t > 0$ в точках непрерывности $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеет место равенство $f_1(t) = f_2(t)$.

Таким образом, оригиналы определяются единственным образом своими изображениями с точностью до значений в точках разрыва. Теоремы 6.2 и 6.3 даются без доказательства.

6.2. Простейшие свойства преобразования Лапласа

В дальнейшем значение $\operatorname{Re} p$ всегда выбирается таким, чтобы преобразование Лапласа имело смысл при $\operatorname{Re} p > \alpha$, где α — некоторое число.

1. Линейность преобразования Лапласа.

Пусть $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(p)$, $f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha$. Тогда для любых вещественных a, b имеет место

$$af_1(t) + bf_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aF_1(p) + bF_2(p), \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

2. Дифференцируемость.

Пусть $f(t)$ — оригинал и имеет при $t \geq 0$ непрерывную производную $f'(t)$, которую также будем считать оригиналом ^{*}). Тогда, если $f'(t) = g(t)$, то $g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha$, где

$$G(p) = pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

^{*}) Производная оригинала не всегда оригинал. Пример $f(t) = \sin e^{t^2}$, $f'(t) = \cos e^{t^2} 2te^{t^2}$. Но обратное утверждение справедливо, так как $f(t) = \int_0^t f'(\tau) d\tau + f(0)$.

Доказательство. ►

$$G(p) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = e^{-pt}f(t)|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0),$$

так как $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt}f(t) = 0$. ■

Пусть $f(t)$ — оригинал и имеет непрерывную n -ю производную $f^{(n)}(t)$, которая также является оригиналом. Обозначим $f^{(n)}(t) = g(t)$. Если $g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(p)$, $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha$, то

$$G(p) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - pf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0). \quad (6.5)$$

Доказательство. ► Функции $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ — оригиналы, так как $f^{n-1}(t) = \int_0^t f^{(n)}(\tau) d\tau + f^{n-1}(0)$, а интеграл от оригинала также является оригиналом (доказать самим). Было показано, что $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0)$. Используя эту формулу и метод математической индукции, нетрудно получить формулу (6.5). Последняя показывает, что операция дифференцирования $\frac{d}{dt}$ относительно оригинала переходит в алгебраическую операцию умножения его изображения на p . ■

6.3. Вычисление преобразования Лапласа, если $f(t)$ квазимногочлен

Ниже будет предполагаться, что оригиналы являются непрерывно дифференцируемыми функциями.

В силу линейности преобразования Лапласа достаточно вычислить изображение $t^k e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \odot$, где λ — комплексное число, $\alpha > \operatorname{Re} \lambda$. Нетрудно видеть, что $t^k e^{\lambda t}$ при $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$ — оригинал. Действительно, $\varphi(t) = t^k e^{-\alpha t} e^{\lambda t} = t^k e^{-(\alpha-\lambda)t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$. Имеем

$$\int_0^{\infty} t^k e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} t^k e^{-(p-\lambda)t} dt, \quad \operatorname{Re} p > \alpha > \operatorname{Re} \lambda. \quad (6.6)$$

Обозначим $z = p - \lambda$, $\operatorname{Re} z > 0$. Тогда $g_k(z) = \int_0^\infty t^k e^{-zt} dt$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Интегрируя по частям, находим

$$g_0(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dt = \frac{1}{z},$$

$$g_k(z) = \int_0^\infty t^k e^{-zt} dt = \left. \frac{t^k e^{-zt}}{-z} \right|_0^\infty - k \int_0^\infty t^{k-1} \frac{e^{-zt}}{-z} dt = \frac{k}{z} g_{k-1}(z), \quad k > 1.$$

Отсюда следует, что $g_k = \frac{k!}{z^{k+1}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и

$$t^k e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{k!}{(p - \lambda)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \operatorname{Re}(p - \lambda) > 0. \quad (6.7)$$

Используя формулу (6.7), получим формулы обращения при различных k . Далее будет применяться обозначение $\Leftrightarrow$, смысл которого в том, что оригиналу $f(t)$ сопоставляется изображение $F(p)$, а изображение $F(p)$ имеет своим оригиналом $f(t)$ (согласно теоремам 6.2 и 6.3).

Рассмотрим сначала случай $k = 0$:

$$e^{\lambda t} \Leftrightarrow \frac{1}{p - \lambda}. \quad (6.8)$$

1. Если $\lambda = i\omega$, то из формулы (6.8) получаем

$$\cos \omega t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \quad \sin \omega t \Leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

2. Если $\lambda = 0$, то из (6.8) имеем

$$1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}; \quad (6.9)$$

Пусть теперь $k \neq 0$: 1. Если $\lambda = 0$, $k \neq 0$, то из (6.8) находим

$$t^k \Leftrightarrow \frac{k!}{p^{k+1}}. \quad (6.10)$$

2. Если $\lambda \neq 0$, $k = 1$, то (6.8) дает

$$t \cos \omega t \Leftrightarrow \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}; \quad t \sin \omega t \Leftrightarrow \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}. \quad (6.11)$$

По необходимости эту процедуру можно продолжить дальше. Из сказанного выше вытекает теорема.

Теорема 6.4. Пусть $f(t)$ – квазимногочлен и $f(t) \rightleftharpoons F(p)$. Тогда $F(p)$ – правильная рациональная дробь $\frac{Q(p)}{P(p)}$, где Q и P – многочлены.

6.4. Применение преобразования Лапласа

Решим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x &= q(t), \\ x(0) = c_0, \quad x'(0) = c_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) &= c_{n-1} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Будем предполагать, что все производные функции $x(t)$ и функция $q(t)$ – оригиналы, тогда

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} X(p), \\ x'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} pX(p) - c_0 \\ &\vdots \\ x^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} p^n X(p) - p^{n-1}c_0 - \dots - c_{n-1}. \end{aligned}$$

Подставим найденные соотношения в уравнение (6.12):

$$\begin{aligned} [p^n X(p) - c_0 p^{n-1} - \dots - c_{n-1}] + a_1 [p^{n-1} X(p) - c_0 p^{n-2} - \dots - c_{n-2}] + \dots \\ \dots + a_n X(p) &= Q(p), \\ [p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n] X(p) &= c_0 [p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}] + \dots \\ \dots + c_{n-1} + Q(p), \\ L(p)X(p) &= \mathcal{F}(p). \end{aligned}$$

Отсюда в результате операторного решения задачи Коши (6.12) имеем: $X(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{L(p)}$. Применяя теперь найденные выше формулы обращения, находим $x(t)$.

Пример 6.4.1. Решить задачу Коши:

$$x'' + x' = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Решение:

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) + pX(p) - x(0) = \frac{1}{p^2}.$$

Решая это уравнение, находим

$$X(p) = \frac{\frac{1}{p^2} + p + 1}{p^2 + p} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Из (6.8), (6.9), (6.10) имеем

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + 2 - e^{-t}. \diamond$$

Глава 7

Элементы вариационного исчисления

7.1. Введение и основные определения

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое множество функций y .

Определение 7.1.1. Если каждому элементу $y \in \mathfrak{N}$ поставлено в соответствие вещественное число, то говорят, что на множестве $\mathfrak{N}$ задан функционал $\mathcal{J}(y)$.

Другими словами, функционалом $\mathcal{J}(y)$ называется отображение $\mathcal{J}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Множество $\mathfrak{N}$ называется областью определения функционала.

Исторически первой задачей, породившей новое направление в математике — вариационное исчисление, была задача о брахистохроне. Она была впервые поставлена и решена Иоганом Бернулли в 1696 г. Требовалось найти такую кривую, соединяющую две точки $A(0, 0)$ и $B(b, y_2)$, вдоль которой материальная точка скатывалась бы за минимальное время:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dt \quad (g - \text{ускорение свободного падения}).$$

Таким образом, требовалось найти функцию $y = y(t)$, удовлетворяющую краевым условиям $y(0) = 0, y(b) = y_2$, на которой функционал $T(y)$ достигал бы минимума. Было показано, что кривая, на которой достигается минимум функционала, является циклоидой.

Изучение вариационного исчисления начнём с изучения свойств функционала, который часто встречается на практике и задается ин-

тегралом

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt. \quad (7.1)$$

Функция $f(t, y, y')$ в нём предполагается непрерывной. Ниже на нее будут наложены дополнительные условия. Функционал (7.1), как правило, определен на множестве $\mathfrak{N} \subseteq \mathbf{C}^1([a, b])$.

Решение задач на отыскание минимума или максимума функционалов привело к созданию нового направления в математике – вариационного исчисления.

Множество функций, среди которых ищутся те, на которых функционал достигает свои экстремальные значения, обозначим $\mathcal{D}(\subseteq \mathfrak{N})$. Функции $y \in \mathcal{D}$ называются допустимыми.

Однако не всегда вариационная задача имеет решение. Действительно, рассмотрим функционал $\mathcal{J}(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dt$ с областью определения $\mathfrak{N} = \{y \mid y \in \mathbf{C}^1([0; 1])\}$ и краевыми условиями $y(0) = 0, y'(1) = 1$. Следовательно,

$$\mathcal{D} = \{y \mid y \in \mathbf{C}^1([0; 1]), y(0) = 0, y'(1) = 1\}.$$

Среди функций $y(t) \in \mathcal{D}$ требуется найти такую, на которой функционал $\mathcal{J}(y)$ принимает минимальное значение. Нетрудно видеть, что для любого $y(t) \in \mathcal{D}$ функционал $\mathcal{J}(y) > 1$ и $\mathcal{J}(y)$ не достигает своего минимального значения.

Определение 7.1.2. Мы говорим, что функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ абсолютного минимума (максимума), если для любого $y(t) \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство $\mathcal{J}(y) \geq \mathcal{J}(y_0)$ ($\mathcal{J}(y) \leq \mathcal{J}(y_0)$).

Определение 7.1.3. Скажем, что функция $h(t)$ является допустимым приращением функции $y(t) \in \mathcal{D}$, если $y(t) + h(t) \in \mathcal{D}$.

Множество допустимых приращений функции $y(t)$ обозначим $\mathcal{H}_y$:

$$\mathcal{H}_y = \{h \mid h \in \mathbf{C}^1([a, b]), y + h \in \mathcal{D}, h(a) = h(b) = 0\}.$$

Основное предположение относительно множества $\mathcal{H}_y$: $\mathcal{H}_y$ не пусто, и вместе с каждым элементом $h \in \mathcal{H}_y$ ему принадлежит элемент $\theta h(t)$, где $|\theta| \leq 1$. Если $\mathcal{H}_y$ — линейное пространство, то основное предположение выполняется автоматически.

Определение 7.1.4. Пусть $y_0(t) \in \mathcal{D}$ и для любого $h(t) \in \mathcal{H}_{y_0}$ функция $\mathcal{J}(y_0 + \theta h)$ переменного θ дифференцируема при $\theta = 0$. Тогда производная $\left. \frac{d}{d\theta} \mathcal{J}(y_0 + \theta h) \right|_{\theta=0}$ называется первой вариацией функционала $\mathcal{J}(y)$ на функции $y_0(t)$ и обозначается $\delta \mathcal{J}(y_0, h)$.

С другим подходом к изложению материала можно ознакомиться в [12].

7.2. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f(t, y, y') dt \quad (7.2)$$

на множестве $\mathfrak{N} = \left\{ y \mid y \in \mathbf{C}^1([a, b]) \right\}$. Будем считать, что функция $f(t, y, y')$ определена на множестве $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и является дважды непрерывно дифференцируемой на нём по всем своим аргументам, а функции $y(t)$ удовлетворяют краевым условиям

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \quad (7.3)$$

Множества допустимых функций $\mathcal{D}$ и допустимых приращений $\mathcal{H}_y$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ y \mid y \in \mathbf{C}^1([a, b]), y(a) = y_1, y(b) = y_2 \right\}, \\ \mathcal{H}_y &= \left\{ h \mid h \in \mathbf{C}^1([a, b]), h(a) = h(b) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Множество $\mathcal{H}_y$ в простейшей задаче вариационного исчисления обозначается $\dot{\mathbf{C}}^1([a, b])$.

Требуется найти такие функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$, на которых функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает своих минимального или максимального значений.

Пусть $\varepsilon > 0$, $y_0(t) \in \mathbf{C}^1([a, b])$.

Определение 7.2.1. Множество функций $y(t) \in \mathbf{C}^1([a, b])$ таких, что

$$\|y - y_0\|_{\mathbf{C}^1([a, b])} = \max_{t \in [a, b]} |y - y_0| + \max_{t \in [a, b]} |y' - y'_0| < \varepsilon,$$

называется слабой ε — окрестностью функции $y_0(t)$.

Пусть теперь $y, y_0 \in \mathcal{D}$. Через $U_\varepsilon(y_0)$ обозначим слабую ε — окрестность функции $y_0(t)$ в $\mathcal{D}$:

$$U_\varepsilon(y_0) = \left\{ y \mid y \in \mathcal{D}, \|y - y_0\|_{C^1([a,b])} < \varepsilon \right\}. \quad (7.4)$$

Определение 7.2.2. Мы говорим, что функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает слабого локального минимума (максимума) на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $y(t) \in U_\varepsilon(y_0)$ имеет место неравенство $\mathcal{J}(y) \geq \mathcal{J}(y_0)$ ($\mathcal{J}(y) \leq \mathcal{J}(y_0)$).

Пусть на $y_0(t) \in \mathcal{D}$ функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает слабый локальный минимум.

Теорема 7.1. Если функционал

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f(t, y, y') dt$$

достигает слабого локального минимума (максимума) на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$, то $\delta\mathcal{J}(y_0, h) = 0$ для любого $h \in \dot{C}^1([a, b])$.

Доказательство. ► Если $h = 0, t \in [a, b]$, то утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим случай $h \not\equiv 0$. По условию теоремы существует $\varepsilon > 0$ такой, что $\mathcal{J}(y) \geq \mathcal{J}(y_0)$ для любого $y(t) \in U_\varepsilon(y_0)$. Так как $h(t) \not\equiv 0$, то $\|h\|_{C^1([a,b])} > 0$. Для всех θ таких, что $|\theta| < \frac{\varepsilon}{\|h\|_{C^1([a,b])}}$, функции $y(t) = y_0(t) + \theta h(t) \in U_\varepsilon(y_0)$. Действительно, согласно определению нормы имеем

$$\begin{aligned} \max_{t \in [a,b]} |y - y_0| + \max_{t \in [a,b]} |y' - y'_0| &= |\theta| \max_{t \in [a,b]} |h| + |\theta| \max_{t \in [a,b]} |h'| = \\ &= |\theta| \|h\|_{C^1([a,b])} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathcal{J}(y_0 + \theta h) = \Phi(\theta)$. При $\theta = 0$ функция $\Phi(\theta)$ достигает локального минимума. При условиях, наложенных на функцию $f(t, y, y')$, функция $\Phi(\theta)$ дифференцируема в точке $\theta = 0$. Из теоремы Ферма следует, что $\frac{d\Phi}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = 0$. Значит, $\frac{d}{d\theta} \mathcal{J}(y_0 + \theta h) \Big|_{\theta=0} = 0$ для любого $h \in \dot{C}^1([a, b])$. Если на функции $y_0(t)$ функционал (7.2) достигает слабого локального максимума, то доказательство проводится аналогично. ■

Вычислим теперь $\Phi'(0)$:

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \int_a^b f(t, y_0 + \theta h, y'_0 + \theta h') dt \right\} \Big|_{\theta=0} = \int_a^b [f_y h + f'_y h'] dt.$$

Лемма 7.1. Пусть функция $\psi(t) \in C([a, b])$. Если для любой непрерывной функции $h(t), t \in [a, b]$, справедливо равенство

$$\int_a^b h(t) \psi(t) dt = 0,$$

то $\psi(t) = 0$ для любого $t \in [a, b]$.

Доказательство. ► Доказательство проведём от противного. Пусть функция $\psi(t) \not\equiv 0$. Значит, существует такое $t_0 \in (a, b)$, что $\psi(t_0) \neq 0$. Предположим, что $\psi(t_0) > 0$. Рассмотрим δ — окрестность точки t_0 ($(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \in (a, b)$), в которой $\psi(t) > \frac{1}{2}\psi(t_0)$. Возьмем функцию $h(t)$ такой, что $h(t) > 0, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ и $h(t) = 0$ вне интервала $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. В качестве $h(t)$ можно взять

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, t_0 - \delta], \\ (t - t_0 + \delta)^m (t_0 + \delta - t)^m, & t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], m > 0, \delta > 0, \\ 0, & t \in [t_0 + \delta, b]. \end{cases} \quad (7.5)$$

Величина δ выбирается такой, что $t_0 - \delta > a, t_0 + \delta < b$.

Заметим, что построенная нами пробная функция (7.5) автоматически удовлетворяет условию $h(a) = h(b) = 0$. Отсюда имеем

$$\int_a^b \psi(t) h(t) dt = \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} \psi(t) h(t) dt > \frac{\psi(t_0)}{2} \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} h(t) dt > 0.$$

Противоречие. ■

Следствие 7.1.1. Результаты леммы 7.1 останутся справедливыми, если потребовать, чтобы $h \in \dot{C}^1([a, b])$.

Для этого достаточно положить $m \geq 2$ ($m > 1$) в формуле (7.5). Лемма 7.1 остается справедливой, если потребовать также

$$h(a) = h(b) = \dots = h^{(l)}(a) = h^{(l)}(b) = 0, \quad l \leq k - 1.$$

Для этого достаточно взять в (7.5) $m = k + 1$ ($m > k$).

