Университетский учебник

А. С. МИЩЕНКО А. Т. ФОМЕНКО

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Москва „Факториал Пресс“ 2000

ББК 22.151
М71
УДК 513.73

СЕРИЯ «УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК»

М71 **Мищенко А. С., Фоменко А. Т.**
Курс дифференциальной геометрии и топологии. —
М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2000. — 448 с.
ISBN 5-88688-048-8.

Книга представляет собой курс дифференциальной геометрии, читаемый в течение двух семестров на математических факультетах университетов. Она содержит основной программный материал по общей топологии, нелинейным системам координат, теории гладких многообразий, теории кривых и поверхностей, группам преобразований, тензорному анализу и римановой геометрии, теории интегрирования и гомологиям, фундаментальным группам поверхностей, вариационным принципам в римановой геометрии.

Изложение иллюстрируется большим количеством примеров и сопровождается задачами, часто содержащими дополнительный материал.

Для математиков и физиков — студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников.

РФФИ

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 96-01-14189.

Научное издание

Мищенко Александр Сергеевич *Фоменко Анатолий Тимофеевич*

Курс дифференциальной геометрии и топологии

Рисунки А. Т. Фоменко

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 28. Бумага офсетная № 1. Гарнитура литературная. Подписано к печати 25.04.2000. Тираж 3000 экз. Заказ № 68.

Издательство «Факториал Пресс», 117449, Москва, а/я 331; ЛР ИД № 00316 от 22.10.1999.

e/mail: factorial@mail.compnet.ru http://www.compnet.ru/factorial.

Отпечатано с готовых диапозитивов издательства «Факториал Пресс» в ППП типографии «Наука» Академиздатцентра «Наука» РАН. 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6.

Оригинал-макет подготовлен с использованием издательской системы AMS-TEX.

ISBN 5-88688-048-8



©А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, 2000.

©Факториал Пресс, 2000

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4

Глава 1. **Введение в дифференциальную геометрию** 6

§ 1. Криволинейные системы координат. Простейшие примеры . . . 6
§ 2. Длина кривой в криволинейной системе координат 21
§ 3. Геометрия на сфере, плоскости 35
§ 4. Псевдосфера и геометрия Лобачевского 43

Глава 2. **Общая топология** 65

§ 1. Определения и простейшие свойства метрических и топологических пространств 65
§ 2. Связность. Аксиомы отделимости 77
§ 3. Компактные пространства 83
§ 4. Функциональная отделимость. Разбиение единицы 89

Глава 3. **Гладкие многообразия (общая теория)** 95

§ 1. Понятие многообразия 97
§ 2. Задание многообразий уравнениями 113
§ 3. Касательные векторы. Касательное пространство 118
§ 4. Подмногообразия 135

Глава 4. **Гладкие многообразия (примеры)** 155

§ 1. Теория кривых на плоскости и в трехмерном пространстве . . . 155
§ 2. Поверхности. Первая и вторая квадратичные формы 169
§ 3. Группы преобразований 207
§ 4. Динамические системы 236
§ 5. Классификация двумерных поверхностей 253
§ 6. Римановы поверхности алгебраических функций 276

Глава 5. **Тензорный анализ и риманова геометрия** 300

§ 1. Общее понятие тензорного поля на многообразии 300
§ 2. Простейшие примеры тензорных полей 306
§ 3. Связность и ковариантное дифференцирование 327
§ 4. Параллельный перенос. Геодезические 339
§ 5. Тензор кривизны 359

Глава 6. **Теория гомологий** 372

§ 1. Исчисление внешних дифференциальных форм. Когомологии . . 373
§ 2. Интегрирование внешних форм 388
§ 3. Степень отображения и ее приложения 399

Глава 7. **Простейшие вариационные задачи римановой геометрии** 407

§ 1. Понятие функционала. Экстремальные функции. Уравнение Эйлера 407
§ 2. Экстремальность геодезических 415
§ 3. Минимальные поверхности 424
§ 4. Вариационное исчисление и симплектическая геометрия 430

Предисловие

Дифференциальная геометрия и топология представляет собой важный раздел математики. Бурное развитие теоретической физики и механики XX в. привело к пониманию фундаментальности геометрических представлений в этих науках. Достаточно указать такие области, как теория относительности, механика сплошных сред, электродинамика, где геометрические методы являются основой математического аппарата.

Настоящий курс посвящен основам дифференциальной геометрии и топологии. Современное состояние этой области возникло в результате усилий многих поколений математиков. Трудность описания истории развития геометрии заключается в том, что в настоящее время многие геометрические проблемы и идеи мы представляем, совсем в ином свете, нежели математики прежних времен. По-новому осмыслены почти все геометрические (и не только геометрические) методы в математике. С современной точки зрения геометрия и топология, основы которых излагаются в учебнике, базируются на нескольких фундаментальных идеях, которые кратко можно изложить следующим образом.

Теоретико-множественная, или общая, топология — это раздел геометрии, вобравший в себя формальные общие приемы исследования вопросов сходимости и непрерывности. Важная идея в геометрии — это идея использования криволинейных систем координат, приведшая в конечном итоге к тензорному анализу и теории инвариантов. Если математический анализ и теория дифференциальных уравнений в основном исследуют свойства функций «в малом» (на бесконечно малых расстояниях точек друг от друга), то геометрия изучает свойства функций и других аналогичных объектов «в большом», т. е. на достаточно больших расстояниях точек друг от друга. Эта интуитивная идея изучения свойств геометрических объектов «в большом» привела к фундаментальному понятию многообразия, как обобщению понятия области евклидова пространства.

Не менее важным для геометрии в дальнейшем явилось сочетание указанных идей в их различных конкретных приложениях:

геометрическое осмысление теории интегрирования, теория гомологии как формальное алгебраическое оформление интуитивного перехода от изучения пространств «в малом» к их изучению «в большом»; геометрическая интерпретация линейной аппроксимации нелинейных функций и отображений, принцип общего положения в геометрии и многие другие.

Все эти геометрические идеи возникли при решении конкретных задач, способствуя как их решению, так и развитию геометрических представлений и методов. Иногда бывает трудно отделить представления, относимые теперь к дифференциальной геометрии и топологии, от других геометрических идей,оформившихся сейчас в разделы аналитической геометрии я линейной алгебры или вообще относящиеся к другим разделам математики.

Геометрия древних, получившая свое завершение в «Началах» Евклида, в наименьшей степени затронула развитие дифференциальной геометрии. Один только вопрос, на протяжении многих веков казавшийся главнейшим, нашел простое и естественное разрешение в рамках дифференциальной геометрии. Это вопрос о доказательстве пятого постулата Евклида. Формулировка пятого постулата Евклида казалась настолько далекой от самоочевидности и независимости от других аксиом геометрии, что на протяжении многих веков математики безуспешно пытались дать ему доказательство на основании других аксиом. Первая в Европе попытка доказать постулат о параллельных была, по-видимому, сделана Львом Герсонидом (1288–1344). Доказательством пятого постулата занимались такие математики, как К. Клавий (1574), П. Катальди (1603), Дж. Борелли (1658), Дж. Витале (1680), Дж. Валлис (1663), Дж. Саккерти 0733), И. Ламберт (1766), А. Лежандр (1800), Ф. Швейкарт (1818), Ф. Тауринус (1825) и даже К. Ф. Гаусс. Хотя попытки доказательства пятого постулата оказались безуспешными, роль этих исследований велика — они заложили фундамент для развития новой, неевклидовой геометрии.

Основоположником этой геометрии, основанной на отказе от пятого постулата, явился великий русский математик Н. И. Лобачевский (1792–1856). В 1826 г. он сделал первое сообщение о новой неевклидовой геометрии. С этого времени открывается новая эра в развитии геометрических представлений. В 1832 г. была опубликована работа Я. Больяи аналогичного содержания. К таким же идеям пришел и К. Ф. Гаусс, не опубликовавший свои работы.

Если Н. И. Лобачевский пришел к своей неевклидовой геометрии, основываясь на аксиоматическом методе исследований, то дальнейшее развитие новых идей в геометрии происходило уже в соединении с другими фундаментальными принципами определения геометрических объектов, связанными с введением системы координат. Координаты употреблялись еще древними в географий и астрономии. В птолемеевой «Географии» встречаются уже широта и долгота как числовые-координаты. В Европе близко к идее координат подошел Н. Орезм (1323–1382) при графическом задании функций. Однако о самих координатах у него нет и речи. Создателями метода координат и на его основе аналитической геометрии являются Р. Декарт (1596–1650) и П. Ферма (1601–1666). Систематическое использование криволинейных координат в соединении с идеями Лобачевского привели к бурному развитию собственно дифференциальной геометрии. Б. Риман (1826–1866) сделал принципиально новый шаг — стал изучать произвольные, так называемые римановы, пространства, нашедшие важные приложения в механике, теории относительности и др. Возникли крупные быстро развивающиеся разделы геометрий — векторное и тензорное исчисление, риманова геометрия.

Одновременно с римановой геометрией закладываются осно- вы топологии, как части геометрии, посвященной свойству непре- рывности. Конечно, истоки топологии следует (искать в анализе бесконечно малых. Но первые работы собственно топологического характера появились у Л. Эйлера (1707–1783) и К. Жордана (1838–1922). В начале XX в. создаются основы топологии (М. Фреше, Ф. Хаусдорф, А. Лебег, Л. Брауэр). Большую роль в создании топологии и ее применении сыграл А. Пуанкаре. Топо- логия в (настоящее время является бурно развивающейся областью.

Несколько ранее оформился раздел дифференциальной геометрии — теория поверхностей. Теория поверхностей началась с работ Л. Эйлера и Г. Монжа. Соединение идей нелинейных координат, векторного и тензорного исчисления, теории поверхностей, а также плодотворность геометрических представлений в различных задачах естествознания привели к важнейшему в геометрии понятию — многообразию. По-видимому, первым четко выделил это, понятие А. Пуанкаре (1854–1912). В настоящее время понятие многообразия настолько (Прочно укоренилось в математическом мышлении, что невозможно указать математиков, специально разрабатывающих теорию многообразии.

Наконец, следует остановиться еще на одном фундаментальном принципе, сыгравшем важную роль в развитии и понимании геометрии и многих фундаментальных проблем современной теоретической физики. Это так называемые групповые методы, основанные на идее (инвариантности геометрических объектов относительно группы симметрий пространств. В геометрии групповые методы зародились при изучении проективной геометрии и связаны с именами Понселе, Штаудта, Мебиуса, Плюккера, Кэли. В 1872 г. вышла знаменитая работа Ф. Клейна, которая в дальнейшем получила название «Эрлангенснкой программы». В ней Ф. Клейн подвел итоги и четко сформулировал групповые принципы построения геометрии. Групповые методы оказали большое влияние на развитие дифференциальной геометрии и топологии и различных приложений геометрии к другим разделам математики и естественных наук, хотя следует отметить, что все многообразие геометрических методов не сводится к групповой точке зрения на геометрию.

Число математиков, внесших большой вклад в развитие дифференциальной геометрии и топологии, очень велико. Отметим только, что русские и советские геометры оказали существенное влияние на это развитие.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

§ 1. Криволинейные системы координат. Простейшие примеры

1. Мотивировка. Рассмотрим евклидово пространство размерности n, которое мы в дальнейшем будем обозначать через $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что в нем выбраны и фиксированы декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, с помощью которых можно однозначно определить положение произвольной точки в $\mathbb{R}^n$, сопоставив ей набор вещественных чисел — ее координаты относительно выбранного и фиксированного ортобазиса, векторы которого (единичной длины и ортогональные друг другу) будем обозначать через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Идея описывать точки евклидова пространства с помощью набора вещественных чисел (которые также можно понимать как координаты радиус-вектора, идущего из начала координат в эту точку) лежит в основе аналитической геометрии, позволяющей решать многие геометрические задачи с помощью чисто алгебраических методов. Эта важная идея была впервые (в явном виде) введена в математику Декартом, имя которого и закрепилось в названии «декартовых координат». Алгебраизация геометрии сыграла чрезвычайно важную роль в развитии не только геометрии, но и математики в целом. Мы не будем здесь приводить известные примеры задач, просто и изящно решаемых с помощью алгебро-аналитических методов (например, задача о классификации поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве), отсылая читателя к курсам алгебры и аналитической геометрии. Напомним только, что с декартовыми координатами в $\mathbb{R}^n$ тесно связано понятие евклидова скалярного произведения — билинейной формы, сопоставляющей каждой паре векторов $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ вещественное число, обычно обозначаемое $\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle$, причем эта операция сопоставления является

симметричной, линейной по каждому аргументу, а сама форма — положительно определенной. В декартовой системе координат

$$\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle = \xi^1 \eta^1 + \ldots + \xi^n \eta^n, \qquad \vec{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n), \quad \vec{\eta} = (\eta^1, \ldots, \eta^n).$$

Однако, как показывают уже простейшие примеры, декартовых координат недостаточно для удобной аналитической записи многих конкретных задач. Продемонстрируем это, например, на примере записи уравнений кривых на плоскости, снабженной декартовыми координатами x, y. Конечно, когда мы имеем дело с довольно простыми кривыми, например, с окружностью или эллипсом, то их аналитическое выражение в декартовых координатах является весьма простым и естественным. В самом деле, уравнение окружности радиуса R с центром в точке A записывается так: $(x - A^1)^2 + (y - A^2)^2 = R^2$, где $A = (A^1, A^2)$.

Просто записывается и уравнение эллипса: $(x - A^1)^2/a^2 + (y - A^2)^2/b^2 = R^2$, где числа a и b являются величинами главных полуосей эллипса (рис. 1).

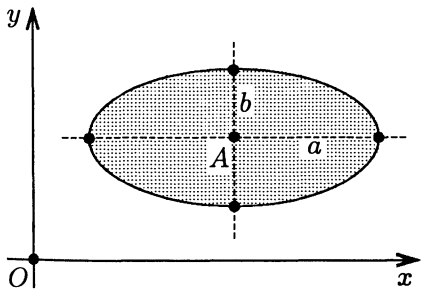


Рис. 1

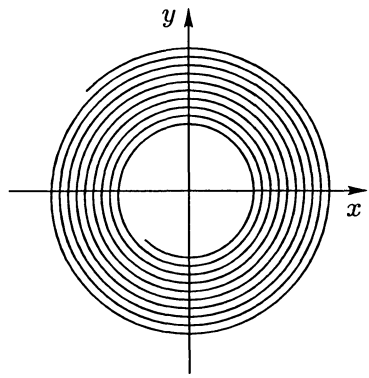


Рис. 2

Однако весьма часто в различных приложениях и конкретных механических и физических задачах встречаются гладкие кривые (скажем, траектории движения материальных точек в поле каких-либо сил), явное выражение которых в декартовых координатах весьма затруднительно. Так, например, следующее уравнение определяет в декартовых координатах спираль: $\sqrt{x^2 + y^2} - e^{\lambda(\operatorname{arctg} \frac{y}{x})} = 0$ (рис. 2). Конечно, запись этой кривой в декартовых координатах, быть может, и не слишком сложна, но тем не менее эта кривая

запишется значительно проще в другой, так называемой *полярной системе координат* на плоскости — в системе координат (r, φ), связанных с декартовыми координатами x, y соотношениями

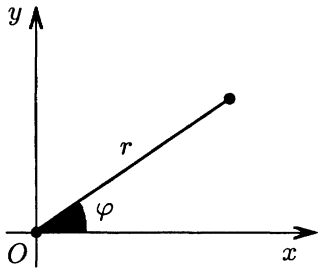


Рис. 3

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

(рис. 3). В этих координатах уравнение спирали принимает вид $r = e^{\lambda\varphi}$, что позволяет сразу оценить характер движения точки по этой траектории. Ниже мы еще вернемся к полярной системе координат, а здесь только отметим, что появление таких координат (называемых криволинейными координатами) является не прихотью математиков, стремящихся ввести в рассмотрение все новые и новые объекты, а,в некотором смысле, практической необходимостью, иногда весьма полезной при конкретных вычислениях. Укажем (не вдаваясь пока в подробности) на одну задачу, в которой использование полярных координат является полезным.

Рассмотрим движение материальной точки на плоскости в центральном поле сил. Пусть центр находится в точке O и на плоскости введены полярные координаты (r, φ). Пусть $\vec{r}$ — радиус-вектор движущейся точки (радиус-вектор выходит из точки O), r — его длина, t — время (параметр движения); тогда координаты r и φ будут какими-то функциями времени. Рассмотрим в точке $\vec{r}(t)$, имеющей полярные координаты $r = |\vec{r}|$, φ, два единичных ортогональных вектора: вектор $\vec{e}_r$, направленный по радиус-вектору точки (отметим, что при этом выполнено соотношение $\vec{r} = r\vec{e}_r$), и вектор $\vec{e}_\varphi$, ортогональный вектору $\vec{e}_r$ и направленный в сторону увеличения полярной координаты φ (рис. 4). Точкой будем обозначать дифференцирование радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ по времени t. Тогда, как известно из механики, движение материальной точки (будем считать для простоты, что ее масса равна 1) в центральном поле сил на плоскости определяется следующим дифференциальным уравнением: $\ddot{\vec{r}} = f(r)\vec{e}_r$, где f — некоторая гладкая функция от

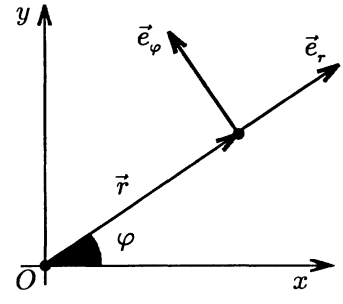


Рис. 4

одного аргумента r. Сформулируем по ходу дела полезную для читателя задачу: перепишите это дифференциальное уравнение в декартовых координатах на плоскости.

Движение нашей материальной точки можно задать в виде двух функций: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, т. е. в полярной системе координат. Довольно легко убедиться в том, что при движении материальной точки в центральном поле сил сохраняется величина $r^2\varphi$. Это есть один из законов Кеплера, которые он открыл, изучая движение планет в Солнечной системе (в его распоряжении уже были таблицы, указывающие координаты планет на небесной сфере как функции времени). Этой сохраняющейся величине может быть придан довольно прозрачный геометрический смысл. Сам Кеплер ввел для этого следующее удобное понятие: он назвал секториальной скоростью v скорость изменения площади $s(t)$, заметаемой радиус-вектором $r(t)$ (радиус-вектор есть функция времени), т. е. $v = \frac{ds(t)}{dt}$.

В терминах секториальной скорости закон Кеплера формулируется так: в равные времена радиус-вектор заметает равные площади, иными словами, секториальная скорость постоянна: $\frac{ds(t)}{dt} = \text{const}$. Можно также показать (мы здесь не будем на этом останавливаться), что это — одна из формулировок закона сохранения момента импульса. Читатель может убедиться в том, что вывод этого закона в полярных координатах значительно проще, чем в декартовых координатах (хотя вычисления можно производить, конечно, и в декартовых координатах).

Аналогичным образом при решении конкретных задач механики и физики возникли и другие (так называемые криволинейные) координаты — цилиндрические, сферические и т. д. Внимательно изучая все эти различные способы сопоставления точкам пространства совокупности вещественных чисел (называемых координатами этих точек), можно заметить, что в основе этих соответствий лежит некая общая идея, допускающая разумную формализацию, частными случаями которой и будут все перечисленные выше криволинейные координаты.

2. Декартовы и криволинейные координаты. Рассмотрим произвольную область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Напомним, что, как и в курсе анализа, мы называем *областью* произвольное множество C в евклидовом пространстве, каждая точка P которого входит в это множество вместе с некоторым шаром достаточно малого радиуса, имеющим точку P своим центром.

Рассмотрим второй экземпляр евклидова пространства, который обозначим через $\mathbb{R}^n_1$. Задать координаты точки P в области C —

значит сопоставить этой точке набор чисел, которые и можно будет назвать координатами. Ясно, что, задавая это соответствие произвольно (т. е. без каких-либо дополнительных требований), мы ничего хорошего не получим в том смысле, что это соответствие может оказаться бессодержательным (хотелось бы, чтобы введенные понятия приносили некоторую пользу, например, вычислительную, как это и произошло с декартовыми координатами в истории развития науки). Пример такого бессодержательного соответствия: сопоставить каждой точке P области C один и тот же набор чисел, скажем $(0, 0, 0, \ldots, 0)$. Таким образом, вырисовывается первое требование, которому должно удовлетворять наше соответствие: хотелось бы, чтобы различным точкам области отвечали различные наборы чисел (координат). Приведенный выше пример этому требованию не удовлетворяет (все точки области C имеют одни и те же координаты — нулевые).

Таким образом, мы хотим сопоставить каждой точке P области C набор n вещественных чисел. Ясно, что это сопоставление задает набор n функций $x^1(P), \ldots, x^n(P)$, имеющих областью определения область C; здесь $x^1, \ldots, x^n$ — координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_1$. Обычно требуют, чтобы эти функции были непрерывны и даже гладки (по крайней мере для почти всех точек области C), т. е. чтобы при малом изменении положения точки P ее координаты также менялись мало и чтобы гладкая деформация точки P порождала также гладкое изменение ее координат.

Итак, рассмотрим два экземпляра евклидова пространства: $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $y^1, \ldots, y^n$ и $\mathbb{R}^n_1$ с декартовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$; пусть C — область в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n_1$ можно было бы считать арифметическим пространством, отождествив его точки с последовательностями длины n, составленными из вещественных чисел.

***Определение* 1.** *Непрерывной системой координат* в области C евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется система функций $x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)$, задающих взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны отображение области C на некоторую область A в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_1$. Иными словами, эта система функций $x^1(P), \ldots, x^n(P)$ задает отображение, иногда называемое *гомеоморфизмом* области C на область A (о понятии гомеоморфизма мы, впрочем, будем говорить позже).

Определение 1 формализует наше желание, чтобы при непрерывном изменении точки P из области C набор ее координат также менялся непрерывно. Функции $x^1(P), \ldots, x^n(P)$ будем называть

координатами точки P относительно координатного отображения $f\colon C \longrightarrow A$.

Например, в качестве координатного отображения $f\colon C \longrightarrow A$ можно взять тождественное отображение, задаваемое линейными функциями $x^1 = y^1, \ldots, x^n = y^n$.

Иногда будем записывать точку P с ее координатами $x^1(P), \ldots, x^n(P)$ в виде $P(x^1, \ldots, x^n)$, предполагая, что уже задано и фиксировано координатное отображение $f\colon C \longrightarrow A$.

Среди всех непрерывных координатных отображений выделены такие, которые задают гладкое отображение области C на область A, т. е. все функции $x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)$ являются гладкими функциями от своих аргументов $y^1, \ldots, y^n$. Однако гладкость самого координатного отображения f без предположения гладкости обратного ему отображения f^{-1} не дает содержательных примеров систем координат, а потому мы сейчас сразу перейдем к определению таких координатных систем, у которых гладкими являются оба отображения: как f, так и f^{-1}. Для этого нам потребуется определить новое понятие — матрицу Якоби гладкого отображения.

Пусть $f\colon C \longrightarrow A$ — гладкое отображение, задаваемое набором функций $x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)$.

***Определение* 2.** *Матрицей Якоби* отображения f называется функциональная матрица

$$df = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix},$$

составленная из частных производных от координат $x^1(P), \ldots, x^n(P)$. Определитель этой матрицы будем обозначать через $J(f)$ и называть *якобианом* отображения f.

ЗАМЕЧАНИЕ. Введенное нами обозначение df для матрицы Якоби не вызовет путаницы с обозначением дифференциала гладкой функции f по той простой причине, что дифференциал гладкой функции f (при соответствующем его истолковании) как раз и совпадает с матрицей Якоби в этом частном случае. К этому вопросу мы еще вернемся. Отметим еще раз, что матрица Якоби является переменной матрицей, т. е. зависящей от точки P из области C; точно так же якобиан отображения f является гладкой функцией $J(f)(P)$, $P \in C$, на области C.

***Определение* 3.** *Регулярной системой координат* в области C евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется система гладких

функций $x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)$, задающих взаимно однозначное отображение области C на некоторую область A в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_1$, причем таких, что якобиан отображения $J(f)(P)$, $P \in C$, отличен от нуля во всех точках области C.

Отметим, что требование отличия от нуля якобиана отображения f во всех точках области C автоматически означает, что отображение f^{-1}, обратное к отображению f, является не только непрерывным, но и гладким. Это следует из теоремы о системе неявных функций. Таким образом, регулярная система координат задается двумя гладкими, взаимно обратными отображениями, устанавливающими гомеоморфизм между областями C и A. Определение 3 формализует наше желание, чтобы при гладком изменении точки P из области C набор ее координат также менялся гладко; более того, при гладком изменении «координатной точки» B в области A гладко меняется соответствующая ей (при отображении f^{-1}) точка P. Отметим теперь, что, как видно из приведенных выше определений, само понятие гладкой и регулярной системы координат автоматически предполагает задание по крайней мере двух экземпляров стандартного евклидова пространства, некоторые области которых отождествлены с помощью непрерывного и взаимно однозначного отображения, на которое дополнительно наложены требования гладкости (в обе стороны).

Данные нами определения можно интерпретировать и с несколько иной точки зрения. Можно было бы считать, что с самого начала в области C евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ была введена декартова система координат (с помощью тождественного отображения C на A при естественном отождествлении обоих экземпляров евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n_1$). Тогда введение в области C еще одной системы координат, задаваемой регулярным отображением f (т. е. гладким, взаимно однозначным отображением с ненулевым якобианом), можно рассматривать как замену координат: мы перешли от исходной декартовой системы координат к некоторой новой системе координат, заданной в той же области C.

***Определение* 4.** Регулярную систему координат в области C будем называть также *криволинейной системой координат* в области C.

Рассмотрим теперь в области C две произвольные криволинейные системы координат: $x^1(P), \ldots, x^n(P)$ и $z^1(P), \ldots, z^n(P)$. Это означает, что заданы и фиксированы два регулярных отображения: f и g, где

$$f\colon C \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^n_1(x^1, \ldots, x^n); \qquad g\colon C \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n_2(z^1, \ldots, z^n),$$

т. е. отображения f и g устанавливают взаимно однозначные и гладкие в обе стороны соответствия между областями C, A и C, B соответственно. Иными словами, каждой точке P из области C сопоставлены два набора ее криволинейных координат, $\{x^i(P)\}$ и $\{z^i(P)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку соответствие взаимно однозначно, то можно рассмотреть соответствие, сопоставляющее координатам $\{x^i(P)\}$ точки P ее координаты $\{z^i(P)\}$, что определяет отображение $\psi_{x,z}$: $A \longrightarrow B$, т. е. $\psi_{x,z}$: $x^i(P) \longrightarrow z^i(P)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Определенное таким образом отображение $\psi_{x,z}$ мы будем называть *заменой координат* в области C. При этой замене точка P получает вместо исходных криволинейных координат $\{x^i(P)\}$ новые криволинейные координаты $\{z^i(P)\}$.

Лемма 1. *Отображение $\psi_{x,z}$ является взаимно однозначным, гладким в обе стороны отображением области A на область B с ненулевым якобианом.*

Доказательство. Взаимная однозначность отображения $\psi_{x,z}$ следует непосредственно из определения 3. Гладкость отображения $\psi_{x,z}$ следует из того, что композиция двух гладких отображений также является гладким отображением. Осталось проверить, что отображение $\psi_{x,z}$ имеет ненулевой (в каждой точке области B) якобиан $J(\psi_{x,z})$.

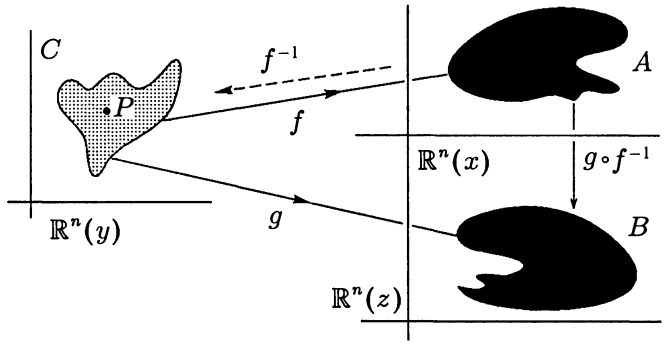


Рис. 5

В самом деле, отображение $\psi_{x,z}$ распадается в композицию двух отображений: $\psi_{x,z} = g \circ f^{-1}$: $A \longrightarrow B$ (рис. 5). Матрица Якоби отображения $\psi_{x,z}$ распадается в произведение матриц Якоби отображения f^{-1} и отображения g.

В самом деле, $d\psi_{x,z} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$. Рассмотрим $\dfrac{\partial z^i}{\partial x^j}$. Так как

$$z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n) = z^i(y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^n)),$$

где функции $\{y^\alpha(x^1, \ldots, x^n),\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n\}$, задают гладкое отображение f^{-1}: $A \longrightarrow C$, то по формуле дифференцирования сложной функции получаем $\dfrac{\partial z^i}{\partial x^j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial z^i}{\partial y^k} \dfrac{\partial y^k}{\partial x^j}$, что и означает, что матрица Якоби $d\psi_{x,z}$ распалась в произведение двух матриц, dg и df^{-1}. Мы воспользовались здесь формулой, выражающей элементы произведения двух матриц через элементы самих этих матриц. Осталось выяснить, как связаны матрицы Якоби df и $d(f^{-1})$. Так как композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением области C на себя (см. определение регулярной системы координат), то по только что доказанной формуле мы получаем, что $d(f^{-1} \circ f) = df^{-1} \circ df = E$, где E — единичная матрица порядка n, т. е. окончательно, $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$. Тем самым доказано, что для матрицы $d\psi_{x,z}$ выполнено тождество $d\psi_{x,z} = (dg) \cdot (df)^{-1}$, т. е. $J(\psi_{x,z}) = \dfrac{J(g)}{J(f)}$, и так как оба якобиана $J(g)$ и $J(f)$ отличны от нуля, то и якобиан $J(\psi_{x,z})$ отличен от нуля. □

Если задано отображение f области C в область A, устанавливающее в области C криволинейные координаты, то отображение f^{-1}, отображающее область A на область C, можно считать устанавливающим криволинейные координаты в области A (с помощью декартовых координат из области C). Этим простым замечанием мы будем в дальнейшем часто пользоваться, переходя от отображения f к f^{-1}.

Пусть на области C задан набор гладких функций $\{x^i(P)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Как узнать, задает ли этот набор регулярную систему координат в C?

Лемма 2. *Пусть набор гладких функций $\{x^i(P)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обладает тем свойством, что якобиан этой системы функций $J(f)$, $f = \{x^i(P), 1 \leqslant i \leqslant n\}$, отличен от нуля в области C. Тогда для каждой точки P из области C существует такая открытая окрестность, что в этой окрестности набор функций $\{x^i(P)\}$ задает регулярную систему координат.*

Такую систему координат можно назвать *локальной системой координат.*

Доказательство. В условии леммы не было предположено, что набор функций $\{x^i(P)\}$ определяет (хотя бы локально) взаимно однозначное отображение области C на область A евклидова пространства $\mathbb{R}^n_1$. Однако по теореме о системе неявных функций (и теореме о существовании обратного отображения) из отличия от нуля якобиана вытекает существование (по крайней мере в некоторой открытой окрестности) обратного отображения, которое,

кроме того, будет гладким. Утверждение леммы следует теперь из определения регулярной системы координат. □

Отметим, что набор функций, удовлетворяющих условию леммы 2, не обязательно определяет регулярную систему координат сразу во всей области C, т. е. гладкое отображение f^{-1} области A на область C может и не существовать. Действительно, рассмотрим простой пример. Возьмем в качестве области C двумерную декартову плоскость, из которой „выколота“ одна точка — начало координат O, а в качестве отображения f (задаваемого здесь двумя функциями, $x^1(P)$ и $x^2(P)$) рассмотрим гладкое отображение

$$f(y^1, y^2)=(x^1(y), x^2(y)), \quad x^1(y^1, y^2)=(y^1)^2-(y^2)^2,\ x^2(y^1, y^2)=2y^1y^2,$$

т. е. если положить $z = y^1 + iy^2$, $w = x^1 + ix^2$ (где i — мнимая единица), то $w = z^2$. Это отображение переводит комплексное число z в его квадрат (для удобства можно считать, что оба экземпляра евклидовой плоскости, $\mathbb{R}^2(y)$ и $\mathbb{R}^2(x)$, отождествлены между собой). Это же отображение удобно записать в полярных координатах на плоскости (r, φ); тогда получим $f(r, \varphi) = (r^2, 2\varphi)$; геометрически действие отображения f показано на рис. 6. Найдем якобиан $J(f)$ отображения f (подсчитаем его, например, в исходной декартовой системе координат y^1, y^2 на $\mathbb{R}^2(y)$). Матрица Якоби df имеет вид

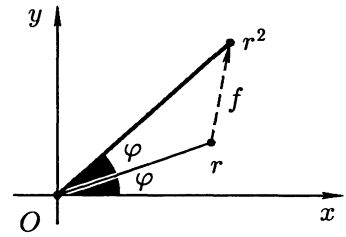


Рис. 6

$$df = \begin{pmatrix} 2y^1 & 2y^2 \\ -2y^2 & 2y^1 \end{pmatrix}, \qquad J(f) = 4((y^1)^2 + (y^2)^2) > 0.$$

Мы видим, что якобиан положителен во всех точках области C (так как начало координат „выколото“). Следовательно, по лемме 2 наше отображение устанавливает локальную (регулярную) систему координат в некоторой открытой окрестности каждой точки из области C. В то же время отображение f не имеет обратного отображения f^{-1}, поскольку f не взаимно однозначно.

В самом деле, каждая точка $w = x^1 + ix^2 \in \mathbb{R}^2(x)$, не являющаяся началом координат, всегда имеет ровно два прообраза при отображении f, это — точки (r, φ) и $(r, \varphi + \pi)$, являющиеся, конечно, различными точками области C. Таким образом, если задан конкретный набор функций, претендующих на роль

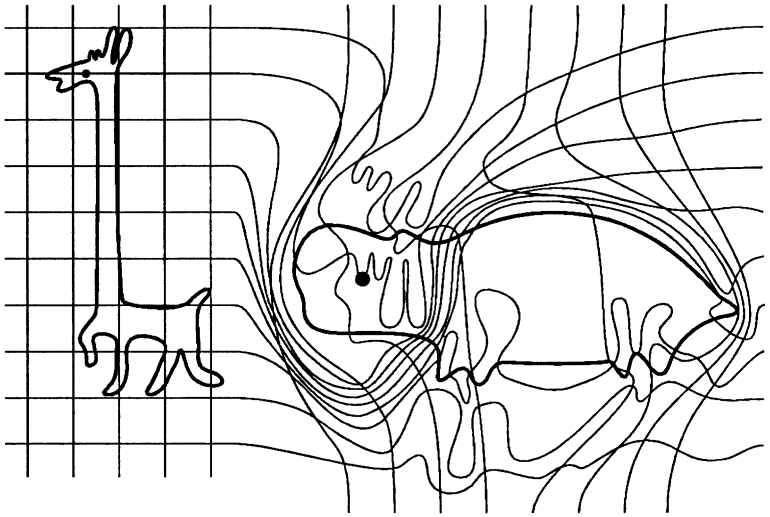


Рис. 7

регулярной системы координат в некоторой области C евклидова пространства, то для проверки этого следует не только убедиться в том, что якобиан этой системы отличен от нуля (во всех точках области C), но и проверить взаимную однозначность отображения, задаваемого этим набором.

Отметим также, что в приведенном примере якобиан системы функций стремится к нулю, когда точка P приближается к нулю. В геометрии известен следующий вопрос: будет ли взаимно однозначным такое гладкое отображение f евклидова пространства на себя, при котором на якобиан $J(f)$ наложено условие $0 < \varepsilon \leqslant J(f) \leqslant N < \infty$? Здесь ε и N — постоянные. Мы не будем здесь заниматься этим вопросом.

Каждая система криволинейных координат в области C определяет семейства так называемых координатных линий, определяемых так: i-я координатная линия задается уравнением

$$x^1(P) = c_1,\ x^2(P) = c_2,\ \ldots,\ x^{i-1}(P) = c_{i-1},\ x^i(P) = t,$$
$$x^{i+1}(P) = c_{i+1},\ \ldots,\ x^n(P) = c_n,$$

где все c_i постоянные, а t — непрерывный параметр. С изменением t точка P пробегает некоторую гладкую траекторию в области C. Таким образом, из каждой точки P области C выходит n гладких траекторий, которые и называются координатными линиями

данной системы координат (в точке P). Для другой точки P будет другая система координатных линий, и это семейство координатных линий гладко деформируется при изменении точки P. Например, если система координат — декартова, то ее координатные линии являются прямыми, проходящими через точку P параллельно координатным осям. При наглядном изображении криволинейных систем координат часто бывает полезно изображать координатные линии; в частности, при помощи изображения координатной сетки хорошо видны криволинейные замены систем координат (см., например, рис. 7).

3. Простейшие примеры криволинейных систем координат. Мы начнем этот пункт со следующего замечания: полярная система координат (r, φ) на евклидовой плоскости не является регулярной системой координат, определенной на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. В самом деле, рассмотрим функции замены координат от полярной системы к декартовой системе. Эти функции таковы $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$. Найдем якобиан $J(\psi)$ этой замены. Прямое вычисление дает

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad J(\psi) = r.$$

Таким образом, якобиан равен нулю в начале координат. Так как декартова система координат x^1, x^2, очевидно, регулярна (как система координат) на плоскости $\mathbb{R}^2(x^1, x^2)$, то отсюда следует, что полярная система координат не является регулярной (в смысле определения 3). Однако на этом неприятности, связанные с по-

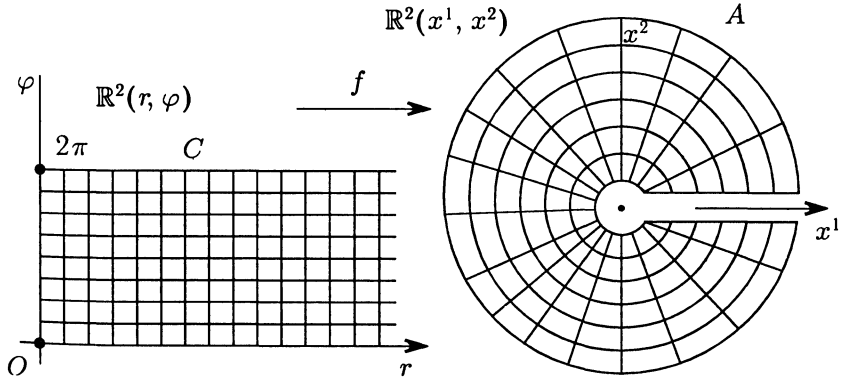


Рис. 8

лярной системой координат, не кончаются. Эта система координат не является взаимно однозначным отображением всей двумерной евклидовой плоскости на себя, так как точки вида (r, φ) и $(r, \varphi+2\pi)$ переходят в одну и ту же точку.

Следует выделить ту область C, в которой полярная система координат является регулярной системой координат. Разберем этот пример подробно.

Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2(r, \varphi)$, где $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$. В качестве области C возьмем бесконечную полосу, определяемую неравенствами $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < r < +\infty$. Тогда в качестве области A в плоскости $\mathbb{R}^2(x^1, x^2)$ следует взять всю двумерную плоскость, за исключением луча $x^1 \geqslant 0$, $x^2 = 0$. Отображение $f\colon C \longrightarrow A$ задается формулами $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$. На рис. 8 показано, что происходит с координатными линиями систем координат при отображении f. Прямоугольная сетка декартовых координат превращается в полярную сетку. Взаимная однозначность и регулярность построенного отображения f очевидны.

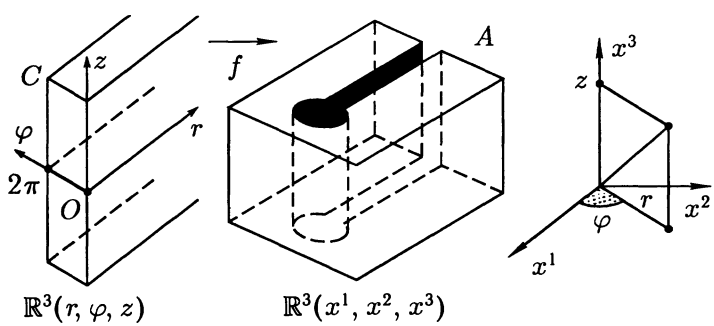


Рис. 9

Рассмотрим теперь трехмерное евклидово пространство и изучим так называемую *цилиндрическую систему координат*. Формулы замены следующие: $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$, $x^3 = z$. Рассмотрим $\mathbb{R}^3(y^1, y^2, y^3)$, где $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $y^3 = z$, и в качестве C возьмем область $0 < r$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Приведенные выше формулы определяют гладкое отображение $f\colon C \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3)$, где область A получается из $\mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3)$ выбрасыванием полуплоскости $\varphi = 0$, $r \geqslant 0$ (рис. 9). Матрица Якоби имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан замены равен r. Таким образом, в области A цилиндрическая система координат регулярна (якобиан равен нулю только в точках оси z); полуплоскость исключена для обеспечения взаимно однозначного соответствия.

Теперь рассмотрим n-мерное евклидово пространство и введем в нем так называемую *сферическую систему координат*. Формулы замены, вычисление матрицы Якоби и якобиана мы проведем в n-мерном случае, а разбор структуры областей C и A (в целях наглядности) только для случая трехмерного евклидова пространства. Формулы замены таковы:

$$f_n\colon C(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}) \longrightarrow A(x^1, x^2, \ldots, x^n);$$

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\theta_1, \\ x^2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x^3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x^n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Структура этих формул ясна: удобно считать, что все строки имеют одно и то же происхождение, но только параметры θ_i, начиная с номера $i = n$, равны нулю. Матрица Якоби отображения f_n имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & \ldots \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & -r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2} & \ldots \\ \sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\ldots\cos\theta_{n-1} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_n = (-1)^n r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1}J_{n-1} + \\ +(-1)^n r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-1}J_{n-1} = \\ = (-1)^n r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}J_{n-1}; \end{aligned}$$

$$J_2 = r, \quad J_3 = -r^2\sin\theta_1, \quad J_4 = r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2,$$
$$J_5 = r^4\sin^3\theta_1\sin^2\theta_2\sin\theta_3$$

и так далее.

Для трехмерного евклидова пространства сферические координаты обычно обозначаются через (r, θ, φ); в этих обозначениях

формулы замены приобретают вид:

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta;$$
$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad r \geqslant 0.$$

В этих координатах $J = r^2\sin\theta$.

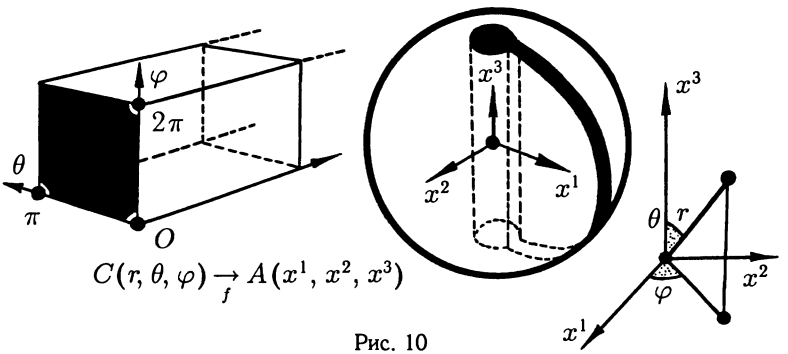


Рис. 10

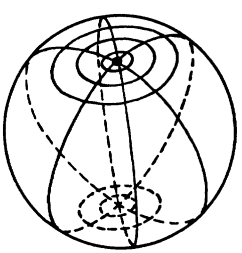


Рис. 11

Рассмотрим структуру областей C и A (см. рис. 10). Равенство нулю якобиана этой замены имеет место только в точках оси x^3; остальные точки, принадлежащие полуплоскости $x^2 = 0$, $x^1 \geqslant 0$, удалены для того, чтобы обеспечить взаимную однозначность координатной системы. При фиксированном r координатные линии параметров θ, φ имеют вид, показанный на рис. 11. Эти угловые параметры иногда называются широтой и долготой (дают координатную сетку на глобусе). Матрица Якоби в трехмерном случае имеет вид

$$d\psi = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Задачи к § 1

1. Доказать, что система функций $u = x + \sin y$, $v = y - \frac{1}{2}\sin x$ на плоскости является регулярной системой координат.

2. Показать, что на окружности S^1 нельзя задать единой системы координат.

3. Записать уравнение Лапласа $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в полярной системе координат.

§ 2. Длина кривой в криволинейной системе координат

1. Длина кривой в евклидовой системе координат. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и зададим в нем евклидово скалярное произведение $\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle = \sum \xi^i \eta^i$, $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$. Тогда каждому вектору $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ можно сопоставить вещественное число, называемое его *модулем* или *длиной* и определяемое формулой $|\vec{\xi}| = \sqrt{\langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle}$. Эта формула задает длины векторов, идущих из точки O в некоторую точку $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если же мы хотим определить расстояние между двумя произвольными точками $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, то следует вычислить длину вектора $\vec{\xi} - \vec{\eta}$. Как известно из аналитической геометрии, угол φ между двумя векторами, $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$, также может быть выражен через скалярные произведения по формуле $\cos \varphi = \frac{\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle}{|\vec{\xi}||\vec{\eta}|}$. Мы видим, что такие важные метрические понятия, как длины векторов и углы между ними, тесно связаны со скалярным произведением в евклидовом пространстве. При построении других важных понятий геометрии мы будем часто класть в основу определений именно скалярное произведение векторов.

Кроме длин прямолинейных отрезков в евклидовом пространстве полезно уметь вычислять длины гладких кривых. Дадим определение длины гладкой кривой. Для этого зададим кривую $\gamma(t)$ в параметрическом виде, т. е. будем считать, что *гладкая кривая* задана в евклидовом пространстве набором n гладких функций $x^1(t), \ldots, x^n(t)$, где параметр (время) пробегает либо всю вещественную ось, либо (этот случай будет для нас особенно важен) отрезок $[a, b]$. При этом мы считаем, что $x^1, \ldots, x^n$ являются декартовыми координатами в $\mathbb{R}^n$.

***Определение* 1.** *Длиной кривой* $\gamma(t)$ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ (или от значения параметра $t = a$ до значения параметра $t = b$) называется число $l(\gamma)_a^b = \int\limits_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt$, где $\dot{\gamma}(t)$ — вектор с координатами $\left(\frac{dx^1(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx^n(t)}{dt} \right)$, называемый иногда *вектором скорости* кривой $\gamma(t)$ в точке t или *касательным вектором* к кривой $\gamma(t)$.

Таким образом, мы назвали длиной кривой интеграл от длины ее вектора скорости (или от модуля ее вектора скорости). В явном виде формула для длины кривой приобретает вид

$$l(\gamma)_a^b = \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i(t)}{dt} \right)^2} dt.$$

Лемма 1. *Пусть задана гладкая кривая* $\gamma(t)$, *и на ней фиксированы две точки,* $\gamma(a)$ *и* $\gamma(b)$, *отвечающие значениям параметра* $t=a$ *и* $t=b$. *Пусть* $t=t(\tau)$ — *произвольная гладкая замена параметра* t *на новый параметр* τ, *причем* $\frac{dt}{d\tau}>0$. *Тогда длина кривой* $l(\gamma(t))_a^b$ *не изменится, т. е. имеет место равенство* $l(\gamma(t))_a^b = l(\gamma(\tau))_\alpha^\beta$, *где* $a=t(\alpha)$, $b=t(\beta)$.

Доказательство. Обозначим вектор $\left\{\frac{dx^1(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx^n(t)}{dt}\right\}$ через $\dot\gamma_t$. Прямое вычисление дает

$$l(\gamma(t))_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle\dot\gamma_t, \dot\gamma_t\rangle}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle\dot\gamma_\tau, \dot\gamma_\tau\rangle\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2}\frac{dt}{d\tau}d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle\dot\gamma_\tau, \dot\gamma_\tau\rangle}\frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau = \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle\dot\gamma_\tau, \dot\gamma_\tau\rangle}\,d\tau. \quad \square$$

Пусть теперь заданы две гладкие кривые, $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(\tau)$, пересекающиеся в некоторой точке P евклидова пространства, т. е. существуют такие значения параметров $t=a$ и $\tau=b$, что $P=\gamma_1(a)=\gamma_2(b)$. Определим угол между двумя кривыми в точке их пересечения.

***Определение* 2.** *Углом* между двумя пересекающимися гладкими траекториями, $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(\tau)$, в точке их пересечения $P=\gamma_1(a)=\gamma_2(b)$ называется угол φ, определяемый равенством:

$$\cos\varphi = \frac{\langle\dot\gamma_1(a), \dot\gamma_2(b)\rangle}{|\dot\gamma_1(a)|\,|\dot\gamma_2(b)|},$$

если только оба вектора скорости, $\dot\gamma_1(a)$ и $\dot\gamma_2(b)$, отличны от нуля в точке P.

Замечание. Строго говоря, это равенство определяет не один угол, а два угла, дающих в сумме угол, равный π; однако если считать, что наши кривые занумерованы, то тогда возникает понятие ориентированного угла, который уже определяется приведенной выше формулой однозначно. Остановимся также на требовании, чтобы оба вектора скорости были отличны от нуля в точке пересечения. Дело в том, что в точках, где вектор скорости гладкой кривой обращается в нуль, эта кривая может претерпевать излом, скачком меняя направление своего движения. Таким образом, при попытке

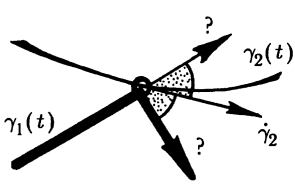


Рис. 12

определить угол в точке пересечения с такой кривой, возникает неопределенность в выборе одного из двух гладких кусков кривой, которые разделяет точка излома (рис. 12). Отметим также, что наличие на гладкой кривой точки излома (в тех значениях параметра, для которых вектор скорости аннулируется) отнюдь не противоречит гладкости кривой (см. определение гладкой кривой).

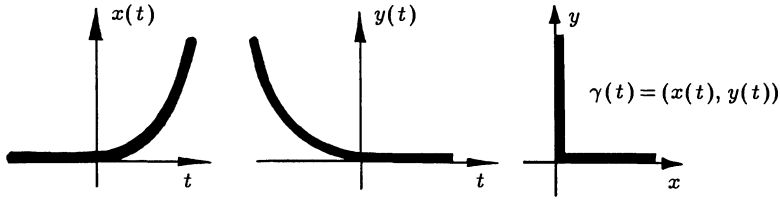


Рис. 13

Пример гладкой кривой, имеющей излом в одной точке, показан на рис. 13; здесь «угол излома» гладкой кривой в особой точке равен $\pi/2$. Легко построить пример гладкой кривой, имеющей в особой точке угол излома, равный π (рис. 14).



Рис. 14

Упражнение. Напишите параметрическое уравнение кривой, изображенной на рис. 14. Может ли кривая, изображенная на рис. 14, быть задана аналитическими функциями $x(t)$, $y(t)$?

Обсудим теперь вопрос насколько данное выше определение длины кривой удовлетворяет наглядным представлениям о длине, базирующимся на понятии евклидовой длины отрезков и на понятии тонкой нерастяжимой нити, с помощью которой можно измерять длины более сложных, чем отрезок, кривых. Кроме того, нам известны также определения длины окружности, которая иногда вводится как предел периметров вписанных (или описанных) многоугольников при стремлении к бесконечности числа сторон выпуклого многоугольника, аппроксимирующего окружность. Начнем, конечно, с отрезка.

1) Пусть кривая $\gamma(t)$ задается линейными функциями $x^i(t) = \alpha^i t$, $\alpha^i = \text{const}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $a \leqslant t \leqslant b$. Тогда, вычисляя длину этой гладкой кривой от значения параметра $t = a$ до $t = b$, получаем $l(\gamma)_a^b = \int\limits_a^b \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (\alpha^i)^2}\, dt = (b-a)\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (\alpha^i)^2}$. Поскольку начальной точкой отрезка является точка с координатами $\{\alpha^i a\}$, а его конечной

точкой — точка $\{\alpha^i b\}$, то обычная (евклидова) длина отрезка равна $(b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha^i)^2}$, что совпадает со значением интеграла $l(\gamma)_a^b$.

2) Пусть кривая $\gamma(t)$ задается на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ параметрическими уравнениями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Непосредственный подсчет интеграла дает $l(\gamma)_a^b = 2\pi R$, где $a = 0$, $b = 2\pi$, что, очевидно, совпадает с известным выражением для длины окружности радиуса R.

2. Длина кривой в криволинейной системе координат. Рассмотрим теперь произвольную криволинейную систему координат в области C евклидова пространства, и пусть $\gamma(t)$ — произвольная гладкая кривая в этой области. Как запишется длина кривой $\gamma(t)$ в этой криволинейной системе координат? Проследим, что происходит с компонентами вектора скорости кривой $\gamma(t)$ при замене координат. Обозначим криволинейные координаты через $z^1, \ldots, z^n$, т. е. $x^i = x^i(z)$; тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \frac{dx^i(z(t))}{dt} = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{\partial z^k}{dt}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

т. е.

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx^i(z(t))}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_k \frac{\partial x^i(z(t))}{\partial z^k}\frac{dz^k}{dt}\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{m,p}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{dz^m}{dt}\frac{dz^p}{dt}}\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p} g_{mp}(z)\frac{dz^m}{dt}\frac{dz^p}{dt}}\,dt,$$

где функции $g_{mp}(z)$ имеют следующий вид: $g_{mp}(z) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}$. Очевидно, эти функции симметричны по индексам m и p, т. е. $g_{mp} = g_{pm}$; следовательно, набор функций g_{mp} может быть организован в симметричную матрицу, которую мы будем в дальнейшем обозначать через $G = (g_{mp})$. В полученной нами формуле коэффициенты матрицы G представлены в виде сумм произведений элементов матрицы Якоби.

В самом деле, $d\psi_{z,x} = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$, следовательно, матрица G представляется в виде произведения двух матриц: $G = AA^\top$, где $A = d\psi_{z,x}$. Ясно, что матрица G зависит от криволинейной системы координат z и будет, вообще говоря, изменяться при заменах системы координат. Каков закон изменения матрицы $G(z)$?

Сделаем еще одну замену переменных, перейдя от переменных $\{z^i\}$ к переменным $\{y^k\}$, т. е. рассмотрим регулярную замену координат вида $z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом мы считаем $\{y^k\}$ снова криволинейными координатами в области C.

Тогда коэффициенты $g_{mp}(z)$ меняются по закону

$$g_{kl}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^l} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{m,\,p} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial z^m}{\partial y^k} \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \frac{\partial z^p}{\partial y^l} =$$

$$= \sum_{m,\,p} \frac{\partial z^m}{\partial y^k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \right) \frac{\partial z^p}{\partial y^l} = \sum_{m,\,p} \frac{\partial z^m}{\partial y^k} g_{mp}(z) \frac{\partial z^p}{\partial y^l},$$

т. е. $G(y) = d\psi_{y,\,z}\, G(z) (d\psi_{y,\,z})^{\top}$.

Замечание. Для упрощения обозначений в выражениях вида $\sum\limits_i a^i b^i$, где суммирование ведется по повторяющимся индексам, мы будем опускать знак $\sum$ и писать просто $a^i b^i$. Так, например, приведенная выше формула: $g_{kl}(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^l}$ запишется с учетом этого соглашения в виде $g_{kl}(y) = \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^l}$. Иногда мы будем обозначать новые координаты так: $z^{i'}$, ставя штрих у индексов, записанных в новой системе координат; например, $g_{i'j'}$.

Функции $g_{mp}(z)$ имеют прозрачный геометрический смысл. Рассмотрим произвольную точку P в области C и координатные линии криволинейной системы координат $z^1, \ldots, z^n$, проходящие через точку P. Каждая из этих линий может быть задана параметрическими уравнениями вида

$$z^1 = c_1, \quad \ldots, \quad z^{i-1} = c_{i-1}, \quad z^i = t, \quad z^{i+1} = c_{i+1}, \quad \ldots, \quad z^n = c_n,$$

где c_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, $\alpha \neq i$, — такие постоянные, что точка P (в системе z) имеет координаты $z^\alpha = c_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. Обозначим m-ю координатную линию через $\gamma_m(t)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда m-я координатная линия системы z в системе координат x запишется так: $x^i(c_1, \ldots, c_{m-1}, z^m = t, c_{m+1}, \ldots, c_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Вектор скорости этой гладкой кривой в точке P имеет координаты $\vec{e}_m = \left\{ \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \right\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как $g_{mp}(z) = \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p}$, то это же выражение можно записать в виде $g_{mp}(z) = \langle \vec{e}_m, \vec{e}_p \rangle$, т. е. функции g_{mp} являются скалярными произведениями векторов, касательных к соответствующим координатным линиям (рис. 15). Заметим, что полученное скалярное произведение — евклидово, т. е. оно является характеристикой объемлющего пространства.

Тем самым, мы видим, что матрица $G(z)$ при заменах координат преобразуется как матрица квадратичной формы. В частности, если исходные координаты были декартовыми, то матрица G является единичной и, следовательно, в любой другой (криволинейной) системе координат ее можно записать так: $G(z) = AEA^{\top}$, где $A = d\psi_{z,x}$, если $\{x^i\}$ — декартовы координаты (в этих координатах $G(x) = E$).

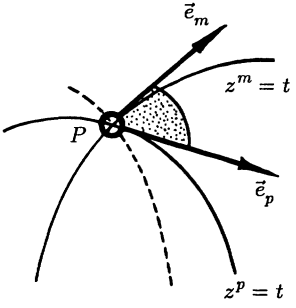


Рис. 15

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим простейшие примеры формул для длины кривой в различных криволинейных системах координат. Попутно мы вычислим в явном виде матрицу G для этих криволинейных систем координат.

1) Полярные координаты на двумерной плоскости $\mathbb{R}^2(r, \varphi)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах (x^1, x^2) имеет вид:

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{т. е.} \qquad g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Матрица Якоби, уже вычисленная выше, имеет вид

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix};$$

отсюда

$$G(r, \varphi) = d\psi (d\psi)^{\top} = \\ = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в полярной системе координат длина кривой, заданной в виде $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$, выражается по формуле

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

2) Цилиндрические координаты в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3(r, \varphi, z)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид $G(x) = E$. Матрица Якоби была уже вычислена нами выше, она имеет вид

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

отсюда

$$G(r, \varphi, z) = (d\psi)(d\psi)^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в цилиндрической системе координат длина кривой, заданной в виде: $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), z(t))$, выражается по формуле:

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

В качестве примера рассмотрим вычисление длины винтовой линии на прямом круговом цилиндре, заданной параметрически уравнениями: $r(t) = R$, $\varphi(t) = \omega t$, $z = qt$. Тогда

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{R^2\omega^2 + q^2}\, dt = (R^2\omega^2 + q^2)(b - a).$$

3) Сферические координаты в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3(r, \theta, \varphi)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид $G(x) = E$. Матрица Якоби была уже вычислена нами выше, она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix};$$

отсюда:

$$G(r, \theta, \varphi) = (d\psi)(d\psi)^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в сферической системе координат длина кривой, заданной в виде $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), \varphi(t))$, выражается по формуле

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Иногда бывает удобно вместо полной длины дуги выписать только явную формулу для дифференцирования длины дуги dl. В частности, в разобранных выше примерах эти дифференциалы (в соответствующих координатах) имеют вид: $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$ — в полярной системе координат на плоскости; $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$ — в цилиндрической системе координат в $\mathbb{R}^3$; $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta$ — в сферической системе координат в $\mathbb{R}^3$.

3. Понятие римановой метрики в области евклидова пространства. Мы сопоставили каждой криволинейной системе координат z в области C гладкую матричную функцию $G(z)$, преобразующуюся при замене координат, как квадратичная форма (в каждой точке). Роль этого набора матричных функций заключается в том, что его задание позволяет вычислить длины кривых в криволинейных системах координат. Выделим из всех свойств этого набора матричных функций свойство преобразовываться, как квадратичная форма (в каждой точке). Рассмотрим теперь произвольные наборы, удовлетворяющие этому свойству.

***Определение* 3.** Мы скажем, что задана *риманова метрика* в области C евклидова пространства, если в каждой регулярной системе координат $z^1, \ldots, z^n$ определен набор гладких функций $g_{mp}(z^1, \ldots, z^n)$ таких, что:

1) $g_{mp}(z) = g_{pm}(z)$ — т. е. матрица $G(z)$ симметрична;

2) матрица $G(z) = (g_{mp})$ невырождена и положительно определена;

3) при замене системы координат $z \longrightarrow y$ матрица $G(z)$ преобразуется по правилу $G(y) = d\psi G(z)(d\psi)^\top$ (напомним, что мы рассматриваем только регулярные замены систем координат). Здесь через $d\psi$ обозначена матрица Якоби замены системы координат $d\psi_{y,z}$.

***Определение* 4.** Если в области C задана риманова метрика $G(z) = (g_{ij})$, и в системе координат (z^i) задана гладкая кривая $\gamma(t) = \{z^i(t)\}$, то ее *длиной* от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ называется число

$$l(\gamma)_a^b = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}(z)\left(\frac{dz^i(t)}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Если в некоторой точке $P \in C$ пересекаются две гладкие кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ (такие, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$; $\dot\gamma_1(0) \neq 0$, $\dot\gamma_2(0) \neq 0$), то углом между ними (в данной римановой метрике) называется такое число φ, что

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij}(z)\dfrac{dz_1^i(t)}{dt}\dfrac{dz_2^j(t)}{dt}}{\sqrt{g_{ij}(z)\dfrac{dz_1^i(t)}{dt}\dfrac{dz_1^j(t)}{dt}}\sqrt{g_{ij}(z)\dfrac{dz_2^i(t)}{dt}\dfrac{dz_2^j(t)}{dt}}}.$$

Данное выше определение римановой метрики можно теперь сформулировать в более инвариантных терминах, не апеллируя к явной координатной записи метрики. А именно, задание римановой метрики позволяет определить квадратичную форму $\langle\ ,\ \rangle_g$, определенную (в каждой точке области) на множестве всех векторов,

касательных к гладким траекториям, проходящим через эту точку. В самом деле, если $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$, где $P \in C$, то для векторов $\vec{\xi} = \dot{\gamma}_1(0)$ и $\vec{\eta} = \dot{\gamma}_2(0)$, где $\vec{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, $\vec{\eta} = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$, можно положить: $\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle_g = g_{ij} \xi^i \eta^j$. Отметим, что координаты векторов $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ вычисляются в системе координат $z_1, \ldots, z^n$.

Лемма 2. *Отображение $\vec{\xi}, \vec{\eta} \longmapsto \langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle_g$ задает невырожденную, положительно определенную квадратичную форму, гладко зависящую от точки.*

Доказательство. Симметрия и билинейность построенного отображения следует из определения 3. Убедимся в том, что это соответствие определяет билинейную форму. Сделаем регулярную замену координат $\{z^i\} \longrightarrow \{z^{i'}\}$. Тогда

$$\gamma_1(t) = \{z_1^1(t), \ldots, z_1^n(t)\}, \quad \gamma_2(t) = \{z_2^1(t), \ldots, z_2^n(t)\},$$

$$\xi^{i'} = \frac{dz_1^{i'}}{dt} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i} \frac{dz_1^i}{dt} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i} \xi^i, \qquad \eta^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i} \eta^i, \qquad g_{i'j'} = \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}} g_{ij}.$$

Отсюда

$$\langle \vec{\xi}', \vec{\eta}' \rangle_{g'} = g_{i'j'} \xi^{i'} \eta^{j'} = \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}} g_{ij} \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k} \xi^k \frac{\partial z^{j'}}{\partial z^p} \eta^p =$$

$$= \left(\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k} \right) \left(\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}} \frac{\partial z^{j'}}{\partial z^p} \right) g_{ij} \xi^k \eta^p = \delta_k^i \delta_p^j g_{ij} \xi^k \eta^p = g_{ij} \xi^i \eta^j = \langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle_g,$$

т. е. $\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle_g$ действительно является билинейной формой. При доказательстве мы воспользовались тем, что $\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k} = \delta_k^i$. Это вытекает из того, что $(d\psi)(d\psi)^{-1} = E$. □

Таким образом, определение римановой метрики можно давать в следующих терминах: будем говорить, что в области C евклидова пространства задана риманова метрика, если в каждой точке области задана билинейная форма (скалярное произведение), определенная на векторах, касательных к гладким кривым, проходящим через эту точку, причем форма невырожденная и положительно определенная.

Из леммы 2 вытекает эквивалентность этого определения и определения 3. В частности, из леммы 2 вытекает независимость длины гладкой кривой от выбора криволинейной системы координат (если риманова метрика фиксирована, т. е. если она задана в какой-то одной системе координат и преобразуется при заменах координат по указанному выше правилу).

Существуют ли римановы метрики? Пример мы уже привели выше. В самом деле, если в области C в декартовой системе

координат, $x^1, \ldots, x^n$, задать матрицу $G(x) = (\delta_{ij})$, то тогда в любой другой криволинейной системе координат z, получающейся из декартовой системы координат x регулярной заменой, можно по определению положить $G(z) = d\psi G(x)(d\psi)^\top = (d\psi)(d\psi)^\top$, где $d\psi$ — матрица Якоби данной замены. Поскольку, очевидно, любая регулярная система координат z получается из декартовой системы координат регулярной заменой (см. выше определение регулярной системы координат), то тем самым мы определили в произвольной регулярной системе координат матричную функцию $G(z)$. Из проведенных рассуждений вытекает, что все условия 1)–3), которым должна удовлетворять риманова метрика, выполнены. В самом деле, свойства 1) и 2) проверяются непосредственно из определения $G(z)$; свойство 3) следует из того, что матрица Якоби композиции двух замен координат равна произведению матриц Якоби каждой из этих замен $d\psi_{z_1, z_2} = d\psi_{z_1, z_3} d\psi_{z_3, z_2}$. Тем самым мы определили риманову метрику, заданную в области евклидова пространства. Эта метрика является евклидовой метрикой, и квадрат дифференциала дуги гладкой кривой в декартовой системе координат записывается так: $(dl)^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$. Однако если задана произвольная риманова метрика, то не следует думать, что путем подходящей замены координат в области C эту метрику можно привести к виду $\sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$.

***Определение* 5.** Риманова метрика G, заданная в области C, называется *евклидовой*, если в C существует такая (вообще говоря, криволинейная) система координат y, в которой матрица $G(y)$ становится единичной матрицей.

Если задана евклидова метрика (относительно некоторой системы координат), то можно описать все другие системы координат, в которых эта метрика также является евклидовой (таких систем много). Это описание мы дадим значительно позже, поскольку не располагаем в данный момент необходимым аппаратом для решения этой задачи. Здесь отметим только, что все такие системы координат можно получить из одной системы путем вращений, сдвигов и отражений в евклидовом пространстве.

Существование неевклидовых метрик, т. е. таких, которые не могут быть приведены к виду $\sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$ ни в какой системе координат, пока ниоткуда не следует. В данный момент мы не можем указать такую риманову метрику, о которой с определенностью можно было бы утверждать, что она неевклидова. Интуитивно ясно, что для

обнаружения такой метрики следует найти какие-то инварианты метрик, сохраняющиеся при регулярных заменах координат. Тогда мы могли бы обнаружить неэквивалентность двух метрик, сравнив их инварианты и выяснив, что эти инварианты различны. Такие инварианты действительно существуют, и вскоре мы их определим. Только тогда мы сможем строго доказать существование неевклидовых метрик, определенных в области евклидова пространства.

Как было отмечено ранее, евклидова метрика, записанная в произвольной системе координат z, теряет свой простой «евклидов» вид и задается матрицей $G(z)$, распознать в которой евклидову метрику не так-то просто, особенно если мы не располагаем какими-либо инвариантами, различающими различные метрики (т. е. не переходящие друг в друга при подходящей замене координат). Посмотрим, как записывается евклидова метрика в простейших криволинейных системах координат, указанных выше. Часто бывает удобно записывать не матрицу $G(z)$ римановой метрики, а квадрат дифференциала длины дуги гладкой кривой: $(dl)^2 = g_{ij}(z)dz^i dz^j$.

1) Полярная система координат на плоскости: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

2) Цилиндрические координаты в трехмерном пространстве: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$.

3) Сферические координаты в трехмерном пространстве: $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$.

4. Индефинитные метрики. До сих пор мы имели дело только с положительно определенными метриками, которые мы называли римановыми. В частности, все разобранные нами примеры являются положительно определенными метриками. Однако в приложениях часто встречаются так называемые индефинитные метрики.

***Определение* 6.** Мы скажем, что задана *индефинитная метрика* в области C евклидова пространства, если в каждой регулярной системе координат $z^1, \ldots, z^n$ определен набор гладких функций $\{g_{mp}(z^1, \ldots, z^n)\}$, удовлетворяющих всем требованиям, наложенным на риманову метрику (см. определение 3), кроме требования положительной определенности, т. е. соответствующая квадратичная форма является индефинитной.

В качестве простейшего примера индефинитной метрики рассмотрим так называемые псевдоевклидовы метрики индекса s в псевдоевклидовых пространствах $\mathbb{R}^n_s$. Для построения этой метрики достаточно рассмотреть обычное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, отнесенное к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$, и задать в каждой точке $P \in \mathbb{R}^n$ следующую билинейную форму (с постоянными, т. е. не зависящими от точки коэффициентами):

$\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle_s = -\sum_{i=1}^{s} \xi^i \eta^i + \sum_{j=s+1}^{n} \xi^j \eta^j$. Тогда для любой гладкой кривой $\gamma(t) = \{x^i(t)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, длина дуги выражается по формуле

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{-\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 + \sum_{i=s+1}^{n} \left(\frac{dx^j}{dt}\right)^2}\, dt.$$

При $n = 4$ псевдоевклидово пространство индекса 1 называется иногда *пространством Минковского* (в специальной теории относительности); мы также будем рассматривать пространства $\mathbb{R}_1^3$ и $\mathbb{R}_1^2$. Отметим, что псевдоевклидово пространство индекса 0 совпадает с обычным евклидовым пространством.

ЗАМЕЧАНИЕ. Изучение пространств $\mathbb{R}_{n-s}^n$ сводится в некотором смысле к изучению пространств $\mathbb{R}_s^n$, поскольку все длины в $\mathbb{R}_{n-s}^n$ можно умножить на i (мнимая единица); тогда форма $\langle\ ,\ \rangle_{n-s}$ превращается в форму $\langle\ ,\ \rangle_s$. Поэтому будем для простоты считать, что выполнено неравенство $s \leqslant [n/2]$.

Как и в обычном евклидовом пространстве, длина вектора $\vec{\xi}$ в пространстве $\mathbb{R}_s^n$ определяется по формуле $|\vec{\xi}|_s = \sqrt{\langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_s}$, однако в $\mathbb{R}_s^n$, в отличие от $\mathbb{R}^n$, длины векторов могут быть нулевыми и мнимыми. В самом деле, так как форма $\langle\ ,\ \rangle_s$ не является положительно определенной, то множество всех векторов $\vec{\xi} \in \mathbb{R}_s^n$, выходящих, например, из начала координат, разбивается на следующие три непересекающиеся подмножества: $\langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_s < 0$ (*времениподобные* векторы), $\langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_s = 0$ (*световые* или *изотропные* векторы), $\langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle > 0$ (*пространственноподобные* векторы). Это обстоятельство вызывает появление векторов, имеющих нулевую, вещественную и чисто мнимую длину. В самом деле, времениподобные векторы имеют чисто мнимую длину, световые (изотропные) — нулевую, а пространственноподобные — вещественную длины. Эти три типа векторов отделены друг от друга и с точки зрения их расположения в пространстве. Опишем это распределение для векторов, выходящих из начала координат. Из определения видно, что изотропные векторы заполняют конус

$$-\sum_{i=1}^{s} (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^{n} (x^j)^2 = 0$$

с вершиной в начале координат; времениподобные векторы расположены внутри конуса, т. е. в его полости, определяемой координатной плоскостью $(x^1, \ldots, x^s)$, а пространственноподобные

векторы расположены вне светового конуса (рис. 16). Уже одно это обстоятельство показывает, что индефинитная метрика определяет значительно более разнообразную геометрию (в метрическом смысле), чем евклидова метрика.

ЗАМЕЧАНИЕ. В пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^4$ (в специальной теории относительности) изотропный конус целиком состоит из так называемых световых векторов $\vec{\xi}$ (т. е. $\langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_1 = 0$) и называется световым конусом, так как луч света, выпущенный из начала координат, будет распространяться по одной из образующих этого конуса (в предположении, что в качестве координаты x^1 выбран параметр ct, где c — постоянная, обозначающая скорость света).

Как и в евклидовом пространстве, мы можем теперь определить *длину* любой гладкой кривой в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}_s^n$ индекса s, положив $l_s(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_s} dt$. Отличие от евклидова случая состоит в том, что некоторые кривые могут иметь нулевую, чисто мнимую и комплексную длину. В самом деле, в силу аддитивности интеграла вдоль кривой его можно разбить в сумму нескольких слагаемых (допустим для простоты, что число слагаемых конечно), каждое из которых характеризуется тем, что в каждой точке выделенного отрезка кривой скалярное произведение $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_s$ не меняет знака (можно выделить также отрезки, имеющие нулевую длину). Тогда в общем случае длина кривой может быть записана комплексным числом.

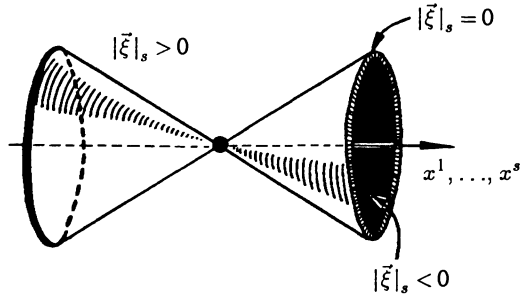


Рис. 16

Большую роль в истории развития науки сыграло пространство $\mathbb{R}_1^4$, введенное для более удобной записи некоторых эффектов специальной теории относительности. Отнесем пространство $\mathbb{R}_1^4$ к координатам $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, т. е. $dl^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Здесь t — время, c — скорость света. Рассмотрим в $\mathbb{R}_1^4$ ортогональный репер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ (относительно евклидовой метрики $\mathbb{R}^4$, которой снабжена модель пространства $\mathbb{R}_1^4$, совмещенная в целях наглядности изложения с евклидовым четырехмерным пространством). Рассмотрим так называемую *мировую линию* какой-нибудь материальной частицы $\gamma(\tau)$; эта линия является

гладкой траекторией в пространстве $\mathbb{R}^4_1$. Если координаты x, y, z трактовать как пространственные координаты, то тогда движение частицы по этой траектории $\gamma(\tau)$ можно интерпретировать как эволюцию в пространстве и во времени некоторой материальной точки, перемещающейся в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть $\dot\gamma$ — как и раньше, касательный вектор к траектории $\gamma(\tau)$ в точке τ. Тогда поскольку в специальной теории относительности принимается постулат, согласно которому никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света c, то $cdt > \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, где (cdt, dx, dy, dz) — координаты бесконечно малого вектора смещения вдоль траектории $\gamma(\tau)$ в направлении касательного вектора $\dot\gamma(\tau)$.

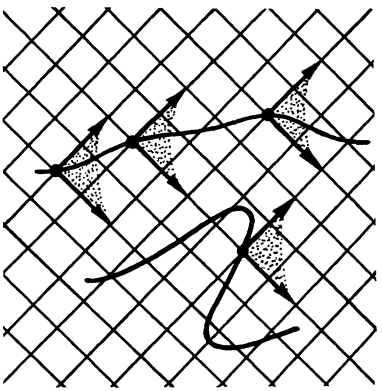


Рис. 17. Мировой линии, изображенной в нижней части рисунка быть не может

Иными словами, длина любого пути оценивается сверху тем расстоянием, которое успеет за данный промежуток времени пройти луч света. Отсюда мы получаем, что вдоль мировой линии $\gamma(\tau)$ любой материальной частицы всегда выполнено соотношение $-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2<0$, т. е. $\langle\dot\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau)\rangle_1<0$. Это означает, что каждый касательный вектор к мировой линии является времениподобным вектором. Отсюда следует также, что мировая линия материальной частицы всегда имеет чисто мнимую длину. В частности, мировая линия целиком распространяется строго внутри светового (изотропного) конуса, имеющего своей осью ось t. Это условие должно выполняться в каждой точке мировой линии (рис. 17). Напомним, что изотропный конус определен в каждой точке псевдоевклидова пространства. К более подробному изучению геометрии пространства Минковского мы вернемся в следующих параграфах.

Задачи к § 2

1. Проверить, что длину кривой можно вычислять как предел длин ломаных, которые состоят из отрезков, соединяющих последовательно конечное число точек на кривой, когда максимальная длина отрезков стремится к нулю.

2. Доказать, что в евклидовом пространстве прямолинейный отрезок имеет минимальную длину среди длин кривых, соединяющих две точки.

§ 3. Геометрия на сфере, плоскости

Для начала рассмотрим двумерную евклидову плоскость, отнесенную к декартовым координатам x, y и снабженную евклидовой метрикой $dl^2 = dx^2 + dy^2$ (отметим, что иногда для обозначения бесконечно малого элемента длины дуги гладкой кривой используют наряду с dl^2 также символ ds^2; мы будем пользоваться обоими этими обозначениями). Эта риманова метрика (ее положительная определенность очевидна) порождает соответствующее скалярное произведение $\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2$. Задание скалярного произведения естественно порождает понятие окружности как множества точек, являющихся концами векторов длины R. Если ввести полярные координаты на плоскости, то тогда окружности с центром в точке O окажутся координатными линиями вида $r(t) = \text{const}$. В полярной системе координат бесконечно малый элемент дуги окружности равен $rd\varphi$.

Рассмотрим теперь стандартное вложение двумерной сферы в трехмерное пространство, отнесенное к декартовым координатам x, y, z в виде множества точек, являющихся концами векторов длины R, выходящих из точки O. Прежде чем переходить к более подробному изучению геометрии двумерной сферы, остановимся на следующем общем вопросе. Допустим, что на сфере S^2 расположена какая-то гладкая кривая $\gamma(t)$, и пусть нас интересует задача о вычислении длины этой кривой (или ее части). Поскольку события происходят в евклидовом пространстве, то можно рассмотреть объемлющую трехмерную евклидову метрику $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, записать гладкую кривую в параметрическом виде $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и вычислить интересующую нас величину по рецептам, изложенным ранее. Точно так же можно поступить, если мы хотим измерить угол между двумя пересекающимися на сфере S^2 кривыми, $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ (когда обе кривые целиком лежат в сфере S^2). Для этого нужно найти декартовы координаты векторов $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$ (в трехмерном евклидовом пространстве) и, снова используя объемлющую евклидову метрику, вычислить этот угол.

Однако при этом следует заметить, что все эти вычисления используют только свойства евклидовой метрики, сосредоточенной в непосредственной близости от сферы S^2. Иными словами, можно было бы с самого начала рассмотреть евклидову метрику, сосредоточенную только в точках двумерной сферы, и записать эту метрику в в терминах координат на этой сфере. Поскольку сфера S^2 задается в $\mathbb{R}^3$ одним уравнением, то, следовательно, число

параметров, описывающих положение точки на сфере, равно двум (т. е. на единицу меньше, чем соответствующее число параметров в трехмерном пространстве). Особенно наглядно это видно, если в $\mathbb{R}^3$ введены сферические координаты r, θ, φ. Тогда двумерная сфера радиуса R задается одним уравнением $r = R$, $R = \text{const}$.

Вычислим в явном виде скалярное произведение двух векторов, касательных к кривым, целиком лежащим на сфере S^2 (и тем самым являющихся касательными к сфере). Пусть $\gamma_1(t) = (R, \theta_1(t), \varphi_1(t))$, $\gamma_2(t) = (R, \theta_2(t), \varphi_2(t))$. Тогда $\dot\gamma_1(t) = (0, \dot\theta_1, \dot\varphi_1)$, $\dot\gamma_2(t) = (0, \dot\theta_2, \dot\varphi_2)$, т. е.

$$\langle \dot\gamma_1, \dot\gamma_2 \rangle = R^2(\dot\theta_1\dot\theta_2 + \sin^2\theta(t)\dot\varphi_1\dot\varphi_2),$$

где $(\theta(t), \varphi(t))$ — координаты точки пересечения кривых $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$.

Отсюда видно, что вычисленное нами скалярное произведение совпадает со скалярным произведением двух векторов, $(\dot\theta_1, \dot\varphi_1)$ и $(\dot\theta_2, \dot\varphi_2)$, относительно новой билинейной формы $R^2(\dot\theta_1\dot\theta_2 + \sin^2\theta(t)\dot\varphi_1\dot\varphi_2)$. Эта билинейная форма определяет квадратичную форму $R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, получающуюся из соответствующей квадратичной формы в евклидовом пространстве $dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ путем подстановки в нее вместо переменных r, θ, φ новых функций от θ, φ вида $r = R$, $\theta = \theta$, $\varphi = \varphi$. Будем говорить, что полученная после этой операции риманова метрика на сфере S^2

$$R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

является *индуцированной* на сфере объемлющей евклидовой метрикой трехмерного пространства.

Поскольку на сфере S^2 положение точки можно задавать двумя параметрами, θ и φ, (широта и долгота), то, следовательно, радиус-вектор точки на сфере можно представить в виде

$$x = x(\theta, \varphi) = R\cos\theta\cos\varphi, \quad y = y(\theta, \varphi) = R\cos\theta\sin\varphi,$$
$$z = z(\theta, \varphi) = R\sin\varphi.$$

Подставляя эти три функции (от двух параметров) в выражение для квадрата дифференциала длины дуги в трехмерном пространстве $dx^2 + dy^2 + dz^2$, мы и получаем

$$(dx(\theta, \varphi))^2 + (dy(\theta, \varphi))^2 + (dz(\theta, \varphi))^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Этот конкретный пример будет нами в дальнейшем сильно обобщен и окажется весьма частным случаем индуцированных римановых метрик. Для этого в последующих главах будет введено

строгое понятие поверхности, на которую мы и будем ограничивать объемлющую риманову метрику. Двумерная сфера, стандартно вложенная в трехмерное пространство, как раз и является поверхностью. Вскоре мы приведем и другие примеры поверхностей, которые будем в основном задавать в виде вектор-функций от нескольких переменных. Например, если в трехмерном евклидовом пространстве задана вектор-функция вида $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где параметры u, v меняются в какой-то области на плоскости, то тогда этот радиус-вектор будет (при изменении u, v) заметать некоторое множество, которое (в предположении, что векторы $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ и $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ линейно независимы в каждой точке (u, v)), мы в дальнейшем и будем называть двумерной поверхностью в трехмерном пространстве. (Общее определение будет дано позже.) Если задана такая поверхность (или ее кусок), то на ней возникает следующая квадратичная форма, индуцированная евклидовой римановой метрикой: $(dx(u, v))^2 + (dy(u, v))^2 + (dz(u, v))^2$.

Итак, рассмотрим двумерную сферу S^2, стандартно вложенную в $\mathbb{R}^3$ и снабженную индуцированной римановой метрикой. Как было уже вычислено ранее, явный вид этой метрики такой: $R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, где θ, φ — сферические координаты. На сфере S^2 можно ввести также и другие криволинейные координаты, иногда используемые при конкретных вычислениях. Приведем основные примеры таких координат.

Сначала рассмотрим стереографическую проекцию сферы S^2 на плоскость $\mathbb{R}^2$. Для этого поместим центр сферы радиуса R в начало координат O и рассмотрим координатную плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$, проходящую через точку O; отметим также на сфере S^2 северный полюс N и южный полюс S. Пусть P — произвольная точка сферы, отличная от N; соединим северный полюс N с точкой P и продолжим отрезок NP до пересечения с плоскостью $\mathbb{R}^2(x, y)$ в точке Q. Сопоставим точке P точку Q. Мы получим некоторое отображение φ_0: $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, которое и называется *стереографической проекцией* сферы на плоскость.

Как видно из построения, отображение φ_0 определено во всех точках сферы, за исключением северного полюса N. Можно условно считать, что северный полюс изображает бесконечно удаленные точки двумерной плоскости (рис. 18). Запишем отображение φ_0 аналитически. Для этого следует ввести координаты как на сфере, так и на плоскости. Рассмотрим, например, сферические координаты r, θ, φ в $\mathbb{R}^3$. Эти координаты индуцируют координаты на сфере S^2 и на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$.

В самом деле, на сфере возникают координаты (θ, φ), а на $\mathbb{R}^2$ — координаты (r, φ) (полярные координаты). Так как отображение φ_0 сохраняет координату φ, то для определения φ_0 достаточно найти явную зависимость радиуса r от угла θ. Для этого рассмотрим

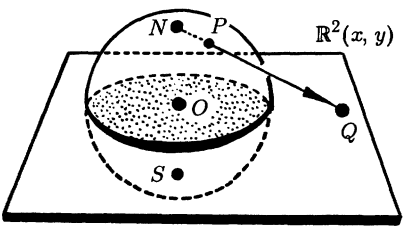


Рис. 18

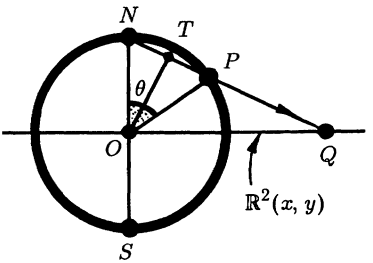


Рис. 19

плоское сечение S^2 плоскостью, проходящей через точки P, O, N (рис. 19). Так как угол ONT равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$, то из прямоугольного треугольника ONQ получаем $r = OQ = R \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$. Таким образом, окончательные формулы замены координат выглядят так: $\varphi = \varphi$; $r = R \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$.

Найдем матрицу Якоби этой замены. Несложно проверить, что она имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{2\sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$, т. е. $J = -\frac{R}{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}$; таким образом, замена является регулярной во всех точках, за исключением северного полюса. Тем самым на сфере S^2 можно ввести координаты, заимствованные с полярных координат на евклидовой плоскости. Какой вид принимает риманова метрика сферы в этих новых координатах? Имеем

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \qquad dr = \frac{-R}{2\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta,$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{R^2 + r^2}; \qquad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{r^2}{R^2 + r^2},$$

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Следует отметить, что полученный нами вид метрики на сфере отличается от евклидовой метрики на плоскости, записанной в полярных координатах, т. е. от $(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$, только переменным множителем $\frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2}$. Такие метрики называются конформными.

***Определение* 1.** Риманова метрика $g_{ij}(z)$, заданная в области C евклидова пространства в криволинейных координатах $z^1, \ldots, z^n$, называется *комформфной*, если она имеет вид $g_{ij}(z) = \lambda(z) g^l_{ij}(z)$, где $\lambda(z)$ — гладкая функция на C, а $g^l_{ij}(z)$ — компоненты евклидовой метрики, записанной в координатах $z^1, \ldots, z^n$. Иными словами, метрика $g_{ij}(z)$ называется конформфной, если существует такая система координат x, в которой $g_{ij}(x) = \lambda(x) \sum\limits_{k=1}^{n} (dx^k)^2$.

Таким образом, на евклидовой плоскости (отнесенной к полярным координатам), можно рассмотреть две римановы метрики: $dr^2 + r^2 d\varphi^2$ (евклидова) и $\frac{4R^4}{R^2+r^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$ (метрика сферы). Обе метрики можно считать заданными на одной и той же области определения $\mathbb{R}^2(x, y)$.

Вернемся к вопросу, затронутому выше, — вопросу об эквивалентности метрик. Существует ли такая регулярная замена координат на плоскости $\mathbb{R}^2$, при которой метрика $dr^2 + r^2 d\varphi^2$ перейдет в метрику $\frac{4R^4}{R^2+r^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$? Мы приведем по крайней мере интуитивное обоснование того факта, что эти две метрики неэквивалентны. Для этого подсчитаем длину окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в двух метриках: в евклидовой и в сферической. Мы понимаем здесь окружность как некоторую гладкую траекторию на плоскости $\mathbb{R}^2$, длину которой можно вычислять в различных метриках, вводимых на $\mathbb{R}^2$. Найдем интересующую нас величину как функцию от радиуса окружности. Длина в евклидовой метрике нам известна: $l_e = 2\pi a$, где a — радиус (подсчитанный в евклидовой метрике). Найдем длину окружности в сферической метрике. Сначала найдем соотношение между евклидовой величиной радиуса a и его величиной ρ в сферической метрике. Имеем

$$\rho = 2\int\limits_0^a \frac{R^2}{R^2+r^2} dr = 2R \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R}\right), \quad l_c = 2\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 a\, d\varphi}{R^2+a^2} = \frac{4\pi a R^2}{R^2+a^2} = 2\pi R \sin\rho$$

(рис. 20). Геометрически величина ρ изображается как длина меридиана, соединяющего северный полюс с переменной точкой на окружности. Вычисления, выполненные нами формально на языке римановых метрик на плоскости, можно произвести, используя элементарные геометрические соотношения. Таким образом, если бы мы смогли дать определение окружности радиуса a с центром в некоторой точке, в терминах, не зависимых от выбора локальной

системы координат, то тогда формула длины окружности тоже не зависела бы от выбора локальной системы координат. Такое определение существует. Назовем расстоянием между двумя точками, P и Q, минимальную длину кривой, соединяющей эти точки (минимум берется по всем гладким кривым, соединяющим точки). Тогда окружностью радиуса a с центром в точке P назовем множество всех точек Q, расстояние от которых до точки P равно a.

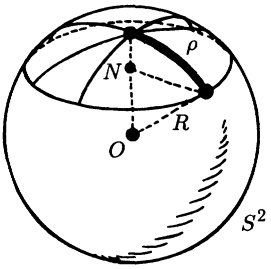


Рис. 20

Для того чтобы применить это определение к случаю сферы, необходимо доказать, что расстояние между двумя точками, P и Q, на сфере S^2 равняется длине дуги большой окружности, проходящей через точки P и Q. Для этого достаточно любую кривую, соединяющую P и Q, аппроксимировать ломаной, составленной из конечного числа дуг больших окружностей.

В частности, при $\rho \longrightarrow 0$ (т. е. для окружностей малого радиуса по сравнению с R) получаем, что $l_c \sim 2\pi\rho$, т. е. полученная нами формула переходит в евклидово выражение для длины окружности. Сопоставляя две формулы: «евклидова длина окружности радиуса ρ равна $2\pi\rho$» и «сферическая длина окружности радиуса ρ равна $2\pi R \sin\rho$», мы видим, что функции длины существенно различны; в частности, одна линейная, а вторая периодическая.

Тот факт, что выпуклая поверхность сферы не может быть деформирована с сохранением длин кривых на ней в область на евклидовой плоскости, можно представить себе, если вспомнить, какое требуется усилие, чтобы сплющить сферический сегмент на плоскость, по сравнению с усилием, которое мы прикладываем при изгибании, например, прямого кругового цилиндра, помещающем его на плоскость.

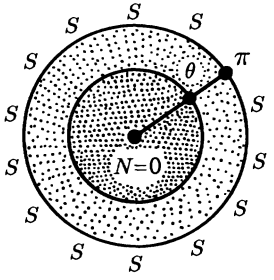


Рис. 21

Проведенные выше вычисления длины окружности на сфере можно было бы провести и непосредственно в сферических координатах (θ, φ), в которых метрика сферы имеет вид: $R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. Областью определения этой метрики можно считать диск радиуса π на евклидовой плоскости переменных θ, φ. В этих координатах очевидно, что длина окружности радиуса θ равна $2\pi R \sin\theta$ (рис. 21). При

этом точка O естественно отождествляется с северным полюсом сферы, а граничная окружность (радиуса π) имеет длину 0, так как $d\theta = 0$, $\sin(\pi) = 0$, а потому вся эта окружность склеивается в одну точку, которая и отождествляется с южным полюсом сферы.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении длин гладких кривых на сфере. Разберем для примера так называемую *локсодрому* — траекторию, пересекающую каждый меридиан сферы под одним и тем же углом α. Отметим, что эта кривая хорошо известна в теории навигации, по ней удобно прокладывать маршруты самолетов между двумя фиксированными точками. Дело в том, что с практической точки зрения угол α легко поддается измерению: он равен углу между вектором скорости самолета и вектором, определяемым стрелкой компаса. Тем самым достаточно следить только за одним этим параметром (при этом мы, конечно, сильно огрубляем реальную ситуацию), чтобы двигаться по заранее проложенной локсодроме, соединяющей начальный и конечный пункты полета.

Найдем явное параметрическое задание локсодромы. Для этого удобно применить к сфере (и, следовательно, к локсодроме) стереографическую проекцию, после чего мы получим некоторую траекторию на плоскости, отнесенной для удобства к полярным координатам (r, φ). Как мы уже вычисляли, метрика сферы в этих координатах имеет вид $\frac{4R^4}{R^2+r^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$. При стереографической проекции меридианы перейдут в лучи, выходящие из начала координат на плоскости. Мы утверждаем, что образом локсодромы будет такая кривая на плоскости, которая пересекает все эти лучи под тем же углом α (и тем самым однозначно, с точностью до поворота определяется этим углом). Это утверждение следует из более общего факта: стереографическая проекция сохраняет углы между пересекающимися кривыми. Такие преобразования называются *конформными*. Более точно, мы имеем в виду следующее: рассмотрим на сфере сферическую метрику (см. выше), индуцированную объемлющей евклидовой метрикой, и пусть две пересекающиеся кривые образуют в точке пересечения угол $\alpha(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2)$ (мы предполагаем углы ориентированными) (рис. 22).

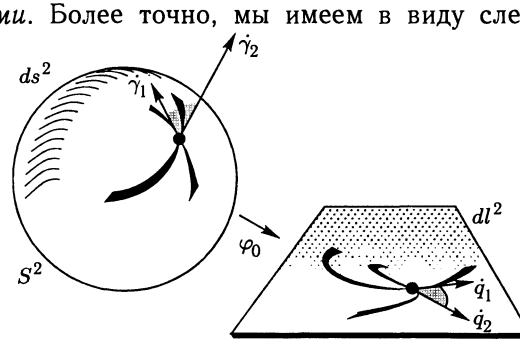


Рис. 22

Число $\alpha(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2)$ определено в § 2. Кривые γ_1 и γ_2 переходят после отображения φ_0 (стереографическая проекция) в некоторые кривые q_1 и q_2, угол между которыми, подсчитанный в евклидовой метрике dl^2 на плоскости, мы обозначим через $\beta(\dot q_1, \dot q_2)$.

Лемма 1. *Для любых пересекающихся кривых γ_1 и γ_2 имеет место равенство $\alpha(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2) = \beta(\dot q_1, \dot q_2)$.*

Доказательство. Достаточно сравнить явные формулы для углов α и β, а также использовать запись сферической метрики после отображения φ_0 в полярных координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$. Имеем

$$ds^2(r, \varphi) = \frac{4R^4}{R^2 + r^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2), \quad dl^2(r, \varphi) = (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Ясно, что $ds^2(r, \varphi) = \lambda^2(r) dl^2(r, \varphi)$. Тогда

$$\alpha(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2) = \frac{\lambda^2(\dot r_1 \dot r_2 + r^2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2)}{\sqrt{\lambda^2(\dot r_1^2 + r^2\dot\varphi_1^2)\lambda^2(\dot r_2^2 + r^2\dot\varphi_2^2)}} = \beta(\dot q_1, \dot q_2). \qquad \square$$

В действительности имеет место еще более общее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $g_{ij}(z)$ и $q_{ij}(z)$ — две метрики, заданные в области C евклидова пространства в криволинейных координатах $(z^1, \ldots, z^n)$. Тогда если в каждой точке $z \in C$ выполнено тождество $g_{ij} = \lambda q_{ij}$, где $\lambda = \lambda(z)$ — гладкая функция, то углы между пересекающимися кривыми, вычисленные в этих метриках, совпадают.*

Доказательство дословно повторяет рассуждение, продемонстрированное в лемме 1.

Вернемся теперь к задаче о локсодроме. В силу леммы 1 достаточно найти ее уравнение на евклидовой плоскости. Условие сохранения угла α означает, что $\langle(\dot r, \dot\varphi), (1, 0)\rangle = \cos\alpha$ (напомним, что $\alpha = \text{const}$), где $(\dot r, \dot\varphi) = \dot\gamma$ — касательный вектор к локсодроме, $(1, 0)$ — вектор скорости луча $\varphi = \text{const}$, $r = t$. Отсюда $\frac{\dot r}{\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}} = \cos\alpha = \text{const}$. Далее,

$$\dot r^2 \sin^2\alpha = r^2\dot\varphi^2\cos^2\alpha; \quad \dot r/r = \dot\varphi \operatorname{ctg}\alpha;$$
$$(\ln r)' = \dot\varphi \operatorname{ctg}\alpha, \quad r = c\, e^{\varphi \operatorname{ctg}\alpha},$$

где $c = \text{const}$. Положив $\varphi = t$, имеем $\dot r = c \operatorname{ctg}\alpha e^{\varphi \operatorname{ctg}\alpha}$, $\dot\varphi = 1$. Вычисляя длину дуги, получаем

$$l(\gamma)_{\varphi_0}^{\varphi} = c' e^{\varphi t \operatorname{ctg}\alpha} + c'',$$

где c'', $c' = \text{const}$. Задача: найдите значение постоянных c', c''.

Задачи к § 3

1. Показать, что у треугольника на сфере S^2, составленного из дуг больших окружностей, сумма углов больше 2π.

2. Выразить сумму углов треугольника на сфере S^2 через его площадь (треугольник составлен из дуг больших окружностей).

3. Показать, что на сфере S^2 преобразование подобия возможно только с единичным коэффициентом.

4. Показать, что для любой римановой метрики найдется такая система координат, в которой в данной точке матрица римановой метрики единична.

§ 4. Псевдосфера и геометрия Лобачевского

Рассмотрим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^n_s$ индекса s. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ сфера S^{n-1} (гиперсфера) может быть определена как множество точек, удаленных от начала координат на расстояние ρ. В псевдоевклидовом пространстве также можно рассмотреть множество точек, удаленных от начала координат на расстояние ρ (но только теперь число ρ может быть не только вещественным, но также чисто мнимым или нулем). Это множество точек мы будем называть *псевдосферой* индекса s и обозначать через S^{n-1}_s. Ясно, что $S^{n-1}_0 = S^{n-1}$. В дальнейшем будем различать псевдосферы вещественного, мнимого и нулевого радиусов. Псевдосфера нулевого радиуса описывается уравнением второго порядка $-\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^{n}(x^j)^2 = 0$, где $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, на котором мы и моделируем псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^n_s$. Очевидно, что псевдосфера нулевого радиуса совпадает с изотропным (нулевым) конусом.

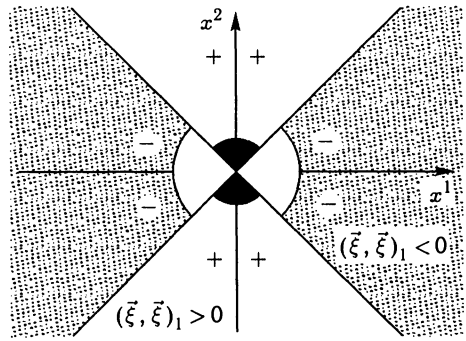


Рис. 23

Рассмотрим отдельные примеры. Пусть $n = 2$, $s = 1$. Изотропный конус состоит из двух прямых: $x^1 = \pm x^2$ (мы рассматриваем двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$, отнесенную к декартовым координатам x^1, x^2, и на этой плоскости мы моделируем псевдоевклидову геометрию индекса один). Этот конус разбивает $\mathbb{R}^2$ на две области: в

одной из них $\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_1>0$ (это область, определяемая неравенством $|x^2|>|x^1|$), в другой $\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_1<0$ (а именно это область, определяемая неравенством $|x^2|<|x^1|$) (рис. 23).

Псевдосферы вещественного радиуса — это гиперболы $-(x^1)^2+(x^2)^2=\alpha^2$, где α — вещественное число. Псевдосферы мнимого радиуса — это гиперболы $-(x^1)^2+(x^2)^2=-\alpha^2$ (рис. 24).

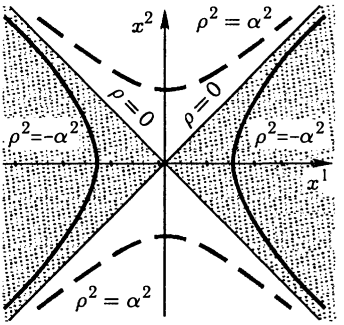


Рис. 24

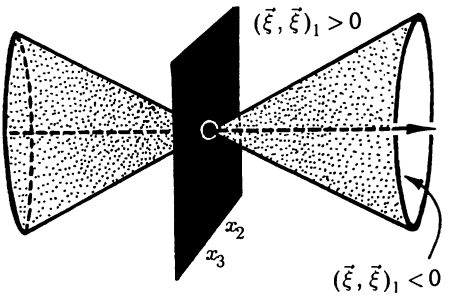


Рис. 25

Пусть теперь $n=3$, $s=1$. Изотропный конус (псевдосфера нулевого радиуса) — это обычный конус второго порядка, задаваемый уравнением $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$ с осью x^1. Он также разбивает все пространство на две области (в данном случае, пользуясь привычными терминами, можно сказать разбивает на внутреннюю и внешнюю области) (рис. 25). Псевдосферы вещественного радиуса — это однополостные гиперболоиды $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=+\alpha^2$. Псевдосферы мнимого радиуса — это двухполостные гиперболоиды $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=-\alpha^2$, $(\rho^2=-\alpha^2)$ (рис. 26). Изучим теперь метрические свойства пространства $\mathbb{R}^3_1$, которое снова будем моделировать в пространстве $\mathbb{R}^3$; через x, y, z будем обозначать декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$; тогда $\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_1=-x^2+y^2+z^2$.

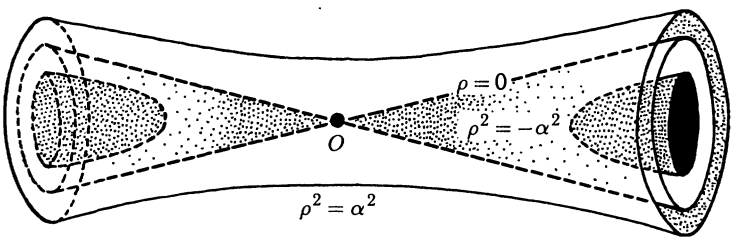


Рис. 26

Рассмотрим псевдосферу мнимого радиуса. Это — двухполостный гиперболоид, задаваемый уравнением $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$. Поскольку он вложен в $\mathbb{R}^3_1$, то можно сказать, что геометрия пространства $\mathbb{R}^3_1$ индуцирует некоторую геометрию на псевдосфере мнимого радиуса. С точки зрения индефинитной метрики, заданной в $\mathbb{R}^3_1$, эту же мысль можно сформулировать так: метрика $\mathbb{R}^3_1$ индуцирует некоторую метрику на псевдосфере. Впрочем, даже не располагая понятием римановой метрики, мы можем придать некоторый содержательный смысл словам «геометрия, индуцированная на гиперболоиде».

Рассмотрим псевдосферу $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$ (для простоты ограничимся изучением только одной ее полости, например, той, которая определена неравенством $x > 0$); «точками» индуцированной на ней геометрии объявим обычные точки гиперболоида, а «прямыми» индуцированной геометрии всевозможные линии на гиперболоиде, получающиеся при пересечении его плоскостями вида $ax + by + cz = 0$, проходящими через начало координат (рис. 27). Оказывается, возникающую таким образом геометрию

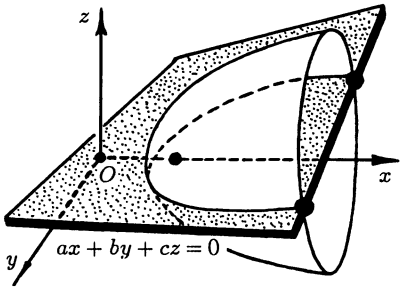


Рис. 27

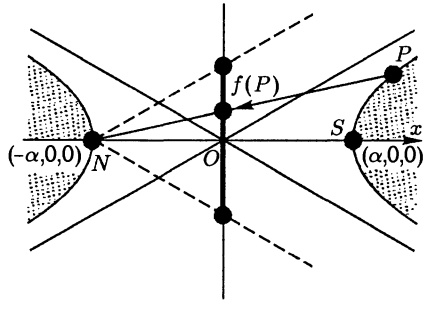


Рис. 28

на псевдосфере можно изучать методами аналитической геометрии (т. е. без привлечения понятия римановой метрики), проводя довольно далеко аналогию с геометрией на обычной сфере. Для этого удобно совершить преобразование, аналогичное стереографической проекции сферы на плоскость. Центром псевдосферы $S^2_1 = \{-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2\}$ будем считать начало координат — точку O; северным полюсом N — точку с декартовыми координатами $(-\alpha, 0, 0)$; южным полюсом S — точку с декартовыми координатами $(\alpha, 0, 0)$; в качестве плоскости, на которую мы будем осуществлять проекцию, возьмем плоскость YOZ, проходящую через центр псевдосферы (кстати, ограничение скалярного произведения $\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle_1$

на плоскость YOZ имеет вид $\xi^2\eta^2 + \xi^3\eta^3$, т. е. псевдоевклидово скалярное произведение $\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle_1$ индуцирует на плоскости YOZ евклидово скалярное произведение).

Рассмотрим теперь переменную точку P на правой полости гиперболоида и соединим ее с точкой N (т. е. с северным полюсом). Тогда отрезок $\overrightarrow{PN}$ встречает плоскость YOZ в некоторой точке, которую мы обозначим через $f(P)$ и назовем образом точки P при стереографической проекции f: $S_1^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Точно так же можно определить стереографическую проекцию левой полости гиперболоида на ту же плоскость YOZ, используя в качестве центра проектирования южный полюс S. На рис. 28 показано сечение псевдосферы плоскостью, проходящей через ось OX. Образ правой полости гиперболоида покрывает не всю плоскость YOZ, а только внутренность диска радиуса α: $y^2 + z^2 < \alpha^2$. Образ левой полости гиперболоида покрывает внешность окружности $y^2 + z^2 = \alpha^2$. В отличие от обычной сферы S^2, образ псевдосферы S_1^2 при ее стереографической проекции покрывает только часть плоскости YOZ, так как окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ не принадлежит образу проекции. Северный полюс N переходит (как и в случае сферы) в бесконечно удаленную точку плоскости YOZ. Пусть теперь точка P имеет декартовы координаты (x, y, z) (где $x > 0$) и пусть (u^1, u^2) — декартовы координаты точки $f(P)$ на плоскости YOZ, где отображение f — стереографическая проекция. Найдем формулы, связывающие эти координаты.

Лемма 1. *Пусть* $P = (x, y, z)$, $f(P) = (u^1, u^2)$. *Тогда*

$$x = \alpha \frac{|\vec{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\vec{u}|^2}, \quad y = \frac{2\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |\vec{u}|^2}, \quad z = \frac{2\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |\vec{u}|^2},$$

где $|\vec{u}|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$, $\vec{u} = (u^1, u^2)$.

Доказательство. Из рис. 28 следует:

$$\frac{y}{u^1} = \frac{x + \alpha}{\alpha}, \quad \frac{z}{u^2} = \frac{x + \alpha}{\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad y = u^1 \frac{x + \alpha}{\alpha}, \quad z = u^2 \frac{x + \alpha}{\alpha}.$$

Так как $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, то

$$-\alpha^2 = -x^2 + ((u^1)^2 + (u^2)^2) \frac{(x + \alpha)^2}{\alpha^2}.$$

Далее (поскольку $(x - \alpha) > 0$),

$$x - \alpha = \frac{x + \alpha}{\alpha^2} |\vec{u}|^2, \quad \text{т. е.} \quad x = \alpha \frac{|\vec{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\vec{u}|^2}. \qquad \square$$

Лемма 2. *Координаты* (u^1, u^2) *(меняющиеся в открытом диске* $(u^1)^2+(u^2)^2<\alpha^2$*) задают регулярную систему координат на правой полости гиперболоида, т. е. стереографическая проекция задает регулярную замену координат* $f(x, y, z) \longrightarrow (u^1, u^2)$.

Доказательство. Зависимость между координатами (x, y, z) точки P на правой полости псевдосферы описывается уравнением $-\alpha^2=-x^2+y^2+z^2$, а потому положение точки P можно однозначно определить, задав только два числа, например, y, z, т. е. координаты ортогональной проекции точки P на плоскость YOZ. При этом можно считать, что правая полость псевдосферы задается уравнением $x=\sqrt{\alpha^2+y^2+z^2}$. Тем самым стереографическую проекцию f можно понимать как замену координат $(y, z) \longrightarrow (u^1, u^2)$. Осталось найти матрицу Якоби этой замены и убедиться в том, что якобиан ее отличен от нуля. Прямой подсчет дает

$$\frac{\partial y}{\partial u^1}=\frac{2\alpha^2(\alpha^2+(u^1)^2-(u^2)^2)}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u^2}=\frac{2\alpha^2 2u^1u^2}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u^1}=\frac{2\alpha^2 2u^1u^2}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial u^2}=\frac{2\alpha^2(\alpha^2+(u^2)^2-(u^1)^2)}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^2},$$

$$J(f)=4\alpha^4\frac{\alpha^2+|\vec{u}|^2}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^3}=\frac{4\alpha^3 x}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^2}>0.$$

Таким образом, якобиан замены положителен во всех точках диска $y^2+z^2<\alpha^2$. □

Прежде чем двигаться дальше, вернемся к рассмотрению сферы S^2. Какая геометрия возникнет на сфере, если «точками» объявить обычные точки сферы, а «прямыми» — сечения сферы плоскостями, проходящими через центр O (т. е. экваторами)? Оставаясь на элементарном уровне посмотрим, каким геометрическим аксиомам удовлетворяет множество этих точек и прямых? Ясно, что через каждую пару не диаметрально противоположных точек проходит одна и только одна прямая; однако если точки диаметрально противоположны, то через эти точки проходит бесконечное множество прямых. Кроме того, через точку, расположенную вне прямой, нельзя провести ни одной прямой, не пересекающейся с исходной прямой, т. е. в этой геометрии на сфере не существует параллельных (т. е. не пересекающихся) прямых.

Если мы захотим максимально приблизить эту геометрию к евклидовой, то кое-какие улучшения на этом пути сделать можно. Например, объявив «точками» новой геометрии пары диаметрально противоположных точек, P и $-P$, на сфере S^2, мы устраним

первый из отмеченных выше недостатков, а именно — теперь через любую пару точек проходит одна и только одна прямая (если эти точки не совпадают). Это свойство уже аналогично соответствующему свойству в евклидовой геометрии. Элементарно проверяется, что теперь в нашей геометрии выполнены все классические аксиомы Евклида, кроме так называемого пятого постулата, а именно: по-прежнему, через точку, взятую вне прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной, т. е. любые две прямые либо пересекаются в одной точке, либо совпадают. В самом деле, любые два экватора на сфере (несовпадающие) определяют одну и только одну точку $(P, -P)$. Оказывается, полученная нами геометрия (называемая иногда *эллиптической геометрией*) является не менее содержательной, чем евклидова геометрия, но только многие привычные для нас свойства евклидовой плоскости заменяются в эллиптической геометрии другими, быть может, более экзотическими с классической точки зрения, формировавшейся на основе простых физических представлений об окружающем мире. По-видимому, непосредственный человеческий опыт более тяготеет к евклидовым представлениям.