Замечание 7.2.1. Пусть $y_0 \in \mathcal{D}$ и $\mathcal{D} \subseteq C^1([a, b])$. Если $\delta \mathcal{J}(y_0, h)$ определена на $y_0(t)$ и $\delta \mathcal{J}(y_0, h) = 0$ для любого $h \in \mathring{C}^1([a, b])$, то $y_0(t)$ называется стационарной точкой функционала $\mathcal{J}(y)$ на множестве $\mathcal{D}$. $\diamond$

Теорема 7.2. Пусть функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает слабого локального экстремума на функции $y_0 \in \mathcal{D}$. Если $y_0(t) \in C^2([a, b])$, то функция $y_0(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0. \quad (7.6)$$

Доказательство. $\blacktriangleright$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [f_y h + f_{y'} h'] dt = f_{y'} h \Big|_a^b + \int_a^b \left[f_{y'} h - \frac{d}{dt} (f_{y'}) h \right] dt = \\ &= \int_a^b \left[f_y - \left(\frac{d}{dt} f_{y'} \right) \right] h dt \text{ для любого } h \in \mathring{C}^1([a, b]). \end{aligned}$$

Обозначим $\psi(t) = f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}$. Функция $\psi(t)$ непрерывная. Из следствия к лемме 7.1 следует, что $\psi(t) \equiv 0, t \in [a, b]$. Отсюда получаем (7.6). В уравнении Эйлера (7.6) $\frac{d}{dt}$ — полная производная, поэтому её можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} f_{y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y''. \quad (7.7)$$

■

Рассмотрим частные случаи уравнения Эйлера (7.6): 1. $f(t, y, y') \equiv f(t, y') \implies$

$$\frac{d}{dt} (f_{y'}(t, y')) = 0 \implies f_{y'}(t, y') = \text{const.}$$

2. $f(t, y, y') \equiv f(y, y') \implies$ уравнение Эйлера принимает вид

$$f_y - f_{yy'} y' - f_{y'y'} y'' = 0.$$

Положим $y' = p(y), y'' = p(y)p'(y)$, тогда $f_y - f_{yp}p - f_{pp}pp' = 0$. Интегрируя это уравнение, получим

$$d[f(y, p) - pf_p(y, p)] = 0 \implies f(y, p) - pf_p(y, p) = \text{const.}$$

Таким образом, если функция f в функционале (7.2) не зависит явно от переменной t , то уравнение (7.6) имеет первый интеграл.

Уравнение Эйлера является уравнением второго порядка. Его решения должны удовлетворять двум краевым условиям (7.3).

Определение 7.2.3. Каждая интегральная кривая, соответствующая решению уравнения Эйлера (7.6), называется *экстремалью*. Если решение уравнения Эйлера удовлетворяет краевым условиям (7.3), то соответствующая ему интегральная кривая называется *допустимой экстремалью*.

Пусть функционал $\mathcal{J}(y)$ на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ достигает слабого локального минимума. Тогда в точке с координатами $(t_0, y_0(t_0))$, $t_0 \in (a, b)$, в которой $f_{y'y'} \neq 0$, функция $y_0(t)$ имеет непрерывную вторую производную. Это утверждение следует из леммы Дюбуа-Реймона.

Лемма 7.2. (Дюбуа-Реймона.) Если функции $\varphi(t), \psi(t) \in C([a, b])$ и для любой функции $h(t) \in \dot{C}^1[a, b]$ интеграл

$$\int_a^b [\psi(t)h(t) + \varphi(t)h'(t)] dt = 0, \quad (7.8)$$

то функция φ — дифференцируемая на $[a, b]$ и $\frac{d\varphi}{dt} = \psi(t)$ для любого $t \in [a, b]$.

Доказательство. ► Положим $A(t) = \int_a^t \psi(\tau) d\tau$. Тогда из равенства (7.8) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_a^b [\psi(t)h + \varphi(t)h'] dt &= A(t)h|_a^b + \int_a^b [-A(t) + \varphi(t)] h' dt = \\ &= \int_a^b [-A(t) + \varphi(t) - c] h' dt = 0, \end{aligned}$$

где c — произвольная постоянная. Выберем $c = c_0$ такой, чтобы следующее выражение обратилось в ноль: $\int_a^b [-A(t) + \varphi(t) - c_0] dt = 0$, и

возьмём

$$h(t) = \int_a^t [-A(t) + \varphi - c_0] dt, \quad h(t) \in \mathring{\mathbf{C}}^1[a, b].$$

Тогда

$$\int_a^b [-A(t) + \varphi(t) - c_0]^2 dt = 0 \implies$$

$$\varphi(t) = \int_a^t \psi(\tau) d\tau + c_0 \text{ для любого } t \in [a, b] \implies \frac{d\varphi(t)}{dt} = \psi(t).$$

Положив $\psi(t) = f_y$, $\varphi(t) = f_{y'}$, получим уравнение Эйлера (7.6). Подчеркнём, что дифференцируемость функции $\varphi(t)$ заранее не предполагалась. ■

Таким образом, если функционал на функции $y(t) \in \mathbf{C}^1([a, b])$ достигает экстремума и $f_{y'y'} \neq 0$ для любого $t \in [a, b]$, то $y(t) \in \mathbf{C}^2([a, b])$ и уравнение Эйлера может быть представлено в виде $y'' = \Phi(t, y, y')$.

Выше мы рассматривали функционал $\mathcal{J}(y)$, определённый на множестве дифференцируемых функций, которые мы считали элементами пространства $\mathbf{C}^1$. Рассмотрим теперь функционал $\mathcal{J}(y)$, определяя расстояние между функциями по норме пространства $\mathbf{C}$. Возьмём $y_0(t) \in \mathbf{C}([a, b])$. Множество функций $y(t) \in \mathbf{C}([a, b])$ таких, что

$$\|y - y_0\|_{\mathbf{C}([a, b])} = \max_{t \in [a, b]} |y - y_0| < \varepsilon,$$

называется сильной ε -окрестностью функции $y_0(t)$. Пусть теперь $y, y_0 \in \mathcal{D}$. Через $V_\varepsilon(y_0)$ обозначим сильную ε -окрестность функции $y_0(t)$ в $\mathcal{D}$:

$$V_\varepsilon(y_0) = \left\{ y \mid y \in \mathcal{D}, \|y - y_0\|_{\mathbf{C}([a, b])} < \varepsilon \right\}. \quad (7.9)$$

Определение 7.2.4. Мы говорим, что функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает сильного локального минимума (максимума) на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $y(t) \in V_\varepsilon(y_0)$ имеет место неравенство $\mathcal{J}(y) \geq \mathcal{J}(y_0)$ ($\mathcal{J}(y) \leq \mathcal{J}(y_0)$).

Всякий абсолютный экстремум является также сильным локальным экстремумом и слабым локальным экстремумом. Сильный локальный экстремум является также и слабым локальным экстремумом. Если $J(y_0)$ является экстремальным значением функционала для

функций $y(t)$ таких, что $\|y(t) - y_0(t)\|_{C([a,b])} < \varepsilon$, то $J(y_0)$ тем более будет экстремальным значением для тех $y(t)$, для которых $\|y(t) - y_0(t)\|_{C^1([a,b])} < \varepsilon$. Обратное, как показывает разобранный ниже пример, вообще говоря, неверно.

Пример 7.2.1. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^\pi y^2(1 - y'^2)dt, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Решение. Уравнение Эйлера и граничные условия будут следующими:

$$y(1 + y'^2 + yy'') = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \quad (7.10)$$

Решением краевой задачи (7.10) будет функция $y_0(t) \equiv 0$, $t \in [0, \pi]$. Зададим приращение к $y_0 = 0$. Тогда $y = h$ и приращение функционала имеет вид

$$\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(h) - \underset{=0}{\mathcal{J}(0)} = \int_0^\pi h^2(1 - h'^2)dt.$$

Рассмотрим слабую ε -окрестность функции $y_0 : \max_{t \in [a,b]} |h| + \max_{t \in [a,b]} |h'| < \varepsilon$. Мы видим, что при достаточно малых значениях $\max_{t \in [a,b]} |h'|$ величина $\Delta\mathcal{J} \geq 0$. Таким образом, на $y_0 \equiv 0$ достигается слабый локальный минимум, однако сильный локальный минимум на $y_0 = 0$ не достигается. Действительно, возьмём $h = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt$. Величину $\max_{t \in [a,b]} |h|$ выбором n можно сделать сколь угодно малой. Подставляя h в $\mathcal{J}(h)$, получим

$$\mathcal{J}(h) = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8} \text{ и при } n > 4 \text{ приращение } \Delta\mathcal{J} \leq 0. \diamond$$

7.3. Некоторые обобщения простейшей задачи

7.3.1. Функционалы, содержащие вектор-функцию

Ниже будут использоваться следующие обозначения:

$$\mathcal{J}(\vec{y}) = \mathcal{J}(y_1, \dots, y_n), f(t, \vec{y}, \vec{y}') = f(t, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n).$$

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}(\vec{y}) = \int_a^b f(t, \vec{y}, \vec{y}') dt, \quad (7.11)$$

в котором функция $f(t, \vec{y}, \vec{y}')$ определена на множестве $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и непрерывна на нем вместе со своими вторыми производными. Потребуем, чтобы функция $\vec{y}(t)$ удовлетворяла граничным условиям

$$\vec{y}(a) = \vec{A}, \quad \vec{y}(b) = \vec{B}, \quad (7.12)$$

где $\vec{A}, \vec{B}$ — заданные векторы. Множество допустимых функций и множество допустимых приращений имеют вид

$$\mathcal{D} = \left\{ \vec{y}(t) \mid \vec{y} \in C^1([a, b]), \vec{y}(a) = \vec{A}, \vec{y}(b) = \vec{B} \right\},$$

$$\mathcal{H}_{\vec{y}} \equiv \dot{C}^1([a, b]) = \left\{ \vec{h} \mid \vec{h} \in C^1([a, b]), \vec{h}(a) = \vec{h}(b) = \vec{0} \right\}.$$

Требуется найти такую вектор-функцию $\vec{y}(t)$, на которой функционал $\mathcal{J}(\vec{y})$ достигает своего экстремального значения. Задача (7.11), (7.12) называется задачей с закреплёнными концами.

Лемма 7.3. Пусть $\vec{\psi}(t) \in C^1([a, b])$ и для любой $\vec{h} \in \dot{C}^1([a, b])$ выполняется равенство

$$\int_a^b \left(\vec{\psi}(t), \vec{h}(t) \right) dt = 0.$$

Тогда $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{0}$, $t \in [a, b]$.

Доказательство. ► Возьмём вектор-функцию $\vec{h}(t)$ следующей

$$\vec{h}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_j(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Здесь $h_j(t)$ - пробная функция (7.5) с $m = 2$. Из следствия к лемме 7.1 находим $\psi_j(t) \equiv 0$. Меняя j от 1 до n , получаем утверждение леммы. ■

Определение 7.3.1. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\vec{y}_0(t) \in \mathbf{C}^1([a, b])$. Множество функций $\vec{y}(t) \in \mathbf{C}^1([a, b])$ таких, что $\|y - y_0\|_{\mathbf{C}^1([a, b])} = \max_{t \in [a, b]} |\vec{y} - \vec{y}_0| + \max_{t \in [a, b]} |\vec{y}' - \vec{y}_0'| < \varepsilon$, называется слабой ε -окрестностью функции $\vec{y}_0(t)$.

Здесь $|\vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$.

Рассмотрим функции $\vec{y}(t), \vec{y}_0(t) \in \mathcal{D}$. Обозначим через $U_\varepsilon(y_0)$ слабую ε -окрестность функции $\vec{y}_0(t)$ в $\mathcal{D}$:

$$U_\varepsilon(\vec{y}_0) = \{\vec{y} \in \mathcal{D}, \|y - y_0\|_{\mathbf{C}^1([a, b])} < \varepsilon\}.$$

Определение 7.3.2. Мы говорим, что функционал $\mathcal{J}(\vec{y})$ достигает на допустимой функции $\vec{y}_0(t)$ слабый локальный минимум, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любой $\vec{y}(t) \in U_\varepsilon(\vec{y})$ справедливо неравенство $\mathcal{J}(\vec{y}) \geq \mathcal{J}(\vec{y}_0)$.

Возьмём $\vec{h}(t) \in \dot{\mathbf{C}}^1([a, b])$ и определим однопараметрическое семейство функций следующим образом: $\vec{y} = \vec{y}_0 + \theta \vec{h}, \vec{y} \in \mathcal{D}, \theta \in \mathbb{R}$. Отметим, что здесь функции $\vec{y}_0$ и $\vec{h}$ фиксированные.

Теорема 7.3. Пусть функционал (7.10) достигает слабого локального минимума на функции $\vec{y}_0(t) \in \mathcal{D}$. Тогда $\delta \mathcal{J}(\vec{y}_0, \vec{h}) = 0$ для любого $\vec{h} \in \dot{\mathbf{C}}^1([a, b])$. Если $\vec{y}_0(t) \in \mathbf{C}^2([a, b])$, то она удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$f_{\vec{y}} - \frac{d}{dt} f_{\vec{y}'} = \vec{0}. \quad (7.13)$$

Векторное уравнение (7.13) эквивалентно системе из n уравнений второго порядка. Здесь введены обозначения

$$f_{\vec{y}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}} = \text{colon} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n} \right), \quad f_{\vec{y}'} = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}'} = \text{colon} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y'_n} \right)$$

Доказательство. ► Пусть $\vec{y}_0 \in \mathcal{D}$ даёт слабый локальный минимум функционала (7.11). Тогда существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $\vec{y}(t) \in U_\varepsilon(\vec{y}_0)$ справедливо неравенство $\mathcal{J}(\vec{y}) \geq \mathcal{J}(\vec{y}_0)$. Если

$|\theta| < \frac{\varepsilon}{\|\vec{h}\|_{\mathbf{C}^1([a,b])}}, \vec{h} \neq \vec{0}$, то норма $\|\vec{y} - \vec{y}_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])} = |\theta| \|\vec{h}\|_{\mathbf{C}^1([a,b])} < \varepsilon$

и $\vec{y}(t) \in U_\varepsilon(\vec{y}_0)$. Рассмотрим функцию $\Phi(\theta) = \mathcal{J}(\vec{y}_0 + \theta\vec{h})$. Из условий, наложенных на основную функцию $f(t, \vec{y}, \vec{y}')$, следует, что $\Phi(\theta)$ дифференцируема при $\theta = 0$. Так как при $\theta = 0$ функция $\Phi(\theta)$ достигает минимума, то по теореме Ферма $\Phi'(0) = 0$. В результате для производной $\Phi'(0)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 = \Phi'(0) &= \left. \frac{d}{d\theta} \int_a^b f(t, \vec{y}_0 + \theta\vec{h}, \vec{y}' + \theta\vec{h}') dt \right|_{\theta=0} = \\ &= \int_a^b \left[(f_{\vec{y}}, \vec{h}) + (f_{\vec{y}'}, \vec{h}') \right] dt = \left(f_{\vec{y}}, \vec{h} \right) \Big|_a^b + \int_a^b \left(f_{\vec{y}'} - \frac{d}{dt} f_{\vec{y}'}, \vec{h} \right) dt. \end{aligned} \quad (7.14)$$

В правой части равенства (7.14) первый член равен нулю, так как $\vec{h}(a) = \vec{h}(b) = \vec{0}$. Согласно предположениям, сделанным выше, функция $f_{\vec{y}'} - \frac{d}{dt} f_{\vec{y}'}$ является непрерывной, поэтому из леммы 7.3 следует уравнение Эйлера (7.13). ■

Для решения краевой задачи мы имеем n уравнений второго порядка и $2n$ краевых условий (7.12).

Каждая интегральная кривая, являющаяся графиком решения векторного уравнения Эйлера (7.13), называется *экстремалью*. Интегральная кривая, соответствующая допустимому решению, называется *допустимой экстремалью*.

7.3.2. Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f(t, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) dt. \quad (7.15)$$

Основная функция $f(t, z, z_1, \dots, z_k)$ определена на множестве $[a, b] \times \mathbb{R}^{k+1}$ и $k+1$ раз непрерывно дифференцируема по всем своим переменным.

Рассмотрим задачу отыскания экстремумов функционала (7.15) среди функций $y(t) \in \mathbf{C}^k([a, b])$, которые удовлетворяют граничным

условиям:

$$\begin{cases} y(a) = A_0; & y'(a) = A_1; & \dots & y^{(k-1)}(a) = A_{k-1}, \\ y(b) = B_0; & y'(b) = B_1; & \dots & y^{(k-1)}(b) = B_{k-1}. \end{cases} \quad (7.16)$$

Множество допустимых функций:

$$\mathcal{D} = \left\{ y \mid y \in \mathbf{C}^k([a, b]), \left[\begin{array}{l} y(a) = A_0; \quad \dots \quad y^{(k-1)}(a) = A_{k-1}, \\ y(b) = B_0; \quad \dots \quad y^{(k-1)}(b) = B_{k-1}. \end{array} \right] \right\}$$

Множество допустимых приращений:

$$\mathcal{H}_y = \mathring{\mathbf{C}}^k([a, b]) = \left\{ h \mid h \in \mathbf{C}^k([a, b]), \left[\begin{array}{l} h(a) = \dots = h^{(k-1)}(a) = 0, \\ h(b) = \dots = h^{(k-1)}(b) = 0. \end{array} \right] \right\}$$

Ясно, что $y + h \in \mathcal{D}$.

Определение 7.3.3. Будем говорить, что функционал $\mathcal{J}(y)$ (7.15) достигает на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ локального минимума, если существует такой $\varepsilon > 0$, что для любой функции $y(t) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющей условию

$$\|y - y_0\|_{\mathbf{C}^k([a, b])} = \max_{t \in [a, b]} |y(t) - y_0(t)| + \dots + \max_{t \in [a, b]} |y^{(k)}(t) - y_0^{(k)}(t)| < \varepsilon,$$

имеет место неравенство $\mathcal{J}(y) \geq \mathcal{J}(y_0)$.

Пусть $y(t), y_0(t) \in \mathcal{D}$. Обозначим ε -окрестность функции $y_0(t)$ в $\mathcal{D}$ через $U_\varepsilon(y_0)$:

$$U_\varepsilon(y_0) = \left\{ y \mid y \in \mathcal{D}, \|y - y_0\|_{\mathbf{C}^k([a, b])} < \varepsilon \right\}.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций: $y = y_0 + \theta h$, $h \in \mathring{\mathbf{C}}^k([a, b])$, $y(t), y_0(t) \in \mathcal{D}$. Отметим, что здесь функции $y_0(t)$ и $h(t)$ предполагаются фиксированными.

Теорема 7.4. Если функционал $\mathcal{J}(y)$ (7.15) достигает на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ локального минимума, то первая вариация функционала $\delta\mathcal{J}(y_0, h) = 0$ для любого $h \in \mathring{\mathbf{C}}^k([a, b])$. Если кроме того $y_0(t) \in \mathbf{C}^{2k}([a, b])$, то она удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$L(y_0) = f_y - \frac{d}{dt}f_{y'} + \frac{d^2}{dt^2}f_{y''} + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}f_{y^{(k)}} = 0. \quad (7.17)$$

Доказательство. ► Предположим, что $y_0 \in \mathcal{D}$ даёт локальный минимум функционала $\mathcal{J}(y)$ (7.15). Тогда существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любых $\vec{y}(t) \in U_\varepsilon(\vec{y}_0)$ справедливо неравенство $\mathcal{J}(\vec{y}) \geq \mathcal{J}(\vec{y}_0)$. Если $|\theta| < \frac{\varepsilon}{\|\vec{h}\|_{\mathbf{C}^k([a,b])}}$, $\vec{h} \neq \vec{0}$, то норма $\|\vec{y} - \vec{y}_0\|_{\mathbf{C}^k([a,b])} < \varepsilon$. Согласно сделанным выше предположениям относительно основной функции $f(t, y, y', y'', \dots, y^{(k)})$ производная $\Phi'(0)$ существует и равна

$$\begin{aligned} \Phi'(0) = \delta\mathcal{J}(y_0, h) &= \frac{d}{d\theta} \int_a^b f(t, \vec{y}_0 + \theta\vec{h}, \vec{y}' + \theta\vec{h}', \dots, \vec{y}_0^{(k)} + \theta\vec{h}^{(k)}) dt \Big|_{\theta=0} = \\ &= \int_a^b \left(f_y h + f_{y'} h' + f_{y''} h'' + \dots + f_{y^{(k)}} h^{(k)} \right) dt. \end{aligned}$$

Так как функция $\Phi(\theta)$ при $\theta = 0$ принимает свое минимальное значение, то по теореме Ферма $\Phi'(0) = 0$. Следовательно, для любого $h \in \mathring{\mathbf{C}}^k([a, b])$ получаем

$$\delta\mathcal{J}(y_0, h) = \int_a^b \left(f_y h + f_{y'} h' + f_{y''} h'' + \dots + f_{y^{(k)}} h^{(k)} \right) dt = 0.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_a^b L(y_0) h dt + [f_{y'} h]_a^b + f_{y''} h'|_a^b - \frac{d}{dt} f_{y''} h \Big|_a^b + \dots = 0 \quad (7.18)$$

для любого $h \in \mathring{\mathbf{C}}^k([a, b])$.

Производная наиболее высокого порядка функции h в (7.18) содержится в члене $[f_{y^{(k)}} h^{(k-1)}]_a^b$, поэтому все члены, стоящие в квадратных скобках, обращаются в 0. В результате получаем $\int_a^b L(y_0) h dt = 0$

для любого $h \in \mathring{\mathbf{C}}^k([a, b])$.

Так как функция $L(y_0)$ непрерывная, то из следствия к основной лемме 7.1 будем иметь $L(y_0) = 0, t \in [a, b]$.

В результате получаем уравнение $2k$ -го порядка (7.17). Для определения $y_0(t)$ мы имеем $2k$ краевых условий (7.16). ■

Каждая интегральная кривая, соответствующая решению уравнения Эйлера (7.17), называется *экстремалью*, а интегральная кривая, соответствующая допустимому решению, — *допустимой экстремалью*.

7.3.3. Задача со свободными концами

Требуется найти экстремум функционала

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f(t, y, y') dt \quad (7.19)$$

при условии

$$y(a) = y_1.$$

Основная функция $f(t, y, y')$ определена на множестве $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и дважды непрерывно дифференцируема по всем своим переменным. Среди непрерывно дифференцируемых кривых (описываемых функциями $y = y(t)$, $t \in [a, b]$), выходящих из точки (a, y_1) и достигающих прямой $t = b$, найти такие, на которых бы функционал достигал экстремума. Обозначим через

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^* &= \left\{ y \mid y \in \mathbf{C}^1([a, b]) \right\}, \\ \mathcal{D}^* &= \left\{ y \mid y \in \mathbf{C}^1([a, b]), y(a) = y_1 \right\}, \\ \mathcal{H}_y^* &= \left\{ h \mid h \in \mathbf{C}^1([a, b]), h(a) = 0, y + h \in \mathcal{D}^* \right\} \end{aligned}$$

множества определения функционала, допустимых функций и допустимых приращений соответственно. Возьмём однопараметрическое семейство функций $y = y_0 + \theta h$, $y_0 \in \mathcal{D}^*$, $h \in \mathcal{H}_{y_0}^*$.

Теорема 7.5. Пусть функционал $\mathcal{J}(y)$ (7.19) достигает на функции $y_0 \in \mathcal{D}^*$ слабого локального минимума. Тогда $\delta \mathcal{J}(y_0, h) = 0$ для любого $h \in \mathcal{H}_{y_0}^*$. Если $y_0 \in \mathbf{C}^2([a, b])$, то она удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0 \quad (7.20)$$

и граничным условиям

$$y(a) = y_1, \quad f_{y'} \Big|_{t=b} = 0. \quad (7.21)$$

Второе граничное условие (7.21) называется **естественным**.

Доказательство. ► Пусть $y_0(t) \in \mathcal{D}^*$ дает слабый локальный минимум функционалу $\mathcal{J}(y)$ (7.19). Значит, существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любой функции

$$y(t) \in U_\varepsilon^*(y_0) = \left\{ y \mid y \in \mathcal{D}^*, \|y - y_0\|_{C^1([a,b])} < \varepsilon \right\}$$

имеет место неравенство

$$\mathcal{J}(y) \geq \mathcal{J}(y_0). \quad (7.22)$$

Функция $y_0(t)$ принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения

$$y_0(a) = y_1, \quad y_0(b) = y_2. \quad (7.23)$$

В частности, условие (7.22) выполняется для любой функции $y(t) \in \mathcal{D}^*$, удовлетворяющей условиям (7.23). Следовательно, функция $y_0(t)$ также дает слабый локальный минимум в задаче с закреплёнными концами. Отсюда следует, что функция $y_0(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (7.20).

Рассмотрим первую вариацию $\Phi'(0) = 0 = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h') dt$. Отсюда получаем

$$0 = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h') dt = f_{y'} h \Big|_a^b + \int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) h dt = f_{y'} h \Big|_b.$$

Так как величина $h(b)$ в общем случае не равна нулю, то $f_{y'} \Big|_{t=b} = 0$. Для отыскания функции $y_0(t)$ мы имеем уравнение Эйлера (7.20) и два краевых условия (7.21): $y(a) = y_1$, $f_{y'} \Big|_{t=b} = 0$. ■

7.4. Условный экстремум

7.4.1. Изопериметрическая задача

Изопериметрическая задача возникла давно (задача Дидоны) и формулируется следующим образом: среди всех замкнутых кривых

данной длины найти такую, которая бы ограничивала фигуру наибольшей площади. В дальнейшем все подобные задачи получили название **изопериметрических**.

Рассмотрим одну из них: среди непрерывно дифференцируемых функций $y(t)$, $t \in [a, b]$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2, \quad (7.24)$$

найти такие, на которых функционал

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f(t, y, y') dt \quad (7.25)$$

достигает экстремума, а функционал

$$G(y) = \int_a^b g(t, y, y') dt \quad (7.26)$$

имеет заданное значение $G(y) = l$. В функционалах (7.25), (7.26) основные функции $f(t, y, y')$ и $g(t, y, y')$ определены на множестве $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и дважды непрерывно дифференцируемые на нем. Множество допустимых функций имеет вид

$$\mathcal{D} = \left\{ y \mid y \in \mathbf{C}^1([a, b]), \quad y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2, \quad G(y) = l \right\}.$$

Через $\mathring{\mathbf{C}}^1([a, b])$, как и ранее, обозначим множество функций

$$\mathring{\mathbf{C}}^1([a, b]) = \left\{ h \mid h \in \mathbf{C}^1([a, b]), \quad h(a) = h(b) = 0 \right\}.$$

Определение 7.4.1. Будем говорить, что функционал $\mathcal{J}(y)$ (7.25) достигает на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ слабого локального минимума, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любых $y(t) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих условию $\|y - y_0\|_{\mathbf{C}^1([a, b])} < \varepsilon$, имеет место неравенство $\mathcal{J}(y) \geq \mathcal{J}(y_0)$.

Теорема 7.6. Пусть функционал $\mathcal{J}(y)$ (7.25) достигает слабого локального минимума на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ и пусть первая вариация $\delta G(y_0, h) \neq 0$ для некоторого $h_0 \in \mathring{\mathbf{C}}^1([a, b])$. Тогда найдётся такое число λ , что $\delta F(y_0, h) = 0$ для любого $h \in \mathring{\mathbf{C}}^1([a, b])$, где $F = \mathcal{J} + \lambda G$.

Если кроме того функция $y_0(t) \in C^2([a, b])$, то она удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\varphi_y - \frac{d}{dt}\varphi_{y'} = 0, \quad \varphi = f + \lambda g. \quad (7.27)$$

Доказательство. ► Пусть $y_0 \in \mathcal{D}$ даёт слабый локальный минимум функционала $\mathcal{J}(y)$ (7.25). По условию теоремы существует $h_0 \in \mathring{C}^1([a, b])$ такая, что $\delta G(y_0, h_0) = \int_a^b (g_y h_0 + g_{y'} h'_0) dt \neq 0$. Возьмём произвольную функцию $h \in \mathring{C}^1([a, b])$ и рассмотрим функционалы $\mathcal{J}(y)$ (7.25) и $G(y)$ (7.26) на функциях вида

$$y(t) = y_0(t) + \alpha h_0(t) + \beta h(t),$$

где α и β — постоянные. Они не являются произвольными и связаны между собой таким образом, чтобы $y \in \mathcal{D}$. Так как функции h и h_0 фиксированные, то мы можем рассмотреть функции

$$\mathcal{J}(y_0 + \alpha h_0 + \beta h) = \Phi(\alpha, \beta),$$

$$G(y_0 + \alpha h_0 + \beta h) = \Psi(\alpha, \beta),$$

как функции переменных α и β . Для частных производных функций $\Phi(\alpha, \beta)$ и $\Psi(\alpha, \beta)$ имеем

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\beta=0} = \int_a^b (f_y h_0 + f_{y'} h'_0) dt; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right|_{\alpha=\beta=0} = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h') dt; \quad (7.28)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\beta=0} = \int_a^b (g_y h_0 + g_{y'} h'_0) dt; \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right|_{\alpha=\beta=0} = \int_a^b (g_y h + g_{y'} h') dt. \quad (7.29)$$

В результате мы получили задачу на условный экстремум для функции двух переменных. При $\alpha = \beta = 0$ функция $\Phi(\alpha, \beta)$ принимает своё минимальное значение при условиях $\Psi(\alpha, \beta) = l$, $\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\beta=0} \neq 0$. Из теоремы об условном экстремуме следует существование числа λ такого, что $d(\Phi + \lambda \Psi) = 0$ при значениях $\alpha = \beta = 0$. Обозначая $F = \Phi + \lambda \Psi$, будем иметь

$$1. \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\beta=0} = 0 \implies \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=\beta=0} = 0.$$

Отсюда и из (7.28), (7.29) находим

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}} = - \frac{\int_a^b (f_y h_0 + f_{y'} h'_0) dt}{\int_a^b (g_y h_0 + g_{y'} h'_0) dt} (= \lambda(h_0)). \quad (7.30)$$

$$2. \left. \frac{\partial F}{\partial \beta} \right|_{\alpha=\beta=0} = 0 \implies \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=\beta=0} = 0.$$

Используя (7.29), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_a^b [(f_y h + f_{y'} h') + \lambda(g_y h + g_{y'} h')] dt = \\ & = \int_a^b [(f_y + \lambda g_y)h + (f_{y'} + \lambda g_{y'})h'] dt = 0 \text{ для любого } h \in \mathring{\mathbf{C}}^1([a, b]). \end{aligned}$$

Таким образом $\delta F(y_0, h) = 0$ для любого $h \in \mathring{\mathbf{C}}^1([a, b])$. Интегрируя по частям последний интеграл, из леммы (7.1) получим, что функция $\varphi = f + \lambda g$ удовлетворяет уравнению Эйлера (7.27): $\varphi_y - \frac{d}{dt} \varphi_{y'} = 0$. ■

Вопрос: зависит ли величина λ от выбора h_0 ?

Замечание 7.4.1. В теореме 7.6 мы требовали, чтобы функция $y_0(t)$ не являлась стационарной точкой функционала (7.26) $G(y)$. ◇

Использование:

1. Составляем функционал $F = \mathcal{J} + \lambda G$.
2. Для нахождения экстремалей получаем уравнение Эйлера: $\varphi_y - \frac{d}{dt} \varphi_{y'} = 0$ (7.27).
3. Его решения описываются функцией $y = y(t, c_1, c_2, \lambda)$.
4. Для определения постоянных c_1, c_2, λ имеем следующие условия $y(a) = y_1, y(b) = y_2, G(y) = l$.

7.4.2. Задача Лагранжа

Рассмотрим задачу: среди всех непрерывно дифференцируемых кривых $y = y(t)$, $z = z(t)$, лежащих на поверхности

$$g(t, y, z) = 0 \quad (7.31)$$

и концы которых закреплены

$$\begin{cases} y(a) = y_1, & z(a) = z_1, & g(a, y_1, z_1) = 0, \\ y(b) = y_2, & z(b) = z_2, & g(a, y_2, z_2) = 0, \end{cases} \quad (7.32)$$

найти такие, на которых функционал

$$F(y, z) = \int_a^b f(t, y, z, y', z') dt \quad (7.33)$$

достигает экстремума. Основная функция $f(t, y, z, p, q)$ определена на множестве $[a, b] \times$

$\times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ и непрерывно дифференцируема на нем. Функция $g(t, y, z)$

предполагается дважды непрерывно дифференцируемой и $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 > 0$. Отсюда следует, что поверхность $g(t, y, z)$ гладкая.

Определение 7.4.2. Пара функций $y(t), z(t) \in \mathbf{C}^1([a, b])$, которые удовлетворяют условию (7.32) и графики которых лежат на поверхности (7.31), называется *допустимой*. Она обозначается $\langle y(t), z(t) \rangle$.

Определение 7.4.3. Мы говорим, что функционал $F(y, z)$ достигает слабого локального минимума на паре функций $\langle y_0(t), z_0(t) \rangle$, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любых пар $\langle y(t), z(t) \rangle$, удовлетворяющих условию $\|y - y_0\|_{\mathbf{C}^1([a, b])} + \|z - z_0\|_{\mathbf{C}^1([a, b])} < \varepsilon$, имеет место неравенство $F(y, z) \geq F(y_0, z_0)$.

Теорема 7.7. Пусть функционал $F(y, z)$ (7.33) достигает на паре функций $\langle y_0(t), z_0(t) \rangle$ слабого локального минимума. Пусть также $y_0(t), z_0(t) \in \mathbf{C}^2([a, b])$, и в каждой точке кривой $y = y_0(t)$, $z = z_0(t)$, $t \in [a, b]$ имеет место либо неравенство $g_y \neq 0$, либо $g_z \neq 0$. Тогда

найдется функция $\lambda(t)$ такая, что функции $y_0(t), z_0(t)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} \varphi_y - \frac{d}{dt}\varphi_{y'} = 0 \\ \varphi_z - \frac{d}{dt}\varphi_{z'} = 0 \end{cases}, \quad \varphi = f + \lambda g, \quad (7.34)$$

составленным для функционала $L(y, z) = \int_a^b (f + \lambda g) dt$.

Доказательство. ► Пусть пара функций $\langle y_0(t), z_0(t) \rangle$ дает слабый локальный минимум функционала $F(y, z)$ (7.33). Будем предполагать, что на поверхности $g(t, y, z)$ в точках кривой $y = y_0(t), z = z_0(t), t \in [a, b]$ справедливо неравенство $g_z(t, y, z) \neq 0$. Рассмотрим на кривой точку $(\hat{t}, \hat{y}, \hat{z})$. В силу предположения в ней $g_z(\hat{t}, \hat{y}, \hat{z}) \neq 0$. Тогда на основании теоремы о неявной функции найдется окрестность $U(\hat{t}, \hat{y}, \hat{z})$ точки $(\hat{t}, \hat{y}, \hat{z})$ такая, что уравнения $g(t, y, z) = 0$ и $z = \omega(t, y), \hat{z} = \omega(\hat{t}, \hat{y})$ эквивалентны.