Описанная выше операция отождествления точек P и $-P$, где точка P пробегает сферу, эквивалентна факторизации сферы по действию симметрии отражения в точке O. Так как каждая пара $(P, -P)$ определяет одну и только одну прямую в трехмерном пространстве (куда стандартно вложена сфера), то можно сопоставить каждой прямой эллиптической геометрии (т. е. экватору) ортогональную прямую, проходящую через точку O. Таким образом, эллиптическая геометрия может быть моделирована на двумерном вещественном проективном пространстве, известном из курса аналитической геометрии. В дальнейшем мы еще будем неоднократно возвращаться к этому объекту. Описанное выше сопоставление точке прямой превращается в двойственность на проективном пространстве, позволяющую автоматически получать из каждой теоремы, сформулированной в эллиптической геометрии, некоторую новую теорему, формально получающуюся из предыдущей заменой всех точек на прямые, и наоборот. При этом получается, вообще говоря, некоторое утверждение, не тождественное исходному.

Вернемся теперь к псевдоевклидовой геометрии и к геометрии, которую она индуцирует на псевдосфере мнимого радиуса. При стереографической проекции $f\colon {}^+S_1^2 \longrightarrow \{y^2 + z^2 < \alpha^2\} = D^2$ (где через ${}^+S_1^2$ мы обозначаем правую полость гиперболоида) точки гиперболоида переходят во внутренние точки двумерного диска D^2 радиуса α. В какие кривые на круге D^2 перейдут прямые

нашей геометрии на гиперболоиде, т. е. линии пересечения его с плоскостями, проходящими через центр псевдосферы — точку O (т. е. аналоги экваторов на сфере)?

Лемма 3. *Каждая линия пересечения* ${}^{+}S_1^2$ *с плоскостью вида* $ax+by+cz=0$ *переходит при отображении* f *в дугу окружности, пересекающую окружность* $y^2+z^2=\alpha^2$ *под прямым углом* (рис. 29).

Доказательство. Напомним, что углом между пересекающимися гладкими кривыми мы называем угол между их векторами скоростей в точке пересечения. В силу леммы 1 для выяснения того, в какую кривую переходит прямая на ${}^{+}S_1^2$, достаточно подставить в уравнение плоскости $ax+by+cz=0$ явные выражения переменных x, y, z как функций от переменных u^1, u^2. Пусть, например, $a\neq 0$. Тогда уравнение

$$a\alpha\frac{|\vec{u}|^2+\alpha^2}{\alpha^2-|\vec{u}|^2}+\frac{2b\alpha^2u^1}{\alpha^2-|\vec{u}|^2}+\frac{2c\alpha^2u^2}{\alpha^2-|\vec{u}|^2}=0$$

после элементарных алгебраических преобразований приводится к виду

$$\left(u^1+\frac{b\alpha}{a}\right)^2+\left(u^2+\frac{c\alpha}{a}\right)^2=\frac{\alpha^2}{a^2}(b^2+c^2-a^2),$$

т. е. определяет окружность с центром в точке $\left(-\frac{b\alpha}{a},-\frac{c\alpha}{a}\right)$ радиуса $\frac{\alpha}{a}\sqrt{b^2+c^2-a^2}=r$, пересекающую окружность $y^2+z^2=\alpha^2$ в точках A и B под прямым углом (рис. 30). Тот факт, что угол в точках пересечения равен $\pi/2$, вытекает из очевидного соотношения $\alpha^2+r^2=\frac{b^2+c^2}{a^2}$. Отметим, что прямой из ${}^{+}S_1^2$ при отображении f является не вся окружность $\left(u^1+\frac{b\alpha}{a}\right)^2+\left(u^2+\frac{c\alpha}{a}\right)^2=r^2$, а только та ее часть, которая содержится в круге $y^2+z^2<\alpha^2$. □

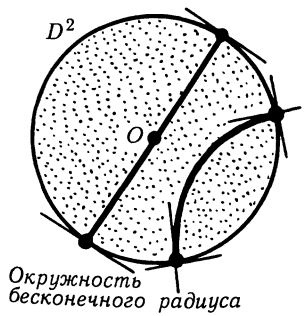


Рис. 29

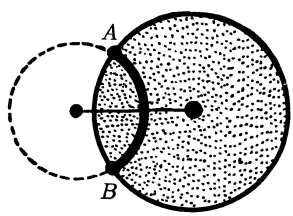


Рис. 30

Итак, геометрия, индуцированная на псевдосфере мнимого радиуса в $\mathbb{R}^3_1$ совпадает (после подходящей замены координат) с геометрией, возникающей в круге радиуса α на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, если в качестве «точек» этой геометрии взять обычные точки этого круга (без граничных точек), а в качестве «прямых» этой геометрии взять дуги окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом (в частности, «прямыми» являются все диаметры круга, поскольку их можно рассматривать как дуги окружностей бесконечно большого радиуса). Геометрия эта называется *геометрией Лобачевского*, а ее модель в круге радиуса α на евклидовой плоскости называется *моделью Пуанкаре* геометрии Лобачевского. Сам Н. И. Лобачевский построил свою геометрию совсем иным путем, без использования псевдоевклидовых пространств, а непосредственно отправляясь от такой формы «пятого постулата», которая предполагала наличие бесконечного множества прямых, параллельных данной.

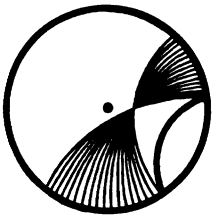


Рис. 31

На модели Пуанкаре легко проверить все аксиомы (постулаты) Евклида и убедиться, что все они, кроме пятого постулата, справедливы. На рис. 31 наглядно показано, что через любую точку, взятую вне прямой, можно провести бесконечное число прямых, параллельных данной (т. е. прямых, не пересекающихся с ней) . С точки зрения аксиомы о параллельных, геометрия Лобачевского противоположна эллиптической геометрии. Отметим также, что если устремить параметр α к бесконечности, то в любой конечной области модели Пуанкаре геометрия Лобачевского будет «стремиться» к евклидовой геометрии, так как дуги окружностей начнут распрямляться и превращаться в евклидовы прямые. Граница модели Пуанкаре — окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ — называется *абсолютом*, на ней расположены бесконечно удаленные точки плоскости Лобачевского. Иногда при изучении плоскости Лобачевского полагают для простоты $\alpha = 1$.

Замечание. Можно было бы рассмотреть геометрию, возникающую на псевдосферах вещественного радиуса в $\mathbb{R}^3_1$ (т. е. на однополостных гиперболоидах). Докажите, что эта геометрия совпадает с геометрией Лобачевского.

Перейдем теперь к вопросу о вычислении римановой метрики, индуцированной на псевдосфере мнимого радиуса объемлющей индефинитной метрикой. Поступим по аналогии с обычной сферой, введя в пространстве $\mathbb{R}^3_1$ аналог сферических координат, с помощью

которых запишем в удобной для нас форме уравнение псевдосферы. В плоскости YOZ введем полярные координаты (r, φ), где φ — угол с осью y. Кроме того, введем еще параметр θ' — аналог соответствующего параметра в обычных сферических координатах. Сделаем теперь замену переменных

$$y = \alpha \operatorname{sh} \theta' \cos \varphi, \quad z = \alpha \operatorname{sh} \theta' \sin \varphi, \quad x = \alpha \operatorname{ch} \theta'.$$

В этой «псевдосферической» системе координат уравнение псевдосферы запишется в виде $\alpha = \text{const}$. Это непосредственно вытекает из уравнения псевдосферы мнимого радиуса.

Вычислим вид римановой метрики на псевдосфере в координатах u^1, u^2 на модели Пуанкаре. Используя формулы для стереографической проекции и подставляя их в выражение для квадрата дифференциала длины дуги в $\mathbb{R}^3_1$, получаем (проверьте!):

$$-(dx(u^1, u^2))^2+(dy(u^1, u^2))^2+(dz(u^1, u^2))^2=4\alpha^4 \frac{(du^1)^2+(du^2)^2}{(\alpha^2-(u^1)^2-(u^2)^2)^2}.$$

Следовательно, в полярных координатах (пусть $\alpha = 1$) на модели Пуанкаре эта же метрика запишется так:

$$ds^2 = 4 \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1-r^2)^2}.$$

Как видно из этой записи, получившаяся метрика является конформной, т. е. отличается от евклидовой переменным множителем $\lambda(r) = 4(1-r^2)^{-2}$. Перепишем теперь эту же метрику в псевдосферических координатах. Для этого сделаем замену координат (r, φ) на новые параметры (χ, φ) по формулам: $r = \operatorname{cth}(\chi/2)$, $\varphi = \varphi$. Непосредственное вычисление дает (проверьте!) $ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\varphi^2$. Этот вид метрики полностью аналогичен записи метрики сферы в координатах (θ, φ), но только обычные тригонометрические функции заменены здесь на гиперболические.

Найдем геометрический смысл параметра χ. Рассмотрим, например, плоскость XOZ, тогда на ней возникает индуцированная псевдоевклидова метрика $ds^2 = -dx^2 + dz^2$. Псевдосфера пересекает эту плоскость по гиперболе, параметрическое задание которой в псевдосферических координатах имеет вид (мы считаем, что $\alpha = 1$) $x = \operatorname{ch} \theta'$, $z = \operatorname{sh} \theta'$ (рис. 32). В качестве параметра θ возьмем евклидово значение угла POS; тогда, очевидно, $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{th} \theta'$. Найдем длину отрезка гиперболы в псевдоевклидовой метрике от значения 0 до θ'. Имеем

$$l = \int_0^{\theta'} \sqrt{-\operatorname{sh}^2 \theta + \operatorname{ch}^2 \theta}\, d\theta = \theta'.$$

Таким образом, θ' совпадает с длиной «меридиана» на псевдосфере, идущего из южного полюса S в переменную точку P, т. е. этот параметр вполне аналогичен обычному параметру θ на сфере. В частности, мы прояснили геометрический смысл псевдоевклидовых координат (рис. 33). Как видно, псевдосферические координаты полностью аналогичны сферическим координатам. Если $\alpha \neq 1$, то длина «меридиана» равна $\alpha\theta'$.

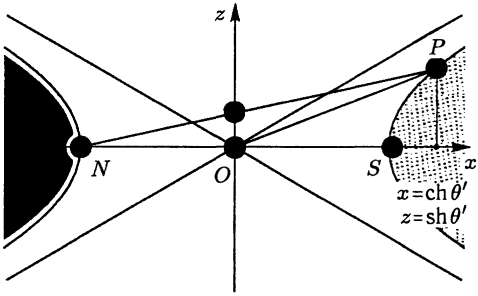


Рис. 32

Рассмотрим теперь стереографическую проекцию (для простоты, по-прежнему рассматриваем только плоскость XOZ, так как все наши вычисления сохраняются при вращениях плоскости XOZ вокруг оси OX). Так как $z = \dfrac{2u^2\alpha^2}{\alpha^2 - r^2}$, то получаем: $z = \dfrac{2r}{1-r^2}$ (так как $u^2 = r$ в плоскости XOZ). Так как $z = \operatorname{sh}\theta' \sin\varphi = \operatorname{sh}\theta'$ (так как $\varphi = \pi/2$), то $\dfrac{2r}{1-r^2} = \operatorname{sh}\theta'$, откуда $r = \operatorname{cth}(\theta'/2)$. Тем самым доказано, что $\chi = \theta'$. Итак, мы получили на модели Пуанкаре риманову метрику $4\,\dfrac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$.

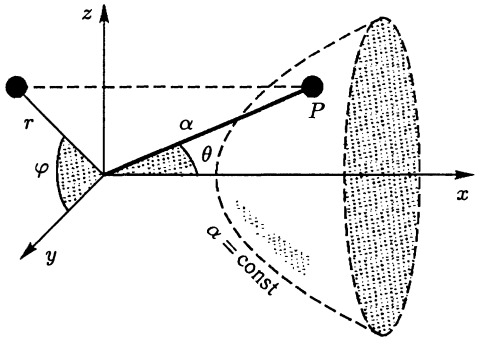


Рис. 33

Отметим, что эта метрика является положительно определенной, хотя объемлющая метрика была псевдоевклидовой, а потому индефинитной. Таким образом, некоторые поверхности (например, псевдосфера мнимого радиуса) могут нести на себе положительно определенную метрику и быть в то же время вложенными в пространство с индефинитной метрикой. То обстоятельство, что на псевдосфере индуцируется положительно определенная метрика, можно было бы усмотреть и из наглядных геометрических соображений. Рассмотрим для простоты сечение псевдосферы плоскостью XOZ, и пусть $\vec{\xi}$ — вектор скорости гиперболы в точке P. Мы хотим

убедиться в том, что его псевдоевклидова длина вещественна. Это следует из рис. 34, на котором отчетливо видно, что вектор $\vec{\xi}$ расположен вне светового конуса (с вершиной в точке P), а потому является пространственно-подобным вектором.

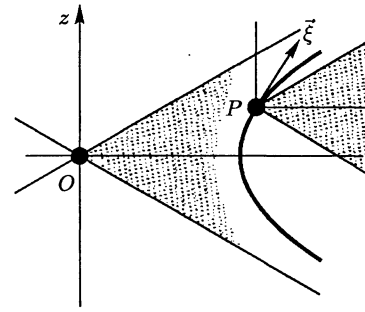


Рис. 34

Полученная нами выше риманова метрика называется *метрикой Лобачевского* (в записи на модели Пуанкаре). Таким образом, эту метрику можно трактовать как некоторую новую метрику, заданную на круге в евклидовой плоскости, отнесенном к обычным полярным координатам. Раньше мы уже познакомились с двумя другими примерами римановых метрик, заданных в единичном круге (для простоты считаем, что радиус круга равен 1): это евклидова и сферическая метрики. Было доказано, что эти метрики не эквивалентны.

Докажем теперь, что метрика Лобачевского не эквивалентна ни одной из двух предыдущих метрик. Для этого применим уже использованный выше прием: найдем длину окружности на плоскости Лобачевского и выразим ее как функцию от радиуса (вычисленного в метрике Лобачевского). Будем считать для простоты, что окружность имеет своим центром точку O и ее евклидов радиус равен a. Найдем длину радиуса в метрике Лобачевского. По определению длины кривой, получаем

$$\chi = 2\int_0^a \frac{dr}{1-r^2} = 2\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = \ln\frac{1+a}{1-a},$$

т. е. $a = \operatorname{th}(\chi/2)$. Длина окружности:

$$l = 2\int_0^{2\pi} \frac{a\,d\varphi}{1-a^2} = \frac{4\pi a}{1-a^2} = 2\pi \operatorname{sh}\chi.$$

Если χ достаточно мало, то приближенно можно считать, что $l \sim 2\pi\chi$, т. е. получаем формулу для длины окружности в евклидовой метрике. Поскольку, как и в случае двумерной сферы, мы выразили длину окружности (в метрике Лобачевского) в инвариантных (относительно замен координат) терминах, т. е. через величину радиуса, также подсчитанную в метрике Лобачевского, то приведенная выше формула для длины окружности инвариантна относительно замен координат, а потому метрика Лобачевского не

эквивалентна ни одной из двух предыдущих метрик. На рис. 35 приведена сравнительная таблица метрик сферы и псевдосферы.

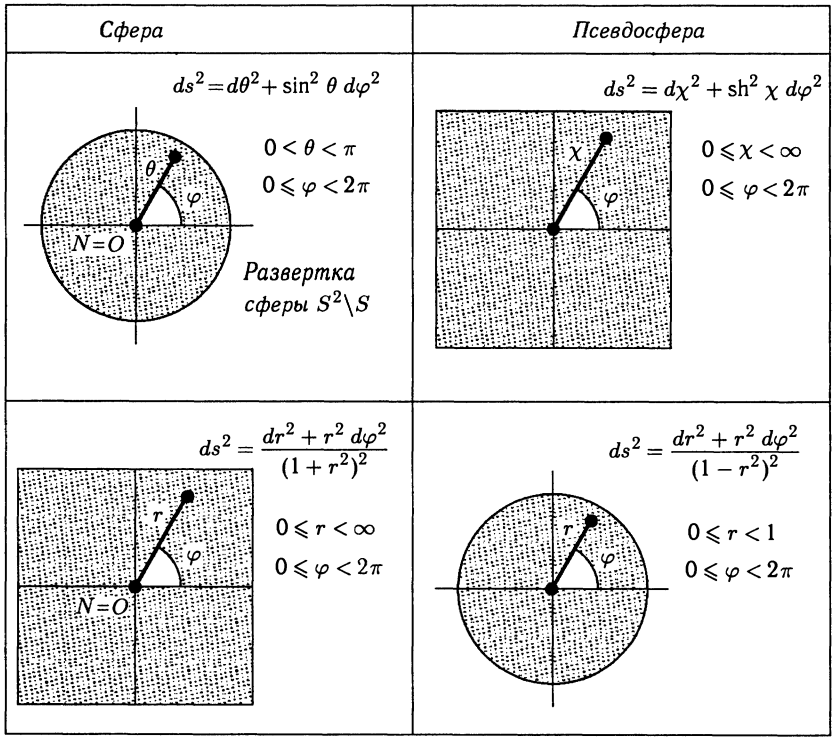


Рис. 35

Укажем еще две полезные формы записи перечисленных ранее метрик — так называемые комплексные формы записи.

Для этого рассмотрим евклидову плоскость и введем на ней комплексную координату $z = x + iy$. Тогда в качестве $\bar{z}$ возьмем $x - iy$. Мы не будем здесь вдаваться в геометрический смысл этих новых координат, а будем рассматривать замену $(x, y) \longrightarrow (z, \bar{z})$ как некую формальную замену. Матрица Якоби этой замены имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. Якобиан $J = -2i \neq 0$, а потому эту замену можно считать регулярной. Так как $dz = dx + i\, dy$, $d\bar{z} = dx - i\, dy$, то евклидова метрика в этих новых координатах принимает вид:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx + i\, dy)(dx - i\, dy) = dz\, d\bar{z}.$$

Метрика сферы, следовательно, принимает вид:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{dz\,d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2},$$

где $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2$. Совершенно аналогично получаем комплексную форму метрики Лобачевского: $ds^2 = \frac{dz\,d\bar{z}}{(1 - |\bar{z}|^2)^2}$.

Для метрики Лобачевского существует еще одна полезная форма записи на верхней полуплоскости. Рассмотрим еще один экземпляр евклидовой плоскости, на которой введем новую комплексную координату w, и выделим на этой плоскости верхнюю полуплоскость (т. е. множество всех точек, для которых $\mathrm{Im}(w) > 0$, где $w = u + iv$; $v = \mathrm{Im}(w)$).

Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^2(w) \longrightarrow \mathbb{R}^2(z)$, задаваемое формулой $z = \frac{aw + b}{cw + d}$, где a, b, c, d — комплексные числа такие, что $ad - bc \neq \neq 0$. Такие отображения называются *дробно-линейными*. Отметим, что если $ad - bc = 0$, то это отображение переводит всю плоскость $\mathbb{R}^2(w)$ в одну точку, а потому мы и исключили этот тривиальный случай.

Теперь мы хотим найти такое отображение $z = \frac{aw + b}{cw + d}$, которое перевело бы всю верхнюю полуплоскость во внутренность единичного круга $|z| < 1$ на плоскости z. При этом вещественная прямая $\mathrm{Im}(w) = 0$ должна перейти в граничную окружность $|z| = 1$. Оказывается, любое невырожденное дробно-линейное отображение (т. е. такое, для которого $ad - bc \neq 0$) однозначно определяется образом любых трех точек, не лежащих на одной прямой в плоскости w. Мы не будем здесь доказывать это общее утверждение, поскольку в таком виде оно нам не потребуется, а продемонстрируем это свойство дробно-линейных отображений на одном конкретном примере, который и окажется искомым отображением полуплоскости на единичный круг.

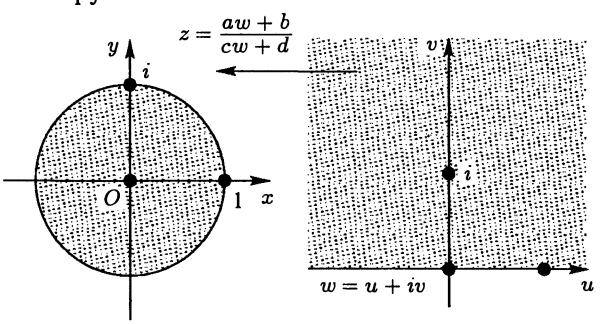


Рис. 36

Найдем такое отображение $z = \frac{aw+b}{cw+d}$, чтобы $0 \to 1$, $i \to 0$, $1 \to i$ (циклическая перестановка) (рис. 36). Получаем следующую систему уравнений для a, b, c, d:

$$1 = \frac{b}{a}, \quad i = \frac{a+b}{c+d}, \quad 0 = \frac{ai+b}{ci+d}.$$

Решая ее (проверьте!), получаем $z = \frac{1+iw}{1-iw}$. Итак, мы нашли одно дробно-линейное преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость в единичный круг. (Таких преобразований имеется много.)

Докажем, что преобразование $z = \frac{1+iw}{1-iw}$ определяет регулярную замену координат. В самом деле, сначала представим преобразование это преобразование в виде:

$$z = \frac{1+iw}{1-iw} = -1 - \frac{2}{iw-1};$$

получаем, что для доказательства регулярности замены достаточно доказать, что преобразование $z = \frac{1}{w}$ является регулярной заменой координат (поскольку искомое преобразование является композицией преобразований: $z = \frac{1}{w}$, сдвига на постоянный вектор, поворота и растяжения). Записав отображение $z = \frac{1}{w}$ в терминах вещественной и мнимой части, получаем

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}.$$

Матрица Якоби равна (с точностью до положительного множителя) $\begin{pmatrix} v^2-u^2 & 2uv \\ -2uv & v^2-u^2 \end{pmatrix}$. Отсюда $J = (u^2+v^2)^2 > 0$. Утверждение доказано.

Найдем dz. Имеем

$$dz = \frac{i\,dw(1-iw) + i\,dw(1+iw)}{(1-iw)^2} = \frac{2i\,dw}{(1-iw)^2}.$$

Отсюда

$$dz\,d\bar{z} = \frac{4dwd\bar{w}}{|1-iw|^4}.$$

Производя соответствующую замену в выражении $ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$, получаем:

$$ds^2 = 4\,\frac{dw\,d\bar{w}}{(w-\bar{w})^2} = \frac{du^2+dv^2}{v^2}.$$

Отсюда еще раз видно, что точки вещественной оси (образ абсолюта модели Пуанкаре) являются бесконечно удаленными точками на плоскости Лобачевского (на этот раз смоделированной на верхней

полуплоскости). В самом деле, если мы захотим подсчитать длину отрезка оси Ov, от точки i до точки O (уже не принадлежащей плоскости Лобачевского), то получим $l = \int\limits_0^1 \frac{dv}{v} = \ln v\Big|_0^1 = -\ln(0) \longrightarrow \infty$.

Выясним, в какие кривые перейдут при отображении на верхнюю полуплоскость прямые плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре). Сначала решим аналогичный вопрос для эллиптической геометрии. Напомним, что в качестве прямых этой геометрии мы рассматривали всевозможные экваторы на сфере S^2. Рассмотрим стереографическую проекцию S^2 на плоскость $\mathbb{R}^2$. Найдем образы экваторов при этом отображении.

Лемма 4. *При стереографической проекции экваторы переходят либо в окружности на плоскости $\mathbb{R}^2$, либо в прямые, причем, экватор переходит в прямую тогда и только тогда, когда он проходит через северный полюс сферы.*

Доказательство. Сначала запишем стереографическую проекцию в декартовых координатах. Пусть x, y, z — координаты точки P на сфере, а x', y' — координаты ее образа на плоскости (после стереографической проекции). Тогда из рис. 37 получаем соотношения $x' = \frac{x}{1-z}$, $y' = \frac{y}{1-z}$.

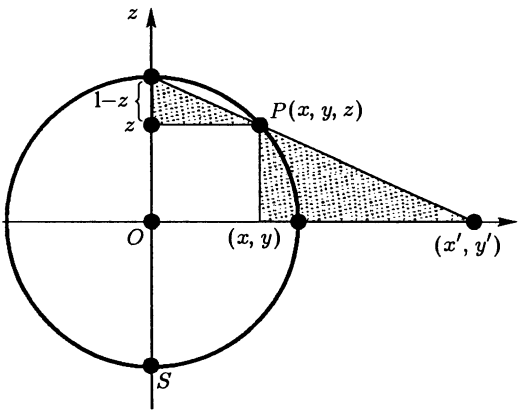


Рис. 37

Уравнение окружности на сфере радиуса 1 запишем в виде двух уравнений: $ax + by + cz = d$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Имеем:

$$z = \frac{d - ax - by}{c}, \quad z = \frac{d - ax' - by'}{c - ax' - by'}, \quad 1 - z = \frac{c - d}{c - ax' - by'},$$

$$(x')^2(1-z)^2 + (y')^2(1-z)^2 + z^2 = 1.$$

Так как $1 - z > 0$, то

$$(x')^2 + (y')^2 = \frac{1+z}{1-z} = 1 + \frac{2z}{1-z} = 1 + \frac{2(d - ax' - by')}{c - d},$$

т. е.

$$(x')^2 + (y')^2 + \frac{2a}{c-d}x' + \frac{2b}{c-d}y' = 1 + \frac{2d}{c-d}.$$

Как известно из аналитической геометрии, это уравнение второго порядка определяет либо прямую, либо окружность на плоскости, в зависимости от соотношений между параметрами a, b, c, d. □

Аналогичное утверждение имеет место и для плоскости Лобачевского.

Лемма 5. *Невырожденное дробно-линейное преобразование* $z = \frac{aw+b}{cw+d}$ *(т. е. такое, что* $ad - bc \neq 0$, *где* a, b, c, d — *комплексные числа), переводящее двумерную плоскость в себя, отображает прямые и окружности снова в прямые и окружности, причем прямая может перейти в окружность, и наоборот.*

Доказательство. Если $c=0$, то утверждение очевидно, так как преобразование $z = \frac{a}{d}w + \frac{b}{d}$ представляет собой параллельный сдвиг на вектор $\frac{b}{d}$ и умножение на комплексное число $\frac{a}{d}$ (растяжение с поворотом). Пусть $c \neq 0$. Тогда $z = \frac{a}{c} - \frac{(ad-bc)}{c(cw+d)}$, т. е. утверждение леммы осталось доказать только для дробно-линейного преобразования $z = \frac{1}{w}$.

Рассмотрим произвольную окружность на плоскости z и запишем ее уравнение в виде $|z - z_0|^2 = \varepsilon^2$, т. е. $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = \varepsilon^2$. Делая замену $z = \frac{1}{w}$, получаем

$$(1 - z_0 z)(1 - \bar{z}\bar{z}_0) = \varepsilon^2 z\bar{z}, \quad \text{т. е.} \quad z\bar{z}(\varepsilon^2 - z_0\bar{z}_0) + z_0 z + \bar{z}_0 z - 1 = 0.$$

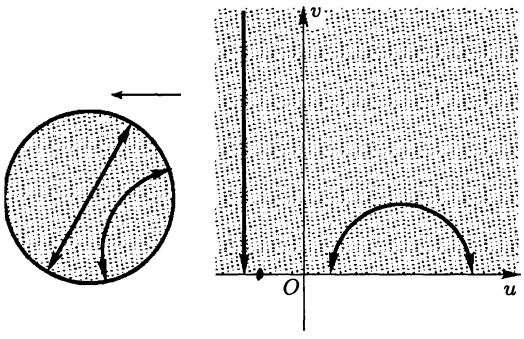


Рис. 38

Ясно, что это уравнение (в зависимости от выбора параметров ε, z_0) определяет либо окружность, либо прямую. □

Следствие 1. *Рассмотрим отображение* $z = \frac{1+iw}{1-iw}$, *переводящее верхнюю полуплоскость в единичный круг. Тогда прямые модели Пуанкаре, т. е. дуги окружностей, ортогональных абсолюту, переходят либо в прямые на плоскости* W, *ортогональные вещественной оси* u *(где* $W = u + iv$*), либо в полуокружности, ортогональные вещественной оси* u (рис. 38).

Доказательство. Будем считать, что единичный круг вложен в плоскость комплексной переменной z, а верхняя полуплоскость — плоскость комплексной переменной w. Тогда отображение $z=\frac{1+iw}{1-iw}$ можно считать определенным всюду на плоскости w. В силу леммы 5 это отображение переводит прямые либо в прямые, либо в окружности (аналогично и окружности переходят либо в прямые, либо в окружности). Поскольку преобразование $z=\frac{1+iw}{1-iw}$ имеет обратное: $w=\frac{z-1}{i(z+1)}$ (напомним, что $ad-bc\neq 0$), то это же самое утверждение верно и для обратного отображения $w=\frac{z-1}{i(z+1)}$. Следовательно, прямые модели Пуанкаре (если их дополнить до прямых и до окружностей на плоскости z) переходят либо в прямые, либо в окружности на плоскости w. Осталось доказать, что они должны быть ортогональны вещественной оси (в точках пересечения с этой осью). Это будет следовать из леммы 6.

Лемма 6. *Любое невырожденное дробно-линейное преобразование $z=\frac{aw+b}{cw+d}$, отображающее плоскость w на плоскость z, сохраняет углы между гладкими кривыми в точках их пересечения.*

Доказательство. Достаточно вычислить в явном виде евклидову метрику $dz\,d\bar{z}$ в новых координатах $w=u+iv$. Проверка того факта, что отображение $z=\frac{aw+b}{cw+d}$, где $ad-bc\neq 0$, определяет регулярную систему координат, проводится так же, как и проведенное выше рассуждение о регулярности замены $z=\frac{1+iw}{1-iw}$. Прямое вычисление показывает, что

$$dz=\frac{adw(cw+d)-cdw(aw+d)}{(cw+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cw+d)^2},$$

т. е. $dz\,d\bar{z}=\frac{|ad-bc|^2}{|cw+d|^4}\,dw\,d\bar{w}$. В вещественных координатах (x, y) и (u, v) имеем $dx^2+dy^2=\frac{|ad-bc|^2}{|cw+d|^2}(du^2+dv^2)$. Таким образом, наше отображение оказалось конформным, т. е. умножающим евклидову метрику на положительный (переменный) множитель и, как было доказано ранее, сохраняет углы между пересекающимися гладкими кривыми. □

Тем самым полностью доказано и следствие 1.

Рассмотрим более детально свойства отображения $w=\frac{z-1}{i(z+1)}$. Точка -1 переходит в бесконечность, следовательно, диаметр на модели Пуанкаре, проходящий через точки 0 и -1, переходит в прямую, ортогональную вещественной оси u в точке O (рис. 39). При

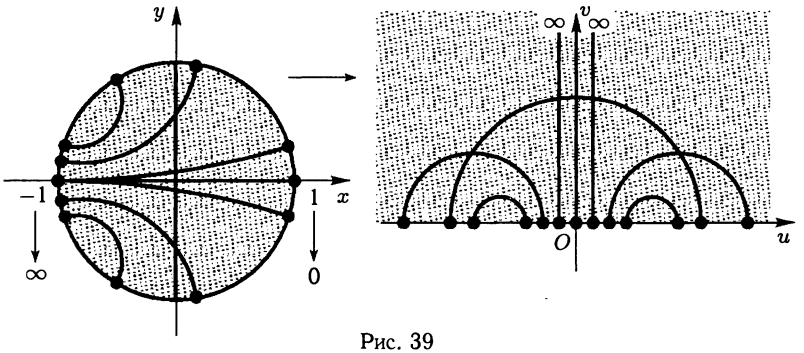


Рис. 39

отображении $w = \frac{z-1}{i(z+1)}$ окружность $|z| = 1$ переходит в вещественную ось u. В самом деле, если $\lambda = \frac{e^{i\varphi}-1}{i(e^{i\varphi}+1)}$, то $\bar{\lambda} = \frac{e^{i\varphi}-1}{i(e^{i\varphi}+1)} = \lambda$, т. е. λ вещественно.

Рассмотрим плоскость Лобачевского в ее реализации на верхней полуплоскости. Пусть P_1 и P_2 — две произвольные точки в верхней полуплоскости. Тогда они всегда могут быть соединены единственной прямой в плоскости Лобачевского. Построение такой прямой показано на рис. 40. В том случае, когда обе точки расположены на прямой, ортогональной вещественной оси, прямая плоскости Лобачевского совпадает с этой прямой.

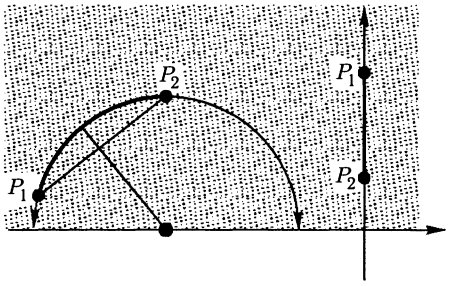


Рис. 40

Найдем явную формулу для длины отрезка прямой от точки P_1 до точки P_2 (в метрике Лобачевского). Сначала сделаем простое преобразование прямой, не меняющее длину ее дуг, — параллельный перенос вдоль оси u. Так как метрика Лобачевского имеет вид $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, то она инвариантна (сохраняется) относительно таких параллельных переносов (или, как иногда говорят, трансляционно инвариантна относительно вещественных сдвигов, т. е. сдвигов вдоль оси x). Пусть P_1 и P_2 не лежат на прямой, ортогональной вещественной оси. В частности, можно считать, что центр окружности, изображающей прямую, проходящую через точки P_1 и P_2, находится в точке O. Параметрически уравнение этой прямой имеет вид $r = r_0$, где (r, φ) — полярные координаты.

Пусть точки P_1 и P_2 задаются координатами (r_0, φ_1) и (r_0, φ_2) соответственно. Тогда длина дуги от P_1 до P_2 имеет вид

$$l(P_1, P_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r_0 d\varphi}{r_0 \sin\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\Big|_{\cos\varphi_1}^{\cos\varphi_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\cos\varphi_2)(1-\cos\varphi_1)}{(1-\cos\varphi_2)(1+\cos\varphi_1)} = \ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}\right).$$

Пусть теперь точки P_1 и P_2 лежат на прямой, ортогональной вещественной оси. Тогда, очевидно, $l(P_1, P_2) = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$, где (x, y_1) и (x, y_2) — координаты точек P_1 и P_2 соответственно. В том случае, когда точки P_1 и P_2 расположены на окружности (с центром на вещественной оси), следует отметить одно полезное обстоятельство: расстояние между точками P_1 и P_2 не меняется при преобразовании подобия с центром в точке O. (Мы считаем, что центр окружности совмещен с началом координат.)

Исходя из полученной формулы для длины дуги можно доказать, что на плоскости Лобачевского для любого треугольника, составленного из отрезков «прямых», выполнено неравенство треугольника, т. е. если P_1, P_2, P_3 — вершины треугольника, то $l(P_1, P_2) + l(P_2, P_3) \geqslant l(P_1, P_3)$.

Докажем неравенство треугольника для прямых в плоскости Лобачевского. Для этого удобно снова вернуться к изображению плоскости Лобачевского в виде двухполостного гиперболоида ${}^+S_1^2$, задаваемого уравнением $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1$. Напомним, что прямые на плоскости Лобачевского — это пересечения плоскостей, проходящих через начало координат с двухполостным гиперболоидом.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in {}^+S_1^2$ — два вектора на плоскости Лобачевского, P — плоскость, порожденная векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда скалярное произведение в $\mathbb{R}_1^3$ индуцирует индефинитное скалярное произведение на плоскости P. Поскольку $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = -1$, то плоскость P изоморфна $\mathbb{R}_1^2$ и, следовательно, на плоскости P можно так ввести линейные координаты (x, y), что метрика примет вид $-x^2 + y^2$, а уравнение прямой Г запишется в виде $-x^2 + y^2 = -1$. Следовательно, длину отрезка кривой Г между точками $\vec{e}_1 = (x_1, y_1)$ и $\vec{e}_2 = (x_2, y_2)$ можно вычислить по уже приведенным выше формулам. Для этого положим $x = \operatorname{ch}\chi$, $y = \operatorname{sh}\chi$. Тогда

$$x_1 = \operatorname{ch}\chi_1, \quad y_1 = \operatorname{sh}\chi_1, \quad x_2 = \operatorname{ch}\chi_2, \quad y_2 = \operatorname{sh}\chi_2,$$

а длина отрезка кривой равна

$$l_{12} = |\chi_1 - \chi_2| = |\operatorname{arcch} x_2 - \operatorname{arcch} x_1| = \\ = |\operatorname{arcch}(x_1 x_2 - y_1 y_2)| = \operatorname{arcch}(-\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle).$$

Таким образом, если даны три вектора, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in {}^+S_1^2$, то неравенство треугольника имеет вид $l_{12} \leqslant l_{13} + l_{32}$. Подставим в это неравенство выражение через скалярное произведение векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\operatorname{arcch}(-\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle) \leqslant \operatorname{arcch}(-\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle) + \operatorname{arcch}(-\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle).$$

Отметим, что все три скалярных произведения, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$ положительны на ${}^+S_1^2$. Применяя к левой и правой частям неравенства функцию ch, получаем

$$-\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \leqslant \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle + \sqrt{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle^2 - 1}\, \sqrt{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle^2 - 1},$$

или:

$$-\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle - \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle \leqslant \sqrt{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle^2 - 1}\, \sqrt{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle^2 - 1}.$$

Вместо последнего неравенства достаточно доказать соотношение

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle^2 + \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle^2 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle^2 + 2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle \leqslant \\ \leqslant \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle^2 \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle^2 + 1 - \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle^2 - \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle^2,$$

или

$$-1 + 2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle + \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle^2 + \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle^2 - \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle^2 \leqslant 0.$$

Поскольку $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = -1$, $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = -1$, $\langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = -1$, то в левой части искомого неравенства стоит определитель Грама, составленный из скалярных произведений векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\det \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_3, \vec{e}_1 \rangle \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle & \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Знак определителя Грама не меняется при заменах базиса, поэтому в стандартном базисе он имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Неравенство треугольника доказано.

Поступая по аналогии со сферой, выведем отсюда следующее утверждение.

Лемма 7. *Для любых двух точек, P и Q, отрезок прямой, соединяющей эти точки, реализует минимальное расстояние между этими точками.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим плоскость Лобачевского и ее реализацию на правой полости двухполостного гиперболоида ${}^{+}S_1^2$. Тогда прямая, соединяющая точки P и Q, реализуется как дуга плоского сечения гиперболоида ${}^{+}S_1^2$ плоскостью, проходящей через точку O (центр псевдосферы). Рассмотрим произвольную гладкую кривую γ, соединяющую точки P и Q на гиперболоиде. Аппроксимируем кривую γ ломаной, составленной из отрезков прямых. Достаточно доказать, что длина любой такой ломаной не меньше, чем длина прямой, соединяющей P и Q.

Отметим, что любую пару точек на плоскости Лобачевского можно соединить отрезком прямой. Мы уже доказали это ранее в модели на верхней полуплоскости, когда по произвольной паре точек на верхней полуплоскости построили окружность, проходящую через них и ортогональную вещественной оси (в точках пересечения).

Теперь мы можем заменить нашу ломаную новой ломаной, длина которой не превосходит длины исходной ломаной. Для этого рассмотрим два соседних звена исходной ломаной и (в том случае, когда эти отрезки не лежат на одной прямой) построим новый отрезок, соединяющий начало первого звена с концом второго звена (рис. 41). Так как треугольник ABC составлен из трех отрезков прямых, то, как было доказано выше, выполнено неравенство треугольника, в силу которого длина новой ломаной не превосходит длины исходной ломаной. Продолжая этот процесс и используя тот факт, что у начальной ломаной было конечное число звеньев, мы через конечное число шагов получим ломаную, состоящую только из одного звена, т. е. соединим точки P и Q некоторым отрезком прямой. Однако из проведенного ранее рассуждения, доказывавшего существование прямой, соединяющей произвольную пару точек, следует, что такая прямая единственна. Следовательно, наш процесс упрощения лома-

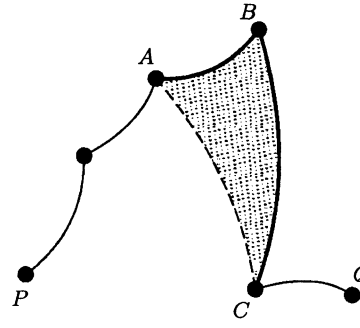


Рис. 41

ной остановился в тот момент, когда ломаная совпала с отрезком прямой, соединяющим P и Q. □

Итак, мы получили некоторое обоснование того, почему плоские сечения гиперболоида играют роль прямых в геометрии Лобачевского. Оказалось, что они как раз и реализуют кратчайшее расстояние между точками в плоскости Лобачевского. Мы привыкли к тому, что на евклидовой плоскости движение по прямой как раз и означает движение по траектории, реализующей минимум расстояния между двумя точками. Так как в геометрии Лобачевского (как и в геометрии на сфере) понятие прямолинейного движения не формулируется просто и естественно на языке векторов с постоянными компонентами (указывающими однозначно направление движения), то естественно назвать прямолинейным движением такое, которое происходит по некоторой гладкой кривой, реализующей минимум расстояния между начальной и конечной точками. Класс таких кривых мы обнаружили как на сфере, так и на плоскости Лобачевского. И в том, и в другом случае этот класс составлен из плоских сечений двумерных поверхностей, моделирующих соответствующие геометрии (сферы и псевдосферы). В дальнейшем, когда мы познакомимся с простейшими элементами вариационного исчисления, мы докажем, что этот же класс кривых может быть выделен из множества всех гладких кривых также и тем свойством, что вдоль этих прямых можно естественно определить понятие параллельного переноса, обобщающее обычный параллельный перенос в евклидовом пространстве (такие кривые называются геодезическими).

Задачи к § 4

1. Показать, что у треугольника на псевдосфере (составленного из отрезков прямых) сумма углов меньше 2π.

2. Выразить сумму углов треугольника на псевдосфере (составленного из отрезков прямых) через его площадь.

Глава 2

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

Топология — это раздел математики, который изучает свойства геометрических объектов, не меняющиеся при «деформации» или при преобразованиях, подобных деформациям.

Первоначально топологические задачи возникли в математическом анализе, где встречается много понятий схожих по своим свойствам и методам исследования. Например, понятия сходимости и предела встречаются в анализе в качестве: а) предела последовательности, б) различных типов пределов функций одной переменной, в) пределов функций многих переменных, г) пределов векторнозначных функций, д) сходимости интегральных сумм. Все эти понятия сходимости и предела основаны на некоторых общих для них приемах исследования, которые интуитивно мы понимаем как близость точек некоторого множества.

Другим важным стимулом для развития топологии было изучение различных типов понятия непрерывности, к которым тесно примыкает понятие сходимости.

Общая топология возникла в результате изучения наиболее общих свойств геометрических пространств и их преобразований, связанных со свойствами сходимости и непрерывности.

§ 1. Определения и простейшие свойства метрических и топологических пространств

1. Метрические пространства. В качестве фундаментального понятия в топологии выбирается понятие «близости» элементов произвольного множества. Наиболее удобно измерять степень близости числами в виде расстояния между элементами.

Рассмотрим какое-либо множество X, состоящее из элементов произвольной природы. *Метрикой* на множестве X называется числовая неотрицательная функция $\rho(x, y)$, зависящая от пары элементов $x, y \in X$, для которой выполнены следующие свойства:

а) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

в) для любых трех элементов $x, y, z \in X$ всегда $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Свойства а), б), в) называются, соответственно, аксиомами тождества, симметрии и треугольника.

Множество X вместе с некоторой метрикой ρ, определенной на множестве X, называется *метрическим пространством*, элементы множества X называются *точками*. Значение метрики $\rho(x, y)$ на паре точек $x, y \in X$ называется *расстоянием между точками* x и y. Метрическое пространство обычно обозначается в виде пары (X, ρ). Но для краткости, если это не вызовет недоразумений, метрическое пространство мы будем часто обозначать просто через X.

Простейшим примером метрического пространства является само множество вещественных чисел $\mathbb{R}^1$. Метрика на нем задается равенством $\rho(x, y) = |x - y|$. Функция ρ обладает всеми свойствами метрики и превращает $\mathbb{R}^1$ в метрическое пространство.

Если X — метрическое пространство с метрикой ρ, а $Y \subset X$ — некоторое его подмножество, то с помощью той же метрики ρ множество Y превращается в метрическое пространство. Метрическое пространство (Y, ρ) будем называть *подпространством* метрического пространства X. Пусть $Y \subset X$ — произвольное подмножество метрического пространства. Рассмотрим верхнюю грань всех чисел $\rho(x, y)$, когда x, y пробегают точки множества Y. Если эта верхняя грань конечна, то множество Y называют *ограниченным*, а число $d = \sup\limits_{x, y \in Y} \{\rho(x, y)\}$ — *диаметром* множества Y.

Шаровой окрестностью с центром $x \in X$ *радиуса* ε называется множество $O_\varepsilon(x)$ всех точек $y \in X$, для которых $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Расстоянием между двумя множествами $Y_1, Y_2 \subset X$ ($\rho(Y_1, Y_2)$) называется нижняя грань множества чисел $\rho(x, y)$, когда x пробегает множество Y_1, а y пробегает множество Y_2. Если множества Y_1 и Y_2 имеют общую точку, то $\rho(Y_1, Y_2) = 0$. Однако можно привести примеры непересекающихся множеств с нулевым расстоянием между ними.

Шаровой окрестностью множества Y *радиуса* ε называется множество $O_\varepsilon(Y)$ всех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, Y) < \varepsilon$.

Точкой прикосновения множества Y называется всякая точка x, для которой $\rho(x, Y) = 0$. В частности, каждая точка x множества Y является его точкой прикосновения. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Например, интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ имеет в качестве точек прикосновения точки a и b, которые не принадлежат интервалу (a, b).

Замыканием множества Y называется множество всех его точек прикосновения. Замыкание множества Y обозначается через $\overline{Y}$.

Таким образом, $Y \subset \overline{Y}$, но обратное, вообще говоря, неверно. Например, замыкание интервала (a, b) является отрезком $[a, b]$.

Множество Y метрического пространства называется *замкнутым*, если его замыкание $\overline{Y}$ совпадает с Y: $Y = \overline{Y}$.

Точка x называется *внутренней точкой* множества Y, если ее некоторая шаровая окрестность содержится в Y: $O_\varepsilon(x) \subset Y$. Множество всех внутренних точек множества называется *внутренностью* множества Y и обозначается через $\operatorname{Int} Y$. Если множество Y совпадает со своей внутренностью $\operatorname{Int} Y$, то множество Y называется *открытым*.

Теорема 1. *Пусть X — метрическое пространство. Множество $Y \subset X$ является замкнутым тогда и только тогда, когда дополнение $X \setminus Y$ открыто.*

Доказательство. Пусть Y — замкнутое множество, $Y = \overline{Y}$, и $x \in X \setminus Y$. Это значит, что точка x не является точкой прикосновения множества Y, т. е. $\rho(x, Y) = \varepsilon > 0$. Покажем, что $O_\varepsilon(x) \subset X \setminus Y$. В самом деле, если $y \in O_\varepsilon(x)$, то $\rho(x, y) < \varepsilon$. Если бы $y \in Y$, то $\rho(x, y) \geqslant \rho(x, Y)$, т. е. $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$, что противоречит условию. Следовательно, множество $X \setminus Y$ открыто.

Обратно, пусть $X \setminus Y$ — открытое множество. Тогда, если $x \in X \setminus Y$, то найдется шаровая окрестность $O_\varepsilon(x)$, лежащая в $X \setminus Y$. Это значит, что $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$ для $y \in Y$, т. е. $\rho(x, Y) \geqslant \varepsilon$. Следовательно, точка x не является точкой прикосновения множества Y. Таким образом, если $x \in \overline{Y}$, то $x \notin (X \setminus Y)$, т. е. $x \in Y$. Это значит, что $\overline{Y} \subset Y$, т. е. $Y = \overline{Y}$. Следовательно, множество Y замкнуто. □

Теорема 2. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством, пересечение конечного числа открытых множеств — открыто. Справедливо также двойственное утверждение: пересечение любого семейства и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

Доказательство. Пусть $Y_\alpha \subset X$ — семейство открытых множеств. Покажем, что объединение $Y = \bigcup\limits_\alpha Y_\alpha$ является открытым множеством. Пусть $x \in Y$, тогда $x \in Y_\alpha$ для некоторого индекса α, и поскольку Y_α открыто, то в Y_α лежит целая шаровая окрестность $O_\varepsilon(x) \subset Y_\alpha$. Поэтому $O_\varepsilon(x) \subset Y_\alpha \subset \bigcup\limits_\alpha Y_\alpha = Y$, т. е. Y — открытое множество. Допустим теперь, что индекс α пробегает конечное число

значений. Покажем, что пересечение $Y' = \bigcap\limits_{\alpha} Y_\alpha$ является открытым множеством. Пусть $x \in Y'$, тогда $x \in Y_\alpha$ для каждого значения индекса α. Поскольку Y_α — открытое множество, то некоторая шаровая окрестность $O_{\varepsilon_\alpha}(x)$ лежит в Y_α. Положим $\varepsilon = \min\limits_{\alpha} \varepsilon_\alpha > 0$ (здесь мы воспользовались конечностью множества индексов α). Тогда $O_\varepsilon(x) \subset O_{\varepsilon_\alpha}(x) \subset Y_\alpha$ для всех значений индекса α, т. е. $O_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{\alpha} Y_\alpha = Y$. Следовательно, Y — открытое множество.

Двойственные утверждения для замкнутых множеств следуют из теоремы 1 и связи операций объединения, пересечения и дополнения:

$$\bigcap_{\alpha}(X \setminus Y_\alpha) = X \setminus \bigcup_{\alpha} Y_\alpha, \quad \bigcup_{\alpha}(X \setminus Y_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha} Y_\alpha. \qquad \square$$

Во всех предыдущих утверждениях мы пока не пользовались свойством в) метрики. Докажем теперь несколько полезных утверждений о метрических пространствах, основанных на этом неравенстве.

Теорема 3. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда:*

а) *шаровая окрестность $O_\varepsilon(x)$ является открытым множеством;*

б) *внутренность* $\operatorname{Int} Y$ *произвольного множества Y является открытым множеством;*

в) *замыкание $\overline{Y}$ произвольного множества Y является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть $y \in O_\varepsilon(x)$, тогда $\rho(x, y) = \delta < \varepsilon$. Покажем, что найдется такое число $\varepsilon' > 0$, что $O_{\varepsilon'}(y) \subset O_\varepsilon(x)$. Выберем ε' таким, чтобы $\delta + \varepsilon' < \varepsilon$. Тогда, если $z \in O_{\varepsilon'}(y)$, то $\rho(z, y) < \varepsilon'$. Следовательно, $\rho(z, x) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < \delta + \varepsilon' < \varepsilon$, т. е. $z \in O_\varepsilon(x)$. Это и значит, что $O_{\varepsilon'}(y) \subset O_\varepsilon(x)$. Таким образом, $O_\varepsilon(x)$ — открытое множество.

Теперь покажем, что $\operatorname{Int} Y$ является открытым множеством. Заметим, что если $Y_1 \subset Y_2$, то $\operatorname{Int} Y_1 \subset \operatorname{Int} Y_2$. Поэтому, если $x \in \operatorname{Int} Y$, то $O_\varepsilon(x) \subset Y$, а значит, в силу утверждения а), $O_\varepsilon(x) = \operatorname{Int} O_\varepsilon(x) \subset \operatorname{Int} Y$. Тогда, согласно определению, множество $\operatorname{Int} Y$ является открытым.

Наконец, покажем, что $\overline{Y}$ — замкнутое множество. Согласно определению точка x не принадлежит $\overline{Y}$ тогда и только тогда, когда $x \in \operatorname{Int}(X \setminus Y)$, т. е. $X \setminus \overline{Y} = \operatorname{Int}(X \setminus Y)$. По теореме 1, если $\operatorname{Int}(X \setminus Y)$ открыто, то $\overline{Y}$ замкнуто. $\square$

Во многих утверждениях о метрических пространствах используются только свойства, сформулированные в теоремах 1 и 2. Поэтому можно расширить класс пространств, для которых имеет смысл говорить об открытых, замкнутых множествах, внутренних точках и точках прикосновения.

2. Топологические пространства. Говорят, что на множестве X задана *топология*, если введено некоторое семейство подмножеств множества X, называемых *открытыми* множествами, для которого выполнены следующие условия:

а) все множество X, а также пустое множество являются открытыми множествами;

б) объединение любого семейства и пересечение конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.

Множество X с заданной на нем топологией называют *топологическим пространством*, элементы множества X называются *точками* пространства X. Дополнения к открытым множествам называются *замкнутыми множествами*. Очевидно, что в любом топологическом пространстве X выполнены двойственные условия для замкнутых множеств:

а′) все множество X, а также пустое множество являются замкнутыми множествами,

б′) пересечение любого семейства и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

В силу этих условий для задания топологии на множестве X вместо семейства открытых множеств можно задать семейство множеств, удовлетворяющих условиям (а′) и (б′), и назвать эти множества *замкнутыми*.

Теорема 2 п. 1 показывает, что семейство открытых множеств метрического пространства X задает на X некоторую топологию, т. е. превращает X в топологическое пространство.

В топологических пространствах воспроизводятся многие важные понятия метрических пространств. *Окрестностью точки* x топологического пространства X назовем любое открытое множество, содержащее точку x. Аналогично открытое множество, содержащее подмножество Y, называется *окрестностью множества* Y. *Точкой прикосновения* множества $Y \subset X$ называется такая точка x, для которой каждая ее окрестность имеет непустое пересечение с множеством Y. Множество всех точек прикосновения множества Y называется *замыканием* множества Y и обозначается через $\overline{Y}$. *Внутренней точкой* множества Y называется такая точка $x \in Y$, которая лежит в Y вместе с некоторой своей окрестностью. Множество всех внутренних точек

множества Y называется *внутренностью* и обозначается через $\operatorname{Int} Y$.

Теорема 4. *Множество $Y \subset X$ замкнуто (т. е. является дополнением к открытому множеству) тогда и только тогда, когда $Y = \overline{Y}$.*

Доказательство. Пусть Y — замкнутое множество, тогда $X \setminus Y$ открыто. Следовательно множество $X \setminus Y$ является окрестностью для любой своей точки, т. е. точки множества $X \setminus Y$ не являются точками прикосновения множества Y. Поэтому $\overline{Y} \subset Y$, следовательно $Y = \overline{Y}$.

Пусть, наоборот, $Y = \overline{Y}$. Тогда если $x \notin Y$, то x не является точкой прикосновения множества Y, т. е. некоторая ее окрестность U_x не пересекается с Y, и поэтому $U_x \subset X \setminus Y$. Таким образом, множество $X \setminus Y$ представлено в виде объединения открытых множеств U_x и, значит, само является открытым. □

Теорема 5. *Замыкание $\overline{Y}$ произвольного множества Y топологического пространства X является замкнутым множеством.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме необходимо доказать равенство $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$. Включение $\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y}}$ очевидно, поэтому остается проверить обратное включение $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$. Пусть $x \in \overline{\overline{Y}}$. Это значит, что любая окрестность U точки x имеет непустое пересечение с множеством $\overline{Y}$. Пусть $y \in U \cap \overline{Y}$. Тогда множество U является окрестностью точки y. Так как $y \in \overline{Y}$, то множество U имеет непустое пересечение с множеством Y. Следовательно, точка x является точкой прикосновения множества Y, т. е. $x \in \overline{Y}$. Таким образом мы показали, что $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим множество X, состоящее из одного элемента x. Тогда на X может быть введена единственная топология, открытыми множествами которой являются множество X и пустое множество.

Пример 2. Рассмотрим множество X, состоящее из двух элементов, x и y, $x \neq y$. На этом множестве можно ввести уже несколько различных топологий. Первая топология задается множеством всех подмножеств в качестве открытых множеств, т. е. $\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, X\}$. Вторая топология задается следующим семейством открытых множеств: $\{\varnothing, X\}$. Можно задать и третью топологию, в качестве семейства открытых множеств которой следует взять $\{\varnothing, \{x\}, X\}$. Мы перечислили все различные топологии

на одном и том же множестве X, которые задают три различных топологических пространства.

ПРИМЕР 3. Пусть X — произвольное множество. Введем на X топологию, объявив любое его подмножество открытым. Тогда любое одноточечное подмножество является открытым, а значит, и всякое подмножество как объединение своих точек тоже открыто. Такая топология называется *дискретной*.

Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$ — его подмножество. Тогда на Y также можно задать топологию, объявив открытым всякое множество вида $Y \cap U$, где U — открытое в X множество. Тогда топологическое пространство Y называется *подпространством* топологического пространства X, а топология в Y — *индуцированной топологией*. Если X — метрическое пространство, а Y — его подпространство, то топология в Y задается независимо от порядка операций: ограничения метрики и перехода к топологии, или перехода к топологии и индуцирования топологии.

Пусть $Y \subset X$ — подмножество в топологическом пространстве X. Множество Y называется *плотным* (*всюду плотным*), если $\overline{Y} = X$.

Теорема 6. *Если Y_1 и Y_2 — два открытых плотных множества в пространстве X, то их пересечение $Y = Y_1 \cap Y_2$ открыто и плотно в X.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, U — ее окрестность. Поскольку множество Y_1 плотно, то $U \cap Y_1 \neq \varnothing$, т. е. найдется такая точка y, что $y \in U \cap Y_1$. Так как $U \cap Y_1$ — открытое множество, а Y_2 — плотное множество, то $U \cap Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$, т. е. $U \cap Y \neq \varnothing$, это и означает, что Y — плотное множество в X. □

3. Непрерывные отображения. Понятие топологического пространства настолько удобно, что определение непрерывности отображения дословно переносится из математического анализа.

***Определение* (по Коши).** Отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ топологических пространств называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V(f(x_0))$ точки $f(x_0) \in Y$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки $x_0 \in X$, что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Отображение f называется *непрерывным отображением*, если оно непрерывно в каждой точке пространства X.

Теорема 7. *Отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

а) *прообраз любого открытого множества является открытым множеством;*

б) *прообраз любого замкнутого множества является замкнутым множеством.*

Доказательство. Поскольку для прообразов справедливо соотношение $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, то условия а) и б) эквивалентны. Допустим, что f — непрерывное отображение, $V \subset Y$ — открытое множество. Покажем, что его прообраз $f^{-1}(V)$ открыт. Пусть $x \in f^{-1}(V)$; тогда $f(x) \in V$, т. е. V является окрестностью точки $f(x)$. Тогда согласно определению непрерывности отображения f найдется такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$, т. е. $U \subset f^{-1}(V)$; это означает, что множество $f^{-1}(V)$ открыто.

Обратно, пусть выполнено условие а). Если $V \ni f(x_0)$ — окрестность точки $f(x_0)$, то $U = f^{-1}(V) \ni x_0$ — окрестность точки (x_0), причем $f(U) = f(f^{-1}(V)) = V \subset V$. Следовательно, f — непрерывное отображение. □

Условия а) и б) теоремы 7 удобны при проверке непрерывности отображений топологических пространств. Например, полезна в дальнейшем следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть топологическое пространство X представлено в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств: $X = F_1 \cup F_2$, и пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — отображение пространства X в топологическое пространство Y. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны ограничения $f|_{F_1}$ и $f|_{F_2}$ отображения f на подмножества F_1 и F_2.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение. Покажем, например, что $f|_{F_1}$ — непрерывное отображение. Прообразы отображения $f|_{F_1}$ вычисляются по формуле $(f|_{F_1})^{-1}(A) = F_1 \cap f^{-1}(A)$. Поэтому, если A — замкнутое множество, то замкнутыми будут и $f^{-1}(A)$ и $F_1 \cap f^{-1}(A)$.

Обратно, пусть $f|_{F_1}$ и $f|_{F_2}$ — непрерывные отображения. Покажем, что отображение f непрерывно. Пусть $A = \overline{A} \subset Y$. Тогда

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap X = f^{-1}(A) \cap (F_1 \cup F_2) =$$
$$= (f^{-1}(A) \cap F_1) \cup (f^{-1}(A) \cap F_2) = (f|_{F_1})^{-1}(A) \cup (f|_{F_2})^{-1}(A).$$

Поскольку множество $(f|_{F_1})^{-1}(A)$ замкнуто в подпространстве F_1, а $F_1 = \overline{F}_1$, то $(f|_{F_1})^{-1}(A)$ замкнуто в X. Аналогично, множество $(f|_{F_2})^{-1}(A)$ тоже замкнуто в X. Тогда и $f^{-1}(A)$ замкнуто в X. □

Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y. Если отображение f взаимно однозначно, а обратное отображение f^{-1}

непрерывно, то отображение f называется *гомеоморфизмом*. При этом топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными топологическими пространствами*. При гомеоморфизме устанавливается не только взаимно однозначное соответствие между точками топологических пространств X и Y, но и взаимно однозначное соответствие между самими топологиями, т. е. между семействами открытых множеств (семействами замкнутых множеств). Мы будем говорить, что некоторое свойство топологического пространства *топологически инвариантно*, если оно выполнено для любого гомеоморфного топологического пространства. Таким образом, при изучении топологически инвариантных свойств мы можем не различать гомеоморфные пространства.

ПРИМЕР 4. Свойство отображения $f\colon X \longrightarrow Y$ быть непрерывным является топологически инвариантным свойством. В самом деле, если $\varphi\colon X' \longrightarrow X$, $\psi\colon Y \longrightarrow Y'$ — гомеоморфизмы, то и композиция $X' \xrightarrow{\psi f \varphi} Y'$ является непрерывным отображением.

ПРИМЕР 5. Важным частным случаем непрерывных отображений являются непрерывные функции, т. е. непрерывные отображения топологического пространства X в пространство $\mathbb{R}^1$ вещественных чисел. Условие непрерывности функции f можно сформулировать следующим образом: *для любой точки $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки x_0, что при $y \in U$ выполнено неравенство $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$*. Для функций на топологическом пространстве можно определить равномерный предел последовательности непрерывных функций. Так же, как и в случае функций одной вещественной переменной, справедливо утверждение: *если $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ и последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций на топологическом пространстве X сходится к f равномерно, то функция f тоже непрерывна.* В самом деле, пусть $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Так как последовательность f_n сходится равномерно, то можно выбрать такой номер n, что $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ для любой точки $x \in X$. Далее, поскольку f_n — непрерывные функции, то найдется такая окрестность U точки x_0, что при $x \in U$ выполнено неравенство $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. Тогда

$$|f(x_0) - f(x)| < |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + \\ + |f_n(x) - f(x)| < 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

ПРИМЕР 6. Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение метрических пространств, ρ_1 и ρ_2 — метрики на пространствах X и Y соответственно. Тогда условие непрерывности отображения f

можно сформулировать следующим образом: *для любого* $x_0 \in X$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что из неравенства* $\rho_1(x, x_0) < \delta$ *следует неравенство* $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Для метрических пространств полезно также обобщение понятия сходимости числовой последовательности. Скажем, что последовательность точек $\{x_n\}$ *сходится к точке* x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = 0$. В терминах сходящихся последовательностей метрического пространства формулируются многие свойства пространств и отображений. Так, множество $Y \subset X$ является замкнутым, если для любой сходящейся последовательности точек $\{x_n\} \subset Y$ предел $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ также принадлежит множеству Y. Далее, условие непрерывности отображения $f\colon X \longrightarrow Y$ метрических пространств можно сформулировать по Гейне.

***Определение* (по Гейне).** Отображение f непрерывно в точке x_0, если из равенства $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Пример 7. Рассмотрим два топологических пространства X и Y. Образуем новое топологическое пространство $X \times Y$. Множество $X \times Y$ есть множество всех пар вида (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, и называется *декартовым произведением множеств* X и Y. Определим теперь топологию в $X \times Y$. Множество $U \subset X \times Y$ назовем открытым, если U представимо в виде объединения $U = \bigcup\limits_{\alpha}(V_\alpha \times W_\alpha)$, где $V_\alpha \subset X$, $W_\alpha \subset Y$ — открытые множества. Проверка свойств открытых множеств тривиальна. Множество $X \times Y$ с определенной выше топологией называется *декартовым произведением топологических пространств* X *и* Y. При этом топологические пространства X и Y называются *сомножителями* декартова произведения $X \times Y$. Справедливы следующие свойства декартовых произведений:

а) пространства $X \times Y$ и $Y \times X$ гомеоморфны; б) пространства $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$ гомеоморфны.

В первом случае в качестве гомеоморфизма следует взять отображение $\varphi\colon X \times Y \longrightarrow Y \times X$, $\varphi(x, y) = (y, x)$. Тогда, если $U = \bigcup\limits_{\alpha}(V_\alpha \times W_\alpha)$ — открытое множество пространства $X \times Y$, то $\varphi(U) = \bigcup\limits_{\alpha}(W_\alpha \times V_\alpha)$ — открытое множество пространства $Y \times X$.

Во втором случае в качестве гомеоморфизма следует взять φ: $(X \times Y) \times Z \longrightarrow X \times (Y \times Z)$, $\varphi((x, y), z) = (x, (y, z))$. Проекция декартова произведения $X \times Y$ на один из сомножителей, скажем,

на X, $f\colon X\times Y\longrightarrow X$, $f(x, y)=x$, является непрерывным отображением. В самом деле, прообраз открытого множества $U\subset X$ имеет вид $f^{-1}(U)=U\times Y$, т. е. $f^{-1}(U)$ является открытым множеством.

ПРИМЕР 8. Пусть X и Y — метрические пространства; тогда декартово произведение $X\times Y$ допускает метрику, согласованную с топологией декартова произведения. Пусть ρ_1, ρ_2 — метрики пространств X и Y соответственно. Определим метрику ρ в декартовом произведении $X\times Y$ по формуле

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\}. \qquad (1)$$

Проверим свойства а), б), в) для этой метрики. Если $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=0$, то $\rho_1(x_1, x_2)=\rho_2(y_1, y_2)=0$, т. е. $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, откуда следует, что $(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$.

Обратно, если $(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$, то $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, значит, $\rho_1(x_1, x_2)=\rho_2(y_1, y_2)=0$; следовательно, $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=$ $=\max\{0, 0\}=0$. Свойство а) доказано. Далее,

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\}=$$
$$=\max\{\rho_1(x_2, x_1), \rho_2(y_2, y_1)\}=\rho((x_2, y_2), (x_1, y_1)),$$

и свойство б) тоже доказано.

Наконец, проверим неравенство треугольника:

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\}\leqslant$$
$$\leqslant\max\{\rho_1(x_1, x_3)+\rho_1(x_3, x_2), \rho_2(y_1, y_3)+\rho_2(y_3, y_2)\}\leqslant$$
$$\leqslant\max\{\rho_1(x_1, x_3), \rho_2(y_1, y_3)\}+\max\{\rho_1(x_3, x_2), \rho_2(y_3, y_2)\}=$$
$$=\rho((x_1, y_1), (x_3, y_3))+\rho((x_3, y_3), (x_2, y_2)).$$

Таким образом, формула (1) определяет некоторую метрику в декартовом произведении $X\times Y$. Покажем, что топология, определенная по метрике ρ, совпадает с топологией декартова произведения. Рассмотрим шаровую окрестность радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0):

$$O_\varepsilon(x_0, y_0)=\{(x, y)\mid\rho((x, y), (x_0, y_0))<\varepsilon\}=$$
$$=\{(x, y)\mid\rho_1(x, x_0)<\varepsilon, \rho_2(y, y_0)<\varepsilon\}=O_\varepsilon(x_0)\times O_\varepsilon(y_0).$$

Следовательно, любое открытое множество в смысле метрики ρ является открытым в топологии декартова произведения, и наоборот.

Существуют и другие способы задавать метрику в декартовом произведении. Часто употребляется аналогия между между сомножителями X и Y декартова произведения с осями координат на плоскости. Метрика задается по формуле

$$\rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\sqrt{\rho_1(x_1, x_2)^2+\rho_2(y_1, y_2)^2}. \qquad (2)$$

Проверку свойств а), б), в) мы предоставляем читателю. Чтобы показать, что топология, задаваемая метрикой (2), совпадает с топологией, задаваемой метрикой (1), достаточно найти две такие константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что

$$C_1\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leqslant \rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leqslant \\ \leqslant C_2\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \quad (3)$$

В самом деле, если через O_ε обозначить шаровую окрестность в метрике ρ, O'_ε — в метрике ρ', то достаточно, чтобы в каждой точке пространства $X \times Y$ выполнялось включение

$$O_\varepsilon((x_0, y_0)) \subset O'_{\varepsilon'}((x_0, y_0)) \subset O_{\varepsilon''}((x_0, y_0)), \quad (4)$$

где ε выбирается для произвольного $\varepsilon' > 0$, а ε' выбирается для произвольного $\varepsilon'' > 0$. Из неравенства (3) вытекает, что выключение (4) выполняется при $\varepsilon' = C_2\varepsilon''$, $\varepsilon = \varepsilon'/C_1$. Итак, нам необходимо доказать неравенства (3). Имеем

$$\rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{\rho_1(x_1, x_2)^2 + \rho_2(y_1, y_2)^2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2}\max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\} = \sqrt{2}\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)),$$

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\rho_1(x_1, x_2)^2 + \rho_2(y_1, y_2)^2} = \rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

Таким образом, неравенства (3) справедливы при $C_1 = 1$, $C_2 = \sqrt{2}$. Итак, мы показали, что в декартовом произведении $X \times Y$ две метрики, задаваемые формулами (1) и (2), порождают одну и ту же топологию декартова произведения.

Задачи к § 1

1. Привести пример метрики на конечном множестве, которая не индуцируется никаким его вложением в евклидово пространство.

2. Показать, что конечное множество на прямой является замкнутым.

3. Показать, что $\rho(x, Y) = \rho(x, \overline{Y})$.

4. Доказать, что функция $f(x) = \rho(x, Y)$ непрерывна для любого подмножества Y.

5. Показать, что любая метрика на конечном множестве индуцирует на нем дискретную топологию.

6. Доказать, что интервал, полуинтервал и сегмент на вещественной прямой попарно не гомеоморфны.

7. Доказать, что метрика $\rho(x, y)$ является непрерывной функцией на декартовом квадрате $X \times X$ метрического пространства X.

8. Доказать, что множество X представимо в виде разности двух замкнутых множеств тогда и только тогда, когда $(\overline{X} \setminus X)$ является замкнутым множеством.

9. Доказать, что образ плотного подмножества при непрерывном отображении плотен в образе.

§ 2. Связность. Аксиомы отделимости

Среди всех топологических пространств можно выделить более узкие классы, определяемые топологически инвариантными свойствами. Например, в примере 3 § 1 был выделен класс дискретных топологических пространств. Для этих пространств выполнено следующее свойство: *всякое отображение f дискретного пространства X в другое топологическое пространство Y является непрерывным.* Сейчас мы рассмотрим другие, более важные классы топологических пространств.

1. Связность. Если пространство X содержит отличное от X и пустого множества $\varnothing$ одновременно открытое и замкнутое подмножество $Y \subset X$, то говорят, что X — *несвязное* топологическое пространство. Например, всякое дискретное топологическое пространство, состоящее более чем из одной точки, несвязно, поскольку любое его подмножество как открыто, так и замкнуто. Если пространство X несвязно, то оно разлагается в объединение двух открытых непересекающихся непустых подмножеств: $X = Y \cup (X \setminus Y)$. Топологическое пространство X называется *связным топологическим пространством*, если X нельзя разложить в объединение двух открытых непересекающихся непустых подмножеств.

Пример 1. Рассмотрим отрезок числовой прямой $[a, b]$. Покажем, что отрезок $[a, b]$ является связным множеством.

Допустим, что отрезок $[a, b]$ представлен в виде объединения двух непустых открыто-замкнутых непересекающихся множеств, $[a, b] = A \cup B$. Без ограничения общности будем считать, что $a \in A$. Тогда в силу открытости A найдется такое $\varepsilon > 0$, что полуинтервал $[a, a + \varepsilon) \subset A$. Пусть $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon\}$, когда ε пробегает такие числа, что $[a, a + \varepsilon) \subset A$. Тогда для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеем включение $[a, a+\varepsilon+\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{2}) \subset A$, т. е. $a+\varepsilon \in A$ для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$. Следовательно, $a+\varepsilon_0 \in A$ в силу замкнутости A. Так как A одновременно открыто, то ε_0 входит в A вместе с некоторой окрестностью. Единственной возможностью для ε_0 может быть только равенство $a + \varepsilon_0 = b$, поскольку в противном случае $\varepsilon_0 < \sup\{\varepsilon\}$. Таким образом, $A = [a, b]$, т. е. $B = \varnothing$, что противоречит предположению. Аналогично можно показать, что открытый интервал (a, b) числовой оси является связным множеством.

Докажем теперь несколько утверждений, помогающих установить связность топологических пространств.

Теорема 1. *Пусть* $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, *каждое* X_α *связно и пересечение* $\bigcap_\alpha X_\alpha$ *непусто. Тогда пространство* X *связно.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, множества A и B открыты и непусты. Тогда $X_\alpha = (X_\alpha \cap A) \cup (X_\alpha \cap B)$, где $X_\alpha \cap A$ и $X_\alpha \cap B$ открыты в X_α. Но поскольку множество X_α связно, то либо $X_\alpha \cap A = \varnothing$, либо $(X_\alpha \cap B) = \varnothing$, т. е. каждое множество X_α целиком лежит либо в A, либо в B. Далее, так как множества A и B непусты, то найдутся точки $a \in A$, $b \in B$. Пусть $a \in X_{\alpha_0}$, тогда $X_{\alpha_0} \subset A$. Пусть $b \in X_{\alpha_1}$, тогда $X_{\alpha_1} \subset B$. Значит, $X_{\alpha_0} \cap X_{\alpha_1} = \varnothing$, что противоречит условию теоремы. □

Теорема 2. *Пусть в топологическом пространстве* X *для любых двух точек* x, $y \in X$ *найдется связное множество* C_{xy}, *содержащее эти точки. Тогда* X *— связное топологическое пространство.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, где A, B — открыты и непусты. Тогда найдутся точки $a \in A$, $b \in B$. Рассмотрим разложение $C_{ab} = (C_{ab} \cap A) \cup (C_{ab} \cap B)$. Точка a принадлежит $C_{ab} \cap A$, точка b принадлежит $C_{ab} \cap B$. Значит, множества $C_{ab} \cap A$ и $C_{ab} \cap B$ непусты, открыты в C_{ab} и не пересекаются. Получили противоречие. □

Теорема 3. *Образ при непрерывном отображении связного пространства связен.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y = f(X)$ — непрерывное отображение. Поэтому если Y — несвязное пространство, то $Y = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, множества A, B — открыты и непусты. Следовательно, $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, множества $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ открыты, непусты и не пересекаются. □

Пример 2. Из теоремы 3 следует, что всякая непрерывная вещественная функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$ вещественной прямой, принимает промежуточные значения. Если бы функция f не принимала какое-либо промежуточное значение y_0, то образ $f([a, b])$ распадался бы в объединение двух открытых непустых множеств: тех значений, которые меньше y_0, и тех значений, которые больше y_0, что противоречит теореме 3.

Частным случаем применения теорем 2 и 3 является понятие линейной связности. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки, x и y, можно соединить отрезком кривой, т. е. существует такое непрерывное

отображение f отрезка $[0, 1]$ числовой оси в пространство X, что $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Теорема 4. *Линейно связное топологическое пространство X является связным.*

В самом деле, образ $f([0, 1])$ по теореме 3 связен и содержит точки x и y. В силу теоремы 2 пространство X является связным пространством.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим пример связного топологического пространства, не являющегося линейно связным.

Пусть X — замыкание графика функции $y = f(x) = \sin(1/x)$ как множества в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ (рис. 1). Метрика в $\mathbb{R}^2$ берется классическая, по длине отрезков, соединяющих пары точек в $\mathbb{R}^2$. Тогда множество X состоит из объединения графика функции $y = \sin(1/x)$ и вертикального отрезка $\Gamma_3 = \{(x, y) \mid x = 0, \quad -1 \leqslant y \leqslant +1\}$. График функции f распадается на два подмножества, каждое из которых гомеоморфно интервалу:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \mid 0 < x < \infty, \quad y = f(x)\},$$
$$\Gamma_2 = \{(x, y) \mid -\infty < x < 0, \quad y = f(x)\}.$$

Поэтому, если $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, A, B — открытые непустые множества, то каждое из подмножеств Γ_1, Γ_2, Γ_3 целиком лежит либо в A, либо B. Пусть $\Gamma_3 \subset B$. Нетрудно проверить, что любая окрестность Γ_3 пересекается как с Γ_1, так и с Γ_2, т. е. $\Gamma_1 \subset B$, $\Gamma_3 \subset B$. Значит, $A = \varnothing$, что противоречит предложению. Таким образом, X — связное пространство.

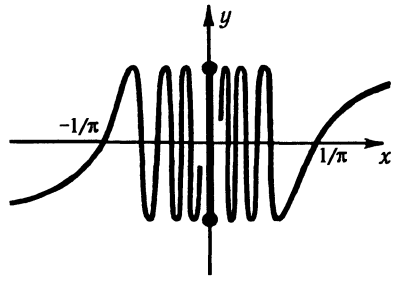


Рис. 1

Покажем теперь, что X не является линейно связным. Рассмотрим две точки $P = (-1/\pi, 0)$ и $Q = (1/\pi, 0)$ в X. Предположим, что существует непрерывное отображение f: $[0, 1] \to X$, $f(0) = P$, $f(1) = Q$. Отображение f задается двумя непрерывными числовыми функциями: $f(t) = (x(t), y(t))$, $y(t) = \sin(1/x(t))$ при $x(t) \neq 0$. Поскольку $x(0) = -1/\pi$, то точная нижняя грань t_0 тех значений t, для которых $x(t) = 0$, строго больше нуля, $t_0 > 0$.

Итак, на интервале $[0, t_0]$ выполнены условия: $x(t) < 0$, $y(t) = \sin(1/x(t))$. Поскольку $x(t)$ — непрерывная функция, и

существует последовательность $t_k \geqslant t_0$, $t_k \to t_0$, где $x(t_k) = 0$, то $x(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = 0$. Но тогда функция $\sin(1/x(t))$ не имеет предела при $t \to t_0 - 0$; следовательно, функция $y(t)$ не является непрерывной. Таким образом, пространство X не является линейно связным пространством.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим два топологических пространства, X и Y. Построим новое топологическое пространство $Z = X \cup Y$, точками которого являются совокупность точек пространств X и Y, причем считаем, что пространства X и Y не имеют общих точек. Объявим открытым множеством пространства Z любое множество вида $W = U \cup V$, где $U \subset X$, $V \subset Y$ — открытые множества в пространствах X и Y.

Пространство Z называется *несвязной суммой пространств* X и Y. Пространство Z действительно является несвязным, поскольку подпространства X и Y являются открытыми непересекающимися подмножествами. Из двух пространств X и Y можно построить еще одно топологическое пространство, называемое *связной суммой* или *букетом* топологических пространств. Для этого фиксируем в пространствах X и Y по точке: $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Рассмотрим объединение пространств X и Y и отождествим в нем точки x_0 и y_0. Полученное пространство обозначим через $X \vee Y$. Открытыми множествами в $X \vee Y$ назовем такие множества U, что пересечения $X \cap U$ и $Y \cap U$ являются открытыми множествами в X и Y соответственно. Если пространства X и Y связны, то их связная сумма $X \vee Y$ в силу теоремы 2 является связным топологическим пространством. Если X и Y — линейно связные пространства, то их связная сумма $X \vee Y$ является линейно связным пространством.

2. Аксиомы отделимости. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым пространством*, если для любых точек x, $y \in X$, $x \neq y$, найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(y)$, что $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. Не всякое топологическое пространство является хаусдорфовым. В примере 2 § 1 мы рассмотрели пространство X, состоящее из двух точек x и y, открытыми множествами которого объявлены $\varnothing, X, \{x\}$. Тогда точки x, y различны и не существует непересекающихся окрестностей этих точек. В хаусдорфовом пространстве каждая точка $x \in X$ является замкнутым множеством. В самом деле, если $y \neq x$, то найдется окрестность $U(y)$ точки y, не содержащая x. Тогда множество $X \setminus \{x\} = \bigcup\limits_{y \neq x} U(y)$ является открытым, а его дополнение, состоящее из одной точки x, замкнуто.

Дискретное топологическое пространство X является хаусдорфовым пространством. В самом деле, каждая точка $x \in X$ является открытым множеством, значит, если $x \neq y$, то окрестности $\{x\}$ и $\{y\}$ не пересекаются.

Теорема 5. *Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства. Тогда декартово произведение, несвязная и связная суммы являются хаусдорфовыми топологическими пространствами.*

Доказательство. Рассмотрим две точки: $(x_1, y_1) \in X \times Y$, $(x_2, y_2) \in X \times Y$. Если они различны, то либо $x_1 \neq x_2$, либо $y_1 \neq y_2$. В первом случае в силу хаусдорфовости пространства X имеются две непересекающиеся окрестности $U(x_1)$ и $U(x_2)$. Тогда окрестности $U(x_1) \times Y$ и $U(x_2) \times Y$ точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) тоже не пересекаются. Во втором случае в силу хаусдорфовости пространства Y существуют непересекающиеся окрестности $V(y_1)$ и $V(y_2)$. Поэтому не пересекаются окрестности $X \times V(y_1)$ и $X \times V(y_2)$ точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Рассмотрим пару различных точек $x, y \in X \cup Y$. Если обе точки лежат в одной компоненте, скажем, X, то в силу хаусдорфовости пространства X имеются непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(y)$, которые одновременно являются открытыми множествами в сумме $X \cup Y$. Если точки лежат в различных компонентах, скажем, $x \in X$, $y \in Y$, то сами компоненты X, Y служат для них непересекающимися окрестностями.

Рассмотрим теперь букет $X \vee Y$ и в нем пару различных точек x, y. Пусть сначала ни одна из этих точек не совпадает с отмеченной $x_0 = y_0$. Если одна из точек лежит в X, а другая в Y, то множества $X \setminus \{x_0\}$ и $Y \setminus \{x_0\}$ будут их непересекающимися окрестностями. Если же обе точки лежат, скажем, в X, то силу хаусдорфовости пространства X они обладают непересекающимися окрестностями $U(x)$ и $U(y)$. Тогда множества $U(x) \setminus \{x_0\}$ и $U(y) \setminus \{x_0\}$ будут непересекающимися окрестностями x и y в $X \vee Y$. Пусть теперь одна из точек, скажем, x совпадает с x_0 и пусть для определенности $y \in Y$. Тогда хаусдорфовость Y влечет существование их непересекающихся окрестностей $U(x)$ и $U(y)$ в Y. Множества $U(x) \cup X$ и $U(y)$ будут непересекающимися окрестностями этих точек в $X \vee Y$. Теорема полностью доказана.

Определение 1. Топологическое пространство X называется *нормальным*, если оно хаусдорфово и для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 существуют непересекающиеся окрестности $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$.

Нормальные пространства — это наиболее часто встречающийся класс топологических пространств. Этот класс достаточно широк и содержит все метрические пространства.

Теорема 6. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ, F_1 и F_2 — два непересекающихся замкнутых множества. Пусть $x \in F_1$, $\varepsilon(x) = (1/3)\rho(x, F_2)$. Положим $U_1 = \bigcup\limits_{x \in F_1} O_{\varepsilon(x)}(x)$. Аналогично определим открытое множество $U_2 = \bigcup\limits_{y \in F_2} O_{\varepsilon'(y)}(y)$, где $\varepsilon'(y) = (1/3)\rho(y, F_1)$. Мы получили окрестности множеств F_1 и F_2. Покажем, что множества U_1 и U_2 не пересекаются. Допустим противное, т. е. что существует точка $z \in U_1 \cap U_2$. Тогда для некоторых точек $x \in F_1$ и $y \in F_2$, имеем $z \in O_{\varepsilon(x)}(x)$, $z \in O_{\varepsilon'(y)}(y)$, т. е. $\rho(x, z) < (1/3)\rho(x, F_2)$, $\rho(y, z) < (1/3)\rho(y, F_1)$. В частности,

$$\rho(x, z) < (1/3)\rho(x, y), \qquad \rho(y, z) < (1/3)\rho(y, x).$$

Складывая эти два неравенства, получаем

$$\rho(x, z) + \rho(y, z) < (2/3)\rho(x, y),$$

что противоречит неравенству треугольника. □

Система открытых множеств $\{U_\alpha\}$ топологического пространства X называется *открытым покрытием*, если $X = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. Покрытия — удобное понятие при изучении топологических пространств. Например, если в каждом множестве U_α задана непрерывная функция f_α, а на каждом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ функции f_α и f_β совпадают, то существует одна непрерывная функция f на пространстве X, совпадающая с f_α в каждом открытом множестве U_α.

Пусть задано два открытых покрытия $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$ топологического пространства X. Скажем, что покрытие $\{V_\beta\}$ *измельчает покрытие* $\{U_\alpha\}$ или *является более мелким, чем покрытие* $\{U_\alpha\}$, если каждое множество V_β лежит в некотором множестве U_α, $\alpha = \alpha(\beta)$.

Теорема 7. *Пусть X — нормальное топологическое пространство, $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ — конечное открытое покрытие. Тогда существует более мелкое покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, причем $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$.*

Доказательство. Заметим, что в теореме 7 утверждается существование не просто более мелкого покрытия, а такого, у которого элементы нумерованы тем же индексом α и включение

множеств происходит с одинаковым значением индекса α. Для доказательства теоремы рассмотрим замкнутые непересекающиеся множества $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^{N} U_\alpha$ и $X \setminus U_1$. В силу нормальности пространства X существуют окрестности, разделяющие эти два множества. В качестве окрестности V_1 нужно взять ту из них, что содержит $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^{N} U_\alpha$. Тогда $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^{N} U_\alpha \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U_1$ и система множеств $\{V_1, U_2, \ldots, U_N\}$ покрывает пространство X. Поэтому мы можем найти множество $V_2 \subset \overline{V}_2$, причем система $\{V_1, V_2, U_3, \ldots, U_N\}$ тоже покрывает пространство X. Заменяя последовательно множество U_k на $V_k \subset \overline{V}_k \subset U_k$, мы придем к искомому покрытию $\{V_1, \ldots, V_N\}$ за N шагов. □

Задачи к § 2

1. Доказать, что если из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, выбросить конечное (или счетное) число точек, то оставшееся пространство будет связным.

2. Доказать, что если из $\mathbb{R}^n$ выбросить конечное число подпространств размерности меньше, чем $n-1$, то оставшееся пространство будет связно.

3. Подсчитать, на какое наибольшее число компонент связности разобьется $\mathbb{R}^2$ конечным числом прямых. Каково наименьшее число компонент связности?

4. Пусть $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства. Доказать, что множество неподвижных точек (т. е. точек x, для которых $f(x) = x$) замкнуто.

5. Доказать, что образ нормального пространства при непрерывном отображении в хаусдорфово пространство нормален.

6. Доказать, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, y) \mid x = y\} \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

7. Доказать, что отображение $f\colon X \to Y$ в хаусдорфово пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда график $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ замкнут в $X \times Y$.

§ 3. Компактные пространства

Свойство компактности, которое мы рассмотрим в настоящем параграфе, является одним из важнейших свойств топологических пространств. В частности, это свойство играет фундаментальную роль при исследовании вещественных чисел и непрерывных функций.

1. Компактные пространства.

***Определение* 1.** Хаусдорфово топологическое пространство X называется *компактным*, если из его всякого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выделить конечную часть $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N}$, покрывающую X.

Можно требовать всего лишь, чтобы существовало конечное более мелкое покрытие.

Замечание. Первоначально такие пространства назывались *бикомпактными*, а компактными пространствами назывались метрические бикомпактные пространства. Однако в последнее время в литературе предпочитают бикомпактные пространства называть просто компактными пространствами. Мы будем следовать более поздней терминологии.

Пример 1. Докажем, что любой конечный отрезок $[a, b]$ вещественной оси $\mathbb{R}$ является компактным пространством. В самом деле, если $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие отрезка $[a, b]$, то без ограничения общности можно считать, что каждый элемент покрытия U_α является интервалом (c_α, d_α) (за исключением двух полуинтервалов, $[a, a')$ и $(b', b]$). Рассмотрим множество P всех таких чисел $x \in [a, b]$, что отрезок $[a, x]$ покрывается конечным числом элементов U_α. Тогда, если $x \in P$, $y < x$, то y тоже принадлежит P. Поскольку точка a принадлежит элементу покрытия $[a, a')$, $a' > a$, то множество P состоит более чем из одной точки a.

Пусть x_0 — точная верхняя грань множества P, $x_0 > a$. Если $x_0 < b$, то точка x_0 лежит в некотором интервале $U_{\alpha_0} = (c_{\alpha_0}, d_{\alpha_0})$, т. е. $c_{\alpha_0} < x_0 < d_{\alpha_0}$. Пусть y, z — такие числа, что $c_{\alpha_0} < y < x_0 < z < d_{\alpha_0}$. Тогда $y \in P$ и, значит, конечное число множеств U_β покрывает отрезок $[a, y]$, поэтому отрезок $[a, z]$ тоже покрывается конечным числом множеств U_β. Следовательно, x_0 не является верхней гранью множества P. Таким образом, $x_0 = b$. Тогда $b' < x_0 = b$. Если $b' < y < x_0$, то $y \in P$, и отрезок $[a, y]$ опять-таки покрывается конечным числом множеств U_β. Вместе с ним покрывается конечным числом множеств U_β и весь отрезок $[a, b]$.

2. Свойства компактных пространств.

Теорема 1. *Компактное топологическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство, тогда по определению компактности пространство X хаусдорфово. Пусть F — замкнутое множество в X. Покажем, что если точка x не принадлежит множеству F, то найдутся непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(F)$.

Лемма. *Замкнутое подмножество F в компактном пространстве X само является компактным пространством.*

В самом деле, если $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие множества F, то каждое множество V_α имеет вид $U_\alpha \cap F$, где U_α — открытое в

X множество. Тогда семейство открытых множеств $\{U_\alpha, X \setminus F\}$ покрывает пространство X. Следовательно, существует конечное семейство $\{U_{\alpha_k}, X \setminus F\}$, покрывающее X. Тогда $\{V_{\alpha_k}\}$ покрывает множество F. □

Вернемся к доказательству теоремы 1. Поскольку $x \notin F$, то для любой точки $y \in F$ в силу хаусдорфовости пространства X существуют непересекающиеся окрестности $U_y \ni x$ и $V_y \ni y$. Семейство $\{V_y\}$, очевидно, покрывает множество F. В силу леммы 1 найдется конечное число множеств $\{V_{y_k}\}_{k=1}^N$, покрывающих множество F. Поэтому окрестность $\bigcap\limits_{k=1}^{N} U_{y_k}$ точки x не пересекается с объединением $\bigcup\limits_{k=1}^{N} V_{y_k} \supset F$.

Рассмотрим теперь два непересекающихся замкнутых множества, F_1 и F_2, в компактном пространстве X. Тогда для любой точки $x \in F_1$ найдутся непересекающиеся окрестности U_x точки x и V_x множества F_2. Семейство $\{U_x\}$ покрывает компактное множество F_1, поэтому существует конечное покрытие $\{U_{x_k}\}_{k=1}^N$. Тогда объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{N} U_{x_k}$ содержит F_1 и не пересекается с пересечением $\bigcap\limits_{k=1}^{N} V_{x_k}$, содержащим F_2. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть $F \subset X$ — компактное подпространство в хаусдорфовом топологическом пространстве X. Тогда F — замкнутое множество в пространстве X.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка пространства X, не принадлежащая F. В силу хаусдорфовости пространства X для точек $y \in F$ найдутся непересекающиеся окрестности $U_y \ni y$ и $V_y \ni x$. Тогда семейство $\{U_y\}$ покрывает множество F, а в силу его компактности найдется конечное семейство $\{U_{y_k}\}_{k=1}^N$, покрывающее F. Тогда объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{N} U_{y_k}$ не пересекается с пересечением $\bigcap\limits_{k=1}^{N} V_{y_k}$ и содержит множество F. Следовательно, точка x имеет окрестность, не пересекающуюся с множеством F, что и означает, что множество F замкнуто. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение компактного пространства X в пространство Y. Тогда образ $f(X)$ является компактным пространством.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие множества $f(X)$. Тогда семейство $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ является открытым покрытием компактного пространства X. Следовательно, некоторое

конечное семейство $\{f^{-1}(U_{\alpha_k})\}_{k=1}^{N}$ покрывает пространство X. Тогда семейство $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N}$ покрывает образ $f(X)$. □

Из теорем 2 и 3 вытекает следующее общее свойство непрерывных функций на компактных пространствах, известное из курса математического анализа.

Теорема 4. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция на компактном пространстве X. Тогда функция f ограничена и принимает максимальное и минимальное значения.*

Доказательство. По теореме 3 образ $f(X)$ является компактным подпространством в $\mathbb{R}^1$, а по теореме 2 — замкнутым множеством. Если бы образ $f(X)$ не был ограниченным, то система интервалов $U_n = (-n, n)$ покрывала бы $f(X)$ и из нее нельзя было бы выделить конечного подпокрытия. Положим $A = \sup\limits_{x \in X}\{f(x)\}$, $B = \inf\limits_{x \in X}\{f(x)\}$. Тогда A и B — точки прикосновения множества $f(X)$. Так как множество $f(X)$ замкнуто, то $A, B \in f(X)$. □

3. Метрические компактные пространства. Для метрических пространств свойство компактности можно сформулировать в привычных для математического анализа терминах.

Теорема 5. *Пусть X — метрическое пространство. Пространство X является компактным тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных свойств:*

а) *всякая последовательность $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность;*

б) *всякая последовательность вложенных непустых замкнутых подмножеств $\{F_n\}$, $F_n \supset F_{n+1}$, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть X — компактное метрическое пространство, $\{F_n\}$ — последовательность вложенных непустых замкнутых множеств, $F_n \supset F_{n+1}$. Тогда если $\cap F_n = \varnothing$, то открытые множества $G_n = X \setminus F_n$ покрывают пространство X, причем $G_n \subset G_{n+1}$. В силу компактности пространства X конечная система $\{G_{n_1}, \ldots, G_{n_s}\}$ покрывает пространство X. Без ограничения общности будем считать, что $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_s$. Тогда $G_{n_k} \subset G_{n_s}$ при $k < s$, т. е. $X = G_{n_s}$. Следовательно, $F_{n_s} = \varnothing$, что противоречит условию.

Далее, покажем, что из свойства б) следует свойство а). Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность точек пространства X. Если последовательность $\{x_n\}$ не имеет предельных точек, то всякое подмножество $F \subset \{x_n\}$ является замкнутым. Поэтому мы можем построить последовательность вложенных замкнутых подмножеств $\{F_n\}$ с пустым пересечением, полагая $F_n = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$.

Следовательно, свойство б) влечет существование предельной точки $x_0 \in X$ у последовательности $\{x_n\}$.

Выберем теперь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке x_0. Рассмотрим окрестность $O_1(x_0)$. Найдется такой номер n_1, что $x_{n_1} \in O_1(x_0)$. Пусть уже построены члены $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_s}\}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_s$, причем $\rho(x_0, x_{n_k}) < 1/k$. Пусть

$$\varepsilon = \min\{\tfrac{1}{s+1}, \rho(x_0, x_1), \ldots, \rho(x_0, x_{n_s})\}.$$

Тогда в окрестности $O_\varepsilon(x_0)$ найдется точка $x_{n_{s+1}} \in O_\varepsilon(x_0)$. Ясно, что $\rho(x_0, x_{n_{s+1}}) < \varepsilon < \frac{1}{s+1}$, и поэтому $n_{s+1} > n_s$. Итак, по индукции построена последовательность $\{x_{n_s}\}$, причем $\lim\limits_{s\to\infty} \rho(x_0, x_{n_s}) = 0$. Это и означает, что $\lim\limits_{s\to\infty} x_{n_s} = x_0$.

Наконец, покажем, что из свойства а) следует компактность пространства X. Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие метрического пространства X. Допустим, что существует такое число ε, что покрытие шарами $\{O_\varepsilon(x) \mid x \in X\}$ вписано в покрытие $\{U_\alpha\}$. Тогда число ε называется *числом Лебега* покрытия $\{U_\alpha\}$.

Лемма. *Если выполнено условие* а) *теоремы* 5, *то всякое открытое покрытие имеет число Лебега.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in X$ выберем число $\varepsilon(x)$, равное точной верхней грани таких чисел $\delta > 0$, что шар $O_\delta(x)$ лежит в некотором элементе покрытия U_α. Если функция $\varepsilon(x)$ имеет строго положительную нижнюю грань $\varepsilon_0 = \inf\limits_{x\in X} \varepsilon(x)$, то число $\varepsilon_0/2$ является числом Лебега покрытия $\{U_\alpha\}$.

Если $\inf\limits_{x\in X} \varepsilon(x) = 0$, тогда найдется такая последовательность $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(x_n) = 0$. В силу свойства а) теоремы 5 мы можем выбрать такую подпоследовательность x_{n_k}, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Пусть k_0 — такой номер, что при $k > k_0$ выполнено неравенство $\rho(x_0, x_{n_k}) < \frac{1}{4}\varepsilon(x_0)$. Тогда $O_{\varepsilon(x_0)/4}(x_{n_k}) \subset O_{\varepsilon(x_0)/2}(x_0) \subset U_\alpha$. Отсюда следует, что $\varepsilon(x_{n_k}) > \frac{1}{4}\varepsilon(x_0)$ и поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon(x_{n_k}) \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon(x_0) > 0$. Это значит, что $\inf\limits_{x\in X} \varepsilon(x)$ не может равняться нулю. Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь произвольное покрытие $\{U_\alpha\}$. В силу леммы 1 в покрытие $\{U_\alpha\}$ вписано покрытие шарами $\{O_\varepsilon(x) \mid x \in X\}$. Предположим, что покрытие $\{U_\alpha\}$ не имеет конечного подпокрытия. Тогда покрытие $\{O_\varepsilon(x) \mid x \in X\}$ также не имеет конечного подпокрытия. Зафиксируем произвольную точку $x_1 \in X$. Поскольку шар $O_\varepsilon(x_1)$ не покрывает пространство X, то найдется точка $x_2 \notin O_\varepsilon(x_1)$. Пусть

построены точки $x_1, \ldots, x_r$ такие, что $x_k \notin O_\varepsilon(x_s)$ при $n \geqslant k > s$. Система шаров $\{O_\varepsilon(x_1), \ldots, O_\varepsilon(x_n)\}$ не покрывает пространство X. Поэтому найдется точка $x_{n+1} \notin O_s(x_1) \cup \ldots \cup O_\varepsilon(x_n)$. Таким образом, по индукции построена последовательность точек $\{x_n\}$, причем $\rho(x_k, x_n) \geqslant \varepsilon > 0$. С другой стороны, в силу свойства а) существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке x_0, т. е. $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x_{n_k}, x_0) = 0$. В частности, при подходящем выборе номера k_0 из $k > k_0$ следует, что $\rho(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Тогда

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leqslant \rho(x_{n_k}, x_0) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_0) < \varepsilon.$$

Это противоречие доказывает теорему 5.

В качестве следствия из теоремы 5 приведем следующее фундаментальное свойство вещественных чисел: *последовательность вложенных отрезков вещественной прямой имеет общую точку.*

4. Операции над компактными пространствами. Если хаусдорфово пространство X является объединением конечного числа своих компактных подмножеств, то X является компактным пространством. В самом деле, если $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$, где X_k — компактные пространства, $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства X, то каждое подмножество X_k покрывается конечным числом элементов $\{U_{\alpha_{k1}}, \ldots, U_{\alpha_{kn_k}}\}$. Тогда вся конечная совокупность $\{U_{\alpha_{ks}},\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant s \leqslant n_k\}$ покрывает все пространство X. Более сложно доказывается следующая важная теорема о произведении компактных пространств.

Теорема 6. *Декартово произведение $X \times Y$ компактных пространств X и Y является компактным пространством.*

Доказательство. В силу теоремы 5 из § 2 декартово произведение $X \times Y$ является хаусдорфовым пространством. Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное покрытие пространства $X \times Y$. Без ограничения общности можно считать, что U_α имеют вид $U_\alpha = V_\alpha \times W_\alpha$. Зафиксируем точку $x \in X$ и рассмотрим подпространство $x \times Y \subset X \times Y$. Подпространство $x \times Y$ гомеоморфно пространству Y и поэтому является компактным пространством. Поэтому существует конечное число элементов $\{U_{\alpha(k,x)}\}_{k=1}^{n(x)}$, покрывающих пространство $x \times Y$. Положим $V'_x = \bigcap\limits_{k=1}^{n(x)} V_{\alpha(k,x)}$. Тогда открытые множества $\{V'_x \times W_{\alpha(k,x)}\}$ вписаны в покрытие $\{U_\alpha\}$ и

покрывают пространство $x \times Y$. Множества $\{W_{\alpha(k,x)}\}_{k=1}^{n(x)}$ покрывают пространство Y, т. е. $\bigcup_{k=1}^{n(x)} W_{\alpha(k,x)} = Y$. Множества $\{V_x'\}$ покрывают пространство X. В силу компактности пространства X конечное семейство $\{V_{x_s}'\}_{s=1}^{m}$ покрывает пространство X. Тогда конечное семейство $\{V_{x_s}' \times W_{\alpha(k,x_s)} \mid 1 \leqslant s \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n(x_s)\}$ покрывает пространство $X \times Y$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Если бы пространства X и Y были метрическими, то доказательство теоремы 6 сильно упростилось бы. В самом деле, согласно теореме 5 рассмотрим произвольную последовательность $\{z_n\}$, $z_n = (x_n, y_n)$. Поскольку X — компактное пространство, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Тогда в силу компактности пространства Y из последовательности $\{y_{n_k}\}$ выделяется сходящаяся подпоследовательность $\{y_{n_{k_s}}\}$. Таким образом, подпоследовательность $\{z_{n_{k_s}}\}$ также сходится.

Задачи к § 3

1. Доказать, что объединение конечного числа компактных пространств компактно.

2. Показать, что если X — некомпактное метрическое пространство, то существует непрерывная и не ограниченная на этом пространстве функция.

3. Доказать, что метрическое компактное пространство имеет счетное плотное подмножество.

4. Доказать, что если в компактном метрическом пространстве два замкнутых множества A и B не пересекаются, то $\rho(A, B) > 0$.

§ 4. Функциональная отделимость. Разбиение единицы

В этом параграфе мы приведем теоремы, позволяющие при довольно слабых предположениях проводить анализ непрерывных функций так же, как и в случае функций одной вещественной переменной. Как уже отмечалось ранее, непрерывные функции на топологических пространствах во многих отношениях ведут себя так же, как и функции одной вещественной переменной. Сумма $f + g$, произведение $f g$ двух непрерывных функций, а также отношение f/g при $g \neq 0$ являются непрерывными функциями. В классе непрерывных функций на топологическом пространстве X можно переходить к пределу. Последовательность функций f_n *равномерно сходится* к функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при $n > N$ выполнено неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in X$.

Теорема 1. *Равномерный предел последовательности непрерывных функций на топологическом пространстве X является непрерывной функцией.*

Доказательство. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Покажем, что функция f непрерывна. Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и точку $x_0 \in X$. Тогда найдется такой номер n, что для любой точки $x \in X$ выполнено неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. Поскольку функция f_n непрерывна, то найдется такая окрестность $O(x_0)$, что при $x \in O(x_0)$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$. Тогда при $x \in O(x_0)$ имеем

$$|f(x) - f(x_0)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \\ + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \qquad \square$$

1. Функциональная отделимость. Если F_1, F_2 — два непересекающихся замкнутых множества в топологическом пространстве X, то для построения непересекающихся окрестностей множеств F_1 и F_2 достаточно построить такую непрерывную функцию f на пространстве X, для которой $f(x) \geqslant a$ при $x \in F_1$, $f(x) \leqslant b$ при $x \in F_2$ и $a > b$. Тогда в качестве окрестностей множеств F_1 и F_2 можно взять прообразы интервалов $f^{-1}(c, \infty)$ и $f^{-1}(-\infty, c)$, где $b < c < a$. В некотором смысле справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2 (лемма Урысона). *Пусть X — нормальное топологическое пространство, F_0, F_1 — два замкнутых непересекающихся множества. Тогда существует такая непрерывная функция $f\colon X \to [0, 1]$, что $f|_{F_0} \equiv 0$, $f|_{F_1} \equiv 1$.*

Доказательство. Построим такую систему открытых множеств Γ_r, занумерованных всеми двоично-рациональными числами $0 \leqslant r \leqslant 1$, что выполнены следующие условия: 1) $F_0 \subset \Gamma_0$; 2) $\overline{\Gamma}_1 \subset X \setminus F_1$, 3) $\overline{\Gamma}_r \subset \Gamma_{r'}$ при $r < r'$.

Тогда систему открытых множеств $\{\Gamma_r\}$ можно расширить, добавив к ним множества $\Gamma_t = \bigcup\limits_{r<t} \Gamma_r$, где t — уже произвольное вещественное число, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Система открытых множеств $\{\Gamma_t\}$ удовлетворяет тем же условиям: $\overline{\Gamma}_t \subset \Gamma_{t'}$ при $t < t'$. В самом деле, взяв такие рациональные числа r, r', что $t < r < r' < t'$, получаем $\Gamma_t \subset \Gamma_r$, $\Gamma_{r'} \subset \Gamma_{t'}$, следовательно, $\overline{\Gamma}_t \subset \overline{\Gamma}_r \subset \Gamma_{r'} \subset \Gamma_t$.

Построим теперь непрерывную функцию $f\colon X \to [0, 1]$, полагая $f(x) = 0$ при $x \in \Gamma_0$ и $f(x) = \sup\{t \mid x \notin \Gamma_t\}$ при $x \notin \Gamma_0$. Покажем, что f — непрерывная функция. Фиксируем точку x_0 и $\varepsilon > 0$. Положим $t_0 = f(x_0)$. В силу определения функции f

имеем $x_0 \notin \Gamma_{(t_0-\varepsilon/2)}$, $x_0 \in \Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}$. Рассмотрим окрестность U точки x_0: $U = \Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)} \setminus \overline{\Gamma}_{(t_0-\varepsilon/2)}$. Тогда если $y \in U$, то $y \in \Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}$, $y \notin \overline{\Gamma}_{(t_0-\varepsilon/2)}$. По определению функции f выполнены неравенства $t_0 - \varepsilon/2 \leqslant f(y) \leqslant t_0 + \varepsilon/2$, т. е. $|f(x_0) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, функция f непрерывна. Кроме того, если $x \in F_0$, то $f(x) = 0$, а если $x \in F_1$, то $f(x) = 1$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 2, нам осталось построить систему открытых множеств Γ_r, удовлетворяющих условиям 1), 2) и 3). В силу нормальности пространства X для любого замкнутого множества F и его окрестности U, $F \subset U$, найдется другая окрестность V такая, что $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Для краткости будем писать $V \Subset U$, если $V \subset \overline{V} \subset U$. Итак, $F_0 = \overline{F}_0 \subset X \setminus F_1$. Поэтому $F_0 \Subset X \setminus F_1$. Следовательно, найдется открытое множество Γ_0 такое, что $F_0 \Subset \Gamma_0 \Subset X \setminus F_1$. Аналогично, найдется такое открытое множество Γ_1, что $F_0 \Subset \Gamma_0 \Subset \Gamma_1 \Subset X \setminus F_1$. Предположим, что для всех двоично-рациональных чисел вида $r = p/2^n$, $0 \leqslant p \leqslant 2^n$, уже построены открытые множества Γ_r, причем $\Gamma_{(p/2^n)} \Subset \Gamma_{((p+1)/2^n)}$. Определим тогда множество $\Gamma_{(2p+1)/2^{n+1}}$ так, что $\Gamma_{p/2^n} \Subset \Gamma_{(2p+1)/2^{n+1}} \Subset \Gamma_{(p+1)/2^n}$. По индукции все семейство множеств $\{\Gamma_r\}$ построено. □

Из теоремы 2 следует важная теорема.

Теорема 3. *Пусть X — нормальное топологическое пространство, $F \subset X$ — замкнутое множество, $f\colon F \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция на множестве F. Тогда функция f продолжается до непрерывной функции $g\colon X \to \mathbb{R}^1$ на всем пространстве X. Если функция f ограничена, $|f(x)| \leqslant A$, то и функцию g можно выбрать ограниченной той же константой, $|g(x)| \leqslant A$.*

Доказательство. Предположим сначала, что функция f ограничена, $|f(x)| \leqslant A$. Положим $\varphi_0(x) = f(x)$ и рассмотрим два замкнутых подмножества: $A_0 = \{x \mid \varphi_0(x) \leqslant -A/3\}$, $B_0 = \{x \mid \varphi_0(x) \geqslant A/3\}$. Поскольку множества A_0 и B_0 не пересекаются, то согласно теореме 2 существует непрерывная функция $f_0\colon X \to [-A/3, A/3]$, равная $-A/3$ на множестве A_0 и $A/3$ на множестве B_0. Другими словами, $|f_0(x)| \leqslant A/3$, $x \in X$, $|\varphi_0(x) - f_0(x)| \leqslant 2A/3$.

Положим $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - f_0(x)$. Тогда функция φ_1 ограничена на множестве F константой $2A/3$. Поэтому, повторяя весь процесс, можно построить два непересекающихся замкнутых множества: $A_1 = \{x \mid \varphi_1(x) \leqslant -2A/9\}$, $B_1 = \{x \mid \varphi_1(x) \geqslant 2A/9\}$, и непрерывную функцию $f_1\colon X \to [-2A/9, 2A/9]$, равную $-2A/9$ на множестве A_1 и $2A/9$ на множестве B_1. Другими словами, $|f_1(x)| \leqslant 2/3 \cdot A/3$, $|\varphi_1(x) - f_1(x)| \leqslant 4A/9$. Повторяя указанный процесс бесконечное

число раз, мы построим две последовательности функций f_n: $X \to \mathbb{R}^1$, φ_n: $F \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - f_n(x),$$

$$|f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{A}{3}, \tag{1}$$

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n A. \tag{2}$$

Далее,

$$f(x) = \varphi_0(x) = f_0(x) + \varphi_1(x) = \ldots$$
$$\ldots = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \varphi_{n+1}(x) \text{ при } x \in F.$$

В силу неравенства (1) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на всем пространстве X. По теореме 1 функция $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ является непрерывной и по построению $g(x) = f(x)$ при $x \in F$. В силу неравенства (1) имеем

$$|g(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{A}{3} = A.$$

Тем самым теорема доказана для случая ограниченной функции f.

В общем случае рассмотрим гомеоморфизм h: $\mathbb{R}^1 \to (-1, 1)$. Тогда композиция hf: $F \to (-1, 1)$ является непрерывной ограниченной функцией. Применяя теорему 3 для ограниченной функции hf, построим непрерывную функцию g: $X \to [-1, 1]$, продолжающую функцию hf. Значения ± 1 функция g принимает на некотором замкнутом множестве F_1, не пересекающемся со множеством F. По теореме 2 существует непрерывная функция ψ: $X \to [0, 1]$, равная 1 на множестве F и 0 на множестве F_1. Тогда функция $g_1(x) = \psi(x)g(x)$, $x \in X$, совпадает с функцией hf на множестве F и не принимает значений ± 1. Таким образом, функция g_1 отображает пространство X в интервал $(-1, 1)$. Наконец, положим $g(x) = h^{-1}g_1(x)$. Тогда g: $X \to \mathbb{R}^1$ непрерывна и при $x \in F$ выполнены равенства $g(x) = h^{-1}g_1(x) = h^{-1}hf(x) = f(x)$. Теорема полностью доказана.

2. Разбиение единицы. *Носителем* непрерывной функции f на топологическом пространстве X называется замыкание множества тех точек $x \in X$, где $f(x) \neq 0$. Носитель функции f обозначается через $\operatorname{supp} f$. Таким образом, вне носителя функция f тождественно равна нулю. Одним из полезных приемов в топологии является

разложение функций в сумму так, чтобы каждое из слагаемых имело достаточно малый носитель.

Теорема 4. *Пусть X — нормальное пространство, $\{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие функции $\varphi_\alpha\colon X \to \mathbb{R}^1$, $0 \leqslant \varphi_\alpha(x) \leqslant 1$, что: а)* $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$, б) $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$.