Возьмём теперь две точки на кривой $y = y_0(t), z = z_0(t), t \in [a, b]$, принадлежащие окрестности $U(\hat{t}, \hat{y}, \hat{z})$, а именно $C(t_1, y_0(t_1), z_0(t_1))$ и $D(t_2, y_0(t_2), z_0(t_2))$. Дугу $\widehat{CD}$ обозначим γ_0 . Рассмотрим на паре $\langle y_0(t), z_0(t) \rangle$ значения функционала (7.33):

$$F(y_0, z_0) = \int_a^{t_1} f dt + \hat{F}(y_0) + \int_{t_2}^b f.$$

Здесь

$$\hat{F}(y_0) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, y, \underbrace{\omega(t, y)}_z, y', \underbrace{\omega_t + \omega_y y'}_{z'}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \hat{f}(t, y, y') dt.$$

Покажем, что функционал $\hat{F}(y)$ достигает слабого локального минимума на кривой $y_0(t), t \in [t_1, t_2]$. Для этого проварируем кривую γ_0 . Тогда $\Delta \hat{F} = \Delta F \geq 0$. Отсюда следует, что функция $\hat{f}(t, y, y')$ удовлетворяет уравнению Эйлера $\hat{f}_y - \frac{d}{dt}\hat{f}_{y'} = 0$, и мы получаем

$$\begin{aligned} f_y + f_z \omega_y + f_{z'} [\omega_{ty} + \omega_{yy} y'] - \frac{d}{dt} [f_{y'} + \omega_y f_{z'}] &= 0 \implies \\ f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} + \omega_y \left[f_z - \frac{d}{dt} f_{z'} \right] &= 0. \end{aligned}$$

В результате, вспоминая, что $\omega_y = -\frac{g_y}{g_z}$, $g_z(t, y, z) \neq 0$, находим

$$\frac{f_y - \frac{d}{dt}f_{y'}}{g_y} = \frac{f_z - \frac{d}{dt}f_{z'}}{g_z} = -\lambda(t).$$

Из этих соотношений следует

$$\begin{cases} f_y + \lambda g_y - \frac{d}{dt}f_{y'} = 0, \\ f_z + \lambda g_z - \frac{d}{dt}f_{z'} = 0. \end{cases} \quad (7.35)$$

Обозначая $\varphi = f + \lambda g$, из (7.35) получим систему уравнений Эйлера (7.34). ■

Использование:

1. Составляем функцию $\varphi = f + \lambda g$ и выписываем систему уравнений Эйлера (7.33).
2. Общее решение системы (7.34) имеет вид

$$\begin{cases} y = y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda(t)), \\ z = z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda(t)). \end{cases}$$

3. Для определения четырёх постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 и функции $\lambda(t)$ служат условия (7.31), (7.32):

$$\begin{cases} y(a) = y_1, & z(a) = z_1, \\ y(b) = y_2, & z(b) = z_2, \end{cases} \quad g(t, y(t), z(t)) = 0.$$

Замечание 7.4.2. Если уравнение (7.31) может быть разрешено (например, относительно z) сразу для всех рассматриваемых t , то задача сводится к простейшей задаче вариационного исчисления заменой z, z' в основном функционале на их значение $z = \omega(t, y), z' = \frac{d}{dt}\omega(t, y)$. ◇

Замечание 7.4.3. Поверхность (7.31) может быть задана в параметрическом виде $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Линии $u = u(t), v = v(t)$ минимальной длины, лежащие на поверхности (7.31) и закрепленные в двух точках на ней, называются **геодезическими**. ◇

Найдем геодезические линии на цилиндре:

$$\vec{r} = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z), \quad u = \varphi, \quad v = z.$$

Длина дуги на цилиндре, отвечающая значениям t_1 и t_2 , равна

$$L[\varphi, z] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2 \varphi_t^2 + z_t^2}.$$

Уравнения Эйлера, отвечающие этому функционалу, будут следующими:

$$\underbrace{f_\varphi}_{=0} - \frac{d}{dt} \frac{\varphi_t R^2}{\sqrt{R^2 + \varphi_t^2 + z_t^2}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{R^2 \varphi_t}{\sqrt{R^2 \varphi_t^2 + z_t^2}} = c_1,$$

$$\underbrace{f_z}_{=0} - \frac{d}{dt} \frac{z_t}{\sqrt{R^2 + \varphi_t^2 + z_t^2}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{z_t}{\sqrt{R^2 \varphi_t^2 + z_t^2}} = c_2.$$

Разделив одно уравнение на другое и проинтегрировав найденное уравнение, будем иметь

$$\frac{z_t}{\varphi_t} = C (= \frac{c_2}{c_1}) \Longrightarrow \frac{dz}{d\varphi} = C \Longrightarrow \begin{cases} z = C\varphi + D, \\ x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi. \end{cases}$$

В результате получаем винтовые линии. $\diamond$

Глава 8

Автономные системы

8.1. Основные понятия и определения

Нормальная система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (8.1)$$

правая часть которой не зависит от переменной t , называется автономной. При этом предполагается, что в области Ω функция $\vec{f}(\vec{x})$ удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{C}(\Omega)$;
- 2) $\vec{f}(\vec{x}) \in Lip_{\vec{x}}(\Omega_L)$.

В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vec{x}_0 \in \Omega$ существует единственное решение $\vec{\varphi}(t), t \in J$, системы (8.1), удовлетворяющее начальному условию:

$$\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (8.2)$$

Ниже для простоты, чтобы не акцентировать внимание на области определения решения, будем считать $\Omega \equiv \mathbb{R}_{\vec{x}}^n$.

График решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, $t \in J$, в пространстве $\mathbb{R}_{t, \vec{x}}^{n+1}$ называется интегральной кривой. Её проекция на пространство $\mathbb{R}_{\vec{x}}^n$ называется фазовой траекторией или просто траекторией, а само пространство $\mathbb{R}_{\vec{x}}^n$ — фазовым. Направление стрелки на фазовой траектории будет указывать на возрастание времени t вдоль неё, тем самым определяя её ориентацию. Фазовая траектория в $\mathbb{R}_{\vec{x}}^n$ задаётся векторным уравнением $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J$, в котором время играет роль параметра.

8.2. Свойства решений автономных систем и теорема о поведении фазовых траекторий

Общие свойства решений автономных систем

1) Если $\vec{\varphi}(t), t \in (a, b)$, — решение системы (8.1), то для любого $\tau \in \mathbb{R}$ функция $\vec{\varphi}(t + \tau), t \in (a - \tau, b - \tau)$, также является решением и все эти решения при различных τ имеют одну и ту же фазовую траекторию.

Доказательство. ► Так как $\vec{\varphi}(t)$ — решение, то $\vec{\varphi}'(t) \equiv \vec{f}(\vec{\varphi}(t))$, $t \in (a, b)$. Заменяя t на $(t + \tau)$, получим $\vec{\varphi}'(t + \tau) \equiv \vec{f}(\vec{\varphi}(t + \tau))$. Значит функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t + \tau)$ — тоже решение. Эти решения имеют одну и ту же траекторию, так как через любую точку интегральной кривой первого решения $(\vec{x}^*, t^*)$, где $\vec{x}^* = \vec{\varphi}(t^*)$, интегральная кривая второго решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t + \tau)$ проходит через неё при $t = t^* - \tau$. Таким образом, каждая фазовая траектория, не являющаяся точкой, является проекцией бесконечно большого числа интегральных кривых. ■

2) Если $\vec{\psi}(t)$ и $\vec{\varphi}(t)$ — два решения системы (8.1) и существуют такие t_1 и t_2 , что $\vec{\psi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2)$, то $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t + \tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Доказательство. ► В силу свойства 1 функция $\vec{\varphi}(t + \tau), \tau = t_2 - t_1$ — решение системы (8.1). Из равенства $\vec{\varphi}(t_2) = \vec{\psi}(t_1)$ следует, что $\vec{\varphi}(t_1 + \tau) = \vec{\varphi}(t_2) = \vec{\psi}(t_1)$. Таким образом, решения $\vec{\varphi}(t + \tau)$ и $\vec{\psi}(t)$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям при $t = t_1$. В силу теоремы существования и единственности имеем

$$\vec{\varphi}(t + \tau) = \vec{\psi}(t).$$

Аналогично,

$$\vec{\psi}(t - \tau) = \vec{\varphi}(t).$$

Значит, две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают. Таким образом, фазовое пространство расслаивается на непесекающиеся траектории. ■

Из свойства 2 вытекает интересное **следствие**, а именно: если $\vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0)$ — решение системы (8.1) в форме Коши с начальными данными $(t_0, \vec{x}_0)$, то по свойству 2 функция $\vec{\varphi}(t + \tau, t_0 + \tau, \vec{x}_0)$ также является решением системы (8.1). Так как $\vec{\varphi}(t_0, t_0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ и $\vec{\varphi}(t_0 + \tau, t_0 + \tau, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ при $t = t_0$, то в силу теоремы существования и единственности имеем

$$\vec{\varphi}(t + \tau, t_0 + \tau, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) \quad (8.3)$$

при всех t , для которых оба решения определены.

Положим $\tau = -t_0$ в (8.3) и обозначим $\vec{\varphi}(t - t_0, 0, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t - t_0, \vec{x}_0)$. Тогда получим, что решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0)$ можно записать в виде

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(t - t_0, \vec{x}_0). \quad (8.4)$$

Формула (8.4) показывает, что положение движущейся точки определяется начальной точкой $\vec{x}_0$ фазового пространства и интервалом времени, прошедшего после начального момента, но не самым начальным моментом. Из неё также видно, что если две фазовые траектории системы (8.1) имеют общую точку, то они совпадают.

Определение 8.2.1. Точка $\vec{x} = \vec{a}$ в фазовом пространстве называется положением равновесия автономной системы (8.1), если

$$\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}.$$

3) Если $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ — положение равновесия, то вектор-функция $\vec{x}(t) = \vec{a}, t \in (-\infty, +\infty)$ является решением системы (8.1).

Доказательство. ►

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}, \vec{f}(\vec{x}(t)) = \vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}.$$

Следовательно, если точка $\vec{a}$ — положение равновесия, то она — фазовая траектория. ■

4) Фазовая траектория, отличная от точки равновесия, является гладкой кривой.

Доказательство. ► Если $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in (a, b)$ — решение системы (8.1), то касательный вектор в точке $\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t_0), t_0 \in (a, b)$ равен $\frac{d\vec{\varphi}}{dt}(t_0) = \vec{f}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. ■

5) Траектория автономной системы не может войти в положение равновесия за конечное время.

Доказательство. ► Пусть $\vec{a}$ — положение равновесия и $\vec{x}^*(t) \equiv \vec{a}, t \in (-\infty, +\infty)$. Если траектории решений $\vec{x}(t)$ и $\vec{x}^*(t)$ не совпадают, то $\vec{x}(t) \neq \vec{a}$ при всех конечных t . Следовательно, только при $t \rightarrow \pm\infty$ фазовая траектория может асимптотически приближаться к положению равновесия, т.е. $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\vec{x}(t) - \vec{a}| = 0$. Это означает, что положение равновесия $\vec{x}^* = \vec{a}$ будет предельной точкой множества значений $\vec{x}(t)$ при $|t| \rightarrow +\infty$.

Ниже в этом случае будем говорить, что при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$ фазовая траектория **примыкает** к положению равновесия. ■

6) Решения автономной системы (8.1) обладают групповым свойством: если $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$ — решение системы (8.1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}(0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$, то

$$\vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(\tau, \vec{x}_0)) = \vec{\varphi}(t + \tau, \vec{x}_0)$$

на любом интервале, на котором одновременно определены функции, стоящие в левой и правой частях равенства.

Доказательство. ► Рассмотрим решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$, удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}(0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Положим $\vec{x}_1 = \vec{\varphi}(\tau, \vec{x}_0)$ при $t = \tau$. Тогда $\vec{\varphi}_1(t) = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_1)$ — решение системы (8.1) и, в силу свойства 1, $\vec{\varphi}_2(t) = \vec{\varphi}(t + \tau, \vec{x}_0)$ также является решением (8.1). При этом

$$\vec{\varphi}_1(0) = \vec{\varphi}(0, \vec{x}_1) = \vec{x}_1,$$

$$\vec{\varphi}_2(0) = \vec{\varphi}(\tau, \vec{x}_0) = \vec{x}_1.$$

Таким образом, решения $\vec{\varphi}_1(t)$ и $\vec{\varphi}_2(t)$ системы уравнений (8.1) удовлетворяют одному и тому же начальному условию. В силу теоремы единственности $\vec{\varphi}_1(t) = \vec{\varphi}_2(t)$ или

$$\vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(\tau, \vec{x}_0)) = \vec{\varphi}(t + \tau, \vec{x}_0).$$

■

Определение 8.2.2. Число $T \neq 0$ называется периодом решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, если

$$\vec{\varphi}(t + T) = \vec{\varphi}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Если $T > 0$ — период, то $(-T)$ — также период. Действительно, если T — период, то $\vec{\varphi}(t + T) = \vec{\varphi}(t)$. Заменяя t на $t - T$, получим $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t - T)$. Следовательно, $(-T)$ — период. Наименьший положительный период называется **главным**.

7) Пусть $\vec{\varphi}(t), t \in (a, b)$, — решение, отличное от положения равновесия, и существуют такие $t_1, t_2 \in (a, b)$ ($t_2 > t_1$), что $\vec{\varphi}(t_2) = \vec{\varphi}(t_1)$. Тогда решение — периодическое, существует главный период, а траектория — замкнутая кривая.

Доказательство. ► По предположению, траектория сама себя пересекает, так как существуют числа $t_1, t_2 \in (a, b)$ ($t_2 > t_1$) такие, что

$$\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2).$$

По свойству 2 имеем $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t + \tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$. Функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t + \tau)$ является решением автономной системы (8.1) при $t \in (a - \tau, b - \tau)$. Решения $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\varphi}(t + \tau)$ совпадают на общей части областей их определения, т.е. при $t \in [a, b - \tau]$. Следовательно, решение

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} \vec{\varphi}(t), & t \in (a, b), \\ \vec{\varphi}(t + \tau), & t \in (a - \tau, a] \end{cases}$$

является продолжением решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ на интервал $(a - \tau, b)$. Следуя этой процедуре, мы продолжим решение $\vec{\varphi}(t)$ на интервал $(-\infty, b)$. С помощью соотношения $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t - \tau)$ решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, $t \in (-\infty, b)$, продолжается на всю числовую ось. Рассмотрим функцию $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t + \tau)$. Для неё имеем $\vec{\psi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2) = \vec{\varphi}(t_1)$. По теореме единственности $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, т.е.

$$\vec{\varphi}(t + T) = \vec{\varphi}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad T = t_2 - t_1 > 0.$$

Следовательно, T — период. Однако могут быть и другие периоды. Обозначим множество всех положительных периодов через M . Так как решение $\vec{\varphi}(t)$ не является положением равновесия, то существует такое t^* , что $\vec{\varphi}(t^*) \neq \vec{\varphi}(t_1)$. Составим разность $|\vec{\varphi}(t^*) - \vec{\varphi}(t_1)| = \varepsilon > 0$. Так как функция $\vec{\varphi}(t)$ непрерывная, то найдется такое $\delta > 0$, что $|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_1)| < \varepsilon$ при всех $|t - t_1| < \delta$. Значит, $\vec{\varphi}(t) \neq \vec{\varphi}(t^*)$ при этих t . Но за время, равное периоду, решение $\vec{\varphi}(t)$ должно пройти через все точки своей траектории. Поэтому величина любого положительного периода не меньше, чем δ . Рассмотрим $\inf\{M\} = T^*$. Имеем $T^* \geq \delta$. Если $T^* \notin M$ и является предельной точкой M , то имеется последовательность периодов $T_i \rightarrow T^* \neq 0$, $\vec{\varphi}(t + T_i) = \vec{\varphi}(t)$. При $T_i \rightarrow T^*$ в силу непрерывности решения $\vec{\varphi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, получим $\vec{\varphi}(t + T^*) = \vec{\varphi}(t)$, т.е. T^* — период. Отсюда следует, что множество M замкнутое и $T^* \in M$. Траектория $\vec{\varphi}(t)$, $t \in [0, T^*]$, — замкнутая кривая, так как $\vec{\varphi}(T^*) = \vec{\varphi}(0)$. Ясно, что не существуют $t_1, t_2 \in [0, T^*]$, $|t_2 - t_1| < T^*$ такие, что $\vec{\varphi}(t_2) = \vec{\varphi}(t_1)$. В противном случае решение $\vec{\varphi}(t)$ согласно сказанному выше имело бы период $T_1 = |t_2 - t_1| < T^*$. Но это противоречит тому, что T^* — наименьший положительный период. ■

Из сказанного выше вытекает следующая теорема. Сформулируем её.

Теорема 8.1. *Каждая траектория автономной системы (8.1) принадлежит одному из следующих типов:*

- 1) *положение равновесия;*
- 2) *замкнутая траектория, которая соответствует периодическому решению с положительным наименьшим периодом;*
- 3) *незамкнутая траектория, которая соответствует неперiodическому решению.*

Доказательство. ► Если решение $\vec{x}(t) = \vec{a}, t \in (-\infty, +\infty)$, — положение равновесия системы (8.1), то фазовая траектория — точка.

Если решение $\vec{x}(t)$ не является положением равновесия системы и $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$ при некоторых t_1 и $t_2 (t_1 \neq t_2)$, то решение периодическое, имеет главный период, а фазовая траектория — замкнутая кривая.

Если $\vec{x}(t_1) \neq \vec{x}(t_2)$ при любых t_1 и $t_2, (t_1 \neq t_2)$, то решение неперiodическое, а фазовая траектория является незамкнутой кривой.

■

8.3. Фазовый портрет решений автономной линейной системы с действительными коэффициентами на плоскости

Рассмотрим линейную однородную систему уравнений с постоянными: вещественными коэффициентами на плоскости

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (8.5)$$

в которой $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0$. Она автономная. Точка $\vec{x} = \vec{0}$ — её единственное положение равновесия. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0.$$

Собственные значения λ_1 и λ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (a_{11} + a_{22}), \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det A \neq 0.$$

Наша задача — изучить поведение фазовых траекторий системы (8.5) в окрестности положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$. Так как $\lambda_1 \lambda_2 = \det A \neq 0$, то могут представиться три случая:

- I) λ_1, λ_2 не равны нулю, действительные и различные;
- II) λ_1, λ_2 комплексно - сопряженные;
- III) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.

I) Пусть собственные значения λ_1, λ_2 действительные и различные. В этом случае общее решение системы (8.5) имеет вид

$$\vec{x} = C_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{h}_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (8.6)$$

Здесь $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ — собственные векторы, соответствующие λ_1, λ_2 . Они образуют базис. Обозначая через η_1, η_2 координаты вектора $\vec{x}$ относительно этого базиса, получим

$$\eta_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (8.7)$$

При $C_1 = C_2 = 0$ мы имеем положение равновесия, а фазовая траектория является точкой. Ниже предполагается, что $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda_1 \lambda_2 > 0$.