Система функций $\{\varphi_\alpha\}$, указанных в теореме 4, называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha\}$. При этом можно не предполагать конечность покрытия, а вместо этого требовать локальную конечность, чтобы каждая точка $x \in X$ имела окрестность $O(x)$, пересекающуюся лишь с конечным числом носителей $\operatorname{supp} \varphi_\alpha$. Вообще система подмножеств $\{A_\alpha\}$ топологического пространства X называется *локально-конечной системой*, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $O(x)$, которая имеет непустое пересечение лишь с конечным числом множеств A_α.

Пример 1. Покрытие вещественной прямой $\mathbb{R}^1$ интервалами $(-n, n)$ не является локально конечным. Покрытие же интервалами $(n, n+2)$ является локально конечным.

Таким образом, семейство носителей $\{\operatorname{supp} \varphi_\alpha\}$ непрерывных функций φ_α, является локально конечным, то в каждой точке $x \in X$ лишь конечное число функций φ_α отлично от нуля. Поэтому сумма $\varphi(x) = \sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(x)$ корректно определена в каждой точке $x \in X$. Получающаяся функция непрерывна. В самом деле, условие непрерывности функции φ достаточно проверить в некоторой окрестности каждой точки. Поскольку система $\{\operatorname{supp} \varphi_\alpha\}$ локально конечна, то найдется такая окрестность $O(x)$, в которой только конечное число функций $\varphi_{\alpha_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_N}$ отлично от нуля. Следовательно, в окрестности $O(x)$ бесконечная сумма, входящая в определение функции φ, по существу является конечной, т. е. $\varphi(y) = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_{\alpha_k}(y)$ для $y \in O(x)$. Поэтому функция φ непрерывна в каждой точке $x \in X$.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим конечное покрытие $\{U_\alpha\}$. Согласно теореме 7 из § 2 найдется более мелкое покрытие $\{V_\alpha\}$, причем $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$. По теореме 2 существует непрерывная функция ψ_α на пространстве X, удовлетворяющая условиям

$$\psi_\alpha|_{\overline{V}_\alpha} \equiv 1, \qquad \psi_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} \equiv 0, \qquad 0 \leqslant \psi_\alpha \leqslant 1.$$

Это значит, что $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subset U_\alpha$ и $\psi_\alpha(x) = 1$ при $x \in V_\alpha$.

Положим $\psi(x)=\sum\limits_{\alpha}\psi_{\alpha}(x)$. Функция ψ непрерывна. Покажем, что $\psi(x)\geqslant 1$ в каждой точке $x\in X$. В самом деле, поскольку система $\{V_{\alpha}\}$ покрывает пространство X, то найдется такой номер α_0, что $x\in V_{\alpha_0}$, т. е. $\psi_{\alpha_0}(x)>0$. Тогда $\psi(x)=\sum\limits_{\alpha}\psi_{\alpha}(x)\geqslant\psi_{\alpha_0}(x)>0$.

Наконец, положим $\varphi_{\alpha}(x)=\psi_{\alpha}(x)/\psi(x)$. Тогда

$$\operatorname{supp}\varphi_{\alpha}=\operatorname{supp}\psi_{\alpha}\subset U_{\alpha},\quad 0\leqslant\varphi_{\alpha}(x)\leqslant 1,$$

$$\sum_{\alpha}\varphi_{\alpha}(x)=\sum\psi_{\alpha}(x)/\psi(x)=\Big(\sum\psi_{\alpha}(x)\Big)/\psi(x)=\psi(x)/\psi(x)\equiv 1. \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 4 может быть обобщена на случай локально конечных открытых покрытий. Для этого достаточно обобщить теорему 7 § 2 на случай локально конечных покрытий. Если пространство X компактно, то всегда можно ограничиться конечными покрытиями. В случае некомпактных пространств бывают существенно неконечные покрытия, для которых тем не менее необходимо строить разбиение единицы. Поэтому если в данное покрытие $\{U_{\alpha}\}$ удается вписать локально конечное покрытие, то можно построить и разбиение единицы.

Без доказательства приведем следующее утверждение: *пусть $X\subset\mathbb{R}^n$ — произвольное подпространство евклидова пространства, $\{U_{\alpha}\}$ — его открытое (не обязательно конечное) покрытие. Тогда существует разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_{\alpha}\}$.*

Задачи к § 4

1. Доказать, что в теореме 2 можно требовать, чтобы функция f была гладкой, если X — евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

2. Доказать, что в теореме 4 при $X=\mathbb{R}^n$ можно требовать, чтобы функции φ_{α} были гладкими.

3. Для окружности построить разбиение единицы системой а) непрерывных, б) гладких функций.

4. Доказать, что для окружности не существует разбиения единицы системой аналитических функций.

5. Обобщить задачи 3, 4 на случай сферы $S^n=\{x_1^2+\ldots x_{n+1}^2=1\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Глава 3

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ)

В гл. 1 на различных примерах было показано, что основным инструментом при изучении геометрических объектов является система координат, характеризующая расположение точек в пространстве. С помощью системы координат мы можем использовать для решения многих задач методы дифференциального и интегрального исчисления. Поэтому в геометрии выделяют в отдельный раздел изучение таких пространств, которые допускают такие понятия, как дифференцируемые или гладкие функции, операции дифференцирования и интегрирования.

Полезно рассмотреть несколько примеров таких пространств.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим на плоскости (т. е. в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$) окружность S^1 единичного радиуса. Для того чтобы описать точки окружности с помощью системы координат, зададим ее как множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

где (x, y) — декартовы координаты точки на плоскости. Таким образом, каждая точка $P \in S^1$ однозначно задается парой чисел — декартовыми координатами x и y. Однако для точек окружности излишне задавать обе координаты x и y. Если нам известна координата x точки P, то вторая координата y может быть получена из уравнения (1): $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, т. е. вторая координата y однозначно (с точностью до знака) определяется первой координатой x. Более того, если точка $P_0 = (x_0, y_0)$ не находится на оси абсцисс, т. е. $y_0 \neq 0$, то найдется такая достаточно малая окрестность U точки P_0, что для всех точек $P \in U$ выбор знака координаты y точки P определяется однозначно знаком координаты y_0 точки P_0. В некотором смысле мы можем сказать, что точки на окружности S^1 описываются одним числовым параметром — ее первой декартовой координатой x. Более точно, можно утверждать, что точки, лежащие в верхней половине окружности, т. е. удовлетворяющие неравенству $y > 0$, однозначно задаются одним числовым параметром x. Аналогично,

точки, лежащие в нижней половине окружности, т. е. удовлетворяющие неравенству $y < 0$, тоже однозначно задаются одним числовым параметром x. Как для верхней половины окружности, так и для ее нижней половины область изменения параметра x одна и та же, а именно интервал вещественной оси $(-1, 1)$. Если бы мы захотели подобным же образом параметрически описывать точки окружности, включая и оставшиеся «особые» точки $P_0 = (1, 0)$ и $P_1 = (-1, 0)$, то нам бы пришлось поменять местами координаты x и y и выразить из уравнения (1) координату x через координату y.

Возникает вопрос: нельзя ли так ввести параметризацию точек на окружности S_1, чтобы сразу все точки окружности однозначно задавались некоторым значением числового параметра? Наилучшим приближением к ответу на этот вопрос является угловой параметр φ, равный углу между осью абсцисс и радиус-вектором с концом в точке P. Но угловой параметр определен неоднозначно. Если же мы ограничимся значением угла φ в некотором интервале, скажем, $0 < \varphi \leqslant 2\pi$, то функция, сопоставляющая точке $P \in S_1$ значение углового параметра φ, будет претерпевать разрыв в точке $P_0 = (1, 0)$.

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение: *на окружности S^1 (как на топологическом пространстве) не существует такой непрерывной функции, значения которой однозначно определяли бы точки окружности.*

Пример 2. В качестве еще одного примера рассмотрим двумерную сферу S^2 в трехмерном евклидовом пространстве, задаваемую уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{2}$$

Так же, как и в случае окружности, для точек сферы S^2 излишне задавать все три декартовы координаты (x, y, z), поскольку, скажем, координату z можно выразить через первые две: $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ясно, что на верхней (и, аналогично, на нижней) полусфере, координата z точки P однозначно восстанавливается по ее первым двум координатам x и y.

Можно показать, что и в случае двумерной сферы невозможно найти две непрерывные функции на сфере S^2, по значениям которых точка P на сфере восстанавливалась бы однозначно.

Рассмотренные примеры показывают, что мы имеем только один выход — отказаться от попытки построения системы координат, единой для всех точек рассматриваемого пространства, и довольствоваться для различных частей пространства своей системой координат. Строгое описание этой конструкции привело к введению специального понятия в геометрии — многообразия.

§ 1. Понятие многообразия

1. Основные определения. Метрическое пространство M называется *n-мерным многообразием* (или просто *многообразием*), если каждая его точка P содержится в окрестности $U \subset M$, гомеоморфной некоторой области V евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Это условие кратко формулируют следующим образом: n-мерное многообразие M локально гомеоморфно области в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом говорят, что *размерность многообразия* M равна n и записывают $\dim M = n$. Таким образом, если M — n-мерное многообразие, то в пространстве M можно указать систему открытых множеств $\{U_i\}$, занумерованных некоторым (конечным или бесконечным) множеством индексов i, и гомеоморфизмов $\varphi_i\colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n$ множеств U_i на области V_i. При этом система открытых множеств $\{U_i\}$ должна покрывать пространство M: $M = \cup_i U_i$. Области V_i могут, вообще говоря, пересекаться между собой.

Предположим, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксирована некоторая декартова система координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда для всякой точки $P \in U_i$ декартовы координаты точки $\varphi_i(P) \in V_i$ можно рассматривать как числовую параметризацию точки P. Поэтому гомеоморфизм φ_i называют *координатным гомеоморфизмом*, декартовы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ точки $\varphi_i(P)$ называют *локальными координатами точки* $P \in U_i$ и пишут $x^k = x^k(P)$, $k = 1, \ldots, n$. Строго говоря, декартовы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ являются линейными функциями, определенными в $\mathbb{R}^n$, а соответствие, сопоставляющее вектору $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ набор его координат $(x_1(\vec{a}), \ldots, x_n(\vec{a}))$, определяет отображение $\mathbb{R}^n$ в арифметическое линейное n-мерное пространство. Поэтому лучше писать $x^k = x^k(P) = x^k(\varphi_i(P))$. Для краткости, мы будем опускать символ φ_i, если это не вызывает недоразумений.

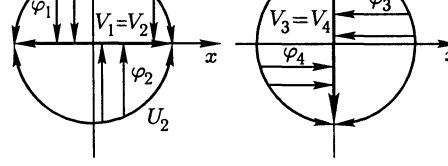


Рис. 1

Система функций $x^k = x^k(P)$, заданная на открытом множестве U_i, называется *локальной системой координат*, само открытое множество U_i вместе с фиксированной локальной системой координат на нем называется *картой* многообразия M. Таким образом,

карта — это пара (U_i, φ_i), причем для краткости мы ее часто будем обозначать только первым символом U_i. Совокупность карт $\{U_i\}$, покрывающая все многообразие M, называется *атласом карт*. Удобно локальные координаты точки $P \in M$ нумеровать дополнительным индексом, нумерующим саму карту U_i: $x_i^k = x_i^k(P)$. Поскольку точка P может принадлежать одновременно нескольким картам, то она приобретает несколько наборов локальных координат.

Рассмотрим простейшие примеры многообразий.

ПРИМЕР 1. Во введении была рассмотрена окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Покроем S^1 атласом, состоящим из четырех карт (рис. 1)

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1\colon y > 0\}, \qquad U_2 = \{(x, y) \in S^1\colon y < 0\},$$
$$U_3 = \{(x, y) \in S^1\colon x > 0\}, \qquad U_4 = \{(x, y) \in S^1\colon x < 0\}.$$

Соответствующие им области V_1, V_2, V_3, V_4 на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$ совпадают и равны открытому интервалу $(-1, 1)$. Гомеоморфизмы φ_1 и φ_2 построим как проекции окружности на ось абсцисс: $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = x$, а гомеоморфизмы φ_3, φ_4 — как проекции на ось ординат: $\varphi_3(x, y) = \varphi_4(x, y) = y$. Чтобы доказать, что отображения φ_k, $k = 1, \ldots, 4$, являются гомеоморфизмами, достаточно в явном виде записать формулы для обратных отображений:

$$\varphi_1^{-1}(x) = (x, \sqrt{1 - x^2}) \in S^1, \qquad \varphi_2^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1 - x^2}) \in S^1$$
$$\varphi_3^{-1}(y) = (\sqrt{1 - y^2}, y) \in S^1, \qquad \varphi_4^{-1}(y) = (-\sqrt{1 - y^2}, y) \in S^1$$

и убедиться, что обратные отображения непрерывны. Тогда на окружности получаются четыре локальных системы координат, каждая из которых состоит из одной координаты: $x_1 = \varphi_1(x, y) = x$, $x_2 = \varphi_2(x, y) = x$, $x_3 = \varphi_3(x, y) = y$, $x_4 = \varphi_4(x, y) = y$. Некоторые точки снабжены сразу двумя локальными системами координат. Так, например, для точек P пересечения $U_1 \cap U_3$ определены координаты $x_1(P)$ и $x_3(P)$ (рис. 2). Существуют и другие способы введения атласа карт на окружности. В гл. 1 были рассмотрены полярные координаты (r, φ) на плоскости. Уравнение окружности в полярных координатах имеет простой вид: $r = 1$. Строго говоря, полярные координаты на плоскости не являются системой

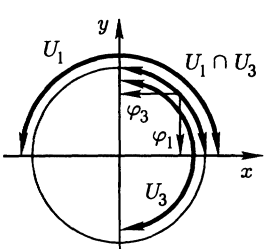


Рис. 2

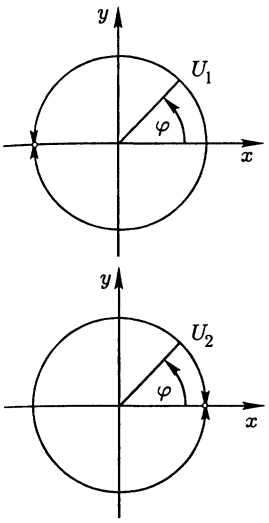


Рис. 3

координат (см. гл. 1). Поэтому на окружности S^1 введем карты $U_1 = \{(x, y) \in S^1: x \neq -1\}$, $U_2 = \{(x, y) \in S^1: x \neq 1\}$ (рис. 3). Положим $\varphi_1(P) = \varphi_1(x, y)$ равным значению угла φ, лежащему в промежутке $(-\pi, \pi)$, а $\varphi_2(P) = \varphi_2(x, y)$ — равным значению угла φ, лежащему в промежутке $(0, 2\pi)$, т. е. $V_1 = (-\pi, \pi)$, $V_2 = (0, 2\pi)$. Ясно, что локальные координаты $\varphi_1 = \varphi_1(P)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(P)$ совпадают для точек верхней полуокружности и не совпадают для точек нижней полуокружности, т. е. $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$ при $y > 0$, $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) - 2\pi$ при $y < 0$ (рис. 4).

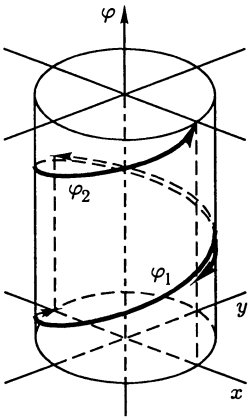


Рис. 4

Пример 2. Окружность S^1, рассмотренная в примере 1, представляет собой уже довольно сложное многообразие. Простейшим примером является само евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Атлас карт можно взять состоящим всего лишь из одной карты $U = \mathbb{R}^n$, координатный гомеоморфизм φ — это тождественное отображение φ: $U \to V = \mathbb{R}^n$, локальная система координат — это декартовы координаты точек в $\mathbb{R}^n$. Аналогично, любая область $U \subset \mathbb{R}^n$ является n-мерным многообразием, атлас карт которого тоже состоит из одной карты с декартовой системой координат.

Пример 3. Пусть f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция и $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — ее *график*, т. е. множество точек вида $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1})$: $x^{n+1} = f(x^1, \ldots, x^n)$. Пространство Γ_f является n-мерным многообразием с атласом карт, состоящим из одной карты $U = \Gamma_f$. Координатный гомеоморфизм φ: $U \to V = \mathbb{R}^n$ определим как проекцию вдоль последней координаты: $\varphi(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда обратное отображение φ^{-1} задается формулой $\varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, f(x^1, \ldots, x^n))$ и, очевидно, является непрерывным отображением.

Пример 4. Рассмотрим *n-мерную* сферу S^n единичного радиуса, задаваемую как множество точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих

уравнению $(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n+1})^2=1$. Покажем, что n-мерная сфера является n-мерным многообразием. В качестве атласа карт возьмем открытые множества

$$U_i^+=\{(x^1,\ldots,x^{n+1})\in S^n\colon x^i>0\},\ U_i^-=\{(x^1,\ldots,x^{n+1})\in S^n\colon x^i<0\}.$$

Всего получаем $2n+2$ открытых множеств, покрывающих всю сферу S^n. В самом деле, если точка $P=(x^1,\ldots,x^{n+1})$ не принадлежит ни картам U_i^+, ни картам U_i^- для всех номеров i, то тогда выполнены как неравенства $x^i\leqslant 0$, так и $x^i\geqslant 0$, т. е. $x^i=0$, $i=1,2,\ldots,n+1$. Тогда $(x^1)^2+\ldots+(x^{n+1})^2=0$, т. е. точка P не лежит на сфере S^n. Координатные гомеоморфизмы φ_i^+, φ_i^- определим как проекции евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbb{R}^n$ вдоль координаты x^i. Тогда области V_i^+ и V_i^- совпадают друг с другом и равны шару единичного радиуса, а координатные гомеоморфизмы задаются формулами

$$\varphi_i^+(x^1,\ldots,x^{n+1})=\varphi_i^-(x^1,\ldots,x^{n+1})=$$
$$=(x^1,\ldots,x^{i-1},x^{i+1},\ldots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^n.$$

Обратные гомеоморфизмы определяются формулами

$$(\varphi_i^+)^{-1}(y^1,\ldots,y^n)=$$
$$=(y^1,\ldots,y^{i-1},\sqrt{1-(y^1)^2-\ldots-(y^n)^2},y^i,\ldots,y^n)\in\S^n,$$
$$(\varphi_i^-)^{-1}(y^1,\ldots,y^n)=$$
$$=(y^1,\ldots,y^{i-1},-\sqrt{1-(y^1)^2-\ldots-(y^n)^2},y^i,\ldots,y^n)\in\S^n,$$

которые, очевидно, непрерывны.

Пример 5. Рассмотрим проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$. Мы ее будем представлять как пространство, точками которого объявлены всевозможные прямые, проходящие через начало координат в $\mathbb{R}^3$. Определим расстояние между двумя прямыми как меньший угол между ними. Тогда $\mathbb{RP}^2$ превращается в метрическое пространство. Покажем, что $\mathbb{RP}^2$ является 2-мерным многообразием. Для этого удобно каждую прямую $P\in\mathbb{RP}^2$ задавать тремя однородными координатами $(x:y:z)$, которые разрешается умножать на одно и то же число $\lambda\neq 0$. Однородные координаты не обращаются в нуль одновременно, т. е. $x^2+y^2+z^2>0$. Покроем $\mathbb{RP}^2$ тремя картами: $U_1=\{(x:y:z)\colon x\neq 0\}$, $U_2=\{(x:y:z)\colon y\neq 0\}$, $U_3=\{(x:y:z)\colon z\neq 0\}$. Пусть $V_1=V_2=V_3=\mathbb{R}^2$. В качестве координатных гомеоморфизмов возьмем следующие отображения $\varphi_k\colon U_k\to V_k=\mathbb{R}^2$:

$$\varphi_1(x:y:z)=(y/x,z/x),\qquad \varphi_2(x:y:z)=(x/y,z/y),$$
$$\varphi_3(x:y:z)=(x/z,y/z).$$

Таким образом, мы построили три локальных системы координат:

$$x_1^1 = y/x, \quad x_1^2 = z/x; \quad x_2^1 = x/y, \quad x_2^2 = z/y; \quad x_3^1 = x/z, \quad x_3^2 = y/z.$$

Для того чтобы проверить, что отображения φ_k являются гомеоморфизмами, достаточно построить обратные отображения:

$$\varphi_1^{-1}(x_1^1, x_1^2) = (1 : x_1^1 : x_1^2), \qquad \varphi_2^{-1}(x_2^1, x_2^2) = (x_2^1 : 1 : x_2^2),$$
$$\varphi_3^{-1}(x_3^1, x_3^2) = (x_3^1 : x_3^2 : 1)$$

и убедиться, что они непрерывны.

Рассмотренные примеры показывают, что в одном и том же многообразии M можно фиксировать различные атласы карт. Даже если карты как открытые множества оставить неизменными, можно менять локальную систему координат в карте путем выбора другого координатного гомеоморфизма. В частности, справедлива

Лемма 1. *Пусть M — n-мерное многообразие, U — некоторая его карта с координатным гомеоморфизмом φ и локальной системой координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Если $U' \subset U$ — открытое подмножество карты U, то на U' тоже можно определить координатный гомеоморфизм φ' и локальную систему координат $(y^1, \ldots, y^n)$, причем $\varphi'(P) = \varphi(P)$, $y^k(P) = x^k(P)$ для $P \in U'$.*

Доказательство леммы следует из того, что гомеоморфизм $\varphi\colon U \to V$ гомеоморфно отображает любое открытое подмножество $U' \subset U$. Поэтому достаточно в качестве φ' взять ограничение гомеоморфизма φ на подмножество U', а в качестве y^k — ограничение координатных функций x^k на то же подмножество U'.

Лемма 1 показывает, что из заданного атласа карт $\{U_i\}$ можно построить новый атлас, состоящий из более мелких карт. С другой стороны, если нам заданы два атласа карт $\{U_i\}$ и $\{U_j'\}$, то объединение этих двух атласов снова является атласом карт многообразия. Поэтому существует *максимальный атлас карт*, состоящий из всех карт данного многообразия. Максимальный атлас карт можно рассматривать как объединение всех атласов карт на многообразии.

Полезной в дальнейшем окажется

Лемма 2. *Пусть $\{U_i\}$, $\{U_j'\}$ — два атласа карт на многообразии M. Тогда существует третий атлас карт, измельчающий как $\{U_i\}$, так и атлас $\{U_j'\}$.*

Для доказательства положим $W_{ij} = U_i \cap U_j'$. Согласно лемме 1 на каждом открытом множестве W_{ij} можно ввести локальную систему

координат. С другой стороны, $W_{ij} \subset U_i$, $W_{ij} \subset U'_j$ и система множеств $\{W_{ij}\}$ покрывает многообразие M. Значит, система $\{W_{ij}\}$ является атласом карт, измельчающим оба атласа $\{U_i\}$ и $\{U'_j\}$.

2. Функции замены координат. Определение гладкого многообразия. Выделение многообразий среди произвольных метрических (или в общем случае топологических пространств) оказывается весьма полезным. Так, например, всякая непрерывная функция $f\colon M \to \mathbb{R}^1$, определенная на n-мерном многообразии M, в окрестности каждой точки $P \in M$ может быть отождествлена с некоторой обычной непрерывной вещественнозначной функцией $h(x^1, \ldots, x^n)$ от n независимых вещественных переменных $(x^1, \ldots, x^n)$, причем функция h будет определена в некоторой области евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. В самом деле, пусть U — карта, содержащая точку P, $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ — ее координатный гомеоморфизм, $(x^1(P), \ldots, x^n(P))$ — локальная система координат в карте U. Если $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ — вектор с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, то положим $h(x^1, \ldots, x^n) = f(\varphi^{-1}(\vec{x}))$. Обратно, если h — непрерывная функция от n вещественных переменных, заданная в области $V \subset \mathbb{R}^n$, то ей соответствует непрерывная функция f, определенная в открытом множестве U многообразия M: $f(P) = h(x^1(P), \ldots, x^n(P))$.

Более общим образом, пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — непрерывное отображение n-мерного многообразия M_1 в m-мерное многообразие M_2. Пусть $Q_0 = f(P_0)$, $P_0 \in M_1$, $Q_0 \in M_2$. Тогда в некоторой малой окрестности $U \ni P_0$ отображение можно отождествить с непрерывной вектор-функцией h от n независимых переменных. В самом деле, пусть $U' \ni Q_0$ — некоторая карта многообразия M_2, $(y^1, \ldots, y^m)$ — локальная система координат. Поскольку отображение f непрерывно, то в силу леммы 1 найдется такая карта U точки P_0, что $f(U) \subset U'$. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат в карте U. Поскольку точки P из карты U находятся во взаимно однозначном соответствии с набором их координат $(x^1(P), \ldots, x^n(P))$, а точки Q из карты U' — с набором их координат $(y^1(Q), \ldots, y^m(Q))$, то равенство $Q = f(P)$ означает, что

$$y^k(Q) = y^k(f(P)) = y^k(h(x^1(P), \ldots, x^n(P))) = h^k(x^1(P), \ldots, x^n(P)).$$

Функции $\{h^k(x^1, \ldots, x^n)\}$ являются непрерывными функциями, по ним отображение f однозначно восстанавливается в карте U.

Таким образом, каждая непрерывная функция f на многообразии M в локальной системе координат представляется вещественной функцией h от n независимых переменных. Если мы изменим локальную систему координат, изменится и функция h. Спрашивается, по какому закону меняется функция h при заменах

координат? Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^n)$ — две локальные системы координат. Без ограничения общности можно считать, что обе локальные системы координат определены в одной карте U. Пусть h и h' — функции от координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$ соответственно, представляющие функцию f. Тогда

$$f(P) = h(x^1(P), \ldots, x^n(P)) = h'(y^1(P), \ldots, y^n(P)). \quad (1)$$

Поскольку координаты $(y^1, \ldots, y^n)$ — тоже некоторые непрерывные функции в карте U, то они представимы как функции от n независимых переменных $x^1, \ldots, x^n$, т. е.

$$\begin{aligned} y^1(P) &= y^1(x^1(P), \ldots, x^n(P)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n(P) &= y^n(x^1(P), \ldots, x^n(P)). \end{aligned} \quad (2)$$

В этих формулах мы намеренно одним и тем же символом y^k обозначили как координату точки P, так и ее представление в виде функции от переменных $(x^1, \ldots, x^n)$: $y^k = y^k(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда из формулы (1) получаем тождество

$$h(x^1, \ldots, x^n) = h'(y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^n)). \quad (3)$$

Функции $y^k = y^k(x^1, \ldots, x^n)$, стоящие в правой части соотношений (2), в гл. 1 были названы функциями замены координат в случае, когда множество U являлось областью в евклидовом пространстве. Мы сохраним этот же термин и для случая многообразий.

***Определение* 1.** Пусть M — n-мерное многообразие, $\{U_i\}$ — его атлас карт, φ_i — координатные гомеоморфизмы, $\{x_i^k\}$ — набор локальных систем координат. В каждом пересечении $U_{ij} = U_i \cap U_j$ двух карт определены две локальные системы координат, $\{x_i^k\}$ и $\{x_j^k\}$, причем $x_i^k(P) = x_i^k(x_j^1(P), \ldots, x_j^n(P))$, $P \in U_{ij}$. Функции $x_i^k = x_i^k(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ называются *функциями замены координат* или *функциями перехода* от координат $\{x_i^k\}$ к координатам $\{x_j^k\}$.

Функции замены координат определены не во всей области V_j, а в ее некоторой части $V_{ji} = \varphi_j(U_{ij})$, там, где имеет смысл говорить сразу о двух системах координат.

На рис. 5 для удобства области V_i и V_j в евклидовом пространстве показаны как непересекающиеся множества.

Функции замены координат $x_i^k = x_i^k(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ осуществляют совместное отображение области V_{ji} в область V_{ij}, лежащие в $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}_i = \{x_i^k(x_j^1, \ldots, x_j^n)\} = \{x_i^k(\vec{x}_j)\} = \vec{x}_i(\vec{x}_j) = \varphi_i \varphi_j^{-1}(\vec{x}_j) = \varphi_{ij}(\vec{x}_j). \quad (4)$$

Отображения φ_{ij}: $V_{ji} \to V_{ij}$, задаваемые формулой (4), есть не что иное, как другая запись функции перехода и являются гомеоморфизмом области V_{ji} на область V_{ij}. Отметим, что если $i = j$, то $U_{ij} = U_i$, $V_{ji} = V_{ij} = V_i$, а $x_i^k(x_j^1, \ldots, x_j^n) \equiv x_j^k$.

Вернемся теперь к представлению непрерывной функции f, определенной на n-мерном многообразии M, в виде функции h от n независимых переменных — локальных координат точки многообразия. Из курса математического анализа известно, что полезно изучать более узкий класс функций — дифференцируемые функции. Мы переносим это важное понятие на случай функций, заданных на многообразии. Если функция $h(x^1, \ldots, x^n)$ является непрерывно дифференцируемой функцией, то утверждать то же самое о функции $h'(y^1, \ldots, y^n)$, представляющей ту же самую функцию f в другой локальной системе координат $(y^1, \ldots, y^n)$, мы не можем. В самом деле, функции h и h' связаны соотношением (3). Так что для того, чтобы функция h' тоже была непрерывно дифференцируемой, достаточно потребовать, чтобы функции замены координат $x^k = x^k(y^1, \ldots, y^n)$ были непрерывно дифференцируемы. Если же функции замены координат не являются непрерывно дифференцируемыми, то существует такая функция f, что ее представление h в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ будет непрерывно дифференцируемой функцией, а представление h' в координатах $(y^1, \ldots, y^n)$ этому условию удовлетворять не будет. В качестве примера функции f возьмем следующую функцию: $f(P) = x^k(P)$, $P \in U \subset M$. Тогда $h(x^1, \ldots, x^n) \equiv x^k$ — непрерывно дифференцируемая функция. Однако $h'(y^1, \ldots, y^n) = x^k(y^1, \ldots, y^n)$ уже этим свойством не обладает. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

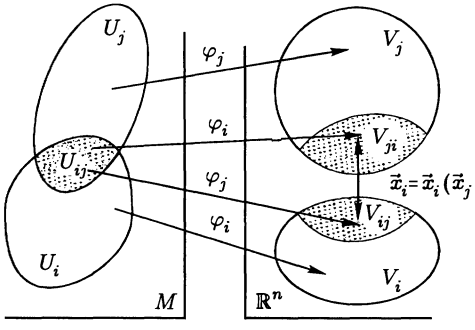


Рис. 5

Определение 2. *Гладким n-мерным многообразием* называется n-мерное многообразие M, на котором фиксирован атлас карт $\{U_i\}$ с локальными системами координат $\{x_i^k\}$, удовлетворяющими условию: функции замены координат $x_i^k = x_i^k(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями для любой пары карт U_i и U_j и во всей области их определения.

Определение гладкого многообразия дает нам возможность выделить среди всех функций на многообразии M класс непрерывно дифференцируемых функций.

***Определение* 3.** Функция $f\colon M \to \mathbb{R}^1$, определенная на гладком многообразии M, называется *непрерывно дифференцируемой функцией* в точке $P_0 \in M$, если в любой локальной системе координат $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$ (карты $U_i \ni P_0$ из фиксированного атласа карт) функция f представляется в виде непрерывно дифференцируемой функции $h(x_i^1, \ldots, x_i^n)$ от n независимых переменных в окрестности точки $(x_i^1(P_0), \ldots, x_i^n(P_0))$.

Отметим, что требование непрерывной дифференцируемости функций замены координат в определении 2 существенно для определения 3 непрерывно дифференцируемой функции f на гладком многообразии M. Как мы уже указывали ранее, если бы функции замены координат не удовлетворяли условию непрерывной дифференцируемости, то условие непрерывной дифференцируемости функции f в точке $P_0 \in M$ зависело бы от выбора карты U_i, содержащей точку P_0.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим следующий пример атласа карт на многообразии M. Пусть $M = \mathbb{R}^1$ — вещественная прямая, атлас карт состоит из двух одинаковых карт $U_1 = U_2 = M = \mathbb{R}^1$, но с различными системами координат. На U_1 зададим координату $x_1 = x$, $x \in \mathbb{R}^1$, а на U_2 координату зададим формулой $x_2 = x^3$. Тогда функции замены координат имеют вид

$$x_2 = x_2(x_1) = (x_1)^3, \tag{5}$$

$$x_1 = x_1(x_2) = \sqrt[3]{x_2}. \tag{6}$$

Если функция замены координат (5) является непрерывно дифференцируемой функцией (многочлен!), то функция (6) имеет разрывную производную. Поэтому согласно определению 2 многообразие M с атласом карт $\{U_1, U_2\}$ не является гладким многообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если атлас карт на многообразии M состоит из одной карты (т. е. M гомеоморфно области в евклидовом пространстве), то M является гладким многообразием.

***Определение* 4.** Пусть на многообразии M заданы два атласа карт, $\{U_i\}$ и $\{U_j'\}$, и по отношению к каждому из них M является гладким многообразием. Два атласа карт, $\{U_i\}$ и $\{U_j'\}$, называются *эквивалентными*, если функции перехода от каждой локальной системы координат в атласе $\{U_i\}$ в каждую локальную систему координат в атласе $\{U_j'\}$ являются непрерывно дифференцируемыми.

Определение 4 оправдывается тем, что *всякая функция f на многообразии M является непрерывно дифференцируемой в атласе $\{U_i\}$ тогда и только тогда, когда она непрерывно дифференцируема в атласе $\{U_j'\}$*. Таким образом, с точки зрения непрерывно дифференцируемых функций на многообразии M эквивалентные атласы карт равноправны, и для представления функций в виде непрерывно дифференцируемых вещественнозначных функций от независимых переменных (координат точки) можно пользоваться любыми из эквивалентных атласов карт. Возможна другая формулировка определения 4: два атласа карт $\{U_i\}$ и $\{U_j'\}$ *эквивалентны*, если M является гладким многообразием относительно нового атласа, равного объединению исходных двух атласов $\{U_i\} \cup \{U_j'\}$.

Довольно часто требуется рассматривать более узкие классы функций. Напомним, что вещественнозначная функция $h(x^1, \ldots, x^n)$ имеет класс гладкости C^r $(r = 1, 2, \ldots, \infty)$ в окрестности $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, если в окрестности этой точки существуют и непрерывны все частные производные функции h до порядка r включительно. В случае $r = \infty$ это означает, что существуют и непрерывны частные производные функции h всех порядков. В соответствии с этим на атласы карт многообразия M мы тоже будем налагать условия, сформулированные в следующем определении.

Определение 2'. Многообразие M с фиксированным атласом карт $\{U_i\}$ называется *гладким многообразием класса* $C^r (r = 1, 2, \ldots, \infty)$, если все функции замены координат являются функциями класса гладкости C^r во всех точках области их определения.

Определение 3'. Пусть M — гладкое многообразие класса C^r и f — непрерывная функция на нем. Функция f называется *функцией класса гладкости* C^s, $s \leqslant r$, *в окрестности точки* $P_0 \in M$, если любое ее представление в виде функции h от локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$ (из фиксированного атласа карт) является функцией класса C^s в окрестности точки $(x^1(P_0), \ldots, x^n(P_0))$. Функция f называется просто *функцией класса гладкости* C^s, если она является функцией класса гладкости C^s в окрестности каждой точки P_0 ее области определения.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только многообразия класса C^∞, а функции на многообразии — класса гладкости C^∞.

Пример 7. Модифицируем пример 6. Выберем координату во второй карте U_2 равной $x_2 = x + x|x|$. Тогда многообразие M

является гладким многообразием класса C^1, но не является гладким многообразием класса C^2.

В примерах 1–4 рассмотрены многообразия с такими атласами карт, что эти многообразия автоматически являются гладкими многообразиями класса C^∞.

В геометрии рассматриваются и другие, более сильные условия на атласы карт и их функции замены координат. Так, если все функции замены координат являются вещественно аналитическими функциями, т. е. в окрестности каждой точки их определения разлагаются в сходящиеся ряды Тейлора, то само многообразие называется *вещественно аналитическим многообразием*. Вещественно аналитическое многообразие является гладким многообразием класса C^∞.

Более важный класс многообразий — комплексно аналитические многообразия. Пусть M — $2n$-мерное многообразие, $\{U_j\}$ — атлас его карт, $\varphi_j\colon U_j \to V_j \subset \mathbb{R}^{2n}$ — его координатные гомеоморфизмы. Отождествим $2n$-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с n-мерным комплексным линейным пространством $\mathbb{C}^n$, считая, что комплексные координаты точки $(z^1, \ldots, z^n)$ дают $2n$ вещественных координат $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$, $z^k = x^k + iy^k$. Тогда $2n$ координатных функций $x_j^1(P), \ldots, x_j^n(P), y_j^1(P), \ldots, y_j^n(P)$ в карте U_j превращаются в n комплекснозначных функций $z_j^k(P) = x_j^k(P) + iy_j^k(P)$. Функции $z_j^k(P)$ мы назовем комплексными координатами точки в карте U_j. На пересечении двух карт $U_j \cap U_l$ мы имели функции перехода из одной системы координат в другую в виде

$$\begin{aligned}
x_j^1 &= x_j^1(x_l^1, \ldots, x_l^n, y_l^1, \ldots, y_l^n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_j^n &= x_j^n(x_l^1, \ldots, x_l^n, y_l^1, \ldots, y_l^n),\\
y_j^1 &= y_j^1(x_l^1, \ldots, x_l^n, y_l^1, \ldots, y_l^n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_j^n &= y_j^n(x_l^1, \ldots, x_l^n, y_l^1, \ldots, y_l^n).
\end{aligned} \tag{7}$$

Функции (7) можно представить как комплекснозначные функции от n независимых комплексных переменных:

$$\begin{aligned}
z_j^1 &= z_j^1(z_l^1, \ldots, z_l^n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_j^n &= z_j^n(z_l^1, \ldots, z_l^n).
\end{aligned} \tag{8}$$

Функции (8) мы назовем функциями перехода или функциями замены комплексных координат.

Многообразие M с фиксированным атласом карт $\{U_j\}$ и локальными системами комплексных координат $(z_j^1, \ldots, z_j^n)$ называется *комплексно аналитическим многообразием*, если все функции замены комплексных координат (8) являются комплексно аналитическими функциями, т. е. разлагаются в сходящиеся ряды Тейлора комплексных переменных в окрестности каждой точки своей области определения.

В качестве примера многообразия, допускающего структуру комплексно аналитического многообразия, рассмотрим двумерную сферу S^2 и специальным образом построим на ней атлас карт. В гл. 1 была построена стереографическая проекция сферы $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ из северного полюса $P_0 = (0, 0, 1)$ на координатную плоскость (x, y). Обозначим это отображение через φ_0. Отображение φ_0 отображает все точки сферы S^2, за исключением полюса P_0, т. е. открытое множество $U_0 = S^2 \setminus P_0$ гомеоморфно на всю плоскость $V_0 = \mathbb{R}^2$. В декартовых координатах гомеоморфизм φ_0 имеет вид $\varphi_0(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$. Поэтому введем в карте U_0 одну комплексную координату $w_0 = \frac{x+iy}{1-z}$, выраженную через декартовы координаты точки на сфере. Кроме этого, рассмотрим южный полюс $P_1 = (0, 0, -1)$ и стереографическую проекцию φ_1 из южного полюса на ту же координатную плоскость (x, y). Отображение φ_1 гомеоморфно отображает множество $U_1 = S^2 \setminus P_1$ на всю плоскость $V_1 = \mathbb{R}^2$. В декартовых координатах гомеоморфизм φ_1 имеет вид $\varphi_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$. Введем в карте U_1 комплексную координату $w_1 = \frac{x-iy}{1+z}$. Тогда на пересечении $U_0 \cap U_1$ получаем $w_0 w_1 = \frac{x^2+y^2}{1-z^2} \equiv 1$. Следовательно,

$$w_0 = w_0(w_1) = \frac{1}{w_1}, \quad w_1 = w_1(w_0) = \frac{1}{w_0}. \tag{9}$$

Функции (9) являются комплекснозначными функциями. Значит, сфера S^2 является комплексно аналитическим многообразием. Каждая карта U_0 и U_1 покрывает всю сферу S^2, за исключением одной точки, и с помощью координатных гомеоморфизмов φ_0 и φ_1 отождествляется с комплексной плоскостью $\mathbb{C}^1 = \mathbb{R}^2$. Поэтому сферу S^2 обычно отождествляют с так называемой пополненной комплексной плоскостью, которая получается из $\mathbb{C}^1$ путем присоединения еще одной «бесконечно удаленной» точки.

Произвольное гладкое многообразие не обязано быть комплексно аналитическим. Так, если его размерность нечетна, то по тривиальным соображениям такое многообразие не является комплексно аналитическим. Однако в случае четномерных многообразий име-

ются примеры, не допускающие структуры комплексно аналитического многообразия. Например, проективная плоскость не является комплексно аналитическим многообразием. Мы это покажем в § 6 гл. 4.

3. Гладкие отображения. Диффеоморфизм. Пусть M_1 и M_2 — два гладких многообразия, $f\colon M_1 \to M_2$ — непрерывное отображение. Как уже указывалось, в окрестности любой точки $P_0 \in M_1$ отображение f можно представить в виде вектор-функции h, $y^k = h^k(x^1, \ldots, x^n)$, где $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат в окрестности точки $P_0 \in M_1$, а $(y^1, \ldots, y^m)$ — локальная система координат в окрестности точки $Q_0 = f(P_0) \in M_2$.

***Определение* 5.** Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ гладких многообразий называется *гладким отображением класса* C^r $(r = 1, 2, \ldots, \infty)$, если для любых локальных систем координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности любой точки $P_0 \in M_1$ и $(y^1, \ldots, y^m)$ в окрестности точки $Q_0 = f(P_0) \in M_2$ представление функции f в виде вектор-функции $\vec{y} = (y^k) = (h^k(x^1, \ldots, x^n)) = h(\vec{x})$ является вектор-функцией класса гладкости C^r.

Отметим, что определение гладкого отображения класса гладкости C^r имеет смысл только в том случае, когда классы гладкости многообразий M_1 и M_2 не меньше, чем r.

Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — гомеоморфизм многообразий. Если f является гладким отображением класса C^r, то обратное отображение f^{-1} не обязано быть гладким отображением. Поэтому если обратное отображение $f^{-1}\colon M_2 \to M_1$ тоже является гладким отображением класса C^r, то гомеоморфизм f называют *гладким гомеоморфизмом класса* C^r или *диффеоморфизмом класса* C^r. Диффеоморфизмы гладких многообразий играют ту же роль, что и гомеоморфизмы топологических пространств. Если $f\colon M_1 \to M_2$ — диффеоморфизм, то многообразия M_1 и M_2 называются диффеоморфными многообразиями. Совокупность же всех многообразий разбивается на непересекающиеся классы попарно диффеоморфных многообразий. Всякое общее свойство гладких многообразий, гладких функций или отображений на многообразии переносится на любое другое диффеоморфное ему многообразие. Поэтому мы, как правило, не будем различать диффеоморфные многообразия.

Однако есть такие свойства многообразий, «одинаковость» которых для пары диффеоморфных многообразий не совсем очевидна. В частности, мы приписали каждому многообразию числовую характеристику — размерность многообразия. Будет ли одинаковой размерность диффеоморфных многообразий?

Теорема 1. *Пусть* $f\colon M_1 \to M_2$ *— гладкий гомеоморфизм класса* C^r $(r \geqslant 1)$ *гладких многообразий. Тогда* $\dim M_1 = \dim M_2$.

Доказательство. Пусть $P_0 \in M_1$ — произвольная точка, $Q_0 = f(P_0)$, $g = f^{-1}$ — обратное отображение. Выберем локальные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности U_0 точки P_0 и локальные координаты $(y^1, \ldots, y^m)$ в окрестности V_0 точки Q_0. Тогда отображения f и g представляются в виде двух вектор-функций, $\vec{x} = h(\vec{y})$ и $\vec{y} = h^{-1}(\vec{x})$, причем $h(h^{-1}(\vec{x})) \equiv \vec{x}$, $h^{-1}(h(\vec{y})) \equiv \vec{y}$. Изучим отображения h и h^{-1}. Отображение h составлено из m функций $y^l = h^l(x^1, \ldots, x^n)$ от n независимых переменных $x^1, \ldots, x^n$. Составим матрицу всех частных производных функций h^l:

$$dh = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial h^1}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial h^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial h^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Матрица dh является прямоугольной матрицей порядка $m \times n$, т. е. имеет m строк и n столбцов. Матрица dh называется *матрицей Якоби* отображения h.

Лемма 3. *Пусть* $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, $V_0 \subset \mathbb{R}^m$, $W_0 \subset \mathbb{R}^k$ *— открытые области евклидовых пространств,* $f\colon U_0 \to V_0$, $g\colon V_0 \to W_0$ *— непрерывно дифференцируемые отображения,* $h\colon U_0 \to W_0$ *— композиция отображений* f *и* g, *т. е.* $h(P) = g(f(P))$. *Тогда для матриц Якоби отображений* f, g, h *выполнено соотношение:* $dh(P) = dg(f(P))df(P)$, $P \in U_0$. *Другими словами, матрица Якоби композиции* $h = g \circ f$ *равна произведению матриц Якоби отображений* f *и* g.

Доказательство леммы проводится непосредственным дифференцированием сложных функций. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^m)$, $(z^1, \ldots, z^k)$ — декартовы координаты в областях U_0, V_0, W_0. Тогда

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n), \quad z^j = g^j(y^1, \ldots, y^m),$$
$$z^j = h^j(x^1, \ldots, x^n) = g^j(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f^m(x^1, \ldots, x^n)).$$

Далее, дифференцируя функции h^j по переменным x^i, имеем

$$\frac{\partial h^j}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g^j}{\partial y^l}(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots)\frac{\partial f^l}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^n). \quad (10)$$

Формула (10) в точности совпадает с определением общего элемента произведения двух матриц, т. е. $dh(x^1, \ldots, x^n) = dg(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots)df(x^1, \ldots, x^n)$. Если точка P имеет координаты $(x^1, \ldots, x^n)$, то кратко предыдущее равенство пишем в виде: $dh(P) = dg(f(P))df(P)$. □

Применим лемму 3 к паре отображений h и h^{-1}. Пусть e_0 — композиция отображений h и h^{-1}, e_1 — композиция отображений h^{-1} и h, т. е. $e_0(Q)=h(h^{-1}(Q))$, $Q\in V_0$, $e_1(P)=h^{-1}(h(P))$, $P\in U_0$. Оба отображения e_0: $V_0\to V_0$ и e_1: $U_0\to U_0$ являются тождественными отображениями. Следовательно, матрицы Якоби отображений e_0 и e_1 являются единичными матрицами порядков m и n соответственно. В частности, $\operatorname{rk} de_0=m$, $\operatorname{rk} de_1=n$. С другой стороны, применяя лемму 3, получаем

$$de_0(Q)=dh(h^{-1}(Q))dh^{-1}(Q),\quad Q\in V_0,$$
$$de_1(P)=dh^{-1}(h(P))dh(P),\quad P\in U_0.$$

Из линейной алгебры известно, что ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей. Поскольку $\operatorname{rk} dh\leqslant\min(m,n)$, $\operatorname{rk} dh^{-1}\leqslant\min(m,n)$ (матрицы dh и dh^{-1} — прямоугольные!), то $\operatorname{rank} de_0\leqslant\min(m,n)$, $\operatorname{rank} de_1\leqslant\min(m,n)$. Следовательно, $m\leqslant\min(m,n)$, $n\leqslant\min(m,n)$, или $\max(m,n)\leqslant\min(m,n)$, что и означает, что $m=n$. Теорема доказана. □

Понятие размерности было введено не только для гладких многообразий, но и для произвольных многообразий. Поэтому возникает естественный вопрос: совпадают ли размерности у гомеоморфных многообразий? Ответ утвердительный, т. е. *если M_1 и M_2 — два гомеоморфных многообразия, то* $\dim M_1=\dim M_2$. Это утверждение является очень глубокой теоремой общей топологии, и оно остается вне пределов нашего курса.

В заключение докажем несколько полезных замечаний о структуре атласа карт. По определению, атлас карт на многообразии M состоит из открытых множеств U_i, гомеоморфных областям $V_i\subset\mathbb{R}^n$. Если M — гладкое многообразие, то координатные гомеоморфизмы φ_i: $U_i\to V_i$ являются гладкими гомеоморфизмами. Иногда бывает полезно упростить вид областей V_i в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, правда, за счет увеличения числа карт на атласе.

Лемма 4. *В гладком многообразии M существует такой атлас карт $\{U_i\}$, что каждая карта U_i диффеоморфна $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Сначала покажем, что можно построить такой атлас карт, чтобы каждая карта была диффеоморфна открытому шару некоторого радиуса ε в $\mathbb{R}^n$. Пусть $P_0\in M$ — произвольная точка, $U_i\ni P_0$, φ_i: $U_i\to V_i\subset\mathbb{R}^n$ — координатный гомеоморфизм, $Q_0=\varphi_i(P_0)$. Поскольку V_i — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то найдется такое число ε, что открытый шар радиуса ε с центром в точке Q_0 лежит в V_i. Обозначим этот шар через $O_\varepsilon(Q_0)$, а его прообраз

$\varphi_i^{-1}(O_\varepsilon(Q_0))$ — через W_P. Семейство открытых множеств $\{W_P\}$ является атласом карт на многообразии M, и каждая карта W_P диффеомофна открытому шару в $\mathbb{R}^n$. Чтобы завершить доказательство леммы, покажем, что открытый шар радиуса ε диффеоморфен R^n. Достаточно рассмотреть случай $\varepsilon = 1$. Итак, пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — точка в шаре радиуса 1, $(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 < 1$. Положим

$$y^k = \frac{x^k}{\sqrt{1-(x^1)^2-\ldots-(x^n)^2}}, \qquad x^k = \frac{y^k}{\sqrt{1+(y^1)^2+\ldots+(y^n)^2}}. \tag{11}$$

Функции (11) являются гладкими и осуществляют взаимно обратное отображения шара радиуса 1 и $\mathbb{R}^n$. □

Лемма 5. *Пусть M — гладкое компактное многообразие, $\{U_i\}$ — атлас карт на нем. Тогда существует гладкое разбиение единицы ψ_i, подчиненное покрытию $\{U_i\}$.*

Доказательство. Достаточно считать на основании леммы 4, что все карты гомеоморфны шару радиуса 1. Пусть φ_i: $U_i \to D_1^n \subset \mathbb{R}^n$ — координатные гомеоморфизмы. (Здесь D_r^n — открытый шар радиуса r с центром в начале координат.) Выберем такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, чтобы $\varphi_i^{-1}(D_{(1-\varepsilon)}^n)$ покрывали многообразие M. Допустим, что существует такая гладкая функция f класса C^∞ на шаре D_1^n, что $\operatorname{supp} f = D_{(1-\varepsilon)}^n$, $0 \leqslant f \leqslant 1$. Положим

$$\overline{\psi}_i(P) = \begin{cases} 0, & \text{если } P \notin U_i, \\ f(\varphi_i(P)), & \text{если } P \in U_i. \end{cases}$$

Поскольку $f(\varphi_i(P)) = 0$ при $P \notin \varphi_\varepsilon^{-1}(D_{(1-\varepsilon)}^n)$, то функции $\overline{\psi}_i$ гладкие на многообразии M, причем $\operatorname{supp} \overline{\psi}_i \subset U_i$, $0 \leqslant \overline{\psi}_i \leqslant 1$. Более того, $\operatorname{supp} \psi_i \supset \varphi_i^{-1}(D_{(1-\varepsilon)}^n)$. Следовательно, сумма функций $\overline{\psi}_i \overline{\psi}(P) = \sum\limits_i \overline{\psi}_i(P)$ строго больше нуля в каждой точке. Тогда положим $\psi_i(P) = \overline{\psi}_i(P)/\overline{\psi}(P)$. Функции $\psi_i(P)$ образуют гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$.

Таким образом, нам осталось построить такую функцию f класса C^∞ в $\mathbb{R}^n$, чтобы ее носитель был шар $D_{(1-\varepsilon)}^n$. Будем искать функцию f в виде $f(x^1, \ldots, x^n) = h((x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2)$. Следовательно, достаточно построить гладкую функцию одной переменной $h(x)$, чтобы выполнялись условия: $h(x) = 0$ при $x > (1-\varepsilon)^2$ и $h(x) > 0$ при $x < (1-\varepsilon)^2$. В качестве h возьмем функцию

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/(x-(1-\varepsilon)^2)^2}, & x < (1-\varepsilon)^2, \\ 0, & x \geqslant (1-\varepsilon)^2, \end{cases}$$

которая, как известно, является гладкой класса C^∞. □

Задачи к § 1

1. Доказать, что пространство расположений жесткого отрезка на плоскости является гладким многообразием.

2. Доказать, что группа SO(3) гомеоморфна трехмерному проективному пространству.

3. Описать конфигурационное пространство системы из двух шарнирно соединенных стержней в трехмерном пространстве.

4. Привести пример гладкого взаимно однозначного отображения, не являющегося диффеоморфизмом.

5. Показать, что на сфере S^n не существует атласа, состоящего из одной карты.

§ 2. Задание многообразий уравнениями

Существует стандартный способ описания и построения многообразий, наиболее часто применяющийся на практике.

В предыдущем параграфе (а также в гл. 1) многие примеры многообразий возникали в виде множества решений некоторого нелинейного уравнения, заданного в евклидовом пространстве. Так, например, n-мерная сфера S^n задается уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$; псевдосфера S_1^2 задается уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Вообще, если $f(x^1, \ldots, x^n)$ — непрерывно дифференцируемая функция , то множество решений уравнения $f(x^1, \ldots, x^n) - c = 0$ называется *многообразием уровня с функции* f. Таким образом, все евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в объединение многообразий уровня функций f. В случае функции двух переменных решения уравнения обычно называют *линиями уровня* функции f, а в случае функции трех переменных — *поверхностями уровня*.

Чтобы оправдать название «многообразие уровня функции f» необходимо было бы доказать, что многообразие уровня функции f действительно является многообразием. Однако это не всегда так.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - y^2$. Ее линии уровня описываются уравнением $x^2 - y^2 = c$. Если $c > 0$, то линия уровня состоит из двух компонент связности, каждая из которых может быть описана одним из уравнений $x = \sqrt{c + y^2}$, $x = -\sqrt{c + y^2}$, т. е. является графиком функции одной переменной (рис. 6). Аналогично, при $c < 0$ линия уровня состоит из графиков двух функций: $y = \sqrt{x^2 - c}$, $y = -\sqrt{x^2 - c}$. Таким образом, при $c \neq 0$ линии уровня являются одномерными многообразиями (см. пример 3 из § 1). Особый случай представляет линия уровня при $c = 0$. В этом случае линия уровня состоит из пары пересекающихся прямых: $x = y$, $x = -y$, и не является многообразием. В самом деле,

покажем, что точка $P_0 = (0, 0)$, лежащая на линии уровня $f = 0$, не имеет окрестности U_0, гомеоморфной области в евклидовом пространстве. Если бы такой гомеоморфизм φ_0: $U_0 \to V_0 \subset \mathbb{R}^1$ существовал, то без ограничения общности можно было бы считать, что V_0 является открытым интервалом, а U_0 содержит все точки P, находящиеся от точки P_0 на расстоянии, меньшем некоторого ε. Тогда множество $U_0 \setminus P_0$ имело бы не менее четырех связных компонент, а его гомеоморфный образ $V_0 \setminus \{\varphi_0(P_0)\}$ — всего лишь две связные компоненты. Противоречие доказывает отсутствие гомеоморфизма φ_0 для $\mathbb{R}^1$. Аналогично доказывается отсутствие гомеоморфизма φ_0 и области $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$.

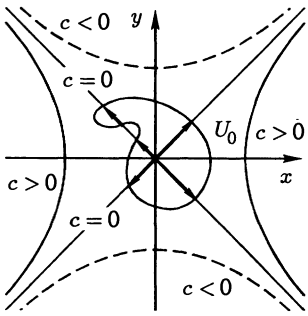


Рис. 6

Тем не менее в некотором смысле почти всегда многообразия уровня непрерывно дифференцируемой функции f являются многообразиями.

Теорема 1. *Пусть $f = f(x^1, \ldots, x^n)$ — функция класса C^∞, определенная во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Положим $M_c = \{(x^1, \ldots, x^n)\colon f(x^1, \ldots, x^n) = c\}$. Если градиент функции f отличен от нуля в каждой точке множества M_c, то M_c является гладким $(n-1)$-мерным многообразием класса C^∞. При этом в окрестности каждой точки $P_0 \in M_c$ в качестве локальных координат можно взять некоторые $n-1$ декартовых координат объемлющего евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. По сути дела теорема 1 является теоремой о неявной функции, сформулированной в удобных для нас терминах. Фиксируем некоторую точку $P_0 \in M_c$, $P_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Поскольку

$$\operatorname{grad}_{P_0} f \neq 0, \quad \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right),$$

то найдется отличная от нуля в точке P_0 частная производная. Без ограничения общности мы можем считать, что $\frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0^1, \ldots, x_0^n) \neq \neq 0$. Пусть $Q_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^{n-1})$ — точка в $\mathbb{R}^{n-1}$, являющаяся образом точки P_0 при проекции вдоль координатной оси x^n.

Согласно теореме о неявной функции существуют такая окрестность $V_0 \ni Q_0$ точки Q_0, интервал $(x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$ и такая непрерывная функция $y = y(x^1, \ldots, x^{n-1})$ класса гладкости C^∞, определенная в окрестности V_0, что:

а) $f(x^1, \ldots, x^{n-1}, y(x^1, \ldots, x^{n-1})) \equiv c$ в области V_0;
б) $x_0^n = y(x_0^1, \ldots, x_0^{n-1})$;
в) $|x_0^n - y(x^1, \ldots, x^{n-1})| < \delta$ в области V_0;
г) всякое решение $(x^1, \ldots, x^n) \in V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$ уравнения $f(x^1, \ldots, x^n) = c$ имеет вид $x^n = y(x^1, \ldots, x^{n-1})$.

Тогда через U_0 обозначим окрестность точки $P_0 \in M_c$, равную $U_0 = M_c \cap (V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0 + \delta))$. Окрестность U_0 и будет искомой картой, содержащей точку P_0. В качестве координатного гомеоморфизма φ_0 возьмем ограничение на U_0 проекции $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, $\varphi_0(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^{n-1}) \in V^0$. Обратное отображение φ_0^{-1} зададим равенством

$$\varphi_0^{-1}(x^1, \ldots, x^{n-1}) = (x^1, \ldots, x^{n-1}, y(x^1, \ldots, x^{n-1})).$$

Из условия в) следует, что $\varphi_0^{-1}(x^1, \ldots, x^{n-1}) \in V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$, а из условия а), что $\varphi_0^{-1}(x^1, \ldots, x^{n-1}) \in M_c$. Таким образом, $\varphi_0^{-1}(x^1, \ldots, x^{n-1}) \in U_0$. Отображения φ_0 и φ_0^{-1} непрерывны и взаимно обратны.

Мы доказали, что множество M_c является $(n-1)$-мерным многообразием, и указали в окрестности каждой точки $P_0 \in M_c$ локальную систему координат, составленную из некоторых декартовых координат евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Докажем теперь, что функции замены координат являются гладкими функциями. Пусть точка P_0 содержится еще в одной карте U_1 и в качестве локальных координат в карте U_1 взяты декартовы координаты $x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n$. Тогда на пересечении карт $U_0 \cap U_1$ координаты $x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n$ выражаются через координаты $x^1, \ldots, x^{n-1}$ как функции следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x^1 = x^1,\\
&\ldots\ldots\\
&x^{i-1} = x^{i-1},\\
&x^{i+1} = x^{i+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&x^{n-1} = x^{n-1},\\
&x^n = y(x^1, \ldots, x^{n-1}).
\end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку функция $y = y(x^1, \ldots, x^{n-1})$ имеет класс гладкости C^∞, то и все функции (1) будут класса гладкости C^∞. Теорема 1 полностью доказана. □

Пример 2. Снова рассмотрим n-мерную сферу S^n, заданную уравнением $f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (x^k)^2 = 1$. Градиент функции f ра-

вен $\operatorname{grad} f = (2x^1, 2x^2, \ldots, 2x^{n+1})$. Если точка $P = (x^1, x^2, \ldots, x^{n+1})$ лежит на сфере S^n, то не все ее координаты обращаются в нуль; следовательно, одна из координат градиента отлична от нуля. Выполнены условия теоремы 1, и, значит, сфера S^n является гладким многообразием класса C^∞.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ размерности n^2. Будем представлять точки пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ в виде квадратных матриц A порядка n с координатами $A = (a_{ij})$. Рассмотрим множество $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ всех матриц $A \in \mathbb{R}^{n^2}$, детерминант которых равен единице: $\det A = 1$. Множество $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ является группой относительно операции умножения матриц и называется *специальной линейной группой*. Покажем, что группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием класса C^∞ и размерности $n^2 - 1$.

Рассмотрим функцию f от n^2 переменных $f(a_{ij}) = \det(a_{ij})$. Функция f является многочленом, и, значит, имеет класс гладкости C^∞. Чтобы применить теорему 1, следует вычислить градиент функции f во всех точках группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Пусть E — единичная матрица. Поскольку $\det E = 1$, то $E \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Вычислим градиент функции f в точке E. Для этого разложим сначала $\det A$ по первой строке:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}. \qquad (2)$$

В разложении (2) стоят детерминанты матриц A_{1k}, которые являются многочленами всех переменных a_{ij}, кроме элементов первой строки. Тогда частная производная функции f по переменной a_{11} имеет вид $\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = \frac{\partial}{\partial a_{11}}(a_{11} \det A_{11}) = \det A_{11}$. В точке E получаем

$$\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(E) = 1. \qquad (3)$$

Таким образом, градиент функции f в точке E отличен от нуля.

Покажем теперь, что в произвольной точке $A_0 \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ градиент функции f тоже отличен от нуля. Введем новые переменные b_{ij}, задаваемые равенством $(b_{ij}) = B = A_0^{-1} A = A_0^{-1}(a_{ij})$. Если $A = A_0$, то $B = E$. Тогда

$$f(A) = f(A_0 B) = \det(A_0 B) = \det A_0 \det B = f(B).$$

Тогда, дифференцируя суперпозицию функций, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(E) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0) \cdot \frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}. \qquad (4)$$

Левая часть равенства (4) равна единице согласно формуле (3). Следовательно, в правой части хотя бы одно слагаемое отлично от нуля. Значит, одна из частных производных $\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0)$, а вместе с ней и градиент функции f отличны от нуля. Таким образом, выполнены условия теоремы 1, и, значит, группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием размерности $n^2 - 1$.

Теорема 1 легко обобщается на случай систем нелинейных уравнений. Заметим, что условие теоремы 1 можно сформулировать следующим образом. Градиент функции f представится в виде столбца частных производных функции f, и, значит, является матрицей Якоби функции f. Тогда условие нетривиальности градиента f в некоторой точке $P_0 \in \mathbb{R}^n$ эквивалентно тому, что ранг матрицы Якоби df функции f равен единице, т. е. максимален.

Пусть задана система уравнений

$$\begin{aligned} &f^1(x^1, \ldots, x^n) = c^1, \\ &f^2(x^1, \ldots, x^n) = c^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f^k(x^1, \ldots, x^n) = c^k, \end{aligned} \tag{5}$$

которую кратко можно записать в виде $f(\vec{x}) = \vec{c}$, где $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{c} = (c^1, \ldots, c^k) \in \mathbb{R}^k$, а f — отображение, определяемое функциями $(f^1, \ldots, f^k)$. Множество $M_{\vec{c}}$ решений системы (5) будем называть многообразием уровня системы функций $(f^1, \ldots, f^k)$.

Теорема 2. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — отображение класса гладкости C^∞, $M_{\vec{c}}$ — множество решений системы уравнений $f(\vec{x}) = \vec{c}$. Если ранг матрицы Якоби отображения f максимален в каждой точке $P_0 \in M_{\vec{c}}$ (т. е. $\operatorname{rk} df(P_0) = k$), то $M_{\vec{c}}$ является $(n-k)$-мерным гладким многообразием класса C^∞. При этом в окрестности каждой точки $P_0 \in M_{\vec{c}}$ в качестве локальных координат можно взять некоторые $n - k$ декартовых координат объемлющего евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1 с той лишь разницей, что вместо одной переменной x^n выделяется k переменных $x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$. Обозначив эту группу переменных одной буквой, скажем, $\vec{y} = (x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})$, мы будем получать те же формулы, что и в доказательстве теоремы 1. □

Пример 4. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами x^1, x^2, x^3, x^4 систему двух уравнений

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1. \tag{6}$$

Соответствующие им функции f_1 и f_2 имеют вид

$$f^1(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1)^2 + (x^2)^2, \quad f^2(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^3)^2 + (x^4)^2.$$

Чтобы применить теорему 2, вычислим матрицу Якоби отображения $f = (f^1, f^2)$:

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \frac{\partial f^1}{\partial x^3} & \frac{\partial f^1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x^3} & \frac{\partial f^2}{\partial x^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\operatorname{rk} df \leqslant 1$ только в том случае, когда одна из строк матрицы Якоби равна нулю, что невозможно в точках решения системы (6). Таким образом, решения системы (6) образуют гладкое двумерное многообразие класса C^∞. Поскольку система (6) распадается на два уравнения, каждое от своей группы переменных, то и множество решений можно представить в виде декартова произведения решений каждого уравнения в отдельности, т. е. решения системы (5) представляются в виде произведения двух экземпляров окружности. Это многообразие называется (двумерным) *тором*.

§ 3. Касательные векторы. Касательное пространство

В гл. 1 мы видели, что для изучения метрических свойств кривых и поверхностей и вообще метрических свойств областей евклидового пространства важную роль играют так называемые инфинитезимальные свойства пространств. Это такие свойства, которые определяются в очень малой окрестности фиксированной точки P путем пренебрежения величинами большего порядка малости, чем расстояние до точки P. В математическом анализе существуют аналогичные процедуры пренебрежения бесконечно малыми величинами при изучении поведения функции в окрестности некоторой точки. При изучении гладких многообразий тоже возникает естественное желание осуществлять процедуру пренебрежения бесконечно малыми величинами. Один из таких способов заключается во введении специальных понятий, аналогичных касательным векторам к кривым и касательным плоскостям к поверхностям.

1. Простейшие примеры. Рассмотрим гладкую кривую в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, параметризованную некоторым параметром

t: $\vec{x} = \vec{x}(t) = (x^1(t),\ x^2(t),\ x^3(t))$. Фиксируем значение параметра t_0. Применим к вектор-функции $\vec{x} = \vec{x}(t)$ разложение по формуле Тейлора в окрестности точки t_0:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)\Delta t + O(\Delta t^2). \qquad (1)$$

Первые два слагаемых в правой части (1) можно, с одной стороны, рассматривать как некоторую аппроксимацию вектор-функции $\vec{x}(t)$ в окрестности точки t_0 с помощью линейной вектор-функции. С другой стороны, эта линейная функция $\vec{y}(\Delta t) = \vec{x}(t_0) + \frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)\Delta t$ задает в $\mathbb{R}^3$ прямую, проходящую через точку $P_0 = \vec{x}(t_0)$. Более того, среди всех прямых, проходящих через точку P_0, прямая $\vec{y}(t)$ наиболее «тесно» примыкает к кривой $\vec{x}(t)$. Скажем, что прямая $\vec{y}(t) = \vec{a} + \vec{b}t$, $|\vec{b}| = 1$, *касается* кривой $\vec{x}(t)$ в точке $\vec{x}(t_0)$, если расстояние от точки $\vec{x}(t)$ до прямой есть величина бесконечно малая по отношению к расстоянию от точки $P_0 = \vec{x}(t_0)$ до той же точки на $\vec{x}(t)$. Тогда точка P_0 лежит на прямой $\vec{y}(t)$. Можно считать, что $\vec{x}(t_0) = \vec{y}(t_0)$. Тогда $\vec{y}(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \vec{b}\Delta t$. Расстояние от точки $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$ до прямой $\vec{y}(t)$ равно

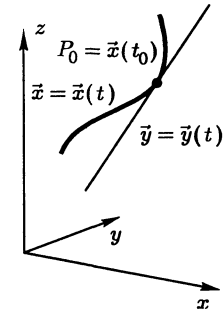


Рис. 7

$$|\vec{x}(t_0 + \Delta t) - \vec{x}(t_0) - \vec{b}(\vec{x}(t_0 + \Delta t) - \vec{x}(t_0),\ \vec{b})| = \\ = o(|\vec{x}(t_0 + \Delta t) - \vec{x}(t_0)|). \qquad (2)$$

Допустим, что $\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) \neq 0$. Разлагая $\vec{x}(t)$ по формуле (1), получаем

$$\left|\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)\Delta t - \vec{b}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)\Delta t,\ \vec{b}\right)\right| = o(\Delta t^2)$$

при $\Delta t \to 0$, или, разделив на Δt,

$$\left|\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) - \vec{b}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0),\ \vec{b}\right)\right| = o(\Delta t). \qquad (3)$$

Поскольку левая часть (3) не зависит от Δt, то, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем равенство

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) = \vec{b}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0),\ \vec{b}\right), \qquad (4)$$

что означает, что векторы $\vec{b}$ и $\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)$ коллинеарны. Таким образом, линейная часть формулы Тейлора (1) вектор-функции $\vec{x}(t)$ задает параметрическое представление касательной прямой в точке P_0 (рис. 7). Рассмотрим теперь поверхность M в трехмерном про-

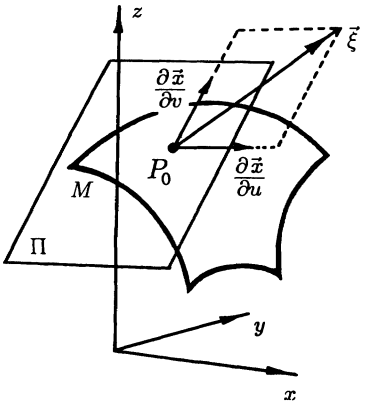


Рис. 8

странстве $\mathbb{R}^3$, заданную в параметрическом виде вектор-функции $\vec{x}=\vec{x}(u, v)$ от двух независимых параметров u, v. Поверхность $\vec{x}(u, v)$ называется *невырожденной*, если в каждой точке частные производные $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u, v)$ и $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u, v)$ линейно независимы как векторы в $\mathbb{R}^3$. Фиксируем параметры (u_0, v_0) и плоскость П: $\vec{x}=\vec{x}(u_0, v_0)+\vec{a}u+\vec{b}v$, проходящую через точку $P_0=\vec{x}(u_0, v_0)$ на поверхности. Плоскость П называется *касательной* к поверхности M в точке P_0, если расстояние от плоскости П до точки $\vec{x}(u, v)$ есть величина бесконечно малая по сравнению с расстоянием от точки $\vec{x}(u, v)$ до точки P_0. Разлагая функцию $\vec{x}(u, v)$ по формуле Тейлора в точке (u_0, v_0):

$$\vec{x}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)=\vec{x}(u_0, v_0)+ \\ +\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u+\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v+O(\Delta u^2+\Delta v^2), \quad (5)$$

получаем, что линейная часть разложения (5) определяет двупараметрическое задание касательной плоскости П к поверхности M в точке $P_0=\vec{x}(u_0, v_0)$ (рис. 8).

Естественно назвать *касательным вектором* к поверхности M в точке P_0 всякий вектор с началом в точке P_0, лежащий в касательной плоскости П. Из формулы (5) видно, что параметрическое задание касательной плоскости П к поверхности M в точке P_0 имеет вид

$$\vec{x}(\Delta u, \Delta v)=\vec{x}(u_0, v_0)+\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u+\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v \quad (6)$$

Следовательно, всякий касательный вектор $\vec{\xi}$ разлагается в линейную комбинацию векторов $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)$ и $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)$:

$$\xi=\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u+\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v \quad (7)$$

для подходящего выбора параметров Δu и Δv. Таким образом, векторы $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)$ и $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)$ образуют базис в касательной плоскости П, а величины Δu и Δv служат линейными координатами касательного вектора $\vec{\xi}$ в этом базисе.

Проведем теперь на поверхности M гладкую кривую $\vec{x} = \vec{x}(t)$, проходящую через точку P_0. Поскольку кривая $\vec{x} = \vec{x}(t)$ лежит на поверхности M, то ее параметрически можно представить в виде композиции

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(u(t), v(t)) \tag{8}$$

для некоторых функций $u(t)$, $v(t)$. Иначе это можно сказать следующим образом: функции $u(t)$, $v(t)$ являются параметрическим заданием кривой в локальной системе координат (u, v) на поверхности M. Тогда условие прохождения кривой через точку P_0 перепишем в виде условия на координаты $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$. Вычислим теперь касательный вектор к кривой (или, как его иначе называют, вектор скорости кривой):

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) = \frac{d}{dt}(\vec{x}(u(t), v(t)))|_{t=t_0} =$$
$$= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u(t_0), v(t_0))\frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u(t_0), v(t_0))\frac{dv}{dt}(t_0) =$$
$$= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{dv}{dt}(t_0).$$

Следовательно, касательный вектор к кривой, лежащей на поверхности M, лежит в касательной плоскости.

***Определение* 1.** Пусть $\vec{\xi} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\xi^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\xi^2$ — касательный вектор к поверхности M в точке P_0. Тогда числа (ξ^1, ξ^2) назовем *координатами касательного вектора* ξ к поверхности M в точке P_0 в локальной системе координат (u, v) на поверхности M.

Это определение годится не только для координат (u, v), с помощью которых параметрически задана поверхность M, но и для произвольной системы координат (u', v') в окрестности точки P_0. В самом деле, если (u', v') — другая система координат, то координаты u и v выражаются как гладкие функции от координат u', v': $u = u(u', v')$, $v = v(u', v')$, $u_0 = u(u_0', v_0')$, $v_0 = v(u_0', v_0')$. Тогда, рассматривая композиции функций, мы получаем новое параметрическое задание поверхности M:

$$\vec{x} = \vec{x}(u(u', v'), v(u', v')). \tag{9}$$

Параметрическое уравнение касательной плоскости П в точке P_0 для новых параметров (u', v') имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}(u(u_0', v_0'), v(u_0', v_0')) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u'}\Delta u' + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v'}\Delta v' =$$
$$= \vec{x}(u_0, v_0) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial u'}\Delta u' + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial u'}\Delta u' +$$

$$+\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial u}{\partial v'}\Delta v'+\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial v}{\partial v'}\Delta v'=$$
$$=\vec{x}(u_0,v_0)+\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)\Big(\frac{\partial u}{\partial u'}(u'_0,v'_0)\Delta u'+\frac{\partial u}{\partial v'}(u'_0,v'_0)\Delta v'\Big)+$$
$$+\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u_0,v_0)\Big(\frac{\partial v}{\partial u'}(u'_0,v'_0)\Delta u'+\frac{\partial v}{\partial v'}(u'_0,v'_0)\Delta v'\Big).$$

Полагая

$$\begin{aligned}\Delta u&=\frac{\partial u}{\partial u'}(u'_0,v'_0)\Delta u'+\frac{\partial u}{\partial v'}(u'_0,v'_0)\Delta v',\\ \Delta v&=\frac{\partial v}{\partial u'}(u'_0,v'_0)\Delta u'+\frac{\partial v}{\partial v'}(u'_0,v'_0)\Delta v',\end{aligned}\tag{10}$$

мы приходим к параметрическому заданию касательной плоскости для старых параметров (u,v):

$$\vec{x}=\vec{x}(u_0,v_0)+\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u+\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v.$$

Таким образом, формула (9) дает другое параметрическое задание поверхности M с той же касательной плоскостью П. Поэтому кривая (8) может быть записана с помощью некоторых функций $u'(t)$, $v'(t)$ так, чтобы $\vec{x}=\vec{x}(u(u'(t),v'(t)),v(u'(t),v'(t))$. Тогда согласно определению координат касательного вектора к кривой в локальной системе координат (u',v') пара чисел $\big(\frac{du'}{dt}(t_0),\frac{dv'}{dt}(t_0)\big)$ является координатами касательного вектора к кривой. Дифференцируя сложные функции, получим зависимость между координатами касательного вектора к кривой в различных локальных системах координат:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t_0)&=\frac{\partial u}{\partial u'}(u'_0,v'_0)\frac{du'}{dt}+\frac{\partial u}{\partial v'}(u'_0,v'_0)\frac{dv'}{dt}(t_0),\\ \frac{dv}{dt_0}&=\frac{\partial v}{\partial u'}(u'_0,v'_0)\frac{du'}{dt}(t_0)+\frac{\partial v}{\partial v'}(u'_0,v'_0)\frac{dv'}{dt}(t_0).\end{aligned}\tag{11}$$

Сравнивая формулы (10) и (11), получаем, что зависимость между координатами касательного вектора к кривой совпадает с заменой параметров для определения касательной плоскости.

Приведенное определение касательного вектора удобно тем, что при таком определении координаты касательного вектора к кривой, лежащей на поверхности M, зависят не от способа вложения поверхности M в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, а только от локальной системы координат (u,v) на поверхности M. Сформулируем это утверждение в виде отдельной леммы.

Лемма 1. *Пусть M — невырожденная поверхность в $\mathbb{R}^3$, $P_0\in M$, (u,v) — локальная система координат в окрестности точки P_0 поверхности M, $(u(t),v(t))$ — гладкая кривая на*

поверхности M. Тогда касательный вектор к кривой в точке P_0 имеет в локальной системе координат (u, v) координаты $\left(\frac{du}{dt}(t_0), \frac{dv}{dt}(t_0)\right)$. *Если* $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ *— параметрическое задание* M, $\vec{x} = \vec{x}(u(t), v(t))$ *— кривая, то*

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{dv}{dt}(t_0).$$

2. Общее определение касательного вектора. Рассмотренные примеры показывают, что изучение инфинитезимальных свойств кривых в многообразии может быть проведено только в рамках некоторой локальной системы координат на многообразии. В частности, в геометрии важную роль играет понятие касательного вектора и касательного пространства произвольного гладкого многообразия, имеющие полную аналогию с касательными векторами и касательным пространством для поверхности, расположенной в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

***Определение* 2.** Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $P_0 \in M$ — произвольная точка. *Касательным вектором $\vec{\xi}$ в точке P_0 к многообразию M* называется соответствие, которое каждой локальной системе координат $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$ сопоставляет набор чисел $(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n)$, удовлетворяющий следующему соотношению для каждой пары локальных систем координат:

$$\xi_i^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l. \tag{12}$$

Числа $(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n)$ называются *координатами касательного вектора* $\vec{\xi}$ в локальной системе координат $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$. Соотношение (12) называется *тензорным законом преобразования координат* касательного вектора $\vec{\xi}$ при заменах локальных координат.

Определение 2 обобщает понятие координат касательного вектора к кривой на поверхности. Закон (11) изменения этих координат является частным случаем тензорного закона (12) преобразования координат касательного вектора к многообразию. Более того, всякая гладкая кривая на гладком многообразии снабжается в каждой своей точке касательным вектором в смысле определения 2. Это важное свойство мы сформулируем в виде предложения.

***Предложение* 1.** *Пусть M — гладкое многообразие, γ: $(-1, 1) \to M$ — гладкое отображение интервала $(-1, 1)$ в многообразие M. Тогда соответствие, которое каждой локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки $P_0 = \gamma(0)$*

сопоставляет набор чисел $\left(\frac{dx^1}{dt}(\gamma(t)), \ldots, \frac{dx^n}{dt}(\gamma(t))\right)_{t=0}$, *является касательным вектором в смысле определения* 2.

Для доказательства предложения 1 достаточно проверить тензорный закон преобразования координат (12). Положим $\xi_j^k = \frac{dx_j^k}{dt}(\gamma(t))\big|_{t=0}$, где $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ — локальная система координат на многообразии M в окрестности точки P_0. Тогда для двух локальных систем координат получим:

$$\xi_i^k = \frac{d}{dt} x_i^k(\gamma(t))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x_i^k(x_j^1(\gamma(t)), \ldots, x_j^n(\gamma(t)))\big|_{t=0} =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(\gamma(t)) \frac{d}{dt} x_j^l(\gamma(t))\big|_{t=0} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l.$$

Это и есть тензорный закон (12). □

Таким образом, указанное в предложении 1 соответствие естественно называть *касательным вектором к кривой* γ или *вектором скорости кривой* γ. Касательный вектор к кривой будем обозначать через $\frac{d\gamma}{dt}(t_0)$ или $\dot{\gamma}(t_0)$.

3. Касательное пространство $T_{P_0}(M)$. Множество всех касательных векторов в фиксированной точке P_0 к многообразию M называется *касательным пространством к многообразию* M *в точке* P_0. Это множество обозначается через $T_{P_0}(M)$. Каждый касательный вектор $\vec{\xi} \in T_{P_0}(M)$ однозначно определяется своими компонентами в одной фиксированной системе координат. Действительно, если задан набор чисел $(\mu^1, \ldots, \mu^n)$ и мы считаем этот набор компонент искомого касательного вектора в фиксированной локальной системе координат $(x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^n)$, т. е. $\mu^k = \xi_{i_0}^k$, то для задания всего касательного вектора необходимо определить его компоненты в каждой локальной системе координат $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$. Положим для этого

$$\xi_i^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\mu^l.$$

Полученные компоненты должны удовлетворять тензорному закону преобразования координат (12). Для проверки этого закона подставим в (12) значения ξ_i^k и ξ_j^l:

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\mu^l = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^s}(P_0) \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_j^s}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\mu^l =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^s}(P_0) \frac{\partial x_j^s}{\partial x_{i_0}^l}(P_0) \right) \mu^l.$$

Поскольку $\frac{\partial x_i^k}{\partial x_{i_0}^l(P_0)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^s}(P_0)\frac{\partial x_j^s}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)$ (закон изменения матрицы Якоби тройной замены координат), то соотношение (12) выполняется тождественно.

Мы установили, таким образом, что множество всех касательных векторов к многообразию M в точке P_0 однозначно описывается своими компонентами в одной фиксированной локальной системе координат. Следовательно, все касательное пространство T_{P_0} отождествляется с арифметическим векторным пространством $\mathbb{R}^n$. Это значит, что касательное пространство $T_{P_0}(M)$ можно снабдить структурой линейного пространства. Казалось бы, структура линейного пространства в T_{P_0} зависит от выбора локальной системы координат в окрестности точки P_0. В действительности верно обратное.

Предложение 2. *Операции сложения векторов и умножения вектора на число в касательном пространстве $T_{P_0}(M)$ не зависят от выбора локальной системы координат на многообразии M в окрестности точки P_0.*

Доказательство. Пусть $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ — два вектора из $T_{P_0}(M)$, $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$, $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ — две локальные системы координат на многообразии M в окрестности точки P_0. Пусть $(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n)$, $(\eta_i^1, \ldots, \eta_i^n)$ — координаты векторов $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ в системе $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$, а $(\xi_j^1, \ldots, \xi_j^n)$, $(\eta_j^1, \ldots, \eta_j^n)$ — координаты тех же векторов в системе $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$. Тогда согласно тензорному закону (12) преобразования координат касательных векторов справедливы соотношения

$$\xi_i^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l, \tag{13}$$

$$\eta_i^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\eta_j^l. \tag{14}$$

Следовательно, складывая почленно эти равенства, получаем

$$(\xi_i^k + \eta_i^k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)(\xi_j^l + \eta_j^l).$$

Последнее равенство означает, что наборы чисел $(\xi_i^1 + \eta_i^1, \ldots$ $\ldots, \xi_i^n + \eta_i^n)$ подчиняются тензорному закону преобразования координат, т. е. определяют один касательный вектор независимо от выбора локальной системы координат. Точно так же, умножая (13) на число λ, получаем: $\lambda\xi_i^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)(\lambda\xi_j^l)$, т. е. набор чисел

$(\lambda\xi_i^k)$ тоже подчиняется тензорному закону преобразования координат касательного вектора. □

Тензорный закон преобразования координат (12) можно рассматривать как способ отождествления арифметических пространств координат касательных векторов в каждой локальной системе координат. Этот способ заключается в том, что столбец координат (ξ_j^k) умножается на матрицу Якоби перехода от координат $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ к координатам $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$:

$$\begin{pmatrix} \xi_i^1 \\ \cdots \\ \xi_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^1} & \cdots & \frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_i^n}{\partial x_j^1} & \cdots & \frac{\partial x_i^n}{\partial x_j^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \cdots \\ \xi_j^n \end{pmatrix}$$

или $(\xi_i^k) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)(\xi_j^l)$.

Следовательно, касательное пространство $T_{P_0}(M)$ — это пространство, изоморфное всем арифметическим пространствам координат касательных векторов.

4. Пучок соприкасающихся кривых. В предыдущих пунктах мы дали формально-алгебраическое определение касательного пространства к многообразию. В этом определении плохо видно геометрическое свойство касательного вектора — линейного приближения к кривой. Как же определить это свойство безотносительно к расположению многообразия в линейном пространстве? Один и тот же вектор соответствует сразу многим кривым, для которых он является касательным. Поэтому нам ничего не остается, как выделить такие классы кривых, которые в линейных пространствах имели бы общий касательный вектор.

***Определение* 3.** Две кривые, γ_1 и γ_2, на многообразии M, пересекающиеся в одной точке P_0, называются *соприкасающимися*, если в каждой локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки P_0 выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} (x^k(\gamma_1(t)) - x^k(\gamma_2(t)))^2 = o(t - t_0)^2 \text{ при } t \to t_0. \qquad (15)$$

Как и раньше, условие соприкасания (15) достаточно проверять всего лишь в одной локальной системе координат. Условие соприкасания тесным образом связано с касательными векторами. Следующая теорема, в частности, оправдывает термин «соприкасающиеся кривые».

Теорема 1. *Две гладкие кривые γ_1 и γ_2 на многообразии M соприкасаются в точке P_0 тогда и только тогда, когда у кривых γ_1 и γ_2 совпадают касательные векторы в точке P_0.*

Доказательство. Условие (15) перепишем в следующем виде:

$$\lim_{t \to t_0} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x^k(\gamma_1(t)) - x^k(\gamma_2(t))}{t - t_0} \right)^2 = 0.$$

После элементарных преобразований получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} x^k(\gamma_1(t)) - \frac{d}{dt} x^k(\gamma_2(t)) \right)^2 \Big|_{t=t_0} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} x^k(\gamma_1(t)) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} x^k(\gamma_2(t)) \Big|_{t=t_0}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Последнее равенство в точности означает, что касательные векторы к кривым γ_1 и γ_2 совпадают: $\dot{\gamma}_1(t_0) = \dot{\gamma}_2(t_0)$.

Обратно, если $\dot{\gamma}_1(t_0) = \dot{\gamma}_2(t_0)$, то

$$\lim_{t \to t_0} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x^k(\gamma_1(t)) - x^k(\gamma_2(t))}{t - t_0} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} x^k(\gamma_1(t)) - \frac{d}{dt} x^k(\gamma_2(t)) \right)^2 \Big|_{t=t_0} = 0 \qquad \square$$

Теорема 1 дает другой способ определения касательного вектора к кривой. Множество всех гладких кривых, проходящих через заданную точку P_0 на многообразии M, распадается на непересекающиеся классы попарно соприкасающихся кривых. Назовем *касательным вектором* класс соприкасающихся кривых, проходящих через точку $P_0 \in M$. Тогда мы получаем взаимно однозначное соответствие между касательными векторами в смысле определения 2 и в смысле классов соприкасающихся кривых (рис. 9).

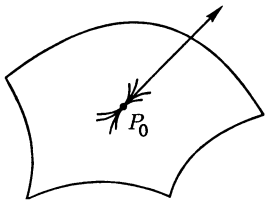


Рис. 9

5. Производная функции по направлению. Существует еще один способ представлять касательный вектор на многообразии M. Как всегда, начнем с простого примера. Пусть $f(x, y)$ — гладкая функция от двух переменных, $P_0 = (x_0, y_0)$ — некоторая точка, $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ — вектор в плоскости $\mathbb{R}^2$. В математическом анализе изучают производные функции f по направлению вектора $\vec{\xi}$, которые определяют по формуле

$$\vec{\xi}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi^1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\xi^2. \qquad (16)$$

Производную по направлению вектора $\vec{\xi}$ можно также определить, используя гладкие кривые. Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящая через точку P_0. Допустим, что касательный вектор к кривой $\gamma(t)$ в точке P_0 равен $\vec{\xi}$. Тогда (рис. 10)

$$\vec{\xi}(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0}, \quad \gamma(t_0) = P_0. \tag{17}$$

В самом деле, если $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, то $\xi^1 = \frac{dx}{dt}(t_0)$, $\xi^2 = \frac{dy}{dt}(t_0)$. Следовательно, подставляя координаты кривой $\gamma(t)$ в аргументы функции f и дифференцируя по параметру, получаем

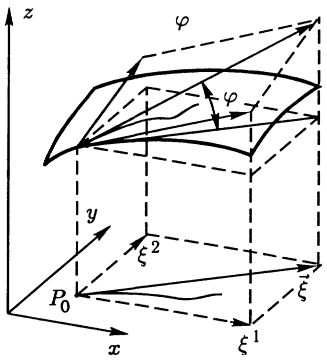


Рис. 10

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=t_0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi^1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\xi^2 = \vec{\xi}(f).$$

Таким образом, определим теперь в общем случае по каждому касательному вектору $\vec{\xi}$ к многообразию M в точке P_0 операцию дифференцирования гладкой функции в точке P_0.

***Определение* 4.** Пусть $P_0 \in M$, $\vec{\xi} \in T_{P_0}$, $\gamma(t)$ — гладкая кривая, проходящая через точку P_0, $\gamma(t_0) = P_0$ и ее касательный вектор в точке P_0 равен $\vec{\xi}$. Пусть f — гладкая функция на многообразии M. Число

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = \vec{\xi}(f) \tag{18}$$

называется *производной функции f по направлению касательного вектора $\vec{\xi}$*. Операция взятия производной называется *дифференцированием функции f по направлению вектора $\vec{\xi}$*.

***Теорема* 2.** *Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат в окрестности точки $P_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ многообразия M, $\vec{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — касательный вектор к многообразию M в точке P_0, $f = f(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкая функция в окрестности точки P_0, представленная как функция от локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда*

$$\vec{\xi}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)\xi^i. \tag{19}$$

Следовательно, определение (18) *производной не зависит от выбора кривой* γ *в классе соприкасающихся кривых, а правая часть* (19) *не зависит от выбора локальной системы координат. Если* g *— другая гладкая функция в окрестности точки* P_0, *то для произведения функций* f *и* g *справедлива формула дифференцирования Ньютона — Лейбница:*

$$\vec{\xi}(fg) = f(x_0^1, \ldots, x_0^n)\vec{\xi}(g) + \vec{\xi}(f)g(x_0^1, \ldots, x_0^n). \tag{20}$$

Доказательство. Представим кривую $\gamma(t)$, проходящую через точку P_0, в координатном виде: $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$. Тогда по определению касательного вектора к кривой $\frac{dx^i}{dt}(t_0) = \xi^i$. Далее,

$$\vec{\xi}(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \ldots, x^n(t))\Big|_{t=t_0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)\frac{\partial x^i}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)\xi^i.$$

Формула (19) доказана. Докажем формулу (20). Используя (19) и дифференцируя произведение функций, получаем

$$\vec{\xi}(fg) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(f(x^1, \ldots, x^n)g(x^1, \ldots, x^n))\Big|_{x^k = x_0^k} \xi^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)g(x_0^1, \ldots, x_0^n) + f(x_0^1, \ldots, x_0^n)\frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n) \right)\xi^i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)\xi^i \right) g(x_0^1, \ldots, x_0^n) +$$

$$+ f(x_0^1, \ldots, x_0^n)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)\xi^i \right) =$$

$$= \vec{\xi}(f)g(x_0^1, \ldots, x_0^n) + f(x_0^1, \ldots, x_0^n)\vec{\xi}(g).$$

Таким образом, формула (20) тоже доказана. □

Операция дифференцирования гладкой функции f по направлению касательного вектора $\vec{\xi}$ может быть охарактеризована некоторыми своими свойствами так, что в формулировках этих свойств вовсе не будет участвовать какая-либо локальная система координат. Такой способ описания наиболее удобен при проверке независимости геометрических конструкций от конкретной локальной системы координат. У операции дифференцирования таких свойств два:

а) операция дифференцирования по направлению вектора $\vec{\xi}$ линейна, т. е. если f и g — две гладких функции, а λ, μ — два произвольных числа, то

$$\vec{\xi}(\lambda f + \mu g) = \lambda \vec{\xi}(f) + \mu \vec{\xi}(g); \tag{21}$$

б) операция дифференцирования по направлению вектора $\vec{\xi}$ удовлетворяет формуле (20) Ньютона — Лейбница.

Дадим общее определение.

***Определение* 5.** Операция A, сопоставляющая каждой гладкой функции f класса C^∞ на гладком многообразии M число $A(f)$, удовлетворяющее свойствам а) и б), называется *операцией дифференцирования в точке* $P_0 \in M$.

В формуле Ньютона — Лейбница (20) участвуют значения функций в точке P_0. Поэтому операции дифференцирования в различных точках P_0 и P_1 не могут совпадать. Ясно, что операция дифференцирования по направлению касательного вектора $\vec{\xi}$ является частным случаем просто операции дифференцирования в смысле определения 5. Оказывается, других операций дифференцирования нет. Это значит, что для каждой операции дифференцирования в смысле определения 5 найдется касательный вектор, по направлению которого и производится дифференцирование функций.

***Теорема* 3.** *Пусть M — гладкое многообразие класса C^∞, $P_0 \in M$ — произвольная точка, A — операция дифференцирования в смысле определения* 5. *Тогда существует и единствен такой касательный вектор $\vec{\xi}$ в точке P_0, что $A(f) = \vec{\xi}(f)$ для любой гладкой функции f в окрестности точки P_0.*

Доказательство. Касательный вектор будем искать в виде столбца его компонент в некоторой локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки P_0. Тогда всякую гладкую функцию будем представлять в виде функции от переменных $(x^1, \ldots, x^n)$. Докажем две вспомогательные леммы.

***Лемма* 2.** *Всякую гладкую функцию $f(x^1, \ldots, x^n)$ класса C^∞ можно представить в виде*

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)(x^i - x_0^i) + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x^1, \ldots, x^n)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j), \tag{22}$$

где $h_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкие функции класса C^∞.

Доказательство. Запишем тождество:

$$f(x^1, \ldots, x^n) \equiv f(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \ldots, x_0^n + t(x^n - x_0^n))\, dt,$$

и произведем дифференцирование по t под знаком интеграла:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \ldots, x_0^n + t(x^n - x_0^n))(x^i - x_0^i)\, dt = f(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) h_i(x^1, \ldots, x^n). \quad (23)$$

В последнем равенстве функции

$$h_i(x^1, \ldots, x^n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \ldots, x_0^n + t(x^n - x_0^n))\, dt$$

являются гладкими функциями класса C^∞. Подставляя $x^i = x_0^i$, получаем

$$h_i(x_0^1, \ldots, x_0^n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)\, dt = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n). \quad (24)$$

Применим теперь формулу (23) к самим функциям $h_i(x^1, \ldots, x^n)$. Получим

$$h_i(x^1, \ldots, x^n) = h_i(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) h_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \quad (25)$$

где $h_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ — некоторые гладкие функции класса C^∞. Подставим (25) в (23) и учтем (24):

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \sum_{i,j=1}^n (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) h_{ij}(x^1, \ldots, x^n).$$

В итоге мы получили искомое представление (22). □

Лемма 3. *Пусть f, g — две такие гладкие функции на многообразии M, что $f(P_0) = g(P_0) = 0$. Тогда для любого дифференцирования A в точке P_0 имеет место равенство $A(fg) = 0$.*

Доказательство следует немедленно из формулы Ньютона — Лейбница (20). □

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3. Представим функцию f в виде (22) и применим к левой и правой частям операцию дифференцирования A. В силу линейности операции получаем

$$A(f)=f(x_0^1,\ldots,x_0^n)A(1)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\ldots,x_0^n)A(x^i-x_0^i)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}A((x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\ldots,x^n)). \quad (26)$$

Заметим, что для постоянной функции, равной единице, $A(1)=$ $=A(1\cdot 1)=A(1)\cdot 1+1\cdot A(1)=2A(1)=0$. Далее, в последней сумме из (26) каждое слагаемое представимо в виде произведения двух функций, $(x^i-x_0^i)$ и $(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\ldots,x^n)$, каждая из которых обращается в нуль в точке P_0. Поэтому в силу леммы 3 $A((x^i-$ $-x_0^i)(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\ldots,x^n))=0$. Следовательно,

$$A(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\ldots,x_0^n)A(x^i-x_0^i). \quad (27)$$

Поскольку в формуле (27) функция f произвольная, то, полагая $\xi^i=A(x^i-x_0^i)$, получаем такой вектор $\vec{\xi}=(\xi^1,\ldots,\xi^n)$, что

$$A(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\ldots,x_0^n)\xi^i=\vec{\xi}(f).$$

Докажем теперь единственность искомого вектора $\vec{\xi}$. Если бы нашлось два таких различных касательных вектора, $\vec{\xi}$ и $\vec{\mu}$, что $A(f)=\vec{\xi}(f)=\vec{\mu}(f)$, то, положив $\vec{\zeta}=\vec{\xi}-\vec{\mu}\neq 0$, мы имели бы равенство $\vec{\zeta}(f)=0$ для любой функции f класса гладкости C^∞ в окрестности точки $P_0\in M$. Однако такого быть не может. В самом деле, в локальной системе координат $(x^1,\ldots,x^n)$ вектор $\vec{\zeta}$ имеет компоненты $(\zeta^1,\ldots,\zeta^n)$, не все равные нулю. Допустим, что $\zeta^k\neq 0$. Тогда для функции $f(x^1,\ldots,x^n)\equiv x^k$ получаем

$$\vec{\zeta}(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\ldots,x_0^n)\zeta^i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^k}{\partial x^i}\zeta^i=\zeta^k\neq 0.$$

Таким образом, теорема 3 полностью доказана. □

Теорема 3 устанавливает взаимно однозначное соответствие между касательными векторами к многообразию M в точке $P_0\in M$ и операциями дифференцирования в точке P_0 гладких функций. Мы можем поэтому дать третье эквивалентное определение касатель-

ного вектора : *касательный вектор* — это операция дифференцирования гладких функций в точке P_0 многообразия M.

Примером дифференцирования гладких функций служит операция взятия частной производной в некоторой локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. По теореме 3 операция $\frac{\partial}{\partial x^k}$ является касательным вектором, координаты которого равны $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 стоит на месте с номером k. Поэтому касательные векторы $\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ образуют базис в касательном пространстве $T_{P_0}(M)$, а всякий касательный вектор $\vec{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ разлагается в линейную комбинацию $\vec{\xi} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}$. Это удобное представление будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Замечание. Строго говоря, представить функцию f в виде (22) можно только локально. Поэтому операция A, вообще говоря, не применима к функциям, входящим в разложение (22). Необходимо либо распространить действие операции A на функции, определенные лишь в окрестности точки $P_0 \in M$, либо подходящим образом изменить разложение (22). Однако, это уточнение мы оставим читателю в качестве упражнения.

6. Касательное расслоение. Множество всех касательных векторов $T_{P_0}(M)$ к многообразию M в точке P_0 является, как мы уже видели, линейным пространством той же размерности, что и многообразие M. В геометрии иногда полезно изучать всю совокупность касательных векторов к многообразию M, которая, очевидно, представляется в виде объединения $\bigcup\limits_{P_0 \in M} T_{P_0}(M)$. Это (пока еще не топологическое) пространство обозначают через $T(M)$ и называют *касательным расслоением многообразия* M. Термин расслоение указывает на то, что $T(M)$ состоит из «слоев» — касательных пространств $T_{P_0}(M)$ к отдельным точкам P_0 многообразия M.

Касательное расслоение отнюдь не является векторным пространством, поскольку операция сложения векторов из разных слоев бессмысленна. Если, например, многообразие M является двумерной поверхностью в $\mathbb{R}^3$, то тогда $T(M)$ состоит из объединения всех касательных плоскостей к поверхности M. Следует обратить внимание, что касательные плоскости к поверхности, как правило, пересекаются и, значит, имеют общие точки. Но по определению $T(M)$ эти точки в каждом слое задают различные векторы, так как начала этих векторов различны.

Рассмотрим следующий пример: окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. На рис. 11 показаны две касательных к окружности в точках P_0 и Q_0 и два

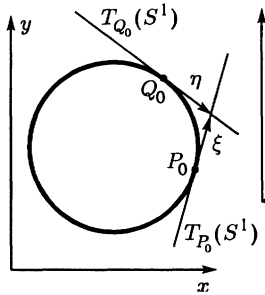


Рис. 11

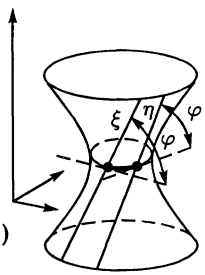


Рис. 12

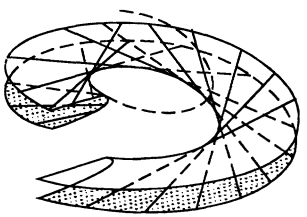


Рис. 13

касательных вектора $\vec{\xi}$ и $\vec{\mu}$, имеющие общий конец. Поэтому, для того чтобы изобразить касательное расслоение $T(S^1)$ в виде топологического пространства, расположенного в евклидовом пространстве, необходимо перейти в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ и «повернуть» касательные к окружности на некоторый угол по отношению к плоскости (x, y) так, чтобы они перестали пересекаться (рис. 12). Тогда касательное расслоение $T(S^1)$ превратится в однополостный гиперболоид (геометрический цилиндр). При этом потеряется свойство «тесного примыкания» касательного пространства $T_{P_0}(S^1)$ к окружности. Мы как бы «оторвали» касательную к окружности и забыли о том, что слои должны касаться окружности S^1. Можно немного изменить способ вложения касательного расслоения в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы свойство касания $T_{P_0}(S^1)$ к S^1 исчезло и различные слои не пересекались. Это можно сделать не на всей окружности S^1, а только на ее части — дуге. Вложим дугу в $\mathbb{R}^3$ в виде винтовой линии. Тогда касательные к винтовой линии не пересекаются (рис. 13).

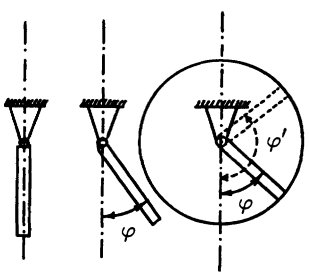


Рис. 14

Рассмотрим некоторые примеры из механики, показывающие, что для описания механических систем удобно рассматривать нетривиальные многообразия и касательные расслоения к ним.

Пример 1. Рассмотрим движение плоского маятника, т. е. твердого стержня, закрепленного шарниром в одной точке (рис. 14). Тогда положение стержня определяется одним параметром — углом φ между осью стержня и вертикалью. Поэтому множество всех положений стержня представляет собой окружность S^1. Множество всех положений называют *конфигурационным пространством.*

Рассмотрим двухшарнирный маятник — два стержня, соединенных шарниром (рис. 15). Положение маятника определяется двумя углами, φ_1 и φ_2, а множество всех положений представляет двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$. На рис. 16 изображена другая система, у которой пространство конфигураций является тором, вложенным в $\mathbb{R}^3$.

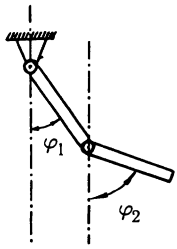


Рис. 15

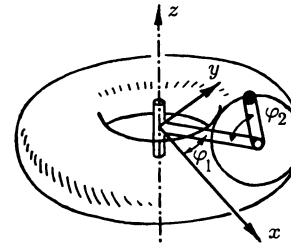


Рис. 16

ПРИМЕР 2. В механике обычно описывают движение механической системы совокупностью параметров, описывающих положение системы и скоростей ее частей. Множество всех расположений механической системы с учетом скоростей называют *фазовым пространством*. Тогда фазовое пространство естественно отождествить с касательным расслоением к конфигурационному пространству. Так, например, если материальная точка движется по поверхности двумерной сферы с постоянным модулем скорости, то фазовым пространством в данном случае будет подмножество в касательном расслоении, состоящее из касательных векторов постоянной длины.

ПРИМЕР 3. Бывают и более сложные примеры конфигурационых и фазовых пространств. Рассмотрим, например, твердое трехмерное тело с закрепленной точкой. Всевозможные его положения в $\mathbb{R}^3$ можно описать следующим образом. Фиксируем в твердом теле три ортонормированных вектора, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, с началом в закрепленной точке. Тогда любое расположение твердого тела с закрепленной точкой однозначно задается расположением этих векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, конфигурационное пространство можно отождествить с компонентой связности множества всех ортонормированных базисов в $\mathbb{R}^3$.

§ 4. Подмногообразия

Теперь мы в состоянии перейти к изучению дифференциального исчисления на гладких многообразиях. Многие важные понятия математического анализа такие, как дифференциал функции, критические точки, неявные функции, находят естественное обобщение на случай произвольных гладких многообразий. В рамках

общей теории гладких многообразий получают естественную интерпретацию такие понятия дифференциального исчисления, как дифференциал функции, градиент функции, теорема о неявной функции, регулярные точки функции и другие.

1. Дифференциал гладкого отображения. Понятие дифференциала гладкой функции легко переносится на случай произвольных гладких многообразий.

***Определение* 1.** Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ гладкое отображение гладких многообразий. *Дифференциалом* df_{P_0} *гладкого отображения* f *в точке* $P_0 \in M_1$ называется линейное отображение касательного пространства $T_{P_0}(M_1)$ в касательное пространство $T_{Q_0}(M_2)$, $Q_0 = f(P_0)$, определяемое в локальных системах координат матрицей Якоби отображения f.

Напомним, что в § 1 мы определили матрицу Якоби для системы функций $y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n)$, $\ldots$, $y^m = f^m(x^1, \ldots, x^n)$ как матрицу частных производных

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда если $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат на многообразии M_1 в окрестности точки P_0, $(y^1, \ldots, y^m)$ — локальная система координат на многообразии M_2 в окрестности точки Q_0, то отображение f представляется в виде набора координатных функций $y^k = f^k(x^1, \ldots, x^n)$, а касательные пространства $T_{P_0}(M_1)$ и $T_{Q_0}(M_2)$ в виде арифметических пространств столбцов длины n и m соответственно. Пусть касательный вектор $\vec{\xi} \in T_{P_0}(M_1)$ имеет координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, а вектор $\eta \in T_{Q_0}(M_2)$ координаты $(\eta^1, \ldots, \eta^m)$. Если $\vec{\eta} = df_{P_0}(\vec{\xi})$, то

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \ldots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}P_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Определение 1 дифференциала df_{P_0}, казалось бы, зависит от выбора локальных систем координат в окрестностях точек $P_0 \in M_1$ и $Q_0 \in M_2$. В действительности же это не так. Чтобы показать это,

мы должны выбрать еще одну пару локальных систем координат в окрестностях точек $P_0 \in M_1$ и $Q_0 \in M_2$, и, пользуясь тензорным законом преобразования координат касательных векторов, проверить инвариантность определения дифференциала. Мы поступим по-другому. У нас было три различных способа определения касательного вектора к многообразию M. В одном из способов вообще не участвовали никакие локальные координаты. Это определение касательного вектора через операцию дифференцирования функций. Поэтому если мы переформулируем определение 1 в терминах дифференцирований гладких функций, то автоматически получим независимость дифференциала отображения f от выбора локальных систем координат в многообразиях M_1 и M_2.

Лемма 1. *Пусть* $f\colon M_1 \to M_2$ *гладкое отображение,* $f(P_0) = Q_0$, $\vec{\xi} = T_{P_0}(M_1)$ *— касательный вектор к многообразию* M_1 *в точке* P_0, $\eta = df_{P_0}(\vec{\xi})$ *— касательный вектор к многообразию* M_2 *в точке* Q_0 *в смысле определения* 1. *Тогда для любой гладкой функции* g *на многообразии* M_2 *выполнено соотношение*

$$\vec{\eta}(g) = \vec{\xi}(g \circ f). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно определению 1 нужно выбрать локальные системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^m)$ в многообразиях M_1 и M_2 в окрестностях точек P_0 и $Q_0 = f(P_0)$ соответственно. Тогда отображение f представляется набором функций $y^k = f^k(x^1, \ldots x^n)$, функция g заменяется на гладкую функцию координат $g = g(y^1, \ldots, y^m)$, вектор $\vec{\xi}$ приобретает координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, а вектор η координаты $(\eta^1, \ldots, \eta^m)$. Тогда

$$\vec{\eta}(g) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\eta^l, \qquad \vec{\xi}(g \circ f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}(g \circ f)\xi^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}(g(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f^m(x^1, \ldots, x^n))\xi^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(P_0)\xi^j = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^l}{\partial x^j}(P_0)\xi^j\right).$$

Применяя к последнему равенству формулу (1), получаем:

$$\vec{\xi}(g \circ f) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\eta^l = \vec{\eta}(g). \qquad \square$$

Рассматривая соотношение (2) в качестве определения дифференциала отображения f, т. е. полагая

$$df_{P_0}(\vec{\xi})(g) = \vec{\xi}(g \circ f), \tag{3}$$

мы на основании леммы 1 делаем вывод, что операция $g \to \to df_{P_0}(\vec{\xi})(g)$ является операцией дифференцирования функции на многообразии M_2 в точке Q_0, т. е. $df_{P_0}(\vec{\xi})$ является касательным вектором в точке Q_0 к многообразию M_2, который совпадает с определением 1, по формуле (1). Следовательно, определение 1 не зависит от выбора локальных систем координат.

Наконец, рассмотрим последнее определение касательного вектора в терминах пучка соприкасающихся кривых.

Лемма 2. *Пусть* $f\colon M_1 \to M_2$ — *гладкое отображение,* $Q_0 = f(P_0)$, γ — *гладкая кривая в многообразии* M_1, *проходящая через точку* P_0, g — *гладкая функция на многообразии* M_2. *Пусть* $\vec{\xi} = \dot{\gamma}(t_0)$, $\vec{\eta} = df_{P_0}(\vec{\xi})$. *Тогда*

$$\eta(g) = \frac{d}{dt} g(f(\gamma(t)))\Big|_{t=t_0}. \tag{4}$$

Доказательство удобнее всего проводить в некоторых локальных системах координат $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^m)$ многообразий M_1, M_2. Пусть все функции и векторы имеют такие же представления в координатах, что и в лемме 1, а $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, $\xi^k = \frac{dx^k}{dt}(t_0)$. Тогда

$$\vec{\eta}(g) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\eta^l,$$

$$\frac{d}{dt} g(f(\gamma(t)))|_{t=t_0} = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(P_0)\frac{dx^j}{dt}(t_0) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^l}{\partial x^j}(P_0)\xi^j = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\eta^l = \vec{\eta}(g). \qquad \square$$

Лемма 2 показывает, что если касательный вектор $\vec{\xi}$ представлен как касательный вектор кривой $\gamma(t)$, $\dot{\gamma}(t_0) = \vec{\xi} \in T_{P_0}(M)$, то его образ $\vec{\eta} = df_{P_0}(\vec{\xi})$ представляется как касательный вектор кривой $f(\gamma(t))$ на многообразии M_2. Более того, из леммы 2 следует, что если кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ соприкасаются в точке $P_0 \in M_1$, то их образы $f(\gamma_1(t))$ и $f(\gamma_2(t))$ тоже соприкасаются в точке $Q_0 \in M_2$. Поэтому дифференциал отображения f можно определять как такое отображение, которое пучку соприкасающихся кривых $\{\gamma(t)\}$ в точке P_0 сопоставляет пучок соприкасающихся кривых в точке Q_0 многообразия M_2, содержащих все кривые $\{f(\gamma(t))\}$. Однако при последнем способе определения дифференциала плохо видно, почему дифференциал df_{P_0} отображения f является *линейным*

отображением касательных пространств. На рис. 17 изображено отображение $f(x, y)=(x, y^2)$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. При этом видно, что пучок соприкасающихся в точке $P_0=(0, 0)$ кривых при отображении f не покрывает весь пучок соприкасающихся кривых в точке Q_0.

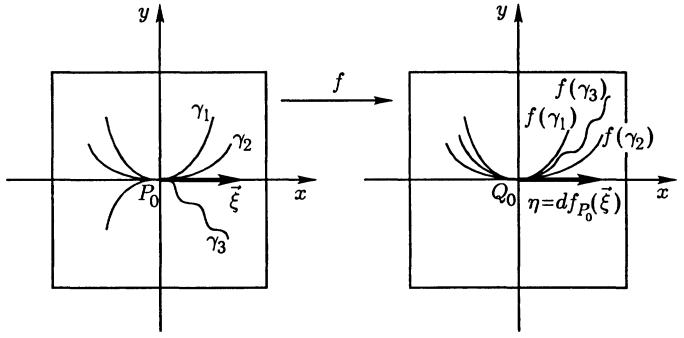


Рис. 17

ПРИМЕР 1. Рассмотрим гладкую функцию $y=f(x)$ как гладкое отображение многообразий $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Тогда согласно определению 1 дифференциал — это линейное отображение $T_x(\mathbb{R}^1)=\mathbb{R}^1$ в $T_{f(x)}(\mathbb{R}^1)=\mathbb{R}^1$, задаваемое формулой (1), т. е. $\eta=f'(x)\xi$. В математическом анализе под дифференциалом функции $f(x)$ понимают линейную часть приращения функции f как функцию от двух независимых аргументов (x и dx): $dy=f'(x)dx$. Так что, полагая $dx=\xi$, $dy=\eta$, получаем совпадение понятий.

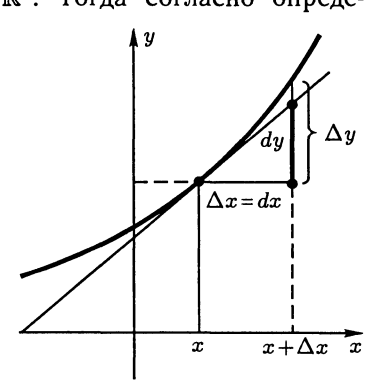


Рис. 18

ПРИМЕР 2. Рассмотрим гладкую функцию f от n независимых переменных $y=f(x^1, \ldots, x^n)$. Так же, как и в случае функции одной переменной, представим ее как гладкое отображение многообразий $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Тогда дифференциал отображения f является линейным отображением касательных пространств

$$df_{P_0}\colon T_{P_0}(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n \to T_{Q_0}(\mathbb{R}^1)=\mathbb{R}^1,\ P_0=(x_1^1, \ldots, x_0^n),\ Q_0=f(x_1^1, \ldots, x_0^n).$$

Дифференциал df_{P_0} в локальных координатах задается формулой $\eta=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}(P_0)\xi^k$. С другой стороны, дифференциал функции f есть

линейная часть приращения функции $(x^1, \ldots, x^n)$ как функция от двух групп независимых переменных, $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(dx^1, \ldots, dx^n)$:

$$df(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^k.$$

Полагая $\xi^k = dx^k$, $\eta = dy$, получаем совпадение понятий дифференциала функции и дифференциала ее же как отображения многообразий. Более того, матрица дифференциала df_{P_0} есть матрица Якоби отображения f, а с другой стороны — градиент $\operatorname{grad} f$ функции f; таким образом, градиент f — это матрица дифференциала df_{P_0} в фиксированной системе координат. Ясно, что при изменении системы координат будут меняться и компоненты градиента функции f.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим гладкую функцию $f = f(x^1, \ldots, x^n)$, пусть $P_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ — экстремальная точка функции f. Тогда одна из теорем анализа гласит, что $\operatorname{grad}_{P_0} f = 0$. В нашей терминологии это значит, что $df_{P_0} = 0$. Это утверждение обобщается на случай произвольных многообразий: *если в точке $P_0 \in M$ гладкая функция f достигает локального максимума, то $df_{P_0} = 0$.*

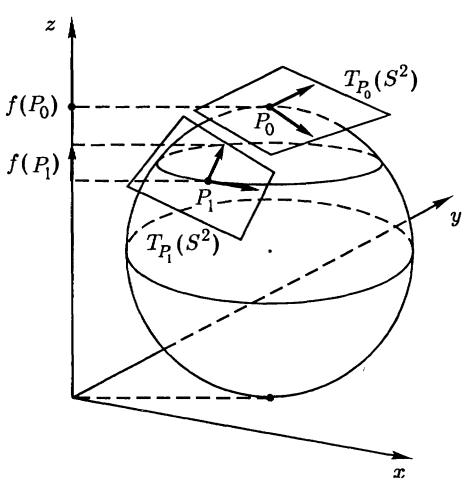


Рис. 19

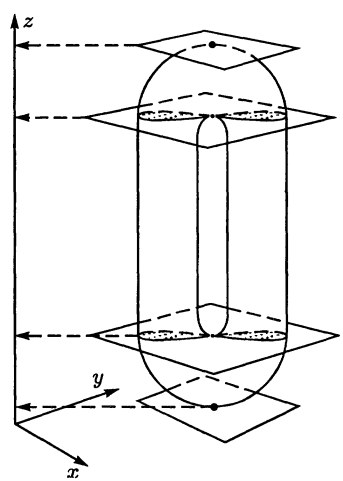


Рис. 20

Это обстоятельство получает новое освещение в теории многообразий. В случае областей в евклидовом пространстве всегда существуют такие гладкие функции, для которых $\operatorname{grad} f \neq 0$ в

каждой точке. Для гладкого многообразия это уже не так. Например, на двумерной сфере S^2 для всякой гладкой функции f ее дифференциал df обращается в нуль по крайней мере в двух точках: в точке максимума функции f и в точке ее минимума. Вообще, *если M — компактное гладкое многообразие, то для всякой гладкой функции f дифференциал df обращается в нуль не менее чем в двух точках.* На рис. 19 изображено поведение дифференциала функции «высоты» на двумерной сфере S^2, а на рис. 20 — функция высоты на торе T^2.

ПРИМЕР 4. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение, которое в стандартных координатах записывается в матричном виде: $Y = AX$,

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, матрица Якоби отображения f (а, значит, и дифференциал df_{P_0}) совпадает с матрицей A. Другими словами, $df_{P_0}(\vec{\xi}) = f(\vec{\xi})$. Впрочем, это не удивительно. Если представить дифференциал df_{P_0}, как и в случае функций многих переменных в виде линейной части приращения отображения, то получим $\Delta Y = A(X + \Delta X) - AX = A\Delta X$. Следовательно, само приращение ΔY тождественно совпадает с его линейной частью. Таким образом, дифференциал линейного отображения не зависит от точки $P_0 \in \mathbb{R}^n$.

2. Локальные свойства отображений и дифференциал. В математическом анализе отмечается важное свойство гладких функций: с помощью дифференциальных свойств функции в точке можно определять аналогичные свойства в целой окрестности этой точки (хотя, быть может, эта окрестность и мала). Так, например, если производная $f'(x_0)$ функции f положительна, $f'(x_0) > 0$, то в малой окрестности точки x_0 функция f возрастает. Спрашивается, в чем заключается аналогия двух свойств: положительность производной $f'(x_0)$ и возрастание функции f в окрестности точки x_0? Эта аналогия легче наблюдается, если условие $f'(x_0) > 0$ сформулировать следующим образом: дифференциал функции f в точке x_0 является возрастающей (линейной) функцией. Тогда теорема анализа будет звучать следующим образом: *если дифференциал функции f в точке x_0 строго возрастает, то и сама функция f строго возрастает в окрестности точки x_0.* В качестве второго такого же примера снова рассмотрим теорему о неявной

функции: уравнение $f(x, y) = 0$ допускает решение $y = y(x)$, если $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$ в некоторой точке (x_0, y_0), для которой $f(x_0, y_0) = 0$. Попытаемся сформулировать условие теоремы о неявных функциях в терминах дифференциалов: дифференциал функции f в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

Заменим в уравнении $f(x, y) = 0$ функцию f на ее дифференциал и рассмотрим новое уравнение $df_{(x_0, y_0)} = 0$. Это уравнение относительно новых переменных (dx, dy) является линейным и имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy = 0. \tag{5}$$

Тогда условие $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ эквивалентно существованию решения уравнения (5). Поэтому теорема о неявной функции формулируется следующим образом: *если уравнение в дифференциалах* (5) *имеет решение, то существует решение и у исходного уравнения* $f(x, y)$ *в окрестности* (x_0, y_0).

Теперь мы можем сформулировать некоторый полезный принцип при анализе гладких многообразий и их отображений: *если выполнено некоторое свойство для дифференциала отображения гладких многообразий в некоторой точке, то аналогичное свойство выполняется и для самого отображения — в окрестности этой точки.*

Этот принцип называется обычно *принципом общего положения* или *принципом линеаризации отображений.* Первое название указывает на то, что свойство линейного отображения сохраняется при малых нелинейных искажениях отображения. Разумеется, этот принцип справедлив не для каждого свойства, и мы не будем уточнять область его применения. Приведем наиболее важные теоремы, связывающие свойства отображения и его дифференциала.

Начнем с теоремы о неявных функциях для многообразий.

Определение 2. Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — гладкое отображение. Точка $P_0 \in M_1$ называется *регулярной точкой отображения* f, если дифференциал отображения $df_{P_0}\colon T_{P_0}(M_1) \to T_{Q_0}(M_2)$, $Q_0 = f(P_0)$, является эпиморфизмом, т. е. отображением на все пространство $T_{Q_0}(M_2)$. Точка $Q_0 \in M_2$ называется *регулярной точкой отображения* f, если всякая точка P_0 из прообраза $f^{-1}(Q_0)$ является регулярной точкой отображения f.

С помощью определения 2 можно сформулировать условия теоремы о неявных функциях в новых инвариантных терминах дифференциалов отображений. В самом деле, в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки P_0 и в локальной системе координат $(y^1, \ldots, y^m)$ в окрестности точки Q_0 отображение f запишется как система функций $y^k = f^k(x^1, \ldots, x^n)$. Будем рассматривать эти равенства как систему уравнений

$$\begin{aligned} f^1(x^1, \ldots, x^n) &= y_0^1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f^m(x^1, \ldots, x^n) &= y_0^m, \end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку $f(P_0) = Q_0$, $P_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, $Q_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^n)$, то точка P_0 является решением системы (6). Тогда теорема о неявных функциях (теорема 2 из § 2) дает условие для существования решения в виде: $\operatorname{rk} df = m$. Следовательно, ранг матрицы Якоби отображения f, или, что то же самое, ранг матрицы дифференциала df_{P_0} равен размерности касательного пространства $T_{Q_0}(M_2)$. Это значит, что линейное отображение df_{P_0} является эпиморфизмом. Поэтому обобщением теоремы 2 из § 2 является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — гладкое отображение гладких многообразий, $Q_0 \in M_2$ — регулярная точка отображения f. Тогда прообраз $M_3 = f^{-1}(Q_0)$ является гладким многообразием,* $\dim M_3 = \dim M_1 - \dim M_2$. *Более того, в качестве локальных координат в многообразии M_3 можно взять некоторые из локальных координат многообразия $P_0 \in M_3$.*

Доказательство. Для того чтобы доказать, что M_3 является многообразием, достаточно в окрестности каждой точки $P_0 \in M_3$ применить теорему 2 из § 2. Получаем, что каждая точка $P_0 \in M_3$ допускает окрестность $U \ni P_0$, гомеоморфную области в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-m}$, где $n = \dim M_1$, $m = \dim M_2$. Более того, в качестве локальных координат в окрестности U можно взять некоторые $(n-m)$ локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$ многообразия M_1 в окрестности точки P_0. Если это координаты $(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{n-m}})$, то остальные локальные координаты (x^j) выражаются на M_3 через $(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{n-m}})$ в виде гладких функций. Отсюда следует, что M_3 — гладкое многообразие. В самом деле, пусть $(y^1, \ldots, y^n)$ — другая система координат на многообразии M_1, а $(y^{i_1}, \ldots, y^{i_{n-m}})$ — образуют локальную систему координат на M_3. Тогда

$$y^{i_k} = y^{i_k}(x^1, \ldots, x^n) = y^{i_k}(x^1(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{n-m}}), \ldots, x^n(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{n-m}}))$$

— гладкая функция. □

Нам осталось привести аналог еще одного свойства линейного отображения — свойства быть мономорфизмом.

***Определение* 3.** Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ гладкое отображение. Отображение f называется *погружением*, если в каждой точке $P \in M_1$ дифференциал df_P является мономорфизмом, т. е. взаимно однозначным отображением на свой образ.

Если, кроме того, отображение f взаимно однозначно отображает многообразие M_1 на свой образ $f(M_1)$ и $f(M_1)$ — замкнутое множество, то отображение f называется *вложением*. Образ $f(M_1)$ (равно как и M_1) в этом случае называется *подмногообразием* многообразия M_2.

Пример 5. Прообраз регулярной точки отображения $f\colon M_1 \to M_2$ согласно теореме 1 является подмногообразием. В самом деле, так как в качестве локальной системы координат в M_3 можно взять некоторые из локальных координат объемлющего многообразия M_1, то в локальных координатах тождественное отображение $\varphi\colon M_3 \to M_1$ имеет вид:

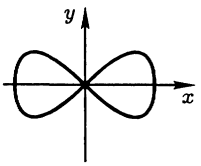


Рис. 21

$$
\begin{aligned}
&x^1 = x^1,\\
&\cdots\cdots\\
&x^{n-m} = x^{n-m},\\
&x^{n-m+1} = x^{n-m+1}(x^1, \ldots, x^{n-m}),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&x^n = x^n(x^1, \ldots, x^{n-m}).
\end{aligned}
$$

Поэтому матрица Якоби $d\varphi$ содержит в себе единичную квадратную матрицу. Следовательно, $\operatorname{rk} d\varphi = n - m$, т. е. $d\varphi$ является мономорфизмом.

Пример 6. Рассмотрим отображение $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулами $f(\varphi) = \{\cos\varphi, \sin 2\varphi\}$. Вектор скорости равен $\frac{df}{d\varphi} = \{-sin\varphi, 2\cos 2\varphi\}$ и ни в какой точке не обращается в нуль, т. е. ранг матрицы Якоби равен единице. Поэтому f является погружением (рис. 21). Кривая, изображенная на рис. 21, является одной из фигур Лиссажу, и может быть получена на осциллографе при синусоидальных сигналах на вертикальной и горизонтальной развертках.

3. Теорема Сарда. В предыдущем пункте мы показали, как по свойствам дифференциала восстанавливаются локальные свойства гладкого отображения. В некоторых случаях можно, и обратно, восстановить свойства дифференциала по свойствам самого

отображения. Например, если f: $M_1 \to M_2$ — гладкий гомеоморфизм, то, как было показано в § 1 (лемма 3), дифференциал df: $T_P(M_1) \to T_{f(P)}(M_2)$ является изоморфизмом. Рассмотрим теперь задачу, в некотором смысле обратную к задаче, решенной в теореме 1. Пусть f: $M_1 \to M_2$ — гладкое отображение многообразия M_1 на все многообразие M_2, т. е. $f(M_1) = M_2$. Такие отображения можно рассматривать как аналоги эпиморфизмов для линейных отображений. Поставим вопрос: будет ли дифференциал df: $T_P(M_1) \to T_{f(P)}(M_2)$ эпиморфизмом? К сожалению, это не так. Рассмотрим следующий пример. Пусть $M_1 = M_2 = \mathbb{R}^1$, f: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}^1$. Тогда f — гладкое отображение и $f(\mathbb{R}^1) = \mathbb{R}^1$. Однако в точке $x = 0$ дифференциал df равен нулю и, значит, не является эпиморфизмом. В других же точках дифференциал df имеет значение $3x^2\,dx$ и является эпиморфизмом. В рассмотренном примере можно предугадать общий ответ на поставленный вопрос. Мы его сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 2 (Сард). *Пусть f: $M_1 \to M_2$ — гладкое отображение компактных многообразий. Тогда множество G регулярных точек $Q \in M_2$ отображения f является открытым всюду плотным множеством.*

Прежде чем доказывать теорему 2, рассмотрим несколько примеров.

Пример 7. Пусть f: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f(x) \equiv a$, где $a = \text{const}$. В этом случае дифференциал df ни в одной точке не является эпиморфизмом. Однако образ $f(\mathbb{R}^1)$ состоит из одной точки a, т. е. согласно определению всякая точка $y \neq a$ является регулярной (так как $f^{-1}(y) \neq \varnothing$). Следовательно, множество регулярных точек является открытым всюду плотным множеством.

Пример 8. Пусть f: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — финитная гладкая функция. Пусть $F = \{x\colon f'(x) = 0\}$. Множество F является замкнутым множеством. Образ $f(F)$ является компактным множеством и состоит из всех нерегулярных точек. Покажем, что $f(F)$ нигде не плотно. Если бы это было не так, то нашлась бы внутренняя точка $y \in f(F)$, т. е. точка y лежит в $f(F)$ вместе с некоторой окрестностью $y \in U \subset f(F)$. Поскольку f — финитная функция, то образ $f(F)$ лежит в образе некоторого интервала $f([a, b])$. Другими словами, достаточно доказать, что образ $f(F')$, $F' = F \cap [a, b]$, нигде не плотен. Пусть $V \supset F'$ — некоторая окрестность множества F', $F' = V \subset (-2a, 2a)$. Тогда $f(V)$ содержит окрестность U. Значит, найдется такая точка $x \in V$, у которой производная $f'(x)$ по модулю больше числа $\varepsilon = \operatorname{diam} U/4a$. Уменьшая окрестность

V, получим последовательность точек $x_n \to F'$. Без ограничения общности можно считать, что $x_n \to x_0 \in F'$. Тогда $f'(x_n) \to f'(x_0)$, т. е. $|f'(x_0)| \geqslant \varepsilon$, что противоречит условию $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in F' \subset F$.

Теорему 2 удобнее формулировать более общим образом: *если $F \subset M_1$ — компактное множество, состоящее из нерегулярных точек, то множество $f(F)$ нигде не плотно.* Покажем, что теорему 2 достаточно доказать для случая, когда M_1 является окрестностью замкнутого диска в евклидовом пространстве. В самом деле, покроем M_1 конечным атласом карт U_α и выберем $V_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ так, чтобы V_α было гомеоморфно диску в евклидовом пространстве. Пусть $G_\alpha \subset M_2$ — множество регулярных точек для отображения f, ограниченного на $\overline{V}_\alpha$. Тогда пересечение $G = \cap G_\alpha$ состоит из регулярных точек всего отображения f. Если G_α — открытые всюду плотные множества, то G тоже является открытым всюду плотным множеством. Выберем достаточно мелкий атлас карт U_α так, чтобы образ $f(U_\alpha)$ лежал в одной карте W_β многообразия M_2. Тогда теорему 2 достаточно доказать для регулярных точек отображения $f|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to W_\beta$ на $\overline{V}_\alpha$.

В самом деле, если $G \subset W_\beta$ — множество регулярных точек отображения $f|_{U_\alpha}$, то $G \cup (M_2 \setminus f(\overline{V}_\alpha)$ является множеством регулярных точек отображения $f\colon U_\alpha \to M_2$ на $\overline{V}_\alpha$. Итак, пусть U — окрестность диска D^n в $\mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение. Покажем, что множество тех точек $y \in \mathbb{R}^m$, для которых $D^n \cap f^{-1}(y)$ состоит из регулярных точек, является открытым всюду плотным множеством.

Лемма 3. *Теорема справедлива для $m = 1$.*

Доказательство. Пусть $F \subset D^n$ — множество нерегулярных точек функции f. Тогда $f(F)$ компактно и содержит все нерегулярные точки функции f. Покажем, что $\mathbb{R}^1 \setminus f(F)$ всюду плотно. Если это не так, то найдется интервал $V \subset f(F)$. Фиксируем $k > n$ и рассмотрим множество F_k таких точек, у которых все частные производные функции f до порядка k включительно равны нулю. Тогда, разлагая функцию f по формуле Тейлора в окрестности произвольной точки $y \in F_k$, получаем оценку $|f(y) - f(x)| < C|x - y|^k$, причем константа C не зависит от выбора $y \in F_k$ и $x \in D^n$. Это значит, что если покрыть множество F_k кубами со стороной $1/N$ (число этих кубов не превосходит N^n), то образ $f(F_k)$ покроется интервалами, причем длина каждого интервала не превосходит числа $2\sqrt{n}C/N^{k-n}$. Следовательно, сумма длин всех интервалов не превосходит $2\sqrt{n}C/N^{k-n}$ и стремится к нулю при $N \to \infty$. Значит, множество $f(F_k)$ нигде не плотно.

Оставшуюся часть множества F, т. е. $F \setminus F_k$, можно представить в виде объединения конечного семейства подмножеств, каждое из которых лежит на подмногообразии, задаваемом одним из уравнений

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} = 0, \qquad l_1 + \dots + l_n = l < k.$$

В самом деле, пусть $F_{l_1 \dots l_n}$ — множество тех точек из F, где

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0, \qquad \operatorname{grad} \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \neq 0 \tag{7}$$

Ясно, что $F \setminus F_k = \bigcup\limits_{l_1 + \dots + l_n < k} F_{l_1 \dots l_n}$. С другой стороны, множество $F_{l_1 \dots l_n}$ лежит на подмногообразии $M_{l_1 \dots l_n}$, состоящем из тех точек, где выполнены условия (7). Размерность подмногообразия $M_{l_1 \dots l_n}$ меньше n. Поэтому, применяя индукцию, можно считать, что лемма 3 выполнена для $M_{l_1 \dots l_n}$.

Итак, множество $f(F_k)$ не покрывает интервал V. Значит найдется такая окрестность $U_k \supset F_k$, что $\overline{f(U_k)}$ не покрывает интервал V. Пусть $l_1 + \dots + l_n = k - 1$. Тогда $F_{l_1 \dots l_n} \setminus U_k$ компактное множество в многообразии $M_{l_1 \dots l_n}$ и поэтому $f(F_{l_1 \dots l_n} \setminus U_k)$ не покрывает $V \setminus f(U_k)$, т. е. $f(F_k \cup F_{l_1, \dots, l_n})$ не покрывает V. Следовательно, имеется такая окрестность $U_s \supset F_k \cup \bigcup\limits_{s < l_1 + \dots + l_n < k} F_{l_1 \dots l_n}$, что $\overline{f(U_s)}$ не покрывает интервал V. Поэтому множества $F_{l_1 \dots l_n} \setminus U_s$ при $l_1 + \dots + l_n = s$ тоже не покрывают при отображении f остатка $V \setminus f\left(F_k \cup \bigcup\limits_{s < l_1 + \dots + l_n < k} F_{l_1 \dots l_n}\right)$. Значит $f\left(F_k \cup \bigcup\limits_{s < l_1 + \dots + l_n < k} F_{l_1 \dots l_n}\right)$ не покрывает интервал V. За конечное число шагов получаем, что $f(F)$ не покрывает V. Лемма доказана. □

Применим лемму 3 к доказательству теоремы 2 для случая системы функций $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $D^n \subset U$, $f(P) = (f^1(P), \dots, f^m(P))$, индукцией по числу m. Поскольку f^1 — гладкая функция, то по лемме 3 множество G_1 регулярных значений функции f^1 открыто и всюду плотно в $\mathbb{R}^1$. Пусть $y_0^1 \in G_1$, $N = (f^1)^{-1}(y_0^1)$. По теореме 1 множество N является гладким подмногообразием, которое с помощью отображения f отображается в гиперплоскость $\mathbb{R}^{m-1}$. Тогда точка $(y_0^2, \dots, y_0^m)$ является регулярной для отображения $f|_N$ тогда и только тогда, когда точка $(y_0^2, \dots, y_0^m)$ является регулярной для отображения f. По предположению индукции множество точек $(y_0^2, \dots, y_0^m)$, регулярных для отображения $f|_N$, всюду плотно в $\mathbb{R}^m$

всюду плотно в $\mathbb{R}^{m-1}$, следовательно, и множество регулярных точек для отображения f всюду плотно в $\mathbb{R}^m$. Для того чтобы показать, что множество регулярных точек открыто, достаточно заметить, что прообраз регулярной точки $D^n \cap f^{-1}(y_0^1, \ldots, y_0^n)$ является компактом и в каждой его точке отличен от нуля некоторый минор матрицы дифференциала отображения f. Поэтому для любой достаточно близкой точки $(y_1^1, \ldots, y_1^n)$ прообраз $D \cap f^{-1}(y_1^1, \ldots, y_1^n)$ лежит в достаточно малой окрестности множества $D \cap f^{-1}(y_0^1, \ldots, y_0^n)$, т. е. те же миноры отличны от нуля. Это и значит, что множество регулярных точек отображения f открыто. Доказательство теоремы 2 завершено. □

В качестве применения теоремы Сарда рассмотрим гладкое отображение $f\colon M_1 \to M_2$ при $\dim M_1 < \dim M_2$. Тогда ни одна точка $P \in M_1$ не может быть регулярной. Это значит, что образ $f(M_1)$ нигде не плотен в многообразии M_2. В частности, образ отображения f не покрывает многообразие M_2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема Сарда может быть обобщена на случай некомпактных сепарабельных многообразий. Однако тогда множество регулярных точек не обязано быть открытым множеством, а всего лишь пересечением счетного числа открытых всюду плотных множеств. Такие множества называются G_δ-множествами. Из общей топологии известно, что пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств в $\mathbb{R}^n$ всегда не пусто и всюду плотно. Так что множество регулярных точек для случая некомпактных многообразий непусто и всюду плотно.

4. Вложение многообразий в евклидово пространство. Мы завершим настоящий параграф теоремой Уитни, показывающей, что всякое компактное многообразие можно считать подмногообразием евклидова пространства достаточно большой размерности.

Теорема 3. *Пусть M — гладкое компактное многообразие. Тогда существует вложение $\varphi\colon M \to R^N$ для подходящего выбора размерности N.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^M$ — конечный атлас карт, $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ — локальная система координат в карте U_α. Без ограничения общности можно считать, что карты U_α гомеоморфны шару $D^n \subset \mathbb{R}^n$ радиуса 1, причем координаты $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ осуществляют гомеоморфизм φ_α карты U_α на шар D^n. Далее, можно считать, что шар D^n лежит в $\mathbb{R}^n$ и не содержит начала координат. Этого можно достигнуть с помощью параллельного переноса в $\mathbb{R}^n$. Пусть, далее, $D_1^n \subset D^n$ — шар меньшего радиуса с тем же центром, что и шар D^n, причем открытые множества $U'_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(D_1^n) \subset U_\alpha$

покрывают многообразие M. Пусть f — гладкая функция в $\mathbb{R}^n$, равная тождественно единице на D_1^n, и $\operatorname{supp} f \subset D^n$. Положим тогда:

$$y_\alpha^k(P) = \begin{cases} f(\varphi_\alpha(P))x_\alpha^k(P), & \text{если } P \in U_\alpha, \\ 0, & \text{если } P \notin U_\alpha. \end{cases}$$

Ясно, что $y_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(P)$, если $P \in U_\alpha'$. Мы получили систему гладких функций $\{y_\alpha(P)\}$ в количестве $N = nM$. Эта система функций совместно осуществляет отображение g многообразия M в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$: $g(P) = \{y_\alpha^k(P)\} \in \mathbb{R}^N$.

Покажем, что ранг дифференциала отображения g в каждой точке равен n. Пусть $P \in M$ — произвольная точка, $U_\alpha' \ni P$, $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ — локальная система координат. Матрица Якоби отображения g в точке P в локальной системе координат $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ состоит из частных производных $\left\{\frac{\partial y_\beta^k}{\partial x_\alpha^j}(P)\right\}$. В частности, если $\beta = \alpha$, то

$$\frac{\partial y_\beta^k}{\partial x_\alpha^j}(P) = \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\alpha^j}(P) = \delta_j^k,$$

т. е. матрица Якоби отображения g содержит единичную матрицу порядка n. Следовательно, $\operatorname{rk} dg = n$.

Таким образом, отображение g является погружением. Для того чтобы отображение g было вложением, необходимо, чтобы различные точки P и Q переходили в различные точки $g(P)$ и $g(Q)$.

Построим новое отображение $\bar{g}(P) = \{y_\alpha^k(P), f(\varphi_\alpha(P))\} \in \mathbb{R}^{N+M}$. Оно по тем же причинам, что и g, является погружением. Пусть теперь P и Q, $P \neq Q$, — две точки на многообразии. Рассмотрим такой номер α, что $f(\varphi_\alpha(P)) = 1$. Если $f(\varphi_\alpha(Q)) < 1$, то $\bar{g}(P) \neq \bar{g}(Q)$; если $f(\varphi_\alpha(Q)) = 1$, то $y_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(P)$, $y_\alpha^k(Q) = x_\alpha^k(Q)$, и, значит, для некоторого номера k координат $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ имеем: $x_\alpha^k(P) \neq x_\alpha^k(Q)$, т. е. $\bar{g}(P) \neq \bar{g}(Q)$. Таким образом, отображение $\bar{g}$: $M \to \mathbb{R}^{N+M}$ является взаимно однозначным погружением, т. е. вложением. □

Итак, всякое гладкое компактное многообразие M можно считать вложенным в виде подмногообразия в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ некоторой достаточно большой размерности N. На самом деле размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ можно существенно понизить. Так, например, сфера S^n вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$, а тор T^n вкладывается в $\mathbb{R}^{2n}$. Проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ не вкладывается в $\mathbb{R}^3$, однако может быть вложена в $\mathbb{R}^5$. В самом деле, пусть

$(x_1 : x_2 : x_3)$ — однородные координаты точки P в $\mathbb{RP}^2$. Положим

$$y^1 = \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad y^2 = \frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad y^3 = \frac{x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$
$$y^4 = \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad y^5 = \frac{x_2x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad y^6 = \frac{x_3x_1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Получаем отображение

$$g\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^6, \qquad g(P) = g(x_1 : x_2 : x_3) = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6).$$

На самом деле образ отображения g лежит в линейном подпространстве $\mathbb{R}^5 \subset \mathbb{R}^6$, задаваемом уравнением $y^1 + y^2 + y^3 = 1$.

Проверим, что g является погружением, т. е. дифференциал dg в каждой точке $P \in \mathbb{RP}^2$ является мономорфизмом. Другими словами, необходимо показать, что в любой локальной системе координат ранг матрицы Якоби отображения g равен 2. Все координатные функции отображения симметричны относительно перестановки однородных координат $(x^1 : x^2 : x^3)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что в окрестности точки $P_0 \in \mathbb{RP}^2$, $x_1 \neq 0$ и, следовательно, в качестве локальной системы координат можно взять координаты x_2, x_3 при $x_1 = 1$.

Вычислим матрицу Якоби отображения g:

$$dg = \begin{pmatrix} -2x_2 & -2x_3 \\ 2x_2(1+x_3^2) & -2x_2^2x_3 \\ -2x_3^2x_2 & 2x_3(1+x_2^2) \\ 1-x_2^2+x_3^2 & -2x_2x_3 \\ x_3(1-x_2^2+x_3^2) & x_2(1+x_2^2-x_3^2) \\ -2x_2x_3 & 1+x_2^2-x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Если $x_2x_3 \neq 0$, то минор из первых двух строк отличен от нуля. Если $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, то минор, составленный из четвертой и шестой строк, отличен от нуля. Если $x_2 = 0$, $x_3 \neq 0$, то минор, составленный из первой и четвертой строк, отличен от нуля. Таким образом, $\operatorname{rk} dg = 2$, т. е. g является погружением.

Покажем теперь, что отображение g взаимно однозначно. Без ограничения общности можно считать, что однородные координаты выбраны так, чтобы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Итак, пусть $P = (x_1 : x_2 : x_3)$, $Q = (x_1' : x_2' : x_3')$. Тогда

$$g(P) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1),$$
$$g(Q) = (x_1'^2, x_2'^2, x_3'^2, x_1'x_2', x_2'x_3', x_3'x_1').$$

Если $g(P)=g(Q)$, то $x_1^2=x_1'^2$. Если $x_1\neq 0$, то $x_1=\pm x_1'$, а поскольку однородные координаты можно умножать на ± 1, то можно считать, что $x_1=x_1'$. Тогда из равенства четвертой и шестой координат получаем, что $x_2=x_2'$, $x_3=x_3'$, т. е. $P=Q$. Поскольку все координаты x_1, x_2, x_3 равноправны, то и $P=Q$. Таким образом, отображение g является вложением проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ в пятимерное евклидово пространство $\mathbb{R}^5$.

Аналогичное утверждение справедливо для любого компактного многообразия M.

***Теорема* 4 (Уитни).** *Пусть M — гладкое компактное многообразие,* $\dim M=n$. *Тогда существует вложение* $\varphi\colon M\to\mathbb{R}^{(2n+1)}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2 и попытаемся понизить размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^N$. Пусть $\vec{e}\in\mathbb{R}^N$ — ненулевой вектор, $p_{\vec{e}}\colon \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N-1}$ — ортогональная проекция вдоль вектора $\vec{e}$ на подпространство, ортогональное к $\vec{e}$. Иногда композиция $M\xrightarrow{\varphi}\mathbb{R}^N\xrightarrow{p_{\vec{e}}}\mathbb{R}^{N-1}$ остается вложением, Исследуем условия, при которых композиция $p_{\vec{e}}\circ\varphi$ является вложением. Для этого необходимо проверить два условия:

а) мономорфность дифференциала;

б) взаимную однозначность отображения.

Рассмотрим условие а). Пусть $P\in M$, $V_P=d\varphi_P(T_PM)\subset\mathbb{R}^N$. Для того чтобы дифференциал композиции $d(p_{\vec{e}}\circ\varphi)$ в точке P был мономорфизмом, необходимо и достаточно, чтобы при проекции $p_{\vec{e}}$ подпространство V_P мономорфно отображалось в $\mathbb{R}^N$, что эквивалентно тому, что $\vec{e}\notin V_P$. Фиксируем некоторую локальную систему координат $(x^1,\ldots,x^n)$ в окрестности U точки P и базис в $\mathbb{R}^n$. Построим отображением $h\colon U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{RR}^{N-1}$, полагая

$$h(x^1,\ldots,x^n,\xi^1,\ldots,\xi^n)=(\zeta^1:\ldots:\zeta^N),$$

где

$$\zeta^k=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial y^k}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha,\quad (y^1,\ldots,y^n)=\varphi(x^1,\ldots,x^n).$$

Отображение h является гладким отображением $2n$-мерного многообразия $U\times\mathbb{R}^n$ в проективное пространство $\mathbb{RP}^{N-1}$. Тогда условие $\vec{e}\notin V_P$ в точности означает, что прямая, порожденная вектором $\vec{e}$, как точка проективного пространства $\mathbb{RP}^{N-1}$ не принадлежит образу отображения h. По лемме Сарда при $2n<N-1$ множество таких точек является открытым и всюду плотным во всем пространстве $\mathbb{RP}^{N-1}$. Рассмотрев последовательно конечный атлас карт в M, мы получаем, что для открытого плотного множества G в $\mathbb{RP}^{N-1}$ векторы $\vec{e}$, порождающие точки из G, удовлетворяют

условию $\vec{e} \notin V_P$ для любой точки $P \in M$. Это значит, что множество тех векторов $\vec{e}$, для которых проекция $p_{\vec{e}}$ погружает многообразие $\varphi(M)$ в $\mathbb{R}^{N-1}$, является открытым плотным множеством.

Рассмотрим теперь условие б). Отсутствие взаимной однозначности означает, что вектор $\vec{e}$ параллелен прямой, проходящей через некоторую пару точек, P и Q, $P \neq Q$, на $\varphi(M)$. Так же, как и в случае условия а), рассмотрим отображение h': $(M \times M \setminus \Delta) \to \mathbb{RP}^{N-1}$, которое паре точек P и Q, $P \neq Q$, сопоставляет прямую, проходящую через $\varphi(P)$ и $\varphi(Q)$. Согласно лемме Сарда при $2n < N-1$ множество точек, не содержащихся в образе отображения h', является открытым плотным множеством G'. Поэтому вектор $\vec{e}$ следует выбирать так, чтобы прямая, им порожденная, лежала в $G \cap G' \neq \varnothing$. Мы показали, что при выполнении неравенства $2n < N-1$ можно найти такую проекцию $p_{\vec{e}}$, что композиция $p_{\vec{e}} \circ \varphi$ является вложением. Следовательно, шаг за шагом мы сможем уменьшать размерность объемлющего евклидова пространства R^N до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $2n = N-1$, т. е. $N = 2n+1$. Это и есть минимальная размерность евклидова пространства R^{2n+1}, в которое можно вложить любое n-мерное компактное многообразие M. □

5. Риманова метрика на многообразии. Теперь мы можем дать общее понятие римановой метрики на многообразии, частные случаи которого рассматривались выше.

Римановой метрикой на гладком многообразии M назовем семейство положительно определенных скалярных произведений, заданных в каждом касательном пространстве $T_P(M)$. Если в окрестности U точки P фиксирована система координат $(x^1, \ldots, x^n)$, то и в $T_P(M)$ задается система координат $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Скалярное произведение в системе $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ определяется невырожденной симметрической матрицей $G = (g_{ij})$, зависящей от точки. При переходе к новой системе координат $(y^1, \ldots, y^n)$ матрица меняется по закону:

$$g'_{ij}(P) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} g_{\alpha\beta}(P) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}(P) \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}(P),$$

где $G' = (g'_{ij}(P))$ — матрица скалярного произведения в новой системе координат $(y^1, \ldots, y^n)$.

Определение 4. *Римановой метрикой* на гладком многообразии M называется такое семейство невырожденных положительно определенных скалярных произведений в каждом касательном пространстве $T_P(M)$, $P \in M$, что в локальной системе координат матрица скалярного произведения является гладкой функцией от локальных координат.

Метрику можно задавать как соответствие, сопоставляющее каждой системе координат $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ в карте U_α матричнозначную гладкую функцию в карте U_α: $G^\alpha(P) = (g_{ij}^\alpha(P))$, такую, что:

а) матрица $G^\alpha(P)$ симметрична и положительно определена;

б) коэффициенты $g_{ij}^\alpha(P)$ преобразуются по закону

$$g_{ij}^\alpha(P) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}^\beta(P) \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^i}(P) \frac{\partial x_\beta^l}{\partial x_\alpha^j}(P) \tag{8}$$

для точек $P \in U_\alpha \cap U_\beta$. Если $\vec{\xi} = (\xi_\alpha^1, \ldots, \xi_\alpha^n)$, $\vec{\eta} = (\eta_\alpha^1, \ldots, \eta_\alpha^n)$ — два касательных вектора, то скалярное произведение $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ записывается так:

$$(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^\alpha(P) \xi_\alpha^i \eta_\alpha^j.$$

Ниже мы приведем более общую конструкцию римановой метрики на многообразии.

Пусть f: $M_1 \to M_2$ — гладкое вложение многообразия M_1 в многообразие M_2, $\dim M_1 = m$, $\dim M_2 = n$. На многообразии M_2 определена риманова метрика, которая задана набором матричнозначных функций $\{G^\alpha(P) = (G_{ij}^\alpha(P))\}$ на атласе карт $\{U_\alpha\}$.

Тогда вложение f задает на подмногообразии M_1 риманову метрику, порожденную римановой метрикой в объемлющем многообразии M_2. В самом деле, без ограничения общности можно считать, что атлас карт $\{V_\alpha\}$ на подмногообразии M_1 задается пересечениями

$$V_\alpha = M_1 \cap U_\alpha$$

и некоторыми локальными координатами $\{y_\alpha^i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ в карте V_α. Вложение f в картах V_α и U_α задается набором формул

$$x_\alpha^i = x_\alpha^i(y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^m).$$

Матрица Якоби этого отображения имеет максимальный ранг

$$\operatorname{rk}\left(\frac{x_\alpha^i}{y_\alpha^j}\right) = m \dim M_1.$$

Метрика на многообразии M_1 задается формулами

$$(h_{ij}^\alpha(P))_{1 \leqslant i,j \leqslant m}, \quad P \in V_\alpha,$$

где

$$h_{ij}^\alpha(P) = g_{kl}^\alpha(P) \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial y_\alpha^i} \frac{\partial x_\alpha^l}{\partial y_\alpha^j} \tag{9}$$

Предложение 1. *Формулы* (9) *задают риманову метрику на многообразии* M_1.

Доказательство. Симметричность и положительная определенность матрицы $H^\alpha(P)$ следует из алгебраических свойств формул (9). Осталось проверить только выполнение закона преобразования (8). В силу формул (9) имеем:

$$h^\alpha_{ij}(P) = g^\alpha_{kl}(P)\frac{\partial x^k_\alpha}{\partial y^i_\alpha}\frac{\partial x^l_\alpha}{\partial y^j_\alpha} = g^\beta_{st}(P)\frac{\partial x^s_\beta}{\partial x^k_\alpha}\frac{\partial x^t_\beta}{\partial x^l_\alpha}\frac{\partial x^k_\alpha}{\partial y^i_\alpha}\frac{\partial x^l_\alpha}{\partial y^j_\alpha} =$$

$$= g^\beta_{st}(P)\frac{\partial x^s_\beta}{\partial y^i_\alpha}\frac{\partial x^t_\beta}{\partial y^j_\alpha} = g^\beta_{st}(P)\frac{\partial x^s_\beta}{\partial y^p_\beta}\frac{\partial y^p_\beta}{\partial y^i_\alpha}\frac{\partial x^t_\beta}{\partial y^q_\beta}\frac{\partial y^q_\beta}{\partial y^j_\alpha} = h^\beta_{pq}(P)\frac{\partial y^p_\beta}{\partial y^i_\alpha}\frac{\partial y^q_\beta}{\partial y^j_\alpha}.$$

Тем самым выполнен закон преобразования (8). □

Следствие. *На любом компактном многообразии существует риманова метрика.*

Доказательство. Напомним, что в силу предложения 1 риманова метрика определена на подмногообразии M_1 если она она определена на объемлющем многообразии M_2.

В силу теоремы Уитни, задача сводится к построению римановой метрики на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Так как многообразие $\mathbb{R}^N$ покрывается одной картой, то необходимо предъявить лишь одну функцию $G(P)$, $P \in \mathbb{R}^N$. В качестве этой функции можно выбрать $G(P) \equiv E$, где E — единичная матрица. Тем самым, на $\mathbb{R}^N$ имеется хотя бы одна риманова метрика, а, значит, на любом компактном многообразии также существует риманова метрика. □

Задачи к § 4

1. Используя теорему Сарда, доказать, что всякое гладкое компактное многообразие M размерности n можно вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$.

Указание. Рассмотреть проекции $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ и выбрать проекцию подходящим образом.

2. Построить вложение тора T^n в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Указание. Представить тор T^n как гиперповерхность вращения T^{n-1} вокруг оси.

3. Построить вложение $S^2 \times T^2$ в $\mathbb{R}^5$.

Указание. Найти в $\mathbb{R}^5$ открытую область, гомеоморфную $S^2 \times \mathbb{R}^3$.

4. Используя теорему Сарда и теорему Уитни, доказать, что всякое гладкое отображение $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$ компактного многообразия M^n сколь угодно близко аппроксимируется вложением.

Указание. Дополнить отображение f до вложения в $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N-(2n+1)} \times \mathbb{R}^{2n+1}$ и рассмотреть проекцию вдоль подпространства, близкого к $\mathbb{R}^{N-(2n+1)}$.

Глава 4

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ (ПРИМЕРЫ)

§ 1. Теория кривых на плоскости и в трехмерном пространстве

1. Теория кривых на плоскости. Формулы Френе. Мы будем рассматривать евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$, отнесенную к декартовым координатам (x, y). Гладкие кривые $\gamma(t)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ будем задавать с помощью двух функций: $x(t), y(t)$, т. е. будем рассматривать радиус-вектор $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ гладкой кривой $\gamma(t)$, выходящий из начала координат — точки O. Напомним, что вектором скорости $\vec{v}(t)$ кривой $\gamma(t)$ в точке t называется вектор с координатами $\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right)$. Определяемая этим вектором прямая является касательной к кривой в точке $\gamma(t)$. При этом, конечно, предполагаем, что $\vec{v}(t) \neq 0$. Это предположение мы будем на протяжении этого параграфа считать выполненным (напомним, что в тех точках, в которых вектор скорости обращается в нуль, гладкая кривая может претерпевать излом; примеры были приведены в гл. 1). Производную радиус-вектора будем иногда обозначать так:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).$$

Через $\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = |\vec{v}(t)|$ будем обозначать модуль вектора скорости (в евклидовой метрике). Пусть s обозначает длину дуги кривой от некоторой фиксированной точки до переменной точки на кривой; тогда (в силу монотонного возрастания длины дуги по мере движения точки в одном направлении по кривой) длину дуги можно взять за параметр вдоль кривой. Этот параметр называется *натуральным параметром*; уравнение кривой $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$, записанной в виде вектор-функции от параметра s, называется *натуральной параметризацией кривой.*

***Лемма* 1.** *Модуль вектора скорости кривой, записанной в натуральном параметре, постоянен и равен единице.*

Доказательство. Так как для длины дуги мы имеем формулу: $l(\gamma)_a^b = \int\limits_a^b \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| dt$, то в каждой точке выполнено тождество: $dl = dt\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|$. □

Таким образом, можно считать, что по кривой, отнесенной к натуральному параметру, движение происходит с постоянной скоростью (постоянным является только модуль вектора скорости, но не его направление).

Следствие. *В каждой точке кривой вектор скорости* $\vec{v}(s)$ *отличен от нуля.*

Мы использовали тот факт, что для исходного параметра t было выполнено соотношение $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \neq 0$. Наряду с вектором скорости, каждой точке кривой можно сопоставить еще один вектор, гладко зависящий от точки $\ddot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{v}(s)}{ds}$. Этот вектор ортогонален вектору скорости, что вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть задана вектор-функция* $\vec{p}(t)$ *такая, что* $|\vec{p}(t)| \equiv 1$. *Тогда вектор* $\frac{d\vec{p}(t)}{dt}$ *ортогонален вектору* $\vec{p}(t)$ $\left(\text{при любом } t \text{ таком, что } \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \neq 0\right)$.

Доказательство. Из условия следует, что $(\vec{p}, \vec{p}) \equiv 1$. Дифференцируя это тождество по параметру t, получаем:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{p}\right) + \left(\vec{p}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) \equiv 0, \text{ т. е.} \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{p}\right) \equiv 0. \qquad \square$$

Итак, в каждой точке гладкой кривой $\gamma(s)$, отнесенной к натуральному параметру, естественно возникают два ортогональных друг другу вектора, один — вектор скорости, другой — вектор ускорения. Этот вектор уже не обязан иметь длину, равную единице. предположим, что $\frac{\vec{v}}{s} \neq 0$. Тогда удобно рассмотреть единичный вектор $\vec{n}(s) = \frac{d\vec{v}(s)}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{v}(s)}{ds}\right|$. Тем самым при изменении параметра s мы получаем вдоль кривой гладкое реперное поле, т. е. семейство двумерных реперов вида: $(\vec{v}(s), \vec{n}(s))$. Вектор $\vec{n}(s)$ называется *вектором нормали* к кривой в точке s. Каждый репер, после его параллельного переноса в начало координат, однозначно определяет некоторое вращение плоскости вокруг точки O; тем самым реперное поле вдоль кривой определяет некоторое гладкое отображение $\gamma(s)$ в группу ортогональных матриц, т. е. в группу вращений плоскости. Иными словами, можно считать, что каждая кривая $\gamma(s)$

порождает некоторую гладкую кривую, точками которой являются ортогональные матрицы (2×2). Мы изучим некоторые свойства этой кривой сразу в многомерном случае, т. е. для случая гладкой кривой, расположенной в многомерном евклидовом пространстве (об этом ниже).

***Определение* 1.** Пусть гладкая кривая отнесена к натуральному параметру. *Кривизной кривой* в точке s называется величина $k(s) = \left|\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}\right|$.

Поскольку кривизна (по определению) является модулем вектора ускорения, то $\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} = k(s)\vec{n}(s)$, где $\vec{n}(s)$ — вектор нормали к кривой в точке s, а

$$k(s) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}.$$

Если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — единичные ортогональные векторы, задающие декартовы координаты на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$, то вектор нормали можно записать в явном виде так:

$$\vec{n}(s) = \left(\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2y}{ds^2}\vec{e}_2\right).$$

***Определение* 2.** *Радиусом кривизны* гладкой кривой в точке s называется число $R(s) = 1/k(s)$.

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим те простые примеры кривых, которые обосновывают выбор терминов: «кривизна» и «радиус кривизны». Простейшая кривая на плоскости — это прямая, заданная параметрически в виде линейной вектор-функции: $x(s) = x(0) + \alpha s$; $y(s) = y(0) + \beta s$, где s — натуральный параметр. Это накладывает ограничения на выбор чисел α, β: ясно, что должно быть выполнено равенство $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$, так как $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ и $|\vec{v}(s)| \equiv 1$. Тогда вектор ускорения $\frac{d\vec{v}(s)}{ds}$ равен нулю тождественно, а потому кривизна прямой линии также равна нулю. Соответственно, радиус кривизны прямой линии равен бесконечности.

Рассмотрим на плоскости окружность радиуса R. Параметрические уравнения окружности имеют вид:

$$x(s) = x(0) + R\cos\left(\frac{s}{R}\right), \quad y(s) = y(0) + R\sin\left(\frac{s}{R}\right).$$

Параметр s изменяется от 0 до 2π. Вектор скорости

$$\vec{v}(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right);\ \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{d\vec{v}(s)}{ds} = \left(-\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right);\quad -\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

Таким образом, кривизна окружности постоянна и равна $\frac{1}{R}$, а радиус кривизны равен $\frac{1}{k} = R$.

Однако при решении многих конкретных задач оказывается, что уравнения кривой отнесены не к натуральному параметру, а к какому-то произвольному параметру t, а потому полезно уметь вычислять кривизну кривой, отнесенной к произвольному параметру.

Теорема 1. *Пусть гладкая кривая $\gamma(t)$ отнесена к некоторому параметру t, не обязательно натуральному. Пусть в точке t вектор скорости $\vec{v}(t)$ отличен от нуля. Тогда имеет место формула:*

$$k(s) = \left|\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}\right| = \frac{|x''y' - y''x'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}},$$

где через $x', x'', \ldots$ обозначены производные по параметру t.

Доказательство. Пусть $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ — параметрическое задание $\gamma(t)$, $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ — вектор скорости; если s — натуральный параметр, то для произвольной вектор-функции $\vec{q}(t)$ имеем:

$$\frac{d}{ds}\vec{q}(t) = \frac{d\vec{q}(t)}{dt}\frac{dt}{ds}.$$

В качестве $\vec{q}$ возьмем

$$\vec{q}(t) = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)| = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}.$$

Из определения кривизны получаем:

$$k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\right| = \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\right)\right|.$$

Далее:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\right) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\right).$$

Найдем $\frac{dt}{ds}$. Так как $ds = \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| dt$, то

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|} = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}.$$

Отсюда

$$k = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\right) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|^2}\left(\frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\frac{d}{dt}|\vec{v}(t)|\right) =$$
$$= \frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(\vec{r}'' - \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}\frac{d}{dt}|\vec{r}'|\right) = \frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(\vec{r}'' - \frac{\vec{r}'}{2|\vec{r}'|^2}\frac{d}{dt}|\vec{r}'|^2\right).$$

Так как

$$\frac{d}{dt}|\vec{r}'|^2 = \frac{d}{dt}(\vec{r}', \vec{r}') = 2(\vec{r}', \vec{r}'')$$

то

$$k = \left|\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}\right| = \frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left|\vec{r}'' - \vec{r}'\frac{(\vec{r}', \vec{r}'')}{|\vec{r}'|^2}\right|.$$

Более подробно:

$$\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(\vec{r}'' - \vec{r}'\frac{(\vec{r}', \vec{r}'')}{|\vec{r}'|^2}\right) = \frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(x'' - x'\frac{x'x'' + y'y''}{(x')^2 + (y')^2}\right)\vec{e}_1 +$$
$$+ \frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(y'' - y'\frac{x'x'' + y'y''}{(x')^2 + (y')^2}\right)\vec{e}_2 =$$
$$= \frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(\frac{x''(y')^2 - x'y'y''}{(x')^2 + (y')^2}\right)\vec{e}_1 + \frac{1}{|\vec{r}'|^2}\left(\frac{y''(x')^2 - y'x'x''}{(x')^2 + (y')^2}\right)\vec{e}_2.$$

Отсюда

$$k^2 = ((x')^2 + (y')^2)^{-4}((y')^2(x''y' - y''x')^2 + (x')^2(y''x' - x''y')^2) =$$
$$= \frac{(x''y' - y''x')^2}{((x')^2 + (y')^2)^3}.$$

Итак, $k = \dfrac{|(x''y' - y''x')|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$. □

Вернемся к изучению движения репера $(\vec{v}(s), \vec{n}(s))$ при изменении параметра s. Оказывается, что производные от векторов репера удовлетворяют простым соотношениям, называемым «формулами Френе».

Теорема 2. *Если гладкая кривая отнесена к натуральному параметру, то выполнены равенства:*

$$\frac{d\vec{v}(s)}{ds} = k(s)\vec{n}(s), \quad \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = -k(s)\vec{v}(s).$$

Доказательство. Первая формула Френе непосредственно следует из определения кривизны $k(s)$. Осталось проверить вторую формулу. Рассмотрим вектор-функцию $\vec{n}(s)$; в силу определения имеем $(\vec{n}(s), \vec{n}(s)) = 1$. В силу леммы 2 имеем

$$\left(\vec{n}(s), \frac{d}{ds}\vec{n}(s)\right) = 0,$$

т. е.

$$\frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \lambda(s)\,\vec{v}(s),$$

где $\lambda(s)$ — некоторая гладкая функция от s. Найдем эту функцию. Продифференцируем по s тождество: $(\vec{v}\,,\vec{n}) = 0$. Получим

$$\left(\frac{d\vec{v}}{ds}\,,\vec{n}\right) + \left(\vec{v}\,,\frac{d\vec{n}}{ds}\right) = 0,$$

откуда $k(\vec{n},\vec{n}) + (\vec{v},\lambda\vec{v}) = 0$, т. е. $k = -\lambda$. □

Векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$ могут быть организованы в столбец; тогда формулы Френе принимают вид

$$\begin{pmatrix} d\vec{v}/ds \\ d\vec{n}/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{n} \end{pmatrix},$$

где $X = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ — кососимметрическая матрица. Этому соотношению можно придать прозрачный геометрический смысл.

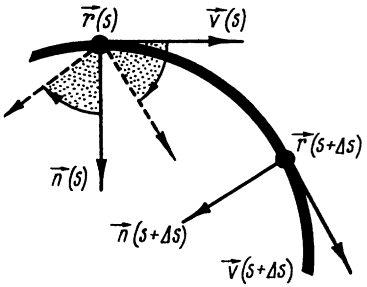


Рис. 1

Рассмотрим в точке s репер $\omega(s) = (\vec{v}(s), \vec{n}(s))$ и сместимся по кривой $\vec{r}(s)$ из точки s в бесконечно близкую точку $s + \Delta s$ (рис. 1). Перенеся параллельно репер $\omega(s+\Delta s)$ в точку s, получим в точке s два репера: $\omega(s)$ и $\omega(s+\Delta s)$, причем $\omega(s+\Delta s)$ получается из репера $\omega(s)$ поворотом на бесконечно малый угол $\Delta\varphi$. Следовательно, можно считать, что реперы $\omega(s+\Delta s)$, $\omega(s)$ связаны ортогональным преобразованием: $\omega(s+\Delta s) = A(\Delta s)\omega(s)$, где $A(\Delta s) = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & \sin\Delta\varphi \\ -\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi \end{pmatrix}$. Разлагая функции $\cos\Delta\varphi$, $\sin\Delta\varphi$ в ряды по малому приращению $\Delta\varphi$ и пренебрегая членами второго порядка малости по $\Delta\varphi$, получаем:

$$A(\Delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta\varphi \\ -\Delta\varphi & 0 \end{pmatrix} + \ldots,$$

т. е.

$$\omega(s+\Delta s) = \omega(s) + \begin{pmatrix} 0 & \Delta\varphi \\ -\Delta\varphi & 0 \end{pmatrix}\omega(s) + \ldots$$

Отсюда

$$\frac{d}{ds}\omega(s) = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\begin{pmatrix} 0 & \Delta\varphi \\ -\Delta\varphi & 0 \end{pmatrix}\omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\varphi(s)}{ds} \\ -\frac{d\varphi(s)}{ds} & 0 \end{pmatrix}\omega(s),$$

где $\varphi(s)$ — угол поворота репера $\omega(s)$ относительно какого-то фиксированного репера на плоскости (скажем, относительно репера $\omega(0)$). В то же время, из формул Френе следует, что $\frac{d}{ds}\omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \omega(s)$. Сравнивая полученные матрицы, видим, что $k(s) = d\varphi(s)/ds$. Таким образом, кривизна кривой в точке s может быть интерпретирована как скорость изменения угла $\varphi(s)$ в этой точке. В случае плоской кривой задание функции $k(s)$ полностью определяет кривую, если только $k \neq 0$ для всех s. Более точно, имеет место

Теорема 3. *Пусть задана гладкая функция $k(s)$, не обращающаяся в нуль для всех таких s, что $a \leqslant s \leqslant b$. Тогда на плоскости существует гладкая кривая $\vec{r}(s)$, определяемая однозначно с точностью до параллельного переноса и ортогонального преобразования, для которой $k(s)$ является кривизной, а s — натуральным параметром.*

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\begin{pmatrix} d\vec{v}(s)/ds \\ d\vec{n}(s)/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix}$, где $k(s)$ — заданная функция. Так как $k(s) \neq 0$, то по теореме существования и единственности из теории дифференциальных уравнений, эта система имеет (единственное, при фиксированных начальных данных) решение, гладко продолжающееся на весь интервал $a < s < b$. Следовательно, можно рассмотреть уравнение $\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = k(s)\vec{v}(s)$. По тем же причинам, это уравнение имеет решение, однозначно определенное при задании начальных данных и продолжающееся на весь интервал $a < s < b$. (Проверьте, что решение $\vec{r} = \vec{r}(s)$ является искомой кривой!) Так как любые два начальных данных могут быть совмещены на плоскости параллельным переносом и ортогональным преобразованием, то, следовательно, однозначно определенное решение фиксируется с точностью до преобразований указанного типа. □

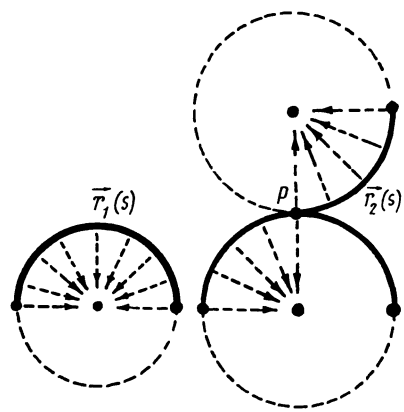


Рис. 2

Следует обсудить роль условия $k(s) \neq 0$. На рис. 2 приведены две кривые на плоскости, имеющие совпадающие гладкие функции $k(s)$, но, очевидно, не

переводимые друг в друга параллельными переносами и ортогональными преобразованиями. Обе кривые составлены из дуг окружностей. Различный характер поведения этих кривых особенно отчетливо проявляется при рассмотрении вектор-функции нормали $\vec{n}(s)$. Нормаль $\vec{n}_1(s)$ для кривой $\vec{r}_1(s)$ все время направлена в точку O — центр окружности. Кривая $\vec{r}_1(s)$ является гладкой кривой, а кривая $\vec{r}_2(s)$ не гладкая, так как вторая производная радиус-вектора $\vec{r}_2(s)$ терпит разрыв в точке P. Это обстоятельство связано с тем, что кривизна $k(s)$ является отличной от нуля постоянной во всех точках обеих кривых. Однако можно добиться того, чтобы обе кривые, имеющие совпадающие кривизны, были неконгруэнтны и гладки. Из приведенного выше примера понятно, как надо поступать.

Рассмотрим произвольную гладкую кривую, функция кривизны которой является гладкой и в некоторой точке $s = s_0$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными всех порядков. Существование таких кривых вытекает из теоремы 3, примененной к гладкой функции $k(s)$, имеющей нуль бесконечного порядка в одной из концевых точек, a или b, где $a \leqslant s \leqslant b$. Тогда, сопрягая две такие кривые в их общей концевой точке, в которой функции кривизны обращаются в нуль вместе со всеми своими производными, мы и получаем две гладкие кривые, имеющие совпадающие функции кривизны, но не конгруэнтные (см. рис. 3).

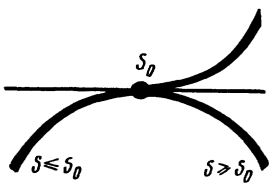


Рис. 3

2. Теория пространственных кривых. Формулы Френе

Рассмотрим теперь гладкую кривую $\vec{r}(t)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, отнесенном к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$, т. е. $\vec{r}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$. Оказывается, что, как и в плоском случае, с каждой точкой кривой $\vec{r}(s)$ можно однозначно связать некоторый репер, который будет гладко меняться вдоль кривой при изменении натурального параметра s. Прежде чем переходить к построению этого репера, который мы назовем *репером Френе*, по аналогии с плоским случаем, докажем вспомогательное утверждение о дифференцировании матричных функций.

Рассмотрим гладкую кривую в линейном пространстве матриц, т. е. однопараметрическое семейство $A(t)$, где $A(t)$ — $(n \times n)$-матрица, коэффициенты которой суть гладкие функции по t, $t \in (-a, a)$. Предположим, что все матрицы $A(t)$ (при всех t) являются ортогональными матрицами с определителем $+1$, а также, что $A(0) = E$, где E — единичная матрица.

Лемма 3. *Обозначим через* $X = \dot{A}(t)|_{t=0}$ *производную этого однопараметрического семейства ортогональных матриц* $A(t)$ *при* $t = 0$, *т. е.* X *— это матрица, составленная из функций вида* $\left.\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$, *где* $A(t) = (a_{ij}(t))$. *Тогда* X *— кососимметрическая матрица.*

Доказательство. Каждую ортогональную матрицу $A(t)$ можно представлять как линейный оператор, действующий в n-мерном евклидовом пространстве, причем этот оператор сохраняет евклидово скалярное произведение. Это означает, что для любых двух векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ имеет место тождество $(A(t)\vec{x}, A(t)\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$. Поскольку слева стоит гладкая функция от t, то можно рассмотреть ее производную по t при $t = 0$. Получим $(\dot{A}(t)\vec{x}, A(t)\vec{y}) + (A(t)\vec{x}, \dot{A}(t)\vec{y})|_{t=0} = 0$, т. е. $(X\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, X\vec{y}) = 0$. Взяв в качестве векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ базисные векторы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_j$ соответственно (где $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — ортобазис в $\mathbb{R}^n$) получаем $(X\vec{e}_i, \vec{e}_j) + (\vec{e}_i, X\vec{e}_j) = 0$, что и означает косую симметрию матрицы X в ортобазисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. □

Замечание. Поскольку множество ортогональных матриц вложено как подмножество в линейное пространство всех матриц размера $n \times n$, то гладкую кривую $A(t)$ можно рассматривать как гладкую кривую в n^2-мерном линейном пространстве. С этой точки зрения матрица $X = A(t)|_{t=0}$ естественно отождествляется с обычным вектором скорости гладкой кривой $A(t)$ при $t = 0$.

Матричнозначную функцию $A(t)$ можно разложить в точке $t = 0$ по степеням бесконечно малого приращения Δt:

$$A(\Delta t) = E + \frac{dA(t)}{dt}|_{t=0}\,\Delta t + \ldots$$

Тогда матрица X появляется как «коэффициент» при Δt.

Перейдем теперь к построению репера Френе. Пусть $\vec{r}(s)$ — гладкая вектор-функция, задающая гладкую траекторию $\gamma(s)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что при $a \leqslant s \leqslant b$ все векторы вида $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\vec{r}}{ds^n}$ линейно независимы при каждом s. Тогда в каждой точке $\vec{r}(s)$ возникает репер (не ортогональный!), составленный из векторов $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\vec{r}}{ds^n}$ и гладко меняющийся от точки к точке. В силу предположения линейной независимости производных радиус-вектора имеем, что все $\frac{d^k\vec{r}}{ds^k}$ отличны от нуля, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Предложение 1. *Пусть* $\vec{r}(s)$ *— гладкая вектор-функция в* $\mathbb{R}^n$, *и пусть* k*-я производная* $\frac{d^k\vec{r}}{ds^k}$ *оказалась линейно зависимой*

от производных $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$ *в каждой точке интервала* $a \leqslant s \leqslant b$, *причем* $\frac{d^k\vec{r}}{ds^k} \neq 0$ *при* $a \leqslant s \leqslant b$ *и все производные* $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$ *линейно независимы при* $a \leqslant s \leqslant b$. *Тогда кривая* $\vec{r}(s)$ *целиком содержится в некоторой* $(k-1)$*-мерной плоскости, натянутой на векторы* $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$. *Эта плоскость не меняет своего положения в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *при изменении* s *от* a *до* b.

Доказательство. В силу условия существуют гладкие функции $\lambda_i(s)$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, такие, что в каждой точке s имеем $\frac{d^k\vec{r}}{d^k s} = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i(s) \frac{d^i\vec{r}}{d^i s}$. В силу линейной независимости векторов $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$ эти векторы можно принять за базис в плоскости $\mathbb{R}^{k-1}$, натянутой на эти векторы. Для того чтобы доказать, что кривая $\gamma(s)$ все время остается в одной и той же k-мерной плоскости, достаточно показать, что плоскость $\mathbb{R}^{k-1}(s)$ не меняет своего положения в пространстве $\mathbb{R}^n$ при изменении s. Поскольку базисом в $\mathbb{R}^{k-1}(s)$ служат векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{k-1}\vec{r}}{ds^{k-1}}$, то достаточно показать, что производная этого базиса состоит из векторов, разлагающихся по этому базису. Однако это очевидно в силу условия предложения. □

Итак, если векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\vec{r}}{ds^n}$ линейно независимы, то кривая $\vec{r}(s)$ не содержится ни в какой $(n-1)$-мерной плоскости в $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, неподвижной при изменении s. Построим теперь в каждой точке s ортонормированный базис, векторы которого будем обозначать через $\vec{\tau}_1, \ldots, \vec{\tau}_n$. Положим $\frac{d\vec{r}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \vec{\tau}_1$. Затем рассмотрим двумерную плоскость, натянутую на векторы $\vec{\tau}_1$ и $\frac{d^2\vec{r}}{d^2 s}$, и выберем в этой плоскости вектор $\vec{\tau}_2$, ортогональный $\vec{\tau}_1$. Так как по предположению $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{d^2 s}$ линейно независимы, то $\vec{\tau}_2$ имеет нулевую проекцию на $\frac{d^2\vec{r}}{d^2 s}$. Следующий вектор $\vec{\tau}_3$ выберем в трехмерном пространстве, натянутом на $\frac{d^3\vec{r}}{d^3 s}, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_1$, т. е. на векторы $\frac{d^3\vec{r}}{d^3 s}, \frac{d^2\vec{r}}{d^2 s}, \frac{d\vec{r}}{ds}$, причем в качестве $\vec{\tau}_3$ возьмем вектор, ортогональный плоскости, натянутой на векторы $\vec{\tau}_2, \vec{\tau}_1$, (т. е. $\frac{d^2\vec{r}}{d^2 s}, \frac{d\vec{r}}{ds}$). Продолжая процесс, мы и получаем искомый ортонормированный репер $\vec{\tau}_1, \ldots, \vec{\tau}_n$. Ясно, что при изменении s векторы репера $\vec{\tau}(s)$ также гладко меняются

от точки к точке. Как и в плоском случае, рассмотрим производные от векторов репера $\vec{\tau}(s)=(\vec{\tau}_1(s),\ldots,\vec{\tau}_n(s))$. Оказывается, что они также удовлетворяют простым соотношениям, обобщающим формулы Френе для плоской кривой.

Теорема 4. *Пусть гладкая кривая $\vec{r}(s)$ в $\mathbb{R}^n$ отнесена к натуральному параметру s, и пусть векторы $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\vec{r}}{ds^n}$ линейно независимы в каждой точке $a\leqslant s\leqslant b$. Тогда существуют такие гладкие функции $k_2(s),\ldots,k_n(s)$, что выполняются тождества (формулы Френе)*

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\tau}_1}{ds}=k_2\vec{\tau}_2, \\ \frac{d\vec{\tau}_2}{ds}=k_3\vec{\tau}_3-k_2\vec{\tau}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\vec{\tau}_{n-1}}{ds}=k_n\vec{\tau}_n-k_{n-1}\vec{\tau}_{n-2}, \\ \frac{d\vec{\tau}_n}{ds}=\quad -k_n\vec{\tau}_{n-1}, \end{cases}$$

т. е. $\frac{d\vec{\tau}_i}{ds}=k_{i+1}\vec{\tau}_{i+1}-k_i\vec{\tau}_{i-1}$, *где* $k_1=k_{n+1}=0$.

Доказательство. Так как вектор $\vec{\tau}_i$ (для $1\leqslant i\leqslant n$) содержится в линейной оболочке векторов $\frac{d\vec{r}}{ds}, \ldots, \frac{d^i\vec{r}}{ds^i}$, то его производная $\frac{d\vec{\tau}_i}{ds}$ содержится в линейной оболочке векторов $\frac{d\vec{r}}{ds},\ldots,\frac{d^i\vec{r}}{ds^i},\frac{d^{i+1}\vec{r}}{ds^{i+1}}$ т. е. существуют некоторые функции $a_{i,1}(s), \ldots, a_{i,i+1}(s)$ такие, что

$$\frac{d\vec{\tau}_i}{ds}=\sum_{j=1}^{i+1}a_{i,j}(s)\vec{\tau}_j(s).$$

Таким образом, если мы составим матрицу X размера $n\times n$, выражающую набор векторов $\frac{d\vec{\tau}_1}{ds}, \ldots, \frac{d\vec{\tau}_n}{ds}$ через репер $\vec{\tau}(s)=(\vec{\tau}_1, \ldots, \vec{\tau}_n)$, то она будет иметь следующий вид:

$$X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & & & \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & & * & \\ & a_{23} & a_{33} & a_{43} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & & a_{n-1,n-2} & \\ & & & & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ & & & & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, нам известны некоторые дополнительные свойства матрицы X. В самом деле, как и в двумерном случае, мы можем интерпретировать перемещение репера $\vec{\tau}(s)$ вдоль кривой $\gamma(s)$ в терминах семейства ортогональных матриц $A(s)$ таких, что $\vec{\tau}(s) = A(s)\vec{\tau}(0)$. Задание этого однопараметрического семейства однозначно определяет эволюцию репера $\vec{\tau}(s)$ при изменении s. Тогда, очевидно, матрица X будет совпадать с производной матрицы $\frac{dA(s)}{ds}$ при $s = 0$. В силу леммы 3 матрица X будет кососимметрической, т. е.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & & & & & \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & & & 0 & \\ & a_{23} & 0 & -a_{34} & & & \\ & & a_{34} & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & -a_{n-2,n-1} & \\ & 0 & & & a_{n-2,n-1} & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & & a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Взяв в качестве функций $k_i(s)$ функции $a_{i,i+1}(s)$, мы получаем доказательство теоремы. □

Рассмотрим трехмерный случай: $n = 3$. Здесь формулы Френе принимают вид

$$\frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = k_2\vec{\tau}_2, \quad \frac{d\vec{\tau}_2}{ds} = k_3\vec{\tau}_3 - k_2\vec{\tau}_1, \quad \frac{d\vec{\tau}_3}{ds} = -k_3\vec{\tau}_2.$$

Вектор τ_1 является единичным вектором скорости кривой $\vec{r}(s)$ и обычно обозначается через $\vec{v}(s)$. Вектор $\vec{\tau}_2(s)$ совпадает с производной по s от вектора $\vec{v}$, так как $\frac{d\vec{v}}{ds} \perp \vec{v}$ и $|\vec{v}(s)| = 1$. Здесь мы использовали тот факт, что s — натуральный параметр. Вектор $\vec{\tau}_3$ ортогонален $\vec{v}$ и $\vec{n} = \frac{d\vec{v}}{ds}$, т. е. можно считать, что он совпадает с векторным произведением векторов $\vec{v}$, $\vec{n}$. Вектор $\vec{n}$ называют *вектором нормали* к кривой $\vec{r}(s)$, а вектор $\vec{b} = [\vec{v}, \vec{n}]$ — *вектором бинормали* к кривой $\vec{r}(s)$. Здесь через $[\vec{v}, \vec{n}]$ мы обозначили векторное произведение $\vec{v}$ и $\vec{n}$. В этих обозначениях формулы Френе запишутся так:

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = k\vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \varkappa\vec{b} - k\vec{v}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\varkappa\vec{n}.$$

Здесь $k(s) = k_2(s)$ и называется *кривизной* кривой, а $\varkappa(s) = k_3(s)$ и называется *кручением* кривой. (Иногда вектор $\vec{n}(s)$ называют не просто *нормалью*, а *главной нормалью* к кривой $\vec{r}(s)$).

Для удобства работы с кривизной кривой, будем всегда считать, что вектор $\vec{\tau}_2$ совпадает с $\frac{d\vec{v}(s)}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{v}(s)}{ds}\right|$; тогда $k(s)$ совпадает с модулем вектора $\frac{d\vec{v}(s)}{ds}$ и, следовательно, является положительным числом (мы считаем, что соответствующие производные радиус-вектора отличны от нуля). Если кривая плоская, то вектор бинормали является постоянным вектором, не меняется при изменении точки на кривой; в частности, кручение кривой равно нулю. Следовательно, плоские кривые могут быть охарактеризованы (с точки зрения $\mathbb{R}^3$) как кривые с нулевым кручением.

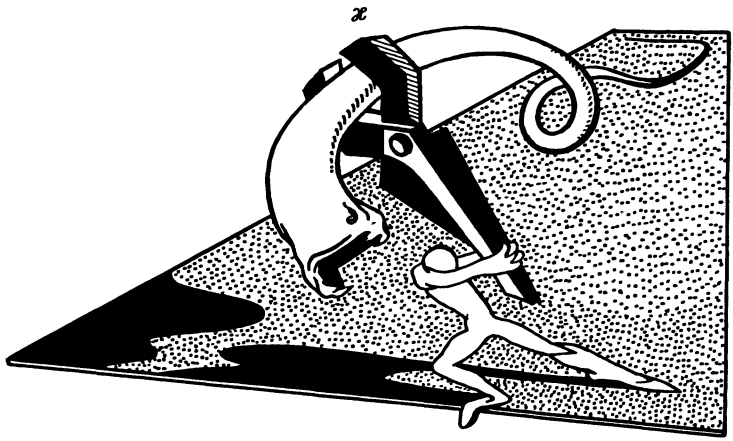


Рис. 4

Изучим более подробно роль кручения пространственной кривой в том случае, когда кручение отлично от нуля. Рассмотрим скольжение репера $(\vec{v}, \vec{n}, \vec{b})$ вдоль кривой и будем проектировать векторы $\vec{v}(s)$, $\vec{n}(s)$ и $\vec{b}(s)$ на плоскость, натянутую на векторы $\vec{b}(s_0)$ и $\vec{n}(s_0)$, где s_0 — некоторое фиксированное значение параметра s, а значения s предполагаются бесконечно близкими к s_0. При этом вектор скорости спроектируется в вектор бесконечно малой длины, а потому можно считать (в первом приближении), что этот вектор проектируется в нуль. Тогда в плоскости $\vec{b}(s_0)$, $\vec{n}(s_0)$ возникает некоторое движение векторов $\vec{b}(s)$, $\vec{n}(s)$ спроектированных на эту плоскость. Из формул Френе следует, что это движение описывается формулами $\frac{d\vec{n}}{ds} = \varkappa\vec{b}$, $\frac{d\vec{b}}{ds} = -\varkappa\vec{n}$, т. е. движение определяется кососимметрической матрицей $\begin{pmatrix} 0 & \varkappa \\ -\varkappa & 0 \end{pmatrix}$, что

определяет бесконечно малый поворот репера $\vec{b}$, $\vec{n}$. Следовательно, векторы $\vec{b}$, $\vec{n}$ вращаются относительно вектора скорости кривой, причем скорость этого вращения однозначно задается кручением кривой (отсюда, кстати, происходит и сам термин «кручение»). При этом кривая теряет свою плоскую форму и становится «изогнутой в пространстве», если она первоначально была плоской. Итак, можно считать, что пространственная кривая (в малом) может быть получена из плоской кривой, если двигаться по ней с равномерной скоростью, «подкручивая» в каждый момент времени эту кривую с помощью кручения $\varkappa$ (рис. 4).

Замечание. Как и в случае плоской кривой, существует набор инвариантов, однозначно (с точностью до движения трехмерного пространства) определяющий гладкую кривую. Эти инварианты — кривизна и кручение кривой; задание этих двух функций определяет гладкую кривую. Доказательство проводится в точности по той же схеме, какая была уже использована при доказательстве теоремы 3. Поскольку в дальнейшем мы не будем пользоваться этим фактом, то доказательство «трехмерного утверждения» мы опускаем.

Рассмотрим гладкую кривую в $\mathbb{R}^n$. Пусть вектор скорости этой кривой отличен от нуля в каждой точке.

Предложение 2. *Гладкая кривая с ненулевым вектором скорости является гладким одномерным многообразием, гладко вложенным в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. То, что кривая является гладким многообразием, непосредственно следует из определения гладкого многообразия. Остается проверить, что она является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$, для чего нужно изучить дифференциал отображения вложения i, т. е. линейное отображение di. Поскольку оно полностью определяется вектором скорости кривой, то матрица Якоби имеет максимальный ранг в каждой точке кривой, а потому кривая является подмногообразием. □

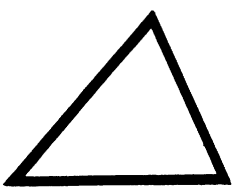


Рис. 5

Замечание. Кривая, расположенная в плоскости и изображенная на рис. 5, является гладким многообразием, но не является гладким подмногообразием в плоскости. Ясно, что она может быть задана с помощью радиус-вектора с гладкими компонентами $x(t)$, $y(t)$, однако в вершинах треугольника вектор скорости должен обращаться в нуль, чтобы кривая могла сделать резкий поворот.

Ясно, что любое одномерное гладкое замкнутое (т. е. не имеющее края) многообразие диффеоморфно либо прямой (некомпактное многообразие), либо окружности (компактное многообразие). Таким образом, все одномерные многообразия исчерпываются только двумя различными многообразиями. Эти многообразия уже не диффеоморфны, так как прямая некомпактна, а окружность компактна.

Задачи к § 1

1. Доказать, что если у плоской кривой кривизна тождественно равна нулю, то это — прямая линия.

2. Доказать, что в трехмерном пространстве плоские кривые характеризуются условием $\varkappa \equiv 0$.

3. Доказать, что прямые в трехмерном пространстве характеризуются условиями $k \equiv 0$, $\varkappa \equiv 0$.

4. Описать класс кривых, для которых $k = \text{const}$, $\varkappa = \text{const}$.

5. Доказать, что траектории движения материальной точки в центральном силовом поле являются плоскими кривыми.

§ 2. Поверхности. Первая и вторая квадратичные формы

1. Первая квадратичная форма. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, и пусть V^{n-1} — гладкое подмногообразие размерности $n-1$ (или, как говорят, «коразмерности один»), вложенное в $\mathbb{R}^n$. В настоящем параграфе мы будем в основном интересоваться только локальными свойствами этой гиперповерхности, не интересуясь ее глобальной структурой, поэтому можно считать, что у нас просто имеется гладкое вложение диска D^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Выше мы уже обсуждали различные способы задания многообразий, в том числе гиперповерхностей. Для удобства выберем параметрическое задание V^{n-1}, т. е. будем считать, что V^{n-1} (или вложенный диск D^{n-1}) определяется гладким радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \ldots, u^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$, где параметры (координаты) $u^1, \ldots, u^{n-1}$ меняются в некотором диске в евклидовом пространстве параметров $\mathbb{R}^{n-1}(u^1, \ldots, u^{n-1})$. Поскольку мы считаем, что радиус-вектор определяет гладкое подмногообразие, то это означает, что векторы $\frac{d\vec{r}}{du^1}, \ldots, \frac{d\vec{r}}{du^{n-1}}$ линейно независимы в каждой точке области определения. Напомним, что эти векторы являются касательными к соответствующим координатным линиям, проходящим через выбранную точку P на поверхности V^{n-1}. Как было показано выше, гладкое вложение V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ порождает на V^{n-1} индуцированную риманову метрику. Напомним эту конструкцию.

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$; тогда радиус-вектор $\vec{r}$ задается набором гладких функций $x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Пусть $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^2$; тогда возникает следующая квадратичная форма:

$$ds^2|_{V^{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} (dx^i(u^1, \ldots, u^{n-1}))^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^k} du^k \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} du^k du^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p,$$

$$g_{kp} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^p} \right\rangle;$$

здесь через $\langle , \rangle$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Первой квадратичной формой гиперповерхности* V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ называется форма $ds^2|_{V^{n-1}} = \sum_{k,p} g_{kp} du^k du^p$, где функции $g_{kp}(u^1, \ldots, u^{n-1})$ определены выше.

Функции g_{kp} зависят от радиус-вектора гиперповерхности и меняются, вообще говоря, при изменении радиус-вектора, т. е. при деформации гиперповерхности. Первая квадратичная форма определена на векторах, касательных к V^{n-1}. Более точно: если $\vec{a}, \vec{b} \in T_P V^{n-1}$ — два произвольных касательных вектора, то определено скалярное произведение $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_{ds^2(V^{n-1})} = g_{kp} a^k b^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp} a^k b^p$.

Напомним, что для упрощения обозначений мы опускаем знак суммирования, когда суммирование ведется по совпадающим верхним и нижним индексам. Из геометрического смысла функций g_{kp} следует, что скалярное произведение $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_{ds^2(V^{n-1})}$ просто совпадает с обычным евклидовым скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, рассматриваемых как векторы объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$. Матрица метрического тензора $\mathfrak{G}$, составленная из функций $g_{kp}(u^1, \ldots, u^{n-1})$, имеет вид

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n-1,1} & g_{n-1,2} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Напомним, что риманова метрика возникла ранее как некоторый объект, удобный для вычисления длин гладких кривых, расположенных на поверхности. С этой точки зрения длина дуги $\gamma(t)$, расположенной в V^{n-1}, выражается по формуле $l_a^b(\gamma(t)) = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle}\, dt$. В терминах функций $g_{kp}(u)$ это же вы-

ражение приобретает вид

$$l_a^b\gamma(t)=\int\limits_a^b\sqrt{\sum_{k,p=1}^{n-1}g_{kp}(u(t))\frac{du^k(t)}{dt}\frac{du^p(t)}{dt}}\,dt.$$

Эта формула «выгоднее» тем, что в ней участвуют функции $g_{kp}(u)$, не зависящие от выбора кривой на поверхности V^{n-1}, а зависящие только от самой поверхности V^{n-1} и от ее параметризации. Кроме того, эти функции не меняются при изометриях поверхности, например при изгибании плоскости в цилиндр.

Рассмотрим теперь, какой вид приобретает первая квадратичная форма для различных способов задания гиперповерхности. Пусть V^{n-1} задана в виде графика $x^n=f(x^1,\ldots,x^{n-1})$. Имеем:

$$ds^2|_{V^{n-1}}=\sum_{i=1}^{n-1}(dx^i)^2+(dx^n(x^1,\ldots,x^{n-1}))^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}(dx^i)^2+\sum_{k,p=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^p}dx^k\,dx^p=$$

$$=\sum_{k,p=1}^{n-1}\left(\delta_{kp}+\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^p}\right)dx^k\,dx^p=g_{kp}(x^1,\ldots,x^{n-1})dx^k\,dx^p.$$

Иногда будем обозначать $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ через f_{x^α}.

Пусть теперь поверхность V^{n-1} задана с помощью неявной функции, т. е. в виде $F(x^1,\ldots,x^n)=0$, где $\frac{\partial F}{\partial x^n}\neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции существует (локально) решение уравнения $F(x^1,\ldots,x^n)=0$ вида $x^n=f(x^1,\ldots,x^{n-1})$, причем $\partial f/\partial x^i=-(\partial F/\partial x^i)/(\partial F/\partial x^n)$. Подставляя вместо f_{x^α} выражение вида $(\partial F/\partial x^\alpha)/(\partial F/\partial x^n)$, получаем $\mathfrak{G}=(g_{kp})$, где

$$g_{kp}=\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial F}{\partial x^p}\right)\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial x^n}\right)^2\right]+\delta_{kp}.$$

Рассмотрим частный случай — вложение двумерной поверхности в трехмерное евклидово пространство. Пусть V^2 задано параметрически: $\vec r=\vec r(u,v)$. Тогда первая квадратичная форма обычно записывается в виде $ds^2(V^2)=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$, где $E=\langle\vec r_u,\vec r_u\rangle$, $F=\langle\vec r_u,\vec r_v\rangle$, $G=\langle\vec r_v,\vec r_v\rangle$ — коэффициенты формы, выраженные через компоненты радиус-вектора $\vec r$

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,\quad F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,\quad G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

Напомним, что метрика $ds^2(V^2)$ называется *конформно-евклидовой*, если $E=G$ и $F=0$.

Рассмотрим пример первой квадратичной формы для поверхностей вращения, вложенных в $\mathbb{R}^3$. Пусть в $\mathbb{R}^3$ введены цилиндриче-

ские координаты (r, φ, z), и пусть двумерная поверхность задана параметрически: $\varphi = u$, $z = v$, $r = r(v)$. Тогда вычисление дает

$$ds^2(V^2) = dv^2 + r^2(v)du^2 + (dr(v))^2 = (1 + (r'_v)^2)dv^2 + r^2 du^2.$$

Здесь $F(u, v) = 0$, $E(u, v) = r^2(v)$, $G(u, v) = 1 + (r'_v)^2$. Тот факт, что $F = 0$, означает, что координаты линии $v = v_0 = \text{const}$ и $u = u_0 = \text{const}$ ортогональны друг другу в каждой точке (рис. 6).

Лемма 1. *Пусть $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие и $\mathfrak{G}$ — первая квадратичная форма. Тогда форма $\mathfrak{G}$ невырождена.*

Доказательство. В силу определения радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \ldots, u^{n-1})$ все векторы $\vec{r}_{u^k}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, линейно независимы в точках P, принадлежащих V^{n-1}. Поскольку матрица $\mathfrak{G}$ составлена из скалярных произведений векторов $\vec{r}_{u^k}$ и $\vec{r}_{u^p}$, т. е. $\mathfrak{G} = (\langle \vec{r}_{u^k}, \vec{r}_{u^p} \rangle)$, то $\mathfrak{G}$ невырождена. □

Этот факт можно усмотреть и из геометрических соображений: если бы симметрическая матрица $\mathfrak{G}$ была вырождена, то тогда по крайней мере одно ее собственное число было бы равно нулю, а тогда нулевое собственное число имела бы и исходная евклидова метрика, что противоречит ее определению.

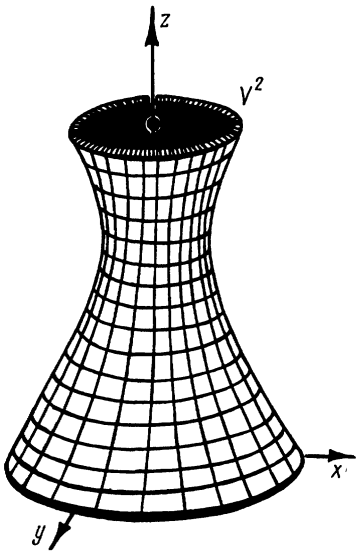


Рис. 6

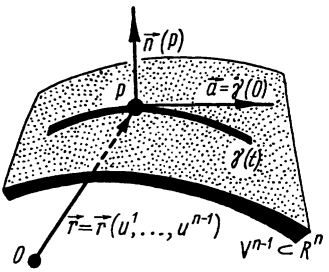


Рис. 7

2. Вторая квадратичная форма. Пусть V^{n-1} — гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, заданная радиус-вектором вида $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \ldots, u^{n-1})$. Пусть $\vec{n} = \vec{n}(P)$ — единичный вектор, ортогональный поверхности V^{n-1} в точке P. Определим квадратичную форму $Q(\vec{a}, \vec{a})$, задав

ее значения $Q(\vec{a}, \vec{a})$ для произвольного вектора $\vec{a} \in T_P(V^{n-1})$. Для этого рассмотрим произвольную гладкую кривую $\gamma(t)$, лежащую на V^{n-1} и проходящую через точку P, причем так, что $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = \vec{a}$. Такая кривая всегда существует, хотя и определена неоднозначно (рис. 7). Так как вдоль кривой $\gamma(t)$ радиус-вектор $\vec{r}$ является функцией от t, то $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{r}(u(t))\Big|_{t=0}$. Рассмотрим радиус-функцию $\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\vec{r}(u(t))$ и ее производную по t, т. е. $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(u(t))$. Обозначим через $\ddot{\vec{r}}_{\vec{a}}$ значение $\ddot{\vec{r}}$ при $t = 0$. Это и есть вторая производная радиус-вектора $\vec{r}$ по направлению вектора $\vec{a}$.

Определение. Положим $q(\vec{a}, \vec{a}) = \langle \ddot{\vec{r}}_{\vec{a}} ; \vec{n} \rangle$.

Определенное нами число является величиной проекции вектора $\ddot{\vec{r}}_{\vec{a}}$ на вектор нормали $\vec{n}$ в точке P (рис. 8). Вычислим значение $Q(\vec{a}, \vec{a})$ в явном виде через координаты вектора $\vec{r}$. Имеем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_{u^k} \frac{du^k(t)}{dt}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt}\frac{du^p}{dt} + \vec{r}_{u^k} \frac{d^2u^k}{dt^2},$$

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(u(t)), \vec{n} \right\rangle = \left\langle \vec{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt}\frac{du^p}{dt}, \vec{n} \right\rangle + 0,$$

$$\left\langle \vec{r}_{u^k} \frac{d^2u}{dt^2}, \vec{n} \right\rangle = \frac{d^2u}{dt^2} \langle \vec{r}_{u^k}, \vec{n} \rangle = 0,$$

$$\vec{r}_{u^k} \in T_P(V^{n-1}), \quad \vec{n} \perp T_P(V^{n-1}),$$

$$\left\langle \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{t=0}, \vec{n} \right\rangle = \langle \vec{r}_{u^k, u^p}|_{t=0}, \vec{n} \rangle \frac{du^k}{dt}\Big|_{t=0} \frac{du^p}{dt}\Big|_{t=0} = Q(\vec{a}, \vec{a}).$$

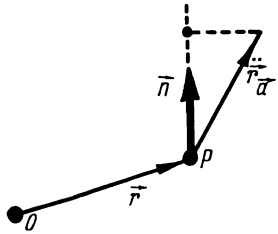


Рис. 8

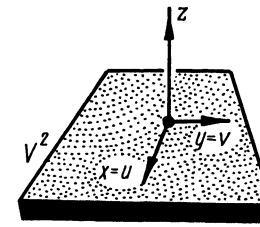


Рис. 9

При этом следует помнить, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\left(\frac{du^1(0)}{dt}, \ldots, \frac{du^{n-1}(0)}{dt}\right)$, т. е. окончательно

$$Q(\vec{a}, \vec{a}) = \langle \vec{n}, \vec{r}_{u^k u^p}|_{t=0} \rangle a^k a^p.$$

Эта квадратичная форма однозначно определяет билинейную форму $Q(\vec{a}, \vec{b})$, значение которой на паре произвольных векторов $\vec{a}, \vec{b} \in T_P(V^{n-1})$ определяется так:

$$Q(\vec{a}, \vec{b}) = q_{kp}(P)a^k b^p,$$

где $q_{kp}(P) = \langle \vec{r}_{u^k u^p}|_{t=0}, \vec{n} \rangle$.

Лемма 2. *Выражение* $Q(\vec{a}, \vec{b}) = q_{kp}a^k b^p$, *где* $\vec{a}, \vec{b} \in T_P(V^{n-1})$ *определяет билинейную форму.*

Доказательство. Имеем

$$q_{k'p'} = \langle \vec{r}_{u^{k'} u^{p'}}|_{t=0}, \vec{n} \rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} \left\langle \frac{\partial^2 \vec{r}(0)}{\partial u^k \partial u^p}, \vec{n} \right\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} q_{kp},$$

т. е. функции q_{kp} преобразуются при замене координат как коэффициенты билинейной формы, что и требовалось доказать. □

Определение. Билинейная форма $Q(\vec{a}, \vec{b})$ называется *второй квадратичной формой поверхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Ясно, что форма Q зависит от способа вложения V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, т. е. при гладкой деформации V^{n-1} эта форма, вообще говоря, будет меняться. При этом форма уже не является инвариантной относительно изометрий V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Так, например, при изгибании V^{n-1}, т. е. при гладкой деформации $\mathbb{R}^n$, при которой первая форма не меняется, форма Q будет, вообще говоря, изменяться. Например, пусть V^2 — двумерная плоскость в $\mathbb{R}^3$; тогда радиус-вектор $\vec{r}(u, v)$ можно считать линейной функцией от параметров u, v. Следовательно, первая форма является евклидовой плоской метрикой: $du^2 + dv^2$ (рис. 9).

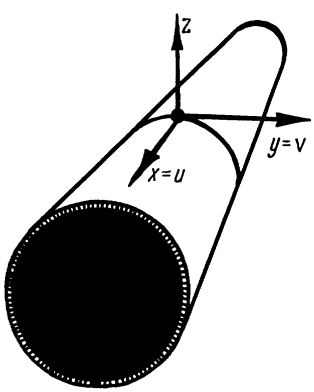


Рис. 10

Теперь рассмотрим изометрическое преобразование V^2 — свертывание плоскости $\mathbb{R}^2$ в цилиндр, ось которого параллельна оси Ox (рис. 10). Ясно, что вторая форма цилиндра отлична от нуля, так как отлично от нуля число $\langle \vec{r}_{vv}, \vec{n} \rangle$. В то же время вторая форма плоскости $\mathbb{R}^2$ тождественно равна нулю, следовательно, при изгибании (т. е. при изометрии) вторая форма изменилась.

Рассмотрим фиксированное подмногообразие $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, пусть $P \in V^{n-1}$. В каждой точке P определена пара форм, $\mathfrak{G}$ и Q (первая и вторая формы). С этой парой связан набор числовых инвариантов, позволяющих изучать V^{n-1} независимо от введенной на ней системы координат. Обозначим через $\mathfrak{G}$ и Q матрицы соответствующих форм и рассмотрим полином по переменной λ: $\det(Q - \lambda\mathfrak{G})$. Поскольку форма $\mathfrak{G}$ невырождена (см. лемму 1), то существует матрица $\mathfrak{G}^{-1}$, обратная к $\mathfrak{G}$; следовательно, уравнение $\det(\mathfrak{G}^{-1}Q - \lambda E) = 0$ эквивалентно уравнению $\det(Q - \lambda\mathfrak{G}) = 0$.

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ собственные числа матрицы $\mathfrak{G}^{-1}Q$, т. е. корни уравнения $\det(Q - \lambda\mathfrak{G}) = 0$. Вскоре мы докажем, что все они вещественны. Запишем характеристический полином $F(\lambda)$ в виде $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sigma_k \lambda^k$, где σ_k — симметрические функции от корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Лемма 3. *Функции $\sigma_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ являются инвариантами пары форм $\mathfrak{G}$ и Q, т. е. сохраняются при произвольной невырожденной замене координат в окрестности точки $P \in V^{n-1}$.*

Доказательство. При регулярной замене координат $x \to x'$ в окрестности точки P в касательном пространстве $T_P V^{n-1}$ возникает индуцированное линейное невырожденное преобразование с помощью матрицы Якоби: $J\colon T_P \to T_P$. При этом матрицы $\mathfrak{G}$ и Q подвергаются преобразованию: $\mathfrak{G} \to J\mathfrak{G}J^{\top} = \mathfrak{G}'$; $Q \to JQJ^{\top} = Q'$. Следовательно:

$$\det((\mathfrak{G}')^{-1}Q' - \lambda E) = \det[(J^{\top})^{-1}(\mathfrak{G}^{-1}Q - \lambda E)J^{\top}] = \det(\mathfrak{G}^{-1}Q - \lambda E),$$

что и требовалось доказать. □

Нас будут особенно интересовать инварианты:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \operatorname{Sp}(\mathfrak{G}^{-1}Q); \quad \sigma_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \det(\mathfrak{G}^{-1}Q).$$

Остальные σ_k, $2 \leqslant k \leqslant n-2$, описывают более тонкие свойства V^{n-1}, которыми мы сейчас заниматься не будем. Поскольку $\mathfrak{G}^{-1}Q \neq 0$, если $Q \neq 0$, то существует хотя бы один инвариант σ_k, отличный от нуля. Инварианты σ_1 и σ_{n-1} являются «крайними» инвариантами (рис. 11).

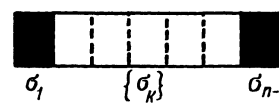


Рис. 11

Определение. Функция $H(P) = \sigma_1(P) = \sigma_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ называется *средней кривизной поверхности $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $P \in V^{n-1}$*. Функция $K(P) = \sigma_{n-1}(P) = \sigma_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ называется *гауссовой кривизной поверхности $V^{n-1} \in \mathbb{R}^n$ в точке P*.

Если $n=3$ и $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, то $H(P)=\lambda_1+\lambda_2$, $K(P)=\lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Теорема 1. *Все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ пары форм $\mathfrak{G}$, Q вещественны. В том случае, когда все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ попарно различны, все собственные векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ матрицы $\mathfrak{G}^{-1}Q$ взаимно ортогональны, как относительно объемлющей евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$, так и относительно римановой метрики, индуцированной на V^{n-1} вложением $V^{n-1} \to \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. По известной теореме из алгебры собственные числа симметрической матрицы вещественны, и все ее собственные векторы взаимно ортогональны для различных собственных чисел. Пока что эта теорема не может быть применена в нашей ситуации, так как матрица $\mathfrak{G}^{-1}Q$, вообще говоря, не симметрична. Симметрия $\mathfrak{G}^{-1}Q$ имела бы, например, место, если бы $\mathfrak{G}$ и Q коммутировали. Так как форма $\mathfrak{G}(P)$ симметрична при каждом P, то в некоторой окрестности P существует регулярная замена координат $x \to x'$ такая, что в одной точке P форма $\mathfrak{G}(P)$ приводится к диагональному виду. Такое приведение возможно, вообще говоря, только в одной точке. Поскольку приведение к диагональному виду необходимо осуществить только в одной точке, то в качестве искомой замены достаточно взять линейную замену. Приведя $\mathfrak{G}$ к диагональному виду, можно затем привести ее к единичной матрице, применяя растяжения вдоль главных осей формы. Пусть A — линейный оператор A: $T_P V^{n-1} \to T_P V^{n-1}$, осуществляющий приведение $\mathfrak{G}$ к единичной матрице; тогда $\mathfrak{G}=AEA^{\top}=AA^{\top}$. Матрица E, возникающая после выполнения A, определяет ортобазис $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_{n-1}$ в $T_P V^{n-1}$. Получаем $\det(Q-\lambda\mathfrak{G})=\det[A(A^{-1}Q(A^{-1})^{\top}-\lambda E)A^{\top}]$.

Рассмотрим форму $\widetilde{Q}=BQB^{\top}$, где $B=A^{-1}$. Исходное уравнение $\det(Q-\lambda\mathfrak{G})=0$ запишется в базисе $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_{n-1}$ в виде $\det(\widetilde{Q}-\lambda E)=0$, так как $\det A \neq 0$. При этом $\widetilde{Q}^{\top}=\widetilde{Q}$, так как $Q^{\top}=Q$. Следовательно, все собственные числа и собственные векторы у формы $\widetilde{Q}$ и матрицы $\mathfrak{G}^{-1}Q$ одни и те же. Так как форма $\widetilde{Q}$ симметрична, то все ее собственные числа (т. е. $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$) вещественны, и в случае, когда все они попарно различны, все ее собственные векторы взаимно ортогональны. Это следует из известной теоремы алгебры. Ортобазис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ не обязан совпадать с ортобазисом $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_{n-1}$. □

Как видно из доказательства, в случае, когда все собственные числа различны, ортобазис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ в плоскости $T_P V^{n-1}$ определен однозначно. Если же среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ есть совпадающие, то остается довольствоваться только соотношением $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$, если

$\lambda_i \neq \lambda_j$. Если собственное число имеет кратность k, то ему отвечает k-мерое инвариантное подпространство, векторы которого умножаются на одно и то же число λ; в этом подпространстве можно также выбрать (неоднозначно) k-мерный ортобазис.

Определение. Направления, задаваемые векторами $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ (определенными однозначно, если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$) называются *главными направлениями гиперповерхности* V^{n-1} в точке P, или главными осями.

Итак, мы связали с каждой точкой гиперповерхности V^{n-1} однозначно определенный (если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$) с точностью до выбора знака ортобазис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$, гладко зависящий от P. Ортогональность векторов $\{\vec{e}_i\}$ имеет место как в объемлющей евклидовой метрике, так и в индуцированной метрике на $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Поскольку в ортобазисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ матрица $\mathfrak{G}$ становится единичной, то $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ совпадают с собственными числами формы Q, записанной в ортобазисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$.

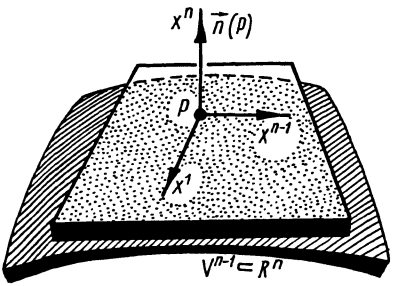


Рис. 12

Рассмотрим частный случай. Пусть $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ задана в виде графика $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$; пусть плоскость $T_P V^{n-1}$ в некоторой точке $P \in V^{n-1}$ совпадает с плоскостью переменных $x^1, \ldots, x^{n-1}$ (рис. 12). Тогда нормаль $\vec{n}(P)$ к V^{n-1} в точке P имеет координаты $(0, \ldots, 0, 1)$; радиус-вектор $\vec{r}$, описывающий поверхность V^{n-1}, имеет вид $\vec{r} = \vec{r}(x^1, \ldots, x^{n-1}) = (x^1, \ldots, x^{n-1}; f(x^1, \ldots, x^{n-1}))$. Так как гиперплоскость $(x^1, \ldots, x^{n-1}) = T_P V^{n-1}$ касается V^{n-1} в точке P, то выполнено соотношение $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$; отсюда $\mathfrak{G}(P) = E$, так как $g_{ij} = f_{x^i} f_{x^j} + \delta_{ij}$.

Рассмотрим матрицу $Q = (q_{ij})$, где $q_{ij} = \langle \vec{r}_{x^i x^j}; \vec{n} \rangle = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^i \partial x^j}$. Итак, $Q = (f_{x^i x^j}(P))$ совпадает с матрицей гессиана функции f в точке P. Средняя кривизна $H(P)$ имеет вид

$$H(P) = \operatorname{Sp}(\mathfrak{G}^{-1} Q) = \operatorname{Sp} Q = \sum_{k=1}^{n-1} f_{x^k x^k};$$

для гауссовой кривизны $K(P)$ получаем

$$K(P) = \det(\mathfrak{G}^{-1} Q) = \det Q = \det(f_{x^i x^j}(P)).$$

Для двумерной поверхности (при $n=3$) получаем

$$z=f(x, y), \quad H(P)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\Delta f,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа на плоскости $\mathbb{R}^2$;

$$K(P)=\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2.$$

3. Элементарная теория гладких кривых на гиперповерхности. Рассмотрим произвольную точку $P\in V^{n-1}$, и пусть $\vec{n}(P)$ — нормаль к гиперповерхности V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольную двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$, проходящую через P и пересекающую V^{n-1} по некоторой гладкой кривой $\gamma(t)=\mathbb{R}^2\cap V^{n-1}$ (по-прежнему нас интересуют только события, происходящие в малой окрестности точки P).

Определение. Гладкая кривая $\gamma(t)=\mathbb{R}^2\cap V^{n-1}$ называется *плоским сечением гиперповерхности* $V^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$.

Через точку P проходит бесконечно много плоских сечений. В то же время далеко не всякая гладкая кривая $\gamma\subset V^{n-1}$ является плоским сечением V^{n-1}. Для того чтобы $\gamma\subset V^{n-1}$ не была плоским сечением, достаточно, чтобы γ имела ненулевое кручение. Пусть γ — плоское сечение V^{n-1} (зафиксируем содержащую ее плоскость $\mathbb{R}^2$), и пусть точка O — начало координат, из которого выходит радиус-вектор $\vec{r}=\vec{r}(u^1, \ldots, u^{n-1})$, описывающий поверхность V^{n-1}, принадлежит плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть $\vec{m}(P)$ — вектор нормали к плоской кривой $\gamma=\mathbb{R}^2\cap V^{n-1}$, содержащийся в $\mathbb{R}^2$ (рис. 13). Поскольку мы рассматриваем произвольное плоское сечение, то нормали $\vec{n}$ и $\vec{m}$, вообще говоря, не совпадают.

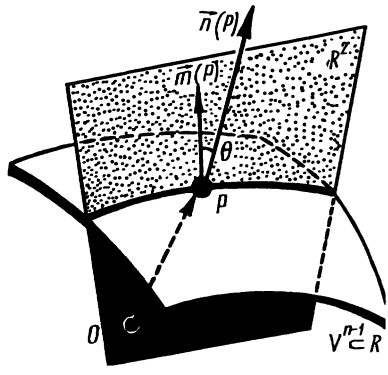


Рис. 13

Введем на кривой $\gamma=\mathbb{R}^2\cap V^{n-1}$ натуральный параметр s: $\gamma=\gamma(s)$ (s — длина дуги). Тогда в плоскости $\mathbb{R}^2$ кривая $\gamma(s)$ задается радиус-вектором $\vec{r}=\vec{r}(s)$, где $\vec{r}(s)=\vec{r}(u^1(s), \ldots, u^{n-1}(s))$. В силу формул Френе для плоских кривых имеем $k(s)=\left|\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}\right|$, где

$k(s)$ — кривизна кривой $\gamma(s)$ в точке P. Напомним также, что $\frac{d^2\vec{r}(s)}{d^2s} = \vec{m}k(s)$, где $\vec{m} = \vec{m}(P)$, $P \in \gamma(s)$. С другой стороны, если $\vec{a} = \frac{d}{ds}\vec{r}(s)$ — вектор скорости кривой $\gamma(s)$ в точке P, то (в силу определения второй формы Q) имеем

$$Q(\vec{a}, \vec{a}) = \left\langle \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \vec{n} \right\rangle = \langle k\vec{m}, \vec{n} \rangle = k\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = k \cos\theta,$$

где θ — угол между нормалями $\vec{m}$ и $\vec{n}$ в точке P (см. рис. 13). С другой стороны,

$$Q(\vec{a}, \vec{a}) = Q\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = Q\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2} Q\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right),$$

где t — произвольный гладкий параметр вдоль кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$. Здесь $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha}$ — произвольный касательный вектор к кривой γ в точке P. Если $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1})$, то

$$k \cos\theta = \frac{Q(\vec{a}, \vec{a})}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j}.$$

Поскольку в направлении любого касательного вектора $\vec{\alpha} \in T_P V^{n-1}$ можно провести кривую γ, являющуюся плоским сечением, то, следовательно, нами доказана

Теорема 2. *Для любого касательного вектора $\vec{\alpha} \in T_P V^{n-1}$ и любого плоского сечения γ (такого, что $\dot{\vec{\gamma}} = \vec{\alpha}$) отношение второй формы к первой равно $k \cos\theta$, т. е.*

$$\frac{Q(\vec{a}, \vec{a})}{\mathcal{G}(\vec{a}, \vec{a})} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j} = k \cos\theta.$$

Кривизна k называется *кривизной плоского сечения*. Среди плоских сечений выделен класс нормальных сечений.

Определение. Плоское сечение $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ в точке P называется *нормальным*, если $\vec{n}(P) \in \mathbb{R}^2$, т. е. $\theta = 0$.

Таким образом, каждое нормальное сечение γ в точке $P \in V^{n-1}$ взаимно однозначно задается касательным вектором $\alpha \in T_P V^{n-1}$, т. е. двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$, определяющая это сечение, натянута на два вектора: нормаль $\vec{n}(P)$ и вектор $\vec{\alpha} \in T_P V^{n-1}$. Вращая плоскость $\mathbb{R}^2$ вокруг $\vec{n}(P)$, получаем все нормальные сечения гиперповерхности V^{n-1} в точке P.

Для нормального сечения $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ доказанная в теореме 2 формула принимает вид

$$k = \frac{Q(\vec{a}, \vec{a})}{\mathcal{G}(\vec{a}, \vec{a})} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j},$$

так как $\theta = 0$. Так как кривизна плоского сечения (вдоль вектора $\vec{\alpha}$), образующего угол θ с нормалью $\vec{n}(P)$, зависит от θ, то эту функцию следует записать в виде $k(\theta, \vec{\alpha})$. В силу доказанного утверждения: $k(\theta, \vec{\alpha}) \cos\theta = k(0, \vec{\alpha})$, где $k(0, \vec{\alpha})$ — кривизна нормального сечения (вдоль вектора $\vec{\alpha}$).

Таким образом, если известна кривизна нормального сечения $k(0, \vec{\alpha})$, то кривизна любого плоского сечения (вдоль $\vec{\alpha}$), образующего угол θ с $\vec{n}$, находится из формулы $k(\theta, \vec{\alpha}) = \frac{1}{\cos\theta} k(0, \vec{\alpha})$.

Теперь напомним, что в касательной плоскости $T_P V^{n-1}$ всегда определены главные направления $\vec{e}_1(P), \ldots, \vec{e}_{n-1}(P)$, определяющиеся однозначно, когда $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим эти «главные оси» $\vec{e}_1(P), \ldots, \vec{e}_{n-1}(P)$ и построим по каждому из них соответствующее нормальное плоское сечение $\gamma_i = \mathbb{R}^2_i \cap V^{n-1}$, где плоскость $\mathbb{R}^2_i$ натянута на $\vec{n}(P)$, $\vec{e}_i(P)$. Все главные направления $\vec{e}_i(P)$ взаимно ортогональны в евклидовой метрике на $T_P V^{n-1}$. Обозначим через $k_i(P)$ кривизну нормального сечения γ_i (эти сечения иногда называются главными нормальными сечениями).

Теорема 3. *Собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ совпадают с кривизнами $k_1, \ldots, k_{n-1}$ главных нормальных сечений.*

Доказательство. Из теоремы 2 имеем $k \cos\theta = \dfrac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j}$; так как $\theta = 0$ для нормального сечения, то $k = \dfrac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j}$, где $\vec{\alpha}$ — определяющий вектор нормального сечения. Фиксируем в $T_P V^{n-1}$ ортобазис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$. Тогда $g_{ij} = \delta_{ij}$, $q_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$; следовательно,

$$k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} (\alpha^i)^2}.$$

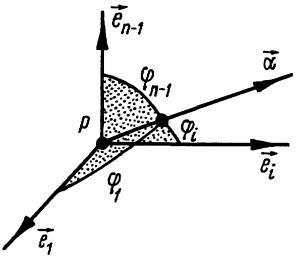


Рис. 14

Если $\vec{a} \in T_P V^{n-1}$ совпадает с одним из $\vec{e}_i$, то $k_i = \lambda_i$, что и требовалось. □

Рассмотрим в $T_P V^{n-1}$ произвольный вектор $\vec{\alpha}$ и рассмотрим нормальное сечение вдоль $\vec{\alpha}$. Обозначим через φ_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ углы, образуемые $\vec{\alpha}$ с главными направлениями $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ (рис. 14).