а) Пусть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. При $C_1^2 + C_2^2 > 0$ фазовые траектории согласно соотношениям (8.7) описываются уравнениями

$$\begin{cases} \eta_2 = C_2 \left(\frac{\eta_1}{C_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, C_1 \neq 0; \\ \eta_1 = 0, C_1 = 0, C_2 \neq 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

Фазовые траектории при $C_1 \neq 0$ описываются степенной функцией и примыкают к точке положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$. Если объединить любую из них с точкой положения равновесия, то полученная кривая будет касаться в ней оси $\eta_2 = 0$, так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Имея в виду сказанное, будем говорить, что *фазовая траектория примыкает к точке положения равновесия, имея касательную*. При $C_1 > 0, C_2 > 0$ фазовые траектории расположены в первом квадранте и согласно (8.7) при $|t| \rightarrow \infty$ ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_1 &\rightarrow 0, \quad \eta_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty; \\ \eta_1 &\rightarrow +\infty, \quad \eta_2 \rightarrow +\infty \quad \text{при } t \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Это означает, что точка на фазовой траектории при увеличении t движется к точке положения равновесия. Подобным образом устанавливается поведение фазовых траекторий в остальных квадрантах при значениях постоянных $C_1 C_2 > 0, C_1 C_2 < 0$. Квадранты разделяются четырьмя фазовыми траекториями: $\eta_1 > 0, \eta_2 = 0$; $\eta_1 < 0, \eta_2 = 0$; $\eta_1 = 0, \eta_2 > 0$; $\eta_1 = 0, \eta_2 < 0$, которые при объединении их с точкой положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ образуют полуоси системы координат $\eta_1 O \eta_2$. Ориентация фазовых траекторий определяется из соотношений (8.7). Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются **устойчивым узлом**. Поведение фазовых траекторий изображено на рис. 8.1.

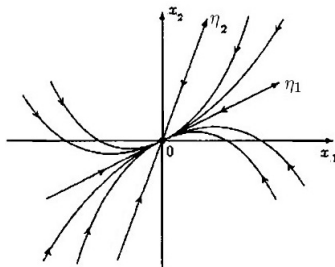


Рис. 8.1

б) Рассмотрим теперь случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. В первом квадранте при $C_1 > 0, C_2 > 0$ в силу уравнений (8.8) фазовые траектории описываются степенной функцией так же, как и в случае устойчивого узла. Ориентация фазовых траекторий определяется из соотношений (8.7):

$$\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty; \eta_1 \rightarrow +\infty, \eta_2 \rightarrow +\infty \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Отсюда следует, что она меняется на противоположную по сравнению с предыдущим случаем. В остальных квадрантах картина поведения фазовых траекторий устанавливается аналогично. Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются **неустойчивым узлом**. Поведение фазовых траекторий изображено на рис. 8.2.

с) Пусть теперь $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Сначала исследуем случай, когда $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Согласно уравнениям (8.8) фазовые траектории опи-

сываются степенной функцией с отрицательным показателем степени и ведут себя подобно гиперболам. Их ориентация устанавливается из уравнений (8.7). Имеем в первом квадранте ($C_1 > 0$, $C_2 > 0$):

$$\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow +\infty \text{ при } t \rightarrow +\infty; \eta_1 \rightarrow +\infty, \eta_2 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

В остальных квадрантах картина поведения фазовых траекторий определяется аналогично. Четыре фазовые траектории примыкают к точке положения равновесия. Они разделяют квадранты между собой и вместе с точкой положения равновесия образуют полуоси системы координат $\eta_1 O \eta_2$.

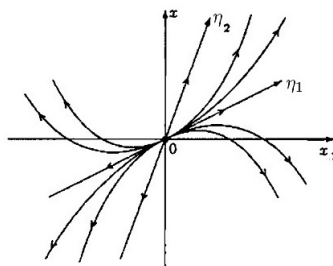


Рис. 8.2

Аналогично строится картина фазовых траекторий при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Такое расположение фазовых траекторий и положение равновесия называются **седлом**. Поведение фазовых траекторий изображено на рис. 8.3.

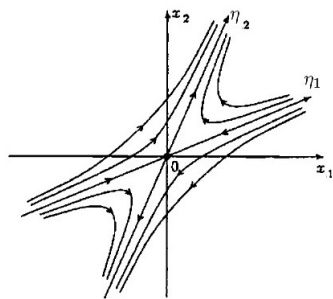


Рис. 8.3

II) Пусть теперь λ_1, λ_2 — комплексно-сопряженные числа:

$$\lambda_1 = \mu - i\nu, \quad \lambda_2 = \mu + i\nu, \quad \nu \neq 0.$$

Комплексно-сопряженные векторы $\vec{H}_1, \vec{H}_2$, отвечающие λ_1, λ_2 ($= \bar{\lambda}_1$), имеют вид

$$\vec{H}_1 = \vec{h}_1 + i\vec{h}_2, \quad \vec{H}_2 = \bar{\vec{H}}_1 = \vec{h}_1 - i\vec{h}_2,$$

где $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ — действительные линейно независимые векторы. Общее решение описывается функцией

$$\begin{aligned} \vec{x} &= C_1 \operatorname{Re} \left[e^{\lambda_1 t} \vec{H}_1 \right] + C_2 \operatorname{Im} \left[e^{\lambda_1 t} \vec{H}_1 \right] = \\ &= e^{\mu t} \left\{ C_1 \operatorname{Re} \left[(\cos \nu t - i \sin \nu t)(\vec{h}_1 + i\vec{h}_2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + C_2 \operatorname{Im} \left[(\cos \nu t - i \sin \nu t)(\vec{h}_1 + i\vec{h}_2) \right] \right\} = \\ &= e^{\mu t} \left\{ C_1 (\vec{h}_1 \cos \nu t + \vec{h}_2 \sin \nu t) + C_2 (-\vec{h}_1 \sin \nu t + \vec{h}_2 \cos \nu t) \right\} = \\ &= e^{\mu t} \left\{ C_1 \cos \nu t - C_2 \sin \nu t \right\} \vec{h}_1 + \left\{ C_1 \sin \nu t + C_2 \cos \nu t \right\} \vec{h}_2 = \\ &= R e^{\mu t} \left\{ \cos(\alpha + \nu t) \vec{h}_1 + \sin(\alpha + \nu t) \vec{h}_2 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\frac{C_1}{R} = \cos \alpha$, $\frac{C_2}{R} = \sin \alpha$. Таким образом, в базисе $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ координатами решения будут

$$\eta_1 = R \cos(\alpha + \nu t) e^{\mu t}, \quad \eta_2 = R \sin(\alpha + \nu t) e^{\mu t}.$$

Введем полярную систему координат

$$\rho = R e^{\mu t}, \quad \theta = \alpha + \nu t.$$

Отсюда видно, что фазовые траектории являются спиралями. Они примыкают к точке положения равновесия.

а) Пусть $\mu < 0$. Точка на фазовой траектории при увеличении t движется к точке положения равновесия. Если $\nu > 0$, то спирали закручиваются против часовой стрелки. Если же $\nu < 0$, то они закручиваются по часовой стрелке.

Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий в окрестности точки $\vec{x} = \vec{0}$ называются устойчивым фокусом. Аналогично рассматривается случай $\mu > 0$. Он носит название

неустойчивый фокус. Точка на фазовой траектории при увеличении t движется от точки положения равновесия. В верхней части рис. 8.4 изображены устойчивые фокусы. В левом из них $\nu > 0$ (точка вдоль фазовой траектории при увеличении t движется против часовой стрелки к положению равновесия), в правом $\nu < 0$ (точка вдоль фазовой траектории при увеличении t движется по часовой стрелке к положению равновесия). В нижней части рисунка изображены неустойчивые фокусы с $\nu > 0$ и $\nu < 0$.

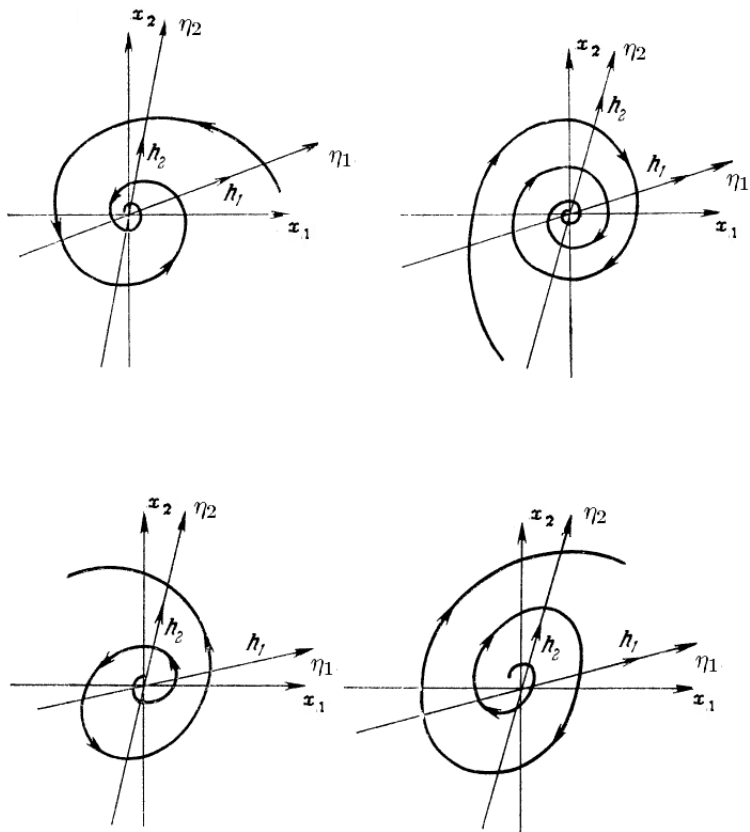


Рис. 8.4

б) Если $\mu = 0$, то $\rho = R$ и фазовые траектории представляют собой эллипсы с центром в точке положения равновесия. Если $\nu > 0$, то точ-

ка вдоль фазовой траектории движется против часовой стрелки. При $\nu < 0$ она вдоль фазовой траектории движется по часовой стрелке.

III) Рассмотрим ситуацию, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Характер поведения фазовых траекторий зависит от того, будет ли базис состоять из собственных векторов или из собственного и присоединённого векторов (жорданов базис). Исследуем эти две возможности.

а) Базис состоит из двух собственных векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2$, которые определяются из уравнений

$$A\vec{h}_1 = \lambda\vec{h}_1, \quad A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2.$$

В этом случае координаты решения определяются функциями (8.7):

$$\eta_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad \eta_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

Отсюда следует, что при $C_1^2 + C_2^2 > 0$ фазовые траектории описываются уравнением $C_1 \eta_2 = C_2 \eta_1$, которое показывает, что фазовые траектории представляют собой лучи, примыкающие к точке положения равновесия. Если $\lambda < 0$, то точка на фазовой траектории при увеличении t движется к положению равновесия.

*Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются **устойчивым дикритическим узлом**.*

Если $\lambda > 0$, то точка на фазовой траектории при увеличении t движется от положения равновесия.

*Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются **неустойчивым дикритическим узлом**.* Поведение фазовых траекторий при $\lambda < 0$ изображено на левом рис. 8.5, на правом – при $\lambda > 0$.

б) Базис состоит из собственного $\vec{h}_1$ и присоединённого $\vec{h}_2$ векторов, которые находятся из уравнений

$$A\vec{h}_1 = \lambda\vec{h}_1, \quad A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2 + \vec{h}_1.$$

Так как векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ линейно независимые, то решение системы (8.5) в базисе $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = \eta_1(t)\vec{h}_1 + \eta_2(t)\vec{h}_2.$$

Подставляя $\vec{x}(t)$ в систему (8.5), получим уравнения для определения функций $\eta_1(t), \eta_2(t)$:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \lambda\eta_1 + \eta_2, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \lambda\eta_2.$$

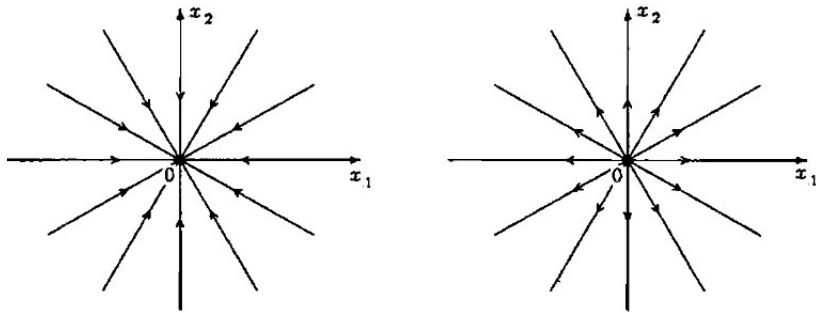


Рис. 8.5

В результате решения этой системы находим

$$\eta_1 = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \quad \eta_2 = C_2 e^{\lambda t}. \quad (8.9)$$

Исследуем поведение фазовых траекторий в системе координат $\eta_1 O \eta_2$.

Если $C_2 \neq 0$, то

$$\eta_1 = \left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \ln \left(\frac{\eta_2}{C_2} \right) \right) \frac{\eta_2}{C_2},$$

$$\frac{d\eta_2}{d\eta_1} = \frac{C_2 \lambda}{C_2 + (C_1 + C_2 t) \lambda} \rightarrow 0, |t| \rightarrow \infty.$$

Если $C_2 = 0$, то согласно (8.9) мы имеем $\eta_2 = 0$, $\eta_1 = C_1 e^{\lambda t}$, $C_1 \neq 0$. Используя эти формулы, нетрудно изобразить поведение фазовых траекторий. Они при $|t| \rightarrow +\infty$ примыкают к точке положения равновесия, касаясь в ней оси η_1 ($\eta_2 = 0$). В случае $\lambda < 0$ они представлены на левом рис. 8.6.

*Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются **устойчивым вырожденным узлом**.*

При $\lambda > 0$ поведение фазовых траекторий представлено на правом рис. 8.6.

*Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются **неустойчивым вырожденным узлом**.*

Определение 8.3.1. Положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ линейной системы (8.5) называется невырожденным, если либо λ_1, λ_2 отличны от нуля и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, либо комплексно-сопряженные числа λ_1 и λ_2 имеют действительную часть $\mu \neq 0$.

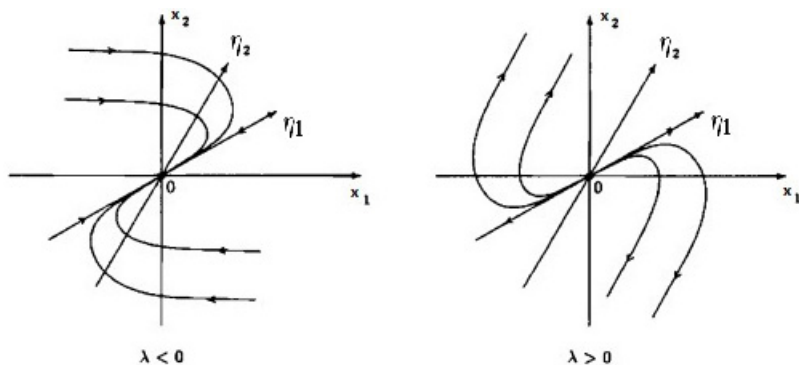


Рис. 8.6

Положения равновесия центр, дикритический узел и вырожденный узел называются вырожденными. Случай, когда $\det A = 0$, не рассматривается.

8.4. Поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной автономной системы на плоскости

Рассмотрим теперь поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной системы (8.1) на плоскости, предполагая, что $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$. При $n = 2$ вектор-функция $\vec{f}(x_1, x_2) = \text{colop}(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$. Предположим, что $\vec{x} = \vec{0}$ — единственное положение равновесия в области Ω . Систему (8.1) можно представить в некоторой окрестности положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ в виде (т.к. $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$):

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}), \vec{F}(\vec{0}) = \vec{0}, \quad (8.10)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} (0, 0)$$

— матрица Якоби в точке с координатами $(0, 0)$. В некоторой окрестности положения равновесия (ПР) $\vec{x} = \vec{0}$ при $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0$ имеем $\|\vec{F}(\vec{x})\| = o(\rho)$. Дополнительно будем предполагать, что $\det A \neq 0$. Как

показано в работах [4, 11], этих условий достаточно для утверждений, сделанных ниже для положения равновесия узел, седло, фокус. Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы показать, как результаты предыдущего параграфа можно применить к исследованию поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной системы (8.10). При сформулированных выше условиях каждая фазовая траектория, бесконечно приближающаяся к точке положения равновесия $x_1 = 0, x_2 = 0$ автономной системы (8.10), либо примыкает к ней в виде спирали, либо примыкает к ней под определённым углом относительно к одной из осей [11].

Положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ системы (8.1) будем называть:

1) **узлом*** ($\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$), если в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ все фазовые траектории, за исключением двух, примыкают к ней, имея общую касательную. Эти две фазовые траектории примыкают к точке положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ с противоположных сторон, образуя вместе с ней кривую, которая имеет другую общую касательную;

2) **фокусом***, если в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ каждая фазовая траектория навивается на неё в виде спирали, примыкая к ней при $t \rightarrow -\infty$ или $t \rightarrow +\infty$;

3) **седлом***, если в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ к ней примыкают 2 пары фазовых траекторий при $t \rightarrow -\infty$ или $t \rightarrow +\infty$ (каждая пара траекторий имеет свою общую касательную), а остальные фазовые траектории ведут себя, как показано на рис. 8.3.

Будем называть систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (8.11)$$

полученную в результате отбрасывания второго слагаемого $\vec{F}(\vec{x})$ из правой части системы (8.10), её линеаризацией.