Предложение 1. *Для нормального сечения вдоль произвольного вектора $\vec{\alpha} \in T_P V^{n-1}$ выполнено соотношение (формула Эйлера)*

$$k = k(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i.$$

Доказательство. В силу теоремы 3 имеем

$$k(\vec{\alpha}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} (\alpha^i)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{(\alpha_i)^2}{\left(\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1} (\alpha^i)^2}\right)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i,$$

где $\cos \varphi_i = \dfrac{\alpha_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1} (\alpha^i)^2}} = \dfrac{\alpha_i}{|\vec{\alpha}|}$, где через $|\vec{\alpha}|$ обозначена длина $\vec{\alpha}$. То, что $\cos \varphi_i = \dfrac{\alpha_i}{|\vec{\alpha}|}$, очевидно. □

Формула Эйлера позволяет исследовать так называемые «экстремальные свойства» главных кривизн $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Рассмотрим кривизну нормального сечения $k(\vec{\alpha})$ как функцию от $\vec{\alpha} \in T_P V^{n-1}$. Так как $k(\vec{\alpha}) = k(\vec{\rho\alpha})$, где $\rho \neq 0$ — вещественное число, то $k(\vec{\alpha})$ зависит только от направляющих косинусов $\cos \varphi_1, \ldots, \cos \varphi_{n-1}$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ — введенные ранее углы; при этом $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \cos^2 \varphi_i = 1$. Так как $\{\cos \varphi_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$ можно считать координатами единичного вектора $\vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$, то, положив $x^i = \cos \varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, можно считать, что $k(\vec{\alpha}) = k(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x^i)^2$ является гладкой функцией на сфере S^{n-2}, заданной уравнением $(x^1)^2 + \ldots + (x^{n-1})^2 = 1$ в $T_P V^{n-1}$. Так как $k(\vec{\alpha}) = k(-\vec{\alpha})$, то можно считать, что кривизна $k(\vec{\alpha})$ является гладкой функцией на проективном пространстве $\mathbb{RP}^{n-2} = S^{n-2}/\mathbb{Z}_2$ (напомним, что $\mathbb{RP}^{n-2}$ — гладкое многообразие). Итак, $k(\vec{\alpha})$ оказывается функцией от $n-2$ переменных $\left(x^1, \ldots, x^{n-1}; \sum\limits_{i=1}^{n-1} (x^i)^2 = 1\right)$. Так как сфера S^{n-2} и проективное пространство $\mathbb{RP}^{n-2}$ — гладкие многообразия, то в окрестности каждой точки $x \in S^{n-2}$ можно ввести локальные координаты $y^1, \ldots, y^{n-2}$ (например, при $x^{n-1} \geqslant 0$ координатами на S^{n-2} можно считать $x^1, \ldots, x^{n-2}$).

Назовем точку $x_0 \in S^{n-2}$ *критической* для функции $f(x)$, заданной на S^{n-2}, если $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y^i}\right|_{x_0} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Так как $\dfrac{\partial f}{\partial y^{i'}} = \dfrac{\partial f}{\partial y^i} \dfrac{\partial y^i}{\partial y^{i'}}$, то точка x_0, оказавшись критической в какой-то одной системе координат $y^1, \ldots, y^{n-2}$, автоматически будет критической и в любой другой системе координат. Тем самым определение критической точки инвариантно.

Вопрос: какие критические точки имеет на сфере $S^{n-2} \subset T_P V^{n-1}$ гладкая функция $k(\vec{\alpha}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x^i)^2$? И, кроме того, какие значения

принимает кривизна $k(\vec{\alpha})$ в этих критических точках (т. е. вдоль направлений $\vec{\alpha}$, соответствующих критическим точкам на сфере S^{n-2})?

Теорема 4. *Критическими точками функции кривизны $k(\vec{\alpha})$ на сфере $S^{n-2} \in T_P V^{n-1}$ являются в точности точки вида $\pm e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ (т. е. концы векторов $\pm\vec{e}_i$), в том случае, когда $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В точках $\pm\vec{e}_i$ функция $k(\vec{\alpha})$ принимает значения, равные λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. В этом смысле главные кривизны являются экстремальными значениями функции кривизны $k(\vec{\alpha})$. Если среди собственных чисел $\{\lambda_i\}$ есть совпадающие, то утверждение принимает такой вид: критическими точками функции $k(\alpha)$ являются в точности концы всех собственных векторов формы Q.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную билинейную симметричную форму $B(\vec{x}, \vec{y})$, определенную на векторах $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Например, в качестве B можно взять вторую форму $Q(\vec{x}, \vec{y}) = q_{ij} x^i y^j$. Построим функцию $f(x) = \frac{B(\vec{x}, \vec{x})}{|\vec{x}|^2}$, где $\vec{x} \in S^{n-2}$.

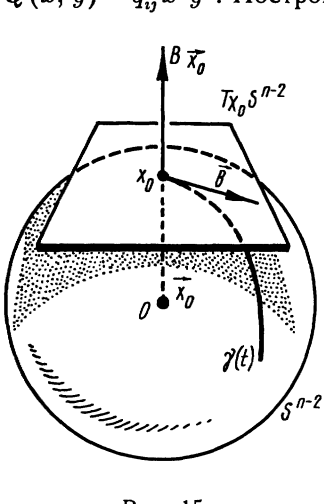


Рис. 15

Найдем все критические точки $f(x)$. Ясно, что $f(x) = B(\vec{x}, \vec{x})$, если $|\vec{x}| = 1$. То, что $x_0 \in S^{n-2}$ является критической точкой для функции $f(x)$, означает $\left.\frac{df}{d\vec{b}}\right|_{x_0} \equiv 0$ для любого вектора $\vec{b}$, касательного к S^{n-2} в точке x_0, где через $\left.\frac{df}{d\vec{b}}\right|_{x_0}$ обозначена производная $f(x)$ по направлению $\vec{b}$, т. е. $\left.\frac{df}{d\vec{b}}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial f(y^1, \ldots, y^{n-2})}{\partial y^i}\right|_{x_0} \cdot b^i$, а y^i — локальные координаты около x_0.

Используя эквивалентное определение этой производной, имеем $\left.\frac{df}{d\vec{b}}\right|_{x_0} = \left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}$, где $\gamma(t)$ — любая кривая, целиком лежащая на сфере S^{n-2}, причем $\gamma(0) = x_0$, $\left.\frac{d\gamma(t)}{dt}\right|_{t=0} = \vec{b}$ (рис. 15). Отсюда $\left.\frac{d\gamma(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} B(\gamma(t), \gamma(t))\right|_{t=0}$.

Поскольку в $\mathbb{R}^{n-1} \supset S^{n-2}$ фиксировано скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$, то форме $B(\vec{x}, \vec{y})$ можно взаимно однозначно сопоставить симметричный оператор $B: \mathbb{R}^{n-1} \to R^{n-1}$ такой, что $B(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, B\vec{y} \rangle$, т. е. $f(x) = B(\vec{x}, \vec{x}) = \langle \vec{x}, B\vec{x} \rangle$, где $x \in S^{n-1}$ — конец вектора $\vec{x}$,

идущего из O в $x \in S^{n-2}$. Отсюда

$$\frac{df(x)}{d\vec{b}}\Big|_{x_0} = \frac{d}{dt}B(\gamma(t),\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big\langle \gamma(t), B\gamma(t)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \frac{d}{dt}\gamma(t), B\gamma(t)\Big\rangle + \Big\langle \gamma(t), B\frac{d}{dt}\gamma(t)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \frac{d}{dt}\gamma(t), B\gamma(t)\Big\rangle + \Big\langle B\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t)\Big\rangle = 2\Big\langle \frac{d}{dt}\gamma(t), B\gamma(t)\Big\rangle.$$

Так как $\frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=0} = \vec{b}$, то $\vec{b}f(x)\big|_{x_0} = 2\langle \vec{b}, B\vec{x}_0\rangle = 0$, т. е. $\langle \vec{b}, B\vec{x}_0\rangle = 0$. Так как $\langle \vec{b}, B\vec{x}_0\rangle = 0$ для любого $\vec{b} \in T_{x_0}S^{n-2}$, то вектор $B\vec{x}_0$ ортогонален $T_{x_0}S^{n-2}$ (рис. 15). Итак, $B\vec{x}_0$ коллинеарен $\vec{x}_0$, т. е. $\lambda(x_0)\vec{x}_0 = B\vec{x}_0$, где $\lambda(x_0) \neq 0$ — собственное (вещественное) число. Тем самым критическими точками функции $f(x) = B(\vec{x}, \vec{x})$ на S^{n-2} являются в точности те и только те точки, которые являются концами единичных собственных векторов формы B. Так как из собственных векторов формы B можно выбрать ортобазис, то $\lambda(x_0)$ совпадает с собственным значением, которому соответствует вектор $\vec{x}_0$. □

Пусть $n = 3$ и V^2 вложена в $\mathbb{R}^3$. Тогда формула Эйлера принимает вид $k(\vec{\alpha}) = \lambda_1 \cos^2\varphi_1 + \lambda_2 \cos^2\varphi_2$, где $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = 1$ (пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$), т. е. $k(\vec{\alpha}) = (\lambda_1 - \lambda_2)\cos^2\varphi_1 + \lambda_2$. Ясно, что минимум $k(\vec{\alpha})$, равный λ_2, достигается при $\cos^2\varphi_1 = 0$; максимум $k(\vec{\alpha})$, равный λ_1, достигается при $\cos^2\varphi_1 = 1$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $k(\vec{\alpha}) = \lambda (= \lambda_1 = \lambda_2)$ (рис. 16).

С геометрической трактовкой главных кривизн связан красивый геометрический образ — так называемая квадрика нормальных кривизн: $\lambda_1 \cos^2\varphi_1 + \ldots + \lambda_{n-1}\cos^2\varphi_{n-1} = \text{const}$. При этом направления, соответствующие экстремальным (критическим) значениям кривизны, совпадают с главными осями этой поверхности. Если все главные кривизны $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ неотрицательны, то квадрика является эллипсоидом с главными полуосями $1/\sqrt{\lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, т. е. величина i-й главной полуоси равна $\sqrt{r_i}$, где r_i — соответствующий радиус кривизны i-го нормального сечения $\gamma_i = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$.

Разберем случай двумерной поверхности $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Оказывается, гауссова кривизна $K(P)$ отвечает за довольно важные локальные характеристики двумерной поверхности. Напомним, что $K(P) = \lambda_1\lambda_2$, а потому выделяются три случая: а) $K > 0$; б) $K < 0$; в) $K = 0$. Отсюда: а) $\begin{cases}\lambda_1 > 0\\ \lambda_2 > 0\end{cases}$ или $\begin{cases}\lambda_1 < 0\\ \lambda_2 < 0\end{cases}$; б) $\begin{cases}\lambda_1 > 0\\ \lambda_2 < 0\end{cases}$ или $\begin{cases}\lambda_1 < 0\\ \lambda_2 > 0\end{cases}$; в) $\begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 \neq 0\end{cases}$ или $\begin{cases}\lambda_1 \neq 0\\ \lambda_2 = 0\end{cases}$ или $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Достаточно рассмотреть только случаи: а) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$; б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$; в) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

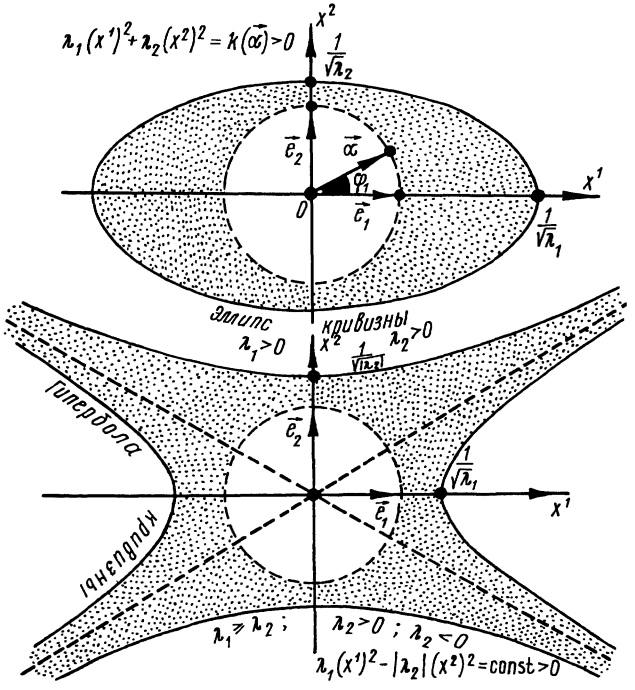


Рис. 16

В случае а) поверхность V^2 имеет около точки P (локально) вид, показанный на рис. 17. Здесь V^2 расположена по одну сторону от касательной плоскости в точке P. В случае б) V^2 имеет около точки P (локально) вид, показанный на рис. 18. Здесь V^2 расположена по обе стороны от $T_P V^2$. Точки P такого типа называются седловыми (седлами). Иногда их называют точками перевала. В случае в), при $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 = 0$, поверхность V^2 имеет (локально) около точки P вид, показанный на рис. 19. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то V^2 имеет в точке P

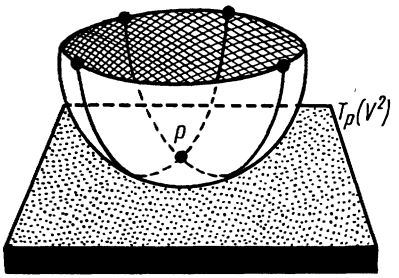


Рис. 17

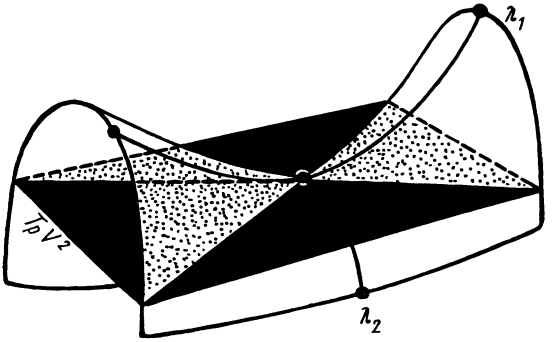


Рис. 18

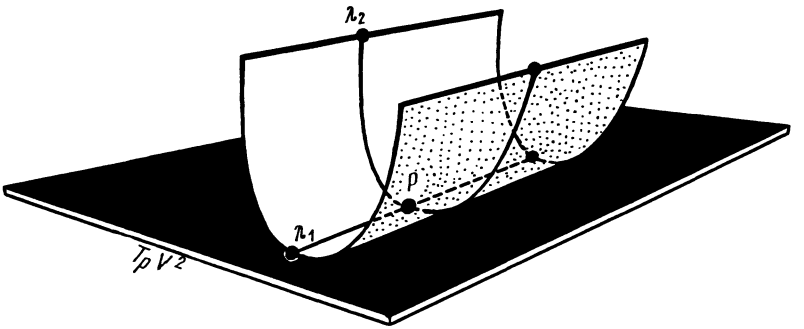


Рис. 19

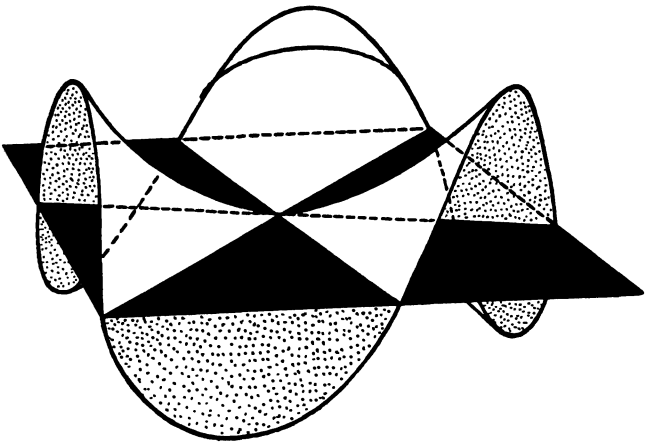


Рис. 20

в точности два ортогональных главных направления $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Не следует думать, что V^2 около точки P, в которой $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, локально устроена как плоскость (с метрической точки зрения). Дело в том, что если вторая форма Q аннулируется в P (в этом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), то локальная структуру V^2 около P не квадратична.

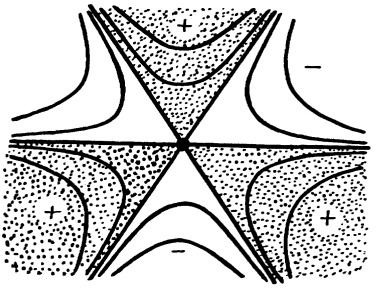


Рис. 21

Пример: в качестве V^2 возьмем график «обезьяньего седла» $z = f(x, y) = \mathrm{Re}(x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2$ (рис. 20). Первая форма $\mathfrak{G}$ в точке $(x = 0, y = 0)$ имеет вид $g_{ij} = \delta_{ij}$. Вторая форма Q в точке $(0, 0)$ вырождена: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Здесь $Q = (q_{ij})$, где $q_{ij} = f_{x^i x^j}$, т. е. $Q = 6\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}$, $Q = 0$ в точке $(0, 0)$. Система линий уровня функции $f(x, y)$ в окрестности $(0, 0)$ имеет вид, показанный на рис. 21.

4. Гауссова и средняя кривизны двумерных поверхностей. Найдем явный вид гауссовой и средней кривизн для явного задания двумерной поверхности. Пусть поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ задана в виде графика $z = f(x, y)$, где (x, y, z) — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Пусть $f(0, 0) = 0$; тогда координатная плоскость (x, y) — касательная к V^2 в точке $(0, 0)$. Так как

$$\mathfrak{G}|_{(0,0)} = (\delta_{ij}) = E, \quad Q|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

то $K = \det Q = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$; $H = \mathrm{Sp}\, Q = f_{xx} + f_{yy} = \lambda_1 + \lambda_2$. Нахождение H и K в точках, отличных от $(0, 0)$, требует вычислений.

Пусть $\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$; тогда $\mathfrak{G}^{-1} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$ где $g = \det \mathfrak{G}$,

$$\mathfrak{G}^{-1} Q = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -MF + EN \end{pmatrix},$$

$$H = \mathrm{Sp}(\mathfrak{G}^{-1} Q) = \frac{1}{g}(GL - 2MF + EN),$$

$$K = \det(\mathfrak{G}^{-1} Q) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Если $z = f(x, y)$, то $ds^2 = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx\, dy + (1 + f_y^2)dy^2$. Так как радиус-вектор V^2, заданной графиком $z = f(x, y)$, имеет вид

$\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, то

$$\vec{r}_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad \vec{r}_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad \vec{r}_{yy} = (0, 0, f_{yy}),$$

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}(z - f)}{|\operatorname{grad}(z - f)|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Отсюда

$$H = \frac{GL - 2MF + EN}{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}},$$

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

Гауссова и средняя кривизны являются скалярными функциями, определенными в каждой точке поверхности, и инвариантами поверхности; в частности, они не зависят от выбора локальных координат.

Вычислим гауссову и среднюю кривизны стандартно вложенной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Так как любое нормальное сечение S^2 в произвольной точке P является экватором, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{R}$, где R — радиус сферы. Следовательно, кривизна любого нормального сечения равна $\lambda = \frac{1}{R}$, а потому $K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{2}{R}$, в частности, гауссова и средняя кривизны постоянны.

Гауссова и средняя кривизны двумерной плоскости равны нулю.

Определение. Двумерная поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ называется *поверхностью постоянной кривизны*, если ее гауссова кривизна K постоянна.

Так, например, стандартная сфера S^2 и евклидова плоскость являются многообразиями постоянной кривизны.

Определение. Двумерная поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ называется *поверхностью положительной, нулевой, отрицательной кривизны*, если соответственно гауссова кривизна поверхности во всех ее точках положительна, равна нулю, отрицательна.

Стандартная двумерная сфера является многообразием положительной (постоянной) кривизны.

Задача. Докажите, что поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, задаваемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (эллипсоид), является поверхностью

строго положительной кривизны, если полуоси a, b, c отличны от 0 и ∞. Эллипсоид можно записать параметрически так:

$$x = a\cos\theta\cos\varphi, \quad y = b\cos\theta\sin\varphi, \quad z = \sin\theta.$$

Евклидова двумерная плоскость является многообразием нулевой постоянной кривизны. Пример многообразия отрицательной кривизны дает график $z = x^2 - y^2$. Ясно, что

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} = \frac{-4}{(1 + 4(x^2 + y^2))^2} < 0.$$

В этом примере гауссова кривизна является переменной функцией. Хотелось бы, по аналогии с поверхностями положительной и нулевой кривизны, построить многообразие постоянной отрицательной кривизны $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Сейчас мы укажем одну из таких поверхностей. Тем самым мы докажем следующее утверждение: *в трехмерном евклидовом пространстве существуют (локально) поверхности постоянной положительной, нулевой и отрицательной кривизны.*

Рассмотрим на плоскости (x, y) гладкую кривую γ, расположенную в первом квадранте, со следующим свойством: длина отрезка касательной от точки касания с кривой до точки пересечения касательной с осью Ox постоянна и равна a (рис. 22). При перемещении точки A по кривой γ точка B скользит по оси Ox, и отрезок AB имеет постоянную длину, равную a. Кривая γ может быть получена чисто механическим путем, если связать две точки, A и B, нерастяжимой нитью длины a и, поместив A и B в положения A_0, B_0 соответственно (см. рис. 22), начать перемещать точку B по оси Ox. При этом точка A будет прочерчивать кривую γ, касающуюся оси Oy в точке A_0 и имеющую асимптоту — ось Ox. При этом мы считаем, что точки A и B скользят по плоскости без трения; тогда вектор скорости будет все время направлен вдоль нити, соединяющей точки A и B, т. е. движение точки B будет однозначно определено.

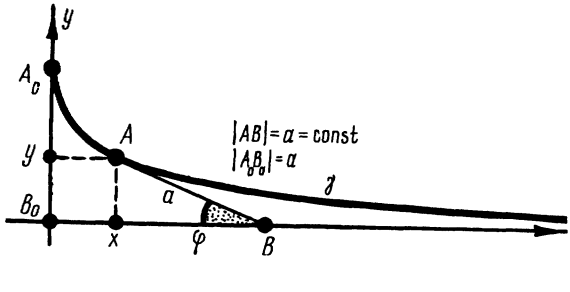


Рис. 22

Найдем дифференциальное уравнение кривой γ. Из треугольника AB_x (см. рис. 22) имеем $\operatorname{tg}\varphi = -y'_x$, где $y = y(x)$ — график γ;

$a \sin \varphi = y$. Отсюда

$$\sin \varphi = \frac{y'_x}{\sqrt{1+(y'_x)^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{ay'_x}{\sqrt{1+(y'_x)^2}} = -y, \quad x'_y = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

где $x = x(y)$ — график γ. Итак,

$$x(y) = -\int\limits_y^a \frac{1}{y}\sqrt{a^2-y^2}\,dy = -a^2 \int\limits_y^a \frac{dy}{y\sqrt{a^2-y^2}} + \int\limits_y^a \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}} =$$

$$= -a^2 \int\limits_y^a \frac{dy}{y\sqrt{a^2-y^2}} - \sqrt{a^2-y^2} = -\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}} \right).$$

Мы получили явную формулу графика $x = x(y)$. Рассмотрим поверхность вращения, получающуюся при вращении кривой γ вокруг оси Ox (рис. 23). Получающаяся поверхность V^2 называется *поверхностью Бельтрами*, или *псевдосферой*; это последнее

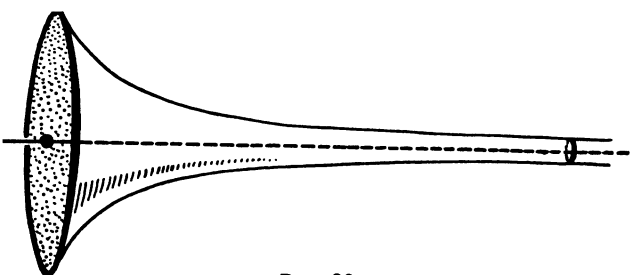


Рис. 23

название мы прокоммертируем позже. Найдем гауссову кривизну поверхности Бельтрами. Для этого нужно уметь вычислять гауссову кривизну поверхности вращения. Решим эту задачу в общем виде.

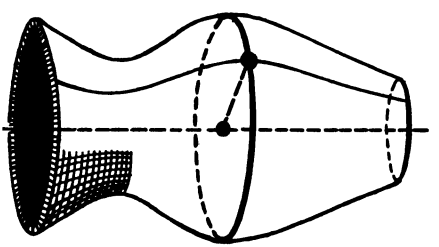


Рис. 24

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ поверхность вращения V^2, образованную вращением вокруг оси Ox главкой кривой $x = x(y)$ (т. е. образующей), расположенной в плоскости Oxy. На V^2 возникает координатная сеть: параллели и меридианы; эта сеть ортогональна в том смысле, что в каждой точке координатные линии пересекаются под прямым углом (рис. 24).

Лемма 4. *В каждой точке поверхности вращения главные направления, т. е. направления, отвечающие главным кривизнам λ_1, λ_2, всегда можно считать совпадающими с направлениями меридиана и параллели, проходящих через эту точку.*

Замечание. В формулировке леммы, употребляя термин «можно считать», мы имели в виду следующее: если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то главные направления определены однозначно и совпадают с направлениями меридиана и параллели; если $\lambda_1 = \lambda_2$, то любое направление главное, в частности и взаимно ортогональные направления меридиана и параллели.

Доказательство. Как мы знаем, главными направлениями в $T_P V^2$ являются те и только те ортобазисы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, в которых обе формы $\mathfrak{G}$ и Q диагональны. Ясно, что первая форма $\mathfrak{G}$ диагональна в системе координат, порожденной меридианами и параллелями (см., например, вычисление формы $\mathfrak{G}$ для поверхности вращения). Осталось доказать, что в этой же системе координат диагональна и вторая форма Q. Пусть (u, v) — координаты на V^2, порождающие координатную сеть: меридианы и параллели. Надо доказать, что $M = \langle \vec{r}_{uv}, \vec{n} \rangle \equiv 0$, где $\vec{r}(u, v)$ — радиус-вектор V^2, $\vec{n}$ — нормаль к V^2; $Q = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ — вторая форма. Рассмотрим цилиндрические координаты (r, φ, x) в $\mathbb{R}^3$. Пусть V^2 задается образующей $r = r(x)$; тогда радиус-вектор $\vec{r}(x, \varphi)$ поверхности V^2 имеет вид $\vec{r}(x, \varphi) = (x, r(x)\cos\varphi, r(x)\sin\varphi)$ (рис. 25). Отсюда $\vec{r}_{x\varphi} = (0, -r'\sin\varphi, r'\cos\varphi)$. Нормаль к V^2 имеет вид $\vec{n} = (r', -\cos\varphi, -\sin\varphi)/\sqrt{1 + (r')^2}$. Ясно, что $\langle \vec{r}_{x\varphi}, \vec{n} \rangle = 0$, что и требовалось. Итак, $Q = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, что и доказывает лемму. □

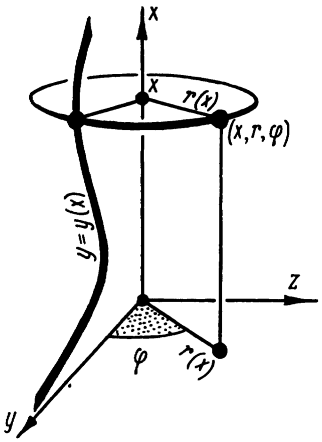


Рис. 25

Лемма 5. *Гауссова кривизна $K(P)$ в точке $P \in V^2$, где V^2 — поверхность вращения, имеет вид*

$$|K| = \frac{|r''|}{r(1 + (r')^2)^2},$$

где $r = r(x)$ — уравнение образующей поверхности вращения V^2 в цилиндрических координатах.

ЗАМЕЧАНИЕ. Иными словами, $K = \lambda_1\lambda_2$, где $\frac{1}{r\sqrt{1+(r')^2}} = \lambda_1$ — кривизна нормального сечения вдоль направления параллели в точке P. Вообще говоря, нормальное сечение в направлении параллели не совпадает с самой параллелью (эта формула для кривизны λ_1 будет доказана ниже). Далее $\lambda_2 = k(x)$ — кривизна плоской кривой $y = y(x)$ в точке x, т. е. кривизна меридиана.

Доказательство. В силу леммы 4 главные направления совпадают с направлениями меридиана и параллели, проходящих через точку P, а потому $K(P) = \lambda_1\lambda_2$, где λ_2 и λ_1 — кривизны плоских кривых — меридиана и нормального сечения вдоль направления параллели соответственно. Поскольку параллель является окружностью, то ее кривизну мы ниже используем для нахождения кривизны нормального сечения. Так как меридиан совпадает с образующей $r = r(x)$, то $\lambda_2(x) = \frac{r''}{(1+(r')^2)^{3/2}}$, что следует из формул Френе для плоских кривых.

Найдем $\lambda_1(x)$ для нормального сечения вдоль направления параллели в точке $P = (x, r(x))$. Рассмотрим параллель как плоское сечение V^2; тогда кривизна $k(\theta, \vec{\alpha})$ этого сечения (вдоль $\vec{\alpha}$, определяемого параллелью) равна $1/r(x)$, так как радиус окружности-параллели равен $r(x)$. Здесь угол θ равен углу между нормалью к V^2 и вектором $\vec{m}$, расположенным в плоскости параллели (рис. 26). Напомним, что

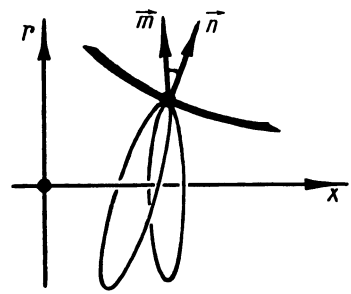


Рис. 26

$$k(\theta, \vec{\alpha}) = \frac{1}{\cos\theta} k(0, \vec{\alpha})$$

(см. выше). Здесь $k(0, \vec{\alpha})\frac{\cos\theta}{r} = \cos\theta k(\theta, \vec{\alpha})$ — интересующая нас кривизна λ_1. Осталось найти $\cos\theta$, где θ — угол между единичными векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Так как в плоскости xOr вектор $\vec{m}$ имеет координаты $(0, 1)$, а вектор $\vec{n}$ — координаты $\frac{1}{\sqrt{1+(r')^2}}(-r', 1)$, то $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+(r')^2}}$. Следовательно, $\lambda_1(x) = \frac{1}{r\sqrt{1+(r')^2}}$. Отсюда

$$|K| = \frac{1}{r\sqrt{1+(r')^2}} \frac{|r''|}{1+(r')^2)^{3/2}} = \frac{|r''|}{r(1+(r')^2)^2}. \qquad \square$$

Лемма 6. *Поверхность Бельтрами является многообразием постоянной отрицательной кривизны (кривизна строго отрицательна).*

Доказательство. Поскольку поверхность Бельтрами является поверхностью вращения, то для подсчета гауссовой кривизны можно воспользоваться формулой, выделенной в лемме 5. Функция $y = y(x)$ является обратной функцией к функции

$$x = x(y) = -\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} \right),$$

найденной нами ранее. Как было уже подсчитано, $x'_y = \frac{-\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$. Отсюда $x'' = \frac{a^2}{r^2 \sqrt{a^2 - y^2}}$, следовательно,

$$K = \frac{r''}{r(1 + (r')^2)^2} = \frac{-x''}{(x')^3 r \left(1 + \frac{1}{(x')^2}\right)^2} = \frac{-x'' x'}{r(1 + (x')^2)^2} = -\frac{1}{a^2}.$$

Знак минус возник вследствие того, то кривая $y = y(x)$ выпукла вниз, а потому по отношению к любому выбору нормали $\vec{n}(P)$ собственные числа λ_1, λ_2 имеют различные знаки. Итак, $K = -\frac{1}{a^2}$, что и доказывает лемму. □

Итак, мы указали в $\mathbb{R}^3$ (по крайней мере локально) поверхности постоянной положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. Многообразие постоянной положительной кривизны (сфера) является компактным и замкнутым (без края) многообразием; многообразие нулевой кривизны (плоскость или конус, образованный семейством прямых, исходящих из одной точки, конечной или бесконечной, и скользящих по произвольной гладкой плоской кривой γ в $\mathbb{R}^3$) является некомпактным (без края) открытым многообразием. Предъявленное нами многообразие отрицательной постоянной кривизны отличается от предыдущих двух примеров тем, что эта поверхность не является замкнутым многообразием и не может быть продолжена на бесконечность. Эта поверхность (см. рис. 23) имеет границу — окружность радиуса a с центром в начале координат O, причем можно показать (мы здесь не будем изучать этот вопрос детально), что поверхность не может быть продолжена за эту окружность с сохранением условия $K(P) = -\frac{1}{a^2} < 0$.

Обычно эту поверхность «достраивают», добавляя поверхность, симметричную исходной относительно плоскости yOz (рис. 27). Эта поверхность имеет «окружность излома», в точках которой поверхность не является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^3$. Оказывается, что появление этой окружности, составленной из особых точек, не случайно. На первый взгляд, этих особенностей можно было бы избежать, продолжив построенную выше «воронку» за окружность радиуса a; например, так, как это показано на рис. 28.

(Напомним, что в точке A_0 на оси Oy график образующей касается оси Oy.) Однако, сделав такое продолжение, мы обнаруживаем,

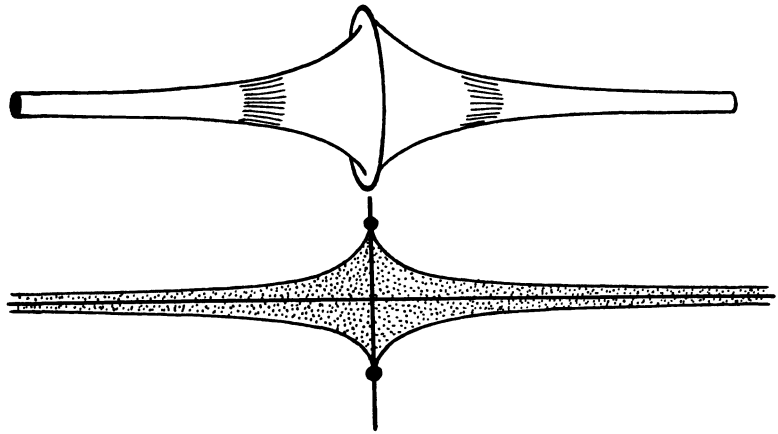


Рис. 27. Сечение поверхности Бельтрами

что получающаяся поверхность вращения уже не является поверхностью отрицательной кривизны: часть поверхности, заметаемая дугой A_0C (см. рис. 28), является поверхностью положительной кривизны, так как дуга A_0C выпукла вверх (в отличие от дуги A_0A).

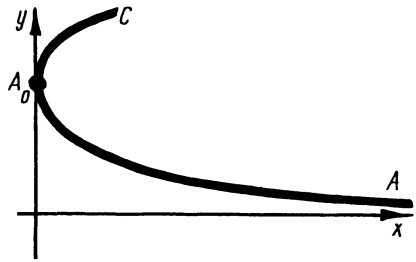


Рис. 28

Следовательно, возникает подозрение, что мы не можем продолжить гладким образом поверхность Бельтрами за окружность, прочерчиваемую точкой A_0 при вращении вокруг оси Ox, с сохранением условия отрицательности кривизны. Таким образом, наши попытки построить в $\mathbb{R}^3$ замкнутое, компактное или некомпактное, но уходящее по всем направлениям на бесконечность многообразие постоянной отрицательной кривизны, наталкивается на трудности. Здесь легко увидеть существенное отличие поверхностей постоянной отрицательной кривизны от поверхностей постоянной положительной кривизны (поверхности переменной отрицательной кривизны, уходящие в $\mathbb{R}^3$ на бесконечность по всем направлениям, существуют: например, указанная нами ранее поверхность гиперболического

параболоида $z = x^2 - y^2$; здесь гауссова кривизна отрицательна и стремится к нулю на бесконечности, например, если $x^2+y^2 \to \infty$). В самом деле, стандартная двумерная сфера имеет постоянную положительную кривизну в индуцированной этим вложением метрике.

Чтобы продвинуться немного дальше в понимании сложившейся ситуации, найдем индуцированную риманову метрику на «воронке» Бельтрами, вложенной в $\mathbb{R}^3$. Введем в $\mathbb{R}^3$ цилиндрические координаты (x, r, φ), где $x = x$, $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ (т. е. ось Ox — ось вращения). Тогда индуцированная метрика на поверхности вращения с образующей, задаваемой функцией $x = x(r)$, имеет вид

$$ds^2 = (dx(r))^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (1 + (x'_r)^2)dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

В нашем примере $x'_r = -\dfrac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}$ (см. выше), т. е. $ds^2 = \dfrac{dr^2}{r^2} + r^2 d\varphi^2$.

Утверждение 1. *Риманова метрика, индуцированная на поверхности Бельтрами объемлющей евклидовой метрикой, является метрикой Лобачевского.*

Доказательство. Рассмотрим замену $u = \varphi$, $v = \dfrac{1}{r}$. Тогда $ds^2 = \dfrac{v^2}{v^4}\,dv^2 + \dfrac{du^2}{v^2} = \dfrac{du^2 + dv^2}{v^2}$, что, очевидно, и доказывает утверждение. □

Итак, локально поверхность Бельтрами изометрична плоскости Лобачевского, т. е. мы построили изометричное вложение некоторой области плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство. Какая именно часть плоскости Лобачевского допускает изометричное вложение в $\mathbb{R}^3$ (в виде поверхности Бельтрами)? С самого начала отметим, что вся поверхность Бельтрами не изометрична никакому куску плоскости Лобачевского. В самом деле, поверхность Бельтрами гомеоморфна диску с выколотой точкой, следовательно, если бы это кольцо было гомеоморфно области в плоскости Лобачевского, то бесконечно удаленная точка воронки Бельтрами должна была бы отобразиться в некоторую конечную точку плоскости Лобачевского (рис. 29). Это противоречит тому, что бесконечно удаленная точка воронки Бельтрами удалена на бесконечное расстояние от горловины воронки.

В действительности, изометрично на область в плоскости Лобачевского отображается воронка Бельтрами после разреза вдоль любой из своих образующих (рис. 30). Соответствующая ей область на плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре) показана на рис. 31. Эта область (на рис. 31 она отмечена символами ∞, A_0, B_0) заключена между двумя параллельными прямыми (в смысле

геометрии Лобачевского), выходящими из одной точки ∞ на абсолюте, и дугой A_0B_0, являющейся дугой длины 2π (если $a=1$), частью окружности (в евклидовом смысле), касающейся точки ∞ на абсолюте.

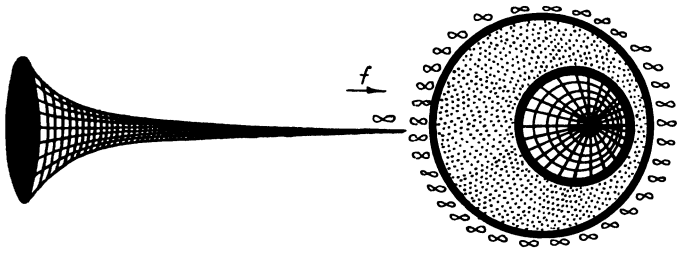


Рис. 29

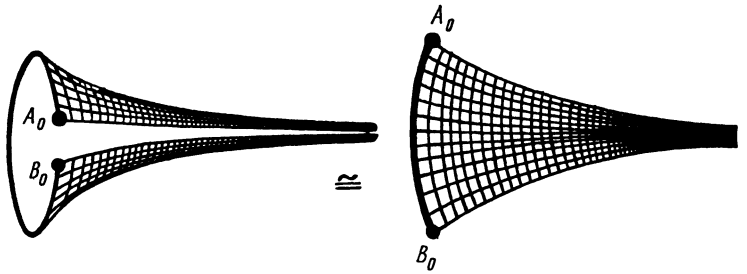


Рис. 30

Таким образом, область (∞, A_0, B_0) является бесконечной полосой, заключенной между двумя параллельными прямыми и ограниченной с одного конца дугой A_0B_0.

Рассмотрим на модели Пуанкаре два семейства координатных линий, образующих ортогональную сетку (как в евклидовом смысле, так и в смысле метрики Лобачевского, поскольку обе метрики отличаются друг от друга на конформный множитель). Одно семейство является множеством параллельных прямых (в смысле Лобачевского), выходящих из одной точки ∞ на абсолюте, т. е. дугами окружностей (в евклидовом смысле), выходящими на абсолют под прямым углом. Второе семейство образовано множеством окружностей, касающихся абсолюта в точке ∞ (рис. 32). Эта

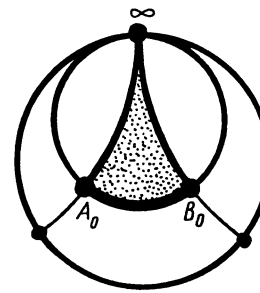


Рис. 31

система траекторий совпадает с системой линий уровня вещественной и мнимой частей комплексно аналитической функции $f(z)=\frac{1}{z}$, т. е. $\operatorname{Re} f(z)=\frac{1}{r}\cos\varphi$, $\operatorname{Im} f(z)=\frac{-1}{r}\sin\varphi$, где $z=re^{i\varphi}$; соответствующие уравнения: $\frac{1}{r}\cos\varphi=C_1$, $\frac{1}{r}\sin\varphi=C_2$, ($C_1$, C_2 — const). Эта координатная сетка ортогональна. В то время как одно

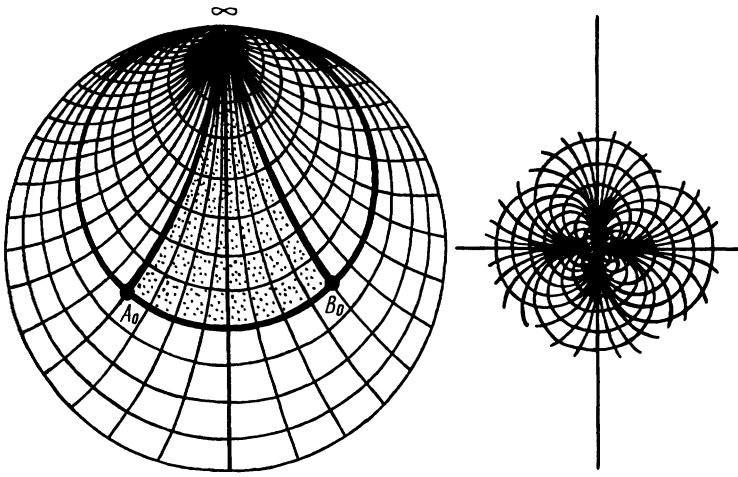


Рис. 32

из этих семейств состоит из прямых в геометрии Лобачевского, траектории второго семейства прямыми в геометрии Лобачевского не являются. Эти траектории однозначно определяются тем свойством, что все «перпендикуляры», выпущенные из точек траектории, параллельны друг другу и пересекаются в точке ∞, принадлежащей абсолюту (напомним, что абсолют не принадлежит плоскости Лобачевского) (см. рис. 32). Легко доказать (проверьте!), что любые две траектории второго семейства конгруэнтны, т. е. могут быть переведены друг в друга некоторой изометрией плоскости Лобачевского (т. е. диффеоморфизмом, сохраняющим риманову метрику). Более того, в качестве такой изометрии можно взять дробно-линейное преобразование вида $w=\frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — подходящим образом подобранные комплексные числа. Впрочем, этот факт нам не потребуется.

Итак, рассмотрим произвольную траекторию второго семейства (окружность с касанием в точке ∞) и на ней произвольную пару точек A_0, B_0, отстоящих друг от друга на расстояние 2π (мы

считаем, что $a = 1$ и радиус евклидовой модели Пуанкаре тоже равен единице). Тогда полоса, заключенная между двумя перпендикулярами (A_0, ∞) и (B_0, ∞), восстановленными в точках A_0 и B_0, изометрична разрезанной вдоль меридиана воронке Бельтрами. При этом ортогональная сетка меридианов и параллелей на воронке Бельтрами переходит в ортогональную сетку траекторий первого и второго семейств на модели Пуанкаре в полосе (∞, A_0, B_0) (рис. 33). На плоскости Лобачевского (как и на евклидовой плоскости)

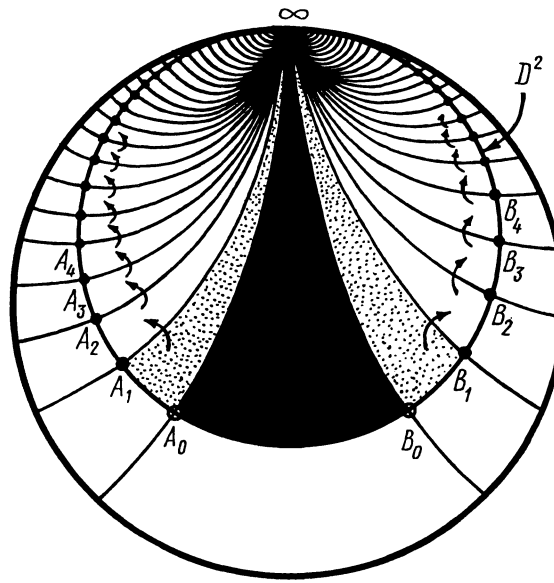


Рис. 33

всегда существует отражение относительно произвольной прямой; в частности, отразив полосу (∞, A_0, B_0) относительно прямой (∞, A_0), мы получим новую полосу, изометричную исходной (∞, A_0, B_0) и реализующуюся в виде разрезанной воронки Бельтрами в $\mathbb{R}^3$. Отражая теперь эту новую полосу (∞, A_1, A_0) относительно прямой (∞, A_1), получаем полосу (∞, A_2, A_1) с теми же свойствами и т. д. Отражение относительно прямой на плоскости Лобачевского является изометрией, а потому траектория второго семейства, проходящая через пару точек A_0, B_0, перейдет в себя, так как любая изометрия, сохраняющая точку ∞, переводит траектории второго семейства снова в траектории этого же семейства. Все отрезки (A_k, A_{k-1}), $1 \leqslant k < \infty$, имеют одинаковую длину, равную 2π. Совершенно аналогичная процедура порождает полосы (∞, B_k, B_{k-1}), $1 \leqslant k < \infty$, с теми же свойствами. Тем самым весь диск D^2, ограниченный траекторией второго семейства (окружностью), разбивается на бесконечное число полос, сходящихся в точке ∞ на абсолюте. Теперь уже можно построить отображение

всего диска D^2 на воронку Бельтрами (уже без разреза) в $\mathbb{R}^3$ таким образом, чтобы каждая полоса типа (∞, A_k, A_{k-1}), (∞, A_0, B_0), (∞, B_k, B_{k-1}), $1 \leqslant k < \infty$, изометрично отобразилась на воронку Бельтрами. При этом диск D^2 будет бесконечное число раз наматываться на воронку Бельтрами (рис. 34).

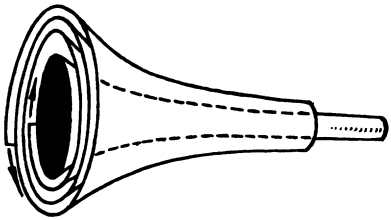


Рис. 34

Вопрос: можно ли изометрично реализовать в $\mathbb{R}^3$, в виде двумерной поверхности постоянной отрицательной кривизны не только полосу (∞, A_0, B_0) (или любую другую полосу, ей изометричную), но и всю плоскость Лобачевского? Ответ отрицательный. Доказательство нереализуемости плоскости Лобачевского в $\mathbb{R}^3$ весьма нетривиально и принадлежит Н. В. Ефимову.

Это — одно из глубоких отличий между метриками положительной и отрицательной кривизны. Обратим внимание на то, что индуцированная метрика на воронке Бельтрами совпала с метрикой Лобачевского. При этом метрика Лобачевского может быть определена «абстрактно», безотносительно к вложению в евклидово пространство, а в силу указанного совпадения эта метрика обладает гауссовой кривизной. Хотя наше исходное определение гауссовой кривизны использовало вложение $V^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, и, следовательно, гауссова кривизна зависела от первой и второй форм, однако, как теперь оказывается, гауссова кривизна, по-видимому, не зависит от второй формы, т. е. является функцией только от римановой метрики $\mathfrak{G}$; в частности, кривизна K не меняется при изометриях V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Эта теорема, вычисляющая гауссову кривизну только в терминах римановой метрики, будет доказана нами позже.

Рассмотрим теперь среднюю кривизну поверхностей $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Как было отмечено, средняя кривизна зависит от способа вложения $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, т. е. определяется как первой, так и второй формами. При изучении свойств гауссовой кривизны мы решали, в частности, такую задачу: найти двумерные поверхности, имеющие заданную постоянную кривизну. Мы довольно легко предъявили такие примеры, т. е. примеры поверхностей постоянной положительной, нулевой и отрицательной кривизны. Хотя мы и не будем здесь этого доказывать, но довольно легко описать все поверхности V^2, имеющие постоянную кривизну. Например, двумерное гладкое замкнутое риманово многообразие постоянной положительной кривизны гомеоморфно либо сфере, либо проективной плоскости.

Соответствующая задача о поверхностях постоянной средней кривизны, т. е. проблема описания поверхностей постоянной средней кривизны, значительно сложнее и решается значительно менее эффективно, чем в случае гауссовой кривизны. Рассмотрим, например, поверхности нулевой средней кривизны — так называемые минимальные поверхности. Эти поверхности, кстати, характеризуются тем свойством, что площадь их локально минимальна по сравнению с площадью других гиперповерхностей, отличающихся от исходной только внутри (любого) шара достаточно малого радиуса (рис. 35). Физической моделью минимальных поверхностей $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ являются «мыльные пленки», возникающие на замкнутых контурах, изготовленных из проволоки, после извлечения их из сосуда, наполненного мыльной водой. При этом на один и тот же контур можно натянуть, вообще говоря, несколько минимальных пленок. Рассмотрим $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ и выведем уравнение двумерных минимальных поверхностей. Так как $H = \dfrac{GL - 2MF + EN}{EG - F^2}$, то уравнение $H = 0$ принимает вид $GL - 2MF + EN = 0$. Если поверхность задана с помощью графика $z = f(x, y)$, то

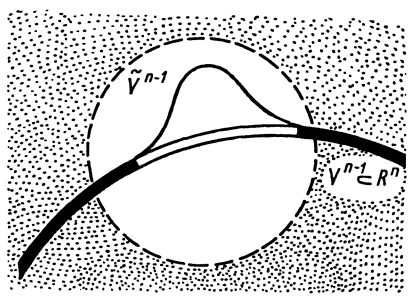


Рис. 35

$$ds^2 = (1 + f_x^2)\,dx^2 + 2f_x f_y dx\,dy + (1 + f_y^2)\,dy^2,$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

следовательно,

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_{xy}f_x f_y + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Уже сам вид этого уравнения в частных производных (решениями которого и являются минимальные поверхности) показывает, что решения его довольно сложны. Пример: евклидова плоскость $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ является минимальной поверхностью, так как $Q \equiv 0$ (проверьте!).

Более сложный пример некомпактной минимальной поверхности получается так: рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ две ортогональные, пересекающиеся в точке O прямые l_1 и l_2. Фиксируем прямую l_1 и будем

перемещать вдоль нее с постоянной скоростью a прямую l_2, одновременно вращая l_2 с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси l_1 (возникает винтовое движение). Прямая l_2 будет заметать некоторое двумерное гладкое подмногообразие $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, которое называется *прямым геликоидом* (рис. 36).

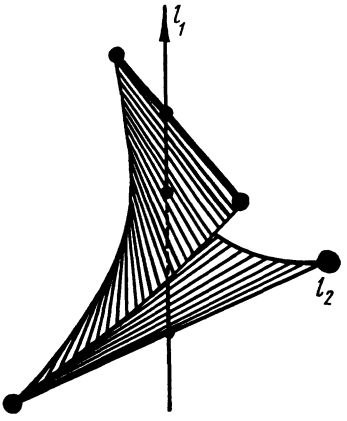


Рис. 36

Упражнение: доказать, что прямой геликоид — минимальная поверхность. Для удобства вычислений нужно ввести на нем координаты, индуцированные цилиндрическими координатами в $\mathbb{R}^3$ с осью $l_1 = Oz$.

Отметим, что любая минимальная поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ имеет неположительную гауссову кривизну, так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Следующий пример будет связан с контуром $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, где под Γ понимается гладкое вложение набора окружностей в $\mathbb{R}^3$, которые не пересекаются. Рассмотрим некомпактную минимальную поверхность вращения, образованную вращением вокруг оси Ox гладкой

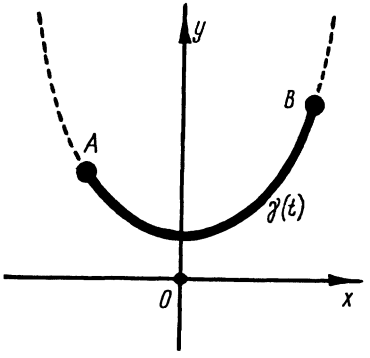


Рис. 37

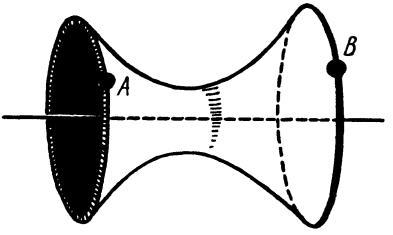


Рис. 38

кривой $\gamma(t)$, задаваемой уравнением $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$. Как известно из курса анализа, эта кривая определяет форму провисания тяжелой цепи, закрепленной в двух точках, A и B (рис. 37). При этом мы предполагаем, что тяжелая цепь подвешена достаточно высоко, так

что кривая $y(x)$ не пересекает оси Ox. Сила тяжести направлена вниз, вдоль оси Oy. Соответствующая поверхность называется *катеноидом* (рис. 38). Найдем H. Из доказательства леммы 5 видно, что

$$H = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{y\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} =$$

$$= \left(a \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right)^{-1} \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{-1/2} - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{-3/2} = 0.$$

Итак, катеноид — минимальная поверхность. Если рассмотреть только ту часть катеноида, которая заключена между двумя окружностями, образованными вращением точек A и B вокруг оси Ox, то получим пример минимальной поверхности, натянутой на контур Γ, состоящий из этих двух граничных окружностей. Здесь нам предоставляется случай продемонстрировать, что решение задачи на отыскание минимальной пленки с заданным контуром в качестве границы неединственно. В самом деле, кроме уже предъявленного нами решения (рис. 38), существует еще одна минимальная пленка с тем же граничным контуром — это два диска, затягивающие граничные окружности (рис. 39). Эта минимальная пленка существует для любой пары точек A и B, в то время как катеноид далеко не всегда натягивается на граничные

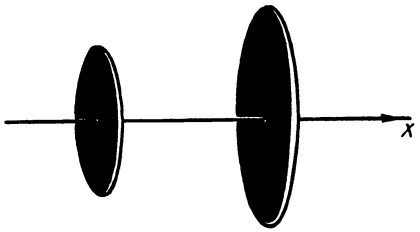


Рис. 39

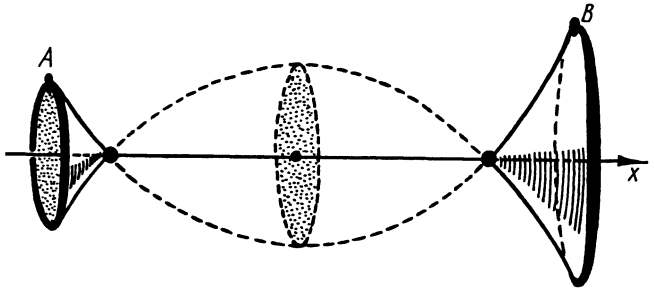


Рис. 40

окружности. Ясно, что если точки A и B расположены достаточно далеко друг от друга, то катеноид построить нельзя (рис. 40).

Препятствие к его построению особенно наглядно проявляется, когда мы начинаем раздвигать граничные окружности, растягивая катеноид, первоначально построенный для достаточно близко расположенных точек A и B. Процесс растяжения показан на рис. 41. При растяжении тяжелая цепь начинает провисать, горловина катеноида уменьшается, и в момент ее касания с осью Ox гауссова кривизна поверхности в точке касания обращается в бесконечность (мыльная пленка разрывается).

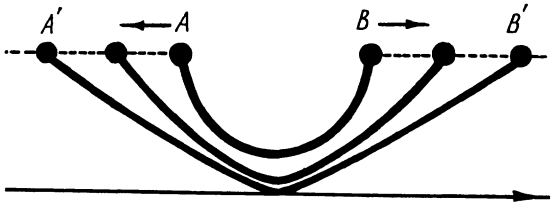


Рис. 41

Еще один пример контура, для которого существуют два решения уравнения $H = 0$, показан на рис. 42. Здесь обе минимальные

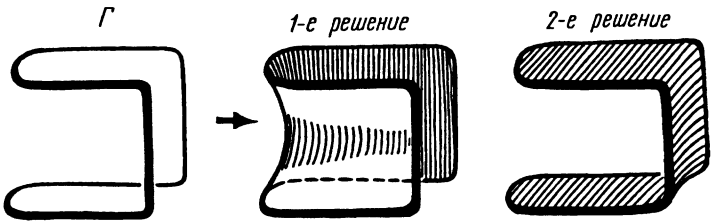


Рис. 42

пленки гомеоморфны друг другу. В зависимости от способа вложения окружности S^1 в $\mathbb{R}^3$ меняется и вид затягивающих ее минимальных пленок. При стандартном вложении окружности $x^2 + y^2 = 1$ в плоскость (x, y) минимальная пленка, затягивающая этот контур, только одна и совпадает с диском $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Если же S^1 два раза оборачивается вокруг оси Oz, то решение уравнения $H = 0$ является листом Мёбиуса (рис. 43). Если S^1 оборачивается вокруг оси Oz три раза, то решение уравнения $H = 0$ является тройным листом Мёбиуса (рис. 44). Его можно

получить, перемещая вдоль окружности, стандартно вложенной в плоскость, трилистник, составленный из трех отрезков одинаковой длины, сходящихся под равными углами $2\pi/3$. При этом трилистник должен после полного оборота вокруг окружности перейти в себя с поворотом на $2\pi/3$ (см. рис. 44). Процесс построения этих поверхностей в некотором смысле аналогичен построению прямого геликоида. Тройной лист Мебиуса гомеоморфен поверхности с самопересечениями, показанной на рис. 45.

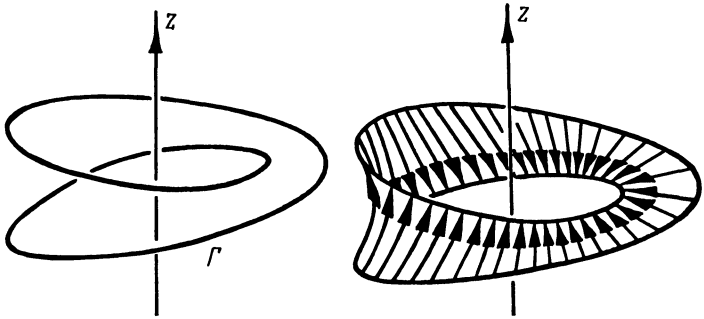


Рис. 43

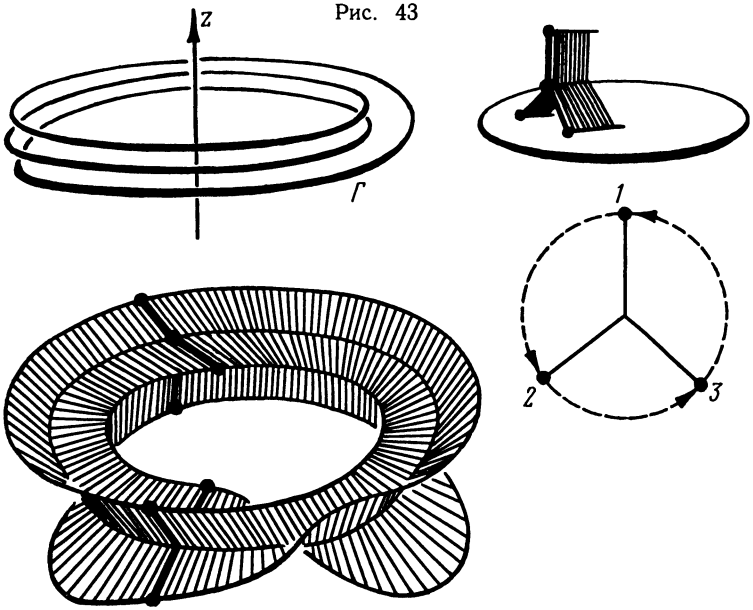


Рис. 44. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Минимальная пленка, показанная на рис. 44, в отличие от предыдущих примеров, имеет много особых точек, сингулярностей,

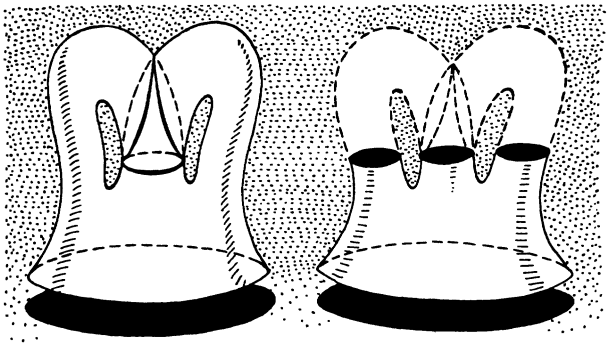


Рис. 45

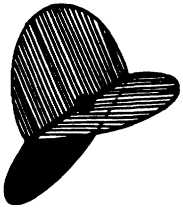


Рис. 46

т. е. точек, никакая открытая окрестность которых не гомеоморфна диску. Окрестность каждой такой точки имеет структуру, показанную на рис. 46, т. е. три половинки диска склеены по общему диаметру. Легко сообразить, что любая особая точка двумерной минимальной пленки, являющейся некомпактной поверхностью без границы, имеет структуру, показанную на рис. 46. В самом деле, если в особой точке сходятся две половинки диска, то тогда окрестность точки гомеоморфна

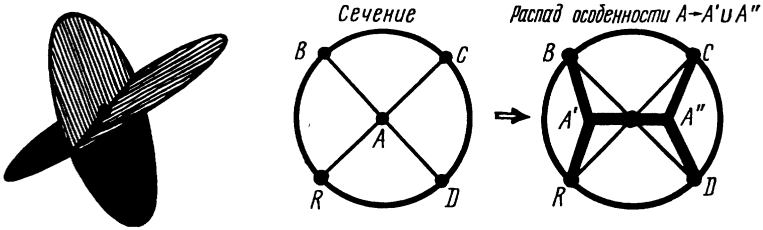


Рис. 47

диску. Если в особой точке сходятся четыре половинки диска (рис. 47), то существует деформация окрестности, уменьшающая площадь. Суммарная длина отрезков AB, AC, AD, AR больше суммарной длины отрезков $A'B$, $A'R$, $A'A''$, $A''C$, $A''D$ (распад

четырехкратной особенности на трехкратные особенности). Для минимальных пленок с границей это утверждение уже неверно. Пример приведен на рис. 48. Здесь четырехкратные точки заполняют отрезок AB. Интересно, что на тот же контур Г, но изготовленный из проволоки конечной толщины, можно натянуть еще одну мыльную пленку, особые точки которой, расположенные вдоль отрезка AB (рис. 49), являются уже трехкратными.

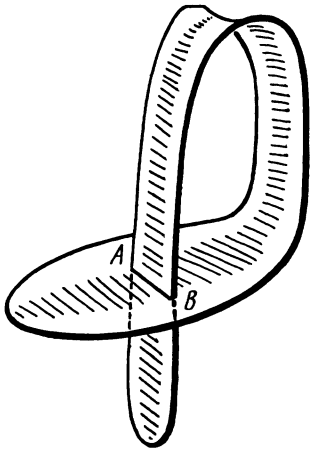


Рис. 48

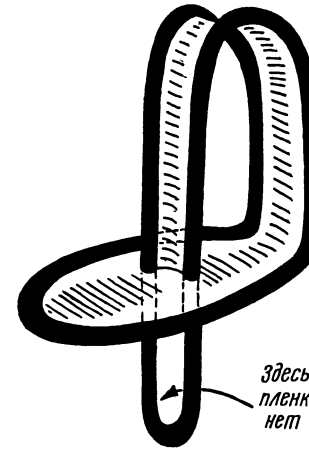


Рис. 49

С минимальными поверхностями тесно связаны так называемые гармонические поверхности $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть V^2 задано так: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, где u, v — криволинейные координаты на V^2.

Определение. Радиус-вектор $\vec{r}(u, v)$ называется *гармоническим* относительно координат u, v, если $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} = 0$, т. е. $\Delta \vec{r} = 0$, где Δ — оператор Лапласа в координатах u, v.

Радиус-вектор $\vec{r}(u, v)$, гармонический в координатах (u, v), не обязан быть гармоническим в других координатах (u', v').

Определение. Поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ называется *гармонической*, если она может быть задана с помощью некоторого гармонического радиус-вектора $\vec{r}(u, v)$ в некоторых криволинейных координатах (u, v).

Будем говорить, что радиус-вектор $\vec{r}(u, v)$ *минимален*, если средняя кривизна его тождественно равна нулю. Так как функция $H = \lambda_1 + \lambda_2$ — скаляр и, в частности, не меняется при регулярных

заменах координат на поверхности, то если радиус-вектор является минимальным относительно одной системы координат, он будет минимальным и относительно любой другой регулярной системы координат. Итак, понятие минимальной пленки не зависит от введенных на ней координат. Для гармонических поверхностей это уже не так, а потому говорят о гармонических отображениях $\vec{r}$: $D(u, v) \to \mathbb{R}^3(x, y, z)$, где $D(u, v)$ — область на плоскости (u, v), а $\vec{r}(u, v)$ — отображение, определяющее поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Отображение $\vec{r}$, гармоническое в одних координатах, уже не будет, вообще говоря, гармоническим в других координатах (приведите пример!). Пример гармонической поверхности: зададим $\vec{r}(x, y)$ формулой $\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$, где x, y, z — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, т. е. поверхность V^2 задается графиком $z = x^2 - y^2$, отнесенным к декартовой системе координат. Ясно, что $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vec{r} = 0$, т. е. поверхность $z = x^2 - y^2$ гармоническая. В то же время она не минимальна: $H = 0$ только в точке $(0, 0)$, а в других точках $H \neq 0$.

Напомним, что криволинейные координаты (u, v) на поверхности $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ называются *конформными*, если в них метрика $E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$, индуцированная на V^2 объемлющей евклидовой метрикой, является скалярной, т. е. $E = G$, $F = 0$.

Замечание. Рассмотрим двумерное гладкое риманово многообразие, на котором задана риманова метрика ds^2, не обязательно индуцированная каким-либо вложением M^2 в $\mathbb{R}^3$, с вещественно аналитическими коэффициентами E, F, G, рассматриваемыми как функции от локальных криволинейных координат u, v. Тогда, оказывается, для любой точки $P \in M^2$ существует такая окрестность $U = U(P)$, что в U можно ввести координаты p, q (являющиеся вещественно аналитическими функциями от исходных координат u, v), в которых ds^2 имеет вид $\lambda(p, q)(dp^2 + dq^2)$, т. е. координаты p, q будут конформными. Доказательство несложно, однако требует ссылки на теорему существования решения специального уравнения в частных производных (уравнения Бельтрами — Лапласа), что выходит за рамки нашего курса.

Как связаны гармонические и минимальные векторы в $\mathbb{R}^3$? Пример гармонического, но не минимального вектора мы привели. Верно ли обратное, т. е. любой ли минимальный вектор гармонический? Это тоже неверно (приведите пример!). Тем не менее имеет место следующее

Утверждение 2. *Минимальный вектор, записанный в конформных координатах, является гармоническим.*

Доказательство. Пусть (u, v) — конформные координаты, а $\vec{r}(u, v)$ — вектор, описывающий минимальную пленку.

Напомним, что $E = G = \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle$, $F = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle$. Требуется доказать, что $\vec{r}_{uu} + \vec{r}_{vv} = 0$. Положим $\vec{\alpha} = \vec{r}_{uu} + \vec{r}_{vv}$. Так как $H = 0$, то $GL - 2MF + EN = 0$, т. е. $L + N = 0$. Отсюда $\langle \vec{\alpha}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{r}_{uu}, \vec{n} \rangle + \langle \vec{r}_{vv}, \vec{n} \rangle = L + N = 0$, где $\vec{n}$ — нормаль к V^2. Осталось доказать, что $\langle \vec{\alpha}, \vec{r}_u \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{r}_v \rangle = 0$, так как тогда $\vec{\alpha}$ будет иметь нулевые скалярные произведения с ортогональными векторами $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, т. е. $\vec{n}$ должен быть нулевым вектором. Дифференцируя тождества $E = G$, $F = 0$, получаем $\langle \vec{r}_{uu}, \vec{r}_u \rangle = \langle \vec{r}_{uv}, \vec{r}_v \rangle$, $\langle \vec{r}_{uv}, \vec{r}_u \rangle = \langle \vec{r}_{vv}, \vec{r}_v \rangle$, $\langle \vec{r}_{uu}, \vec{r}_v \rangle = -\langle \vec{r}_u, \vec{r}_{uv} \rangle$, $\langle \vec{r}_{vu}, \vec{r}_v \rangle = -\langle \vec{r}_u, \vec{r}_{vv} \rangle$.

Отсюда $\langle \vec{\alpha}, \vec{r}_u \rangle = \langle \vec{r}_{uv}, \vec{r}_v \rangle - \langle \vec{r}_{vu}, \vec{r}_v \rangle = 0$. Аналогично, $\langle \vec{\alpha}, \vec{r}_v \rangle = 0$, что и требовалось. □

Замечание. Выше мы сообщили (без доказательства), что в окрестности любой точки двумерной вещественно аналитической поверхности можно ввести конформные координаты. Можно доказать (этот факт нетривиален), что любая минимальная пленка может быть задана вещественно аналитическим радиус-вектором, а следовательно, в окрестности любой точки минимальной поверхности всегда можно ввести конформные координаты.

Задачи к § 2

1. Доказать, что если гауссова и средняя кривизны тождественно равны нулю, то поверхность в $\mathbb{R}^3$ является плоскостью.

2. Пусть поверхность S образована касательными прямыми к кривой. Выразить гауссову и среднюю кривизны поверхности S через кривизну и кручение кривой.

3. В предыдущей задаче показать, что метрика на поверхности зависит только от кривизны кривой.

§ 3. Группы преобразований

1. Простейшие примеры групп преобразований. Здесь мы будем изучать основные примеры групп преобразований метрик, т. е. отображений многообразий, сохраняющих метрику. Рассмотрим риманово многообразие M^n с метрикой g_{ij}.

Определение. Диффеоморфизм f многообразия M^n на себя называется *движением* римановой метрики g_{ij} или *изометрией*, если риманова метрика при этом отображении переходит в себя, т. е. выполнено тождество

$$g_{kp}(y) = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^j(y)}{\partial y^p},$$

где $y^1, \ldots, y^n$ — локальные координаты в некоторой окрестности точки $y \in M^n$; $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты в некоторой окрестности точки $x \in M^n$; $x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — функции, задающие (локально) отображение f, причем $x = f(y)$.

Мы дали «координатное» определение изометрии. Иногда бывает удобно пользоваться инвариантным определением, не использующим локальные координаты, выбор которых неоднозначен. При отображении f дифференциал df отображает T_yM^n на T_xM^n, причем это отображение — линейный изоморфизм, так как f — диффеоморфизм. В каждом из касательных пространств T_yM^n и T_xM^n определено скалярное произведение $\langle\,,\,\rangle_y$ и $\langle\,,\,\rangle_x$ соответственно, построенное по римановой метрике, т. е. в локальных координатах $y^1, \ldots, y^n$ имеем $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_y = g_{ij}(y) a^i b^j$, где $\vec{a}, \vec{b} \in T_yM^n$.

Определение. Диффеоморфизм f многообразия M^n на себя называется *изометрией*, если $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_y = \langle df(\vec{a}), df(\vec{b}) \rangle_x$ для любых $\vec{a}, \vec{b} \in T_yM^n$, $x = f(y)$.

Лемма 1. *Координатное и инвариантное определение изометрий эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\vec{a} \in T_yM^n$, $\vec{a} = (a^1, \ldots, a^n)$ в локальных координатах $y^1, \ldots, y^n$; отсюда $df(\vec{a}) \in T_xM^n$ имеет вид

$$(df(\vec{a}))^i = \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} a^k,$$

так как df: $T_yM^n \to T_xM^n$ задается матрицей Якоби. Отсюда

$$\langle df(\vec{a}), df(\vec{b}) \rangle_x = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^j(y)}{\partial y^p} a^k a^p = g_{kp} a^k a^p,$$

что и доказывает лемму. □

Лемма 2. *Множество всех изометрий риманова многообразия M^n образует группу (в алгебраическом смысле).*

Доказательство. То, что композиция изометрий снова изометрия, вытекает из правила дифференцирования сложной функции и закона изменения коэффициентов g_{ij} при замене координат. То, что f^{-1} является изометрией, вытекает из того, что матрица Якоби f^{-1} является матрицей, обратной к матрице Якоби $J(f)$. В качестве единичного элемента группы следует взять тождественное преобразование. □

Группа изометрий риманова многообразия M^n обычно снабжается топологией из пространства отображений и обозначается через $\mathrm{Iso}(M^n)$. Рассмотрим простейшие примеры.

ПРИМЕР 1. В качестве M^1 возьмем вещественную прямую (некомпактное одномерное многообразие) с евклидовой метрикой $ds^2 = dx^2$, где x — координата на прямой. Пусть f — диффеоморфизм $\mathbb{R}^1$ на себя, задаваемый, следовательно, строго возрастающей (или убывающей) функцией $x = f(y)$; условие, что f — изометрия, дает $ds^2 = (f'_y)^2 dy^2 = dy^2$, т. е. $(f'_y)^2 = 1$. Таким образом f имеет либо вид: $f(y) = y + a$, либо $f(y) = -y + b$, где a и b — произвольные постоянные. Итак, группа изометрий вещественной прямой гомеоморфна паре вещественных прямых (собственные изометрии, сохраняющие ориентацию прямой, и несобственные изометрии).

Этот пример является практически единственным, в котором, оставаясь на элементарном уровне, можно найти полную группу изометрий многообразия. Дело в том, что трудно доказывать полноту предъявленной подгруппы в группе всех изометрий. В приведенном примере это удалось только за счет того, что гладкая функция, имеющая постоянную производную, является линейной. Вскоре мы познакомимся с понятием геодезической для римановой метрики и тогда сможем доказывать полноту некоторых предъявленных подгрупп в группе всех изометрий.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим евклидову двумерную плоскость и найдем группу изометрий, сохраняющих точку O — начало координат. Будем искать изометрии среди линейных преобразований плоскости (можно показать, что любая изометрия плоскости линейна; но сейчас мы не будем на этом останавливаться). Требование инвариантности метрики $dx^2 + dy^2$, $g_{ij} = \delta_{ij}$ записывается в виде матричного уравнения $E = AA^{\top}$, где A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейное преобразование. Это — определение ортогональной группы, т. е. в данном случае группы O(2), состоящей из матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ (собственные вращения) и $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ (несобственные вращения, или отражения). Собственные вращения образуют подгруппу в O(2), обозначаемую SO(2); несобственные вращения подгруппы не образуют. Подгруппа S O(2) является нормальным делителем в O(2); следовательно, определена факторгруппа O(2)/ SO(2), изоморфная $\mathbb{Z}_2$ (циклической группе второго порядка). Группа O(2) является подгруппой в группе всех изометрий окружности, снабженной стандартной римановой метрикой

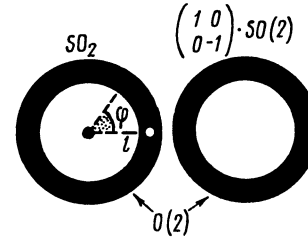


Рис. 50

$ds^2 = d\varphi^2$. Поскольку O(2) состоит из матриц, то, следовательно, эта группа превращается в топологическое пространство, если сопоставить каждой матрице значение угла φ (для собственных вращений). Таким образом, множество матриц, образующих O(2), гомеоморфно двум экземплярам окружности; следовательно, O(2) может быть снабжена структурой гладкого одномерного замкнутого (несвязного) многообразия (рис. 50).

Докажите, что группа O(2) совпадает с группой всех изометрий окружности с метрикой $ds^2 = d\varphi^2$. Указание: поступить по аналогии с группой $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^1)$.

Пример 3. Движение евклидовой плоскости можно записать в виде $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$, где $A \in \mathrm{O}(2)$, а вектор $\vec{b}$ определяет параллельный перенос (сдвиг) на плоскости. Ясно, что все такие преобразования сохраняют евклидову метрику (проверьте!). Как будет показано далее, они исчерпывают собою все изометрии плоскости. Эту группу можно представить в виде матриц

$$\left(\begin{array}{cc|c} & A & \vec{b} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(Проверьте, что соответствие $(\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}) \to T$ является изоморфизмом групп.) Следовательно, как и в предыдущем примере, группа $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ может быть превращена в топологическое пространство, гомеоморфное прямому произведению пары окружностей на евклидову плоскость, и тем самым это множество может быть снабжено структурой гладкого трехмерного многообразия (некомпактного и несвязного, состоящего из двух компонент связности).

Пример 4. Рассмотрим индефинитные метрики. Зададим на $\mathbb{R}^2$ индефинитную метрику $-dx^2 + dy^2$, превращающую двумерное пространство в псевдоевклидову плоскость $\mathbb{R}^2_1$. Матрица первой формы B постоянна и имеет вид : $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, если мы хотим найти все линейные однородные преобразования, сохраняющие эту метрику, то должны решить уравнение $B = ABA^{\mathsf{T}}$, где A: $\mathbb{R}^2_1 \to \mathbb{R}^2_1$ — линейное преобразование. Записав его в виде $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, получаем систему уравнений на a, b, c, d:

$$a^2 - b^2 = 1, \quad ac = bd, \quad d^2 - c^2 = 1.$$

Решая систему, получаем

$$A = \begin{pmatrix} \pm \operatorname{ch}\psi & \pm \operatorname{sh}\psi \\ \pm \operatorname{sh}\psi & \pm \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix},$$

или $A = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$, где $\frac{b}{a} = \beta$, $\beta = \operatorname{th}\psi$.

Допустимыми являются следующие комбинации знаков:

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_1, \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_2, \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_3, \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_4.$$

Здесь представлены все возможные варианты. Например, $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathfrak{G}_1$, так как заменив ψ на $-\psi$, мы превращаем $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$ (напомним, что $\operatorname{sh}(-\psi) = -\operatorname{sh}\psi$, $\operatorname{ch}(-\psi) = \operatorname{ch}\psi$). Тем самым $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3 \cup \mathfrak{G}_4$ (проверьте!) и $\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{G}_j = \varnothing$, если $i \neq j$. В самом деле, допустим, например, что $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 \neq \varnothing$; тогда $\operatorname{ch}\varphi = -\operatorname{ch}\psi$, $\operatorname{sh}\varphi = -\operatorname{sh}\psi$, что невозможно, поскольку $\operatorname{ch}\varphi > 0$ при любом φ. Аналогично устанавливается, что $\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{G}_j = \varnothing$.

Так как группа $\mathfrak{G}$ является группой однородных изометрий $\mathbb{R}^2_1$, то ее преобразования переводят в себя множество $\{-x^2+y^2=1\} \cup \{-x^2+y^2=-1\}$, т. е. пару псевдоокружностей вещественного и мнимого радиусов. В случае евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ каждое вращение определялось углом поворота φ ортонормированного репера; аналогичный параметр мы введем и в случае псевдоевклидовой плоскости $\mathbb{R}^2_1$. Рассмотрим ортонормированный репер $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Тогда под действием изометрии A этот репер преобразуется так, как показано на рис. 51. Введем вместо обычного евклидова угла поворота φ угол гиперболического поворота ψ, положив $\beta = \operatorname{th}\psi$ (см. выше); при этом группа $\mathfrak{G}$ превращается в группу гиперболических поворотов.

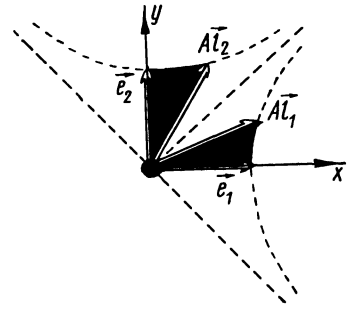


Рис. 51

Напомним, что группа ортогональных преобразований евклидовой плоскости состоит из двух связных компонент. Группа гиперболических поворотов устроена более сложно: она состоит из четырех компонент связности. Это — множества $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_4$, т. е.

$$\left\{ \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \right\};$$

$-\infty < \psi < +\infty$. Поскольку мы реализовали группу $\mathfrak{G}$ в виде группы матриц, то группа $\mathfrak{G}$ вкладывается как подмножество в четырехмерное вещественное евклидово пространство всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, а поэтому наследует топологию, превращающую группу $\mathfrak{G}$ в топологическое пространство. Относительно этой топологии каждое из подмножеств $\mathfrak{G}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, является линейно связным.

В самом деле, рассмотрим, например, матрицы типа $\mathfrak{G}_1$. Тогда для любой пары матриц $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi_1 & \operatorname{sh}\psi_1 \\ \operatorname{sh}\psi_1 & \operatorname{ch}\psi_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi_2 & \operatorname{sh}\psi_2 \\ \operatorname{sh}\psi_2 & \operatorname{ch}\psi_2 \end{pmatrix}$ можно указать непрерывный путь $\gamma(t)$, соединяющий их в множестве $\mathfrak{G}_1$; это

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} = \gamma(t), \quad \psi_1 \leqslant t \leqslant \psi_2.$$

Совершенно аналогично проверяется линейная связность и остальных подмножеств: $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_4$. Из этих четырех связных компонент подгруппой является только $\mathfrak{G}_1$, т. е. $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$ (проверьте!). Остальные компоненты подгруппами не являются. Например, произведение двух матриц вида $\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$ дает $\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$, т. е. если $\alpha, \beta \in \mathfrak{G}_2$, то $\alpha\beta \in G_1$, $\alpha\beta \notin G_2$. Единичная матрица принадлежит $\mathfrak{G}_1$. Группа $\mathfrak{G}$ является подмножеством в четырехмерном пространстве матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; при этом каждое $\mathfrak{G}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, гомеоморфно вещественной прямой. Этот гомеоморфизм (например, для $\mathfrak{G}_1$) устанавливается соотнесением каждой матрице $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$ значения угла ψ. Это соответствие взаимно однозначно и непрерывно См. рис. 52, где $g_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Группа $\mathfrak{G}$ переводит в себя псевдоокружность мнимого радиуса $-x^2 + y^2 = -1$. На рис. 53 показано действие четырех преобразо-

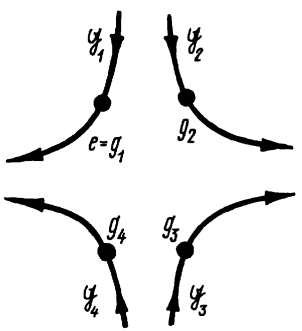


Рис. 52

ваний — представителей $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_4$. Аналогичные события происходят и с псевдоокружностью вещественного радиуса.

Группа $\mathfrak{G}$ коммутативна (проверьте!). В этом она напоминает группу O(2), тоже коммутативную. Подгруппа $\mathfrak{G}_1$ — нормальный делитель в $\mathfrak{G}_1$, поскольку $g^{-1}qg$, где $q \in \mathfrak{G}_1$, $g \in \mathfrak{G}$, является по-прежнему преобразованием типа I, так как получается из

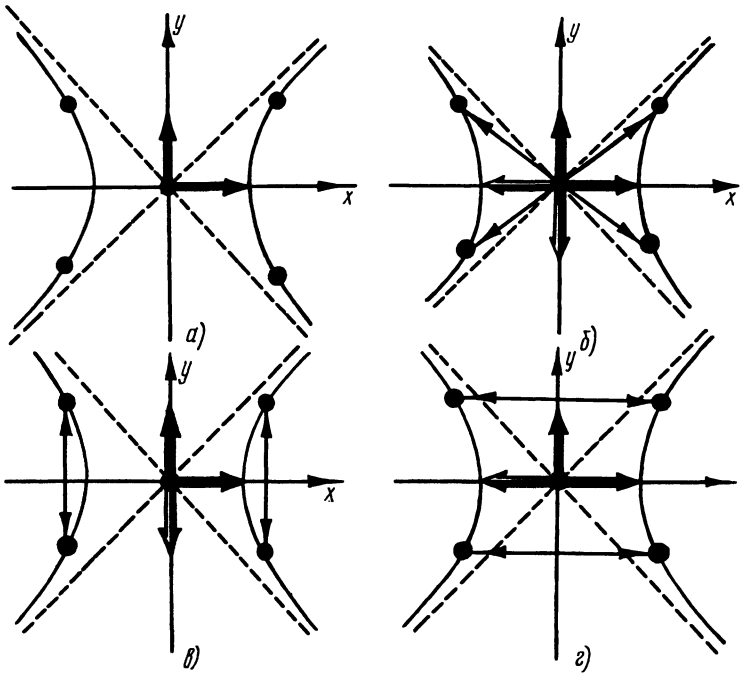


Рис. 53. *а)* $g_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — тождественное преобразование;

б) $g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — отражение относительно начала координат;

в) $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — отражение относительно оси Ox;

г) $g_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — отражение относительно оси Oy

преобразования типа I заменой координат с помощью гиперболического поворота. Итак, определена факторгруппа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$, порядок которой равен числу связных компонент в $\mathfrak{G}$, т. е. 4. Так как $\mathfrak{G}$ коммутативна, то $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ тоже коммутативна. Существуют только две коммутативные группы четвертого порядка: $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_4$. Какой

именно группе изоморфна $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$? Составим таблицу умножения g_1, g_2, g_3, g_4, являющихся представителями в своих компонентах связности (см. выше). Вычисление дает

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Итак, $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ изоморфна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. В этом отличие группы вращений псевдоокружности от группы вращений обычной окружности.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим группу изометрий двумерной сферы, рассматриваемой как риманово многообразие с метрикой, индуцированной стандартным вложением в $\mathbb{R}^3$. Сначала рассмотрим $\mathbb{R}^n$ и найдем группу линейных однородных преобразований A, сохраняющих евклидову метрику $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$. Так как матрица (g_{ij}) имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, то имеем $E = AA^{\top}$; решениями этого уравнения являются ортогональные матрицы, образующие группу $\mathrm{O}(n)$. В ней содержится подгруппа $\mathrm{SO}(n)$, состоящая из собственных (с определителем, равным $+1$) вращений; остальные вращения (несобственные) подгруппы не образуют. Подгруппа $\mathrm{SO}(n)$ — нормальный делитель в $\mathrm{O}(n)$, и факторгруппа $\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

Пусть $n = 3$. Тогда $\mathrm{O}(3)$ сохраняет евклидову метрику в $\mathbb{R}^3$. Следовательно, переводит в себя S^2: $x^2+y^2+z^2 = R^2 = \mathrm{const}$. Итак, $\mathrm{O}(3)$ — подгруппа в $\mathrm{Iso}(S^2)$. Далее мы покажем, что $\mathrm{O}(3) \equiv \mathrm{Iso}(S^2)$. Рассмотрим $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{O}(3)$. Так как $\mathrm{SO}(3)$ реализована как подмножество в пространстве всех матриц размера 3×3 с вещественными коэффициентами, отождествляемом с $\mathbb{R}^9$, то она снабжается индуцированной топологией, превращаясь в топологическое пространство.

Лемма 3. *Группа* $\mathrm{SO}(3)$ *как топологическое пространство гомеоморфна трехмерному проективному пространству* $\mathbb{RP}^3$.

Доказательство. Пусть A — элемент $\mathrm{SO}(3)$. Тогда в $\mathbb{R}^3$ существует неподвижная ось $l(A)$ такая, что действие A в $\mathbb{R}^3$

сводится к повороту вокруг $l(A)$ на некоторый угол $\varphi(A)$. Если $A \neq E$, то $l(A)$ определена однозначно. Рассмотрим плоскость $\Pi(A)$, ортогональную оси $l(A)$ и проходящую через O. В $\Pi(A)$ выберем произвольный вектор $\vec{e}_1$, и пусть $\vec{e}_2$ — вектор, получающийся из $\vec{e}_1$ при повороте на угол $\varphi(A)$ (рис. 54).

Дополним $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ третьим вектором $\vec{e}_3$ до репера $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ так, чтобы ориентация репера $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ совпала с ориентацией репера $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, где $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ — некоторый фиксированный репер в $\mathbb{R}^3$. Ось $l(A)$ превращается в вещественную прямую, если на ней можно задать направление с помощью $\vec{e}_3$ и отложить значение $\varphi(A)$. Мы однозначно сопоставили каждому элементу $A \in \mathrm{SO}(3)$ точку в $\mathbb{R}^3$; обозначим ее $P(l, \varphi)$. Ясно, что $P(l, \pi) = P(l, -\pi)$, так как повороты вокруг $l(A)$ на π и на $-\pi$ совпадают. Если же $|\varphi(A)| < \pi$, то $P(l, \varphi)$ соответствует одному и только одному вращению A. Непрерывно меняя A, мы непрерывно меняем $P(l, \varphi)$; верно и обратное.

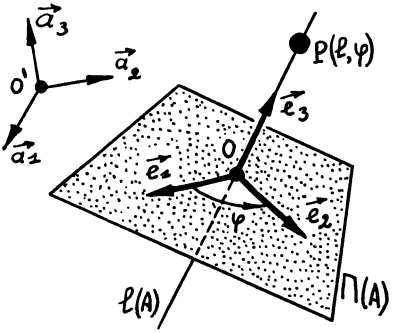


Рис. 54

Итак, мы взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны отождествили ортогональные преобразования A с точками трехмерного шара радиуса π, на границе которого (т. е. на сфере

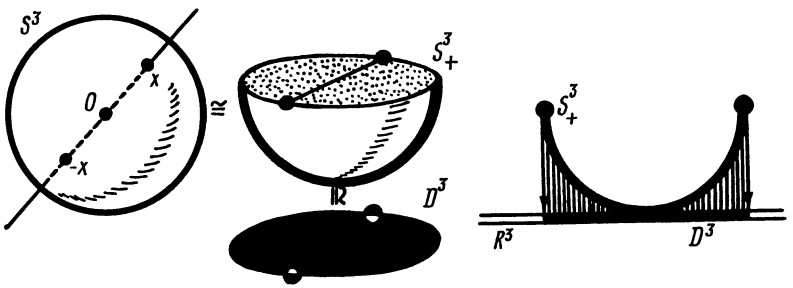


Рис. 55

радиуса π) склеены диаметрально противоположные точки $P(l, \pi)$ и $P(l, -\pi)$. Осталось доказать, что этот шар со склейками на границе гомеоморфен $\mathbb{RP}^3$. Одно из определений $\mathbb{RP}^3$ реализует его как пучок прямых в $\mathbb{R}^4$, проходящих через O. Эта модель

эквивалентна следующей: нужно взять сферу S^3 и отождествить у нее диаметрально противоположные точки. Для этого нужно взять полусферу S^3_+ и отождествить диаметрально противоположные точки на ее границе, т. е. на экваторе S^2 (см. рис. 55). Полусфера диффеоморфна трехмерному диску; диффеоморфизм можно осуществить ортогональным проектированием S^3_+ на D^3 (рис. 55). Итак, $\mathbb{RP}^3$ гомеоморфно D^3 с отождествленными диаметрально противоположными граничными точками. □

Так как $\mathbb{RP}^3$ — линейно связно, то $O(3)$ состоит из двух компонент линейной связности.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим группу изометрий плоскости Лобачевского со стандартной римановой метрикой. Рассмотрим реализацию плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости с метрикой $\frac{dz\,d\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}$. Будем искать группу изометрий этой метрики среди дробно-линейных преобразований комплексной плоскости $\frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, $d \in \mathbb{C}$. Изучим действие преобразований $w = \frac{az+b}{cz+d}$ на евклидову метрику $dz\,d\bar{z}$. Так как $dw = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\,dz$ (проверьте!), то

$$dw\,d\overline{w} = \frac{|ad-bc|^2}{|cz+d|^4}\,dz\,d\bar{z}.$$

Итак, метрика домножается на скалярный переменный множитель, т. е. дробно-линейные преобразования конформны. Эти преобразования сохраняют косинусы углов между пересекающимися кривыми; осталось проверить, что сохраняются сами ориентированные углы.

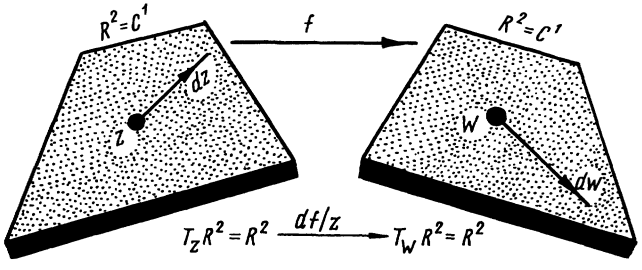


Рис. 56

Подсчитаем якобиан $J\left(w = \frac{az+b}{cz+d}\right)$ и убедимся, что он положителен. Пусть $z \in \mathbb{R}^2$, $w \in \mathbb{R}^2$, $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $dw = \lambda(z)\,dz$, $\lambda(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, $T_z(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, $T_w(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ (рис. 56). Следовательно, действие df

отображения $f\colon z \to w$ записывается так: $df(z) = \lambda \cdot z$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть $\lambda = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$. Тогда матрица Якоби в вещественной записи имеет вид $\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$, т. е. якобиан равен $u^2 + v^2$ и положителен. Отберем из всех дробно-линейных преобразований те и только те, которые переводят в себя верхнюю полуплоскость.

Лемма 4. *Преобразование* $w = \frac{az+b}{cz+d}$ *переводит в себя верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда* $(a, b, c, d) = \rho(a', b', c', d')$, *где* $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{C}$, $\rho \neq 0$ (*т. е. когда все коэффициенты* a, b, c, d *пропорциональны четверке вещественных чисел* a', b', c', d') *и, кроме того,* $ad - bc > 0$.

Доказательство. Пусть четверка коэффициентов пропорциональна вещественной четверке (которую сразу обозначим через a, b, c, d). Ясно. что вещественная ось переходит в себя. Докажем, что если точка z принадлежит верхней полуплоскости, то ее образ $w = \frac{az+b}{cz+d}$ тоже принадлежит верхней полуплоскости, т. е. что $\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0$. В самом деле,

$$w = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac(z\bar{z}) + bd}{|cz+d|^2} + \frac{adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2},$$

$$\operatorname{Im} w = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \cdot \operatorname{Im} z > 0,$$

так как $ad - bc > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Обратно. Пусть $w = \frac{az+b}{cz+d}$ переводит в себя верхнюю полуплоскость.

Требуется доказать, что существует общий такой множитель ρ, что a, b, c, d пропорциональны вещественным a', b', c', d'. Если $\bar{z} = z$, то $\bar{w} = w$. Следовательно, при произвольном $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\bar{a}x+\bar{b}}{\bar{c}x+\bar{d}}.$$

При $x = 0$ имеем

$$\frac{b}{d} = \frac{\bar{b}}{\bar{d}} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

При $x \to \infty$

$$\frac{a}{c} = \frac{\bar{a}}{\bar{c}} = \mu \in \mathbb{R}, \quad b = \lambda d, \quad a = \mu c;$$

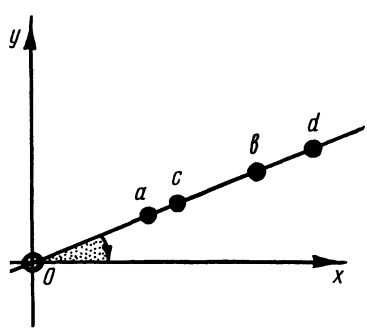


Рис. 57

при $x=1$

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{\bar{a}+\bar{b}}{\bar{c}+\bar{d}}=\rho\in\mathbb{R},\quad \mu c+\lambda d=\rho c+\rho d,\quad (\mu-\rho)c=(\rho-\lambda)d.$$

Рассматривая случай общего положения, т. е. когда $\mu-\rho\neq 0$, $\rho-\lambda\neq 0$, получаем $c=\xi d$, $\xi\in\mathbb{R}$. Итак, все четыре комплексных числа a, b, c, d расположены на одной прямой (рис. 57). Домножая на общий комплексный множитель, можем повернуть эту прямую на вещественную ось. □

***Лемма* 5.** *Любое преобразование* $w=\frac{az+b}{cz+d}$ *такое, что* a, b, c, $d\in\mathbb{R}$, $ad-bc>0$, *является изометрией плоскости Лобачевского.*

Доказательство. Имеем

$$dw=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\,dz,\quad \frac{dw\,d\overline{w}}{(w-\overline{w})^2}=\frac{dz\,\bar{z}}{(z-\bar{z})^2},$$

что и требовалось доказать.

Так как $ad-bc>0$, то можно считать, что $ad-bc=1$. □

***Предложение* 1.** *Группа изометрий плоскости Лобачевского* $\mathrm{Iso}(\mathrm{L}_2)$ *содержит подгруппу, изоморфную группе* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, *т. е. факторгруппе* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *матриц размера* 2×2 *с вещественными коэффициентами и определителем* $+1$ *по подгруппе* $\mathbb{Z}_2$, *состоящей из преобразований* E *и* $-E$.

Доказательство. Рассмотрим $w=\frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, $d\in\mathbb{R}$ и $ad-bc=1$. В силу леммы 5 это изометрии. Их совокупность образует группу. В самом деле

$$\frac{a'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+b'}{c'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+d'}=\frac{(a'a+cb')z+(a'b+db')}{(c'a+cd')z+(c'b+dd')}$$

— снова преобразование с вещественными коэффициентами и определителем, равным $+1$. Так как $ad-bc\neq 0$, то существует обратное преобразование того же типа.

Рассмотрим теперь матричную группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ — группу $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, где a, b, c, $d\in\mathbb{R}$ и $ad-bc=1$. Построим отображение φ: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\to\mathfrak{G}_1$, где $\mathfrak{G}_1$ — группа преобразований $w=\frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, $d\in\mathbb{R}$, $ad-bc=1$. Положим $\varphi\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{az+b}{cz+d}$. Ясно, что φ — гомоморфизм (проверьте!). Эпиморфность φ очевидна. Найдем

$\operatorname{Ker}\varphi$. Ясно, что $\varphi(g)=\varphi(-g)$, а потому $\operatorname{Ker}\varphi\supset\mathbb{Z}_2=(E,-E)$. Докажем, что $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbb{Z}_2$. Пусть $\varphi(g)=\varphi(g')$, т. е. $\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}$. Отсюда

$$\frac{b}{b'}=\frac{d}{d'}=\lambda,\ \frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}=\mu,\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{a'+b'}{c'+d'},\ b=\lambda b',\ d=\lambda d',$$

$$a=\mu a',\ c=\mu c',\ \mu a'd'+\lambda b'c'=\mu c'b'+\lambda d'a',$$

$$(\mu-\lambda)(a'd'-b'c')=0,\ \mu=\lambda,\ a'd'-b'c'=1.$$

Итак, $\frac{b}{b'}=\frac{d}{d'}=\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}=\lambda$, т. е. $g'=\lambda g$, поэтому $\lambda=\pm1$, $g'=\pm g$, что и требовалось доказать. □

З а д а ч а. Докажите, что $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ — связное топологическое пространство.

Не следует думать, что преобразования $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ исчерпывают $\mathrm{Iso}(\mathrm{L}_2)$. В самом деле, рассмотрим g_0: $z\to-\bar z$. Это отображение переводит верхнюю полуплоскость в себя и сохраняет метрику Лобачевского (отражение относительно оси Oy). В то же время g_0 не имеет вида $\frac{az+b}{cz+d}$. В самом деле, $\frac{az+b}{cz+d}$ конформны (см. выше), т. е. сохраняют ориентированные углы. Преобразование g_0: $z\to-\bar z$ конформным не является (см. рис. 58).

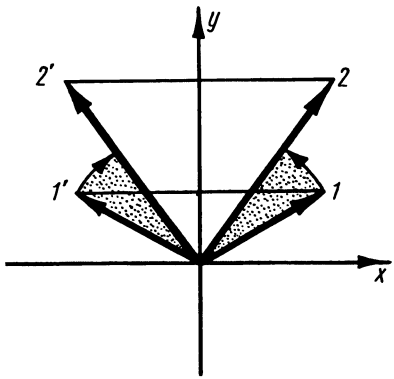


Рис. 58

Итак, мы должны еще рассмотреть преобразования $g(z)$ вида $w=g(z)=-\frac{a\bar z+b}{c\bar z+d}$, где $a, b, c, d\in\mathbb{R}$, $ad-bc=1$, или, что то же самое, $w=\frac{a\bar z+b}{c\bar z+d}$, где $a, b, c, d\in\mathbb{R}$, $ad-bc=-1$. Обозначим множество всех таких преобразований через $\mathfrak{G}_2$. Множества $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ гомеоморфны, так как любое $g\in\mathfrak{G}_2$ имеет вид $g=g_0f$, где $f\in\mathfrak{G}_1$, и так как g_0 и f — изометрии, то и g_0f — изометрия. Гомеоморфизм устанавливается путем умножения множества $\mathfrak{G}_1$ на $g_0\in\mathfrak{G}_2$. Далее, $\mathfrak{G}_1\cap\mathfrak{G}_2=\varnothing$, так как $\frac{az+b}{cz+d}\not\equiv\frac{\alpha\bar z+\beta}{\gamma\bar z+\delta}$. В самом деле, $\frac{az+b}{cz+d}$ сохраняет ориентированные углы, а $\frac{\alpha\bar z+\beta}{\gamma\bar z+\delta}$ не сохраняет.

Лемма 6. *Множество $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\cup\mathfrak{G}_2=\{f\}\cup\{g_0f\}$ является группой в которой $\mathfrak{G}_1$ — подгруппа, а $\mathfrak{G}_2$ не является подгруппой.*

Доказательство. Рассмотрим совокупность всех вещественных матриц размера 2×2 с определителем ± 1; это, очевидно, группа, $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc = \pm 1 \right\}$, которую мы обозначим через $\mathrm{L}(2, \mathbb{R})$. Эта группа как топологическое пространство несвязна; в ней две компоненты связности $\mathrm{L}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{L}_1 \cup \mathrm{L}_2$, где

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ ad - bc = 1 \right\}, \ L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ ad - bc = -1 \right\}.$$

Подгруппа L_1 ранее обозначалась $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Построим $\varphi\colon \mathrm{L} \to \mathfrak{G}$; если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{L}_1$, то $\varphi(A) = f \in \mathfrak{G}_1$, $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc = 1$; если $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{L}_2$, то $\varphi(B) = f \in \mathfrak{G}_2$, $g(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$, $ad - bc = -1$.

Ясно, что φ — гомоморфизм (проверьте!). Далее, φ — эпиморфизм; φ не является взаимно однозначным и имеет ядро. Для нахождения ядра достаточно найти прообраз единичного элемента группы $\mathfrak{G}$. Как и в предложении 1, доказывается, что $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2 = (+E, -E)$; эта подгруппа — центр в $\mathrm{L}(2, \mathbb{R})$. □

Фактически доказана следующая лемма.

Лемма 7. *Группа* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 = \{f\} \cup \{g\}$ *изоморфна* $\mathrm{L}(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, *где*

$$\mathrm{L}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = \pm 1 \right\}, \ \mathbb{Z}_2 = (E, -E).$$

Итак, в группе изометрий плоскости Лобачевского мы предъявили подгруппу, состоящую из двух компонент линейной связности, а именно $\mathfrak{G} \cong \mathrm{L}(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. Сколькими параметрами описываются элементы этой группы? Так как $\mathrm{L}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \ ad - bc = \pm 1 \right\}$, то элемент $g \in \mathfrak{G}$ задается тремя независимыми параметрами.

Лемма 8. *Группа* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *как топологическое пространство гомеоморфна прямому произведению окружности на евклидову плоскость, а поэтому может быть снабжена структурой гладкого трехмерного многообразия (некомпактного). Соответственно* $\mathrm{L}(2, \mathbb{R})$ *гомеоморфна прямому произведению двух экземпляров окружности на евклидову плоскость.*

Доказательство. Из курса алгебры следует, что любое линейное однородное преобразование евклидовой плоскости с определителем $+1$ может быть однозначно представлено в виде композиции собственного вращения и треугольного преобразования (теорема об ортогонализации базиса). Итак, любая матрица $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

допускает (однозначно) представление в виде произведения матриц

$$g = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ образуют окружность, а матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$ — евклидову плоскость, то лемма доказана. □

Топологическая структура $L(2, \mathbb{R})$ более сложна.

Как будет показано, подгруппа $L(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ полностью исчерпывает собою всю группу $\mathrm{Iso}(L_2)$. Отметим также, что группы изометрий сферы и плоскости Лобачевского имеют одинаковую размерность и могут быть снабжены структурой гладких трехмерных многообразий.

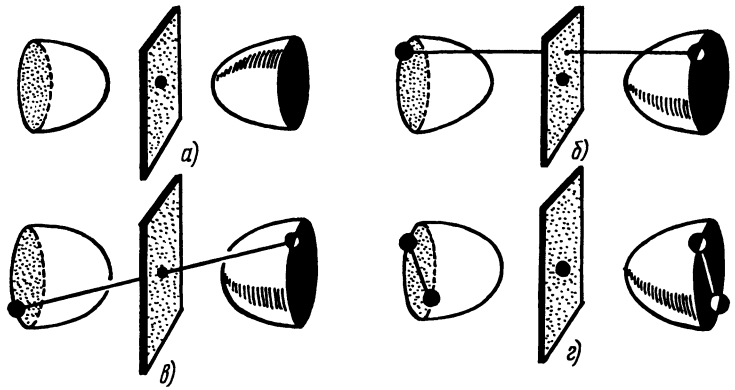


Рис. 59. *а*) тождественное преобразование; *б*) отражение в плоскости yz; *в*) отражение в точке 0; *г*) отражение в плоскости yx

Сделаем замечание о группе изометрий псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^3_1$. Напомним, что группа изометрий двумерной сферы совпала с группой изометрий $\mathbb{R}^3$, оставляющих на месте точку 0, т. е. с группой $O(3)$. Совершенно аналогично плоскость Лобачевского может быть реализована в $\mathbb{R}^3_1$ в виде одной из полостей двухполостного гиперболоида (псевдосферы мнимого радиуса), и любое движение плоскости Лобачевского будет индуцировано некоторой изометрией $\mathbb{R}^3_1$. Поскольку псевдосфера мнимого радиуса состоит из двух связных компонент, то $\mathrm{Iso}(L_2)$ не исчерпывает собою всю группу $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3_1)_0$, где через $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3_1)_0$ обозначены все изометрии $\mathbb{R}^3_1$, оставляющие неподвижной точку 0. Следует добавить еще преобразования, порожденные отражениями, переставляющими две

полости гиперболоида. Итак, группа $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3_1)_0$ состоит из четырех связных компонент. На рис. 59 показаны четыре преобразования g_1, g_2, g_3, g_4, сохраняющие псевдосферу $S^2_1 \supset \mathrm{L}_2$ и принадлежащие к различным компонентам связности группы $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3_1)_0$.

ПРИМЕР 7. Еще раз вернемся к группе движений евклидовой плоскости. Найденные нами преобразования вида $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$, где $A \in \mathrm{O}(2)$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$, можно записать в комплексной форме $w = az + b$, где $b \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, т. е. $w = e^{i\varphi} \cdot z + b$. Эта группа преобразований изоморфна матричной группе, состоящей из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a = e^{i\varphi}$. Сохранение евклидовой метрики следует из тождества $dw = a\,dz$, $dw\,d\overline{w} = |a|^2 dz\,d\bar{z}$.

Как и в случае плоскости, легко проверяется, что группа линейных изометрий $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ может быть представлена как группа преобразований $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$, где матрица A принадлежит ортогональной группе $\mathrm{O}(n)$, а вектор $\vec{b}$ задает сдвиг. Группа $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ изоморфна матричной группе, состоящей из матриц вида $\left(\begin{array}{ccc|c} & A & & \vec{b} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$. Итак, группа $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ как топологическое пространство гомеоморфна прямому произведению $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n$, где $\mathrm{O}(n)$ и $\mathbb{R}^n$ рассматриваются как топологические пространства. Это разложение, впрочем, не является групповым.

2. Матричные группы преобразований. Мы видели, что все разобранные примеры групп оказывались топологическими пространствами, на которых можно было ввести структуру гладких многообразий естественным образом. При этом мы пользовались топологией, возникающей на группе преобразований после ее вложения в группу матриц, топология в которой определяется обычным образом: матрицы считаются близкими, если они близки поэлементно. Таким образом, естественно возник некоторый класс гладких многообразий, точки на которых можно умножать, причем это умножение удовлетворяет всем аксиомам алгебраической группы. Выделим эту ситуацию с помощью специального определения.

Определение. Гладкое многообразие M^n называется *группой Ли*, если на нем заданы два гладких отображения, $f\colon M^n \times M^n \to M^n$ (умножение) и $\nu\colon M^n \to M^n$ (взятие обратного элемента), обозначаемые обычно так: $f(x, y) = x \cdot y$, $\nu(x) = x^{-1}$; кроме того существует отмеченная точка $e \in M^n$, удовлетворяющая вместе с отображениями f, ν соотношениям:

1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

2) $e \cdot x = x \cdot e = x$, $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Обычно требуется, чтобы операции f и ν были непрерывными, однако во всех конкретных примерах, с которыми мы будем иметь дело, групповые операции будут гладкими, а потому мы и ввели в определение группы Ли именно гладкие отображения f и ν.

Определение. Множество элементов g группы Ли $\mathfrak{G}$, которые можно соединить непрерывным путем с единицей группы $\mathfrak{G}$, называется *связной компонентой единицы группы* $\mathfrak{G}$ и обозначается через $\mathfrak{G}_0$.

Утверждение 1. *Множество* $\mathfrak{G}_0$ *является подгруппой в* $\mathfrak{G}$. *Более того,* $\mathfrak{G}_0$ *— нормальный делитель в* $\mathfrak{G}$, *а потому определена факторгруппа* $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$.

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}_0$. Требуется доказать, что $g_1 \cdot g_2 \in \mathfrak{G}_0$. В силу определения $\mathfrak{G}_0$ существуют непрерывные пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, такие, что

$$\gamma_1(0) = e, \quad \gamma_1(1) = g_1; \quad \gamma_2(0) = e, \quad \gamma_2(1) = g_2.$$

Рассмотрим путь $\gamma\colon I \to \mathfrak{G}$, где $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$. В силу непрерывности операции умножения в $\mathfrak{G}$ путь $\gamma(t)$ непрерывен, а потому $g_1 \cdot g_2 \in \mathfrak{G}_0$, так как

$$\gamma(0) = \gamma_1(0) \cdot \gamma_2(0) = e, \quad \gamma(1) = \gamma_1(1) \cdot \gamma_2(1) = g_1 \cdot g_2.$$

Докажем, что для любого $g_0 \in \mathfrak{G}_0$ и любого $g \in \mathfrak{G}$ элемент gg_0g^{-1} принадлежит $\mathfrak{G}_0$. Так как $g_0 \in \mathfrak{G}_0$, то существует непрерывный путь $\gamma(t)$ такой, что $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = g_0$. Рассмотрим новый путь $\varphi(t) = g\gamma(t)g^{-1}$. Он непрерывен в силу непрерывности операции умножения; в то же время $\varphi() = e$; $\varphi(1) = gg_0g^{-1}$, т. е. $gg_0g^{-1} \in \mathfrak{G}_0$. □

Примеры групп Ли нам уже известны. Так, группа ортогональных матриц является группой Ли (проверьте!). Рассмотрим основные примеры матричных групп. Все эти группы являются группами Ли, однако мы не будем доказывать этого, ограничившись некоторыми частными случаями.

3. Полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ и $\mathrm{L}(n, \mathbb{C})$. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и множество всех невырожденных линейных однородных преобразований $\mathbb{R}^n$ в себя, т. е. множество всех невырожденных матриц $n \times n$ с вещественными коэффициентами. Это множество обозначается через $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Аналогично определяется и $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Лемма 9. *Множества* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *и* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *являются группами Ли.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности множество $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Тот факт, что множество $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ образует группу (в алгебраическом смысле), очевиден. Осталось проверить, что $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ можно снабдить структурой гладкого многообразия такого, что все групповые операции будут гладкими. Ясно, что $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \setminus \{\det g(g) = 0\}$, где евклидово пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ отождествлено с пространством всех матриц порядка n (над полем $\mathbb{R}$). Так как уравнение $\det(g) = 0$ полиномиально, то множество $\mathbb{R}^{n^2} \setminus \{\det(g) = 0\}$ открыто в $\mathbb{R}^{n^2}$, т. е. является областью в $\mathbb{R}^{n^2}$, а потому гладким многообразием размерности n^2. Умножение матриц является гладкой операцией, так как каждый элемент матрицы AB является полиномом второго порядка от элементов матриц A и B. Каждый элемент обратной матрицы A^{-1} является рациональной функцией от элементов матрицы A (со знаменателем, отличным от нуля в силу невырожденности A). Единицей группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ является матрица E. Аналогичным путем доказывается, что $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — группа Ли. □

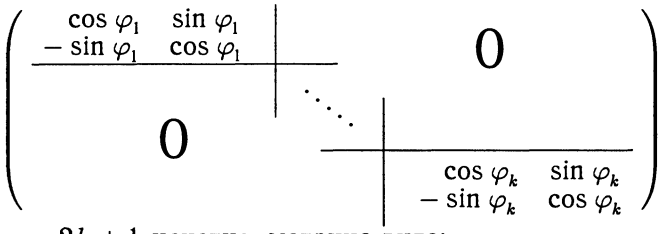
4. Специальная линейная группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ определяется как подмножество в $GL(n, \mathbb{R})$, задаваемое уравнением $\det(g) = 1$. Ясно, что это множество является группой и топологическим пространством. В действительности $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием, но мы не будем здесь это доказывать. Группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ определяется как подгруппа в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, удовлетворяющая соотношению $\det(g) = 1$. Размерность $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ равна $n^2 - 1$, а размерность $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ равна $2n^2 - 2$.

5. Ортогональная группа $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ и $\mathrm{O}(n, \mathbf{C})$. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с билинейной формой $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a^i b^i$, задающей евклидово скалярное произведение. Группа $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ определяется как группа вещественных матриц A порядка n, сохраняющих это скалярное произведение, т. е. удовлетворяющих соотношению $\langle A\vec{a}, A\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Обычно группа $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ обозначается $\mathrm{O}(n)$. Группа $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ определяется аналогично. Группа $\mathrm{O}(n)$ содержит подгруппу, обозначаемую $\mathrm{SO}(n)$ и называемую *специальной ортогональной группой*: $g \in \mathrm{SO}(n)$, если $\det(g) = 1$.

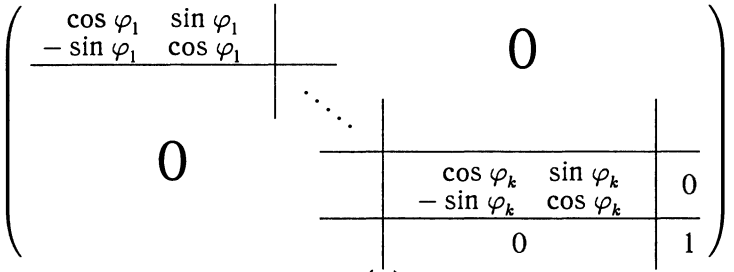
Лемма 10. *Группа $\mathrm{SO}(n)$ линейно связана и совпадает со связной компонентой единицы в группе $\mathrm{O}(n)$. Факторгруппа $\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$, т. е. $\mathrm{O}(n)$ состоит из двух связных компонент.*

Доказательство. Из курса алгебры известно, что для любого элемента $g_0 \in \mathrm{SO}(n)$ существует такое ортогональное преобразование $g \in \mathrm{O}(n)$, что $a = gg_0g^{-1}$, если $n = 2k$ четно, есть матрица

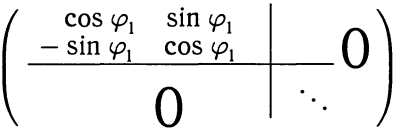
вида:



и, если $n = 2k + 1$ нечетно, матрица вида:



В качестве непрерывного пути $\gamma(t)$, соединяющего g_0 с единицей E, достаточно рассмотреть следующее семейство матриц:



Итак, $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n)_0$. Так как множество ортогональных матриц с определителем -1 гомеоморфно $\mathrm{SO}(n)$, то отсюда и следует доказательство леммы. □

Иногда удобно представлять $\mathrm{O}(n)$ как подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}$, определяемое системой уравнений $AA^\top = E$, где $\mathbb{R}^{n^2}$ отождествлено с линейным пространством матриц A порядка n.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n^2}$ форму $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \operatorname{tr} AB^\top$. Ясно, что это скалярное произведение евклидово в базисе, состоящем из следующих векторов (каждый вектор в $\mathbb{R}^{n^2}$ отождествлен с матрицей порядка n): $\vec{e}_{ij}$ (все элементы матрицы равны нулю, кроме одного, равного единице и расположенного в i-й строке и j-м столбце; $1 \leqslant i, j \leqslant n$). Если

$$\vec{A} = \sum_{i,j} a_i^j \vec{e}_{ij}, \quad \vec{B} = \sum_{i,j} b_i^j \vec{e}_{ij},$$

то

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \operatorname{tr} AB^\top = \sum_{i,j} a_i^j b_i^j,$$

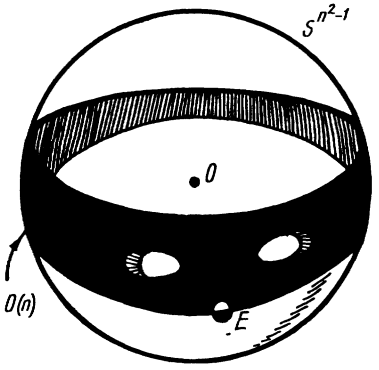


Рис. 60

что, очевидно, совпадает со скалярным евклидовым произведением в ортобазисе $\{\vec{e}_{ij}\}$. Отождествляя каждую матрицу $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ с вектором $\vec{A} = \sum\limits_{ij} a_i^j \vec{e}_{ij}$, мы можем сопоставить ей евклидову длину вектора $\vec{A}$, где $\|A\|^2 = \operatorname{tr} AA^\top$. Как было отмечено, $O(n)$ реализована как подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}$, удовлетворяющее уравнению: $AA^\top = E$. Следовательно, для $A \in O(n)$ имеем: $\|A\| = \sqrt{n}$, т. е. $O(n)$ расположена в стандартной сфере $S^{n^2-1} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ радиуса $\sqrt{n}$ (рис. 60).

6. Унитарная группа $U(n)$ и специальная унитарная группа $SU(n)$. Рассмотрим комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, отнесенное к координатам $z^1, \ldots, z^n$, и снабдим его эрмитовым скалярным произведением $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a^i \overline{b^i}\right)$, ассоциированным с билинейной комплекснозначной формой $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i \overline{b^i}$. Через $U(n)$ обозначим группу всех линейных операторов в $\mathbb{C}^n$, сохраняющих это скалярное произведение, т. е. группу всех комплекснозначных матриц A порядка n, таких, что $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv \langle A\vec{a}, A\vec{b} \rangle$ для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$. Это условие эквивалентно матричному уравнению $A\overline{A}^\top = E$, где черта обозначает комплексное сопряжение. Отсюда, если $g \in U(n)$, то $\det(g) = e^{i\varphi}$. Определим $SU(n)$ как подгруппу в $U(n)$, такую, что $\det(g) = 1$.

Лемма 11. *Группа $U(n)$ и группа $SU(n)$ линейно связаны, т. е. совпадают со своими компонентами единицы.*

Доказательство. Рассмотрим $SU(n)$. Из курса алгебры известно, что для любого $g_0 \in SU(n)$ существует унитарное преобразование $g \in U(n)$ такое, что $a = gg_0g^{-1}$ — диагональная матрица вида

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & & \\ & e^{i\varphi_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}, \qquad \varphi_1 + \ldots \varphi_n = 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

(здесь $e^{i\varphi_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, — собственные числа оператора g_0). В качестве непрерывного пути $\gamma(t)$, соединяющего g_0 с E, достаточно

рассмотреть непрерывное семейство матриц $\gamma(t) = g^{-1}a(t)g$, где

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & & 0 \\ & e^{i\varphi_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{i(2l\pi - t\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_k)} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\gamma(0) = E$, а $\gamma(1) = g_0$. Связность $\mathrm{U}(n)$ доказывается аналогично: в качестве $\gamma(t)$ достаточно взять путь $\gamma(t) = g^{-1}a(t)g$, где

$$a(t) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1 t} & & & 0 \\ & e^{i\varphi_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{i\varphi_n t} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Иногда удобно представлять $\mathrm{U}(n)$ как подмножество в $\mathbb{R}^{2n^2}$, определяемое системой уравнений $A\overline{A}^{\top} = E$, где $\mathbb{R}^{2n^2} \cong \mathbb{C}^{n^2}$ отождествлено с линейным пространством всех комплекснозначных матриц A порядка n. Рассмотрим в $\mathbb{C}^{n^2}$ базис, состоящий из матриц E_{kj} и I_{kj}, все элементы равны нулю, кроме одного, расположенного в k-м столбце и j-й строке, $1 \leqslant k,\ j \leqslant n$. Если $\vec{A},\ \vec{B} \in \mathbb{C}^{n^2}$ то $\langle \vec{A},\ \vec{B} \rangle = \operatorname{Re}\operatorname{tr} A\overline{B}^{\top} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^j \overline{b}_i^j$, что совпадает с эрмитовым скалярным произведением в $\mathbb{C}^{n^2}$, отождествленным с $\mathbb{R}^{2n^2}$. Отождествляя каждую матрицу A с вектором, можем сопоставить ей евклидову длину вектора $\vec{A}$: $\|\vec{A}\|^2 = \operatorname{Re}\operatorname{tr} A\overline{A}^{\top}$. Следовательно, $\mathrm{U}(n)$ расположена в сфере S^{2n^2-1} радиуса $\sqrt{n}$.

Доказав линейную связность $\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{O}(n)$, докажем следующее утверждение.

Лемма 12. *Группа* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *состоит из двух компонент линейной связности. Группа* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *линейно связна.*

Доказательство. Группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ распадается в объединение двух подмножеств, $\mathfrak{G}_0 = \{g \mid \det g > 0\}$ и $\mathfrak{G}_1 = \{g \mid \det g < 0\}$. Эти подмножества не пересекаются, так как определитель матрицы — гладкая функция от ее коэффициентов, т. е. координат в $\mathbb{R}^{n^2}$. Далее, $\mathfrak{G}_1$ гомеоморфно $\mathfrak{G}_0$. Гомеоморфизм устанавливается отображением $g \to ag$, где $a = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$.

Осталось доказать связность $\mathfrak{G}_0$. Так как каждый элемент $g \in \mathfrak{G}_0$ может быть интерпретирован как некоторый базис в $\mathbb{R}^n$, то, применяя известный процесс ортогонализации базиса, получаем, что g можно представить так: $g = \alpha \cdot \varphi$, где $\alpha \in \mathrm{SO}(n)$, а φ — верхнетреугольная матрица. Матрица g может быть теперь непрерывным образом продеформирована в матрицу α; для этого достаточно рассмотреть непрерывный путь $\gamma(t) = \alpha \cdot \varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 t + (1-t) & & & \\ & \varphi_2 t + (1-t) & & \varphi_{ij} t \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi_n t + (1-t) \end{pmatrix}.$$

Осталось воспользоваться на связностью $\mathrm{SO}(n)$. Лемма доказана для $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Рассмотрим $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Построим гладкое отображение f: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to S^1$; положив $f(g) = \det(g)$. Образом $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ является окружность; прообразом единицы на S^1 является подмножество матриц в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ таких, что $\det(g) = 1$, т. е. $f^{-1}(1) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Поскольку окружность линейно связна, то достаточно доказать линейную связность группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Применяя процесс ортогонализации, приводящий от произвольного унимодулярного комплексного базиса к эрмитову, сводим, как и выше, вопрос о связности $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ к вопросу о связности $\mathrm{SU}(n)$. Последняя группа связна в силу леммы 11. Лемма 12 доказана. □

Замечание. Связность $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и несвязность $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ можно пояснить (нестрого) еще так: группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ получается из $\mathbb{R}^{n^2}$ путем выбрасывания гиперповерхности $\det(g) = 0$, разделяющей $\mathbb{R}^{n^2}$ на две области, одна из которых и есть связная компонента единицы в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. В комплексном случае $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ получается из $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ выбрасыванием подмножества $\det(g) = 0$, коразмерность которого равна 2 (с вещественной точки зрения), так как комплексное уравнение $\mathbb{R}^{n^2}$ эквивалентно двум вещественным $\mathrm{Re}(\det(g)) = 0$, $\mathrm{Im}(\det(g)) = 0$. Интуитивно ясно, что поверхность коразмерности два не разбивает $\mathbb{R}^{2n^2}$ на два куска.

Мы определили $\mathrm{U}(n)$ как группу матриц, сохраняющих вещественнозначное произведение $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} a^k \bar{b}^k$. Однако наряду с ними в $\mathbb{C}^n$ имеется ассоциированная билинейная комплекснозначная форма $(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=1}^{n} a^k \bar{b}^k$, а потому естественно возникает группа матриц $U(n)'$, сохраняющих эту форму, т. е. удовлетворяющих тождеству $(B\vec{a}, B\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$ для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$.

Лемма 13. *Группа* $\mathrm{U}(n)$ *и группа* $\mathrm{U}(n)'$ *совпадают.*

Доказательство. Так как $\mathrm{U}(n)'$ сохраняет $(\vec{a}, \vec{b})$, то она сохраняет (по отдельности) ее вещественную и мнимую части; а так как $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \mathrm{Re}(\vec{a}, \vec{b}\rangle$, то из сохранения формы $(\vec{a}, \vec{b})$ следует сохранение $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$. Итак, $\mathrm{U}(n)' \subset \mathrm{U}(n)$.

Обратно, пусть дан элемент $A \in \mathrm{U}(n)$, т. е. $\langle A\vec{a}, A\vec{b}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$ при любых $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$. Так как это равенство верно при любых $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$, то оно имеет место и для пары векторов вида: $i\vec{a}$, $\vec{b}$, т. е. $\mathrm{Re}(i\vec{a}, \vec{b}) = \mathrm{Re}(A(i\vec{a}), A\vec{b})$. Так как оператор A комплексный, то $A(i\vec{a}) = iA\vec{a}$, следовательно, $\mathrm{Im}(\vec{a}, \vec{b}) = \mathrm{Im}(A\vec{a}, A\vec{b})$, что означает сохранение мнимой части формы $(\vec{a}, \vec{b})$. Таким образом, A сохраняет $(\vec{a}, \vec{b})$, т. е. $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{U}(n)'$. □

В дальнейшем мы не будем различать эти две группы инвариантности.

Обсудим операцию овеществления, позволяющую отождествлять $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$. Выберем в $\mathbb{C}^n$ эрмитов базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, т. е. любой вектор $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ допускает единственное разложение $\vec{z} = z_1\vec{e}_1 + \ldots + z^n\vec{e}_n$, где $z^k = x^k + iy^k$, $x^k, y^k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множество ортогональных (относительно $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$) векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n; i\vec{e}_1, \ldots, i\vec{e}_n$. Тогда для любого $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ возникает разложение $\vec{z} = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k\vec{e}_k + \sum\limits_{k=1}^{n} y^k(i\vec{e}_k)$, где $x^k, y^k \in \mathbb{R}$. Это позволяет отождествить $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$.

Отображение $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, действующее по формуле $\varphi(\vec{z}) = (x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^n)$, будем называть *оператором овеществления* $\mathbb{C}^n$.

Что происходит с эрмитовой формой $(\vec{a}, \vec{b})$ после применения φ? Ясно, что

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=1}^{n} a^k\bar{b}^k \to \sum_{k=1}^{n} (x^k + iy^k)(c^k - id^k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x^kc^k + y^kd^k) + i\sum_{k=1}^{n} (y^kc^k - x^kd^k),$$

т. е.

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \mathrm{Re}(\vec{a}, \vec{b}) \to \sum_{k=1}^{n} (x^kc^k + y^kd^k);$$

иными словами, скалярное эрмитово произведение в $\mathbb{C}^n$ переходит после овеществления в евклидово скалярное произведение $\mathbb{R}^{2n}$.

Какой смысл вкладывается в слова «задать в $\mathbb{R}^{2n}$ комплексную структуру»? Рассмотрим овеществление $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$; тогда в $\mathbb{R}^{2n}$ возникает ортобазис $\{e_k, ie_k\}$,, $1 \leqslant k \leqslant n$, причем

$\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$. Итак, в $\mathbb{R}^{2n}$ возникает линейный оператор A, где $A(\vec{x}) = i\vec{x}$. Ясно, что $A^2 = -E$ и $A(i\vec{e}_k) = -\vec{e}_k$, т. е. в ортобазисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k; i\vec{e}_1, \ldots, i\vec{e}_k)$ матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица порядка n. Этот оператор имеет $2n$ собственных чисел: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = i$; $\lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{2n} = -i$ (проверьте!), причем $A \in SO(n)$.

Определение. Будем говорить, что ортогональный оператор $A \in SO(n)$ в $\mathbb{R}^{2n}$ такой, что $A^2 = -E$, *определяет комплексную структуру* на $\mathbb{R}^{2n}$.

Мы оправдаем это определение, если с помощью A построим отождествление $\mathbb{R}^{2n}$ с $\mathbb{C}^n$. Поскольку оператор A ортогонален, то путем ортогонального поворота базиса его можно привести к виду

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & & \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \begin{matrix} \cos\varphi_n & \sin\varphi_n \\ -\sin\varphi_n & \cos\varphi_n \end{matrix} \end{array}\right)$$

Так как $A^2 = -E$, то $\varphi_k = \frac{2\pi}{2} + l_k\pi$ ($l_k \in \mathbb{Z}$). Переставляя базисные векторы можно привести оператор A к виду $A = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

Итак, возник некоторый ортобазис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n; \vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n$ такой, что $A(\vec{e}_k) = \vec{t}_k$; $A(\vec{t}_k) = -\vec{e}_k$. Натягивая на $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ пространство $\mathbb{R}^n\{\vec{e}_k\}$, получаем разложение $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n\{\vec{e}_k\} \oplus \mathbb{R}^n\{t_k\}$ такое, что $A\colon \mathbb{R}^n\{\vec{e}_k\} \to \mathbb{R}^n\{\vec{t}_k\}$, $A\colon \mathbb{R}^n\{\vec{t}_k\} \to \mathbb{R}^n\{\vec{e}_k\}$. Следовательно, любой $\vec{a} \in \mathbb{R}^{2n}$ допускает единственную запись вида $\vec{a} = \vec{x} + i\vec{y}$, где $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n\{\vec{e}_k\}$. Так как $A^2 = -E$, то мы получаем $\mathbb{C}^n$, рассмотрев все комплексные линейные комбинации векторов $\{\vec{e}_k\}$.

Сколько комплексных структур можно задать в $\mathbb{R}^{2n}$? Иными словами, как описать все такие $A \in \mathrm{SO}(2n)$, что $A^2 = -E$? Так как $A = -A^{-1}$, $A^{-1} = A^\top$, то $A^\top = -A$, т. е. оператор A определяет комплексную структуру тогда и только тогда, когда он кососимметричен.

Рассмотрим овеществление $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, и пусть $\Pi^2 \subset \mathbb{R}^{2n}$ — произвольная двумерная вещественная плоскость. Когда Π^2 является комплексной прямой, т. е. когда эта плоскость является образом комплексной прямой после овеществления? Оказывается, что Π^2 является комплексной прямой тогда и только тогда, когда она

является инвариантной плоскостью для оператора $A\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$. Доказательство оставляем читателю.

Что происходят с унитарной группой после овеществления $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$? Пусть $A \in \mathrm{U}(n)$. Поскольку этот оператор сохраняет эрмитову форму, то после овеществления он превратится в оператор φA, действующий в $\mathbb{R}^{2n}$ и сохраняющий евклидову форму, так как эрмитова форма переходит в евклидову. Так как φA сохраняет евклидову форму, то он является элементом группы $\mathrm{O}(2n)$. Каков явный вид вложения $\varphi\colon \mathrm{U}(n) \to \mathrm{O}(2n)$?

Предложение 2. *Мономорфизм* $\varphi\colon \mathrm{U}(n) \to \mathrm{SO}(2n)$, *возникающий при овеществлении* $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, *записывается так:*

$$A = C + iB \to \begin{pmatrix} C & -B \\ B & C \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2n),$$

где C *и* B *вещественны. Кроме того,*

$$\varphi\left(\mathrm{U}(n)\right) = \mathrm{SO}(2n) \cap \varphi\left(\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})\right).$$

Доказательство. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис в $\mathbb{C}^n$. Тогда при $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ этот базис переходит в $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, i\vec{e}_1, i\vec{e}_2, \ldots, i\vec{e}_n$. Отсюда $(C+iB)\vec{e}_k = C\vec{e}_k + B(i\vec{e}_k)$, $(C+iB)(i\vec{e}_k) = -B\vec{e}_k + C(i\vec{e}_k)$, т. е. $\varphi(A) = \begin{pmatrix} C & -B \\ B & C \end{pmatrix}$. Прямое вычисление показывает, что $\det(\varphi(A)) = |\det A|^2$, т. е. $\det(\varphi(A)) > 0$.

Докажем теперь, что $\varphi\left(\mathrm{U}(n)\right) = \mathrm{SO}(2n) \cap \varphi\left(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\right)$. Пусть $\varphi(A) \in \varphi\left(\mathrm{U}(n)\right)$. Тогда, с одной стороны, $\varphi(A) \in \mathrm{SO}(2n)$ (см. выше), с другой стороны, $\varphi(A)$ получен овеществлением комплексного невырожденного оператора, т. е. $\varphi(A) \in \varphi\left(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\right)$; отсюда: $\varphi\left(\mathrm{U}(n)\right) \subset \mathrm{SO}(2n) \cap \varphi\left(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\right)$.

Обратно, пусть $g \in \mathrm{SO}(2n)$ и $g \in \varphi\left(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\right)$. Это значит, что g имеет вид: $\begin{pmatrix} C & -B \\ B & C \end{pmatrix}$, т. е. $g \in \varphi\left(\mathrm{U}(n)\right)$. □

Имеется еще одно очевидное вложение $\mathrm{U}(n) \supset \mathrm{O}(n)$ в виде подгруппы вещественных матриц.

Если $A \in \mathrm{U}(n)$ — оператор умножения на i, т. е. $A\vec{z} = i\vec{z}$, то после овеществления он превращается в $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Выше было установлено, что множество комплексных структур в $\mathbb{R}^{2n}$ совпадает со множеством всех ортогональных кососимметрических матриц. Если $A \in \mathrm{SO}(2n)$ — комплексная структура, то существует такая

матрица $C \in \mathrm{SO}(2n)$, что $A = CT_0C^{-1}$, где

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Верно и обратное: любой оператор вида CT_0C^{-1} является комплексной структурой. Таким образом, множество всех комплексных структур в $\mathbb{R}^{2n}$ может быть отождествлено со множеством матриц вида CT_0C^{-1}, где $C \in \mathrm{SO}(2n)$.

Можно доказать (мы этого делать не будем), что все матричные группы, перечисленные нами, являются группами Ли.

7. Симплектическая группа Sp(n). Эта группа определяется с помощью алгебры кватернионов $\mathbb{Q}$. Напомним определение $\mathbb{Q}$. Рассмотрим $\mathbb{R}^4$, отнесенное к ортобазису, векторы которого обозначим через $1, i, j, k$. Таким образом, любой $q \in \mathbb{R}^4$ записывается в виде $q = a^0 \cdot 1 + a^2 \cdot i + a^2 \cdot j + a^3 \cdot k$, где $a^0, a^1, a^2, a^3 \in \mathbb{R}$. Определим умножение в $\mathbb{R}^4$, задав его на базисе $1, i, j, k$, а затем продолжив на все векторы из $\mathbb{R}^4$. Таблица имеет вид:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Возникает четырехмерная алгебра над $\mathbb{R}$, ассоциативная, но не коммутативная. Она и называется *алгеброй кватернионов* $\mathbb{Q}$. В $\mathbb{Q}$ существует операция сопряжения

$$q \to \bar{q} = a^0 \cdot 1 - a^1 \cdot i - a^2 \cdot j - a^3 \cdot k$$

и операция взятия обратного элемента (для отличного от нуля) $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$, где $|q|^2 = q \cdot \bar{q} = \sum_{i=0}^{3} (a^i)^2$. В $\mathbb{Q}$ имеется скалярное вещественнозначное произведение $\langle q_1, q_2 \rangle = \mathrm{Re}(q_1 \cdot \bar{q}_2)$. Здесь через

$q_1 \cdot q_2$ обозначено произведение в $\mathbb{Q}$. Элементы $q \in \mathbb{Q}$ называются *кватернионами*. Кватернионы, у которых $a^0 = 0$, называются *мнимыми*; координата a^0 в разложении $q = a^0 \cdot 1 + a^1 \cdot i + a^2 \cdot j + a^3 \cdot k$ обозначается через $\mathrm{Re}(q)$. Итак $q = \mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q)$.

Теперь мы можем рассмотреть n-мерное кватернионное пространство $\mathbb{Q}^n$ с базисом $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, т. е. любой вектор $\vec{a} \in \mathbb{Q}^n$ допускает однозначную запись вида $\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} q^k \vec{e}_k$, где $q^k \in \mathbb{Q}$.

Определение. *Симплектической группой* $\mathrm{Sp}(n)$ называется совокупность всех линейных кватернионных преобразований $\mathbb{Q}^n$, сохраняющих точку 0, оставляющих инвариантным следующее скалярное произведение в $\mathbb{Q}^n$:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} a^k \bar{b}^k,$$

т. е. $\mathrm{Sp}(n) = \{A\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n;\ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle A\vec{a},\ A\vec{b} \rangle,\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{Q}^n\}$

Число n называется *кватернионной размерностью* $\mathbb{Q}^n$. Пространство $\mathbb{Q}^n$ можно канонически отождествить с $\mathbb{C}^{2n}$. Положим $n = 1$; тогда $\mathbb{Q}^1 = \mathbb{Q}$. Пусть $q = a^0 \cdot 1 + a^1 \cdot i + a^2 \cdot j + a^3 \cdot k$. Тогда, используя таблицу умножения, q можно записать в виде $q = (a^0 + a^1 \cdot i) + j(a^2 - a^3 i) = z^1 + j\bar{z}^2$, где $z^1 = a^0 + ia^1$, $z^2 = a^2 + a^3 i$ — комплексные числа. Выполняя эту операцию вдоль каждой кватернионной координаты в $\mathbb{Q}^n$, получаем отождествление $\mathbb{Q}^n \cong \mathbb{C}^{2n}$. Как и в комплексном случае, наряду с $\mathrm{Sp}(n)$ определена группа инвариантности кватернионнозначной формы

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=1}^{n} a^k \bar{b}^k; \quad a^k, b^k \in \mathbb{Q}$$

Верно утверждение: группа инвариантности $(\vec{a}, \vec{b})$ совпадает с группой $\mathrm{Sp}(n)$. Доказательство предоставляем читателю как обязательное упражнение.

Рассмотрим операцию окомплексивания (не путать с комплексификацией!), т. е. отождествления $\mathbb{Q}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$. Что происходит при этой операции с кватернионнозначной формой $(\vec{a}, \vec{b})$? Положим $n = 1$, тогда

$$a \cdot \bar{b} \to (p + j\bar{q})\overline{(c + j\bar{d})} = (p + j\bar{q}) \cdot \bar{c} - dj) =$$
$$= (p\bar{c} - j\bar{q}dj) - (pdj - j\bar{q}\bar{c}) = (p\bar{c} + q\bar{d}) + (-pd + qc)j;$$

здесь $a \to p + j\bar{q}$, $b \to c + j\bar{d}$ (см. выше). Мы воспользовались соотношениями $jq = \bar{q}j$, $j^2 = -1$, $\overline{a \cdot b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (проверьте!).

При произвольном n форма $(\vec{a}, \vec{b})$ переходит в форму

$$\sum_{k=1}^{n}(p^k\bar{c}^k + q^k\bar{d}^k) + \sum_{k=1}^{n}(q^k c^k - p^k d^k)\cdot j,$$

где

$$\vec{a} = (a^1, \ldots, a^n) \to (p^1 + j\bar{q}^1; \ldots; p^n + j\bar{q}^n),$$
$$\vec{b} = (b^1, \ldots, b^n) \to (c^1 + j\bar{d}^1; \ldots; c^n + j\bar{d}^n).$$

Ясно, что форма $(\vec{a}, \vec{b})_{\text{эрм}} = \sum_{k=1}^{n}(p^k\bar{c}^k + q^k\bar{d}^k)$ совпадает с эрмитовой формой в $\mathbb{C}^{2n}$; а форма $(\vec{a}, \vec{b})_{\text{ксм}} = \sum_{k=1}^{n}(q^k c^k - p^k d^k)$ является кососимметрической, т. е. $(\vec{a}, \vec{b})_{\text{ксм}} = -(\vec{b}, \vec{a})_{\text{ксм}}$. Если оператор A: $\mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$ сохраняет $(\vec{a}, \vec{b})_{\text{квт}}$, то после отождествления $\mathbb{Q}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$, он сохраняет уже две формы: $(\vec{a}, \vec{b})_{\text{эрм}}$ и $(\vec{a}, \vec{b})_{\text{ксм}}$. То, что оператор сохраняет $(\vec{a}, \vec{b})_{\text{эрм}}$, означает, что он становится унитарным оператором.

Мы доказали, что $\mathrm{Sp}(n)$ может быть вложена в $\mathrm{U}(2n)$ как подгруппа тех элементов, которые сохраняют в $\mathbb{C}^{2n}$ кососимметрическую форму $(\vec{a}, \vec{b})_{\text{ксм}} = \sum_{k=1}^{n}(q^k c^k - p^k d^k)$. Здесь $\mathbb{C}^{2n}$ считается представленным в виде $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, т. е. координаты в $\mathbb{C}^{2n}$ разбиты на две группы: $\vec{a} = (p^1, \ldots, p^n; q^1, \ldots, q^n)$.

Предложение 3. *Группы* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ *некомпактны; группы* $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ *компактны (как топологические пространства).*

Доказательство. Некомпактность $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ вытекает из того, что эти группы — неограниченные области в евклидовом пространстве. Компактность $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ вытекает из того, что мы реализовали их замкнутыми ограниченными подмножествами в сфере. Компактность $\mathrm{Sp}(n)$ вытекает из того, что эта группа реализована как замкнутое подмножество в $\mathrm{U}(2n)$. □

Мы не исчерпали список всех групп Ли. Существуют еще как компактные, так и некомпактные группы Ли. Например, среди некомпактных групп Ли большую роль играют группы $\mathrm{O}(n, k)$ и $\mathrm{SO}(n, k)$, где $\mathrm{O}(n, k)$ — группа инвариантности формы (в $\mathbb{R}^n$): $(\vec{a}, \vec{b}) = -\sum_{k=1}^{k} a^i b^i + \sum_{j=k+1}^{n} a^j b^j$. Группа $\mathrm{SO}(n, k)$ — подгруппа унимодулярных матриц в $\mathrm{O}(n, k)$.

Рассмотрим некоторые группы Ли малых размерностей. Мы видели, что SO(2) гомеоморфна окружности; SO(3) гомеоморфна $\mathbb{RP}^3$. Ясно, что $U(1) \cong S^1$. Изучим группы Sp(1) и SU(2).

Предложение 4. *Группы* SU(2) *и* Sp(1) *изоморфны (в алгебраическом смысле) и обе гомеоморфны сфере* S^3. *Группа* SO(3) *является факторгруппой* SU(2) *по подгруппе* $\mathbb{Z}_2$, *состоящей из элементов* $E, -E$.

Доказательство. Группа Sp(1) действует в $\mathbb{Q}^1 = \mathbb{Q}$ как умножение на кватернион, т. е. каждый $A\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $A \in \mathrm{Sp}(1)$ имеет вид: $Aq = q \cdot \bar{a}$, где $q \in \mathbb{Q}$, а $a \in \mathbb{Q}$ — фиксированный кватернион. Так как $(q_1, q_2)_{\text{квт}} = q_1 \cdot \bar{q}_2$ сохраняется при действии A, то $(q_1, q_2)_{\text{квт}} = (Aq_1, Aq_2)_{\text{квт}}$, т. е. $q_1\bar{q}_2 = q_1\bar{a}a\bar{q}_2 = |a|^2 q_1 \cdot q_2$. Отсюда $|a|^2 = 1$, $|a| = 1$. Так как $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$ (проверьте!), то Sp(1) изоморфна (в алгебраическом смысле) группе всех кватернионов $a \in \mathbb{Q}$ таких, что $|a| = 1$. Такие кватернионы образуют сферу S^3, так как $|a|^2 = (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$.

Единицей группы S^3 является $1 = (1, 0, 0, 0)$. Докажем, что Sp(1) изоморфна SU(2). Рассмотрим вложение $\mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SU}(2)$ (см. выше). Так как $n = 1$, то вложение имеет вид $\begin{pmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix}$, т. е. совокупность таких матриц образует Sp(1) в U(2), причем $p\bar{p} + q\bar{q} = 1$.

В самом деле, действие $A\colon q \to q \cdot \bar{a}$ после окомплексования имеет вид

$$q \to q\bar{a} = (\alpha + j\beta)(p + j\bar{q}) = (\alpha p - \beta\bar{q}) + (\alpha q + \beta\bar{p})j,$$

т. е. относительно базиса: $\vec{e}_1(\alpha = 1, \beta = 0)$, $\vec{e}_2(\alpha = 0, \beta = 1)$ матрица оператора имеет вид $\begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix}$, что и требовалось (после замены $\bar{q} \to -\bar{q}$). Так как каждый $A \in \mathrm{Sp}(1)$ есть изометрия $\mathbb{R}^4$, то он сохраняет четырехмерный объем, т. е. $\det \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix}$. Итак, $|p|^2 + |q|^2 = 1$, что и требовалось доказать. □

Итак, Sp(1) изоморфна унимодулярной подгруппе в U(2), причем размерность ее равна 3. Так как SU(2) в U(2) также трехмерна, то Sp(1) и SU(2) изоморфны. Мы доказали также, что элементы SU(2) могут быть записаны в виде $\begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix}$, $|p|^2 + |q|^2 = 1$.

Докажем, что существует гомоморфизм $f\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ такой, что он является эпиморфизмом и имеет ядро, изоморфное $\mathbb{Z}_2$. Реализуем SU(2) как группу единичных кватернионов в $\mathbb{Q}$. Положим $f(a) = aq\bar{a}$, где $a \in S^3$; $|a| = 1$, а $q \in \mathbb{Q}$ и $\mathrm{Re}(q) = 0$, т. е.

мнимые кватернионы, образующие $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, ортогональное к $1 \in \mathbb{Q}$. Тогда f — гомоморфизм, так как $f(a_1 \cdot a_2) = a_1 a_2 q \bar{a}_2 \bar{a}_1 = f(a_1) \cdot f(a_2)$. Преобразование $f(a)$ переводит в себя $\mathbb{R}^3$ (мнимые кватернионы) и является изометрией, так как $\mathrm{Re}(aq_1\bar{a}a\bar{q}_2\bar{a}) = \mathrm{Re}(aq_1\bar{q}_2\bar{a}) = \mathrm{Re}(q_1\bar{q}_2)$. Итак, $f(a) \in \mathrm{SO}(3)$ (в силу связности S^3 образ $f(S^3)$ лежит в $\mathrm{SO}(3)$).

Найдем ядро f. Если $aq\bar{a} \equiv q$ при любом $q \in \mathbb{R}^3$ $(\mathrm{Re}(q) = 0)$, то $aq = qa$, $|a| = 1$, т. е. $a = \pm 1$, так как коммутирование a со всеми мнимыми кватернионами означает, что мнимая часть a равна нулю. Так как $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{Z}_2 = (E, -E)$, то $\dim(S^3/\mathbb{Z}_2) = 3$, и так как $\dim \mathrm{SO}(3) = 3$, то f — эпиморфизм. □

Тот факт, что $\mathrm{SO}(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2$ соответствует представлению $\mathbb{RP}^3$ в виде фактора: $S^3/\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2$ действует на S^3 как умножение векторов на -1.

Задачи к § 3

1. Доказать, что группа $\mathrm{O}(2)$ совпадает с группой всех изометрий окружности (с метрикой $ds^2 = d\varphi^2$).

2. Доказать, что группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ является линейно связной.

3. Доказать, что группа $U(n)$ (как топологическое пространство) гомеоморфна прямому произведению $SU(n)$ на окружность S^1.

4. Пусть $\mathfrak{G}$ — связная группа Ли и H — ее дискретная нормальная подгруппа. (Подгруппа H называется дискретной, если единица группы $\mathfrak{G}$ обладает такой открытой окрестностью U, что в ней содержится только один элемент H — единица.) Доказать, что любая дискретная нормальная подгруппа H лежит в центре $\mathfrak{G}$, т. е. коммутирует со всей группой $\mathfrak{G}$.

5. Найти явную формулу вложения $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{U}(2n)$ по аналогии с вложением $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{SO}(2n)$.

§ 4. Динамические системы

Напомним простейшие свойства градиента гладкой функции. Мы уже знакомы с примером векторного поля $\vec{v}(x) = \overrightarrow{\mathrm{grad} f(x)}$, где f — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$. В действительности в криволинейных координатах grad не является векторным полем, так как у него иной закон преобразования, и трактовать grad как поле можно только при наличии римановой метрики.

Напомним, что $\overrightarrow{\mathrm{grad} f}$ связан с производной функции f по направлению вектора $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ следующим образом: $\frac{df}{d\vec{a}} = \langle \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{grad} f} \rangle$, где $\frac{df}{d\vec{a}}$ — производная по направлению, $\langle , \rangle$ — евклидово произведение. Пусть f задана на $\mathbb{R}^n$; тогда она определяет гиперповерхность уровня (если $n = 3$, то будем говорить о поверхностях уровня,

а если $n = 2$, то о линиях уровня). Гиперповерхность уровня описывается $n - 1$ параметрами (на n параметров в $\mathbb{R}^n$ наложена одна связь: уравнение $f(x) = c = \text{const}$), поэтому размерность гиперповерхности $\{f = c\}$ равна $n - 1$, если $\{f = c\}$ — гладкое многообразие.

Определение. Точка $x_0 \in \{f = c\}$ называется *критической точкой функции* f, если $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0) = 0$; в противном случае, x_0 называется *неособой* (*некритической*) *точкой*.

Пример. Пусть на $\mathbb{R}^2$ задана функция $z = x^2 - y^2$; линия уровня $z = 0$ имеет вид: $x = \pm y$ и состоит из двух прямых. Точка $(0, 0)$ — единственная критическая точка этой функции.

Пусть $x_0 \in \{f = c\}$ — неособая точка. Вектор $\vec{a}$, приложенный в точке x_0, называется *касательным* к гиперповерхности $\{f = c\}$, если существует гладкая кривая $\gamma(t)$, целиком принадлежащая $\{f = c\}$ и такая, что $\gamma(0) = x_0$ и $\dot{\gamma}(0) = \vec{a}$.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \{f = c\}$ — неособая точка. Тогда вектор $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0)$ ортогонален гиперповерхности $\{f = c\}$ в точке x_0, т. е. $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0)$ ортогонален любому вектору $\vec{a}$, касательному к $\{f = c\}$ в точке x_0.*

Доказательство. Так как $\langle \vec{a}, \overrightarrow{\text{grad}} f \rangle = \frac{df}{d\vec{a}}$, то достаточно вычислить производную f по направлению $\vec{a}$, т. е. $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$. Так как $f(\gamma(t)) = c = \text{const}$ и так как $\gamma(t) \subset \{f = c\}$, то $\frac{df}{d\vec{a}} = 0$. □

Если $x_0 \in \{f = c\}$ — критическая точка, то $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0) = 0$, и формально можно считать, что $\overrightarrow{\text{grad}} f(x)$ ортогонален к $\{f = c\}$ в любой ее точке.

Так как направление и величина $\overrightarrow{\text{grad}} f$ указывают направление и скорость роста функции f, то функция f всегда растет с максимальной скоростью по нормали к гиперповерхности уровня.

Напомним, что на гладком многообразии M^n задано гладкое векторное поле $\vec{v}(P)$, если в каждой точке $P \in M^n$ задан вектор $\vec{v}(P) \in T_P M^n$, гладко зависящий от точки P.

В локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ векторное поле $\vec{v}(P)$ может быть задано набором гладких функций $v^i(x^1, \ldots, x^n)$. Аналогичным образом определяются непрерывные поля.

Определение. Точка $P_0 \in M^n$ называется *особой* для векторного поля $\vec{v}(P)$, если $\vec{v}(P_0) = 0$. Особая точка $P_0 \in M^n$ поля $\vec{v}(P)$ называется *изолированной*, если у нее существует некоторая открытая

окрестность U, в которой поле $\vec{v}(P)$ не имеет других особенностей, кроме точки P_0.

Впрочем, в физике большую роль играют разрывные поля, являющиеся гладкими всюду, кроме некоторого числа изолированных точек разрыва на M^n. С примерами мы познакомимся ниже.

Пусть $\vec{v}(P)$ — гладкое поле на M^n. Напомним, что траектория $\gamma(t)$ называется *интегральной кривой поля* $\vec{v}(P)$, если $\dot{\gamma}(t) = \vec{v}(\gamma(t))$, т. е. если касательные векторы скорости к $\gamma(t)$ совпадают с векторами поля $\vec{v}$.

Рассмотрим примеры. Пусть $f(P)$ — функция на $\mathbb{R}^2$ и $\vec{v}(P) = \overrightarrow{\operatorname{grad} f}(P)$.

а) $f(P) = x^2 + y^2$, $\overrightarrow{\operatorname{grad} f} = (2x, 2y)$. Интегральные траектории образуют пучок лучей, исходящих из точки O (рис. 61).

б) $f(P) = -x^2 - y^2$, $\overrightarrow{\operatorname{grad} f} = (-2x, -2y)$. Интегральные траектории — лучи, входящие в точку O (рис. 62).

в) $f(P) = -x^2 + y^2$, $\overrightarrow{\operatorname{grad} f} = (-2x, 2y)$. Интегральные траектории — гиперболы (рис. 63).

Все поля а)–в) имеют в точке O особую точку. Функция f имеет в точке O в случае а) минимум, в случае б) максимум, в случае в) седловую точку.

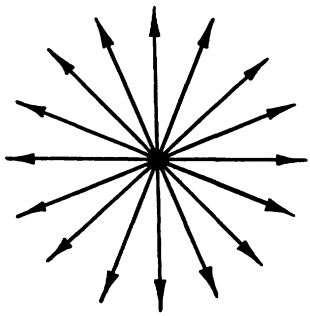


Рис. 61

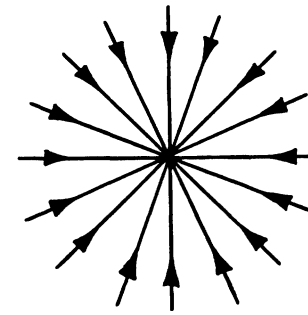


Рис. 62

Часто о векторном поле $\vec{v}$ на M^n говорят как о потоке жидкости, текущей по многообразию. При этом считается, что в каждой частице жидкости помещен вектор, указывающий скорость этой частицы. Особые точки поля — особые точки потока жидкости; например, особая точка на рис. 61 — источник (жидкость «вытекает» из точки O), а особая точка на рис. 62 — сток. Интегральные траектории поля $\vec{v}$ иногда называются *линиями тока жидкости*, движение которой описывается этим полем скоростей. Далеко не

каждый реальный поток жидкости порождает поле в нашем смысле. Дело в том, что координаты наших полей не зависят от времени; иными словами, соответствующие таким полям потоки жидкости — стационарные потоки. Потоки, зависящие от времени, называются *нестационарными*. Они могут быть моделированы с помощью семейства полей $\vec{v}(P, t)$, гладко зависящих от параметра t.

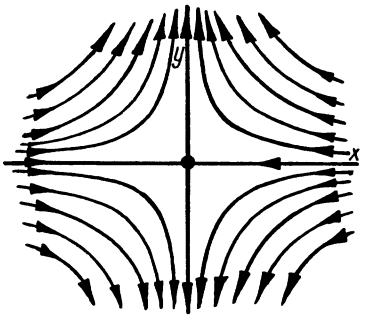


Рис. 63

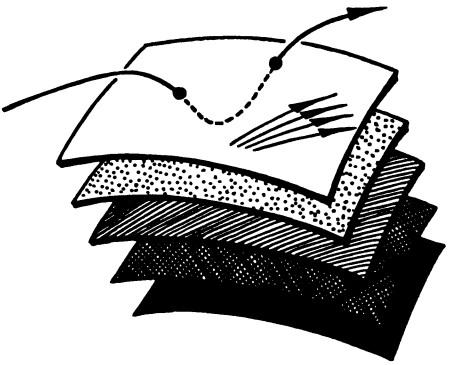


Рис. 64. Такой интегральной траектории быть не может

Как в явном виде найти интегральные траектории поля? Соответствующий аппарат разработан в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждое поле $\vec{v} = (v^1(P), \ldots, v^n(P))$ можно отождествить с системой обыкновенных уравнений $\frac{dx^k}{dt} = v^k(x^1, \ldots, x^n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Напомним, что *автономными* системами называются системы, правые части которых не содержат явно параметр t. Автономные системы соответствуют стационарным потокам жидкости.

Остановимся на частном случае, когда поведение интегральных траекторий может быть описано в довольно простых терминах.

Определение. Пусть задана система дифференциальных уравнений, отвечающих полю $\vec{v}(P)$ на M^n. *Интегралом системы* называется гладкая функция $f(P)$ на M^n, постоянная вдоль всех интегральных траекторий потока.

Пусть f — интеграл. Гиперповерхности $\{f = c\}$ расслаивают M^n при изменении c. Рассмотрим фиксированную гиперповерхность $f(P_0) = c_0$. Из определения интеграла следует, что если интегральная траектория имеет общую точку с $\{f = c_0\}$, то вся траектория лежит в $\{f = c_0\}$. Отсюда следует, что поле $\vec{v}(P)$ касается в каждой точке P поверхности $\{f = f(P)\}$ (рис. 64). Это означает, что

каждая поверхность $\{f=c\}$ расслоена на интегральные траектории потока $\vec{v}$. Это позволяет понизить порядок исходной системы уравнений на единицу, ограничив поле $\vec{v}$ на поверхность $\{f=c\}$.

Напомним, что в окрестности любой неособой точки для $\operatorname{grad} f$ поверхности $\{f=c\}$ являются гладкими подмногообразиями размерности $n-1$. Если нам даны два функционально независимых интеграла f и g (т. е. почти во всех точках M^n поля $\operatorname{grad} f$ и $\operatorname{grad} g$ линейно независимы), то порядок системы понижается уже на две единицы (рис. 65), и т. д. Если задан набор из $n-1$ функционально независимых интегралов, то поток полностью интегрируется, т. е. все интегральные траектории могут быть описаны так: $\gamma(t)=\{f_1=c_1\}\cap\ldots\cap\{f_{n-1}=c_{n-1}\}$, где $\gamma(0)=P$, $f_k(P)=c_k$, $1\leqslant k\leqslant n-1$.

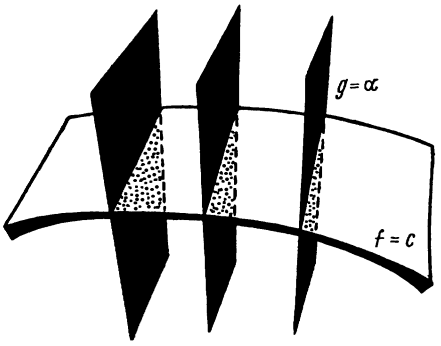


Рис. 65

Определение. Пусть на M^n заданы поля $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k$. Они называются *линейно независимыми*, если векторы $\vec{v}_1(P),\ldots,\vec{v}_k(P)$ линейно независимы в каждой точке $P\in M^n$.

Если какое-то поле $\vec{v}_\alpha$ обращается в нуль в некоторой точке, то вся система $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k$ уже не является независимой.

Предложение 1. *Пусть $M^n=\mathfrak{G}$ — группа Ли. Тогда на $\mathfrak{G}$ всегда существуют n линейно независимых гладких векторных полей $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$.*

Доказательство. Будем считать, что $\mathfrak{G}$ — матричная группа. Рассмотрим на $\mathfrak{G}$ операцию левого сдвига L_a: $g\to ag$. Ясно, что L_a является диффеоморфизмом $\mathfrak{G}$. Рассмотрим единицу $e\in\mathfrak{G}$, зададим в $T_e\mathfrak{G}$ n линейно независимых векторов $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ и рассмотрим дифференциал dL_a: $T_e\mathfrak{G}\to T_a\mathfrak{G}$. Положим $\vec{v}_k(a)=dL_a(\vec{e}_k)$. Так как L_a — диффеоморфизм, то dL_a невырожден, т. е. векторы $\vec{v}_k(a)$, $1\leqslant k\leqslant n$, линейно независимы. □

Вскоре мы приведем примеры M^n, на которых любое гладкое поле обязательно имеет особые точки (т. е. нули). Интересный пример трех независимых полей можно построить на S^3. Так как S^3 гомеоморфна SU(2), то в силу предложения 1, на S^3 существуют три независимых поля. Найдем их явный

вид. Пусть $S^3 = \{q \in \mathbb{Q};\ |q| = 1\}$. Положим $\vec{v}_1(q) = iq$, $\vec{v}_2(q) = jq$, $\vec{v}_3(q) = kq$. Эти поля касаются S^3 в точке q. В самом деле, вычислим скалярное произведение, например $\langle iq, q\rangle$. Имеем $\langle iq, q\rangle = \mathrm{Re}(iq \cdot \bar{q}) = \mathrm{Re}(i|q|^2) = |q|^2 \cdot \mathrm{Re}(i) = 0$.

Задача. Найти в явном виде интегральные траектории указанных полей на сфере S^3.

Среди гладких полей на M^n выделен класс так называемых градиентных или потенциальных полей. Обсудим понятие градиента на M^n. Пусть M^n снабжено римановой метрикой и f — гладкая функция на M^n. Тогда $\mathrm{grad}\, f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$ — элемент пространства, дуального к $T_P M^n$. Для того чтобы получить вектор, рассмотрим (в локальной системе координат) поле $\vec{v}(P)$: $v^k(x) = g^{kp}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^p}$. Вычисление показывает, что набор $v^1, \ldots, v^n$ преобразуется по закону преобразования координат вектора; его мы и обозначим через $\overrightarrow{\mathrm{grad} f}$.

Определение. *Потенциальным полем* $\vec{v}(P)$ на M^n называется поле вида $\vec{v}(P) = \overrightarrow{\mathrm{grad} f}(P)$, где f — гладкая функция на M^n.

Лемма 2. *Потенциальное поле не имеет замкнутых интегральных траекторий без особых точек.*

Доказательство. Пусть существует замкнутая интегральная траектория (такие траектории называются иногда периодическими решениями системы). Тогда $\dot{x}(t) = \vec{v}(x)$, где $x(t)$ — решение. Если f — потенциал, то

$$\frac{df}{d\dot{x}} = \langle \dot{x}, \vec{v}(x)\rangle = g_{ij}\dot{x}^i v^j(x) = g_{ij}v^i(x)v^j(x) = |\overrightarrow{\mathrm{grad} f}|^2 > 0.$$

Поэтому f строго монотонно растет в направлении возрастания t. Но так как траектория $\gamma(t)$ замкнута, то через некоторое время точка $\gamma(t)$ вернется в прежнее положение, что противоречит непрерывности f. □

Например, поле, изображенное на рис. 66, не потенциально (вращение жидкости вокруг начала координат).

Рассмотрим потоки на двумерных многообразиях. Для простоты ограничимся локальным изучением потоков; тогда можно считать, что поток рассматривается на евклидовой плоскости. Будем трактовать поток как поток жидкости с постоянной плотностью (равной 1). Изучим изменение массы жидкости в каждой точке с течением времени. Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, с каждым потоком инвариантным

образом связана однопараметрическая группа диффеоморфизмов, т. е. сдвигов вдоль интегральных траекторий поля. Особые точки потока — неподвижные точки действия этой группы. Пусть поле $\vec{v}$ имеет координаты $(P(x, y), Q(x, y))$. Рассмотрим изменение

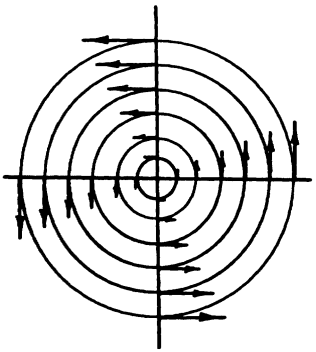


Рис. 66

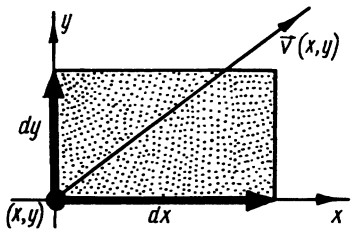


Рис. 67

массы в бесконечно малом прямоугольнике со сторонами dx, dy (рис. 67). Здесь (x, y) — декартовы координаты. Если dm — масса жидкости в прямоугольнике (dx, dy), то $dm = dxdy$. Пусть $\dot{\gamma}(t) = \vec{v}(\gamma(t))$ — система, отвечающая $\vec{v}$. Если $\gamma(t)$ — решение, то t определено вдоль $\gamma(t)$ с точностью до сдвига; можно считать, что $\gamma(0) = P$, где P — некоторая точка. Положим $f_{t_0}(P) = \gamma(t_0)$, где $\gamma(0) = P$. Отображение f_{t_0} — диффеоморфизм. Рассмотрим $P = (x, y)$ и применим к прямоугольнику (dx, dy) обратное преобразование $f_{-\Delta t}$, где $\gamma(t) = P$. Образом (dx, dy) при $f_{-\Delta t}$ будет бесконечно малый параллелограмм Г. Применяя $f_{\Delta t}$, мы переведем Г в (dx, dy) (рис. 68). Точка $P = \gamma(t)$ отвечает значению t, а ее прообраз при $f_{\Delta t}$ отвечает значению $t - \Delta t$. С изменением t масса $dm(t) = dx(t)dy(t)$ также меняется.

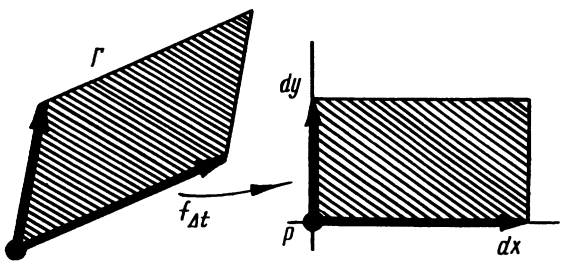


Рис. 68

Лемма 3. *Изменение массы в бесконечно малом прямоугольнике* (dx, dy) *имеет вид*

$$\frac{d}{dt}(dm(t)) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Доказательство. Будем считать, что $f_{\Delta t}$ вводит в (dx, dy) новую систему координат (замена с помощью малого диффеоморфизма). В исходной системе мы имеем

$$\begin{aligned} dx(t+\Delta t)dy(t+\Delta t) &= d(x(t)+\Delta t x_t')d(y(t)+\Delta t y_t') = \\ &= (dx(t)+\Delta t d(x_t'))(dy(t)+\Delta t d(y_t')) = \\ &= (dx(t)+\Delta t dP(x, y))(dy(t)+\Delta t dQ(x, y)) = \\ &= \left(dx(t)+\Delta t\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\right)\left(dy(t)+\Delta t\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\right). \end{aligned}$$

Так как в первом сомножителе $dP(x, y)$ берется по приращению только вдоль оси Ox, то в этом сомножителе приращение Δy равно нулю, т. е. остается только $dx(t)+\Delta t\frac{\partial P}{\partial x}dx$. Аналогично во втором сомножителе равно нулю приращение вдоль Oy, т. е. Δx исчезает, а потому остается $dy(t)+\Delta t\frac{\partial Q}{\partial y}dy$. Итак,

$$\begin{aligned} &\left(dx(t)+\Delta t\frac{\partial P}{\partial x}dx\right)\left(dy(t)+\Delta t\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) = \\ &\qquad = dx(t)dy(t)+\Delta t dx(t)dy(t)\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Мы пренебрегаем малыми высшего порядка. Отсюда

$$\Delta dm(t) = \Delta t\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\, dy,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}(dm(t)) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy. \qquad \square$$

Определение. Функция $\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}$ называется *дивергенцией потока* $\vec{v}$. Поток называется *несжимаемым*, если $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$.

Из леммы 3 следует, что изменение массы равно нулю тогда и только тогда, когда поток несжимаем. Рассмотрим аналог формулы, полученной в лемме 3 для областей конечного размера. Пусть D — ограниченная область с кусочно гладкой границей, $D(t)$ — область, полученная из D путем ее сдвига вдоль интегральных траекторий $\vec{v}$ за время t с помощью однопараметрической группы.

Пусть площадь $D(t)$ равна $V(t)$ (если плотность жидкости равна 1, то $V(t)$ — масса, заключенная в $D(t)$).

Предложение 2. *Для любой ограниченной области $D(t)$ имеем*

$$\frac{dV(t)}{dt} = \iint\limits_{D(t)} \operatorname{div}(\vec{v})\, dxdy.$$

Для доказательства достаточно разбить $D(t)$ на бесконечно малые прямоугольники и применить лемму 3.

Определение. Поток $\vec{v} = (P, Q)$ называется *безвихревым*, если $P_y = Q_x$.

Это условие можно видоизменить. Рассмотрим на плоскости произвольный гладкий контур C (самонепересекающуюся окружность), $C = \gamma(t)$; в каждой точке контура возникает число $\langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle$ (рис. 69). *Вихрем потока* $\vec{v}$ вдоль C называется число $\int\limits_C \langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle\, dt$.

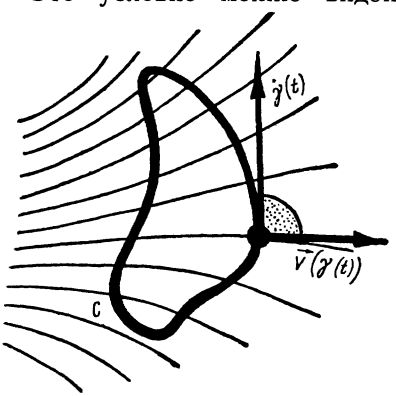


Рис. 69

Лемма 4. *Поток $\vec{v} = (P, Q)$ безвихревой тогда и только тогда, когда его вихрь вдоль любого гладкого контура равен нулю.*

Доказательство. Пусть D — область, ограниченная C. Имеем:

$$\int\limits_{\gamma(t)} \langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle\, dt = \int\limits_{\gamma(t)} P(\gamma(t))\, dx(t) + Q(\gamma(t))\, dy(t) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}\right) dt = \iint\limits_D (P_y - Q_x)\, dxdy; \quad \gamma(0) = \gamma(2\pi).$$

Здесь применена формула Стокса (см. гл. 6). □

Предложение 3. *Пусть $\vec{v}$ — безвихревый поток на плоскости. Тогда $\vec{v}$ потенциален, т. е. существует гладкая функция $a(x, y)$ такая, что $\vec{v} = \operatorname{grad} a(x, y)$. Форма $Pdx + Qdy$ — полный дифференциал функции $a(x, y)$, определенной однозначно с точностью до аддитивной постоянной.*

Доказательство. Нужно проинтегрировать систему уравнений $P = \frac{\partial a}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial a}{\partial y}$ при условии, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Интегрируя

по x первое уравнение, получаем $a(x, y) = \int\limits_0^x P(x, y)\,dx + g(y)$. Дифференцируем по y: $\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = \int\limits_0^x \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx + \frac{dg(y)}{dy}$, откуда:

$$Q(x, y) = \int\limits_0^x \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}\,dx + \frac{dg(y)}{dy},$$

или: $Q(x, y) = Q(x, y) - Q(0, y) + \frac{dg(y)}{dy}$, что дает: $g'(y) = Q(0, y)$, т. е. $g(y) = \int\limits_0^y Q(0, y)\,dy + C$, где $C = \text{const}$. Итак,

$$a(x, y) = \int\limits_0^x P(x, y)\,dx + \int\limits_0^y Q(0, y)\,dy + C.$$

Если бы мы начали интегрирование с уравнения $Q = \frac{\partial a}{\partial y}$, то получили бы $a(x, y) = \int\limits_0^y Q(x, y)\,dy + \int\limits_0^x P(x, 0)\,dx + C$.

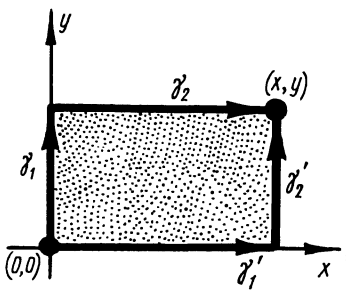


Рис. 70

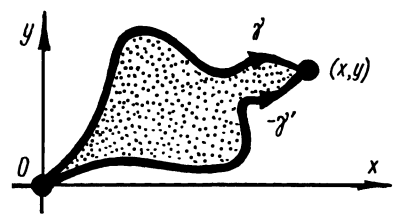


Рис. 71

Функция $a(x, y)$ — потенциал потока. Опишем $a(x, y)$ геометрически. Рассмотрим два кусочно гладких пути: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ и $\gamma' = \gamma_1' \cup \gamma_2'$ (рис. 70). Ясно, что

$$a(x, y) = \int\limits_0^x P(x, y)\,dx + \int\limits_0^y Q(0, y)\,dy = \int\limits_\gamma (P\,dx + Q\,dy),$$

$$a(x, y) = \int\limits_0^y Q(x, y)\,dy + \int\limits_0^x P(x, 0)\,dx = \int\limits_{\gamma'} (P\,dx + Q\,dy),$$

т. е. значение $a(x, y)$ можно получить, проинтегрировав дифференциальную форму $\omega = Pdx + Qdy$ вдоль пути γ либо вдоль γ', оба из которых ведут из точки $(0, 0)$ в точку (x, y). □

Предложение 4. *Пусть поток $\vec{v}$ безвихревый. Тогда он потенциален, и потенциал восстанавливается так:*

$$a(x, y) = \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma} \omega,$$

где γ — любой кусочно-гладкий путь, ведущий из точки $(0, 0)$ в точку (x, y). Интеграл $\int_{\gamma} \omega$ не зависит от выбора пути.

Доказательство. Докажем, что $\int_{\gamma}(P\,dx + Q\,dy)$ не зависит от выбора пути (если начало и конец фиксированы). Пусть γ' — другой путь из $(0, 0)$ в (x, y); рассмотрим $\alpha = \int_{\gamma} \omega - \int_{\gamma'} \omega = \int_{\gamma \cup (-\gamma')} \omega$; где $(-\gamma')$ — путь γ', ориентированный в обратном направлении (см. рис. 71). Тогда

$$\int_{\gamma \cup (-\gamma')} (Pdx + Qdy) = \int_{C} (Pdx + Qdy) = 0,$$

так как $C = \gamma \cup (-\gamma')$ — замкнутый контур, а поток безвихревый (следствие из формулы Стокса).

Итак, $\alpha = 0$ и $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma'} \omega$. Так как независимость $\int_{\gamma} \omega$ от пути доказана, то для нахождения численного значения $\int_{\gamma} \omega$ можно взять один из путей, показанных на рис. 70. □

Изменение начальной точки интегрирования меняет $a(x, y)$ на аддитивную постоянную. Пусть поток $\vec{v}$ — безвихревый и несжимаемый. Тогда его координаты P и Q таковы, что

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad P = \frac{\partial a}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial a}{\partial y},$$

откуда $\dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0$.

Линейный дифференциальный оператор второго порядка $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ (записанный в декартовых координатах), называется *оператором Лапласа*. Функция $f(x, y)$ такая, что $\Delta f = 0$, называется *гармонической*.

Мы доказали, что потенциал безвихревого и несжимаемого потока — гармоническая функция. Обычно $a(x, y)$ рассматривают в паре с другим потенциалом $b(x, y)$, называемым *сопряженным потенциалом* или потенциалом сопряженного потока. Для его определения рассмотрим систему $\frac{\partial b}{\partial x} = -Q$, $\frac{\partial b}{\partial y} = P$. Функция $b(x, y)$, являющаяся решением этой системы, называется сопряженным потенциалом. Докажем его существование.

Положим $\widetilde{P} = -Q$, $\widetilde{Q} = P$. Тогда $\frac{\partial b}{\partial x} = \widetilde{P}$, $\frac{\partial b}{\partial y} = \widetilde{Q}$ при условии, что $\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial y} = -\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x}$, $\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial y}$. Это система, которую мы выше проинтегрировали для нахождения $a(x, y)$.

Итак, $b(x, y)$ существует и играет роль потенциала $a(x, y)$ для потока $\widetilde{v} = (\widetilde{P}, \widetilde{Q}) = (-Q, P)$. Поток $\widetilde{v}$ называется *сопряженным к потоку* $\vec{v} = (P, Q)$.

Верно и обратное: потенциал $a(x, y)$ сопряжен к $b(x, y)$, т. е. потенциал, дважды сопряженный к $a(x, y)$, совпадает с ним. Потоки $\vec{v}$ и $\widetilde{\vec{v}}$ ортогональны: $\langle \vec{v}, \widetilde{\vec{v}} \rangle = -PQ + QP = 0$.

Рассмотрим плоскость (x, y) как плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ и рассмотрим комплекснозначную функцию: $f(x, y) = a(x, y) + ib(x, y)$, где a и b — соответственно потенциал и сопряженный потенциал несжимаемого потока $\vec{v} = (P, Q)$. Вместо $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ будем писать просто g_y, g_x. Так как $a_x = P$, $a_y = Q$, $b_x = -Q$, $b_y = P$, то $a_x = b_y$, $a_y = -b_x$. Такие функции $f(x, y) = a + ib$ называются *комплексно аналитическими*, а уравнения на a и b — *уравнениями* (условиями) *Коши — Римана*. Функции a и b называются соответственно *вещественной и мнимой частями функции* f: $a = \mathrm{Re}(f)$, $b = \mathrm{Im}(f)$. Напомним некоторые свойства комплексно аналитических функций.

Пусть $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Тогда $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{-i}{2}(z - \bar{z})$. Поэтому любая функция $g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, разлагающаяся в сходящийся ряд по переменным x, y, может быть записана так: $g(x, y) = \widetilde{g}(z, \bar{z})$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Аналогично $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Выделим из множества функций $g(z, \bar{z})$ те, которые зависят только от z. Аналитически это можно записать так: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z, \bar{z}) = 0$. Такие функции и называются *комплексно аналитическими*; они разлагаются в сходящийся ряд только по степеням переменной z. Так как $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$, то $g_x + ig_y = 0$, т. е.

$u_x + iv_x + i(u_y + iv_y) = 0$, и условие $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ эквивалентно уравнениям Коши — Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Тем самым, нами доказана

Теорема 1. *Любой безвихревый и несжимаемый поток $\vec{v} = (P, Q)$ может быть представлен в виде $\vec{v} = \operatorname{grad} a(x, y)$, а сопряженный поток $\widetilde{\vec{v}} = (\widetilde{P}, \widetilde{Q})$ — в виде $\widetilde{\vec{v}} = \operatorname{grad} b(x, y)$, где функция $f(x, y) = a(x, y) + ib(x, y)$ комплексно аналитическая и определена однозначно с точностью до аддитивной постоянной.*

Верно и обратное: если $f(z)$ — комплексно аналитическая функция, то потоки $\vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{Re}(f(z))$ и $\widetilde{\vec{v}} = \operatorname{grad} \operatorname{Im}(f(z))$ безвихревые и несжимаемые:; кроме того они сопряжены друг другу.

Интегральные траектории $\vec{v}$ и $\widetilde{\vec{v}}$ ортогональны. Функция $f = a + ib$ называется *комплексным потенциалом потока*. Изучим теперь особые точки векторных полей на плоскости.

Пусть $\vec{v}$ — безвихревый и несжимаемый поток. Как найти нули $\vec{v}$ и $\widetilde{\vec{v}}$? Из уравнений Коши — Римана имеем

$$f'_z = \tfrac{1}{2}(f_x - if_y) = a_x - ia_y = b_y + ib_x.$$

Лемма 5. *Точки, в которых $f'_z(z)$ обращается в нуль, совпадают с нулями потока $\vec{v}$ (эти же точки — нули потока $\widetilde{\vec{v}}$).*

Доказательство сразу следует из равенства $f'_z(z) = a_x - ia_y = b_y + ib_x$.

Итак, для нахождения нулей потоков $\vec{v}$, $\widetilde{\vec{v}}$ достаточно решить уравнение $f'(z) = 0$. До сих пор мы рассматривали гладкие поля. Однако все проведенные выше рассуждения можно повторить и для потоков, имеющих изолированные точки разрыва, которые, конечно, не являются решениями уравнения $f'(z) = 0$.

Практический вопрос: пусть $\vec{v}$ — несжимаемый, безвихревый поток; т. е. поток вида $\operatorname{grad} \operatorname{Re}(f(z))$, где $f(z)$ — аналитическая функция; как найти интегральные траектории этого поля? Оказывается, нет необходимости в явном виде решать соответствующую систему дифференциальных уравнений.

Предложение 5. *Пусть $f = a + ib$ — комплексно аналитическая функция, $\vec{v} = \operatorname{grad}(a)$, $\widetilde{\vec{v}} = \operatorname{grad}(b)$. Тогда b — интеграл для поля $\vec{v}$, а a — интеграл для $\widetilde{\vec{v}}$, т. е. интегральные траектории $\vec{v}$ суть линии уровня функции b, а интегральные траектории $\widetilde{\vec{v}}$ — линии уровня функции a.*

Доказательство. Достаточно найти $\frac{da}{d\vec{v}}$ и $\frac{db}{d\vec{v}}$. Например, $\frac{db}{d\vec{v}} = \langle \vec{v}, \overrightarrow{\operatorname{grad} b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y = 0$. Аналогично $\frac{da}{d\vec{v}} = 0$, т. е. a и b постоянны на соответствующих траекториях. □

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $f(z) = z^k$, $k \geqslant 2$, $f' = kz^{k-1}$. Ясно, что $f'(z) = 0$ только в точке $z = 0$; $f = r^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$, т. е. $a = r^k \cos k\varphi$; $b = r^k \sin k\varphi$. На рис. 72 изображены интегральные траектории $\operatorname{grad} a$ при $k = 4$. Начало координат — особая точка, получающаяся слиянием нескольких особенностей менее высокого порядка (см. ниже).

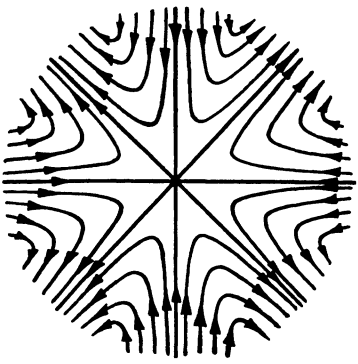


Рис. 72

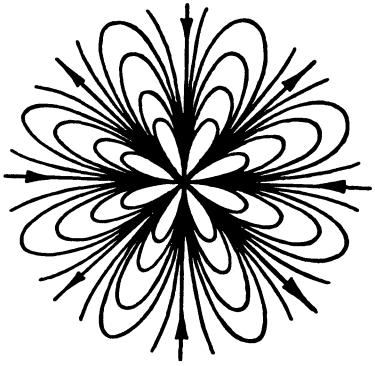


Рис. 73

Пусть $f(z) = z^{-k}$, $k \geqslant 1$, $f = r^{-k}(\cos k\varphi - i \sin k\varphi)$. На рис. 73 изображены интегральные траектории $\operatorname{grad} a$ при $k = 4$.

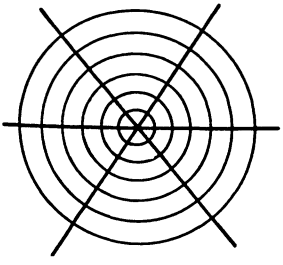


Рис. 74

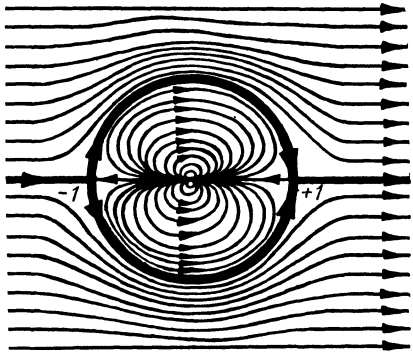


Рис. 75

Пусть $f(z) = \ln z$. На рис. 74 изображены интегральные траектории $\vec{v}$ и $\widetilde{\vec{v}}$. Это — логарифмическая особенность. Рассмотрим

функцию Жуковского: $f(z)=z+\frac{1}{z}$. Интегральные траектории (для одного потока) см. на рис. 75.

Задача. Постройте траектории сопряженного потока.

Пусть $f(z)=\frac{1}{\alpha}(\ln(z+\alpha)-\ln(z-\alpha))$, α вещественное. Картина одного потока показана на рис. 76.

Задача. Постройте картину сопряженного потока.

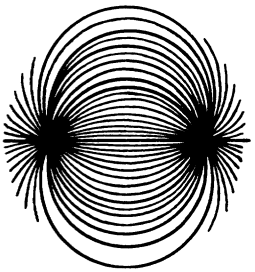


Рис. 76

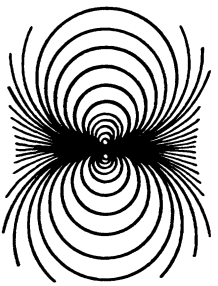


Рис. 77

Здесь можно проиллюстрировать слияние особенностей. При $\alpha\neq 0$ картина потока (рис. 76) совпадает с диполем (два заряда, помещенные в особых точках). При $\alpha\to 0$ $f(z)\to f'_z(z)=1/z$, и поле диполя превращается в поле потока, отвечающего полюсу первого порядка (рис. 77).

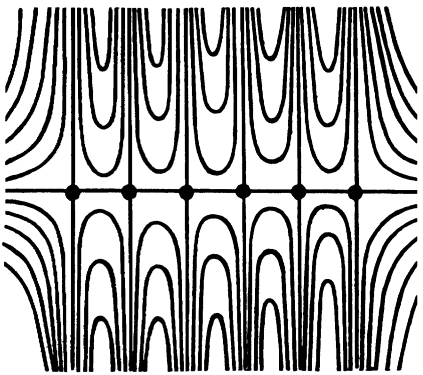


Рис. 78. $k=6$

Рассмотрим полином $P_k(z)=\prod_{i=1}^{k}(z-\alpha_i)$ с простыми вещественными корнями. Поток показан на рис. 78. Пусть все корни α_i стремятся к нулю (полином превращается в $\widetilde{P}_k(z)=z^k$, у которого только один нуль k-го порядка). Деформацию потока см. на рис. 79.

Задача. Постройте деформацию функции z^{-k} к функции $\left(\prod_{i=1}^{k}(z-\alpha_i)\right)^{-1}$ и нарисуйте картину деформации потока.

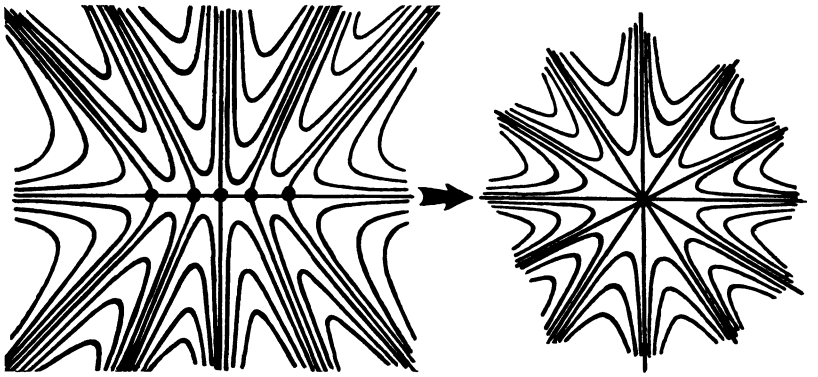


Рис. 79

До сих пор мы рассматривали потоки на плоскости. Перечисленные размеры переносятся на сферу S^2. Стереографическая проекция устанавливает соответствие между точками S^2 и точками расширенной комплексной плоскости (т. е. плоскости комплексного переменного, пополненной бесконечно удаленной точкой).

Поток $\vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{Re}(z)$ на $\mathbb{R}^2$ имеет бесконечность своей единственной точкой; это — полюс 1-го порядка (если его рассматривать на S^2) (рис. 80). На рис. 81 показана качественная картина поведения $\operatorname{grad} \operatorname{Re}(z+1/z)$, $\operatorname{grad} \operatorname{Re}(\ln z)$, $\operatorname{grad} \operatorname{Im}(\ln z)$.

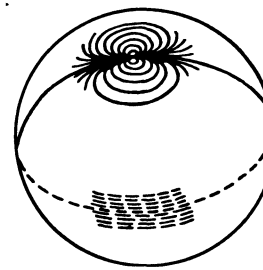


Рис. 80

Задача. Постройте картину поведения траекторий потоков:

$$(\alpha + i\beta) \ln\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \quad \frac{1}{z} + \ln z, \quad z^k + \ln z.$$

Попытки построить на S^2 гладкое поле без особенностей кончаются неудачей, в частности построенные выше потоки имеют особенности на S^2. Это обстоятельство не случайно. Дадим интуитивное обоснование того факта, что любое гладкое поле на S^2 имеет особенность. Допустим, что на S^2 построено поле без особенностей. Представим S^2 в виде объединения двух дисков: $S^2 = D_1 \cup D_2$, где D_1 — диск с центром в северном полюсе N и малого радиуса ε, D_2 — дополнение к D_1 (рис. 82). Так как поле гладкое, то можно считать, что в D_1 это поле постоянно, и его

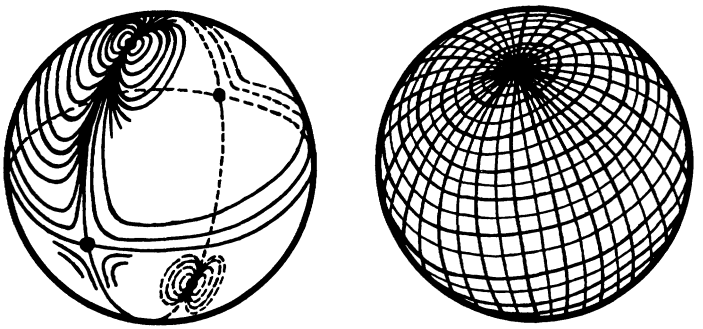


Рис. 81

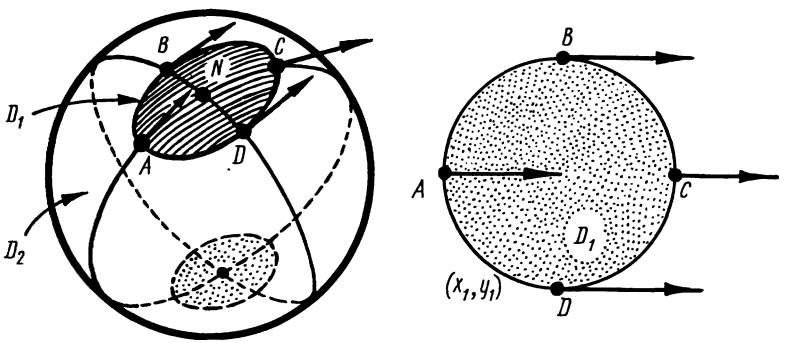


Рис. 82

векторы в точках A, B, C, D имеют направления, показанные на рис. 82. Введем на D_1 и D_2 декартовы координаты (x^1, y^1) и (x^2, y^2). Тогда в D_2 поле $\vec{v}$ (в этих координатах) имеет вид, показанный на рис. 83. Этот вид можно усмотреть еще и так. Растянем D_1 вдоль меридианов так, чтобы он покрыл всю сферу, за исключением D_2 малого радиуса. Тогда мы и получим картину, показанную на рис. 83. Так как радиус D_2 можно считать малым, то интуитивно ясно, что внутри должна быть особенность; в противном случае картина траекторий совпала бы с картиной в D_1.

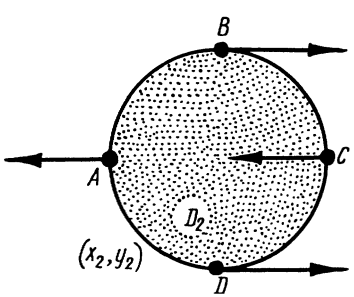


Рис. 83

§ 5. Классификация двумерных поверхностей

В этом параграфе мы изучим структуру двумерных многообразий. Мы начнем с общих определений, затем приведем примеры, а потом дадим формальное доказательство теоремы классификации.

1. Многообразия с краем. Расширим понятие гладкого многообразия, включив в него подмножества в $\mathbb{R}^n$, задаваемые системами уравнений и неравенств. Обозначим через $\mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$ полупространство, задаваемое так: $x^n \geqslant 0$, $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Границу $\mathbb{R}^n_+$, задаваемую $x^n = 0$, обозначим через $\mathbb{R}^{n-1}_0$. Если $f\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция, то во всех точках, включая и граничные, определим дифференцируемость функции f. Если точка $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n_+$ внутренняя, т. е. $x^n > 0$, то определение дифференцируемости обычное. Если же $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^{n-1}_0$, т. е. $x^n = 0$, то скажем, что f *дифференцируема в точке* $\vec{x}_0$, если справедливо разложение

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x^i - x_0^i) + o(\vec{x} - \vec{x}_0),$$

где $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{o(\vec{x} - \vec{x}_0)}{|(\vec{x} - \vec{x}_0)|} = 0$, $x^n \geqslant 0$. Тогда $a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и $a_n = \lim\limits_{h \to +0} \frac{1}{h}(f(x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}, x_0^n + h) - f(x_0^1, \ldots, x_0^n))$. Последний предел уместно назвать *частной производной* $\frac{\partial f}{\partial x_0^n}$ функции f в точке $\vec{x}_0$. Аналогично определяется класс функций гладкости C^r, $r = 1, 2, \ldots, \infty$.

Определение. Метрическое пространство M называется *гладким многообразием с краем*, если существует такой атлас карт $\{U_\alpha\}$ и координатные гомеоморфизмы $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n_+$, где V_α — открытое множество в $\mathbb{R}^n_+$, что функции замены координат

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}\colon V_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to V_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

— гладкие функции класса C^r, $r = 1, 2, \ldots, \infty$.

Линейные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n_+$ индуцируют локальные координаты в карте U_α: $x_\alpha^k(P) = x^k(\varphi_\alpha(P))$. Тогда в любой локальной системе координат имеем $x_\alpha^n(P) \geqslant 0$. Точка $P \in M$ называется *внутренней* точкой, если $x_\alpha^n(P) > 0$. Точка P называется *граничной*, если $x_\alpha^n(P) = 0$.

Если точка P внутренняя, то в любой локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ имеем $x^n(P) > 0$. Если точка P граничная, то в любой локальной системе $(x^1, \ldots, x^n)$ имеем $x^n(P) = 0$. В самом деле, допустим, что для некоторой точки P имеются две системы

координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$, причем $x^n(P) > 0$, $y^n(P) = 0$. Координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ осуществляют гомеоморфизм некоторой окрестности $U \subset M$ в область $V \subset \mathbb{R}^n$, а координаты $(y^1, \ldots, y^n)$ — гомеоморфизм той же окрестности U в область $V' \subset \mathbb{R}^n_+$.

Рассмотрим функцию перехода как гладкий гомеоморфизм φ: $V \to V'$, $y^k = \varphi^k(x^1, \ldots, x^n)$, причем:

а) $y^n = \varphi^n(x^1, \ldots, x^n) \geqslant 0$,

б) для некоторой точки $\vec{x}_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in V$ имеем $y^n = \varphi^n(x_0^1, \ldots, x_0^n) = 0$.

Эти условия означают, что в точке $\vec{x}_0$ функция φ^n достигает своего минимума. Поскольку $\vec{x}_0$ — внутренняя точка для области $V \subset \mathbb{R}^n$, то градиент φ^n в точке $\vec{x}_0$ обращается в нуль, т. е.

$$\frac{\partial \varphi^n}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, матрица Якоби $\left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right\|$ в точке $\vec{x}_0$ имеет нулевой детерминант, что противоречит условию гладкости функций перехода от одной локальной системы координат к другой.

Итак, многообразие с краем характеризуется тем, что существует такой атлас карт $\{U_\alpha\}$ с локальными координатами $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$, что для любой карты выполнено строгое неравенство $x_\alpha^n > 0$ во внутренних точках и равенство $x_\alpha^n = 0$ в граничных точках. Если карта U_α не содержит граничных точек, то условие $x_\alpha^n > 0$ можно без ограничения общности отбросить. Множество ∂M граничных точек — гладкое многообразие на единицу меньшей размерности. В самом деле, в качестве атласа карт следует взять пересечение $W_\alpha = \partial M \cap U_\alpha$, а в качестве координат — первые $n-1$ координат $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^{n-1}$ карты U_α. Координатные гомеоморфизмы φ_α (см. выше) отображают W_α гомеоморфно на $V_\alpha \cap \mathbb{R}^{n-1}_0$, а функции замены остаются гладкими как ограничения функций замены координат многообразия M.

Если $\partial M = \varnothing$, то приходим к прежнему понятию многообразия, которое отныне будем называть замкнутым многообразием.

Пример 1. Рассмотрим шар D^n, задаваемый неравенством $\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^n$, пространство D^n — многообразие с краем S^{n-1}.

Пример 2. Пусть f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — вектор-функция, удовлетворяющая условиям теоремы о неявных функциях, т. е. во всех точках $P \in M = \{f(P) = 0\}$ дифференциал df имеет максимально возможный ранг. Рассмотрим систему

$$f^1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \ \ldots, \ f^{k-1}(x^1, \ldots, x^n) = 0, \ f^k(x^1, \ldots, x^n) \geqslant 0,$$

и пусть M' — множество решений этой системы.

Если в каждой точке $P \in M'$ ранг $\left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^s} \right\|$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$; $1 \leqslant s \leqslant n$, равен $k-1$, то M' — многообразие с краем $\partial M' = M$. В самом деле, в точках $P \in M' \setminus M$ существует атлас карт по теореме о неявной функции для системы $f^1 = 0, \ldots, f^{k-1} = 0$. Рассмотрим $P \in M$. Пусть N' — множество решений системы $f^1 = 0, \ldots, f^{k-1} = 0$ в некоторой окрестности точки P. Тогда f^k можно рассматривать как функцию на N'. Ясно, что дифференциал f^k на N' отличен от нуля. Следовательно, по теореме 1 гл. 3 § 5 N' диффеоморфно прямому произведению интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ на многообразие N, являющееся пересечением M с окрестностью точки P: $N' = N \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Поэтому неравенство $f^n \geqslant 0$ выделяет карту вида $N \times [0, \varepsilon)$, в которой в качестве координат можно взять набор $(x^1, \ldots, x^{n-k})$ на многообразии N и функцию $f^k \geqslant 0$.

ПРИМЕР 3. В предыдущем примере видно, что декартово произведение многообразия M с краем ∂M на замкнутое многообразие N является многообразием $M \times N$ с краем $\partial M \times N$.

2. Ориентируемые многообразия.

Определение. Многообразие (с краем) M называется *ориентируемым*, если существует такой атлас карт $\{U_\alpha\}$, что якобиан функций перехода от одной локальной системы координат к другой положителен. Будем говорить также, что атлас карт $\{U_\alpha\}$, у которого все якобианы функций перехода положительны, задает на многообразии M ориентацию, а сам атлас карт назовем *ориентированным атласом карт*. Два атласа карт, $\{U_\alpha\}$ и $\{U'_\beta\}$, задают одинаковую ориентацию, если объединение атласов $\{U_\alpha\} \cup \{U'_\beta\}$ снова является ориентированным атласом карт.

Всякий атлас карт на ориентируемом многообразии можно превратить в ориентированный атлас карт путем изменения локальных координат в каждой карте. В самом деле, пусть $\{U_\alpha, (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)\}$ — произвольный атлас карт, состоящий из связных карт. Поскольку многообразие M ориентируемо, то на M существует ориентированный атлас $\{V_\beta, (y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n)\}$. Рассмотрим произвольную точку $P \in U_\alpha$ и пусть $P \in V_\beta$. Если $\frac{\partial(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)}{\partial(y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n)}(P) > 0$, то в карте U_α сохраним координаты $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$. Если же $\frac{\partial(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)}{\partial(y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n)} < 0$, то в качестве новой локальной системы координат возьмем $(-x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n)$. Итак, сохраняя прежние обозначения, мы добились, чтобы якобианы перехода от $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ к $(y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n)$ были положительными

хотя бы в одной точке P каждой карты U_α. В силу связности U_α якобианы положительны в любой точке карты U_α.

Удобно говорить, что отдельная карта задает локальную ориентацию на многообразии M, а если якобиан перехода от координат одной карты к координатам другой карты положителен, то скажем, что две локальные ориентации на M *согласованы.* Если на M уже задана ориентация с помощью ориентированного атласа, то локальная ориентация некоторой другой связной карты может быть согласованной или несогласованной с ориентацией M. В первом случае будем говорить, что локальная ориентация совпадает с ориентацией M, а во втором — что локальная ориентация противоположна ориентации M.

***Предложение* 1.** *На связном ориентированном многообразии существуют ровно две различные ориентации, причем любая карта задает локальную ориентацию, совпадающую с одной из ориентаций M.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha, x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n\}$, $\{V_\beta, y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n\}$ — два ориентированных атласа. Если у одной карты V_β локальная ориентация совпадает с ориентацией атласа $\{U_\alpha\}$, то оба атласа задают одинаковую ориентацию на M. В самом деле, следует проверить знак якобиана $\dfrac{\partial(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)}{\partial(y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n)}$, в любой точке $P \in U_\alpha \cap V_\beta$. Пусть $P_0 \in U_{\alpha_0} \cap V_\beta$ — произвольная точка. Соединим P и P_0 непрерывной кривой $\varphi\colon [0, 1] \to M$, $\varphi(0) = P_0$, $\varphi(1) = P$. Рассмотрим точную нижнюю грань t_0 тех чисел $t \in [0, 1]$, для которых знак якобиана в точке $\varphi(t)$ отрицателен для некоторого выбора карт, содержащих точку $\varphi(t)$. Тогда, с одной стороны, $t_0 \neq 0$, т. е. $\varphi(t_0) \neq P_0$. С другой стороны, точка $\varphi(t_0)$ лежит в одной карте вместе с некоторой точкой $\varphi(t)$, где якобиан отрицателен. Выбор карты $U_\alpha \ni \varphi(t_0)$, $\varphi(t)$ и карты $V_\beta \ni \varphi(t_0)$, $\varphi(t)$ несуществен, так как якобиан будет отрицателен в точке $\varphi(t)$ для любой пары карт U_α и V_β, содержащих $\varphi(t)$. Так как якобиан — непрерывная, отличная от нуля функция, то и в точке $\varphi(t_0)$, а также и в точке $\varphi(t')$ при $t' < t_0$ знак якобиана тоже будет отрицательным. Следовательно, t_0 не является нижней гранью. Противоречие показывает, что оба атласа карт задают на M одинаковую ориентацию. Аналогично проверяется, что все карты, имеющие локальную ориентацию, противоположную ориентации атласа $\{U_\alpha\}$, образуют ориентированный атлас карт. □

Существует другое представление об ориентации M. Скажем, что базис $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \in \mathbb{R}^n$ задает ориентацию евклидова пространства. Два базиса считаются *одинаково ориентированными*, если де-

терминант матрицы перехода положителен. Тогда $\mathbb{R}^n$ приобретает ровно две различных ориентации. Задать ориентацию M — значит задать ориентацию касательного пространства T_PM в каждой точке $P \in M$. Пусть φ: $[0, 1] \to M$ — произвольный путь. Для любого базиса в начальной точке $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \in T_{\varphi(0)}M$ можно построить непрерывное семейство базисов $(\vec{e}_1(t), \ldots, \vec{e}_n(t)) \in T_{\varphi(t)}M$, начинающееся с базиса $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Более того, любые два таких семейства дают в $T_{\varphi(t)}M$ одинаковую ориентацию. Если M ориентируемо, то ориентация в конечной точке $\varphi(1)$ пути φ не зависит от выбора пути. Таким образом, задать ориентацию на M — значит задать ориентацию касательных пространств T_PM так, чтобы они были согласованы по любому непрерывному пути, соединяющему пары точек.

***Теорема* 1.** *Если многообразие с краем M ориентируемо, то край ∂M тоже является ориентируемым многообразием.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha, (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)\}$ — атлас на M. Последняя координата x_α^n в любой карте является неотрицательной функцией. Поскольку M ориентируемо, то, меняя в каждой карте U_α координату x_α^1 на $-x_\alpha^1$, если это необходимо, можно считать, что якобиан замены переменных положителен в каждом пересечении карт $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. В качестве карт на ∂M, как и раньше, возьмем пересечения $W_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$, а в качестве локальных координат — первые $n-1$ координат, т. е. $(y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^{n-1}) = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^{n-1})$. Покажем, что $\det \left\| \dfrac{\partial y_\alpha^i}{\partial y_\beta^j} \right\|_{i,j=1}^{n-1} > 0$ в произвольной точке $P \in W_\alpha \cap W_\beta$.

В самом деле, в объемлющем многообразии M матрица Якоби замены координат в точке P имеет вид

$$\frac{\partial(x_\alpha)}{\partial(x_\beta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^1} & \cdots & \dfrac{\partial x_\alpha^{n-1}}{\partial x_\beta^1} & \dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_\alpha^{n-1}}{\partial x_\beta^{n-1}} & \dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^{n-1}} \\ \dfrac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^n} & \cdots & \dfrac{\partial x_\alpha^{n-1}}{\partial x_\beta^n} & \dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n} \end{pmatrix}.$$

Поскольку на пересечении $W_\alpha \cap W_\beta$ $x_\alpha^n = x_\beta^n = 0$, то $\dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^i} \equiv 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Поэтому $\det \dfrac{\partial(x_\alpha)}{\partial(x_\beta)} = \det \dfrac{\partial(y_\alpha)}{\partial(y_\beta)} \cdot \dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n} > 0$. Следовательно, $\dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n} \neq 0$. Так как $x_\alpha^n \geqslant 0$ в пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$, то $\dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n}(P) > 0$. Итак, $\det \dfrac{\partial y_\alpha}{\partial y_\beta}(P) > 0$. □

Определение. Пусть M — ориентированное многообразие с краем, $\{U_\alpha, (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n\})$, $x_\alpha^n \geqslant 0$, — атлас, задающий ориентацию на M. Ориентация на ∂M, задаваемая атласом $W_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$, $(y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^{n-1}) = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^{n-1})$, называется *ориентацией, согласованной с ориентацией на M.*

ПРИМЕР 4. Рассмотрим снова шар $D^2 \subset \mathbb{R}^2$. Для задания ориентации на D^2 достаточно в одной точке фиксировать базис касательного пространства. Если точку P выбрать на $dD^2 = S^1$, то базис можно выбрать так, чтобы первый вектор $\vec{e}_1$ касался края, а второй — $\vec{e}_2$ указывал направление внутрь шара (рис. 84). Тогда ориентация края, определяемая $\vec{e}_1$, согласована с ориентацией D^2. На рисунке указано другое направление ориентации двумерного многообразия в виде направления вращения касательной плоскости по меньшей дуге от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$.

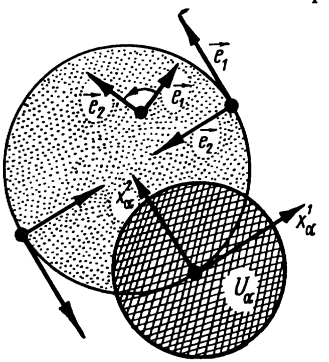


Рис. 84

ПРИМЕР 5. Рассмотрим трехмерный шар D^3 и его край S^2. На рис. 85 показана согласованная ориентация D^3 и края S^2 с помощью базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, правила винта и трех пальцев.

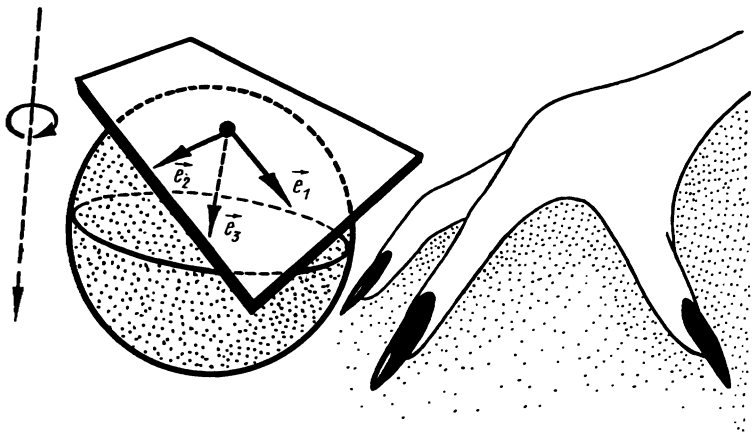


Рис. 85

ПРИМЕР 6. Рассмотрим лист Мёбиуса, представленный в виде квадрата с отождествлением двух противоположных сторон в

разных направлениях (рис. 86). Фиксировав базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в точке A, построим непрерывное семейство базисов вдоль кривой ABA. В конце кривой базис изменит ориентацию, т. е. лист Мёбиуса неориентируем. Однако, край — ориентируемое многообразие.

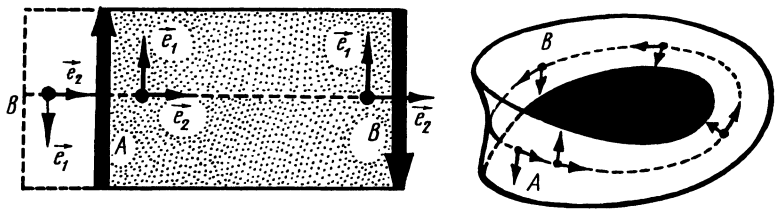


Рис. 86

3. Классификация двумерных многообразий. Переходим к описанию двумерных многообразий. Простейшее из них — сфера S^2, диффеоморфна $\mathbb{CP}^1$. Мы знакомы с тором $T^2 = S^1 \times S^1$, допускающим также следующее представление. Пусть $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$ — абелева группа, образующие которой a и b представлены сдвигами на $\mathbb{R}^2$: $a(x, y) = (x + 1, y)$; $b(x, y) = (x, y + 1)$. Рассмотрев факторпространство $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, получаем T^2. Квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ называется *фундаментальной областью*; ее роль в том, что, применяя к ней элементы $\mathfrak{G}$, мы можем «замостить» всю плоскость (рис. 87). Гладкими функциями на T^2 являются такие функции $f(x, y)$ на $\mathbb{R}^2(x, y)$, которые инвариантны относительно преобразований $\mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$.

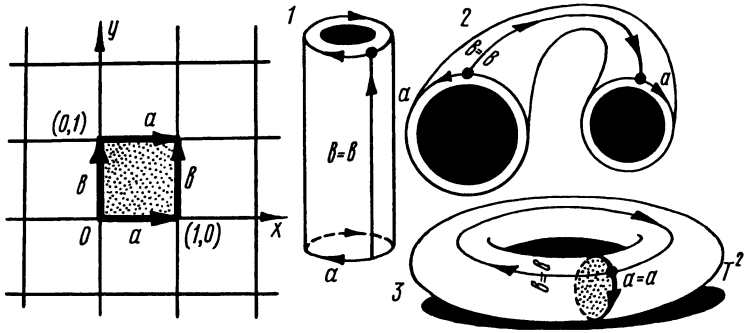


Рис. 87

Рассмотрим на $\mathbb{R}^2(x, y)$ класс гладких функций f, инвариантных относительно другой группы $\mathfrak{G}(a, b)$, образующие которой задаются

на $\mathbb{R}^2$ так: $b(x, y)=(x, y+1)$; $a(x, y)=(1-x, y+1)$. (Найдите соотношения между a и b.) Фундаментальная область показана на рис. 88. Стрелками показаны отождествления сторон в соответствии с действием группы. Поверхность, возникающая после факторизации, показана на рис. 88 и называется *бутылкой Клейна*. Тор и бутылка Клейна — гладкие многообразия; тор — ориентируемое, а бутылка Клейна — неориентируемое. (Проверьте!)

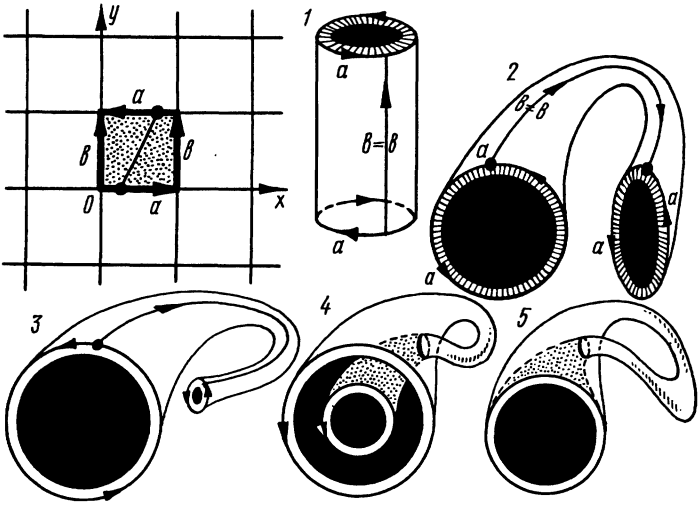


Рис. 88

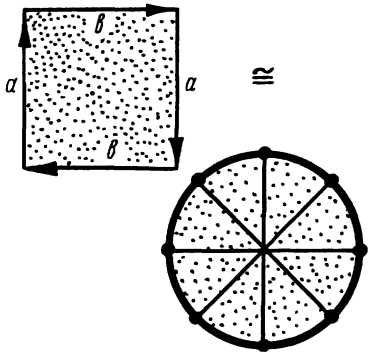


Рис. 89

Эти два примера подсказывают простой способ получения других двумерных многообразий. Рассмотрим склейку на границе квадрата, показанную на рис. 89. Так как квадрат гомеоморфен диску, то мы получили проективную плоскость. Попробуем изобразить ее в $\mathbb{R}^3$, выполнив требуемые склейки. На рис. 90 показан процесс склеивания, приводящий к модели $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{R}^3$. Получили объект, не являющийся погруженным подмногообразием — этому препятствует пара особых точек A и B. На рис. 90 показаны сечения модели плоскостями, ортогональными сингулярному отрезку. Хотя нам не

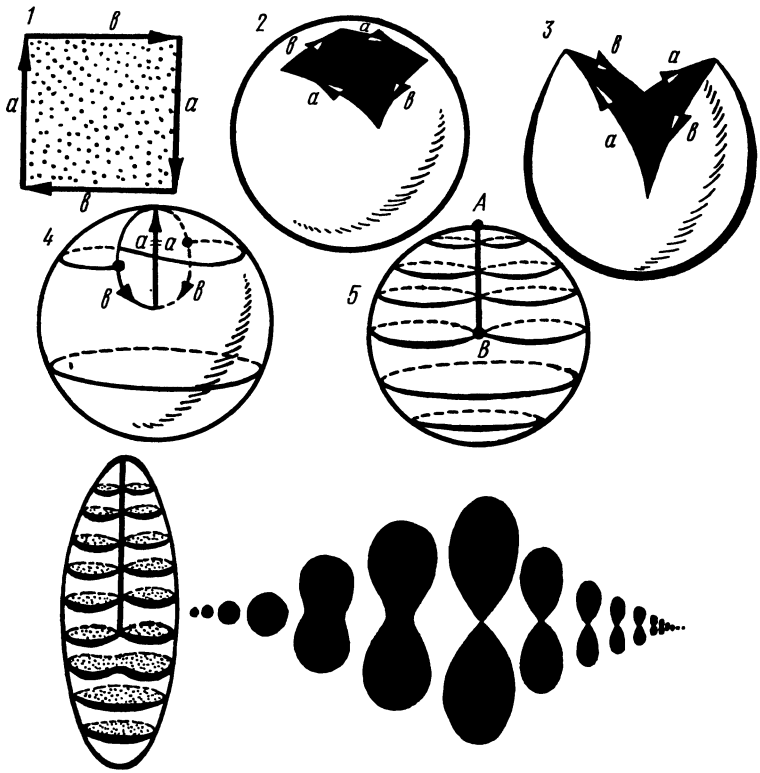

1
в
а
а
в
2
а
в
а
в
3
в
а
а
в
4
а=а
в
в
5
А
в

Рис. 90

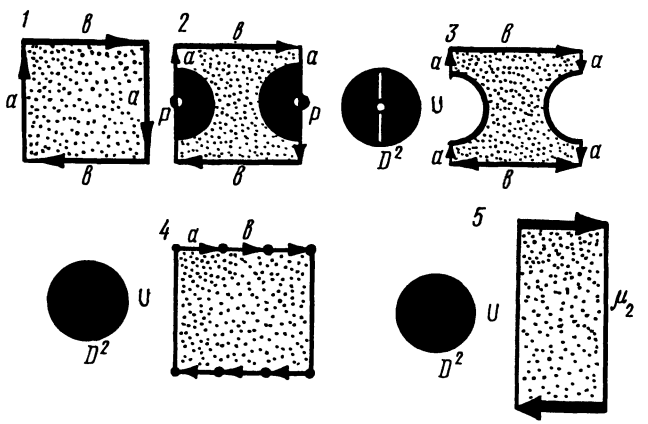

1
в
а
а
в
2
в
а
р
р
в
U
D^2
3
в
а
а
а
а
в
4
а
в
U
D^2
5
U
D^2
μ_2

Рис. 91

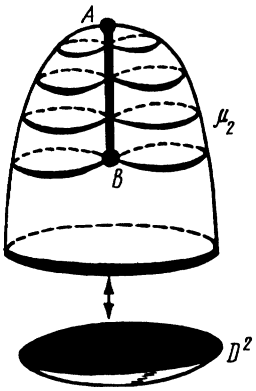


Рис. 92

удалось погрузить этим способом $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{R}^3$, однако погружение все же существует. Об этом ниже.

Лемма 1. $\mathbb{RP}^2$ *гомеоморфно склейке по общей границе диска и листа Мёбиуса.*

Доказательство на рис. 91.

Эквивалентная формулировка: если из $\mathbb{RP}^2$ удалить диск, то останется лист Мёбиуса. См. рис. 92, где оставшийся лист Мёбиуса расположен в $\mathbb{R}^3$ так, что его граничная окружность лежит в двумерной плоскости (за это приходится «платить» появлением двух особых точек A и B); такое расположение листа Мёбиуса μ_2 в $\mathbb{R}^3$ называется *скрещенным колпаком*.

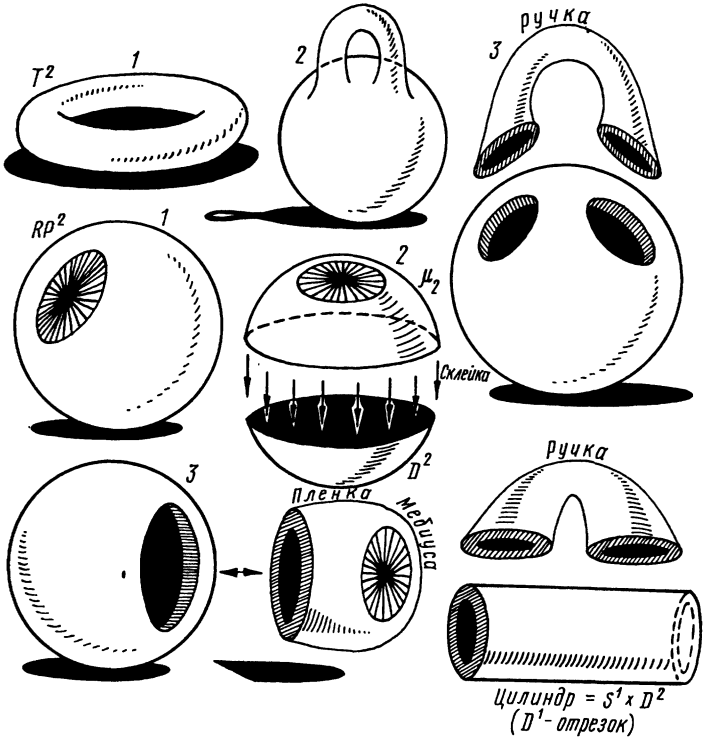


Рис. 93

Рассмотрим T^2 и $\mathbb{RP}^2$ с иной точки зрения. Применим к ним гомеоморфизм, показанный на рис. 93. Можно считать, что тор получается из S^2 выбрасыванием двух дисков и приклейкой вместо них ручки (см. рис. 93), гомеоморфной $S^1 \times D^1$. Для получения $\mathbb{RP}^2$ следует выбросить из S^2 один диск и приклеить вместо него лист Мёбиуса (см. рис. 93). Эту операцию называют приклейкой пленки Мёбиуса. При попытке реализовать эту операцию в $\mathbb{R}^3$ следует пользоваться скрещенным колпаком (см. выше). Применим

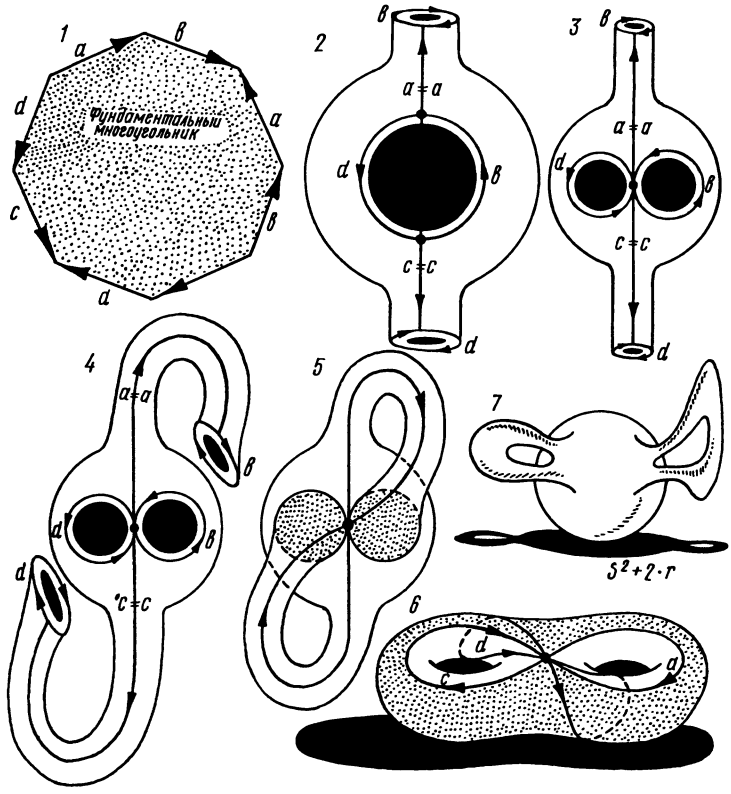


Рис. 94

описанные операции: приклейку ручки и пленки Мёбиуса по два раза. Какие получим поверхности? Рассмотрим восьмиугольник (рис. 94), на границе которого расставлены буквы a, b, c, d, образующие при последовательном обходе (по часовой стрелке) слово $W = aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$. Выполним склейки (см. рис. 94).