Теорема 8.2. Пусть линейная система (8.11) является линеаризацией нелинейной системы (8.10) и имеет в точке $\vec{x} = \vec{0}$ невырожденные положения равновесия узел, седло или фокус. Тогда поведение фазовых траекторий системы (8.1) в достаточно малой окрестности положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ также будет **узлом***, **седлом*** или **фокусом***. При этом ориентация фазовых траекторий сохраняется.

Другими словами, теорема подразумевает, что картина поведения фазовых траекторий нелинейной системы (8.10) в достаточно малой окрестности положения равновесия получается из картины поведения фазовых траекторий линейной системы (8.11) её малым искажением. Поэтому положения равновесия узел, седло или фокус называются *грубыми положениями равновесия*.

Положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ нелинейной системы (8.1) будем называть:

4) **центром***, если в некоторой окрестности точки $\vec{x} = \vec{0}$ она окружена только замкнутыми фазовыми траекториями;

5) **дикритическим узлом***, если все фазовые траектории в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ примыкают к ней, каждая имея свою касательную;

6) **вырожденным узлом***, если все фазовые траектории в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ примыкают к ней, имея одну общую касательную.

*При равенстве собственных значений $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ необходимо, чтобы функция $\vec{F}(\vec{x})$ удовлетворяла дополнительному условию, а именно: $\|\vec{F}(\vec{x})\| = O(\rho^{1+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число. В этом случае, если в достаточно малой окрестности положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ фазовые траектории линейной системы (8.11) ведут себя либо как дикритический узел, либо как вырожденный узел, то в нелинейной системе они будут вести себя либо как **дикритический узел***, либо как **вырожденный узел*** соответственно. При этом их ориентация сохраняется [4, 11].*

Если не наложить дополнительных требований на функцию $\vec{F}(\vec{x})$, то дикритический узел* может перейти в фокус*. Это связано с тем, что некоторую окрестность особой точки узел* (а также особых точек дикритический узел* и вырожденный узел*) можно гомеоморфно отобразить в окрестность особой точки фокус* таким образом, чтобы траектории первой из них переходили в траектории второй. Сказанное является важным топологическим свойством данной задачи. Рассмотрим систему [4]:

$$\frac{dx}{dt} = -x - \frac{y}{\ln \rho}, \quad \frac{dy}{dt} = -y + \frac{x}{\ln \rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8.12)$$

Вектор-функция $\vec{F}(x, y)$ неопределена в точке $(0, 0)$. Если доопределить её и её частные производные по непрерывности нулями, то получится функция класса C^1 . Тогда точка $(0, 0)$ станет положением равновесия. Линеаризованная система дает дикритический узел. Положением равновесия нелинейной системы будет фокус*.

Рассмотрим более сложный случай, когда положение равновесия линейной системы (8.11) – центр. В качестве примера возьмем систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \end{cases} \quad (8.13)$$

положение равновесия которой имеет координаты $(0, 0)$. Если отбросить в системе (8.13) нелинейные члены, то линеаризованная система дает положение равновесия – центр. Если же в нелинейной системе (8.13) перейти к полярной системе координат (ρ, θ) , то нетрудно получить решение уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\rho^2 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 t}, \theta = t + \theta_0.$$

Отсюда следует, что фазовыми траекториями нелинейной системы являются спирали, а положением равновесия — **фокус***. Критерий различения этих положений равновесия является сложным и здесь не рассматривается.

Глава 9

Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений

9.1. Основные понятия и определения

Во второй главе было показано, что если $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, то решение ЗК для системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad (9.1)$$

непрерывно зависит от начальных условий, если $t \in [a, b]$ (t меняется на конечном промежутке). В этой главе будет исследоваться зависимость решения задачи Коши от начальных условий, когда t изменяется на полубесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$. Будем предполагать, что система (9.1) определена в цилиндре $D = \Omega \times [t_0, +\infty)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}_x^n$, и существует её решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ с начальными данными $t_0, \vec{x}_0$ ($\vec{x}_0 \in \Omega$), которое можно продолжить на полубесконечный промежуток $(t_0, +\infty)$ в цилиндре D . Правая часть системы (9.1) $\vec{f}(t, \vec{x}) \in \mathbf{C}^1(D)$.

Определение 9.1.1. Решение системы (9.1) $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого другого решения $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$, начальное значение которого удовлетворяют неравенству

$$\|\vec{\varphi}(t_0) - \vec{\psi}(t_0)\| < \delta,$$

решение $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ определено при всех $t \geq t_0$ и при $t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| < \varepsilon \text{ для любого } t \geq t_0.$$

Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t) \right\| = 0.$$

Здесь, как и ранее, в качестве нормы взята $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2}$.

Изучение устойчивости решения $\vec{\varphi}(t), t \in [t_0, +\infty)$, системы уравнений (9.1) может быть сведено к изучению устойчивости решения, тождественно равного нулю при $t \in [t_0, +\infty)$, некоторой другой нормальной системы. Действительно, введем новую неизвестную функцию

$$\vec{y}(t) = \vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t). \quad (9.2)$$

Тогда она будет удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y} + \vec{\varphi}) - \vec{f}(t, \vec{\varphi}) \equiv \vec{g}(t, \vec{y}), \quad (9.3)$$

где $\vec{g}(t, \vec{0}) = \vec{0}, t \in [t_0, +\infty)$.

Так как $\left\| \vec{y}(t) - \vec{0} \right\| = \left\| \vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t) \right\|$, то исследование устойчивости решения $\vec{\varphi}(t), t \in [t_0, +\infty)$, системы (9.1) равносильно исследованию устойчивости нулевого решения $\vec{y}(t) \equiv \vec{0}, t \in [t_0, +\infty)$ системы уравнений (9.3). В дальнейшем будем считать, что замена (9.2) уже произведена, т.е. система уравнений (9.1) имеет нулевое решение $\vec{x}(t) \equiv \vec{0} \in \Omega, t \in [t_0, +\infty), \vec{f}(t, \vec{0}) \equiv \vec{0}$.

Определение 9.1.2. Если $\vec{f}(t, \vec{0}) = \vec{0}$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$, то точка $\vec{x} = \vec{0}, t \in [t_0, +\infty)$ в фазовом пространстве называется положением равновесия системы уравнений (9.1).

9.2. Достаточные условия устойчивости решений для линейной системы уравнений с постоянными вещественными коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}. \quad (9.4)$$

Пусть матрица A с постоянными вещественными элементами имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_m (\lambda_i \neq \lambda_j)$, $1 \leq m \leq n$. Ниже будет изучаться устойчивость решений системы (9.4) на промежутке $[0, +\infty)$.

Теорема 9.1. (Спектральный признак устойчивости.)

- 1) Если все собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = \overline{1, m}$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.
- 2) Если собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, $i = \overline{1, m}$ и для тех λ_i , для которых $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, все соответствующие жордановы цепочки имеют длину, равную 1, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.
- 3) Если имеется λ_j , для которого $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ или для которого $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, но соответствующие жордановы цепочки имеют длину ≥ 2 , то нулевое решение неустойчиво.

Доказательство. ► Все решения системы (9.4) описываются формулой

$$\vec{x}(t) = \vec{P}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + \vec{P}_m(t)e^{\lambda_m t}, \quad (9.5)$$

где $\vec{P}_i(t)$ — многочлены степени не выше $k_i - 1$, а k_i — наибольшая длина жордановой цепочки, соответствующей λ_i . Коэффициенты в многочленах $\vec{P}_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, в векторном квазимногочлене (9.5) — векторы из $\mathbb{R}^n$. Если $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$, то для соответствующего решения имеем

$$\vec{P}_k(t)e^{\lambda_k t} = \vec{P}_k(t)e^{\mu_k t} (\cos \nu_k t + i \sin \nu_k t), |\cos \nu_k t + i \sin \nu_k t| = 1.$$

Если $\mu_k < 0$, то $|\vec{P}_k(t)e^{\mu_k t}| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим сначала случай 1). Одной из фундаментальных матриц системы (9.4) является e^{tA} . Оценим её поведение при $t \rightarrow \infty$. Фундаментальная матрица состоит из столбцов $\vec{\psi}_1(t), \dots, \vec{\psi}_n(t)$, которые являются решениями системы (9.4). Каждое решение $\vec{\psi}_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ описывается вектор-функцией (9.5):

$$\vec{\psi}_k(t) = \vec{P}_{1k}(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + \vec{P}_{mk}(t)e^{\lambda_m t}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (9.6)$$

Пусть $\operatorname{Re} \lambda_i < -\beta < 0$. Тогда $\operatorname{Re} \lambda_i + \beta < 0$, $i = \overline{1, m}$. Так как при $t \rightarrow \infty$ слагаемые в (9.6) $\vec{P}_{ik}(t)e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$, то справедлива оценка

$$\left\| \vec{P}_{ik}(t)e^{(\operatorname{Re} \lambda_i + \beta)t} \right\| \leq$$

$\leq C_{ik}, t \in [0, +\infty)$, где C_{ik} — некоторые постоянные. Следовательно, все слагаемые в (9.6) ограничены, так как

$$\left\| \vec{P}_{ik}(t)e^{\lambda_i t} \right\| \leq C_{ik}e^{-\beta t}, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}$$

и существует такая постоянная C , что $\left\| \vec{\psi}_k(t) \right\| \leq Ce^{-\beta t}, t \geq 0, k = \overline{1, n}$. Отсюда, используя определение нормы вектор-функции, находим

$$\vec{\psi}_k(t) = \begin{pmatrix} a_{1k}(t) \\ \dots \\ a_{nk}(t) \end{pmatrix}, \left\| \vec{\psi}_k(t) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{ik}|^2}, |a_{ik}| \leq Ce^{-\beta t}.$$

Полученные неравенства позволяют оценить норму фундаментальной матрицы e^{tA} :

$$\left\| e^{tA} \right\| = \left(\sum_{k,j=1}^n |a_{jk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ke^{-\beta t}, K = nC. \quad (9.7)$$

Любое решение задачи Коши описывается функцией $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$, где $\vec{x}_0 = \vec{x}(0)$ — начальное значение, принимаемое при $t = 0$. Если $\|\vec{x}_0\| < \delta = \frac{\varepsilon}{K}$, то $\|\vec{x}(t)\| \leq \|e^{tA}\| \|\vec{x}_0\| < \varepsilon e^{-\beta t} \leq \varepsilon, t \in [0, +\infty)$. Так как $\|\vec{x}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то решение $\vec{x}(t) = \vec{0}, t \in [0, +\infty)$, асимптотически устойчиво.

Случай 2)

Те слагаемые в (9.5), для которых $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, ограничены при $t \in [0, +\infty)$, как в случае 1). По условию, слагаемые с $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ содержат только многочлены нулевой степени и поэтому тоже ограничены. Следовательно, нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Случай 3)

Если существует собственное значение $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$, у которого $\mu_j > 0$, то система уравнений имеет решение $\vec{\phi}_j(t) = e^{\lambda_j t} \vec{h}_j$, где $\vec{h}_j$ — собственный вектор. Если $\nu_j = 0$, то $\left\| \vec{\phi}_j(t) \right\| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$. Следовательно, решение не ограничено. Если же $\nu_j \neq 0$, то решение $\vec{\phi}_j(t)$ комплексное. Оно порождает два вещественных решения $\operatorname{Re} \vec{\phi}_j(t)$ и $\operatorname{Im} \vec{\phi}_j(t)$, которые также не ограничены при $t \geq 0$. Из неограниченности решения следует его неустойчивость.

Пусть не существует собственного значения с положительной действительной частью, но имеется λ_j с $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, которому соответствует

жорданова цепочка длины ≥ 2 . Тогда нулевое решение также будет неустойчивым. Действительно, существует решение $\vec{\phi}_j = \vec{P}_j(t)e^{\lambda_j t}$, в котором многочлен $\vec{P}_j$ имеет степень большую или равную 1. Так как $|e^{\lambda_j t}| = 1$, то решение не ограничено, а значит, решение неустойчиво. ■

Доказанная теорема показывает, что для исследования устойчивости решения линейных уравнений или систем достаточно найти собственные значения. Для многочленов степени $n \geq 5$ в общем случае корни не представимы при помощи радикалов (теорема Абеля–Рурфини). Однако на помощь приходит критерий Рауса–Гурвица.

Критерий Рауса–Гурвица

Для того чтобы у многочлена

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

с действительными коэффициентами все корни имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

(где $a_m = 0$, если $m < 0$ или $m > n$) были положительными, т.е.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}a_n > 0.$$

Последнее условие можно заменить условием $a_n > 0$. При $n = 4$ имеем

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad a_4 > 0.$$

Теорема 9.2. Если нулевое решение однородной линейной системы уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

обладает одним из свойств:

- 1) устойчиво по Ляпунову,
- 2) асимптотически устойчиво,
- 3) неустойчиво,

то все решения неоднородной линейной системы уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$$

обладают тем же свойством независимо от $\vec{f}(t)$.

Доказать теорему самим.

9.3. Устойчивость по первому приближению

В теореме 9.1 были сформулированы условия устойчивости для линейной системы (9.4) с постоянными вещественными коэффициентами. Эти результаты будут обобщены на случай нелинейной автономной системы (8.1) [8], [13]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Относительно $\vec{f}(\vec{x})$ и области Ω предполагается, что $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$, $\vec{0} \in \Omega$, $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$. Отсюда следует, что функция $\vec{x} = \vec{0}, t \geq 0$ является решением системы (8.1). Как мы знаем, систему (8.1) при условии $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ можно представить в некоторой окрестности $\vec{x} = \vec{0}$ в виде

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{F}(\vec{0}) = \vec{0}, \quad \vec{x} \in \Omega. \quad (9.8)$$

Здесь $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{0}) \right)$, $i, j = \overline{1, n}$, $\vec{F}(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$, $\|\vec{F}(\vec{x})\| = o(\|\vec{x}\|)$ при $\|\vec{x}\| \rightarrow 0$. Будем рассматривать систему (9.8) в цилиндре

$$D = \{(t, \vec{x}) : \vec{x} \in \Omega, t \in [0, +\infty)\}.$$

График нулевого решения принадлежит этому цилиндру. Ниже будет исследован вопрос о том, как влияют на устойчивость решения линейной системы возмущения, обусловленные членом $\vec{F}(\vec{x})$. Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \vec{x}_0 \in \Omega. \quad (9.9)$$

Теорема 9.3. Пусть в системе (9.8) функция $\vec{F}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\vec{F}(\vec{x})\| \leq \omega(\vec{x}) \|\vec{x}\|,$$

где $\omega(\vec{x}) \rightarrow 0$ при $\|\vec{x}\| \rightarrow 0$. Тогда

- 1) если все собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = \overline{1, n}$, то нулевое решение системы (9.8) асимптотически устойчиво;
- 2) если матрица A имеет хотя бы одно λ_j такое, что $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, то нулевое решение системы (9.8) неустойчиво;
- 3) если среди собственных значений матрицы A имеются такие, что $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, а для остальных собственных значений $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, то устойчивость нулевого решения зависит не только от матрицы A , но и от функции $\vec{F}(\vec{x})$.

Доказательство. ► Надо показать, что при достаточно малом значении $\|\vec{x}_0\|$ и условии, что величина $\|\vec{F}(\vec{x})\|$ также является малой, решение задачи Коши (9.9) $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$ может быть продолжено для всех $t > 0$. На промежутке $[0, h]$, на котором оно существует, уравнение (9.8) согласно формуле (4.34) эквивалентно интегральному соотношению

$$\vec{\phi}(t) = e^{tA} \vec{x}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} \vec{F}(\vec{\phi}(s)) ds. \quad (9.10)$$

Так как по условию теоремы собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то для всех $t > 0$ справедлива оценка (9.7), из которой следует неравенство

$$\|e^{tA}\| \leq K_* e^{-\beta t}, \quad K_* = K + 1 > 1,$$

в котором $\beta > 0$, а величина постоянной K определяется свойствами матрицы A . Используя это неравенство, из (9.10) находим

$$\begin{aligned} \|\vec{\phi}(t)\| &\leq \|e^{tA}\| \|\vec{x}_0\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\| \|\vec{F}(\vec{\phi}(s))\| ds \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\vec{\phi}(t)\| &\leq K_* e^{-\beta t} \|\vec{x}_0\| + K_* \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \|\vec{F}(\vec{\phi}(s))\| ds. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Неравенство (9.11) лежит в основе доказательства того, что решение $\vec{\phi}(t)$ задачи Коши (9.9), для которого начальное значение $\|\vec{\phi}(0)\| = \|\vec{x}_0\|$ достаточно мало отличается от нуля, можно продолжить на промежуток $[h, +\infty)$ при условии, что величина $\|\vec{\phi}(t)\|$ остаётся также малой. Действительно, согласно требованию, наложенному в теореме на функцию $\omega(\vec{x})$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|\vec{F}(\vec{x})\| \leq \varepsilon \frac{\|\vec{x}\|}{K_*}$ как только $\|\vec{x}\| \leq \delta$. Таким образом, до тех пор пока $\|\vec{\phi}(t)\| \leq \delta$, справедливо неравенство

$$e^{\beta t} \|\vec{\phi}(t)\| \leq K_* \|\vec{x}_0\| + \varepsilon \int_0^t e^{\beta s} \|\vec{\phi}(s)\| ds.$$

Применяя к нему лемму Гронуолла (она доказывается ниже) имеем

$$e^{\beta t} \|\vec{\phi}(t)\| \leq K_* \|\vec{x}_0\| e^{\varepsilon t}$$

или

$$\|\vec{\phi}(t)\| \leq K_* \|\vec{x}_0\| e^{-(\beta-\varepsilon)t}. \quad (9.12)$$

Если положить $\varepsilon < \beta$, то согласно неравенству (9.12) величина $\|\vec{\phi}(t)\|$ убывает с ростом t . Из него также следует, что $\|\vec{\phi}(t)\| \leq K_* \|\vec{x}_0\|$. Возьмём $\|\vec{x}_0\| < \frac{\delta}{K_*} (< \delta)$, тогда $\|\vec{\phi}(t)\| < \delta$. В результате мы получили утверждение, которое ниже сформулируем следующим образом.