Полученное двумерное многообразие называется «кренделем»; оно гомеоморфно сфере с двумя ручками: $S^2 + 2r$ (через r условно обозначаем ручку).

Лемма 2. *Бутылка Клейна гомеоморфна сфере, заклеенной двумя пленками Мёбиуса.*

Доказательство см. на рис. 95. Склейка двух листов Мёбиуса по их общей границе эквивалентна вклейке этих листов в сферу с двумя дырками (заклейка цилиндра двумя пленками Мёбиуса). □

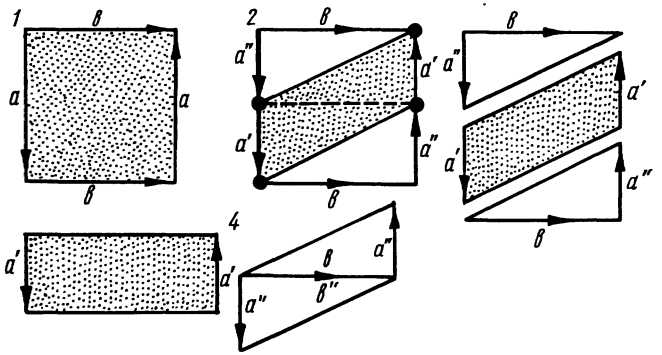


Рис. 95

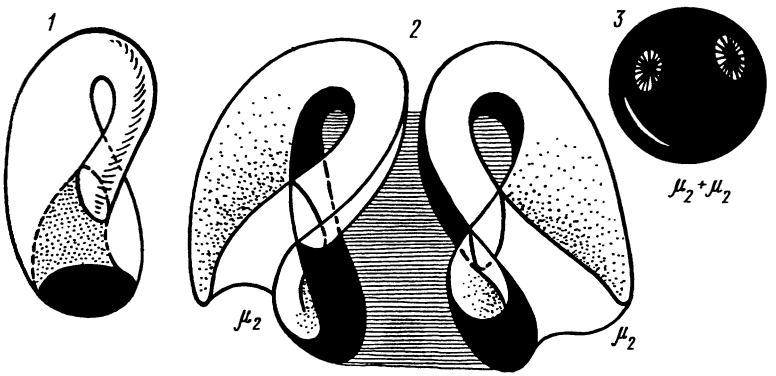


Рис. 96

Предъявим погружение $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим погружение листа Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$ в виде половинки бутылки Клейна (см. рис. 96). Дело в том, что разрезав бутылку так, как показано на рис. 96, получаем два листа Мёбиуса (см. лемму 2). В силу леммы 1

для получения $\mathbb{RP}^2$ достаточно заклеить лист Мёбиуса диском. Будем стараться осуществить эту заклейку в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы получилось погружение $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^3$. Поместим границу листа Мёбиуса в плоскость (см. рис. 97) и начнем перемещать эту плоскость параллельно самой себе по направлению к зрителю. При этом будем выполнять в ней гладкую деформацию граничной кривой листа Мёбиуса (см. рис. 97). Автоматически достраиваем исходное погружение листа Мёбиуса поверхностью, заметаемой деформирующейся окружностью. В последний момент времени окружность становится стандартно вложенной, и мы заклеиваем ее диском, что и дает искомое погружение $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{R}^3$. На рис. 97 показана структура множества точек самопересечения.

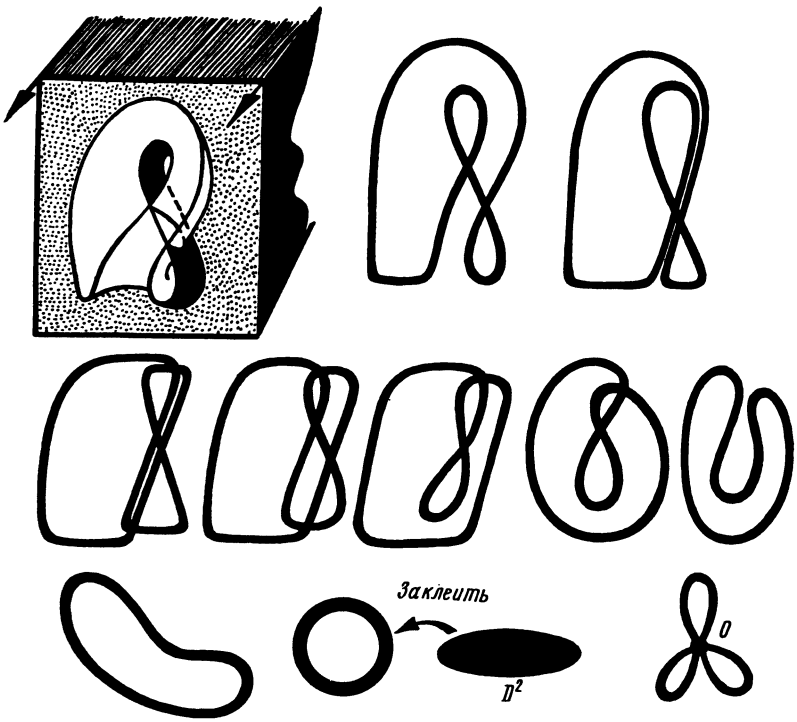


Рис. 97

Мы получили два способа построения двумерных многообразий (рис. 98):

1) к S^2 нужно приклеить k ручек;

2) к S^2 нужно приклеить s пленок Мёбиуса.

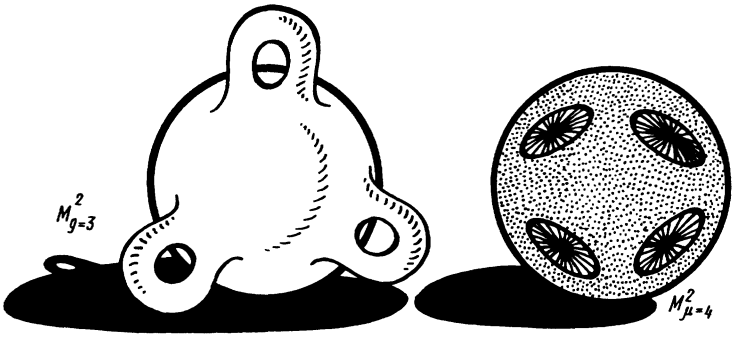


Рис. 98

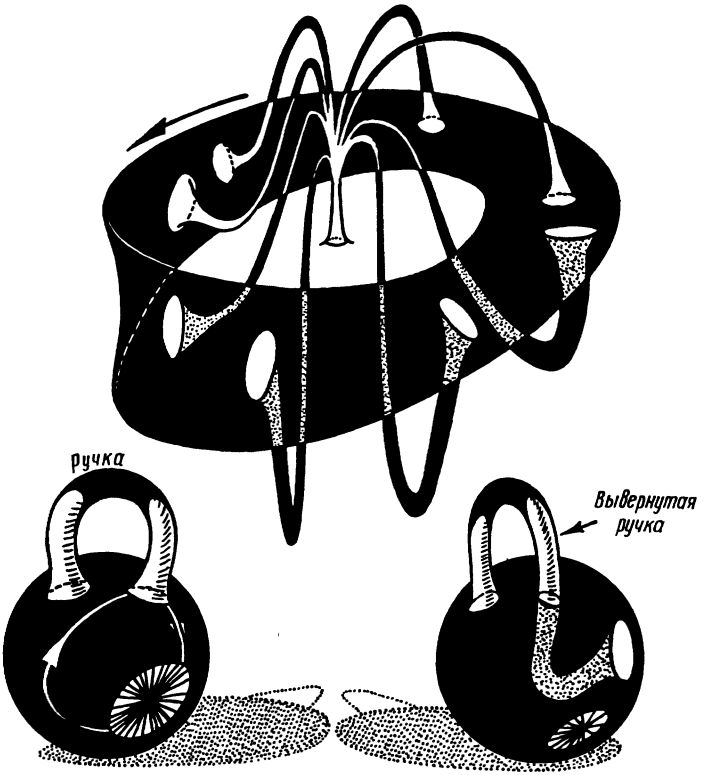


Рис. 99

Получаем две серии многообразий: $M^2_{g=k} = S^2 + kr$, $M^2_{\mu=s} = S^2 + s\mu_2$. Здесь M^2_g ориентируемы, а M^2_μ неориентируемы. На M^2_μ

всегда существуют гладкие пути, проходящие по пленке Мёбиуса, т. е. меняющие ориентацию реперов, движущихся вдоль этих путей (см. выше). Априори могли бы существовать многообразия смешанного типа, т. е. полученные из S^2 путем приклейки k ручек и s пленок Мёбиуса. Однако эта операция не дает новых многообразий. Рассмотрим $S^2 + r + \mu$. Зафиксируем одну подошву ручки r и начнем перемещать вторую подошву по направлению к пленке Мёбиуса, затем проведем подошву вдоль оси листа Мёбиуса и уйдем с него, вернувшись в прежнюю позицию. Ручка претерпит изменения в ее расположении (см. рис. 99); это положение называется вывернутой ручкой и отличается от обычной способом приклейки подошв к S^2. Но (рис. 100) сфера с вывернутой ручкой гомеоморфна бутылке Клейна, т. е. (см. лемму 2) сфере с двумя пленками Мёбиуса. Это значит, что ручка в присутствии пленки Мёбиуса превращается в две пленки Мёбиуса. В частности,

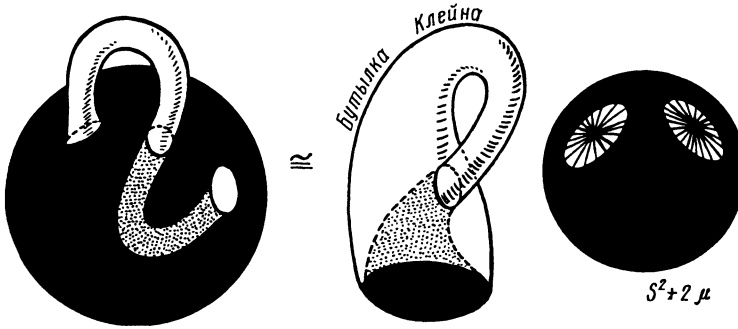


Рис. 100



Рис. 101

$S^2 + r + \mu \cong S^2 + 3\mu$. Отсюда $S^2 + kr + s\mu \cong S^2 + (2k + s)\mu$, т. е. многообразия смешанного типа гомеоморфны многообразиям неориентируемой серии.

Как было показано, все M_g^2 могут быть гладко вложены в $\mathbb{R}^3$. Докажем, что многообразия неориентируемой серии могут быть гладко погружены в $\mathbb{R}^3$. Мы доказали это для $\mathbb{RP}^2 = S^2 + \mu$. Представим, что M_μ^2 такое, как показано на рис. 101. Ясно, что M_μ^2 есть склейка нескольких экземпляров $\mathbb{RP}^2$. Погружая каждый из них по отдельности в $\mathbb{R}^3$, добиваемся погружения M_μ^2 в $\mathbb{R}^3$.

Оказывается, двумя указанными сериями мы перечислили все компактные, гладкие, замкнутые двумерные многообразия.

Теорема 2 (теорема классификации). *Любое гладкое, компактное, связное, замкнутое двумерное многообразие гомеоморфно либо сфере S^2 с k ручками, либо сфере S^2 с s пленками Мёбиуса.*

Доказательство. Разобьем его на несколько этапов. Будем говорить, что M^2 (указанного типа) снабжено триангуляцией (или триангулировано), если на нем отмечено конечное число точек $P_1, \ldots, P_N$, соединенных (в каком-то порядке) конечным числом отрезков гладких кривых γ_α так, что:

1) каждый отрезок γ_i начинается в некоторой вершине P_α и заканчивается в некоторой вершине P_β, $P_\beta \neq P_\alpha$; причем на нем нет других P_γ, кроме P_α и P_β;

2) совокупность всех этих отрезков разбивает M^2 на конечное число замкнутых треугольников с вершинами в точках из множества $\{P_\alpha\}$;

3) любые два треугольника, Δ_1 и Δ_2, полученного разбиения либо не пересекаются, либо пересекаются по одной общей вершине, либо пересекаются по одной общей стороне (т. е. по какому-то из отрезков γ_i).

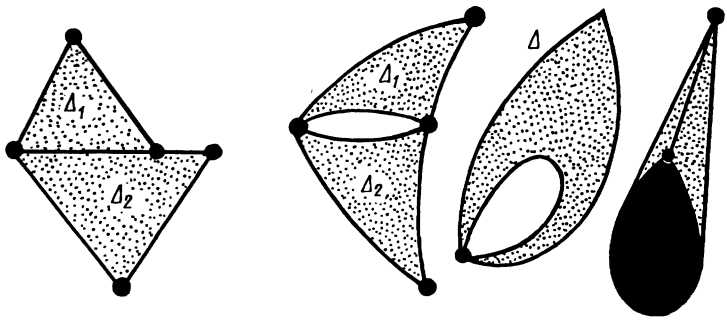


Рис. 102

Эти требования запрещают ситуации, подобные тем, которые показаны на рис. 102. Пример триангуляции см. на рис. 103. Это триангуляция $\mathbb{RP}^2$, состоящая из 24 треугольников и 13 вершин.

З а д а ч а. Постройте триангуляции тора и бутылки Клейна.

Одно и то же многообразие M^2 допускает бесконечно много триангуляций.

Лемма 3. *Любое двумерное, гладкое, компактное, связное, замкнутое M^2 допускает конечную триангуляцию.*

Доказательство будет дано в гл. 5.

Рассмотрим триангуляцию M^2 (указанного типа). Каждое ребро каждого треугольника отметим какой-либо буквой, причем будем предполагать, что разные отрезки занумерованы разными буквами. На каждой стороне поставим стрелку, указывающую ориентацию отрезка. Расстановка стрелок может считаться произвольной. Разрежем M^2 вдоль всех отрезков (сторон треугольников). Тогда M^2 рассыпается в конечное множество треугольников, у которых на каждой стороне стоит какая-то буква. Мы считаем, что, разрезая M^2 вдоль какого-то отрезка, мы ставим на обоих берегах разреза ту букву, которая стояла на отрезке (рис. 104). На каждой стороне отмечена ориентация; буква снабжена стрелкой.

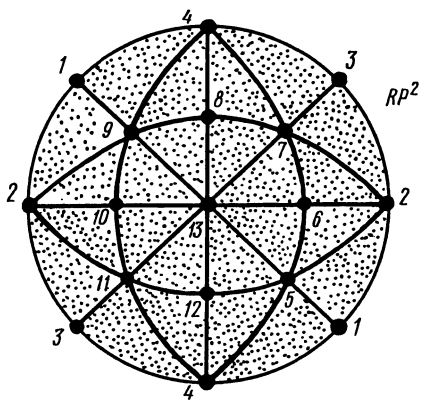


Рис. 103

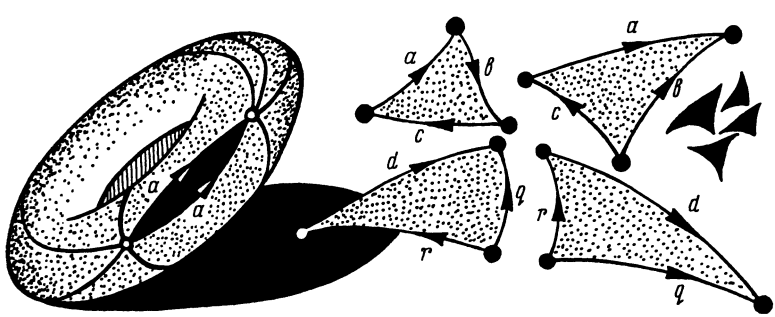


Рис. 104

Наша цель — склеить обратно все это множество треугольников, но таким образом, чтобы получился плоский многоугольник. Начнем построение с того, что выберем какой-то треугольник (обозначим его Δ_1). Рассмотрим любую его сторону, она снабжена буквой и ориентацией. Так как каждая буква входит в общий набор сторон треугольников в точности два раза, а M^2 замкнуто, т. е. не имеет края, поэтому каждый разрез имеет два берега, то найдется еще один треугольник (обозначим его Δ_2), на стороне которого стоит та же буква. Эта буква найдется на треугольнике, отличном от Δ_1, так как в противном случае исходное разбиение не было бы триангуляцией (реализовывался бы один из случаев, изображенных на рис. 102). Можно склеить Δ_1 и Δ_2 по этой общей стороне, совмещая направления стрелок. Получается плоская фигура, на границе которой расставлены буквы со стрелками. Снова берем какую-то букву; снова найдется Δ_3, на одной из сторон которого стоит та же буква. Приклеиваем Δ_3 и т. д. Процесс закончится в тот момент, когда все треугольники будут исчерпаны.

Мы склеим все треугольники, так как если бы в какой-то момент оказалось, что никакая граничная буква получающейся области не появляется среди букв, оставшихся на еще неприсоединенных треугольниках, то, склеив все попарные буквы, вернемся к исходному M^2 (склейка ликвидирует разрезы), но в силу предположения это M^2 было бы несвязно, что противоречит условиям. Итак, мы исчерпаем все треугольники и получим плоский многоугольник W. То, что W плоский, следует из того, что каждый раз мы приклеивали к плоской области плоский треугольник только по одной стороне.

Перечислим свойства многоугольника W (он определен неоднозначно, даже при фиксированной триангуляции): 1) W плоский; 2) граница ∂W состоит из четного числа ребер, на каждом из которых поставлена буква и стрелка; каждая буква входит в границу два раза.

Фиксируем на W ориентацию и, совершив обход границы начиная с произвольной вершины P, последовательно выпишем все буквы. Если направление обхода совпадает со стрелкой, отвечающей букве, то буква войдет в слово в степени $+1$; в противном случае запишем букву в степени -1. Вернувшись в P, получим слово W вида $W = a_{i_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_\alpha = \pm 1$; это слово однозначно задает многоугольник W (см. рис. 105).

Мы сопоставили каждому M^2 (в некоторой триангуляции) слово W (неоднозначно). Слово W можно рассматривать как код M^2, и это кодирование неоднозначно: одному и тому же M^2 отвечает

бесконечное число кодов. Наша цель — доказать, что любое M^2 (указанного типа) гомеоморфно либо M_g^2 либо M_μ^2. Для этого перестроим многоугольник с помощью операций, соответствующих некоторым гомеоморфизмам исходного M^2 (эти операции не будут сохранять триангуляцию; ее роль закончилась в тот момент, когда мы сопоставили M^2 его код — слово W). Если выполнить требуемые склейки на ∂W, то получим исходное многообразие.

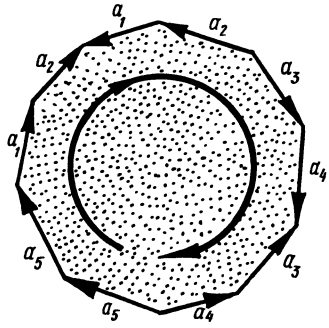


Рис. 105. $W = a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_4a_3^{-1}a_4^{-1}a_5a_5$

Лемма 4. *Слово W можно перестроить так (с помощью гомеоморфизма M^2), что все вершины многоугольника W склеятся в одну точку.*

Доказательство. Разобьем вершины W на классы эквивалентных вершин. Будем считать две вершины эквивалентными, если они склеиваются в одну точку при выполнении отождествлений на ∂W. Если W имеет только один класс эквивалентных вершин, то все доказано. Пусть W содержит по крайней мере два класса эквивалентных вершин: $\{P\}$ и $\{Q\}$. Можно считать, что существует ребро a такое, что его начало принадлежит $\{P\}$, а конец $\{Q\}$. Выполним перестройку W с помощью гомеоморфизма M^2 (рис. 106). Напомним, что каждая буква (в данном случае c) входит в W ровно два раза. Результат перестройки — многоугольник W',

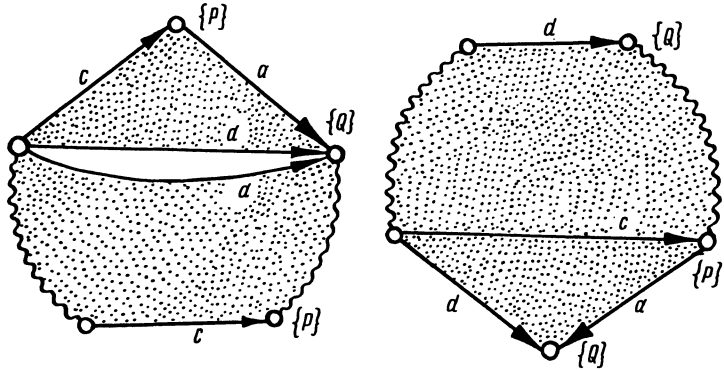


Рис. 106

причем налицо следующие изменения в $\{P\}$ и $\{Q\}$: в $\{P\}$ стало на одну вершину меньше, а в $\{Q\}$ — на одну вершину больше. Взяв

еще одну вершину из $\{P\}$, тоже можем уничтожить ее с помощью какого-либо класса (не обязательно с помощью $\{Q\}$), и так будем уменьшать число вершин в $\{P\}$, пока в $\{P\}$ не останется одна вершина. Последний шаг: так как в $\{P\}$ одна вершина, то соседние ребра имеют вид a, a^{-1} (см. рис. 107). □

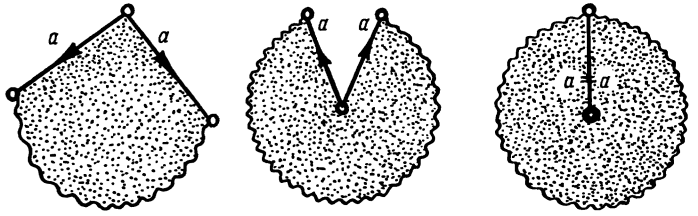


Рис. 107

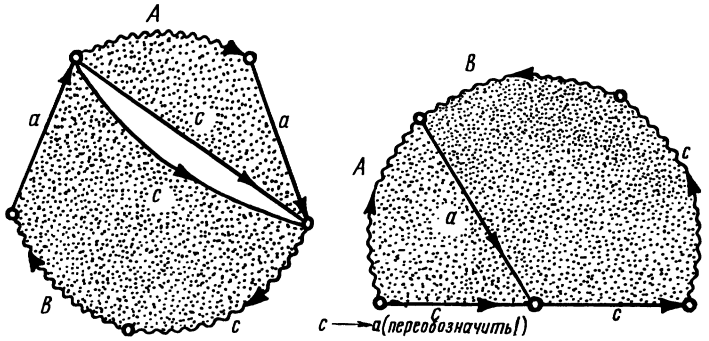


Рис. 108

Лемма 5. *Пусть* $W = Abaa^{-1}cB$. *Тогда существует гомеоморфизм* M^2, *переводящий* W *в слово* $AbcB$.

Доказательство. Сокращение aa^{-1} выполняется так же, как уничтожение последней вершины в лемме 4. □

Здесь через A и B обозначены те части W, которые не меняются при перестройке.

Лемма 6. *Если* $W = BaAaC$, *то существует гомеоморфизм* M^2 *такой, что* W *переходит в* $W' = BA^{-1}aaC$.

Доказательство см. на рис. 108.

Лемма 7. *Если* $W = AaRbPa^{-1}Qb^{-1}B$, *то существует гомеоморфизм* M^2, *переводящий* W *в* $W' = AQPaba^{-1}b^{-1}RB$.

Доказательство см. на рис. 109.

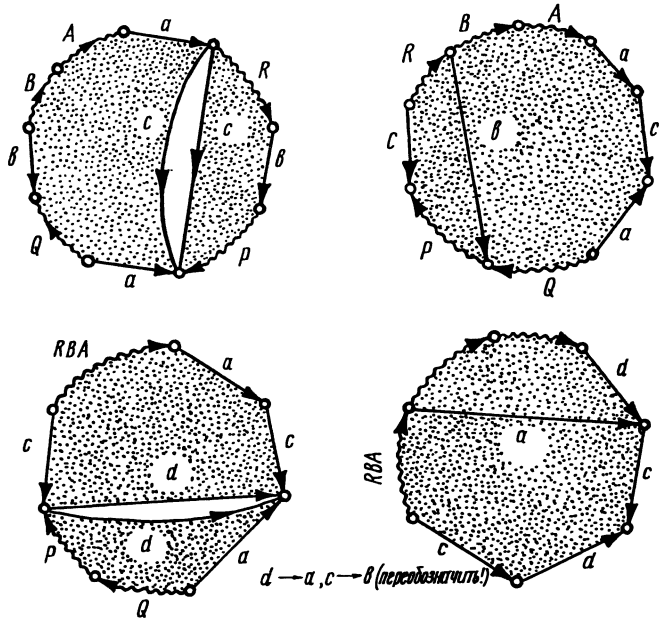


Рис. 109

Лемма 8. *Если слово W (над которым выполнены все предыдущие операции) содержит пару букв a и a^{-1}: $W = AaBa^{-1}C$, причем $B \neq \varnothing$, то существует пара b, b^{-1} такая, что $W = AaDbQa^{-1}Rb^{-1}T$, где $B = DbQ$, $C = Rb^{-1}T$, т. е. для любой пары a, a^{-1} (где $B \neq \varnothing$) существует «зацепленная» с ней пара b, b^{-1}.*

Доказательство. Допустим противное: пусть для любой $b \in B$ соответствующая ей буква b^{ε} (где $\varepsilon = \pm 1$) попадает в то же самое слово B. Выполним склейку W по a. Результат см. на рис. 110. Итак, все вершины W разбиваются по крайней мере на два класса неэквивалентных вершин. Так как над W выполнена операция леммы 4, то получили противоречие. Осталось доказать, что $\varepsilon = -1$. Если бы $\varepsilon = +1$, то получили бы противоречие с видом W, установленным в силу леммы 6. □

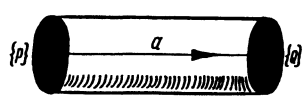


Рис. 110

Замечание. Цепочка предыдущих лемм такова, что каждая лемма сохраняет свойства W, полученные с помощью предыдущих лемм.

Итак, W приведено к произведению выражений вида $aba^{-1}b^{-1}$ (*коммутаторы*) и cc (*квадраты*). Это следует из того, что выражения $-a-a-$ приводятся к $-aa-$, а вида $-a-a^{-1}-$ приводятся к виду $-aba^{-1}b^{-1}-$. Осталось разобрать тот случай, когда в слове встречаются как коммутаторы, так и квадраты.

Лемма 9. *Если* $W = Aaba^{-1}b^{-1}BccQ$, *то существует гомеоморфизм, приводящий* W *к виду*

$$W' = Mp^2q^2d^2N = Aabd^{-1}B^{-1}bad^{-1}Q.$$

Доказательство см. на рис. 111. Эта операция переводит W в слово $\widetilde{W} = Aabd^{-1}B^{-1}bad^{-1}Q$. Осталось собрать вместе три квадрата, что можно сделать леммой 6. □

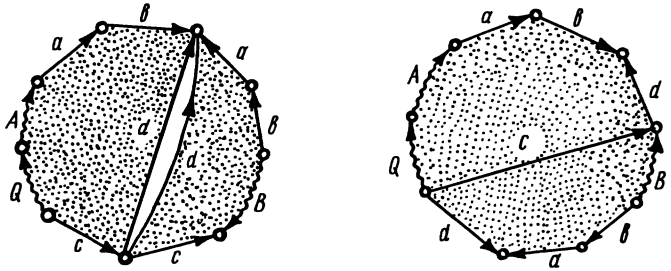


Рис. 111

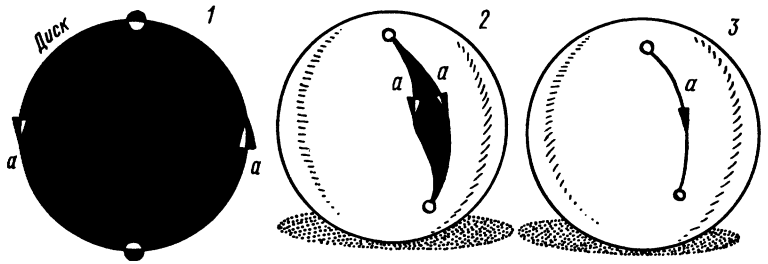


Рис. 112. $W = aa^{-1}$ — не триангуляция

Эта лемма есть формальное доказательство того, что многообразия смешанного типа гомеоморфны неориентируемым многообразиям второй серии (см. выше).

Комбинируя доказанные леммы, получаем:

Лемма 10. *Пусть W — один из кодов M^2. Тогда существует гомеоморфизм M^2, приводящий W к одному из следующих видов*:

1) $W = aa^{-1}$;
2) $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$;
3) $W = c_1 c_1 c_2 c_2 \dots c_k c_k$.

Какие многообразия отвечают этим трем типам? В случае 1) ясно, что M^2 гомеоморфно сфере (рис. 112). В случае 2) M^2 представляется в виде S^2 с g ручками. Число g называется *родом поверхности*. В самом деле, при $g = 1$ слово $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ задает тор (см. выше); при $g = 2$ слово $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ задает крендель (см. выше). Далее по индукции. В случае 3) M^2 гомеоморфно сфере с k пленками Мёбиуса. В самом деле, если $k = 1$, то $W = c_1 c_1$ определяет $\mathbb{RP}^2$ (см. выше); если $k = 2$, то $W = c_1 c_1 c_2 c_2$ определяет бутылку Клейна и т. д. Итак, теорема 2 доказана. □

Существуют и другие удобные представления M^2.

Теорема 3. *Любое гладкое, компактное, связное, замкнутое, двумерное многообразие M^2 можно представить в виде:*

$$W = a_1 a_2 \dots a_N a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{N-1}^{-1} a_N^{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = -1$ тогда и только тогда, когда $M^2 = M_g^2$ (ориентируемо), в этом случае N четно; и $\varepsilon = +1$ (N — любое) тогда и только тогда, когда $M^2 = M_\mu^2$ (неориентируемо).

Доказательство. Отметим, что такое представление M^2 называется канонической симметричной формой. То, что W путем описанных элементарных операций приводится к одному из видов (1), (2), следует из предыдущего. Рассмотрим для определенности $\varepsilon = -1$. Надо доказать, что представление, описанное в настоящей теореме, возможно для любого M_g^2. Далее см. рис. 113. Так как $N = 2g$ четно, то W приводится к виду $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, где g любое, что и требовалось доказать. Аналогично разбирается и случай $\varepsilon = +1$ (проверьте!). □

Мы не располагаем здесь аппаратом для доказательства того, что многообразия M_g^2 не гомеоморфны друг другу при $g_1 \neq g_2$, и что M_μ^2 не гомеоморфны при $\mu_1 \neq \mu_2$, а также, что M_g^2 и M_μ^2 не гомеоморфны. Мы сообщаем эти факты без доказательства.

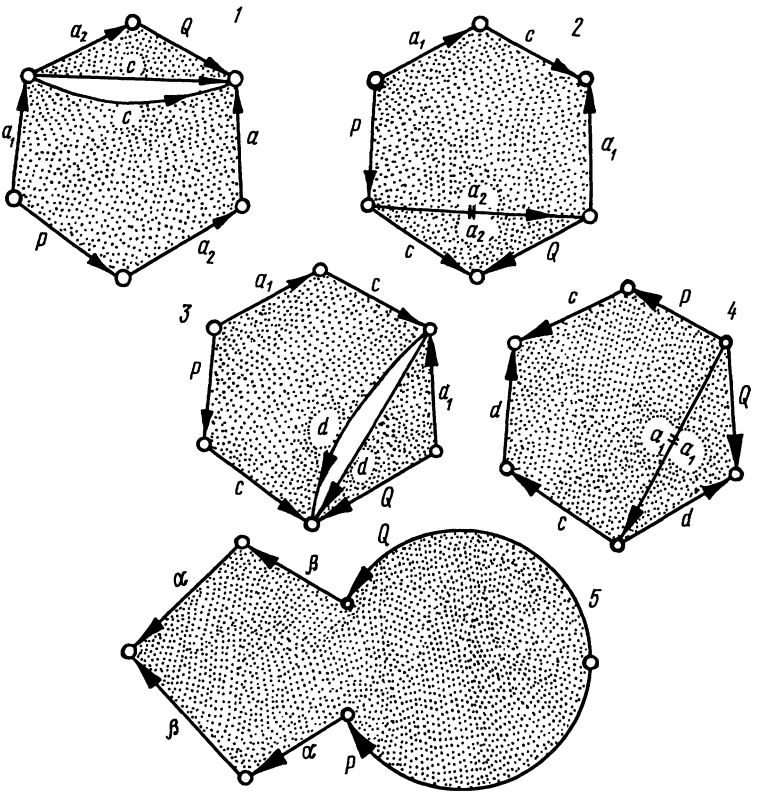


Рис. 113

§ 6. Римановы поверхности алгебраических функций

Напомним простые свойства комплекснозначных функций, которые нам потребуются. Отнесем $\mathbb{C}^n$ к координатам $z^1, \ldots, z^n$. Если $\gamma(t) = (z^1(t), \ldots, z^n(t))$ — гладкая кривая, то

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{dz^k}{dt}\frac{d\overline{z^k}}{dt}}\, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{dx^k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^k}{dt}\right)^2}\, dt,$$

где $dz^\alpha = dx^\alpha + i dy^\alpha$. Для $n = 1$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial \bar z}=\frac{\partial \bar z}{\partial z}=0.$$

Отождествим $\mathbb{C}^n\{z^k\}$ и $\mathbb{R}^{2n}\{x^k, y^k\}$. Тогда, как уже отмечалось, любой полином $f(z^1, \ldots, z^n)$ можно записать в переменных $\{x^k, y^k\}$: $g(x^1, y^1; \ldots; x^n, y^n)$. Обратно: любой полином $g(x^1, y^1; \ldots; x^n, y^n)$ можно записать в переменных $\{z^k, \overline{z^k}\}$: $f(z^1, \overline{z^1}; \ldots; z^n, \overline{z^n})$.

Лемма 1. *Полином $f(z^1, \overline{z^1}; \ldots; z^n, \overline{z^n})$ не зависит от $\overline{z^\alpha}$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial \overline{z^\alpha}}\equiv 0$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Проверим, что если $\frac{\partial f}{\partial \overline{z^\alpha}}\equiv 0$, то $f(z^1, \overline{z^1}; \ldots; z^n, \overline{z^n})$ не содержит переменной $\overline{z^\alpha}$. Допустим противное и представим f в виде полинома по степеням переменной $\overline{z^\alpha}$: $f=\omega\cdot(\overline{z^\alpha})^p+\ldots$, где коэффициенты $\omega, \ldots$ не зависят от $\overline{z^\alpha}$. Пусть p — максимальная степень $\overline{z^\alpha}$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial \overline{z^\alpha}}=p\cdot\omega(\overline{z^\alpha})^{p-1}\ldots$, что противоречит условию. □

Напомним, что $f(z^1, \overline{z^1}; \ldots; z^n, \overline{z^n})$ называется *аналитической*, если $\frac{\partial f}{\partial \overline{z^\alpha}}\equiv 0$, $1\leqslant\alpha\leqslant n$. При $n=1$ имеем $\mathbb{R}^2(x, y)=\mathbb{C}^1(z)=\mathbb{R}^2(z; \bar z)$, $f(x, y)=g(z, \bar z)=u(x, y)+iv(x, y)$. Если $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$, то

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)+i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)=0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$u_{xx}=v_{xy}=-u_{yy},\quad u_{xx}+v_{yy}=0,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar z}.$$

Нам потребуется комплексный аналог теоремы о неявной функции. Доказательство содержится в курсе теории функций комплексного переменного.

Предложение 1. *Пусть $f(z, w)$ — комплексно аналитическая функция на $\mathbb{C}^2(z, w)$. Рассмотрим уравнение $f(z, w)=0$ относительно переменной w, и пусть в некоторой точке $P_0\in\{f=0\}$ выполнено соотношение $\frac{\partial f}{\partial w}\neq 0$.*

Тогда существует открытая окрестность $U(P_0)$ точки P_0 в $\mathbb{C}^2$, такая, что в ней существует функция $w=g(z)$ со свойствами:

1) *$g(z)$ — комплексно аналитическая,*

2) *функция* $w=g(z)$ *— решение уравнения* $f(z, w)=0$ *в окрестности* $U(P_0)$, *т. е.* $f(z, g(z))=0$ *в* $U(P_0)$, *и это решение единственно в* $U(P_0)$.

Геометрически удобно рассматривать решение $w=g(z)$ в виде графика (рис. 114).

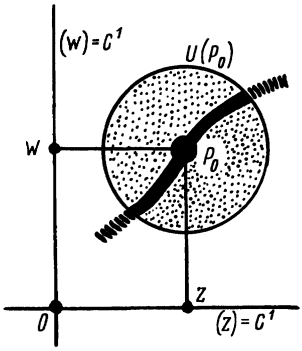


Рис. 114

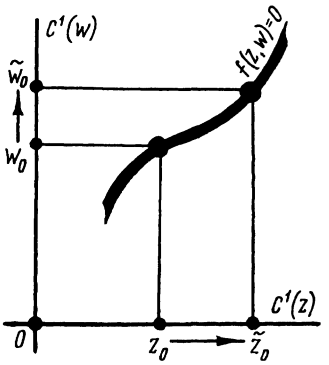


Рис. 115

Определение. Пусть $f(z, w)$ — полином по переменным z, w в $\mathbb{C}^2$, и пусть уравнение $f(z, w)=0$ разрешимо относительно w в некоторой открытой окрестности $U(P_0)$ (например, пусть $\frac{\partial f}{\partial w}\neq 0$). Тогда функция $w=g(z)$, являющаяся решением этого уравнения, называется *алгебраической*, а совокупность точек (z, w) таких, что $f(z, w)=0$ (т. е. нулевая поверхность уровня функции $f(z, w)$), называется *римановой поверхностью для алгебраической функции* $w=g(z)$ в тех точках, где определена $w=g(z)$.

Отметим, что если в точке $P_0=(z_0, w_0)$ имеем $\frac{\partial f}{\partial z}\neq 0$, то в $U(P_0)$ существует решение $z=\varphi(w)$, т. е. уравнение $f=0$ можно разрешить относительно z. При этом $\varphi(w)$ удовлетворяет условиям 1), 2) предложения 1. Итак, условие локальной разрешимости уравнения $f(z, w)=0$ имеет вид $\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w}\right)\neq 0$, где $\operatorname{grad} f$ — комплексный градиент функции f.

Запишем полином $f(z, w)$ в общем виде, разложив его, например, по степеням z: $f=a_0(w)z^n+a_1(w)z^{n-1}+\ldots$ Здесь коэффициенты $a_k(w), 0\leqslant k\leqslant n$, — полиномы от w. Сразу отметим свойство римановых поверхностей алгебраических функций: поверхности некомпактны и уходят на бесконечность в $\mathbb{C}^2$. (Мы считаем, что f отличен от тождественного нуля.) В самом деле, фиксируем точку

$w_0 \in C^1(w)$; возникает уравнение $a_0(w_0)z^n + a_1(w_0)z^{n-1} \ldots = 0$ относительно z; по известной теореме алгебры оно всегда имеет комплексный корень, т. е. существует точка z_0 такая, что $f(z_0, w_0) = 0$. Поскольку w_0 можно устремить к бесконечности по $\mathbb{C}^1(w)$, то поверхность $f(z, w) = 0$ также уходит на бесконечность (рис. 115). Так как имеем дело с полиномом, то, конечно, можно было бы перейти от неоднородных координат в $\mathbb{CP}^2$ к однородным координатам x^1, x^2, x^3, положив $z = \frac{x^1}{x^3}$, $w = \frac{x^2}{x^3}$. Тогда $f(z, w) = \sum a_{pq} w^p z^q$ превратится в однородный полином $\sum a_{pq}(x^1)^q (x^2)^p (x^3)^{s-(p+q)}$, где s — наибольшая степень мономов $w^p z^q$; $\deg(w^p z^q) = p + q$. Так можно компактифицировать риманову поверхность, перенеся ее из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{CP}^2$. Поскольку уравнение $g(x^1, x^2, x^3) = 0$ на $\mathbb{CP}^2$ полиномиально, от эта поверхность уровня в $\mathbb{CP}^3$ компактна. Мы не будем вдаваться в детали этой компактификации, так как процедура эта нетривиальна и не будет нам нужна для дальнейшего.

Изучим, как устроены с топологической точки зрения римановы поверхности. С вещественной точки зрения, уравнение $f(z, w) = 0$ распадается на два: $\mathrm{Re}(f) = 0$ и $\mathrm{Im}(f) = 0$ в $\mathbb{R}^4$, т. е. в точках общего положения множество $f = 0$ — двумерная (вещественная) поверхность.

Теорема 1. *Пусть полином $f(z, w)$ имеет вид $f = w^q - P_n(z)$; пусть полином $P_n(z)$ не имеет кратных корней. Тогда уравнение $f(z, w) = 0$ определяет гладкое двумерное (над $\mathbb{R}$) подмногообразие в $\mathbb{C}^2(z, w)$.*

Доказательство. Пусть точка P_0 принадлежит множеству $\{f = 0\}$ и имеет координаты (z_0, w_0), где $w_0 \neq 0$. Тогда $\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{P_0} = q w_0^{q-1} \neq 0$ в P_0, т. е. по теореме о неявной функции (см. предложение 1) поверхность $\{f = 0\}$ является в некоторой окрестности P_0 гладким двумерным подмногообразием — графиком алгебраической функции $w = g(z)$. Решение $w = g(z)$ в нашем случае имеет вид $w = \sqrt[q]{P_n(z)}$. Осталось рассмотреть точки $P_0 = (z_0, 0)$.

Но $\operatorname{grad} f(P_0) = \left(-\frac{dP_n(z_0)}{dz}; 0\right) \neq 0$. В самом деле, если бы $\frac{d}{dz} P_n(z_0) = 0$, то в точке $(z_0, 0)$ имели бы $P_n(z_0) = 0$ и $\frac{d}{dz} P_n(z_0) = 0$. Отсюда z_0 — кратный корень $P_n(z)$, что противоречит условию. Итак, $\operatorname{grad} f(P_0) \neq 0$, и в некоторой открытой окрестности U точки $(z_0, 0)$ поверхность $\{f = 0\}$ задается гладким графиком $w = g(z)$, где $g(z)$ — аналитическая функция. □

Познакомимся с основными свойствами алгебраических функций.

1) Алгебраические функции обычно являются многозначными, т. е. некоторым значениям аргумента z отвечает несколько значений функции $w=g(z)$. Пример: $w=\sqrt[q]{z^n}$, где q и n взаимно просты. Простейший случай: $w=\sqrt{z}$, когда каждому z_0 отвечает ровно два значения $w=\pm\sqrt{z_0}$, если $z_0\neq 0$. Аналогично, многозначной может быть и функция $z=\alpha(w)$. Линейная функция $w=az+b$ однозначна.

Многозначность $w=g(z)$ можно прокомментировать так. Рассмотрим ортогональную проекцию π: $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^1(z)$, $\pi(z, w)=(z, 0)$; при этом прообразом любой точки $z_0\in\mathbb{C}^1(z)$ является комплексная прямая $H(z_0)$, параллельная $\mathbb{C}^1(w)$; риманова поверхность $\Gamma=\{f=0\}$, рассматриваемая как график $w=g(z)$, также проектируется на $\mathbb{C}^1(z)$; при этом прообразом любой точки $z_0\in\mathbb{C}^1(z)$ при проекции π: $\Gamma\to\mathbb{C}^1(z)$ являются в точности все значения функции $w=g(z)$ в точке z_0 (рис. 116). Поскольку функция $w=g(z)$ алгебраическая (т. е. f — полином), то образом поверхности Γ при проекции π: $\Gamma\to\mathbb{C}^1(z)$ является вся плоскость $\mathbb{C}^1(z)$, т. е. для любого $z_0\in\mathbb{C}^1(z)$ существует по крайней мере одно решение полиномиального уравнения $f(z_0, w)=0$.

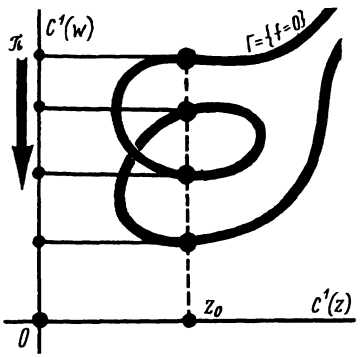


Рис. 116

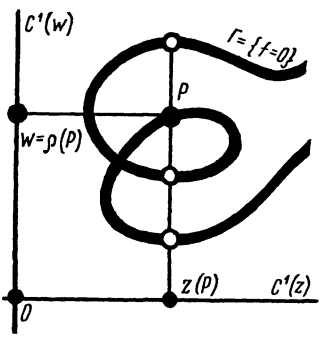


Рис. 117

Сделаем замену переменной: запишем $w=g(z)$ в виде $w=\rho(P)$, где $P\in\Gamma$ — переменная точка на поверхности Γ (рис. 117). Ясно, что $w=\rho(P)$ — однозначная функция, так как каждому значению аргумента $P\in\Gamma$ отвечает в точности одно значение функции $w=\rho(P)$. Мы добились того, что алгебраическая функция (в новых переменных) стала однозначной, но за это пришлось «заплатить» значительным усложнением области изменения аргумента функции: вместо $\mathbb{C}^1(z)$, где менялась переменная z, мы вынуждены теперь менять аргумент P на поверхности Γ — двумерном многообразии.

Итак, риманова поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$ алгебраической функции $w = g(z)$ является областью однозначности этой функции. Это свойство иногда кладется в основу другого определения римановой поверхности, эквивалентного нашему.

2) Так как для каждого $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ существует, вообще говоря, много значений $w_i = g(z_0)$ (их число равно числу разных корней полиномиального уравнения $f(z_0, w) = 0$), то в открытой окрестности каждого $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ можно определить набор непрерывных (даже гладких) функций $w = \{\varphi_i(z)\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, где k — степень полинома $a_0(z)w^k + a_1(z)w^{k-1} + \ldots + a_k(z) = f(z, w)$ по переменной w. Каждая из них описывает изменение какого-то одного корня уравнения $f(z, w) = 0$ при изменении z. Функции $\varphi_i(z)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, можно продолжать на все значения переменной z; при этом в некоторых точках эти продолженные функции могут совпадать и, более того, меняться местами.

Функции $\varphi_i(z)$ называются *ветвями алгебраической функции* $w = g(z)$. Каждая ветвь описывает поведение какого-то корня уравнения $f(z, w) = 0$; мы считаем z параметром в уравнении $f(z, w) = 0$, а w — искомой величиной.

Над каждым $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ «висят» значения функции $w = g(z)$, являющиеся корнями уравнения

$$f(z_0, w) = a_0(z_0)w^k + a_1(z_0)w^{k-1} + \ldots + a_k(z_0) = 0.$$

Из теоремы о неявной функции следует, что каждая ветвь определяет (почти во всех точках) гладкое, даже комплексно аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^2$, так как $\varphi_i(z)$ — (локально) комплексно аналитическая функция.

3) Сопоставим каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$ число $k(z_0)$, равное числу различных корней уравнения $f(z_0, w) = 0$. Ясно, что $k(z_0) \leqslant k$. Если все корни уравнения $f(z_0, w) = 0$ простые, то $k(z_0) = k$; если же есть кратные корни, то $k(z_0) < k$. Число $k(z_0)$ равно числу различных значений $w = g(z)$ в точке z_0. Точки z_0, где $k(z_0) < k$, характеризуются также тем, что в них некоторые ветви $\varphi_i(z)$ функции $w = g(z)$ сливаются вместе, уменьшая число различных значений $\{\varphi_i(z)\}$ над z_0 (рис. 118).

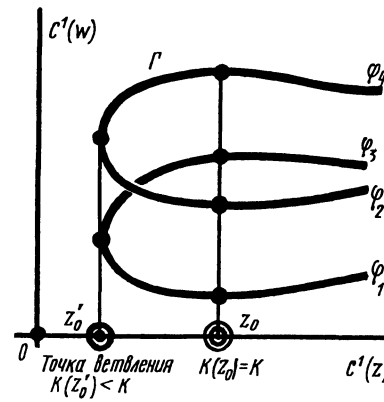


Рис. 118

Будем считать, что $f(z, w) = w^q - P_n(z)$, и полином $P_n(z)$ не имеет кратных корней. В силу теоремы 1 поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$ — комплексно аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^2$. Точки $z_0 \in \mathbb{C}^1(z)$, для которых $k(z_0) < k$, назовем *точками ветвления алгебраической функции* $w = g(z)$ (об этом термине см. ниже). В случае $w = \sqrt[q]{P_n(z)}$ точками ветвления (в конечной части $\mathbb{C}^1(z)$, т. е. в плоскости $\mathbb{C}^1(z)$, не пополненной «бесконечностью») являются корни полинома $P_n(z)$; причем если $z_1, \ldots, z_n$ — корни $P_n(z)$ (все они простые), то $k(z_\alpha) < k = q = \deg_w(w^q - P_n(z))$, так как $k(z_\alpha) = 1$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. Точку «бесконечность» пока не рассматриваем. Итак, все точки ветвления функции $w = \sqrt[q]{P_n(z)}$ изолированы.

4) Точки ветвления (в конечной части $\mathbb{C}^1(z)$) обладают таким свойством: в них сливаются несколько ветвей функции $w = g(z)$. Так как точка ветвления изолирована, то можно считать ее центром достаточно малого диска D^2, в котором нет других точек ветвления, а потому $k(z) = k$ при $z \in D^2$, $z \neq z_0$. Рассмотрим окружность с центром в z_0, расположенную в D^2; совершим обход по ней вокруг z_0. Тогда ветви функции $g(z)$, вообще говоря, меняются местами и, обходя нужное число раз вокруг z_0, можно перейти с ветви на ветвь.

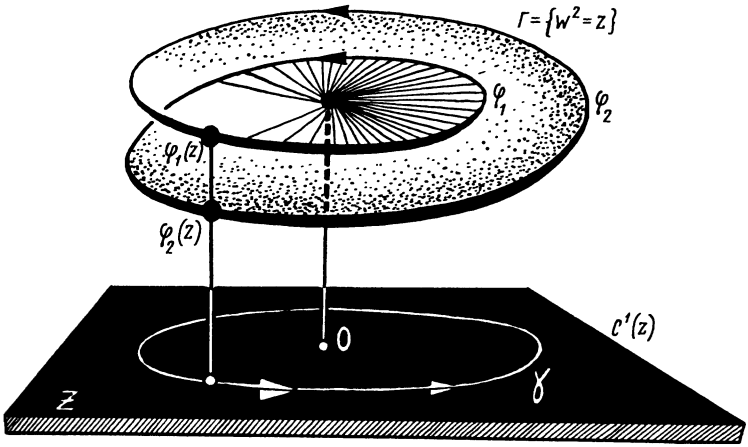


Рис. 119

Разберем пример. Пусть $f = w^2 - P_n(z)$, где $P_n(z)$ не имеет кратных корней; пусть $n = 1$, т. е. $f = w^2 - z$. Тогда $w = g(z) = \sqrt{z}$. Ясно, что $k = 2$, $w = \{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$, где $\varphi_1(z_0) = +\sqrt{z_0}$, $\varphi_2(z_0) = -\sqrt{z_0}$; если $z = re^{i\varphi}$, то и $\varphi_1(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$, $\varphi_2(z) = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$, $\varphi_1(z) \neq \varphi_2(z)$ при $z \neq 0$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. Точка $0 \in \mathbb{C}^1(z)$ — единственная точка

ветвления в конечной части плоскости. Обе ветви — гладкие функции. При обходе вокруг 0 (r постоянно, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) ветви $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ меняются местами:

$$\varphi_1(z) = \sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}} \to \sqrt{r}e^{\frac{i(\varphi+2\pi)}{2}} = -\sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}} = \varphi_2(z).$$

Условно эта схема перестановки изображена на рис. 119. На самой римановой поверхности особых точек нет, так как Γ — гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}^2$.

Изучим глобальные топологические свойства римановых поверхностей. Ограничимся случаем $f(z, w) = w^2 - P_n(z)$, где $P_n(z)$ не имеет кратных корней. Поверхность Γ задается в $\mathbb{C}^2$ как график $w = g(z) = \sqrt{P_n(z)}$. Изучим поведение Γ на бесконечности. Следует пояснить, что мы будем понимать под «бесконечностью». Имеется несколько разных способов придать этому содержательный смысл. Эта задача называется *задачей компактификации* и связана с более общим вопросом: как можно делать из некомпактных открытых многообразий компактные многообразия, «присоединяя край». В общем случае, эта задача не имеет универсального решения, так как понятие компактификации зависит от нужд данной задачи — одно и тоже открытое многообразие можно компактифицировать различными способами (если оно вообще допускает компактификацию).

Рассмотрим прямую $\mathbb{C}^1(z)$ и пополним ее бесконечно удаленной точкой, т. е. присоединим к плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ бесконечность; при этом $\mathbb{C}^1 \cup \infty$ превращается в S^2, которую будем называть *пополненной комплексной прямой*. Имеется канонический способ отождествить пополненную комплексную прямую с одномерным пространством $\mathbb{CP}^1$. Выберем для $\mathbb{CP}^1$ модель $(\lambda z^1, \lambda z^2)$, где $\lambda \neq 0$; рассмотрим отображение

$$h\colon (\lambda z^1, \lambda z^2) \to \frac{\lambda z^1}{\lambda z^2} = \frac{z^1}{z^2} \in S^2 = \mathbb{C}^1(z) \cup \infty.$$

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \rho$, то можно считать, что $a = 1$, $c = 1$, т. е. $b = d = \rho^{-1}$ и $(1, \rho^{-1}) = (1, \rho^{-1})$, т. е. в «конечных» точках расширенной плоскости $\mathbb{R}^2 \cup \infty = S^2$ отображение h — гомеоморфизм; добавление точки ∞ сохраняет это свойство h. Итак, иногда можно считать, что $\mathbb{CP}^1 \cong \cong S^2$. Напомним, что отождествление пополненной плоскости с S^2 можно производить с помощью стереографической проекции.

Рассмотрим теперь прямое произведение $S^2 \times S^2$. В этом четырехмерном многообразии можно ввести комплексную структуру, так как $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$, т. е. S^2 — комплексное многообразие. Фиксируем на каждой сфере $S^2(z)$ и $S^2(w)$ точки ∞_z и ∞_w —

бесконечно удаленные точки. Будем считать, что $S^2(z) = \mathbb{C}^1(z) \cup \infty_z$, $S^2(w) = \mathbb{C}^1(w) \cup \infty_w$. Тогда в $S^2(z) \times S^2(w)$ выделена точка (∞_z, ∞_w), через которую проходят два экземпляра сферы: $\infty_z \times S^2(w)$; $S^2(z) \times \infty_w$. Если мы выбросим этот букет двух сфер (склеенных в точке (∞_z, ∞_w)), то получим $\mathbb{R}^4$, отождествленное с $\mathbb{C}^2(z, w)$ (рис. 120). Ясно, что

$$(S^2(z) \times S^2(w)) \setminus [(S^2(z) \times \infty_w) \cup (\infty_z \times S^2(w))] =$$
$$= (S^2(z) \setminus \infty_z) \times (S^2(w) \setminus \infty_w) = \mathbb{C}^1(z) \times \mathbb{C}^1(w) = \mathbb{C}^2(z, w).$$

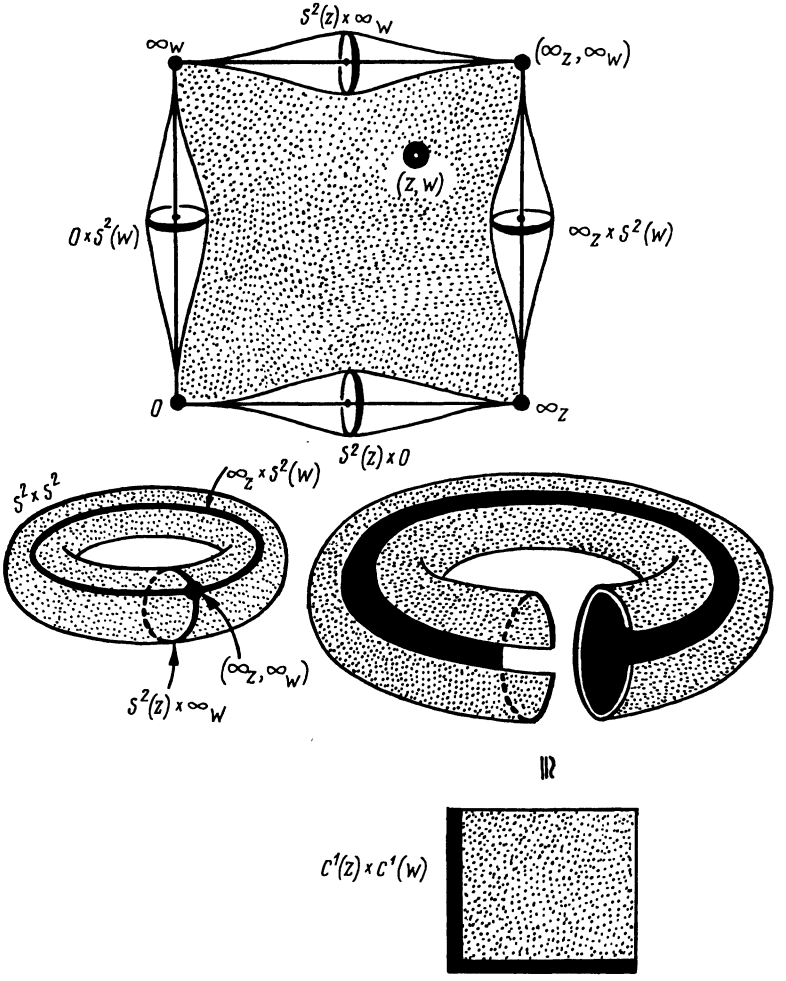


Рис. 120. $(S^2 \times S^2)\,[(S^2(z) \times \infty_w) \cup (\infty_z \times S^2(w)] \cong \mathbb{C}^2(z, w)$

Это — частный случай формулы

$$(X \times Y) \setminus [(X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)] \cong (X \setminus x_0) \times (Y \setminus y_0),$$

где $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.

Обратно, $\mathbb{C}^2(z, w)$ можно превратить из некомпактного открытого многообразия в компактное, присоединив к нему край, т. е. букет двух сфер: $(S^2_z \times \infty_w) \vee (\infty_z \times S^2_w)$, склеенных в одной точке (∞_z, ∞_w) (*букетом двух топологических пространств X и Y* называется пространство, полученное из X и Y отождествлением двух точек: $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$; обозначение: $X \vee Y$). Это и есть один из способов компактификации $\mathbb{C}^2$. Другой способ — присоединить к $\mathbb{C}^2$ одну точку — бесконечность, что превращает $\mathbb{C}^2$ в сферу S^4. Эти два способа существенно различны; можно доказать, что $S^2 \times S^2$ и S^4 не гомеоморфны (доказательство опускаем).

Есть и еще один способ компактифицировать $\mathbb{C}^2$ и превратить его в компактное многообразие. Этот способ частично нам известен и заключается во введении проективных координат. Рассмотрим $\mathbb{CP}^2$, отнесенное к однородным координатам (x^1, x^2, x^3); тогда $\mathbb{CP}^2$ покрывается тремя картами, гомеоморфными $\mathbb{C}^2$:

$$A_1 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^1 \neq 0\},$$
$$A_2 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^2 \neq 0\}, \quad A_3 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^3 \neq 0\}.$$

Пусть

$$\alpha_3\colon A_3 \to \mathbb{C}^2(z, w), \ \alpha_3(\lambda(x^1, x^2, x^3)) = \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right); \quad z = \frac{x^1}{x^3}, \ w = \frac{x^2}{x^3}.$$

Тогда α_3 — гомеоморфизм между картой A_3 и $\mathbb{C}^2$. Аналогично строятся гомеоморфизмы $\alpha_2\colon A_2 \to \mathbb{C}^2(u, v)$, $\alpha_1\colon A_1 \to \mathbb{C}^2(\alpha, \beta)$;

$$u = \frac{x^1}{x^2}, \ v = \frac{x^3}{x^2}; \ \alpha = \frac{x^2}{x^1}, \ \beta = \frac{x^3}{x^1},$$

(рис. 121). Положим

$$\mathbb{CP}^1_1 = S^2_1 = \{\lambda(0, x^2, x^3)\}, \quad \mathbb{CP}^1_2 = S^2_2 = \{\lambda(x^1, 0, x^3)\},$$
$$\mathbb{CP}^1_3 = S^2_3 = \{\lambda(x^1, x^2, 0)\}.$$

Тогда $\mathbb{CP}^2 = A_1 \cup S^2_1$, $\mathbb{CP}^2 = A_2 \cup S^2_2$, $\mathbb{CP}^2 = A_3 \cup S^2_3$, где компактные двумерные многообразия S^2_1, S^2_2, S^2_3 гомеоморфны S^2. Итак, $\mathbb{C}^2$ можно компактифицировать добавлением сферы S^2, что превращает $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{CP}^2$; причем это присоединение сферы можно осуществлять двумя

способами (см. выше). Рассмотрим все три способа компактификации $\mathbb{C}^2$ и проследим за тем, что происходит при этом с римановой

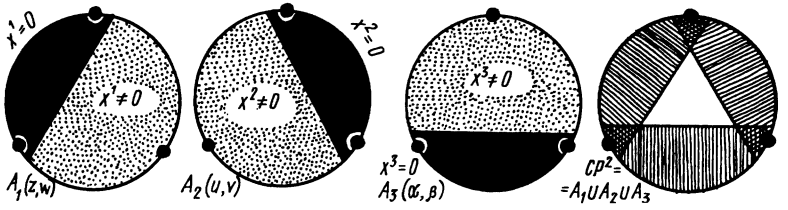


Рис. 121

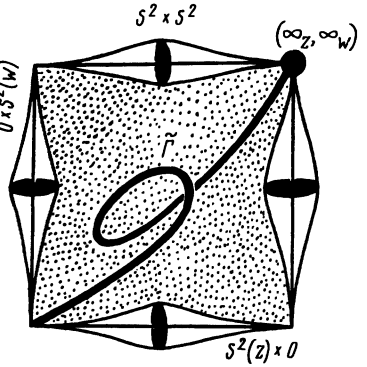


Рис. 122

поверхностью Γ, вложенной в $\mathbb{C}^2$. Так как Γ некомпактна и уходит на бесконечность, то Γ также подвергается компактификации, превращаясь в компактное топологическое пространство $\widetilde{\Gamma}$. Покажем, что $\widetilde{\Gamma}$ — гладкое многообразие.

Теорема 2. *Компактифицируем $\mathbb{C}^2$ до $S^2\times S^2$, дополнив $\mathbb{C}^2$ букетом двух сфер: $S^2\vee S^2=(S^2(z)\times\infty_w)\vee(\infty_z\times S^2(w))$. При этом риманова поверхность Γ алгебраической функции $w=\sqrt{P_n(z)}$ (полином P_n имеет простые корни) компактифицируется до компактного гладкого замкнутого двумерного многообразия $\widetilde{\Gamma}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала ту часть $\widetilde{\Gamma}$, которая содержится в $\mathbb{C}^2=(S^2\times S^2)\setminus(S^2\vee S^2)$. В силу теоремы 1 эта часть $\widetilde{\Gamma}$ — гладкое многообразие. Изучим $\widetilde{\Gamma}\cap(S^2\vee S^2)$. Мы утверждаем, что это — одна точка, т. е. $\widetilde{\Gamma}$ только в одной точке касается множества бесконечно удаленных точек $(S^2(z)\times\infty_w)\cap(\infty_z\times S^2(w))$. В самом деле, из вида $w=\sqrt{P_n(z)}$ следует, что образом бесконечности является бесконечность и только она, т. е. $\widetilde{\Gamma}$ содержит только одну бесконечно удаленную точку: (∞_z,∞_w) (рис. 122).

Докажем, что в окрестности точки (∞_z,∞_w) на $\widetilde{\Gamma}$ можно ввести структуру гладкого многообразия. Введем на $S^2\times S^2$ координаты, взяв в качестве них переменные z и w, пробегающие $S^2(z)$ и $S^2(w)$. Сделаем замену $u=1/z$, $v=1/w$. Поскольку замена $z\to u=1/z$

регулярна на $S^2(z)$, то она регулярна и на $S^2(z) \times S^2(w)$; при этом $\infty_z \to 0_z \in S^2(z)$, $\infty_w \to 0_w \in S^2(w)$. Уравнение

$$w^2 = P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k),$$

где $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, превращается в

$$\frac{1}{v^2} - \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u} - a_k\right) = 0; \quad \frac{u^n}{v^2} - \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k u) = 0,$$

т. е.

$$v^2 = \frac{u^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k u)}.$$

Изучим структуру нулей функции

$$f(u, v) = v^2 - \frac{u^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k u)}.$$

в окрестности точки $(u = 0, v = 0)$. Сделаем замену: $v^2 = t$, $u = u$. Тогда уравнение приобретает вид $t = \dfrac{u^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k u)}$. Подсчет градиента дает $\operatorname{grad} \widetilde{f}(t, u)|_0 = (1, 0)$ при $n > 1$ и $\operatorname{grad} \widetilde{f}(t, u)|_0 = (1, 1)$ при $n = 1$, т. е. $\operatorname{grad} \widetilde{f} \neq 0$ в точке 0, и по теореме о неявной функции искомая поверхность в переменных (t, u) — гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}^2$ (в окрестности 0). При обратной замене $v = \sqrt{t}$, $u = u$ график предыдущего многообразия подвергается преобразованию извлечения корня. Так как уравнение $v^2 - t = 0$ определяет около 0 гладкое подмногообразие, то и исходный график был гладким подмногообразием. □

При других компактификациях (добавлении точки и добавлении сферы) соответствующие компактификации $\widetilde{\Gamma}'$ и $\widetilde{\Gamma}''$ также будут гладкими многообразиями в компактифицированном $\mathbb{C}^2$; этого мы не будем доказывать в общем случае, ограничившись примерами.

При компактификации $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \cup \infty = S^4$ поверхность Γ, вложенная в $\mathbb{C}^2$, также компактифицируется одной точкой. При компактификации $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \cup S^2 = \mathbb{CP}^2$ ситуация сложнее. Так как $\Gamma \subset A_3 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^3 \neq 0\}$, то при компактификации $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{CP}^2$ следует найти пересечение $\widetilde{\Gamma}''$ с добавленной сферой $S^2 = \mathbb{CP}^1 = S_3^2$. Пусть $n > 2$. При замене $z = \dfrac{x^1}{x^3}$, $w = \dfrac{x^2}{x^3}$ уравнение $\prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k) = w^2$

переходит в $(x^2)^2(x^3)^{n-2} - \prod_{k=1}^{n}(x^1 - a_k x^3) = 0$ (проверьте!). Так как S_3^2 определяется в $\mathbb{CP}^2$ уравнением $x^3 = 0$, то для нахождения пересечения $\widetilde{\Gamma}'' \cap S_3^2$ следует положить в этом уравнении $x^3 = 0$, что дает решение ($x^1 = 0$, x^2 любое, $x^3 = 0$). Это значит, что $\widetilde{\Gamma}'' \cap S_3^2$ состоит из одной точки, имеющей в карте $A_2 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^2 \neq 0\}$ координаты: $u = \frac{x^1}{x^2} = 0$, $v = \frac{x^3}{x^2} = 0$ (рис. 123). Для изучения локальной структуры множества решений уравнения

$$(x^2)^2(x^3)^{n-2} - \prod_{k=1}^{n}(x^1 - a_k x^3) = 0$$

в окрестности точки ($x^1 = x^3 = 0$, $x^2 = \lambda$), следует сделать замену $u = \frac{x^1}{x^2}$, $v = \frac{x^3}{x^2}$, что дает уравнение

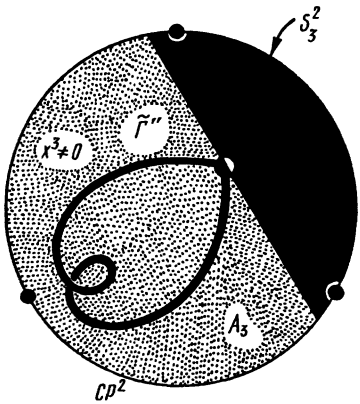


Рис. 123

$q = v^{n-2} - \prod_{k=1}^{n}(u - a_k v) = 0$. При $n > 2$ полином q имеет нулевой градиент в точке $(0, 0)$; это не позволяет непосредственно усмотреть, что поверхность — гладкое подмногообразие в этой точке. Хотя можно сделать новую замену, после которой этот факт станет очевидным, мы не будем на этом останавливаться, и рассмотрим только случаи $n = 1$ и $n = 2$.

При $n = 1$ имеем:

$$w^2 - z = 0, \quad \left(\frac{x^2}{x^3}\right)^2 - \frac{x^1}{x^3} = 0, \quad (x^2)^2 - x^1 x^3 = 0.$$

Так как $\Gamma \subset A_3$, то нужно найти $\widetilde{\Gamma}'' \cap S_3^2$, т. е. положить $x^3 = 0$, что дает (x^1 — любое, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$). Итак, пересечение $\widetilde{\Gamma}''$ с бесконечно удаленной сферой S_3^2 — одна точка, имеющая в карте $A_1 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^1 \neq 0\}$ координаты $\alpha = \frac{x^2}{x^1} = 0$, $\beta = \frac{x^3}{x^1} = 0$. Для изучения окрестности этой точки следует сделать замену $\alpha = \frac{x^2}{x^1}$, $\beta = \frac{x^3}{x^1}$, что дает

$$[(x^2)^2 - x^1 x^3 = 0] \to \left[\left(\frac{x^2}{x^1}\right)^2 - \frac{x^3}{x^1} = 0\right] = [\alpha^2 - \beta = 0].$$

Ясно, что это уравнение определяет гладкое подмногообразие в окрестности точки $\alpha=\beta=0$, что и доказывает гладкость компактифицированной поверхности $\widetilde{\Gamma}''$ в бесконечно удаленной точке.

При $n=2$ имеем $w^2-(z-a_1)(z-a_2)=0$, где $a_1\neq a_2$,

$$\left(\frac{x^2}{x^3}\right)^2-\left(\frac{x^1}{x^3}-a_1\right)\left(\frac{x^1}{x^3}-a_2\right)=0,\quad (x^2)^2-(x^1-a_1x^3)(x^1-a_2x^3)=0.$$

Как и при $n=1$, получаем, что если $x^3=0$, то $x^2=\pm x^1$, т. е. пересечение $\widetilde{\Gamma}''\cap S_3^2$ состоит из двух точек: $T_1=(x^1=\lambda,\ x^2=\lambda,\ x^3=0)$, $T_2=(x^1=\lambda,\ x^2=-\lambda,\ x^3=0)$. В карте $A_1=\{\lambda(x^1,x^2,x^3),\ x^1\neq 0\}$ имеем $T_1=(\alpha=1,\beta=0)$, $T_2=(\alpha=-1,\beta=0)$. Так как $x^1\neq 0$, то можем перейти в карту A_1 с помощью замены $\alpha=\frac{x^2}{x^1}$, $\beta=\frac{x^3}{x^1}$, что дает $\alpha^2-(1-a_1\beta)(1-\alpha_2\beta)=0$, в точках T_1, T_2,

$$\operatorname{grad}[\alpha^2-(1-a_1\beta)(1-\alpha_2\beta)]_{T_1T_2}=$$
$$=(2\alpha,\ a_1(1-a_2\beta)+a_2(1-a_1\beta))_{T_1T_2}=(\pm 2,\ a_1+a_2)\neq 0$$

а поэтому поверхность $\widetilde{\Gamma}''$ — гладкое подмногообразие около точек T_1 и T_2.

При $n=1,2$ мы доказали, что компактификация $\Gamma\to\widetilde{\Gamma}''$, возникающая при компактификации $\mathbb{C}^2\to\mathbb{CP}^2$, дает гладкое многообразие. Это верно и при $n>2$, однако это доказательство мы опускаем.

В дальнейшем мы будем считать, что поверхность $\Gamma\subset\mathbb{C}^2$ пополнена одной бесконечно удаленной точкой, после чего Γ превращается в гладкое компактное многообразие. Изучим точки ветвления функции $w=\sqrt{P_n(z)}$, определенной уже на всей сфере $S^2=\mathbb{CP}^1$.

Предложение 2. *Пусть $w^2-P_n(z)=0$, где $P_n(z)$ имеет только простые корни $a_1,\ldots,a_n$. Тогда все эти точки — точки ветвления $w=\sqrt{P_n(z)}$, расположенные в конечной части плоскости; на сфере S^2 к этим точкам добавляется еще одна точка ветвления — бесконечность в том случае, когда степень P_n нечетна. Для P_n четной степени точка ∞ не есть точка ветвления. Других точек ветвления функция $w=\sqrt{P_n(z)}$ не имеет.*

Доказательство. Рассмотрим случай $w^2-z=0$. Функция $w=\pm\sqrt{z}$ имеет две ветви: $\varphi_1=\sqrt{z}$ и $\varphi_2=-\sqrt{z}$. Рассмотрим окружность конечного радиуса с центром в 0 и совершим обход вокруг 0. Ветви φ_1 и φ_2 меняются местами, что не позволяет сделать функцию однозначной и гладкой на сфере. Повторим эту

процедуру, взяв в качестве центра окружности точку $\infty \in S^2$. На S^2 все точки равноправны относительно группы преобразований $\frac{az+b}{cz+d}$; в частности, ∞ может быть переведена в любую конечную точку. Окружность с центром в ∞ можно рассматривать и как окружность с центром в 0, а потому обход вокруг ∞ также меняет ветви (рис. 124).

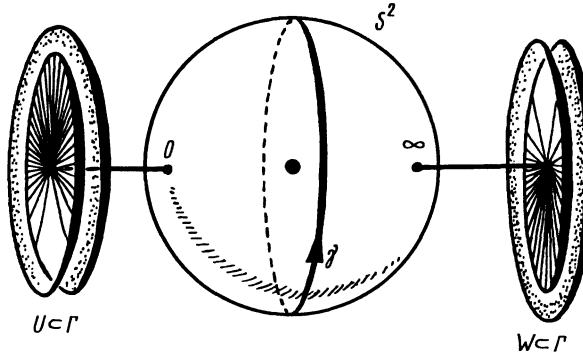


Рис. 124

Рассмотрим общий случай. Пусть a_k — произвольный корень $P_n(z)$. Рассмотрим малую окружность S^1 с центром в a_k, внутри которой нет других корней полинома, и запишем точку $z \in S^1$ в виде $z = a_k + re^{i\varphi}$, где r — радиус окружности. Имеем

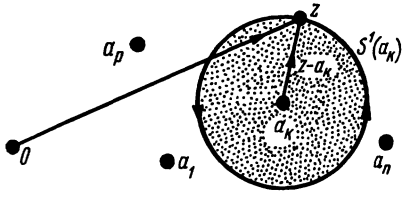


Рис. 125

$$w(z) = \sqrt{\prod_{p=1}^{n}(z-a_p)} =$$

$$= \sqrt{\prod_{p\neq k}(z-a_p)}\sqrt{z-a_k} =$$

$$= \sqrt{\prod_{p\neq k}(z-a_p)} \cdot r^{1/2} \cdot e^{i\varphi/2}$$

(рис. 125). Далее

$$w(z_0) = r_0^{1/2} \cdot e^{i\varphi_0/2}\sqrt{\prod_{p\neq k}(z-a_p)} \to r_0^{1/2} \cdot e^{i(\varphi_0+2\pi)/2}\sqrt{\prod_{p\neq k}(z-a_p)}$$

при обходе вокруг a_k. Так как при обходе вокруг a_k аргумент $(z-a_k)$ меняется на 2π, то $\sqrt{z-a_p}$ меняет знак. В то же время при обходе вокруг a_k аргументы чисел $z-a_p$, $p \neq k$, не

получают приращения на 2π и возвращаются к прежнему значению (рис. 126), т. е. все радикалы $\sqrt{z-a_p}$ возвращаются к прежнему значению и переход с ветви на ветвь осуществляется только за счет радикала $\sqrt{z-a_k}$.

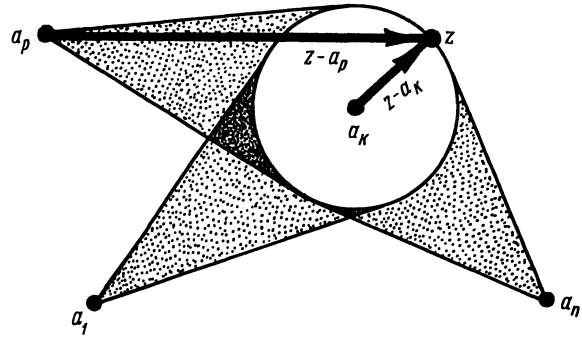


Рис. 126

Итак, точки $\{a_k\}$ — точки ветвления. Рассмотрим ∞ и сделаем замену $u=1/z$; тогда ∞ перейдет в 0 и $w=g(z)$ примет вид $\dfrac{1}{\sqrt{u^n}\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-a_k u}}$. Если n четно, то при обходе вокруг точки функция возвращается к прежнему значению, а потому 0 не есть точка ветвления. Если $n=2p+1$ нечетно, то $w=\frac{1}{u^p}\frac{1}{\sqrt{u}}\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-a_k u}$, и в нуле имеется ветвление. □

Как мы знаем, поверхность Γ — область однозначности алгебраической функции. Представим Γ в виде склейки нескольких листов, каждый из которых будет графиком однозначной алгебраической функции. Начнем с примера.

Рассмотрим функцию $w=\pm\sqrt{z}$, определенную на S^2 и имеющую две точки ветвления: 0 и ∞. Соединим 0 и ∞ гладкой кривой γ без пересечений и сделаем вдоль γ разрез от 0 до ∞. Тогда на S^2 возникают два подмножества: Γ_1 и Γ_2, где Γ_1 — график ветви $\varphi_1=\sqrt{z}$, определенной на $S^2\setminus\gamma$, а Γ_2 — график ветви $\varphi_2=-\sqrt{z}$, определенной на $S^2\setminus\gamma$. Так как γ соединяет точки ветвления и других точек ветвления нет, то запрещены обходы вокруг точек ветвления, т. е. оставаясь на $S^2\setminus\gamma$, нельзя перейти с ветви φ_1 на ветвь φ_2. Отсюда следует, что каждый из листов Γ_1 и Γ_2 гомеоморфен $S^2\setminus\gamma$, и этот гомеоморфизм устанавливается функциями φ_1 и φ_2 (Γ_i — график φ_i) (рис. 127). При проекции π: $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^1(z)$ вдоль $\mathbb{C}^1(w)$ каждый из листов Γ_1 и Γ_2 гомеоморфно

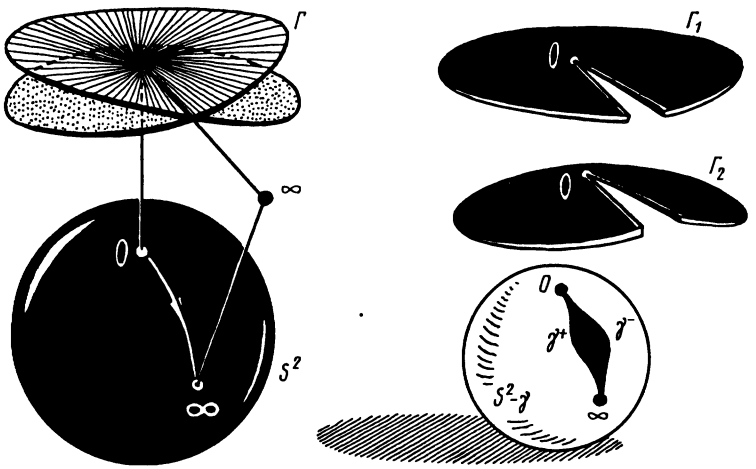


Рис. 127

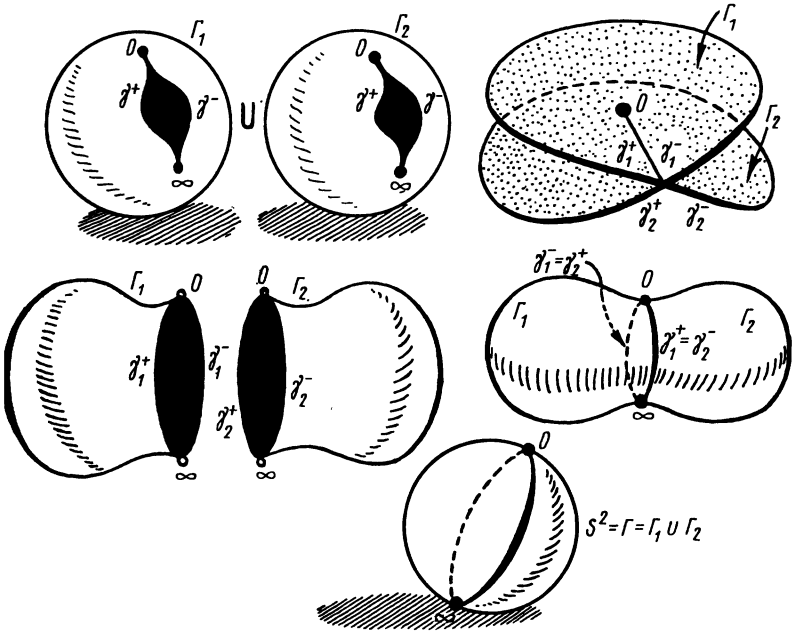


Рис. 128

проектируется на $S^2 \setminus \gamma$. Итак, Γ склеена из двух кусков: листов Γ_1 и Γ_2. Каким образом осуществляется склейка? Зададим на S^2 ориентацию и отметим один берег разреза знаком «$-$», а другой — знаком «$+$». Эти метки возникают на берегах разрезов каждого листа: Γ_1 и Γ_2. Так как они гомеоморфны $S^2 \setminus \gamma$, то мы должны для восстановления Γ склеить два экземпляра $S^2 \setminus \gamma$, учитывая расположение знаков «$+$» и «$-$». Так как при обходе вокруг точек ветвления ветви менялись местами, то берег γ_1^+ листа Γ_1 должен склеиться с берегом γ_2^- листа Γ_2; соответственно склеиваются и два экземпляра берега γ_1^- и γ_2^+ на листах Γ_1 и Γ_2 (рис. 128). Ясно, что эта склейка дает сферу. Итак, нами доказана

Лемма 2. *Компактифицированная риманова поверхность* $\widetilde{\Gamma}$ *алгебраической функции* $w = \pm\sqrt{z}$ *гомеоморфна сфере* S^2.

Рассмотрим риманову поверхность функции $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$, где $a \neq b$. В силу Предложения 2 эта функция имеет две точки ветвления: $z = a$ и $z = b$; точка ∞ — не есть точка ветвления. Впрочем, хотя ∞ и не является точкой ветвления, но в некотором смысле она — особая точка компактифицированной поверхности $\widetilde{\Gamma}$, так как в ней два листа касаются друг друга, а значения обеих ветвей φ_1 и φ_2 в бесконечности совпадают (и равны бесконечности). Итак, ∞ — особая точка погружения $\widetilde{\Gamma}$ в $\mathbb{C}^2 \cup (S^2 \vee S^2) = S^2 \times S^2$, но — не особая точка самой поверхности $\widetilde{\Gamma}$. Изучим саму поверхность $\widetilde{\Gamma}$, считая, что в ∞ касание двух листов отсутствует, т. е. «расклеим» точку ∞, удвоив ее и снабдив каждый лист «своей» точкой ∞.

Лемма 3. *Компактифицированная риманова поверхность* $\widetilde{\Gamma}$ *(с «расклеенной бесконечностью») алгебраической функции* $w = \pm\sqrt{(z-a)(z-b)}$ *гомеоморфна двумерной сфере.*

Доказательство. Точками ветвления являются a и b, поэтому следует сделать разрез γ от a до b и повторить рассуждения леммы 2, что и доказывает настоящую лемму. □

Как было отмечено, погружение $S^2 = \widetilde{\Gamma} \to S^2 \times S^2$ склеивает две точки, а потому истинная картина расположения $\widetilde{\Gamma}$ в $S^2 \times S^2$ имеет вид, показанный на рис. 129. Так как нами доказан результат о том, что $\widetilde{\Gamma}$ в точке ∞ является гладким многообразием, то особая точка ∞ является именно касанием двух гладких листов, а не конической точкой (рис. 130). Рассмотрим общий случай.

Теорема 3. *Пусть* $f(z, w) = w^2 - P_n(z)$, *где полином* P_n *не имеет кратных корней.*

Тогда компактифицированная риманова поверхность $\widetilde{\Gamma}$ *(с «расклеенной бесконечностью») алгебраической функции*

$w = \pm\sqrt{P_n(z)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{n}(z - a_k)}$ *гомеоморфна сфере с* $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ *ручками (через [ ] обозначена целая часть), т. е. многообразию типа* M_g^2 *рода* $g = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. *Погружение этой поверхности в компактифицированное* $\mathbb{C}^2 \cup (S^2 \vee S^2) = S^2 \times S^2$ *является вложением, если степень* n *нечетна, и является погружением, склеивающим две точки* ∞ *(на разных листах* Γ_1 *и* Γ_2*), если степень* n *четна.*

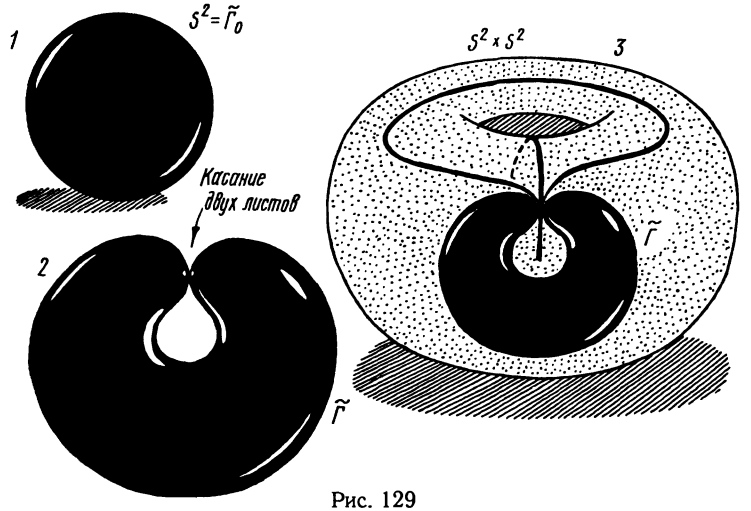
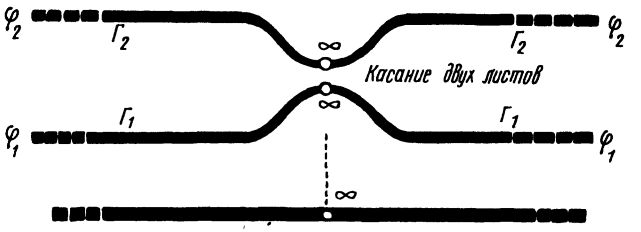


Рис. 129



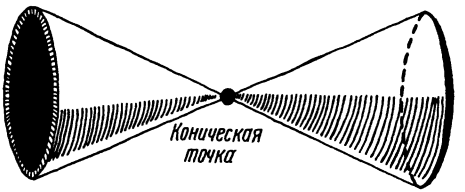


Рис. 129

Доказательство. Пусть $n=2p+1$. Тогда в силу предложения 2 точками ветвления $w=\pm\sqrt{P_n(z)}=\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)}$ являются все корни $a_1,\ldots,a_n$ и точка ∞. Это множество можно разбить на пары, например, $(a_1, a_2),\ldots,(a_n, a_{n+1})$, где $a_{n+1}=\infty$. Соединяя внутри каждой пары точки a_{2k-1} и a_{2k} гладким отрезком γ_k, $1\leqslant k\leqslant p+1$, получаем сферу S^2 с $p+1$ разрезами, $\gamma_1,\ldots,\gamma_{p+1}$. Тогда на $S^2\setminus(\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_{p+1})$ каждая ветвь, φ_1 и φ_2, являются однозначными функциями.

В самом деле, мы запретили обходы вокруг нечетного числа точек ветвления — при нашей системе разрезов мы можем обойти только вокруг четного числа точек ветвления. Пусть мы обошли пары: $(a_{i_1}, a_{i_1+1}),\ldots,(a_{i_\alpha}, a_{i_\alpha+1})$. Что происходит с ветвями φ_1 и φ_2? Так как приращение 2π получили аргументы только тех точек, вокруг которых совершен обход, то мы получаем четное число изменений знака перед радикалами. Впрочем, так как точек

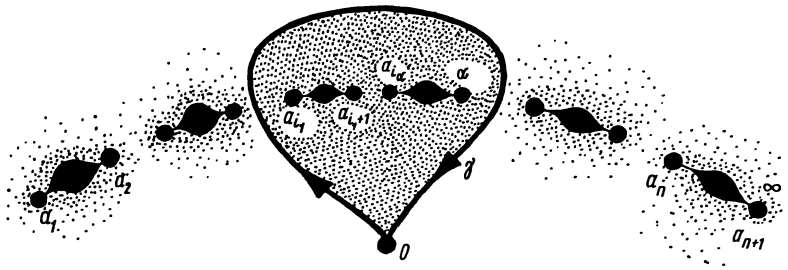


Рис. 131

четное число, то можно не различать понятия «внутри контура» и «вне контура», так как вне контура тоже осталось четное число особенностей (кроме того, на сфере понятия «вне» и «внутри» контура двойственны) (рис. 131). Имеем при обходе вдоль γ:

$$\varphi=\prod_{t=1}^{\alpha}\sqrt{(z-a_{i_t})(z-a_{i_t+1})}\prod_{k\neq(i_1,\ldots,i_\alpha+1)}\sqrt{z-a_k}\to$$

$$\to\prod_{t=1}^{\alpha}\left(-\sqrt{z-a_{i_t}}\right)\left(-\sqrt{z-a_{i_t+1}}\right)\prod_{k\neq(i_1,\ldots,i_\alpha+1)}\sqrt{z-a_k}=\varphi.$$

Если мы разобьем точки ветвления на пары другим способом, то область, полученная путем разрезов вдоль новых путей, будет гомеоморфна уже рассмотренной области.

Итак, выполняемые нами операции не зависят от способа разбиения точек ветвления на пары и от способа соединения точек внутри каждой пары гладкой кривой. Отметим берега каждого разреза знаками + и −. Тогда каждый лист Γ_1 и Γ_2 гомеоморфен $S^2 \setminus (\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_{p+1})$.

Следовательно, для восстановления Γ следует склеить эти два листа, приклеив берег $\gamma^+_{i(1)}$ на Γ_1 к берегу $\gamma^-_{i(2)}$ на Γ_2 (рис. 132). Получаем M^2_g, т. е. сферу S^2 с $g = p = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ ручками.

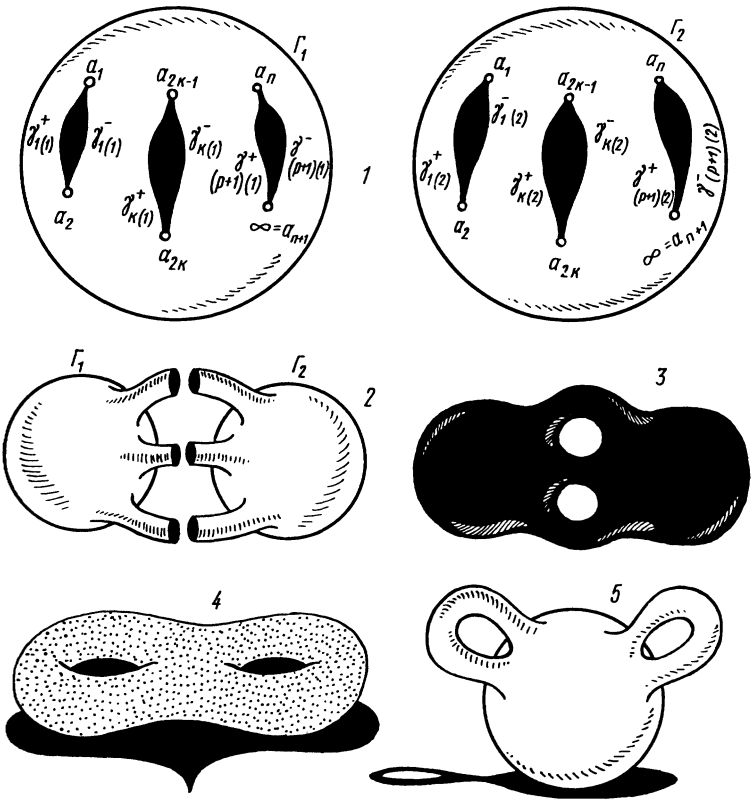


Рис. 132

Пусть $n = 2p$. В силу предложения 2 точками ветвления являются все корни $a_1, \ldots, a_{2p}$ и только они; в бесконечности имеется особая точка — касание двух листов, возникающее при погружении $\widetilde{\Gamma}$ в $S^2 \times S^2$. Разбиваем корни на пары, соединяем точки внутри пары гладким отрезком, нумеруем берега разрезов и, разрезая $\widetilde{\Gamma}$ вдоль

прообразов этих путей, получаем два листа. Точку ∞ мы «расклеиваем», снабжая каждый лист своей точкой ∞. Восстанавливаем $\widetilde{\Gamma}$ путем обратной склейки (рис. 133). □

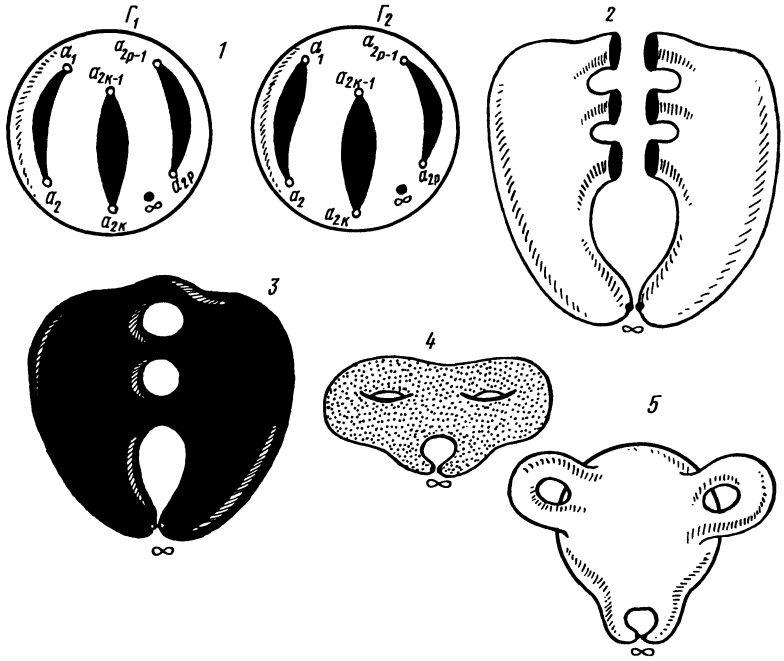


Рис. 133

Итак, двумерные поверхности возникают естественным путем — как римановы поверхности некоторых алгебраических функций.

Утверждение 1. *Каждое двумерное гладкое компактное связное замкнутое многообразие рода g (т. е. типа M_g^2) может быть снабжено структурой комплексно аналитического многообразия.*

Доказательство. Рассмотрим Γ для функции $w=\pm\sqrt{P_n(z)}$, где P_n — имеет простые корни. Так как $\Gamma\subset\mathbb{C}^2$, где задается графиком $w=g(z)$ или графиком $z=\omega(w)$, то имеем две ортогональные проекции, π_1: $(z, w)\to\mathbb{C}^1(z)$ и π_2: $(z, w)\to\mathbb{C}^1(w)$. В каждой точке $(z, w)\in\Gamma$ определена по крайней мере одна из проекций, так как $\operatorname{grad}(w^2-P_n(z))\neq 0$ в каждой точке $(z, w)\in\Gamma$ (см. теорему 1). Получаем покрытие Γ локальными дисками; осталось найти функции перехода. Они могут быть только двух типов:

$w = g(z)$ или $z = \omega(w)$. Так как функции $g(z)$ или $\omega(w)$ комплексно аналитические (см. предложение 1), то получаем искомое утверждение, ибо продолжение комплексной структуры на точку ∞ поверхности $\widetilde{\Gamma}$ выполняется внутри комплексно аналитического многообразия $S^2 \times S^2 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. □

Легко доказать, что многообразия M^2_μ не могут быть снабжены структурой комплексно аналитических многообразий (проверьте!).

Утверждение 2. *Каждое двумерное гладкое компактное связное замкнутое многообразие рода g (т. е. типа M^2_g) может быть снабжено конформной римановой метрикой.*

Доказательство. Метрика называется конформной, если существуют локальные координаты, в которых она имеет вид: $g_{ij} = \alpha \cdot \delta_{ij}$. Реализуем M^2_g в $\mathbb{C}^2$ (пополненном) в виде римановой поверхности функции $w = \pm\sqrt{P_n(z)}$. Рассмотрим на M^2_g координаты, пробегающие $\mathbb{C}^1(z)$. Рассмотрим на M^2_g координаты, пробегающие $\mathbb{C}^1(z)$. Эта комплексная координата обслуживает все M^2_g, кроме точки 0, в окрестности которой нужно ввести координату w, связанную с z комплексно аналитическим преобразованием $w = g(z)$. Введем в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ метрику

$$ds^2 = dz\, d\bar{z} + dw\, d\bar{w} = \sum_{k=1}^{4} (dx^k)^2;$$

рассмотрим ее ограничение на $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$. Имеем

$$ds^2(M^2_g) = dz\, d\bar{z} + dg(z)\overline{dg(z)} = \\ = dz\, d\bar{z} + g'(z)\bar{g}'(z) dz\, d\bar{z} = (1 + |g'_z(z)|^2)\, dz\, d\bar{z},$$

или

$$ds^2(M^2_g) = (1 + u_x^2 + v_x^2)(dx^2 + dy^2),$$

где $z = x + iy$, $g = u + iv$.

Здесь

$$\frac{d}{dz} g(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = \\ = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y) = u_x + iv_x = v_y + iv_x,$$

так как $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. □

Если сделать комплексно аналитическую замену $z = \eta(\xi)$, то полученная выше конформная метрика останется конформной, так как

$$ds^2 + \alpha(z) dz\, d\bar{z} = \alpha(\eta(\xi))|\eta'(\xi)|^2 d\xi\, d\bar{\xi} = \rho(\xi)\, d\xi\, d\bar{\xi}.$$

Прокомментируем способ вложения Γ в $\mathbb{C}^2$ в окрестности точки ветвления. Хотя мы доказали, что в этих точках Γ является гладким многообразием, но при попытке изобразить точку ветвления в $\mathbb{R}^3$ возникают трудности, связанные с «маломерностью» $\mathbb{R}^3$ по сравнению с $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$. На рис. 134 мы попытались изобразить условную схему обхода вокруг точки ветвления.

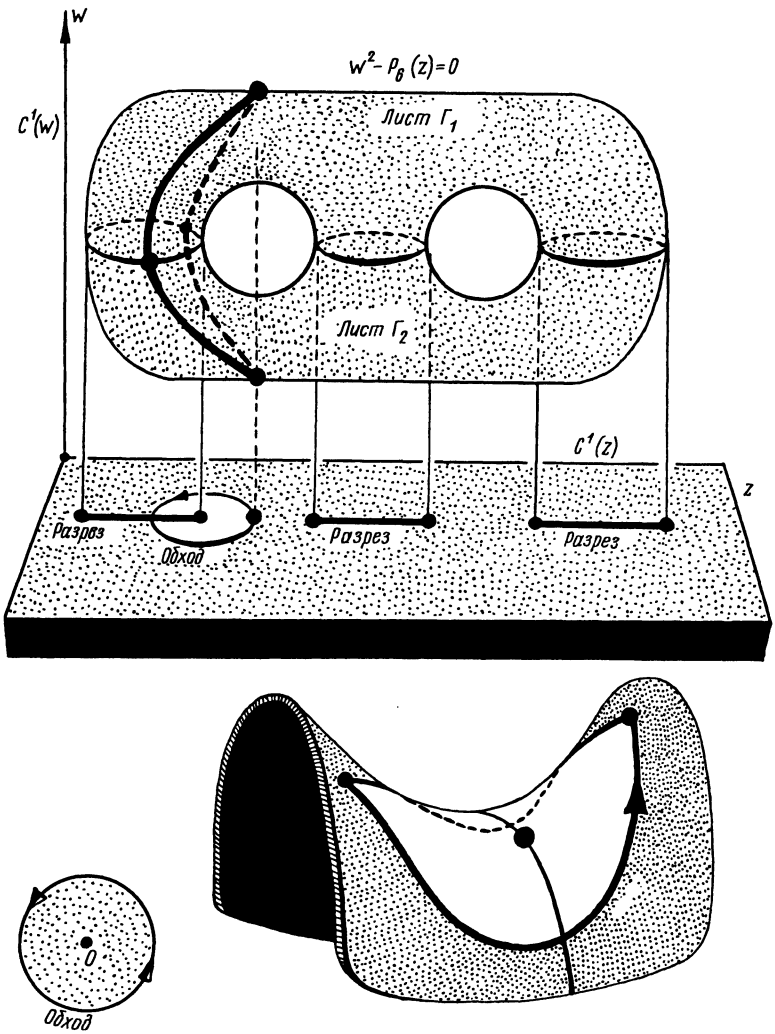


Рис. 134

Глава 5

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Общее понятие тензорного поля на многообразии

Рассмотрим гладкое многообразие M^n; пусть $P \in M^n$, и $x^1, \ldots, x^n$ — локальная регулярная система координат в некоторой окрестности P. Существует бесконечное множество других регулярных систем координат в окрестности P; наша цель — изучить объекты, инвариантные относительно всевозможных замен координат. Будем обозначать новые координаты знаком «штрих» — $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$.

1) Пусть $\vec{a} \in T_P(M^n)$ — касательный вектор к M^n в точке P. Ранее мы приводили несколько определений касательного вектора, среди них были такие, которые определяли вектор независимо от выбора локальных координат, т. е. как объект, инвариантный относительно регулярных замен (например, определение с помощью пучка соприкасающихся кривых). Однако как только мы захотим сопоставить касательному вектору его координаты, т. е. записать его аналитически, нам потребуется ввести систему координат, в которой вектор и приобретает координаты. При выборе другой системы, эти координаты изменятся. Найдем связь между координатами вектора, подсчитанными в разных системах. Так как $\vec{a} = a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} = a^{i'} \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$, то $a^{i'} \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}} = a^i \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$, и так как $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}} \right\}$ образуют базис в $T_P(M^n)$, то $a^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} a^i$. Мы нашли закон изменения координат вектора при замене системы: координаты $a^1, \ldots, a^n$ преобразуются с помощью матрицы Якоби $\left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) = J$. Это условие получено нами из требования инвариантности вектора как геометрического объекта при замене координат.

Можно, наоборот, определить вектор как объект, задаваемый в каждой системе координат $x^1, \ldots, x^n$ набором чисел $a^1, \ldots, a^n$,

преобразующихся при переходе от системы $x^1, \ldots, x^n$ к системе $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ по правилу $a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} a^i$. Ясно, что определенный таким образом объект будет инвариантным.

2) Пусть $f(x)$ — гладкая функция на M^n. Рассмотрим $\operatorname{grad} f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$. Этот набор чисел (функций точки P) определен в каждой системе координат; найдем закон преобразования. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$\xi_{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

где

$$\operatorname{grad} f = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}, \quad \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) = (J^{\top})^{-1},$$

т. е. этот набор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ преобразуется по другому закону, чем набор компонент вектора; а именно $\operatorname{grad} f$ преобразуется с помощью матрицы $(J^{-1})^{\top}$, где J — матрица Якоби $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$. Этот закон также можно получить, исходя из требования инвариантности (относительно замен координат) некоторого геометрического объекта, а именно производной функции f по направлению какого-либо вектора $\vec{a} \in T_P(M^n)$. В самом деле, эта производная не зависит от выбора локальных координат, а потому

$$\frac{df}{d\vec{a}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\gamma(\varepsilon)) - f(\gamma(0))}{\varepsilon},$$

где

$$\gamma(t) \in M^n, \quad \gamma(0) = P, \quad \dot{\gamma}(0) = \vec{a} \in T_P(M^n),$$

$$\frac{df}{d\vec{a}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = a^j \frac{\partial f}{\partial x^i} = a^{i'} \frac{\partial f}{\partial x^{i'}};$$

отсюда

$$a^{i'} \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = a^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^{i'}},$$

т. е.

$$a^{i'} \xi_{i'} = a^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi_{i'} = a^i \xi_i, \quad \xi_i = \xi_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \; \xi_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \xi_i,$$

что и требовалось.

3) Рассмотрим $T_P(M^n)$ и сопряженное к нему пространство $T_p^*(M^n)$ вещественных линейных функционалов $l(\vec{a})$, где $\vec{a} \in T_P(M^n)$. Найдем закон преобразования координат функционалов l при замене координат в окрестности точки; введем в $T_P^*(M^n)$

базис $e^1, \ldots, e^n$, состоящий из функционалов, определяемых условием $e^k(\vec{e}_\alpha) = \delta^k_\alpha$, где $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — базис в $T_P(M^n)$. Так как $l(\vec{a})$ — вещественное число и так как скаляр не зависит от выбора координат, то $l(\vec{a})_{(x)} = l'(\vec{a})_{(x')}$; отсюда

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i; \quad l(\vec{a}) = (l_i e^i)(a^k \vec{e}_k) = l_k a^k = l_{k'} a^{k'} = l_{k'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} a^k.$$

Отсюда в силу произвольности $\vec{a}$ имеем $l_k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} l_{k'}$, т. е. $l_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} l_k$. Поэтому закон преобразования координат функционала l совпадает с законом преобразования координат $\operatorname{grad} f$. Элементы $T^*_P(M^n)$ называются ковекторами; итак, $\operatorname{grad} f$ — ковектор.

Мы ввели в T^* сопряженный базис, состоящий из ковекторов $e^1, \ldots, e^n$, а потому можно отождествить T с T^*, положив $\varphi\colon T \to T^*$, $\varphi(\vec{a}) = l$, где $\vec{a} = a^k \vec{e}_k$, $l = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k e^k$, т. е. считая, что l, отвечающий $\vec{a}$ при изоморфизме φ, имеет относительно $e^1, \ldots, e^n$ те же координаты, что и вектор $\vec{a}$ относительно $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Этот линейный изоморфизм не инвариантен при замене координат $(x) \to (x')$, так как вектор и ковектор преобразуются по разным законам; вектор — матрицей J, а ковектор — матрицей $(J^{-1})^\top$. Итак, указанное отождествление T с T^* в системе (x) разрушится, если рассмотрим замену общего вида $(x) \to (x')$. Имеются, впрочем, такие замены, при которых соответствие $\varphi\colon T \to T^*$ сохраняется; это замены, где $J = (J^{-1})^\top$, т. е. задающиеся в данной точке P ортогональной матрицей Якоби. Замена общего вида имеет невырожденную матрицу Якоби, но отнюдь не ортогональную. Тем не менее T и T^* можно отождествить с помощью линейного изоморфизма, выдерживающего любые замены координат. Об этом ниже.

4) Пусть C — линейный однородный оператор, преобразующий в себя $T_P(M^n)$; пусть C — матрица оператора, записанная в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Делая замену $(x) \to (x')$, получаем $C' = JCJ^{-1}$, т. е. $c^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} c^i_j$. Закон преобразования матрицы оператора может быть получен исходя из требования, чтобы соотношение: $\vec{b} = C(\vec{a})$ ($\vec{a}$ — произвольный вектор $T_P(M^n)$), было инвариантно относительно замен координат. В самом деле, в этом соотношении все объекты допускают инвариантное, независимое от координатной записи определение. Проверку того, что отсюда следует нужный закон преобразования C, оставляем читателю как упражнение.

5) Рассмотрим билинейную симметричную форму B на $T_P(M^n)$: $B(\vec{a}, \vec{b}) = b_{ij} a^i b^j$. Из алгебры известно, что при замене координат

матрица B формы превратится в матрицу B' такую, что $B' = JBJ^{\top}$, т. е. $b_{i'j'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} b_{ij}$. Как и выше, этот закон преобразования B можно получить из требования сохранения скаляра $B(\vec{a}, \vec{b})$; $\vec{a}, \vec{b} \in \in T_P(M^n)$ при произвольных заменах. В самом деле,

$$B(\vec{a}, \vec{b}) = b_{ij} a^i b^j \equiv b_{i'j'} a^{i'} b^{j'} = b_{ij} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} a^i b^j,$$

т. е.

$$b_{ij} = b_{i'j'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}, \quad \text{или} \quad b_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} b_{ij}.$$

Мы привели простейшие примеры законов преобразования; их различия мы указывали различным расположением индексов у компонент объектов: a^i, l_j, c^i_j, b_{ij}. Верхние индексы называются *контравариантными*, нижние — *ковариантными*. Удобно сопоставлять каждому объекту из перечисленных выше пару (p, q), где q — число ковариантных, p — число контравариантных индексов. Итак, набор координат вектора $\vec{a} \in T_P(M^n)$ имеет тип $(1, 0)$, ковектора — $(0, 1)$, оператора — $(1, 1)$, билинейной формы на векторах — $(0, 2)$. Наряду с такой формой существует и форма $B(l, m)$ на ковекторах $l, m \in T^*_P(M^n)$. Вычисление (по аналогии с $B(\vec{a}, \vec{b})$) дает, что если $B(l, m) = b^{ij} l_i m_j$, то $b^{i'j'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} b^{ij}$, т. е. $B' = (J^{-1})^{\top} B (J^{-1})$.

Перечисленные объекты допускают инвариантное определение, независимое от конкретной координатной записи в конкретной системе координат, и закон преобразования компонент объектов получается как следствие этой инвариантности. Таким образом, если в каждой системе координат задан набор чисел (функций), преобразующихся друг в друга по указанным правилам, то мы можем сделать вывод, что эти наборы определяют некоторый инвариантный объект, который мы изучаем с помощью координатной записи в различных системах координат. Это обстоятельство кладется в основу общего определения тензорного поля на многообразии, являющегося геометрическим объектом, инвариантно определенным, т. е. не зависящим от выбора локальной системы координат. От координатной системы зависит конкретная запись компонент объекта.

Определение. Тензором типа (p, q) ранга $p+q$ (соответственно, тензорным полем типа (p, q) ранга $p + q$) называется объект, задаваемый в каждой системе координат $(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ набором чисел $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ (соответственно функций $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)$, которые будем считать гладкими), преобразующихся при замене систем координат $(x) \to (x')$ по закону

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

Это определение отвечает требованию, что вводимый объект может быть определен инвариантно, безотносительно к его конкретной координатной записи. В самом деле, как известно из курса алгебры, тензор (тензорное поле) можно определить как поли линейное отображение

$$T\colon \underbrace{T_P \times \ldots \times T_P}_{q} \times \underbrace{T_P^* \times \ldots T_P^*}_{p} \to \mathbb{R},$$

задаваемое формулой

$$T(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_q; l^1, \ldots, l^p) = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} a^{j_1}_1 \ldots a^{j_q}_q l^1_{i_1} \ldots l^p_{i_p},$$

где $\vec{a}_k = a^{j_k}_k \vec{e}_{j_k}$; $l^k = l^k_{i_k} e^{i^k}$; $\{a^{j_k}_k\}$ — координаты вектора $\vec{a}_k \in T_P(M^n)$ (k-й сомножитель); $\{l^k_{i_k}\}$ — координаты ковектора $l^k \in T_P^*(M^n)$ (k-й сомножитель).