Утверждение: неравенство (9.12) выполняется для всех t , при которых решение задачи Коши (9.9) существует, и при этом $\|\vec{\phi}(t)\| < \delta$, если $\|\vec{x}_0\| < \frac{\delta}{K_}$.*

Покажем теперь, что оно продолжаемо на промежуток $[h, +\infty)$. Возьмём произвольное $T > h$ и цилиндр $Q = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, \|x\| = \delta\}$. Начальные данные принадлежат основанию цилиндра при $t = 0$. Поэтому интегральная кривая, соответствующая решению задачи Коши (9.9), согласно теореме продолжения должна достигнуть границы цилиндра Q . Но она не может пересечь его боковую поверхность, потому что величина $\|\vec{\phi}(t)\|$ не может принять значение, равное δ . Действительно, так как в цилиндре $\|x\| \leq \delta$, то все проведенные выше выкладки останутся справедливыми и продолженное решение задачи Коши $\vec{\phi}(t)$ будет вести себя согласно *утверждению*. Поэтому интегральная кривая при продолжении может попасть только на основание цилиндра, расположенное при $t = T$. Из произвольности выбора величины T вытекает, что решение $\vec{\phi}(t)$ продолжаемо на промежуток $[h, +\infty)$ и, следовательно, для всех $t > 0$ справедлива формула (9.12). Она показывает, что нулевое решение является устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым. Остальные пункты теоремы даются без доказательства. ■

Замечание 9.3.1. Результаты теоремы останутся верными для неавтономной системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{F}(t, \vec{x}), \quad \vec{F}(t, \vec{0}) = \vec{0}, \quad \vec{x} \in \Omega, t \geq 0,$$

при условии, что $\|\vec{F}(t, \vec{x})\| = o(\|\vec{x}\|)$ равномерно по t , ($t \geq 0$) при $\|\vec{x}\| \rightarrow 0$.

9.4. Лемма Гронуолла

Лемма. Пусть непрерывная функция $\omega(t) \geq 0$ на промежутке $J \subseteq \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(t) \leq B + \left| \int_{t_0}^t \omega(\tau) v(\tau) d\tau \right|, \quad (9.13)$$

где непрерывная функция $v(t) > 0$, $t \in J$, а постоянная $B \geq 0$. Тогда при всех $t, t_0 \in J$

$$\omega(t) \leq B e^{\int_{t_0}^t v(\tau) d\tau}. \quad (9.14)$$

Доказательство. ► Пусть $B > 0, t \geq t_0$. Разделим неравенство (9.13) на правую часть и умножим на функцию $v(t) > 0$:

$$\frac{\omega(t)v(t)}{B + \int_{t_0}^t \omega(\tau)v(\tau)d\tau} \leq v(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[\ln \left(B + \int_{t_0}^t \omega(\tau)v(\tau)d\tau \right) \right] \leq v(t).$$

Интегрирование последнего неравенства дает

$$\ln \left[B + \int_{t_0}^t \omega(\tau)v(\tau)d\tau \right] - \ln B \leq \int_{t_0}^t v(\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем формулу (9.14):

$$\omega(t) \leq B + \int_{t_0}^t \omega(\tau)v(\tau)d\tau \leq B e^{\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}.$$

При $t \leq t_0$ доказательство проводится аналогично. Если $v(t) = 0, t \in J$, то неравенство (9.13) выполняется автоматически. Случай $B = 0$ рассмотреть самим. ■

Глава 10

Первые интегралы нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

10.1. Первые интегралы автономных систем и критерий первого интеграла

Рассмотрим автономную систему уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \quad \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(\Omega). \quad (10.1)$$

Определение 10.1.1. Пусть функция $u(\vec{x})$, отличная от постоянной, определена в некоторой области $G \subseteq \Omega$ и $u(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(G)$. Она называется первым интегралом автономной системы (10.1), если для любого её решения $\vec{\varphi}(t)$, $t \in J$, траектория которого лежит в G , мы имеем $u(\vec{\varphi}(t)) = C$.

Здесь C – постоянная, величина которой зависит от выбора решения. Если функция $u(\vec{x})$ является первым интегралом автономной системы уравнений (10.1), то функция $\Phi(u(\vec{x}))$, где Φ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, также будет первым интегралом.

Определение 10.1.2. Первые интегралы $u_1(\vec{x}), \dots, u_k(\vec{x})$ называются независимыми в точке $\vec{a} \in \Omega$, если ранг матрицы $\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\vec{a}) \right\|, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}$, в точке $\vec{a}$ равен k ($k \leq n$).

Элементы строки $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right)$ в матрице являются координатами градиента $\nabla u_i(\vec{x})$ в точке $\vec{x} = \vec{a}$. Таким образом, первые интегралы будут независимыми в точке $\vec{a}$, если в ней линейно независимы векторы $\nabla u_i(\vec{a}), i = \overline{1, k}$.

Теорема 10.1. (Признак первого интеграла.) Для того, чтобы функция $u(\vec{x})$, $\vec{x} \in G$, была первым интегралом автономной системы (10.1), необходимо и достаточно, чтобы в области G выполнялось соотношение

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in G. \quad (10.2)$$

Доказательство. ►

Необходимость. Пусть $u(\vec{x})$ – первый интеграл автономной системы (10.1). Возьмем произвольную точку $\vec{x}_0 \in G$. Согласно теореме существования и единственности решения задачи Коши построим решение $\vec{\varphi}(t)$, $t \in J$, $\vec{\varphi}(t) \in G$, с начальным условием $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. По определению первого интеграла $u(\vec{\varphi}(t)) = \text{const}$. Отсюда следует

$$\left. \frac{du(\vec{\varphi}(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{d\varphi_k}{dt} \Big|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(\vec{x}_0) = 0.$$

В силу произвольности выбора точки $\vec{x}_0$ получаем требуемое утверждение.

Достаточность. Пусть справедливо соотношение (10.2). Возьмем в области G произвольное решение системы (10.1) $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, $t \in J$. Тогда для $u(\vec{\varphi}(t))$ имеем из (10.2) и (10.1):

$$\frac{du(\vec{\varphi}(t))}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{d\varphi_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(\vec{\varphi}(t)) = 0.$$

Значит, $u(\vec{x})$ – первый интеграл. ■

Предположим, что $u(\vec{x})$, $\vec{x} \in G$, – произвольный первый интеграл. Тогда, как следует из теоремы 10.1, $(\nabla u, \vec{f}) = 0$. Если $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$, $\vec{a} \in G$, то вектор $\vec{f}(\vec{a})$ не может иметь более $(n - 1)$ перпендикулярных к себе линейно независимых векторов. Это означает, что в точке $\vec{a}$ не может быть более $(n - 1)$ независимых первых интегралов.

10.2. Теорема о числе независимых первых интегралов

Теорема 10.2. Если точка $\vec{a} \in \Omega$ не является положением равновесия автономной системы (10.1), то в некоторой окрестности $\vec{a}$ существует $(n - 1)$ независимых первых интегралов $u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})$

и любой первый интеграл $u(\vec{x})$ в ней представим в виде

$$u(\vec{x}) = \Phi(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})),$$

где $\Phi(z_1, \dots, z_{n-1})$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция, определённая в окрестности точки $z_1^0 = u_1(\vec{a}), \dots, z_{n-1}^0 = u_{n-1}(\vec{a})$.

Доказательство. ► По условию $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Будем считать, что $f_n(\vec{a}) \neq 0$. Рассмотрим гиперплоскость β : $x_n = a_n$ (значение a_n предполагается фиксированным). Обозначим координаты её точек через $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, a_n) \equiv (\vec{\xi}, a_n)$ и рассмотрим точки плоскости β , достаточно близкие к точке $\vec{a}$. Построим решение системы (10.1) $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$, удовлетворяющее начальному условию:

$$\vec{\varphi}(0, \vec{\xi}) = \text{colon}(\vec{\xi}, a_n). \quad (10.3)$$

Начальная точка лежит на гиперплоскости β . В координатной записи решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ задачи Коши (10.1), (10.3) имеет вид

$$x_i = \varphi_i(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.4)$$

Формулы (10.4) можно рассматривать как систему уравнений относительно переменных $t, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$. Она имеет очевидное решение при $t = 0, \xi_i = a_i, i = \overline{1, n-1}$, а именно:

$$\vec{x} = \vec{a}.$$

Покажем, что система (10.4) разрешима относительно переменных $t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ в некоторой окрестности точки $\vec{b} = (0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}_{t, \vec{\xi}}^n$. Для этого вычислим в ней функциональный определитель. Из (10.3) имеем

$$\begin{cases} \varphi_i(0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \xi_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \varphi_n(0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = a_n. \end{cases}$$

Согласно этим равенствам и теореме о дифференцируемости решения по начальным данным получаем

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_k}(0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \delta_{ik}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Так как $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ является решением ЗК (10.1), (10.3), то при $t = 0$, $\xi_i = a_i$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(0, a_1, \dots, a_{n-1}) = f_i(\vec{a}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Используя эти соотношения, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, t)} \Big|_{t=0, \xi_i=a_i} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_1(\vec{a}) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & f_2(\vec{a}) \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & f_3(\vec{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & f_{n-1}(\vec{a}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_n(\vec{a}) \end{vmatrix} = \\ &= f_n(\vec{a}) \neq 0. \end{aligned}$$

Из теоремы об обратной функции следует, что существуют окрестности $V(\vec{b})$ и $U(\vec{a})$ точек $\vec{b}$ и $\vec{a}$, в которых система (10.4) взаимно однозначно разрешима и её решение имеет вид

$$\xi_i = u_i(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}, \quad t = v(\vec{x}), \vec{x} \in U(\vec{a}). \quad (10.5)$$

При этом функции $u_i(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ — непрерывно дифференцируемые в окрестности $U(\vec{a})$ и $\{t, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} \in V(\vec{b})$. Функции $u_i(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$ являются независимыми, так как

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})} \Big|_{\vec{x}=\vec{a}} = \left(\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})} \right)^{-1} \Big|_{t=0, \xi_i=a_i} = 1.$$

Покажем, что функции $u_i(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$ являются первыми интегралами. Возьмем сначала произвольную точку $(\vec{\xi}^o, a_n) \in U(\vec{a})$. Тогда решением системы (10.1) будет функция

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \xi_1^o, \dots, \xi_{n-1}^o), \quad t \in J,$$

удовлетворяющая начальному условию (10.3). Согласно формулам (10.5) вдоль этого решения найденные нами функции $u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})$ сохраняют постоянное значение :

$$\xi_1^o = u_1(\vec{x}), \dots, \xi_{n-1}^o = u_{n-1}(\vec{x}), \quad t \in J.$$

Рассмотрим теперь $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ — произвольное решение системы (10.1) с начальными данными $\vec{x}_0, t_0$ такими, что $\vec{x}_0 \in U(\vec{a})$. Было показано, что в этом случае система (10.4) разрешима при $\vec{x} = \vec{x}_0$. Отсюда вытекает существование решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi}^o)$, траектория которого проходит через точку $\vec{x}_0$ и удовлетворяет начальному условию $\vec{\varphi}(0, \vec{\xi}^o) = \text{colon}(\vec{\xi}^o, a_n)$. Таким образом, имеются два решения системы, траектории которых проходят через точку $\vec{x}_0$. Тогда, как мы знаем, существует такая постоянная τ , что решение $\vec{\varphi}(t)$ может быть представлено в виде $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t + \tau, \vec{\xi}^o)$. Отсюда и из (10.5) получаем

$$u_i(\vec{\varphi}(t)) = u_i(\vec{\varphi}(t + \tau, \vec{\xi}^o)) = \xi_i^o, i = \overline{1, n-1}.$$

Значит, $u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})$ — первые интегралы системы (10.1).

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $u(\vec{x})$ — произвольный первый интеграл системы (10.1), определённый в $U(\vec{a})$. Тогда в силу (10.2) имеем

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_k} f_k(\vec{x}) = 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in U(\vec{a}). \end{cases} \quad (10.6)$$

По условию теоремы $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$. В силу непрерывности функции $\vec{f}(\vec{x})$ возьмем $U(\vec{a})$ такой, чтобы $\vec{f}(\vec{x}) \neq \vec{0}$ для любого $\vec{x} \in U(\vec{a})$. Рассмотрим систему (10.6) относительно $\vec{f}(\vec{x})$. Так как она имеет нетривиальное решение $\vec{f}(\vec{x}) \neq \vec{0}$ для любого $\vec{x} \in U(\vec{a})$, то её определитель

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_{n-1}, u)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = 0, \quad \vec{x} \in U(\vec{a}). \quad (10.7)$$

Из теоремы о функциональной зависимости (доказательство теоремы представлено в [7]) следует, что в некоторой окрестности точки $z_1^o = u_1(\vec{a}), \dots, z_{n-1}^o = u_{n-1}(\vec{a})$ существует непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ такая, что

$$u = \Phi(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})).$$

■

Теорема 10.3. (О выпрямлении траектории.) Пусть $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(\Omega), \vec{a} \in \Omega, \vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Тогда в достаточно малой окрестности точки $\vec{a}$ существует гладкая обратимая замена переменных

$$y_1 = u_1(\vec{x}), \dots, y_{n-1} = u_{n-1}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in U(\vec{a}), \quad y_n = t,$$

такая, что в новых переменных система (10.1) принимает вид

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0, \frac{dy_n}{dt} = 1. \quad (10.8)$$

Здесь $u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})$ — независимые первые интегралы системы (10.1). Траектории системы (10.8) — прямые линии.

Доказательство теоремы 10.3 следует из теоремы 10.2 [12].

10.3. Редукция автономных систем с помощью первых интегралов

Теорема 10.4. Пусть $u_1(\vec{x}), \dots, u_m(\vec{x})$, $\vec{x} \in G$, — независимые в точке $\vec{a} \in G$ первые интегралы автономной системы (10.1) и $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Тогда в некоторой окрестности $U(\vec{a}) \subset G$ точки $\vec{a}$ порядок автономной системы (10.1) можно понизить до порядка $n - m$.

Доказательство. ► По условию теоремы градиенты первых интегралов $u_1(\vec{x}), \dots, u_m(\vec{x})$ являются линейно независимыми строками матрицы Якоби $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Произведем в окрестности точки $\vec{a}$ замену переменных

$$\begin{cases} y_k = u_k(\vec{x}), & k = \overline{1, m}, \\ y_k = x_k, & k = \overline{m+1, n}. \end{cases} \quad (10.9)$$

При такой замене в точке $\vec{a}$ не равен нулю якобиан

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{\vec{x}=\vec{a}} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} & \frac{\partial u_m}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial(u_1, \dots, u_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \Big|_{\vec{x}=\vec{a}} \neq 0 \end{aligned}$$

Значит, (10.9) — гладкая обратимая замена переменных и существует такая окрестность $U(\vec{a})$, что система (10.9) разрешима относительно $\vec{x}$: $\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{y})$. Отсюда получаем вдоль каждой траектории

$$\begin{cases} \dot{y}_k = \dot{u}_k(\vec{x}) = 0, & k = \overline{1, m}; \\ \dot{y}_k = \dot{x}_k = f_k(\vec{x}) = f_k(\vec{\phi}(\vec{y})) = g_k(\vec{y}), & k = \overline{m+1, n}. \end{cases} \quad (10.10)$$

При $m = n - 1$ для определения y_n мы имеем уравнение

$$\dot{y}_n = g_n(C_1, \dots, C_{n-1}, y_n),$$

которое интегрируется в квадратурах. ■

10.4. Первые интегралы произвольных нормальных систем уравнений

Рассмотрим теперь неавтономную систему уравнений

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{g}(t, \vec{y}), \quad (t, \vec{y}) \in \Omega \subset \mathbb{R}_{t, \vec{y}}^{n+1}. \quad (10.11)$$

Здесь $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, $\vec{g}(t, \vec{y}) = \vec{g}(t, y_1, \dots, y_n) = (g_1, \dots, g_n)^T$. Систему (10.11) можно привести к автономной, если положить $y_{n+1} = t$. В результате получим систему

$$\begin{cases} \frac{dy_{n+1}}{dt} = 1, \\ \frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{g}(y_{n+1}, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (10.12)$$

Введем новые обозначения, а именно:

$$(y_{n+1}, y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_{n+1}), \quad (1, g_1, \dots, g_n) = (f_1, \dots, f_{n+1}).$$

Тогда система (10.12) примет вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}). \quad (10.13)$$

Правая часть системы (10.13) не обращается в ноль. Отсюда и из теоремы 10.2 следует, что она во всей рассматриваемой области имеет n независимых первых интегралов. Эти интегралы по определению называются независимыми первыми интегралами системы (10.11). Таким образом, неавтономная (10.11) система всегда имеет n — независимых первых интегралов.

Определение 10.4.1. Функция $u(t, \vec{y})$ называется первым интегралом системы (10.11), если она отлична от постоянной, определена в некоторой области $G \subseteq \Omega$, $u(t, \vec{y}) \in \mathbf{C}^1(G)$ и для любого решения $\vec{y} = \vec{\varphi}(t) \in G$ имеет место равенство

$$u(t, \vec{\varphi}(t)) = C, \quad C = \text{const.}$$

Глава 11

Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка

11.1. Основные понятия и определения

Уравнение вида

$$\sum_{k=1}^n f_k(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}_{\vec{x}}^n, \quad (11.1)$$

где $u(\vec{x})$ — неизвестная функция, а $f_k(\vec{x}) = f_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = \overline{1, n}$, — функции, заданные в области Ω , называется линейным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка. Ниже предполагается, что $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$, где $\vec{f}(\vec{x}) = \text{colon}(f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$.

Определение 11.1.1. [6]. Функция $u(\vec{x})$, определенная в некоторой области $G \subseteq \Omega$, называется решением уравнения (11.1), если

- 1) $u(\vec{x}) \in C^1(G)$;
- 2) $\sum_{k=1}^n f_k(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ для любого $\vec{x} \in G$.

Если $u(\vec{x})$, $\vec{x} \in G$, является решением уравнения (11.1), то поверхность $u = u(\vec{x})$ в $\mathbb{R}_{\vec{x}, u}^{n+1}$ называется интегральной поверхностью уравнения (11.1).

Теорема 11.1. Пусть $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ — независимые первые интегралы системы (10.1). Тогда в некоторой окрестности каждой точки $\vec{a} \in \Omega$, в которой $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$, все решения $u(\vec{x})$ уравнения (11.1) описываются формулой

$$u(\vec{x}) = \Phi(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})), \quad (11.2)$$

где $\Phi(z_1, \dots, z_{n-1})$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, определённая в некоторой окрестности точки $z_1^0 = u_1(\vec{a}), \dots, z_{n-1}^0 = u_{n-1}(\vec{a})$.

Доказательство. ► Уравнение (11.1), как было показано в теореме 10.1, тесно связано с автономной системой (10.1). Напомним: любое решение уравнения (11.1) является первым интегралом системы (10.1). С другой стороны, если $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$, то в некоторой окрестности $U(\vec{a})$ точки $\vec{a} \in G$ согласно теореме 10.2 существуют $(n-1)$ независимые первые интегралы $u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})$ системы (10.1). Эти интегралы являются решениями уравнения (11.1). Любой первый интеграл $u(\vec{x})$ автономной системы (10.1) можно представить в виде

$$u(\vec{x}) = \Phi(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})),$$

где $\Phi(z_1, \dots, z_{n-1})$ является некоторой непрерывно дифференцируемой функцией. Так как первый интеграл $u(\vec{x})$ — произвольное решение уравнения (11.1), то мы получаем, что все его решения описываются формулой (11.2). ■

Отметим, что теорема носит локальный характер. Ниже функцию (11.2) будем называть *общим решением* уравнения (11.1) в окрестности точки $\vec{a}$. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, оно зависит от произвольной непрерывно дифференцируемой функции. Таким образом, чтобы найти общее решение уравнения (11.1), необходимо, в первую очередь, определить первые интегралы $u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})$ соответствующей автономной системы (10.1).

11.2. Характеристики и интегральные поверхности линейного уравнения с частными производными первого порядка

Определение 11.2.1. Система уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega, \quad (11.3)$$

называется характеристической, а $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J, \vec{\varphi}(t) \in \Omega$, — её фазовые траектории называются характеристиками уравнения (11.1).

Определение 11.2.2. Кривая в $\mathbb{R}_{\vec{x},u}^{n+1}$

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(t), u = c, t \in J,$$

соответствующая характеристике $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J, \vec{\varphi}(t) \in \Omega$ (c – произвольная постоянная), называется характеристической кривой. Её проекция на фазовое пространство совпадает с характеристикой.

Теорема 11.2. Пусть $u = u(\vec{x}), \vec{x} \in G$, является решением уравнения (11.1), $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J, \vec{\varphi}(t) \in G$, — его характеристикой. Если при $t = t_0, u(\varphi(t_0)) = C$, то $u(\varphi(t)) = C$ для любого $t \in J$.

Доказательство. ► Если функция $u = u(\vec{x}), \vec{x} \in G$, — решение уравнения (11.1), то она является первым интегралом характеристической системы (11.3). Вдоль характеристики $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J$, он будет постоянным: $u(\vec{\varphi}(t)) = c, t \in J$. Так как по условию теоремы $u(\vec{\varphi}(t_0)) = C, t_0 \in J$, то $c = C$. Следовательно, $u(\vec{\varphi}(t)) = C$ для любого $t \in J$. ■

Отсюда получаем: если характеристическая кривая имеет одну общую точку с интегральной поверхностью, то она полностью принадлежит этой поверхности. Таким образом, интегральные поверхности сотканы из характеристических кривых.

Следствие. Если две интегральные поверхности имеют общую точку, то они пересекаются вдоль характеристической кривой, проходящей через эту точку.

11.3. Задача Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка и теорема существования и единственности её решения

Рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ гладкую $(n-1)$ -мерную поверхность, задаваемую неявно уравнением

$$S_{n-1} : g(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (11.4)$$

Гладкость поверхности S_{n-1} обеспечивается следующими требованиями, наложенными на функцию $g(\vec{x})$: $g(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$, и в каждой точке поверхности имеет место неравенство $|\nabla g(\vec{x})| \neq 0$.

Определение. Точка $\vec{a}$ на гладкой поверхности S_{n-1} , в которой

$$(\vec{f}(\vec{x}), \nabla g(\vec{x}))|_{\vec{x}=\vec{a}} \neq 0, \quad (11.5)$$

называется *нехарактеристической*. В противном случае — *характеристической*. Из определения следует, что характеристическими точками являются точки равновесия характеристической системы (11.3) и точки, в которых вектор $\vec{f}(\vec{x})$ касается поверхности S_{n-1} . Зададим на поверхности S_{n-1} непрерывно дифференцируемую функцию $u_0(\vec{x})$. Вопрос: какая функция называется непрерывно дифференцируемой на гладкой поверхности?

Задача Коши для уравнения (11.1) формулируется следующим образом.

Задача Коши. Найти решение $u(\vec{x})$ уравнения (11.1), удовлетворяющее на поверхности S_{n-1} условию

$$u(\vec{x})|_{\vec{x} \in S_{n-1}} = u_0(\vec{x}). \quad (11.6)$$

Условие (11.6) и поверхность (11.4) называются *начальными*.

Теорема 11.3. Пусть на гладкой поверхности $S_{n-1} \subset \Omega$ (11.4) задана непрерывно дифференцируемая функция $u_0(\vec{x})$ и $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$. Тогда в некоторой окрестности любой её нехарактеристической точки $\vec{a}$ решение задачи Коши (11.1), (11.6) существует и единственно.

Доказательство. ► В теореме 10.2 было доказано, что в некоторой окрестности $U(\vec{a})$ точки $\vec{a}$, не являющейся точкой равновесия характеристической системы (11.3), существуют независимые первые интегралы $u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})$. Произведем в уравнении (11.1) замену переменных

$$z_1 = u_1(\vec{x}), \dots, z_{n-1} = u_{n-1}(\vec{x}), z_n = g(\vec{x}), \vec{x} \in U(\vec{a}), \quad (11.7)$$

и рассмотрим в точке $\vec{x} = \vec{a}$ функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{\vec{x}=\vec{a}}. \quad (11.8)$$

Элементы в строках этого определителя являются координатами векторов $\nabla u_i(\vec{x}), \nabla g(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$. Первые $(n-1)$ строк в определителе (11.8) линейно независимы в точке $\vec{x} = \vec{a}$, т.к. линейно независимы $\nabla u_i(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$. Докажем, что векторы $\nabla u_i(\vec{x}), \nabla g(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$,

являются также линейно независимыми в точке $\vec{x} = \vec{a}$. Предположим противное, т.е. существуют числа α_i , $i = \overline{1, n-1}$, такие, что $\nabla g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \nabla u_i(\vec{x})$. Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\vec{f}(\vec{x})$. В результате получим

$$\left(\nabla g(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}) \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(\nabla u_i(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}) \right).$$

Левая часть этого равенства при $\vec{x} = \vec{a}$ не равна нулю в силу (11.5), а правая равна нулю в силу (11.1). Противоречие.

Так как определитель (якобиан) (11.8) и скалярное произведение (11.5) отличны от нуля в точке $\vec{x} = \vec{a}$, то в силу непрерывности они отличны от нуля в некоторой её окрестности. Далее через $U(\vec{a})$ будем обозначать окрестность точки $\vec{a}$, в которой одновременно являются независимыми первые интегралы, указанные в теореме, отличны от нуля функциональный определитель (11.8) и скалярное произведение (11.5). Отсюда следует вывод: отображение (11.7) является локально взаимно однозначным и непрерывно дифференцируемым (замена — гладкая и обратимая).

Уравнения (11.7) можно рассматривать как систему уравнений относительно переменных $x_1, \dots, x_n$ в $U(\vec{a})$. Согласно теореме об обратной функции, эта система разрешима, и существует окрестность $U(\vec{b})$ точки $\vec{b}$ с координатами $b_i = u_i(\vec{a})$, $i = \overline{1, n-1}$, $b_n = g(\vec{a}) = 0$, в которой мы получаем

$$\vec{x} = \vec{v}(\vec{z}) = \text{colon} (v_1(\vec{z}), \dots, v_n(\vec{z})), \vec{a} = \vec{v}(\vec{b}).$$

Здесь функции $v_i(\vec{z})$, $\vec{z} \in U(\vec{b})$ являются непрерывно дифференцируемыми. Возьмём в окрестности $U(\vec{a})$ какое-либо решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ характеристической системы (11.3), начинающееся на поверхности S_{n-1} . Перейдем в уравнении (11.1) к новым переменным z_i , $i = \overline{1, n}$ (11.7). В силу определения первого интеграла имеем

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{du_1(\vec{x})}{dt} = 0, \dots, \frac{dz_{n-1}}{dt} = \frac{du_{n-1}(\vec{x})}{dt} = 0, \quad (11.9)$$

$$\frac{dz_n}{dt} = \frac{dg(\vec{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \left(\nabla g(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}) \right) = \left(\nabla g(\vec{v}(\vec{z})), \vec{f}(\vec{v}(\vec{z})) \right) =$$

$$= \Psi(\vec{z}) \neq 0.$$

Если $u(\vec{x})$ — первый интеграл характеристической системы, то в новых переменных $(z_1, \dots, z_n)$ получим функцию

$$u(\vec{x}) = u(\vec{v}(\vec{z})) = \omega(\vec{z}),$$

которая является также первым интегралом в новых переменных. Отсюда находим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{du(\vec{x})}{dt} = \frac{d\omega(\vec{z})}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial z_1} \underbrace{\frac{dz_1}{dt}}_{=0} + \dots + \frac{\partial \omega}{\partial z_{n-1}} \underbrace{\frac{dz_{n-1}}{dt}}_{=0} + \frac{\partial \omega}{\partial z_n} \frac{dz_n}{dt} = \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial z_n} \Psi(\vec{z}). \end{aligned}$$

Так как $\Psi(\vec{z}) \neq 0$, $\vec{z} \in U(\vec{b})$, то в новых переменных $z_1, \dots, z_n$ уравнение (11.1) принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial z_n} = 0. \quad (11.10)$$

Его общим решением является произвольная непрерывно дифференцируемая функция $\omega = W(z_1, \dots, z_{n-1})$. Для функции $u_0(\vec{x})$ на поверхности S_{n-1} имеем

$$u_0(\vec{x}) = u_0(\vec{v}(\vec{z}))|_{z_n=0} = \omega_0(z_1, \dots, z_{n-1}),$$

где $\omega_0(z_1, \dots, z_{n-1})$ — непрерывно дифференцируемая функция. Это следует из определения непрерывной дифференцируемости функции $u_0(\vec{x})$ на гладкой поверхности S_{n-1} .

Отсюда находим $W = \omega_0(z_1, \dots, z_{n-1})$. Таким образом, решение задачи Коши в переменных $x_1, \dots, x_n$ при $z_n \neq 0$ будет иметь вид

$$u(\vec{x}) = \omega_0(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})).$$

■

Заметим, что в новых переменных $z_1, \dots, z_n$ задача Коши ставится следующим образом:

найти решение уравнения (11.10), которое на гиперплоскости $z_n = 0$ принимает значение $\omega_0(z_1, \dots, z_{n-1})$.

Использование:

1). Выпишем уравнения (11.7) при $z_n = 0$:

$$\begin{cases} z_1 = u_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \dots \\ z_{n-1} = u_{n-1}(x_1, \dots, x_n), \\ g(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (11.11)$$

2). В окрестности $V(\vec{b})$ разрешим систему (11.11) при $z_n = 0$: $\vec{x} = \vec{v}(\vec{z})$.

3). Построим функцию $\omega_0(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x}))$, подставив $\vec{x} = \vec{v}(z_1, \dots, z_{n-1}, 0)$ в $u_0(\vec{x})|_{g(\vec{x})=0}$.

4). В результате при $z_n \neq 0$ в окрестности $V(\vec{b})$ будем иметь

$$u(\vec{x}) = \omega_0(z_1, \dots, z_{n-1}).$$

5). Произведя замену $z_1 = u_1(\vec{x}), \dots, z_{n-1}(\vec{x})$, получим решение задачи Коши:

$$u(\vec{x}) = \omega_0(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})).$$

11.4. Пример решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка

Пример 11.4.1. Решить задачу Коши ([9], §17, 46):

$$(xy - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + \left(e^{\frac{y}{x}} + yz\right) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (11.12)$$

$$u = \frac{y}{1+y} \text{ при } y = x \ln z, \ x > 0, \ z > 1. \quad (11.13)$$

Решение

1. Выпишем характеристическую систему уравнения (11.11):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = y^2, \\ \frac{dz}{dt} = e^{\frac{y}{x}} + yz. \end{cases}$$

Характеристическая система не имеет положений равновесия. Отсутствуют также характеристические точки уравнения (11.12). Покажем это. Имеем

$$(\vec{f}, \nabla(y - x \ln z)) = -(xy - x^2) \ln z + y^2 - \frac{x}{z}(e^{\frac{y}{x}} + yz) = -\frac{x}{z}e^{\frac{y}{x}} \neq 0.$$

2. Найдём первые интегралы характеристической системы. Разделив первое уравнение на второе, получим однородное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^2}.$$

Произведя замену $x = y\omega(y)$, определим решение уравнения: $\Rightarrow y = C_1 e^{\frac{y}{x}}$. Значит, $u_1 = ye^{-\frac{y}{x}}$ — первый интеграл.

Найдём второй первый интеграл. Используя полученный первый интеграл, из второго и третьего уравнений характеристической системы будем иметь

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{y}{C_1} + yz, \\ \frac{dy}{dt} = y^2, \end{cases} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{1}{C_1 y} + \frac{z}{y} \Rightarrow \frac{\frac{y}{e^{\frac{y}{x}} + yz}}{\frac{y}{e^{\frac{y}{x}} + yz}} = C_2 \Rightarrow u_2 = \frac{y^2}{e^{\frac{y}{x}} + yz}.$$

Зная первые интегралы характеристической системы, нетрудно написать общее решение уравнения (11.11): $u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{e^{\frac{y}{x}}}, \frac{y^2}{e^{\frac{y}{x}} + yz}\right)$, где Φ — произвольная функция класса C^1 .

3. Найдём решение задачи Коши. Для этого на поверхности $z_3 = y - x \ln z = 0$ составим систему уравнений (11.11):

$$\begin{cases} z_1 = u_1(x, y, z) = \frac{y}{e^{\frac{y}{x}}}, \\ z_2 = u_2(x, y, z) = \frac{y^2}{e^{\frac{y}{x}} + yz}, \\ z_3 = y - x \ln z = 0. \end{cases} \quad u = \frac{y}{1 + y} \Big|_{z_3=0} = \frac{y(z_1, z_2, 0)}{1 + y(z_1, z_2, 0)}. \quad (11.14)$$

Связь между переменными x, y, z и z_1, z_2 на поверхности S_{n-1} устанавливается из решения системы (11.14). В результате имеем

$$z = e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow z_1 = \frac{y}{z}, \quad z_2 = \frac{y^2}{z + yz}. \quad (11.15)$$

Отсюда и из начального условия (11.12) находим

$$\frac{y}{1 + y} = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow u = \frac{z_2}{z_1} \text{ при } z_3 = 0.$$

Следовательно, решением задачи Коши при $z_3 \neq 0$ будет функция

$$u(x, y, z) = \frac{u_2(x, y, z)}{u_1(x, y, z)} = \frac{ye^{\frac{y}{x}}}{e^{\frac{y}{x}} + yz}. \diamond$$

Замечание 11.4.1. Так как характеристическая система является автономной, то она инвариантна относительно сдвига времени. Поэтому можно считать, что каждая её характеристика пересекает поверхность S_{n-1} при $t = 0$, и рассматривать систему (11.11) при $t = 0$. Её решение определяет связь между переменными $x_k, k = \overline{1, n}$ и $z_i, i = \overline{1, n-1}$. Далее, при $t \neq 0$ так же, как в пунктах 3) – 5) (§11.3).

Литература

1. Арнольд В.Н. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
2. Бишаев А.М., Диесперов В.Н. Продолжаемые и не продолжаемые решения дифференциального уравнения первого порядка: уч.-метод. пособие по курсу «Дифференциальные уравнения» / сост.: А.М. Бишаев, В.Н. Диесперов. – М.: МФТИ, 2015. – 36 с.
3. Ибрагимов И.Х. Азбука группового анализа. – М.: Знание, 1989. – 48 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика». №8).
4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд. иностр. лит., 1958. – 475 с.
5. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 381 с.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 272 с.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
8. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 344 с.
9. Романко В.К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. – М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. – 256 с.

10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
11. Трикоми Ф.Дж. Дифференциальные уравнения. – М.: Изд. иностр. лит., 1962. – 351 с.
12. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 447 с.
13. Филлипов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.
14. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1992. – 256 с.

Учебное издание

Диесперов Вадим Николаевич

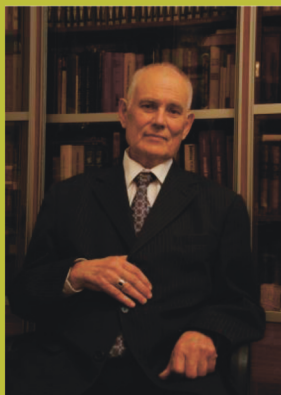
**ЛЕКЦИИ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ**

Редактор *И. А. Волкова*. Корректоры: *Н. Е. Кобзева, О. П. Котова*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*
Дизайн обложки *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать 08.08.2017. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 15,1.
Уч.-изд. л. 14,5. Тираж 300 экз. Заказ № 246.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru



Доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики МФТИ. Заслуженный профессор МФТИ. Член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике РФ. Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Автор более 100 научных и методических работ.

ISBN 978-5-7417-0630-5



9 785741 706305