Функции $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ являются коэффициентами отображения T. Из курса алгебры известно, что полилинейное отображение всегда можно записать в таком виде. Если фиксированы базисы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $e^1, \ldots, e^n$, то для $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ возникает полезная формула

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T(\vec{e}_{j_1}, \ldots, \vec{e}_{j_q}; e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}).$$

В самом деле

$$T(\vec{e}_{j_1}, \ldots, \vec{e}_{j_q}; e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}) = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\rho_1 \ldots \rho_q} (\vec{e}_{j_1})^{\rho_1} \ldots (\vec{e}_{j_q})^{\rho_q} (e^{i_1})_{\alpha_1} \ldots (e^{i_p})_{\alpha_p} =$$
$$= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\rho_1 \ldots \rho_q} \delta^{\rho_1}_{j_1} \ldots \delta^{\rho_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{\alpha_1} \ldots \delta^{i_p}_{\alpha_p} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

Далее, T можно определить в инвариантных терминах, так как все объекты, входящие в формулу $T\colon (T_P)^q \otimes (T_P^*)^p \to \mathbb{R}$, а также свойство полилинейности, инвариантны. От выбора координат зависит конкретная запись коэффициентов $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$.

Хотя пользоваться полилинейными отображениями удобнее в их инвариантном виде, мы будем почти всегда работать с координатной записью, так как она весьма полезна при конкретных вычислениях. Для удобства введем специальное обозначение — так называемые мультииндексы $(i) = (i_1 \ldots i_p)$, заменяя целую строку индексов одним индексом. Например, тензорный закон запишется так:

$$T^{(i')}_{(j')} = \frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(j')}} T^{(i)}_{(j)}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}.$$

Изучим простейшие свойства тензорных полей.

Лемма 1. *Пусть* $(x) \to (x')$ *— регулярная замена. Тогда из соотношения* $T^{(i')}_{(j')} = \dfrac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} \dfrac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(j')}} T^{(i)}_{(j)}$ *(тензорный закон) следует, что*

$$T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} T^{(i')}_{(j')}.$$

Доказательство следует из тождества $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$, означающего, что $J\, J^{-1} = E$, где $J = \left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ — матрица Якоби. □

Лемма 2. *Пусть дано тензорное поле, записанное в системе* (x) *и пусть выполнены замены координат* $(x) \to (z) \to (y)$, $(x) \to (v) \to (y)$, *т. е. мы двумя способами перешли от* (x) *к* (y) *— через* (z) *и через* (v). *Тогда запись поля* T *в системе* (y) *не зависит от способа перехода от* (x) *к* (y).

Доказательство следует из формулы дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k} = \frac{\partial y^i}{\partial z^q} \frac{\partial z^q}{\partial x^k} = \frac{\partial y^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^k}.$$

Напомним свойства тензоров, известные из курса алгебры.

а) Тензоры ранга $p+q$ типа (p, q) (тензоры рассматриваются в точке) образуют линейное пространство H, причем $\dim H = n^{p+q}$. Доказательство следует из представления тензора как полилинейного отображения: линейная комбинация таких отображений снова полилинейна.

б) В пространстве H всех тензоров ранга $p+q$ типа (p, q) можно выбрать аддитивный базис, элементы которого (полилинейные отображения) обозначаются так:

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}.$$

Число их равно n^{p+q}. Каждое отображение

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}^{j_q}$$

задается формулами

$$\vec{e}_{i_\alpha}(l) = l_{i_\alpha}, \quad \text{где} \quad l \in T^*_P(M^n); \quad e^{j_\alpha}(\vec{a}) = a^{j_\alpha}, \quad \text{где} \quad \vec{a} \in T_P M^n;$$

$$(\vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q})(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_q, l^1, \ldots, l^p) =$$

$$= \vec{e}_{i_1}(l^1) \ldots \vec{e}_{i_p}(l^p) e^{j_1}(\vec{a}_1) \ldots e^{j_q}(\vec{a}_q) = l^1_{i_1} \ldots l^p_{i_p} a^{j_1}_1 \ldots a^{j_q}_q.$$

Если $T\colon (T_PM^n)^q \times (T_P^*M^n)^p \to \mathbb{R}$ — произвольное полилинейное отображение ранга (p, q), то

$$T(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_q; l^1, \ldots, l^p) = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} a^{j_1}_1 \ldots a^{j_q}_q l^1_{i_1} \ldots l^p_{i_p} =$$
$$= T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(\vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q})(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_q; l^1, \ldots, l^p),$$

т. е.

$$T = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(\vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}).$$

Итак, отображения $\vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$ образуют аддитивный базис в пространстве всех тензоров типа (p, q). С помощью мультииндексов это разложение произвольного тензора T по базисным тензорам записывается так: $T = T^{(i)}_{(j)} \vec{e}_{(i)} \otimes e^{(j)}$.

Напомним закон преобразования базисных тензоров $\vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$ при замене координат:

$$\vec{e}_{(i')} \otimes e^{(j')} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} \vec{e}_{(i)} \otimes \vec{e}^{(j)}.$$

Все эти свойства и определения переносятся на случай гладких тензорных полей на многообразии; отличие в том, что нужно рассматривать тензорные поля как линейные комбинации базисных полей типа (p, q) с переменными коэффициентами, что превращает пространство тензорных полей в бесконечномерное пространство.

Частный случай: любое тензорное поле типа $(1, 0)$ допускает локально представление вида $\vec{T} = T^i(x)\vec{e}_i(x)$; аналогично, любое поле типа $(0, 1)$ допускает представление вида $l = l_i e^i(x)$.

§ 2. Простейшие примеры тензорных полей

1. Примеры.

1) Пусть на M^n дано гладкое векторное поле $\vec{T}(x)$. Тогда оно является тензорным полем типа $(1, 0)$; пространство всех гладких полей типа $(1, 0)$ отождествляется с бесконечномерным пространством всех гладких векторных полей на M^n.

2) Пусть на M^n дано гладкое ковекторное поле, т. е. в каждой точке $x \in M^n$ отмечен линейный функционал $l(x) \in T^*_xM^n$, гладко зависящий от точки. Это поле — элемент бесконечномерного пространства тензорных полей типа $(0, 1)$. В этом пространстве лежит линейное бесконечномерное подпространство, составленное из полей $\operatorname{grad} f(x)$, где f — гладкая функция на M^n.

3) Пусть на M^n задана риманова метрика $g_{ij}(x)$. Так как $g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$, то набор $g_{ij}(x)$ определяет тензорное поле типа $(0, 2)$, т. е. гладкое поле билинейных форм. Этот тензор называется *метрическим тензором.*

4) Комплексно аналитическое многообразие M^{2n} характеризуется тем свойством, что в каждом $T_x M^{2n}$ определен оператор I — «умножение на мнимую единицу», $I^2 = -E$. Так как этот оператор гладко зависит от точки, то получаем тензорное поле типа $(1, 1)$.

5) *Тензор моментов инерции.* Пусть дано твердое тело с одной закрепленной точкой 0 в $\mathbb{R}^3$; тело вращается вокруг точки 0. Будем считать, что оно состоит из конечного числа N материальных точек, жестко скрепленных между собою (в процессе движения их взаимное расположение не меняется). Будем рассматривать только ортогональные системы координат в $\mathbb{R}^3$. Обозначим массы точек через $m_1, m_2, \ldots, m_N$, а их координаты в фиксированный момент времени t — через $x^i_{(1)}, \ldots, x^i_{(N)}$, $i = 1, 2, 3$. Построим матрицу

$$a^{ij} = -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha x^i_{(\alpha)} x^j_{(\alpha)} + \delta^{ij} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha |\vec{x}_{(\alpha)}|^2.$$

Получили тензор ранга 2 типа $(0, 2)$, причем матрица a^{ij} симметрична. Этот симметричный тензор a^{ij} называется тензором моментов инерции твердого тела (различные тела имеют различные тензоры моментов инерции).

Поясним роль этого тензора на примере. Пусть через 0 проведена прямая с единичным направляющим вектором $\vec{l} = (l^1, l^2, l^3)$. Найдем сумму $\sum_{ij} a^{ij} l^i l^j = H(\vec{l})$. Так как a^{ij} и l^i — тензоры, то $H(\vec{l})$ — инвариант ортогональной замены координат, т. е. скаляр. Вычисления дают

$$H(\vec{l}) = \sum_{ij} a^{ij} l^i l^j =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \sum_i x^i_{(\alpha)} l^i \sum_j x^j_{(\alpha)} l^j + \sum_{ij} \delta^{ij} l^i l^j \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha |\vec{x}_{(\alpha)}|^2 =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\langle \vec{x}_{(\alpha)}, \vec{l} \rangle\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha |\vec{l}|^2 |\vec{x}_{(\alpha)}|^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(|\vec{x}_{(\alpha)}|^2 - \left(\langle \vec{x}_{(\alpha)}, \vec{l} \rangle\right)^2\right).$$

Это выражение интерпретируется так: множитель $|\vec{x}_{(\alpha)}|^2 - \langle \vec{x}_{(\alpha)}, \vec{l} \rangle^2$ есть квадрат расстояния точки с массой m_α до оси $\vec{l}$; т. е. мы получили известное выражение для момента инерции тела относительно оси. Собственные векторы матрицы a^{ij} параллельны так называемым главным осям инерции твердого тела.

6) *Тензор деформаций.* Рассмотрим сплошную среду, заполняющую некоторый объем в пространстве $\mathbb{R}^n$, отнесенном к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$; точки этой области отождествлены с точками среды. Рассмотрим малую деформацию среды, например под действием каких-то сил, действующих на этот объем. Будем считать, что нам заданы смещения точек среды, т. е. гладкие функции $u^i(x^1, \ldots, x^n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, зависящие от точки и позволяющие вычислять координаты смещенной точки $\widetilde{P}$ через координаты исходной точки по формуле: $\widetilde{x}^i = x^i + u^i(x^1, \ldots, x^n)$. Обычно рассматривают малые смещения, т. е. функции $u^i(x)$ предполагаются достаточно малыми. Для аккуратной постановки задачи следовало бы рассмотреть бесконечно малые смещения точек, что эквивалентно заданию гладкого векторного поля в области. Однако в теории сплошной среды рассматривают иногда и конечные деформации, поэтому остановимся на предложенном выше формализме.

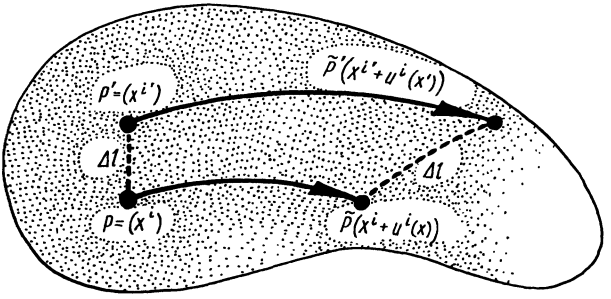


Рис. 1

Итак, точка $P = (x^1, \ldots, x^n)$ переместилась в точку $\widetilde{P} = (x^i + u^i(x^1, \ldots, x^n))$. Найдем изменение длин гладких кривых, возникающее при деформации среды. Рассмотрим две близкие точки: $P(x^1, \ldots, x^n)$ и $P'(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$. Пусть $(\Delta l)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x^{i'} - x^i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} (\Delta x^i)^2$ — квадрат длины евклидова отрезка, соединяющего P и P'. Найдем квадрат длины $(\Delta l')^2$ отрезка, соединяющего образы точек P и P' после их смещения под влиянием деформации среды в новые точки $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}'$ (рис. 1). Имеем

$$(\Delta l')^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x^{i'} + u^i(x') - x^i - u^i(x)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(x^{i'} - x^i) + \left(u^i(x') - u^i(x)\right)\right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\Delta x^i + \Delta u^i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^{n} (\Delta u^i)^2 =$$

$$= (\Delta l)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^{n} (\Delta u^i)^2.$$

Так как $\Delta u^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial x^k} \Delta x^k$, то

$$(\Delta l')^2 - (\Delta l)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^{n} (\Delta u^i)^2 =$$

$$= 2 \sum_{i,\,k} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \Delta x^i \Delta x^k + \sum_{i,\,k,\,p} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^p} \Delta x^k \Delta x^p =$$

$$= \sum_{i<k} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) \Delta x^i \Delta x^k + \sum_{i,\,k,\,p} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^p} \Delta x^k \Delta x^p.$$

Итак,

$$(dl')^2 - (dl)^2 = \sum_{i<k} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) dx^i\, dx^k + \sum_{i,\,k,\,p} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^p}\, dx^k\, dx^p.$$

Если деформации $u^i(x)$ малы, то можно считать, что

$$(dl')^2 - (dl)^2 \cong \sum_{i<k} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) dx^i\, dx^k.$$

Положим $\eta_{ik}(x) = \dfrac{\partial u^i}{\partial x^k} + \dfrac{\partial u^k}{\partial x^i}$; тогда $(dl')^2 - (dl)^2 \cong \eta_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Набор функций η_{ik} образует тензор второго ранга типа $(0, 2)$, называемый тензором малых деформаций.

7) *Тензор напряжений.* Рассмотрим упругое тело, подвергнутое некоторой деформации. При этом в нем появляются «напряжения». Объясним этот термин, применяя стандартную модель, разработанную в классической теории упругости. Пусть $d\sigma$ — плоская малая площадка, расположенная в теле и проходящая через точку P; пусть $\vec{n}(P)$ — нормаль к $d\sigma$ в точке P; будем считать, что $d\sigma$ ориентирована и нормаль также снабжена ориентацией (рис. 2). Вблизи площадки упругое тело разбито этой площадкой на две части: одна расположена с положительной стороны площадки, другая — с отрицательной. Считается, что наличие в упругом теле напряжений означает, что первая из этих двух частей упругого тела действует на вторую через площадку $d\sigma$ с силой $\vec{F}$, обозначаемой вектором $\vec{F}$, приложенным в P. Под термином «описать напряжения в теле» обычно понимается следующее: установить силу напряжения для любой ориентированной площадки, предполагаемой бесконечно малой;

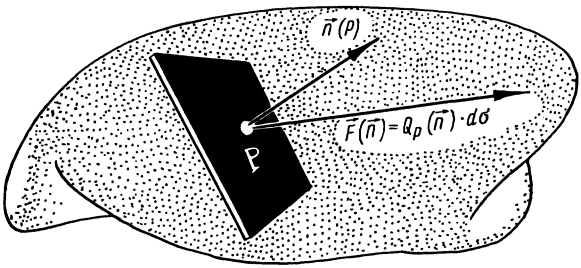


Рис. 2

формой ее пренебрегают. Считается, что в точке P для данной нормали $\vec{n}(P)$ сила $\vec{F}$, действующая на $d\sigma$, пропорциональна ее площади, которую также обозначим через $d\sigma$. Итак, получаем соответствие, сопоставляющее каждой нормали $\vec{n}(P)$ в точке P вектор $\vec{F}(\vec{n})$; т. е. между $\vec{n}$ и $\vec{F}$ имеется зависимость: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{n})$. Характер ее устанавливается в классической теории упругости, исходя из механических соображений; мы не будем в них вникать и сообщим только результат, к которому они приводят: оказывается (в хорошем приближении к реальности) можно считать зависимость $\vec{F}(\vec{n})$ линейной, т. е. что в каждой точке P определен линейный оператор $\vec{n} \to Q(\vec{n})$; тогда $\vec{F}(\vec{n})$ можно записать так: $\vec{F}(\vec{n}) = Q_P(\vec{n})d\sigma$, где $F^i = Q^i_j n^j d\sigma$; $\{n^j\}$ — координаты $\vec{n}(P)$. Возникает тензорное поле типа $(1, 1)$: в каждой точке P задан линейный оператор Q_P, гладко зависящий от точки. Это поле определяет тензор напряжений. Напряжения зависят от деформации среды; о характере этой зависимости мы будем говорить ниже.

Из механических соображений (которые мы опускаем) следует, что тензор напряжений Q_P должен быть симметричным (т. е. матрица оператора Q_P — симметрична). Тензор напряжений можно определить (и вычислить) не только в деформированном упругом теле. Например, он имеется и в идеальной жидкости. Считается, что в идеальной жидкости силы внутреннего трения отсутствуют, а потому сила напряжения $\vec{F}(\vec{n})$, действующая на $d\sigma$, может быть направлена только по нормали к $d\sigma$, т. е. — совпадать с силой нормального давления на $d\sigma$. Так как $\vec{F}(\vec{n}) = Q_P(\vec{n})d\sigma$, то оператор Q_P — диагонален, т. е.

$$Q^i_j = q(P)\delta^i_j; \quad F^i = Q^i_j n^j d\sigma = q(P)\delta^i_j n^j d\sigma = q(P)n^i d\sigma;$$
$$F^i = q(P)n^i(P)d\sigma;$$

где $q(P)$ — скалярная функция точки P, называемая давлением в точке P. Давление $q(P)$ не зависит, следовательно, от направле-

ния $\vec{n}$ и определяется только самой точкой P (от точки к точке давление может меняться). Если среда такова, что $Q_P = q(P)\cdot E$, то говорят, что в ней выполнен закон Паскаля. Закон Паскаля выполняется далеко не в каждой среде; например, в вязкой жидкости тензор напряжений может иметь более сложный вид, так как помимо нормального давления, существуют еще и силы, порожденные трением.

Между тензорами деформации и напряжения существует зависимость; ее изучение составляет один из важнейших разделов теории упругости. В первом приближении можно считать, что при малых деформациях тензор напряжений линейно зависит от тензора деформаций, т. е. имеет место соотношение: $Q_j^i = \alpha_j^{ikl}\eta_{kl}$, где функции α_j^{ikl} образуют тензор 4-го ранга (типа $(3,1)$). В $\mathbb{R}^3$ тензор α_j^{ikl} имеет 81 компоненту. Указанное линейное соотношение называется законом Гука. Предположим, что в среде выполнены условия однородности и изотропии, т. е. вид зависимости $Q = Q(\eta)$, $Q_j^i = \alpha_j^{ikl}\eta_{kl}$, не меняется при ортогональных преобразованиях $\mathbb{R}^3$, т. е. тензор α_j^{ikl} инвариантен относительно $\mathrm{SO}(3)$. Можно показать (мы это опустим), что отсюда вытекает следующий вид зависимости $Q = Q(\eta)$: $Q_j^i = Q_{ij} = \mu\eta_{ij} + \lambda\,\mathrm{spur}(\eta)\cdot\delta_{ij}$, где числа μ и λ называются коэффициентами Ламе (они определяются средой). Функция $\Sigma\eta_{ii} = \mathrm{spur}(\eta)$ имеет простой смысл (мы не различаем верхних и нижних индексов, так как события происходят в $\mathbb{R}^3$). Рассмотрим перемещение частиц среды под действием малых деформаций; тогда функции u^i, определяющие перемещения точек, могут рассматриваться как компоненты векторного поля, задающего деформацию; обозначим это поле через $\vec{v}(P)$. Тогда $\mathrm{spur}(\eta) = \sum\limits_i\left(\dfrac{\partial u^i}{\partial x^i} + \dfrac{\partial u^i}{\partial x^i}\right) = 2\sum\limits_i \dfrac{\partial u^i}{\partial x^i} = 2\,\mathrm{div}(\vec{v})$, т. е. $\mathrm{spur}(\eta)$ — дивергенция поля перемещений. Коэффициент μ для жидкости называется коэффициентом вязкости.

Перейдем теперь к другому классу примеров тензорных полей — полям, которые можно конструировать, исходя из фиксированных полей путем применения к ним алгебраических операций. Тем самым, располагая некоторым набором тензоров, можем значительно его расширить.

2. Алгебраические операции над тензорами.

(1). Пусть даны два тензорных поля одинакового типа и ранга: $T_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$ и $P_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$; тогда можно образовать новое тензорное поле, определив его как набор функций: $C_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} = T_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} + P_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$. Исходя из определения тензора, проверяется, что $C_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$ — тензор (проверьте!).

(2). Если $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ — тензорное поле, а $f(x)$ — гладкая функция на M^n, то набор $f(x) \cdot T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ также образует тензорное поле на M^n. Доказательство очевидно.

(3). *Перестановка индексов одного типа.* Пусть дано тензорное поле (для простоты рассмотрим поле типа $(0, q)$): $T_{i_1 \dots i_q}$; построим новое поле по формуле: $P_{i_1 \dots i_s \dots i_\alpha \dots i_q} = T_{i_1 \dots i_\alpha \dots i_s \dots i_q}$; т. е. операция сводится к перестановке компонент тензора (перенумерация). Ясно, что эта операция — тензорная (проверьте!). Здесь была применена перестановка, менявшая местами два индекса: i_s и i_α. Ясно, что можно было бы применить любую перестановку.

Замечание. Перестановка индексов разного типа (т. е. ковариантного и контравариантного индексов) не является, вообще говоря, тензорной операцией, так как верхние индексы преобразуются с помощью матрицы J, а нижние — с помощью $(J^{-1})^\top$ (см. выше), а эти матрицы, вообще говоря, различны. Пример: Рассмотрим поле типа $(1, 1)$, т. е. поле операторов C в $T_P(M^n)$; предположим, что в некоторой системе координат (x) выполняется тождество: $C^i_j = C^j_i$, т. е. C «симметричен». Здесь мы поменяли местами верхний и нижний индексы. На языке матрицы C это условие выглядит так: $C = C^\top$. Допустим, что и в любой другой системе , выполняется то же соотношение: $C^{i'}_{j'} = C^{j'}_{i'}$, т. е. $C' = (C')^\top$. Пусть A — матрица Якоби замены, переводящая (x) в (x'); тогда $C' = ACA^{-1}$, $ACA^{-1} = (ACA^{-1})^\top$; $(A^\top A)C = C(A^\top A)$, т. е. $BC = CB$, где $B = A^\top A$. Итак, наше условие эквивалентно условию коммутирования матриц B и C, что выполняется далеко не всегда. Если бы замена $(x) \to (x')$ обладала бы ортогональной матрицей Якоби A, т. е. $A^\top A = E$, то перемена местами индексов i и j была бы тензорной операцией.

(4). *Операция свертки.* Пусть $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ — тензорное поле; фиксируем два индекса разного типа — ковариантный j_s и контравариантный i_α; и построим следующие функции: $P^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_q} = \sum_i T^{i_1 \dots i_{\alpha-1}, i_\alpha = i, i_{\alpha+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{s-1}, j_s = i, j_{s+1} \dots j_q}$. Эта операция — тензорная (проверьте!) и переводит тензор типа (p, q) в тензор типа $(p-1, q-1)$. Если $p = q$, то для исходного поля $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ можно определить полную свертку, свернув все верхние индексы со всеми нижними; получится скалярная функция $\operatorname{spur}(T)$, являющаяся инвариантом поля T, т. е. не меняющаяся при заменах координат.

(5). *Тензорное произведение.* Пусть даны два тензорных поля общего вида: $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ и $P^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{\beta_1 \dots \beta_t}$. Можно образовать новое поле

$C^{i_1\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_s}_{j_1\dots j_q\beta_1\dots\beta_t} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} P^{\alpha_1\dots\alpha_s}_{\beta_1\dots\beta_t}$. Ясно, что это — тензорное поле типа $(p+s, q+t)$; оно обозначается так: $C = T \otimes P$. Операция тензорного умножения, вообще говоря, некоммутативна: $T \otimes P \neq P \otimes T$.

(6). *Поднятие и опускание индексов.* Рассмотрим, например, тензорное поле типа $(0, 2)$ — a_{ij}; пусть оно невырожденно, т. е. матрица $A = (a_{ij})$ невырождена в каждой точке; тогда существует обратная матрица A^{-1}, коэффициенты которой обозначим a^{ij}. Отсюда $a^{ik}a_{kl} = \delta^i_j$. Пусть дано произвольное тензорное поле $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$; можно построить новое поле вида: $P^{i_2\dots i_p}_{\alpha j_1\dots j_q} = a_{\alpha i_1} T^{i_1\dots i_p}_{j_1 j_2\dots j_q}$. Аналогично, можно построить и поле $C^{\alpha i_1\dots i_p}_{j_2\dots j_q} = a^{\alpha j_1} T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$. Первая операция называется *операцией опускания индекса*, вторая — *поднятием индекса*. Эти операции — тензорные, так как являются композицией двух тензорных операций: умножения и свертки тензоров. Операции поднятия и опускания индексов взаимно обратны в силу невырожденности тензорного поля a^{ij}; в самом деле: $a_{j_1\alpha} C^{\alpha i_1\dots i_p}_{j_2\dots j_q} = a_{j_1\alpha} a^{\alpha s} T^{i_1\dots i_p}_{s j_2\dots j_q} = \delta^s_{j_1} T^{i_1\dots i_p}_{s j_2\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1 j_2\dots j_q}$. Обычно в качестве a_{ij} берется метрический тензор g_{ij} на римановом многообразии. Например, если $M^n = \mathbb{R}^n$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$, то закон преобразования верхних и нижних индексов совпадает (в той системе, в которой $g_{ij} = \delta_{ij}$, т. е. в декартовой системе, относительно ортогональных замен и параллельных переносов); поэтому в декартовой системе нет разницы между верхними и нижними индексами и их можно поднимать и опускать в произвольном порядке, например, считать все их нижними. Операция поднятия и опускания индексов в общем случае позволяет произвести каноническое отождествление $T_P M^n$ и $T^*_P M^n$. В самом деле, элементами $T_P M^n$ являются векторы — тензоры типа $(1, 0)$, а элементами $T^*_P M^n$ — ковекторы, т. е. тензоры типа $(0, 1)$. Построим линейные отображения:

$$A\colon T \to T^*, \quad A(\vec{a}) = \xi, \quad \text{где} \quad \vec{a} \in T = T_P M^n, \quad \xi \in T^* = T^*_P M^n;$$

$$\xi_i = g_{i\alpha} a^\alpha; \quad B\colon T^* \to T; \quad B(\eta) = \vec{b}; \quad b^i = g^{i\alpha} = g^{i\alpha}\eta_\alpha.$$

Тогда:

$$((B \circ A)\vec{a})^i = g^{i\alpha}(A\vec{a})_\alpha = g^{i\alpha} g_{\alpha j} a^j = \delta^i_j a^j = a^i,$$

т. е.

$$B \circ A\colon T \to T, \quad B \circ A = 1_T$$

(тождественное отображение). Аналогично:

$$((A \circ B)\xi)_i = g_{i\alpha}(B\xi)^\alpha = g_{i\alpha} g^{\alpha j} \xi_j = \delta^j_i \xi_j = \xi_i$$

т. е. $A\ B\colon T^* \to T^*$; $A\ B = 1_{T^*}$. Это означает, что A и B — изоморфизмы. Более того, возникающее отождествление T и T^* инвариантно относительно замен координат, так как использованные

операции — тензорные. В частности, следующие две диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} T^* & \xrightarrow{(J^{-1})^{\mathrm{T}}} & T^* \\ {\scriptstyle A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A} \\ T & \xrightarrow[J]{} & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T^* & \xrightarrow{(J^{-1})^{\mathrm{T}}} & T^* \\ {\scriptstyle B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B} \\ T & \xrightarrow[J]{} & T \end{array}$$

(7). *Симметрирование.* Рассмотрим сначала пару индексов одного типа и по тензорному полю $T_{\ldots ij\ldots}$ построим новое поле $\frac{1}{2}(T_{\ldots ij\ldots}+T_{\ldots ji\ldots})$ (переставив эти два индекса). Определим общее симметрирование так: $P_{j_1\ldots j_q}=T_{(j_1\ldots j_q)}=\frac{1}{q!}\sum\limits_{(\sigma)}T_{\sigma(j_1\ldots j_q)}$, где суммирование ведется по всем перестановкам индексов $i_1,\ldots,i_q$. Операция симметрирования — тензорная (проверьте!).

Определение. Поле $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots i_q}$ называется *симметричным*, если оно не меняется при перестановке местами любых двух индексов одного типа.

Применение симметрирования к симметричному полю дает то же самое поле.

ПРИМЕР. метрический тензор g_{ij} симметричен.

(8). *Альтернирование.* Рассмотрим сначала пару соседних индексов одного типа и по тензорному полю $T_{\ldots ij}$ построим новое поле: $P_{\ldots ij\ldots}=\frac{1}{2}(-T_{\ldots ji\ldots}+T_{\ldots ij\ldots})$. Альтернирование определим так:

$$P_{j_1\ldots j_q}=T_{[j_1\ldots j_q]}=\frac{1}{q!}\sum_{(\sigma)}(-1)^{\varphi(\sigma)}T_{\sigma(j_1\ldots j_q)}.$$

Здесь $\varphi(\sigma)$ — четность перестановки σ (иногда пишут $(-1)^{\sigma}$). Операция альтернирования — тензорная (проверьте!).

Определение. Тензорное поле $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ называется *кососимметричным*, если его компоненты меняют знак при транспонировании любых двух соседних индексов одного типа.

Лемма 1. *Альтернирование не меняет кососимметричный тензор* $T_{i_1\ldots i_k}$. (*Для простоты рассматриваем тензоры, имеющие ковариантные индексы.*) *Альтернирование обращает симметричный тензор в нуль.*

Доказательство следует из определения симметричных и кососимметричных тензоров. □

На этом мы закончим перечисление основных алгебраических операций над тензорами. Обсудим понятие симметричного и кососимметричного оператора. Мы привели пример, показывающий, что

попытки определить, например, симметричный оператор $C = (c_j^i)$ формулой: $C = C^\top$ (которая должна выполняться во всех системах координат), приводят к противоречиям, так как это определение — не тензорное, и соотношение $C = C^\top$ разрушается при заменах координат. Понятие симметрии и косой симметрии операторов имеют смысл только при наличии римановой метрики на многообразии (более общо: при наличии невырожденного тензорного поля типа $(0,2)$ или $(2,0)$). Рассмотрим M^n с метрикой g_{ij}, порождающей в каждом $T_P M^n$ скалярное произведение

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_P = g_{ij}(P) a^i b^j, \quad \vec{a}, \vec{b} \in T_P M^n.$$

Определение. Оператор T (в одной точке P) или операторное поле типа $(1,1)$ называется *симметричным* (соответственно, *кососимметричным*), если выполняется тождество: $\langle T\vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv \langle \vec{a}, T\vec{b} \rangle$ для любых $\vec{a}, \vec{b} \in T_P M^n$ (в одной точке, или во всех точках — для операторного поля); соответственно: $\langle T\vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv -\langle \vec{a}, T\vec{b} \rangle$; $\vec{a}, \vec{b} \in T_P M^n$ (для кососимметричного случая).

Пояснение (например, для симметричного оператора): $\langle \vec{a}, T\vec{b} \rangle = \langle T\vec{a}, \vec{b} \rangle$; $\langle \vec{a}, T\vec{b} \rangle = g_{ij} a^i (T\vec{b})^j = g_{ij} a^i T_k^j b^k = (g_{ij} T_k^j) a^i b^k = T_{ik} a^i b^k$, где $T_{ik} = g_{ij} T_k^j$. Далее: $\langle T\vec{a}, \vec{b} \rangle = g_{ij} (T\vec{a})^i b^j = g_{ij} T_k^i a^k b^j = g_{ik} T_i^j a^i b^k = T_{ki} a^i b^k$, где $T_{ki} = g_{ik} T_i^j$. Так как $T_{ik} a^i b^k \equiv T_{ki} a^i b^k$, то $T_{ik} = T_{ki}$. Итак, после опускания индексов у тензора T типа $(1,1)$ условие симметрии (наложенное на тензор типа $(0,2)$) приобретает привычный вид, т. е. T_{ik} не меняются при транспозиции индексов. Аналогично устанавливается косая симметрия T_{ik} после опускания индексов в кососимметрическом случае.

3. Кососимметричные тензоры. Будем рассматривать ковариантные кососимметричные тензоры $T_{i_1 \dots i_k}$ (или тензорные поля).

Лемма 2. *Кососимметричный тензор $T_{i_1 \dots i_n}$ максимального ранга n на M^n полностью определяется только одной своей компонентой $T_{12\dots n}$ (существенной компонентой); остальные отличаются от нее только множителем $(-1)^\sigma$, т. е.*

$$T_{i_1 \dots i_n} = (-1)^\sigma T_{12\dots n}, \quad (i_1, \dots, i_n) = \sigma(1, 2, \dots, n).$$

Доказательство. Фиксируем систему координат $x^1, \dots, x^n$; тогда в ней $T_{i_1 \dots i_n} = (-1)^\sigma T_{12\dots n}$ (см. определение косой симметрии). Пусть сделана замена: $(x) \to (x')$. Имеем:

$$T_{1' \dots n'} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}} T_{1 \dots n} = \left(\sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}} \right) T_{12\dots n} = (\det J) \cdot T_{12\dots n}.$$

Итак, для описания кососимметричного тензора максимального ранга достаточно знать его существенную компоненту (в какой-то одной системе координат, так как существенные компоненты в других системах получаются домножением на якобиан замены). Лемма доказана. □

Для кососимметричных тензоров определена важная операция: *внешнее умножение*. Пусть $T_{i_1 \dots i_k}$ и $P_{j_1 \dots j_q}$ — два кососимметричных тензора; определим новый кососимметричный тензор, обозначаемый через $R \wedge P$, где

$$R_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k} = T_{[i_1 \dots i_k} P_{j_1 \dots j_q]} = \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} T_{\sigma(i_1 \dots i_k} P_{j_1 \dots j_q)}. \quad (1)$$

Это умножение является билинейной операцией; ранги тензоров суммируются. Рассмотрим интерпретацию на языке внешних дифференциальных форм. Сначала рассмотрим кососимметричные тензоры $T_{i_1 \dots i_k}$, заданные в одной точке M^n. Тогда $T_{i_1 \dots i_k}$ определяет кососимметричное полилинейное отображение T: $\underbrace{(T_* \times \dots \times T_*)}_{k} \to R$, где $T_* = T_P M^n$. Фиксируем некоторую систему координат $x^1, \dots, x^n$ и рассмотрим их как гладкие функции на окрестности точки P; тогда определены дифференциалы $dx^1, \dots, dx^n$ этих функций. Для любой гладкой функции $f(x)$ ее дифференциал df есть элемент пространства, сопряженного к T_*, т. е. линейный функционал на T_*. В самом деле, если $\vec{a} \in T_*$, то

$$\frac{df}{d\vec{a}} = \frac{df(\gamma(t))}{dt}\bigg|_{t=0},$$

где $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = \vec{a}$, т. е.

$$\frac{df}{d\vec{a}} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^k} a^k. \quad \text{Итак:} \quad \frac{df}{d\vec{a}} = \frac{\partial f}{\partial x^k} a^k,$$

т. е. если $f = x^i$, то $\frac{dx^i}{d\vec{a}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} a^k = \delta^i_k a^k = a^i$; $dx^k = a^k dt$.

Итак, dx^k можно считать функционалами на T_*, т. е. — элементами T^*. Считая dt малой величиной, можно рассматривать его как коэффициент пропорциональности, который в дальнейшем будем опускать. Если $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in T_*$ — базис в T_*, то в качестве базиса в T^* возьмем $dx^1, \dots, dx^n$, считая, что $dx^k(\vec{e}_\alpha) = \delta^k_\alpha$, т. е. $dx^k(\vec{a}) = a^k$. Определим внешнюю алгебру $\Lambda(dx^1, \dots, dx^n)$ с образующими $dx^1, \dots, dx^n$, между которыми заданы соотношения: $dx^i \wedge dx^j + dx^j \wedge dx^i = 0$, $i \neq j$; операция $\wedge$ билинейна, алгебра Λ порождена (в аддитивном смысле) мономами: $dx^1, \dots, dx^n$;

$dx^i \wedge dx^j$, $i < j$; ...; $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $i_1 < \ldots < i_k$; $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Как известно из курса алгебры, между этими мономами нет линейных соотношений с постоянными коэффициентами; мультипликативными образующими алгебры $\Lambda(dx^1, \ldots, dx^k)$ являются $dx^1, \ldots, dx^k$ — базис T^*. Алгебра Λ может быть разложена в прямую сумму линейных подпространств Λ^k; $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k$, где Λ^k, $1 \leqslant k \leqslant n$, порождено мономами: $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $i_1 < \ldots < i_k$; $\Lambda^0 \cong \mathbb{R}$, порождено единицей 1. Размерность алгебры Λ равна 2^n.

Рассмотрим новую алгебру $\Lambda(M^n)$, элементами которой являются линейные комбинации $\omega^{(k)} = T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ и всевозможные линейные комбинации $\sum_{k=0}^{n} \omega^{(k)}$, где $T_{i_1 \ldots i_k}(x)$ — кососимметричное тензорное поле ранга k и индексы $i_1 \ldots i_k$ упорядочены в порядке возрастания. Умножение в $\Lambda(M^n)$ определено ниже.

Мы определили элемент $\omega^{(k)}$ в данной системе координат: $x^1, \ldots, x^n$, причем $0 \leqslant k \leqslant n$. Что происходит с этим объектом при замене $(x) \to (x')$?

Лемма 3. *Элементы* $\omega^{(k)} = T_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ *определены инвариантно, в том смысле, что при замене* $(x) \to (x')$ *имеем:*

$$T_{i'_1 \ldots i'_2} dx^{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_k} \equiv T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Доказательство. Достаточно выполнить замену $(x) \to (x')$ и воспользоваться законами преобразования $T_{i_1 \ldots i_k}(x)$ и dx^i. □

Определение. Элементы $\omega^{(k)}$ алгебры $\Lambda(M^n)$ называются *внешними дифференциальными формами.*

Размерность $\Lambda(M^n)$ бесконечна. Каждая внешняя форма $\omega^{(k)}$ однозначно определяет набор компонент $T_{i_1 \ldots i_k}(x)$ кососимметричного тензора; верно и обратное: любой кососимметричный тензор (точнее — тензорное поле) однозначно определяет внешнюю форму. Язык внешних форм — это один из языков описания кососимметричных полей.

Замечание. При определении внешних форм можно было бы рассматривать линейные комбинации вида $A_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, где $A_{i_1 \ldots i_k}$ — произвольное тензорное поле (не обязательно кососимметричное), и суммирование ведется по всем наборам $i_1 \ldots i_k$ (не упорядоченным). В силу косой симметрии образующих $dx^1, \ldots, dx^n$ относительно внешнего умножения имеем:

$$A_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = A_{[i_1 \ldots i_k]} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \quad i_1 < \ldots < i_k;$$

т. е. любая комбинация $A_{i_1\dots i_k}\cdot dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$ порождает некоторую внешнюю дифференциальную форму.

Зададим умножение в $\Lambda(M^n)$. Если $\omega^{(k)}=T_{i_1\dots i_k}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$, $(i_1<\dots i_k)$, и $\omega^{(s)}=P_{j_1\dots j_s}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_s}$, $(j_1<\dots<j_s)$, — две внешние формы, то их произведение $\omega^{(k+s)}=\omega^{(k)}\wedge\omega^{(s)}$ определим как форму вида:

$$\omega^{(k+s)}=(T_{i_1\dots i_k}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k})\wedge(P_{j_1\dots j_s}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_s})=$$
$$=T_{i_1\dots i_k}P_{j_1\dots j_s}\underset{(i_1<\dots<i_k)}{dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}}\wedge\underset{(j_1<\dots<j_s)}{dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_s}}$$
$$=T_{[i_1\dots i_k}P_{j_1\dots j_s]}\underset{(i_1<\dots<i_{k+s})}{dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{k+s}}}.$$

Ясно, что умножение форм совпадает с внешним умножением соответствующих им тензорных полей. Итак, $\Lambda(M^n)$ снабжается структурой алгебры с единицей; умножение ассоциативно (так как ассоциативно умножение в алгебре $\Lambda(dx^1,\dots,dx^n)$, но не коммутативно. Алгебра $\Lambda(M^n)$ распадается в прямую сумму линейных подпространств $\Lambda^k(M^n)=\{T_{i_1\dots i_k}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\}$. Число k называется степенью формы $\omega^{(k)}$. Элементы $\omega^{(k)}$ называются однородными элементами алгебры $\Lambda(M^n)$. Дифференциальные формы $\omega^{(k)}$ удобно трактовать как полилинейные кососимметрические отображения. Если $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k\in T_*M^n$, то, считая, что $dx^i(\vec{a})=a^i$ (i-я координата), т. е. опуская множитель dt, получаем:

$$\omega^{(k)}(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)=(T_{i_1\dots i_k}(x)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k})(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)=$$
$$=T_{i_1\dots i_k}(x)dx^{[i_1}(\vec{a}_1)\cdot\dots\cdot dx^{i_k]}(\vec{a}_k)=T_{i_1\dots i_k}(x)a_1^{[i_1}\cdot\dots\cdot a_k^{i_k]}=$$
$$=T_{[i_1\dots i_k]}a_1^{i_1}\dots a_k^{i_k}=T_{i_1\dots i_k}a_1^{i_1}\dots a_k^{i_k}.$$

Итак:

$$\omega^{(k)}\colon\underbrace{T_x\times\dots\times T_x}_{k}\to R;\quad \omega^{(k)}\colon(\vec{a}_{\sigma(1)},a_2\dots a_k)=(-1)^\sigma\omega^{(k)}(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k).$$

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ и пусть $x^1,\dots,x^n$ — декартовы координаты. Пусть $\omega^{(n)}=dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$ — внешняя форма максимального ранга; $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\in\mathbb{R}^n$ — произвольный набор векторов-аргументов из $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\operatorname{vol}\Pi(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)$, n-мерный объем параллелепипеда $\Pi(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)$, натянутого на $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ (рис. 3).

Лемма 4. *Пусть* $A=\begin{pmatrix}a_1^1&\dots&a_1^n\\ \dots&\dots&\dots\\ a_1^n&\dots&a_n^n\end{pmatrix}$ *— матрица, построенная из координат* $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$. *Тогда* $\det(A)=\operatorname{vol}\Pi(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)$.

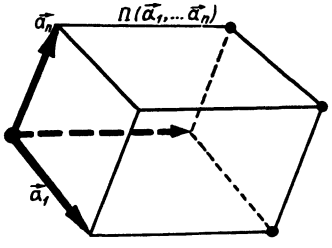


Рис. 3

Доказательство. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть формула доказана для $k \leqslant n-1$. Рассмотрим $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$; так как $\operatorname{vol}\Pi(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ не меняется при вращениях, то можно поместить $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}$ в плоскость, натянутую на $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$, где $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда матрица A принимает вид:

B'	$*$
$0 \ldots\ldots 0$	a'^n_n

Следовательно:

$$\det A = \det A' = (\det B') \cdot (a')^n_n =$$
$$= (\operatorname{vol}\Pi(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1})) \cdot (a')^n_n = \operatorname{vol}\Pi(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$$

(рис. 4). Здесь $(a')^n_n$ — проекция $\vec{a}_n$ на $\vec{e}_n$. □

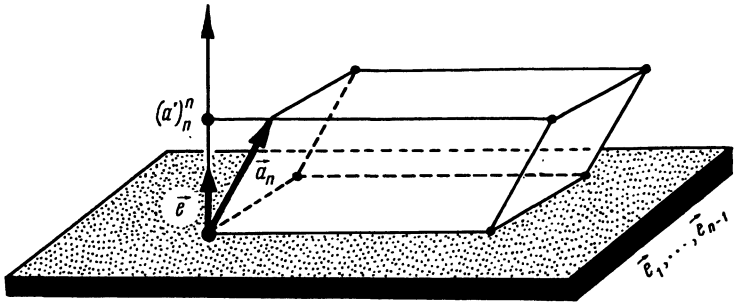


Рис. 4

Лемма 5. *Пусть $\mathbb{R}^n$ отнесено к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$, и пусть $\omega^{(n)} = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ — форма максимального ранга. Тогда $\omega^{(n)}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \operatorname{vol}\Pi(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$.*

Доказательство. Так как $dx^i(\vec{a}) = a^i$, то:

$$\omega^{(n)}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) =$$
$$= dx^{[1}(\vec{a}_1) \cdot \ldots \cdot dx^{n]}(\vec{a}_n) = a_1^{[i_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{i_n]} = \det A,$$

где $a = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$, т. е. $\det A = \operatorname{vol}\Pi(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$. □

Итак, значение стандартной формы $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ на любом наборе $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ равно евклидову объему параллелепипеда, натянутого на $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. В частности, объем параллелепипеда (в такой трактовке) не скаляр; например, он меняет знак при нечетной перестановке $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ (это — «ориентированный объем»). Итак, мы представили $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ как n-линейный функционал от $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Эта точка зрения на объем, как на значение внешней формы (от аргументов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$), плодотворна; она лежит в основе многих геометрических фактов; например, из нее извлекается инвариантность кратного интеграла при замене переменных.

Аналогичная интерпретация возможна и для форм меньшей степени. Пусть, например, в $\mathbb{R}^n$ задана форма $\omega^{(k)} = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$. Требуется найти значение $(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k})(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$, где $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ — произвольный набор векторов в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\omega^{(k)}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) = \operatorname{vol} \Pi(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ — объем k-мерного параллелепипеда, расположенного в координатной плоскости $\mathbb{R}^k(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_k})$ и натянутого на векторы $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \in \mathbb{R}^k$, являющиеся ортогональными проекциями векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ на плоскость $\mathbb{R}^k(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_k})$ (рис. 5).

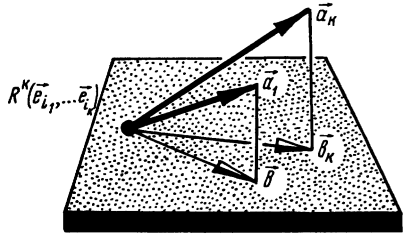


Рис. 5

Если форма $\omega^{(k)}$ есть комбинация вида $\omega_{i_1, \ldots, i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, то ее значение на $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ будет линейной комбинацией объемов $\operatorname{vol} \Pi(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ с «весами» $\omega_{i_1 \ldots i_k}$.

Укажем на связь внешних форм максимальной степени с объемом ограниченной области на римановом многообразии. Будем считать, что читатель знаком с определением многомерного (кратного) интеграла Римана. Пусть M^n — гладкое риманово многообразие и D — открытая область в M^n, диффеоморфная открытой области U в $\mathbb{R}^n$, отнесенном к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$. Конечно, не для каждой области D на M^n существует такой диффеоморфизм, но для простоты мы ограничимся «достаточно малыми» областями. Пусть $g(x)$ — определитель матрицы $(g_{ij}(x))$.

Определение. *Объемом области* $D \subset M^n$ называется число:

$$V(D) = \operatorname{vol}(D) = \int_{U(x)} \cdots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в области $U(x) \subset \mathbb{R}^n$ (рис. 6).

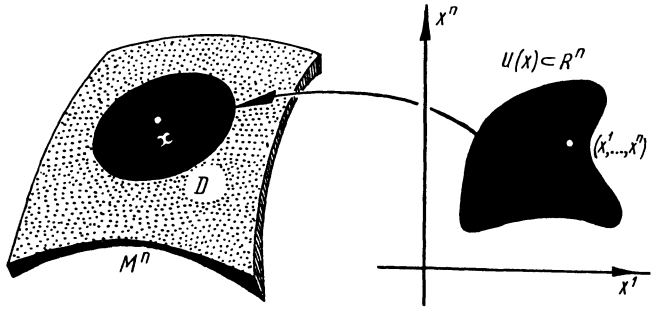


Рис. 6

Это определение нужно обосновать, т. е. показать, что в простейших случаях эта формула приводит к тем же значениям объема, которые получаются из других соображений.

(1). Пусть $M^n = \mathbb{R}^n$, $U = D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, т. е. $g(x) \equiv 1$, а потому

$$\operatorname{vol}(D) = \int\limits_{U(x)} \cdots \int dx^1 \ldots dx^n,$$

что совпадает с обычным, «евклидовым», определением объема ограниченной области в $\mathbb{R}^n$. При этом считается, что в символ $dx^1, \ldots, dx^n$, кроме его формального смысла (см. определение интеграла Римана) вкладывается также следующее содержание: если считать $dx^1, \ldots, dx^n$ бесконечно малыми величинами, то $d\sigma = dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n$ — есть бесконечно малый объем бесконечно малого параллелепипеда со сторонами $dx^1, \ldots, dx^n$, измеренными в декартовых координатах $x^1, \ldots, x^n$. Итак, объем ограниченной области $U(x) \subset \mathbb{R}^n$ можно представлять как «сумму» бесконечного числа объемов бесконечно малых параллелепипедов, вычисленных по обычной формуле (т. е. объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению всех его ребер, выходящих из одной вершины).

(2). Пусть M^n — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^N$, $g_{ij}(x)$ — индуцированная риманова метрика на $M^n \subset \mathbb{R}^N$ (объемлющая метрика — евклидова). Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — криволинейные координаты в окрестности точки P на M^n; пусть область D содержится в области действия координат $(x^1, \ldots, x^n)$; тогда можно считать, что объем области D — $\operatorname{vol}(D)$ — есть сумма бесконечного числа объемов бесконечно малых параллелепипедов (уже не прямоугольных) $\{\Pi_k\}$, которые получаются при разбиении D координатными плоскостями $x^i = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{const}}$ (с «бесконечно малым шагом»)

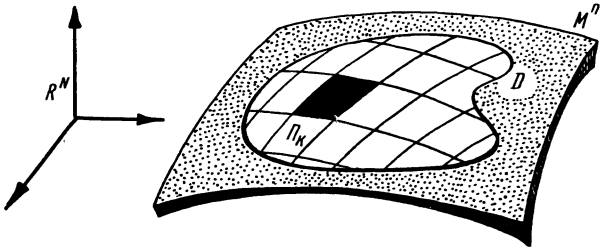


Рис. 7

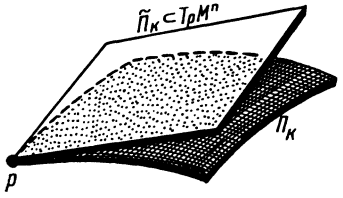


Рис. 8

(рис. 7). Так как M^n — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^N$, то можно считать, что Π_k хорошо аппроксимируется «линейным параллелепипедом» $\widetilde{\Pi}_k$, содержащимся в $T_P M^n$, где P — вершина Π_k (рис. 8). Стороны Π_k направлены вдоль координатных линий $\{x^i\}$, проходящих через P. Пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ — векторы скоростей этих линий (т. е. $\vec{a}_i$ — векторы скорости линии, вдоль которой меняется только i-я координата x^i, а остальные фиксированы). Так как g_{ij} индуцирована евклидовой евклидовой метрикой, то $\operatorname{vol}(\Pi_k) \cong \operatorname{vol}(\widetilde{\Pi}_k)$ совпадает с евклидовым объемом (n-мерным) $\widetilde{\Pi}_k$, вложенного в $\mathbb{R}^n$. Итак, $\operatorname{vol}(D) \cong \sum\limits_{(i)} \operatorname{vol}(\widetilde{\Pi}_k)$. Пусть в точке P, наряду с исходными криволинейными координатами $x^1, \ldots, x^n$ введены координаты $y^1, \ldots, y^n$, ортогональные в P, т. е. задающие декартовы координаты в $T_P M^n$. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — векторы скоростей этих новых координатных линий в точке P; пусть они единичной длины. Тогда в координатах $y^1, \ldots, y^n$ имеем: $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$ в точке P (только в одной точке, вообще говоря). Пусть $(x) \to (y)$ — замена и J — матрица Якоби в точке P. Тогда J, действуя в $T_P M^n$, переводит $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ в $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Докажем, что $\operatorname{vol}(\widetilde{\Pi}_k) = \sqrt{g(x)}\, d\sigma^n$, где $d\sigma^n = dx^1, \ldots, dx^n$ — евклидов объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами $dx^1, \ldots, dx^n$. Рассмотрим параллелепипед Π'_k, натянутый на $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Тогда $\operatorname{vol}\Pi'_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \sqrt{g(x)}$, где vol обозначает евклидов объем. В самом деле, так как в координатах $y^1, \ldots, y^n$ тензор g_{ij} имеет вид: $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$, то $(g_{ij}(x)) = J(g_{ij}(y))J^\top = JEJ^\top = JJ^\top$, т. е. $g(x) = \det(g_{ij}(x)) = \det(JJ^\top) = \det(J)^2$, т. е. $\det J = \sqrt{g(x)}$. Так как при действии J ортерепер $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ переходит в $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$,

то, в силу леммы 4: $\sqrt{g(x)} = \det J = \operatorname{vol} \Pi'_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$. Утверждение доказано.

Так как $\widetilde{\Pi}_i$ натянут на $(dx^1)\vec{a}_1, \ldots, (dx^n)\vec{a}_n$ (рис. 9), то

$$\operatorname{vol} \widetilde{\Pi}_k(\vec{a}_1 \cdot dx^1, \ldots, \vec{a}_n \cdot dx^n) = \left(\operatorname{vol} \Pi'_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)\right) \cdot dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n = \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n.$$

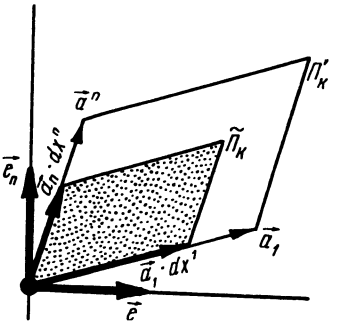


Рис. 9

Так как из объемов $\widetilde{\Pi}_k$ (при их суммировании) и набирается объем области D, то $\operatorname{vol}(D) = \int\limits_{U(x)} \cdots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n$, что и требовалось.

(3). Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — гладкое подмногообразие, задаваемое радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$; тогда в силу данного определения площади области D на M^2, имеем:

$$\operatorname{vol}(D) = \iint\limits_{U(u,v)} \sqrt{g(u,v)}\, du dv; \quad \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2,$$

т. е.

$$\operatorname{vol}(D) = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du dv = \iint\limits_{U(v)} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, du dv,$$

где через $[\ ,\ ]$ обозначено векторное произведение, а через $|[\ ,\ ]|$ — его модуль. Итак, формула для площади области совпала с одной из формул, выводимых в курсе классического анализа.

(4). Пусть подмногообразие $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ задано в виде графика гладкой функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Найдем объем ограниченной области $D \subset M^{n-1}$. Можно считать, что $\operatorname{vol}(D) = \Sigma(d\sigma)$, где $d\sigma$ — бесконечно малый объем бесконечно малого параллелепипеда. Проектируя его на координатную гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}(x^1, \ldots, x^{n-1})$, получаем на ней бесконечно малый объем $d\omega = dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n$, связанный с $d\sigma$ так: $d\sigma = \dfrac{d\omega}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \cdot dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{n-1}$ (рис. 10). Здесь α — угол между нормалью $\vec{m}$ к M^{n-1} и вектором $\vec{e}_n$. Найдем $\cos\alpha$. Ясно, что $\cos\alpha = \dfrac{\langle \vec{e}_n, \vec{m} \rangle}{|\vec{e}_n| \cdot |\vec{m}|} = \langle \vec{e}_n, \vec{m} \rangle$, где

$$\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1); \quad \vec{m} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|},$$

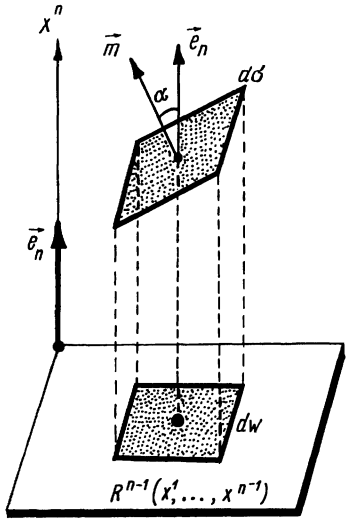


Рис. 10

где

$$F(x^1, \ldots, x^n) = x^n - f(x^1, \ldots, x^{n-1});$$

$$\operatorname{grad} F(-f_{x^1}, \ldots, -f_{x^{n-1}}, 1);$$

$$|\operatorname{grad} F| = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2};$$

$$\langle \vec{e}_n, \vec{m} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{n-1}.$$

Итак,

$$\operatorname{vol}(D) = \int\limits_{U(x^1, \ldots, x^{n-1})} \cdots \int \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}\, dx^1 \ldots dx^{n-1}.$$

Совпадает ли эта формула с общей формулой, предложенной выше для определения объема? Найдем явный вид индуцированной метрики на M^{n-1}. Имеем:

$$ds^2 = \left(1 + (f_{x^i})^2\right)(dx^i)^2 + 2 f_{x^i} f_{x^j}\, dx^i\, dx^j;$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + (f_{x^1})^2 & & f_{x^i} f_{x^j} \\ & \ddots & \\ f_{x^i} f_{x^j} & & 1 + (f_{x^{n-1}})^2 \end{pmatrix};$$

$g(x) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2$ (проверьте!). Например, если $n = 3$, то: $g(x) = 1 + f_x^2 + f_y^2$.

ЗАДАЧА: Найдите площадь круга радиуса r на плоскости Лобачевского и на двумерной сфере.

Итак, мы предъявили несколько обоснований общей формулы: $\operatorname{vol}(D) = \int\limits_{U(x)} \cdots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \ldots dx^n$, с помощью которой предлагается вычислять объемы ограниченных областей D на римановых многообразиях. Правда, мы предполагали, что D содержится в одной карте. При обосновании формулы мы доказали, что для числа $\operatorname{vol}(D)$ существует представление:

$$\operatorname{vol}(D) = \int\limits_{U(x)} \cdots \int \sqrt{g(x)} \cdot (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(\vec{a}_1\, dt^1, \ldots, \vec{a}_n\, dt^n),$$

т. е.

$$(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(\vec{a}_1 dt^1, \ldots, \vec{a}_n dt^n) =$$
$$= dx^{[1}(\vec{a}_1 dt^1) \cdot \ldots \cdot dx^{n]}(\vec{a}_n dt^n) = dt^{[i_1} \ldots dt^{i_n]} = dt^1 \cdot \ldots \cdot dt^n,$$

где $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ — касательные векторы скорости к координатным линиям $\{x^i\}$ в точке P, а $dt^1, \ldots, dt^n$ — величины бесконечно малых смещений из P вдоль этих линий; эти смещения образуют бесконечно малый параллелепипед $\widetilde{\Pi}_k(\vec{a}_1 dt^1, \ldots, \vec{a}_n dt^n)$. Поэтому формулу для объема можно записать так:

$$\mathrm{vol}\,(D) = \int\limits_{U(x(t))} \cdots \int \sqrt{g(x(t))}\,(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(\vec{a}_1 dt^1, \ldots, \vec{a}_n dt^n).$$

Обычно ее пишут в сокращенном виде: $\int\limits_{U(x)} \cdots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, подразумевая развернутую формулу, приведенную выше.

Ясно, что интеграл $\int\limits_{U(x)} \cdots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ не зависит от выбора локальной системы координат. В самом деле, если дана замена: $(x) \to (y)$, то:

$$\int\limits_{U(y)} \cdots \int \sqrt{g(y)}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \int\limits_{U(y)} \cdots \int (\det J_y) \cdot dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n =$$
$$= \int\limits_{U(y(x))} \cdots \int (\det J_x) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \cdot dy^1(x) \wedge \ldots \wedge dy^n(x) =$$
$$= \int\limits_{U(y(x))} \cdots \int (\det J_x) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$
$$= \int\limits_{U(y(x))} \cdots \int (\det J_x) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int\limits_{U(x)} \cdots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Интеграл $\int\limits_D \cdots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ иногда удобно рассматривать как «внешнюю дифференциальную форму», применение которой к семейству векторов вида $\vec{a}_1(x)dt^1, \ldots, \vec{a}_n(x)dt^n$ дает число — объем области D. Рассмотрим еще одну структуру: связанную с кососимметрическими тензорами второго ранга.

Определение. Говорят, что на M^{2n} задано *кососимметрическое скалярное произведение*, если на M^n задана внешняя 2-форма $\omega^{(2)} = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$, матрица которой (ω_{ij}) невырождена, т. е. $\det(\omega_{ij}) \neq 0$. (Такие 2-формы называются невырожденными.

Из невырожденности ω_{ij} следует существование обратного поля: ω^{ij}, т. е. $\omega_{ij}\omega^{jk} = \delta_i^k$. С формой $\omega^{(2)}$ можно связать форму максимального ранга Ω, а именно: $\Omega = \Omega^{(2)} = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n раз).

Теорема 1. *Кососимметрическое произведение* $\omega^{(2)}$: $\omega^{(2)}(\vec{a}, \vec{b}) = \omega_{ij} a^i b^j$ *невырожденно в точке* $P \in M^{2n}$ *тогда и только тогда, когда форма* $\Omega^{(2n)}$ *отлична от нуля в этой точке.*

Доказательство. Поступим по аналогии с доказательством формулы: $d\sigma = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ для римановой метрики. Доказательство теоремы 1 сводится к проверке подобной формулы для кососимметрического скалярного произведения. Так как Ω — форма максимального ранга, то в координатах $x^1, \ldots, x^{2n}$ она имеет вид: $\Omega = f(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n}$, где $f(x)$ — гладкая функция на M^{2n}. Отличие от нуля Ω в точке P означает, что $f(x) \neq 0$. Мы утверждаем, что $f(x) = \sqrt{\det(\omega_{ij})}$. Отсюда и будет следовать теорема. В самом деле, рассмотрим матрицу ω_{ij} в точке P. Тогда в окрестности P можно выбрать новые координаты $y^1, \ldots, y^{2n}$, в которых $(\omega_{ij}(y))$ (в точке P) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}} & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Напомним, что любая кососимметрическая матрица может быть приведена к такому виду (независимо от ее вырожденности или невырожденности). Если $(\omega_{ij}(y))$ невырождена, то она не имеет нулевого собственного числа. Пусть (ω_{ij}) невырождена; J — матрица Якоби замены $(x) \to (y)$; тогда: $A(x) = JA(y)J^\top$, где $A(x) = (\omega_{ij}(x))$, $A(y) = (\omega_{ij}(y))$, т. е. $\det J = \sqrt{\det A(x)} = \sqrt{\det(\omega_{ij}(x))}$. Относительно $y^1, \ldots, y^{2n}$ форма Ω имеет в точке P вид: $\Omega(y) = dy^1 \ldots \wedge dy^{2n}$. Переходя к $x^1, \ldots, x^{2n}$, т. е. делая замену: $(x) \to (y)$, имеем: $\Omega(x) = \det J\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n}$, т. е. $f(x) = \sqrt{\det(\omega_{ij}(x))}$, что и требовалось. Для невырожденной матрицы (ω_{ij}) утверждение доказано. Если же $\det(\omega_{ij}) = 0$, то (ω_{ij}) имеет нулевые собственные числа, т. е. в точке P в ее каноническом разложении $\omega = \Sigma dx^i \wedge dx^{n+i}$ не содержатся некоторые переменные (отвечающие нулевым числам). Следовательно, рассматривая n-ю внешнюю степень, получаем, что $\Omega = 0$. □

Если $n=2$, то:

$$\omega^{(2)}=\omega_{12}dx^1\wedge dx^2+\omega_{34}dx^3\wedge dx^4;$$

$$\Omega^{(4)}=\omega\wedge\omega=\frac{1}{2!}(2\omega_{12}\omega_{34}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dx^4)=(\omega_{12}\omega_{31})dx^1\wedge\ldots\wedge dx^4;$$

$$f^2(x)=\det(\omega_{ij})=(\omega_{12}\omega_{31})^2;\quad f(x)=\omega_{12}\omega_{34}=\sqrt{\det(\omega_{ij})}.$$

§ 3. Связность и ковариантное дифференцирование

1. Определение и свойства аффинной связности.

До сих пор мы рассматривали только алгебраические операции над тензорами; операцию дифференцирования мы пока не затрагивали. Это — не случайность; сейчас мы объясним причины нашей осторожности.

Необходимость уметь дифференцировать тензорные поля возникает в большом числе прикладных задач (см., например, определение дивергенции векторного поля). Первым кандидатом на эту операцию является обычное дифференцирование компонент тензоров в криволинейных координатах. Рассмотрим, для простоты, ковариантное поле $T_{i_1,\ldots,i_k}$. Фиксируем криволинейную систему $x^1,\ldots,x^n$ и построим набор функций $P_{\alpha;\,i_1,\ldots,i_k}=\dfrac{\partial T_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^\alpha}$, т. е. рассмотрим частные производные (в обычном смысле) от компонент тензорного поля. Выполним эту операцию в каждой системе координат; т. е. сопоставим в каждой системе набору компонент $T_{i'_1,\ldots,i'_k}$ новый набор: $P_{\alpha';\,i'_1,\ldots,i'_k}=\dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha'}T_{i'_1,\ldots,i'_k}}$. Вопрос: образуют ли эти наборы тензорное поле P? Другими словами, будут ли эти наборы преобразовываться друг в друга при замене координат по тензорному закону? Проверим это вычисление. При переходе от (x) к (x') возникает преобразование:

$$P_{\alpha';\,i'_1\ldots i'_k}=\frac{\partial T_{i'_1\ldots i'_k}}{\partial x^{\alpha'}}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}T_{i_1\ldots i_k}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(T_{i_1\ldots i_k})\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}+T_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x_{i'_k}}\right)=$$

$$=P_{\alpha;\,i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}+T_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x_{i'_k}}\right).$$

Итак,

$$P_{\alpha'i'_1\ldots i'_k}=P_{\alpha i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}+S_{\alpha'i'_1\ldots i'_k}(T,x,x'),$$

где

$$S_{\alpha' i'_1 \dots i'_k} = T_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} \right).$$

При замене $(x) \to (x')$ общего вида выражение $S_{\alpha' i'_1 \dots i'_k}$, вообще говоря, отлично от нуля, т. е. $P_{\alpha i_1 \dots i_k}$ преобразуются не по тензорному закону. Итак, операция обычного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x^i}$ не тензорная операция; она переводит тензорное поле не в тензорное поле. Из полученной формулы также видно, в каких предположениях операция $\frac{\partial}{\partial x^i}$ является тензорной: она будет таковой только относительно линейных замен $(x) \to (x')$; если замена линейна, то $S_{\alpha'; i'_1 \dots i'_k} \equiv 0$. Для того, чтобы еще больше «дискредитировать» операцию $\frac{\partial}{\partial x^i}$ с тензорной точки зрения, рассмотрим векторное поле T^i, отнесенное к криволинейной системе (x), и попытаемся определить для него дивергенцию по формуле: $\operatorname{div}(\vec{T}) = \sum\limits_i \frac{\partial T^i}{\partial x^i}$, «списав» ее с определения дивергенции в евклидовой системе координат. Будет ли это выражение скаляром, т. е. будет ли оно сохраняться при произвольной замене $(x) \to (x')$? Проверим равенство: $\operatorname{div}(\vec{T})_{(x)} = \operatorname{div}(\vec{T})_{(x')}$, где (x) и (x') — произвольные системы. Получаем:

$$\operatorname{div}(\vec{T})_{(x')} = \sum_{i'} \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T^i \right) = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + T^i \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i} =$$

$$= \sum_i \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + R(\vec{T}, x, x') = \operatorname{div}(\vec{T})_{(x)} + R(\vec{T}, x, x'),$$

где $R(\vec{T}, x, x') = T^i \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i}$. При произвольной замене, величина $R(\vec{T}, x, x')$ отлична от нуля, т. е. предложенное нами определение дивергенции не инвариантно. Из явной формулы для $R(T, x, x')$ видно, что $R = 0$, например, при линейных заменах. Итак, по отношению к нелинейным заменам, операция $\frac{\partial}{\partial x^i}$ не является тензорной операцией.

Наша цель: научиться инвариантно дифференцировать тензорные поля в произвольных системах координат. Это необходимо уметь делать уже хотя бы потому, что на гладких многообразиях локальные координаты «почти всегда» криволинейны. Итак, нужно найти операцию (обозначим ее через ∇ — «набла») со следующими свойствами (будем пока считать, что $M^n = \mathbb{R}^n$);

(1). В декартовых координатах в $\mathbb{R}^n$ операция ∇ должна совпадать с обычным дифференцированием $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$.

(2). Операция ∇ должна быть тензорной операцией, т. е. если T — тензорное поле на $\mathbb{R}^n$ (отнесенное к криволинейным координатам), то и ∇T должно быть тензорным полем.

Начнем с примеров. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ векторное поле T^i; пусть (x) — декартова система координат, (x') — произвольная система. Рассмотрим ∇ и запишем требования (1) и (2), наложенные на ∇. Тогда в системе (x) имеем: $(\nabla T)^i_j = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^j}$; при переходе к (x') должно быть: $(\nabla T)^{i'}_{j'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(\nabla T)^i_j$. Перед нами стоит задача: найти явный вид ∇, т. е. вычислить компоненты $(\nabla T)^{i'}_{j'}$ в произвольной системе координат. Имеем:

$$(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}T^{k'}\right) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^j} +$$
$$+ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}T^{k'}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) = \delta^{i'}_{k'}\delta^{\alpha'}_{j'}\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{\alpha'}} + T^{k'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}};$$
$$(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'}\Gamma^{i'}_{j'k'}; \quad \Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}.$$

Итак, возникли некоторые функции $\Gamma^{i'}_{j'k'}$, измеряющие отклонение ∇ от операции обычного (евклидового) дифференцирования. Мы нашли действие ∇ на векторных полях.

Рассмотрим теперь в $\mathbb{R}^n$ ковекторное поле T_i. Для отыскания явного вида ∇ на T_i, следует снова решить систему уравнений: $(\nabla T)_{ij} = \dfrac{\partial T_i}{\partial x_j}$; $(\nabla T)_{i'j'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(\nabla T)_{ij}$. Имеем:

$$(\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}T_{k'}\right) =$$
$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial T_{k'}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}T_{k'}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) =$$
$$= \delta^{k'}_{i'}\delta^{\alpha'}_{j'}\frac{\partial T_{k'}}{\partial x^{\alpha'}} + T_{k'}\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} + T_{k'}\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'};$$

где $\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'} = \dfrac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\partial x^i}\cdot\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\cdot\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$. Итак, $(\nabla T)_{i'j'} = \dfrac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} + T_{k'}\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'}$; где $\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'}$ — функции, измеряющие отклонение ∇ от обычного дифференцирования на ковекторных полях.

Лемма 1. *Имеет место равенство* $\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'}$.

Доказательство. Очевидное тождество $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\cdot\dfrac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} = \delta^{i'}_{k'}$. Дифференцируя его по $x^{p'}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{p'}\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{p''}\partial x^{i''}}\cdot\frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}} = 0,$$

т. е. $\Gamma^{i'}_{p'k'} + \widetilde{\Gamma}^{i'}_{p'k'} = 0$. Лемма доказана. □

Итак, действие ∇ на векторные и ковекторные поля (в криволинейных координатах в $\mathbb{R}^n$) имеет вид:

$$(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'}\Gamma^{i'}_{k'j'}; \quad (\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} - T_{k'}\Gamma^{k'}_{i'j'}.$$

Теперь рассмотрим действие ∇ на операторных полях, т. е. на полях типа $(1,1)$. Имеем:

$$(\nabla T)^{i}_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(T^i_j\right);$$

$$(\nabla T)^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j}T^{\alpha'}_{p'}\right) =$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j}\frac{\partial T^{\alpha'}_{p'}}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^k} + T^{\alpha'}_{p'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{q'}\partial x^{\alpha'}}\cdot\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} +$$

$$+ T^{\alpha'}_{p'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^k\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}}(T^{i'}_{j'}) + T^{p'}_{j'}\Gamma^{i'}_{p'k'} - T^{i'}_{p'}\Gamma^{p'}_{j'k'}.$$

Итак, мы нашли действие ∇ на T^i_j.

Теорема 1. *Пусть $M^n = \mathbb{R}^n$, (x) — декартовы координаты, (x') — произвольные криволинейные координаты. Тогда в $\mathbb{R}^n$ существует тензорная операция ∇, задаваемая на произвольном тензорном поле $T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_p}$ формулой:*

$$(\nabla T)^{i'_1\dots i'_k}_{j'_1\dots j'_p;\,\alpha'} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(T^{i'_1\dots i'_k}_{j'_1\dots j'_p}\right) + \sum_{s=1}^{k} T^{i'_1\dots i'_s = q'\dots i'_k}_{j'_1\dots j'_p}\Gamma^{i'_s}_{q'\alpha'} - \sum_{s=1}^{p} T^{i'_1\dots i'_k}_{j'_1\dots j'_s = q'\dots j'_p}\Gamma^{q'}_{j'_s\alpha'},$$

где функции $\Gamma^{i'}_{j'q'}$ преобразуются при замене $(x') \to (x'')$ так:

$$\Gamma^{i''}_{j''k''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\Gamma^{i'}_{j'k'} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}.$$

Доказательство. Явный вид ∇ на поле $T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_p}$ устанавливается дословным повторением проделанных выше вычислений для случая векторных, ковекторных, и операторных полей, повторенных столько раз, каков ранг поля $T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_p}$. Выписывание формул оставляется читателю, как обязательное упражнение. Изучим закон преобразования $\Gamma^{i'}_{j'k'}$. Имеем:

$$\nabla_{k'}T^{i'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{p'}\Gamma^{i'}_{p'k'};$$

$$\nabla_{k''}T^{i''} = \frac{\partial T^{i''}}{\partial x^{k''}} + T^{p''}\Gamma^{i''}_{p''k''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}T^{i'}\right) + \frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}}T^{p'}\Gamma^{i''}_{p''k''} =$$

$$= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\cdot\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{i'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{i'}} + T^{p'}\frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}}\Gamma^{i''}_{p''k''} =$$

$$= \nabla_{k''}T^{i''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\cdot\nabla_{k'}T^{i'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{p'}\Gamma^{i'}_{p'k'}\right).$$

Сравнивая, получаем:

$$T^{p'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\Gamma^{i'}_{p'k'} = T^{p'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}} + T^{p'}\frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}}\Gamma^{i''}_{p''k''}.$$

Так как это тождество должно иметь место для любого поля T^i, то

$$\Gamma^{i''}_{p''k''} = \Gamma^{i'}_{p'k'}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}.$$

В силу леммы 1

$$\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}\cdot\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}}\cdot\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} = -\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{p''}\partial x^{k''}}\cdot\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} = -\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{p''}\partial x^{k''}}\cdot\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}.$$

Теорема доказана. □

Мы доказали теорему существования «тензорного дифференцирования», правда, сделали это только для случая, когда $M^n = \mathbb{R}^n$, т. е. снабжено декартовыми координатами. Это позволило нам в явном виде вычислить $\Gamma^{i'}_{j'k'}$, измеряющие отклонение ∇ от евклидового дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x^i}$, а именно:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} = -\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{j}\partial x^{i}}\cdot\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}.$$

Мы существенно использовали то, что в $\mathbb{R}^n$ существуют выделенные, привилегированные координаты — декартовы, в которых операция ∇ совпала с обычным дифференцированием. Перейдем теперь к рассмотрению произвольных гладких многообразий. Новую операцию ∇ зададим аксиоматически, положив в основу определения вычисленные выше свойства ∇ на $\mathbb{R}^n$.

Определение. Будем говорить, что на гладком многообразии M^n задана операция ковариантного дифференцирования ∇, если для каждого гладкого атласа в каждой карте задан набор гладких функций Γ^i_{jk}, преобразующихся при замене координат по закону:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\Gamma^{i}_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\cdot\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}.$$

Тогда ∇ задается формулой:

$$(\nabla T)^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_p;\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_p}\right) + \sum_{s=1}^{k} T^{i_1\dots i_s=q;\dots i_k}_{j_1\dots j_p}\Gamma^{i_s}_{q\alpha} - \sum_{s=1}^{p} T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_s=q;\dots j_p}\Gamma^{q}_{j_s\alpha}.$$

Существование таких M^n, на которых можно ввести ∇, доказано нами выше: можно положить $M^n = \mathbb{R}^n$; тогда Γ^i_{jk} задаются полученными нами выше формулами. Важно, что набор Γ^i_{jk} не образует

тензора! Эти функции называются символами Кристоффеля. Их закон преобразования становится тензорным, например, в том случае, когда замена $(x) \to (x')$ линейна. В определении ∇ система (x) (не штрихованная) уже не является декартовой системой, так как события развиваются уже на произвольном M^n. Иногда говорят, что символы Кристоффеля (или ∇) задают на M^n аффинную связность.

Определение. *Тензором кручения аффинной связности* Γ^i_{jk} называется тензор, задаваемый в каждой системе координат равенством: $\Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$.

Лемма 2. *Набор функций* Ω^i_{jk} *действительно образует тензор.*

Доказательство. Так как при замене координат Γ^i_{jk} преобразуются по закону:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}},$$

то альтернируя $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ по нижним индексам, получаем, в силу симметрии «нетензорного добавка» по j' и k' формулу

$$\Omega^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Omega^i_{jk}. \qquad \square$$

Определение. Связность (или ковариантное дифференцирование) ∇ называется *симметричной*, если тензор кручения равен нулю.

Связность, введенная нами в $\mathbb{R}^n$, была симметричной; это следует из формул, задающих ∇) в терминах частных производных. На произвольном M^n символы Кристоффеля уже не обязаны иметь вид вторых частных производных от координат — такая формула возникает только тогда, когда на M^n существуют локально евклидовы координаты. Если фиксирована система координат, то ∇ представляется в виде совокупности операций ∇_k — ковариантных дифференцирований по отдельным координатам (аналоги частных дифференцирований $\frac{\partial}{\partial x^k}$).

Предложение 1. *Ковариантное дифференцирование (связность)* ∇ *удовлетворяет соотношениям:*

(1) *операция* $\nabla = \{\nabla_k\}$ *— линейна;*

(2) *для произвольного тензорного поля* $T^{(i)}_{(j)}$ *набор функций* $\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = (\nabla T)^{(i)}_{k;(j)}$ *образует тензорное поле;*

(3) *если тензорное поле — скалярное (т. е. гладкая функция f на M^n, то*:

$$\nabla f = \{\nabla_k f\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x^k}\right\} = \operatorname{grad} f;$$

(4) *операция ∇ на векторных полях T^i имеет вид*:

$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma^i_{\alpha k}.$$

Операция ∇ на ковекторных полях T_i имеет вид:

$$\nabla_k T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T_\alpha \Gamma^\alpha_{ik};$$

(5) *операция ∇ удовлетворяет формуле Лейбница*:

$$\nabla_k \{T^{(i)}_{(j)} \cdot P^{(\alpha)}_{(\beta)}\} = (\nabla_k T^{(i)}_{(j)}) \cdot P^{(\alpha)}_{(\beta)} + T^{(i)}_{(j)} \cdot (\nabla_k P^{(\alpha)}_{(\beta)}),$$

где $T^{(i)}_{(j)}$ и $P^{(\alpha)}_{(\beta)}$ — произвольные тензорные поля.

Доказательство. Свойства (1)–(4) сразу следуют из определения ∇. Осталось доказать (5). Рассмотрим простейший случай: одно из полей $T^{(i)}_{(j)}$, $P^{(\alpha)}_{(\beta)}$ — скалярное. Тогда (5) вытекает из формулы Лейбница для скалярных функций. Пусть теперь поля T и P — векторные поля T^i, P^j. Имеем:

$$\nabla_k (T^i \cdot P^j) = \frac{\partial}{\partial x^k}(T^i \cdot P^j) + T^\alpha P^j \Gamma^i_{\alpha k} + T^i P^\alpha \Gamma^j_{\alpha k} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^k} T^i\right) P^j + T^i \frac{\partial}{\partial x^k}(P^j) + T^\alpha P^j \Gamma^i_{\alpha k} + T^i P^\alpha \Gamma^j_{\alpha k} =$$

$$= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma^i_{\alpha k}\right) P^j + T^i \left(\frac{\partial P^j}{\partial x^k} + P^\alpha \Gamma^j_{\alpha k}\right) = (\nabla_k T^i) P^j + T^i (\nabla_k P^j).$$

Доказательство для произвольных полей P и T является повторением предыдущего рассуждения после замены индексов i, j на мультииндексы $(i), (j)$ и применением формулы, определяющей ∇. Выписывание формул оставляем читателю как обязательное упражнение. □

Теорема 2. *Пусть на M^n задана операция $\nabla = \{\nabla_k\}$, удовлетворяющая* (1)–(5) (*см. Предложение* 1). *Тогда для произвольного тензорного поля $T^{(i)}_{(j)}$ имеет место тождество:*

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = \nabla_k T^{i_1 \dots i_\alpha}_{j_1 \dots j_p} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(T^{i_1 \dots i_\alpha}_{j_1 \dots j_p}\right) + \sum_{q=1}^{\alpha} T^{i_1 \dots i_q = r \dots i_\alpha}_{j_1 \dots j_p} \Gamma^{i_q}_{rk} - \sum_{s=1}^{p} T^{i_1 \dots i_\alpha}_{j_1 \dots j_s = \omega \dots j_p} \Gamma^{\omega}_{j_s k},$$

т. е. ∇ — ковариантное дифференцирование в смысле нашего определения (см. выше). Алгебраические свойства (1)–(5) *однозначно задают операцию ∇, т. е. ее можно вводить аксиоматически с помощью свойств* (1)–(5).

Доказательство. Действие ∇ на скалярных функциях и на тензорах ранга 1 задано согласно (1)–(4). Осталось найти ∇_k на тензорах произвольного типа. Докажем лемму: любое тензорное поле разлагается в линейную комбинацию (с гладкими коэффициентами) произведений полей первого ранга. В самом деле, любое тензорное поле есть полилинейное отображение.

$$T = a^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_q} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \colon (T_*)^q \times (T^*)^k \to \mathbb{R},$$

где $\vec{e}_{i_\alpha}$, e^{i_α} — поля 1-го ранга. Это определение инвариантно, и разложение возникает при фиксировании произвольной координатной системы (в другой системе разложение изменится). Здесь $a^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_q}$ — гладкие функции. Фиксируем какую-либо систему $x^1, \dots, x^n$ и пусть $\{T^{\alpha}_{i_s}\}$ (где i_s — фиксировано) — набор компонент тензора $\vec{e}_{i_s}$; соответственно $T^{j_s}_{\beta}$ (где j_s фиксировано) — набор компонент e^{j_s}. Записав T в этой системе, получаем:

$$T = a^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_q} T^{\alpha_1}_{i_1} \dots T^{\alpha_k}_{i_k} T^{j_1}_{\beta_1} \dots T^{j_q}_{\beta_q} \times$$
$$\times \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x^{\alpha_1}}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x^{\alpha_k}}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_q};$$

т. е.

$$T = T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_q} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x^{\alpha_1}}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x^{\alpha_k}}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_q},$$

где

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_q} = a^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_q} T^{\alpha_1}_{i_1} \dots T^{j_1}_{\beta_1} \dots T^{j_q}_{\beta_q}.$$

Любое полилинейное отображение полностью определяется коэффициентами относительно базиса. Вернемся к доказательству формулы действия ∇ на $T^{(i)}_{(j)}$. Для простоты рассмотрим случай 2-го ранга (для произвольного поля выкладки аналогичны). В силу линейности ∇ формулу (5) достаточно проверить на мономах $T_{ij} = \alpha(x) T_i P_j$, где $\alpha(x)$ — гладкая функция. Вычислим $\nabla_k(T_{ij})$ в предположении, что $\nabla_k(T_i)$ уже известны (см. (4)). По формуле Лейбница (5) имеем:

$$\nabla_k(T_{ij}) = \nabla_k(\alpha(x) T_i P_j) =$$
$$= \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} T_i P_j + \alpha \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T_p \Gamma^p_{ik}\right) P_j + \alpha T_i \left(\frac{\partial P_j}{\partial x^k} - P_q \Gamma^q_{jk}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}(\alpha T_i P_j) - \alpha \Gamma^p_{ik} T_p P_j - \alpha \Gamma^p_{jk} T_i P_q =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^k}(T_{ij}) - \Gamma^p_{ik} T_{pj} - \Gamma^q_{jk} T_{iq},$$

что и требовалось. □

Определение. Пусть ∇ — аффинная связность на M^n. Локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ называются *евклидовыми* для ∇, если в них $\Gamma^i_{jk}(x) = 0$.

Такие координаты могут и не существовать, например, если ∇ не симметрична. В самом деле, если ∇ несимметрична, то Ω^i_{jk} отличен от нуля. Если бы существовали координаты, в которых $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$, то в этой же системе обратился бы в нуль и Ω^i_{jk}, а тогда он был бы тождественным нулем в любой системе в силу тензорности.

Важно, что понятие ковариантного дифференцирования (т. е. аффинной связности) не использует понятия римановой метрики, мы пользовались только наличием гладкой структуры на M^n. Поэтому, риманова метрика и связность — это две различные структуры на M^n. В частности, евклидовы координаты для аффинной связности и евклидовы координаты для метрики g_{ij} (т. е. такие, в которых $g_{ij} = \delta_{ij}$), это — разные понятия. Итак, в общем случае риманова метрика и ковариантное дифференцирование не определяют друг друга.

Пусть на M^n фиксирована метрика g_{ij}. Тогда из множества всех аффинных симметричных связностей можно выделить одну (и только одну!) связность, «согласованную» с этой метрикой и полностью определяемую ею. Это — важный класс связностей, называемых римановыми связностями.

2. Римановы связности.

Пусть g_{ij} — метрика, а $\nabla = \{\Gamma^i_{jk}\}$ — аффинная связность на M^n.

Определение. Аффинная симметричная связность $\nabla = \{\Gamma^i_{jk}\}$ называется *согласованной с метрикой* g_{ij} (или называется *римановой связностью*), если $\nabla(g_{ij}) \equiv 0$.

В силу тензорности ∇ тождество $\{\nabla_k(g_{ij}) = 0\}$, оказавшись выполненным в одной системе координат, будет выполнено и во всех других системах. Итак, относительно римановой связности, тензор g_{ij} — «постоянен» в том смысле, что его ковариантная производная равна нулю. Отсюда следует, что для любого тензорного поля $T^{(p)}_{(q)}$ имеем $\nabla_k\left(g_{ij} T^{(p)}_{(q)}\right) \equiv g_{ij} \nabla_k\left(T^{(p)}_{(q)}\right)$, см. формулу Лейбница (5). В частности, ∇ коммутирует с операцией поднятия и опускания индексов. Докажем существование и единственность римановой связности.

Теорема 3. *Пусть g_{ij} — метрика на M^n. Тогда существует и единственная симметричная аффинная связность, согласованная с g_{ij}, причем:*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha}\right).$$

Доказательство. Предположим, что существование доказано. Покажем единственность связности. Согласно определению: $\nabla_k(g_{ij}) = 0$. Так ка ∇ задается Γ^i_{jk}, то достаточно доказать, что из этой системы однозначно находятся Γ^i_{jk} как функции g_{ij} и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}$. Имеем: $\nabla_k g_{ij} = 0$, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j}\Gamma^\alpha_{ik} + g_{\alpha i}\Gamma^\alpha_{jk}$. Циклически переставляя индексы, получаем:

$$\begin{aligned}
&+ \left\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{j;ik} + \Gamma_{i;jk} \right| \quad (ijk)\\
&+ \left\{ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{i;kj} + \Gamma_{k;ij} \right| \quad (kij)\\
&- \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{k;ji} + \Gamma_{j;ki} \right| \quad (jki)
\end{aligned}$$

где $\Gamma_{i;kj} = g_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{kj}$. Складывая первые два тождества и вычитая из суммы третье, получаем:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 2\Gamma_{i;jk} = 2g_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{jk}.$$

(Напомним: $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.) Далее,

$$\Gamma^\alpha_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha}\right).$$

Мы воспользовались правилом решения системы: $g_{\alpha\beta}T^\alpha = Q_\beta$. Так как $g_{\alpha\beta}$ — невырожденный тензор, то существует обратный тензор $g^{\alpha\beta}$, такой, что $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$, отсюда:

$$g^{\beta\gamma}g_{\alpha\beta}T^\alpha = g^{\beta\gamma}Q_\beta; \quad \delta^\gamma_\alpha T^\alpha = g^{\beta\gamma}Q_\beta; \quad T^\alpha = g^{\beta\alpha}Q_\beta.$$

Мы получили формулы, выражающие Γ^α_{jk} через g_{ij} и его производные. Тем самым если решение исходной системы существует, то оно единственно. Для доказательства существования достаточно определить Γ^i_{jk} с помощью полученных выше формул. Повторяя выкладки в обратном порядке, получаем: $\nabla_k(g_{ij}) \equiv 0$. Теорема доказана. □

Замечание. Пусть на M^n существует система координат $x^1, \ldots, x^n$, в которой $g_{ij} = \delta_{ij}$. Существование такой системы эквивалентно существованию системы, в которой (g_{ij}) становится

постоянной матрицей (не зависящей от точки внутри некоторой окрестности). Тогда путем линейной замены можно привести эту матрицу (во всех точках окрестности одновременно) к виду δ_{ij}. Итак, систему координат можно называть евклидовой, если в ней матрица метрического тензора постоянна. Учитывая это замечание, вернемся к анализу римановой связности. Локальная система координат евклидова с точки зрения связности тогда и только тогда, когда в этой системе $\{\Gamma^i_{jk} \equiv 0\}$ (в некоторой окрестности).

Утверждение. *Система координат евклидова с точки зрения римановой связности, согласованной с g_{ij}, тогда и только тогда, когда эта система евклидова с точки зрения g_{ij} (т. е. g_{ij} локально постоянен).*

Доказательство. В самом деле, если g_{ij} локально постоянен, то, в силу теоремы 3: $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$, т. е. эта система — евклидова и римановой связности ∇. Обратно: если $\Gamma^i_{jk} = 0$, то в силу теоремы 3: $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j}\Gamma^\alpha_{jk} + g_{\alpha i}\Gamma^\alpha_{jk} = 0$, т. е. g_{ij} постоянен в этой системе координат, что и требовалось. □

Рассмотрим гладкую гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, заданную графиком: $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$; Пусть $P_0 \in V^{n-1}$ — произвольная точка. Пусть $T_{P_0}(V^{n-1})$ параллельна плоскости $\mathbb{R}^{n-1}(x^1, \ldots, x^{n-1})$, т. е. $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x^i} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Мы уже вычисляли вид g_{ij} в точке P_0 относительно такой специальной системы координат. Имеем: $g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j}$. Отсюда: $\left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_{P_0} = 0$, т. е. $\Gamma^i_{jk}(P_0) = 0$, где ∇ — риманова связность, согласованная с g_{ij}. Равенство нулю Γ^i_{jk} обеспечивается, вообще говоря, только в точке P_0, в окрестности P_0 Γ^i_{jk} уже не обязаны быть нулевыми.

Мы уже указали на то, что попытка определить дивергенцию векторного поля с помощью «евклидовой формулы»: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(T^i)$ не приводит к успеху в общем случае, так как это выражение не скаляр. Покажем, что наличие римановой связности позволяет корректно определить дивергенцию потока. Отметим, что само понятие дивергенции (изменения бесконечно малого объема) предполагает наличие на M^n метрики, иначе понятие объема содержательно не определено.

Итак, пусть $\vec{T}$ — векторное поле на M^n, снабженном римановой связностью. Положим: $\operatorname{div}(\vec{T}) = \nabla_i T^i$, где $\vec{T}$ — поле. В силу свойств ∇ получаем, что $\operatorname{div}(\vec{T})$ — скалярная функция на M^n. Найдем явный вид $\operatorname{div}(\vec{T})$ в терминах g_{ij} и компонент поля.

Утверждение 1. *Имеет место формула:*

$$\operatorname{div}(\vec{T}) = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\ln \sqrt{g}),$$

где g *— определитель матрицы* (g_{ij}).

Доказательство. В силу теоремы 3 имеем:

$$\operatorname{div} \vec{T} = \nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \Gamma^i_{\alpha i} = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \cdot \frac{1}{2} g^{ip}\left(\frac{\partial g_{p\alpha}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^p}\right),$$

так как

$$\Gamma^i_{\alpha k} = \frac{1}{2} g^{ip}\left(\frac{\partial g_{p\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^p}\right).$$

Далее:

$$\operatorname{div} \vec{T} = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} T^\alpha \left(g^{ip}\frac{\partial g_{p\alpha}}{\partial x^i} + g^{ip}\frac{\partial g_{pi}}{\partial x^\alpha} - g^{ip}\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^p}\right) = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} T^\alpha g^{ip}\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha},$$

так как

$$g^{ip}\frac{\partial g_{p\alpha}}{\partial x^i} - g^{ip}\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^p} = 0.$$

Надо найти $g^{ip}\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha}$. Мы утверждаем, что

$$g^{ip}\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha} = 2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\ln \sqrt{g}).$$

Напомним, что $g^{ip} = \frac{\Delta_{ip}}{g}$, Δ_{ip} — минор (со знаком), дополнительный к g_{ip} в матрице (g_{ij}). Отсюда следует. что достаточно проверить соотношение:

$$\frac{1}{g}\sum_{(i,p)} \Delta_{ip}\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial x^\alpha},$$

т. е. доказать, что

$$\sum_{(i,p)} \Delta_{ip}\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g}{\partial x^\alpha}.$$

Определитель $g = \det(g_{ij})$ есть сумма однородных мономов степени n, где $n = \dim M^n$. Фиксируем g_{ip} в g и соберем все члены в сумме g, содержащие g_{ip} (как множитель). Тогда: $g = \ldots + g_{ip}R_{ip} + \ldots$, где R_{ip} — полином степени $n-1$, уже не содержащий g_{ip}. Здесь пара индексов (i, p) может быть произвольной, но для того, чтобы теперь найти коэффициент перед другим элементом $g_{\alpha\beta}$, следует «рассыпать» предыдущее приведение подобных членов и организовать из определителя g новое выражение, имея ввиду множитель $g_{\alpha\beta}$: $g = \ldots + g_{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \ldots$ Пусть пара (i, p) фиксирована; тогда $R_{ip} = \Delta_{ip}$.

В самом деле, рассмотрим стандартное разложение g по столбцу (или по строке) $g = \sum_{\alpha=1}^{n} g_{i\alpha}\Delta_{i\alpha}$ (это верно при любом i), где i фиксировано. Так как g_{ip} входит только в слагаемое $g_{ip}\Delta_{ip}$ (в сумме $\sum_{\alpha=1}^{n} g_{i\alpha}\Delta_{i\alpha}$), то $R_{ip} = \Delta_{ip}$. Вычисляя $\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}$ видим, что $\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha}$ войдет в ответ с множителем Δ_{ip}; в другие слагаемые этой суммы, т. е. в (A_{ip}), где $(A_{ip}) = g - g_{ip}\Delta_{ip}$, функция g_{ip} не входит. Следовательно, $\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \sum_{(i,p)} \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha}\Delta_{ip}$, что и требовалось. □

Итак:

$$\operatorname{div} \vec{T} = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\ln \sqrt{g}).$$

§ 4. Параллельный перенос. Геодезические

1. Предварительные замечания.

Рассмотрим гладкое многообразие (не обязательно риманово). Во многих конкретных задачах возникает проблема сравнения векторов, приложенных к различным точкам; например, требуется сравнить два касательных вектора, расположенных в разных касательных пространствах. В случае произвольного M^n эта задача сравнения сложна по той причине, что T_xM^n и T_yM^n различны и существует много способов их отождествления. В некоторых частных случаях, например, когда $M^n = \mathbb{R}^n$, возникает естественная операция параллельного переноса, позволяющая сравнивать векторы, приложенные в разных точках. Формально эту процедуру (для $M^n = \mathbb{R}^n$) можно определить так. Рассмотрим пару точек P и Q и пусть $\vec{a}$ — вектор в точке P; рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t)$, такую, что $\gamma(0) = P$ и $\gamma(1) = Q$; осуществим параллельный перенос $\vec{a}$ вдоль $\gamma(t)$ так, чтобы начало вектора скользило по $\gamma(t)$, и $\vec{a}$ переносился бы вдоль γ, оставаясь параллельным самому себе. Эта операция порождает вдоль γ векторное поле $a(t)$, имеющее постоянные (по t) компоненты, равные значению компонент $\vec{a}$ в начальный момент. В частности, производные по t от компонент поля $\vec{a}(t)$ равны нулю. Отметим, что вектор $\vec{a}(1)$, приложенный в точке Q, не зависит от того, вдоль какой кривой γ был осуществлен перенос; можно сказать, что операция параллельного переноса в $\mathbb{R}^n$ не зависит от пути (рис. 11).

Однако при переходе к произвольному M^n эта простая схема разрушается. Это связано в первую очередь с тем, что M нельзя покрыть одной картой, т. е. ввести единую систему координат,

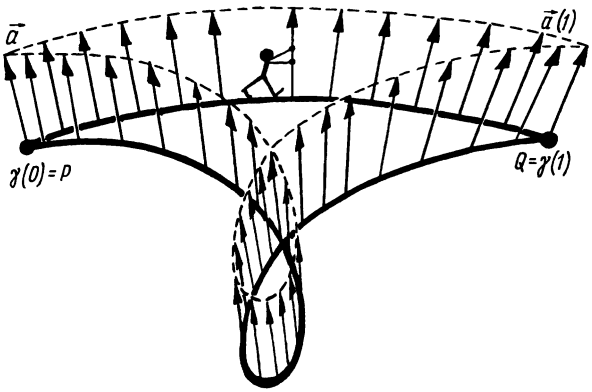


Рис. 11

общую для всех точек. Сначала предположим, что M^2 гладко вложено в $\mathbb{R}^3$ и пусть $P, Q \in M^2$ — пара достаточно близких точек на M^2. Пусть $\vec{a} \in T_P M^2$ и γ — кривая из P в Q. Можно предложить такое правило параллельного переноса на M^2: рассмотреть $\vec{a}$ как вектор из $\mathbb{R}^3$ и осуществить вдоль γ обычный «трехмерный» перенос; тогда $\vec{a}$ перейдет в $\vec{b}$ в точке Q, однако $\vec{b}$ уже не обязан принадлежать $T_Q M^2$. Этот недостаток можно устранить, ортогонально спроектировав b на $T_Q M^2$ и назвав (по определению) проекцию $\pi\vec{b}$ результатом параллельного переноса из P в Q вектора $\vec{a}$ вдоль γ (рис. 12). Эта операция не зависит от пути переноса. Однако у нее есть недостаток: операция определена только в малой окрестности точки P; если мы захотим осуществить перенос $\vec{a}$ «на далекое расстояние», то может оказаться, что вектор $\pi\vec{b}$, который мы объявили «параллельным $\vec{a}$»,

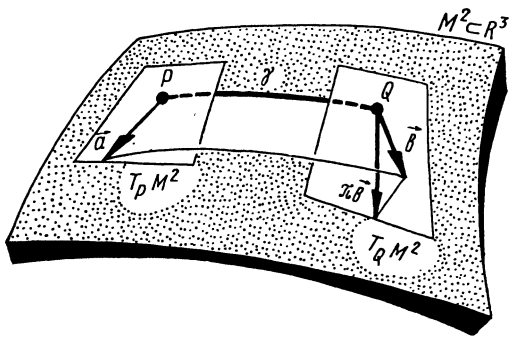


Рис. 12

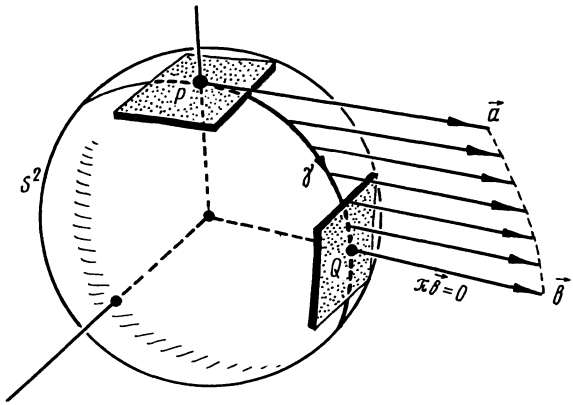


Рис. 13

окажется нулевым. Например, это произойдет на S^2 (рис. 13), если мы осуществим перенос вдоль половины меридиана PQ. Есть много соображений, по которым операцию параллельного переноса, дающую в результате переноса нулевой вектор, следует отвергнуть. Впрочем, можно было бы поступить более аккуратно: двигаться по γ бесконечно малыми шагами и после каждого такого шага осуществлять ортогональное проектирование получившегося вектора на $T_{\gamma(t)}M^2$. Оказывается, что такую операцию можно корректно определить, после чего она действительно задаст некоторый «параллельный перенос» на $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Мы не будем более детально изучать этот вопрос, так как здесь используется факт вложения M^2 в $\mathbb{R}^3$; хотелось бы выработать такое общее понятие параллельного переноса, которое не апеллировало бы к конкретному вложению M^n в $\mathbb{R}^N$.

Обратим внимание читателя, что при определении параллельного переноса мы вынуждены фиксировать гладкую кривую, вдоль которой нужно осуществить перенос. Появление кривой — естественно; иначе непонятно, какой смысл можно вложить в слова: «перенести вектор из точки P в точку Q». Грубо говоря, для «переноса» вектора следует «взять его в руки» и двигаться по M^n, прочерчивая при этом некоторую траекторию. Представим теперь, что мы движемся внутри какого-то M^n, «неся в руках» вектор $\vec{a}$. A'priori неясно: зависит или нет результат этого переноса от пути, по которому мы двигались. Может оказаться, что зависит. Пример: параллельный перенос вдоль центральной оси листа Мебиуса (рис. 14). В данном случае зависимость результата переноса от пути есть следствие неориентируемости M^2, однако и на ориентируемом многообразии ниоткуда не следует, что операция переноса не зависит от пути.

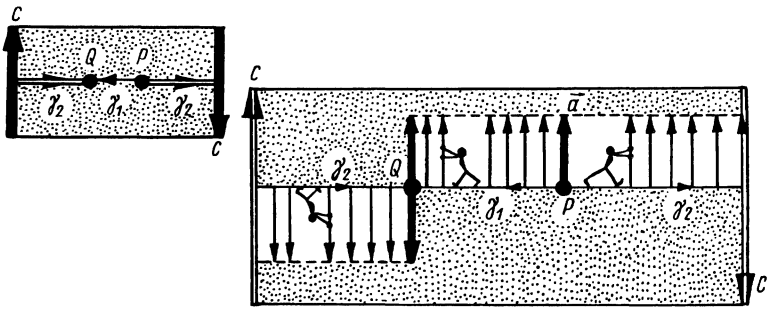


Рис. 14

2. Уравнение параллельного переноса. Если вспомнить определение производной по направлению, то видно, что определение связано с возможностью сравнивать значения тензорного поля в близких точках, находящихся в одной системе координат, а потому задание, например, ковариантного дифференцирования, указывает на возможность определения бесконечно малых сдвигов. Положим поэтому в основу определения параллельного переноса на M^n операцию ∇.

Пусть P, Q — две произвольные точки на M^n, соединенные гладкой (или кусочно-гладкой) траекторией $\gamma(t)$, такой, что $\gamma(0)=P$ и $\gamma(1)=Q$; пусть $\dot\gamma$ — поле скоростей вдоль $\gamma(t)$; если задана система координат $x^1,\ldots,x^n$, то компоненты этого поля обозначим через $\{\xi^k\}$, $1\leqslant k\leqslant n$. Пусть на M^n задана аффинная связность, задаваемая в системе координат набором частных дифференцирований $\nabla=\{\nabla_k\}$. Определим ковариантную производную тензорного поля $T=\{T^{(\alpha)}_{(\beta)}\}$ вдоль векторного поля $\dot\gamma$ формулой: $\nabla_{\dot\gamma}(T)=\{\nabla_{\dot\gamma}T^{(\alpha)}_{(\beta)}\}$. Условно будем писать: $\nabla_{\dot\gamma}=\xi^k\nabla_k$. Эту операцию назовем *ковариантным дифференцированием вдоль кривой.*

Определение. Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая и пусть вдоль нее задано гладкое поле $\vec T=\{T^i\}$. Это поле будем называть *параллельным вдоль* $\gamma(t)$ *относительно связности* ∇, *если* $\nabla_{\dot\gamma}(\vec T)\equiv 0$.

В силу определения $\nabla_{\dot\gamma}=\xi^k\nabla_k$ можно сказать, что поле $\vec T$, «параллельное вдоль $\gamma(t)$», имеет ковариантно постоянные координаты вдоль $\gamma(t)$. Это — аналогия с евклидовым случаем, так как наше определение параллельности превращается для $\nabla=\left\{\nabla_k=\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ и для $M^n=\mathbb{R}^n$ в обычное определение параллельного переноса.

Фиксируем координаты $x^1,\ldots,x^n$ и запишем условие параллельности поля $\vec T$. Имеем:

$$\nabla_{\dot\gamma}(T^i)=\xi^k\nabla_k T^i=0;\quad \xi^k=\frac{dx^k(t)}{dt},$$

$$\gamma(t)=(x^1(t),\ldots,x^n(t));\quad \frac{dx^k}{dt}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+T^p\Gamma^i_{pk}\right)=0;$$

$$\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+T^p\frac{dx^k}{dt}\Gamma^i_{pk}=\frac{dT^i}{dt}+T^p\Gamma^i_{pk}\frac{dx^k}{dt}=0.$$

Определение. Уравнение $\frac{dT^i}{dt}+T^p\Gamma^i_{pk}\frac{dx^k}{dt}=0$ называется *уравнением параллельного переноса вдоль кривой* $\gamma(t)$.

Изменив γ, мы изменим и уравнение параллельного переноса. Это — уравнение на компоненты параллельного поля T^i, которые находятся из этого уравнения (речь идет о системе из n уравнений первого порядка). Так как $\gamma(t)$ задана, то функции $\frac{dx^k(t)}{dt}$ известны. Перейдем к конкретной задаче параллельного переноса вектора.

Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая, идущая из P в Q, и пусть $\vec a=\{a^i\}\in T_PM^n$ — вектор, заданный в P. Наша цель: построить в точке Q новый вектор $\vec b\in T_QM^n$, который было бы естественно назвать «параллельным вектору $\vec a$». Рассмотрим вдоль γ уравнение параллельного переноса; в этом уравнении функции Γ^i_{pk} и $\frac{dx^i(t)}{dt}$ считаются известными; надо найти неизвестные функции $\{T^i(t)\}$ — компоненты параллельного поля $\vec T(t)$. Следует найти такие $\{T^i(t)\}$, чтобы в начальный момент выполнялось условие: $T^i(0)=a^i$. Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, решение системы $\frac{dT^i}{dt}+T^p\Gamma^i_{pk}\frac{dx^k}{dt}=0$ существует, единственно и продолжается вплоть до Q.

Определение. Вектор $\vec b=\vec T(1)\in T_QM^n$, возникающий в Q, называется *параллельным* вектору $\vec a\in T_PM^n$ вдоль кривой $\gamma(t)$, $\gamma(0)=P$, $\gamma(1)=Q$.

Ясно, что $\vec b$ зависит, вообще говоря, от γ, вдоль которой осуществлялся перенос. Если $M^n=\mathbb{R}^n$, то $\vec b$ параллелен $\vec a$ обычном смысле, если в качестве ∇ взять евклидову связность: $\Gamma^i_{jk}\equiv 0$.

Рассмотрим свойства параллельного переноса на римановом M^n. Пусть ∇ — риманова связность.

Теорема 1. *Пусть $\vec a,\vec b\in T_PM^n$ — произвольные векторы, и $\gamma(t)$ — гладкая кривая из P в Q. Рассмотрим параллельный перенос $\vec a$ и $\vec b$ вдоль $\gamma(t)$. Тогда он сохраняет скалярное произведение векторов, т. е. если $\vec a(t)$ и $\vec b(t)$ — параллельные поля вдоль $\gamma(t)$, $\vec a(0)=\vec a$, $\vec b(0)=\vec b$, то $\frac{d}{dt}\langle\vec a(t),\vec b(t)\rangle\equiv 0$, где $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение в $T_{\gamma(t)}M^n$, порожденное g_{ij}.*

Доказательство. Включим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в параллельные поля: $\vec{T}=\vec{a}(t)$ и $\vec{R}=\vec{b}(t)$, $\vec{T}(0)=\vec{a}$, $\vec{R}(0)=\vec{b}$. Рассмотрим функцию $f(t)=\langle\vec{T},\vec{R}\rangle_{\gamma(t)}=(g_{ij}T^iR^j)(t)$, т. е. скалярное произведение вдоль $\gamma(t)$. Дифференцируя, получаем:

$$\frac{df(t)}{dt}=\nabla_{\dot\gamma}f(t)=\xi^k\nabla_k f=\xi^k\nabla_k(g_{ij}T^iR^j)=$$
$$=\xi^k g_{ij}\nabla_k(T^iR^j)=\xi^k g_{ij}(\nabla_k T^i)R^j+\xi^k g_{ij}T^i(\nabla_k R^j)=$$
$$=g_{ij}R^j(\xi^k\nabla_k T^i)+g_{ij}T^i(\xi^k\nabla_k R^j)=g_{ij}R^j(\nabla_{\dot\gamma}T^i)+g_{ij}T^i(\nabla_{\dot\gamma}R^j)\equiv 0,$$

так как $\nabla_{\dot\gamma}(\vec{T})=\nabla_{\dot\gamma}(\vec{R})=0$. □

Верно и обратное: *если на римановом M^n дана симметричная аффинная связность, в которой параллельный перенос вдоль любой кривой сохраняет скалярное произведение, то эта связность — риманова.* В самом деле, обращаясь к доказательству теоремы 1, получаем: $\xi^kT^iR^j(\nabla_k g_{ij})\equiv 0$, т. е. $\nabla_k g_{ij}\equiv 0$.

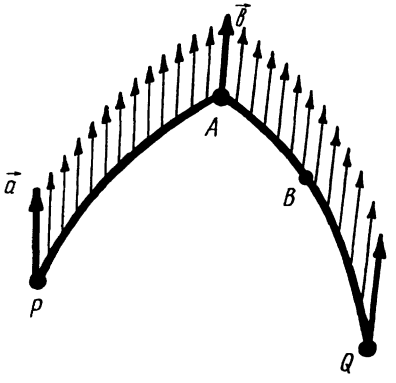


Рис. 15

Хотя мы осуществляли перенос вдоль гладких кривых, однако не составляет труда определить его и вдоль кусочно-гладких кривых. В самом деле, пусть на $\gamma(t)$ есть изолированная точка излома, справа и слева от которой кривая гладкая с ненулевым вектором скорости (рис. 15). Переносяся вдоль $\gamma(t)$ вектор $\vec{a}$, подойдем к A и получим в ней вектор $\vec{b}$, параллельный $\vec{a}$. Примем $\vec{b}$ за начальное положение нового параллельного поля уже вдоль участка AB и повторим процесс.

3. Геодезические.

Определение. Пусть M^n снабжено аффинной связностью (наличие метрики не предполагается). Гладкая кривая $\gamma(t)$ называется *геодезической в данной связности* ∇, если $\nabla_{\dot\gamma}(\dot\gamma)=0$, где $\dot\gamma$ — векторное поле скорости траектории $\gamma(t)$.

Иными словами, геодезическая — это такая траектория, вдоль которой параллельный перенос ее вектора скорости порождает все поле скоростей: вектор скорости переходит в вектор скорости, оставаясь касательным к траектории. Выведем уравнение геодезических.

Имеем:

$$0=\nabla_{\dot\gamma}(\dot\gamma)=\left\{\frac{dx^k}{dt}\left(\nabla_k\frac{dx^i}{dt}\right)=0\right\};\quad \text{если}\quad T^i=\frac{dx^i}{dt},$$
$$\text{то}\quad \frac{dT}{dt}+T^\alpha T^k\Gamma^i_{\alpha k}=0,\quad \text{или}\quad \frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{\alpha k}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0. \qquad (\Gamma)$$

Уравнения (Г) называются *уравнениями геодезических*. Их решения — это наборы функций $x^1(t),\ldots,x^n(t)$, задающие траекторию $\gamma(t)$ — геодезическую. Система (Г) — это система n уравнений второго порядка в обыкновенных производных; ее решение однозначно определяется заданием начальных данных: $x^i(0)=P^i$, где $P=(P^1,\ldots,P^n)$; $\frac{dx^i(0)}{dt}=a^i$, $\vec a\in T_PM^n$; (итого — $2n$ постоянных: n постоянных определяют положение точки P, через которую проходит решение, а другие n постоянных определяют вектор скорости в этой точке). Из известных теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует

***Утверждение* 1.** *Пусть $P\in M^n$, и $\vec a\in T_PM^n$. Тогда существует и единственна геодезическая $\gamma(t)$, такая, что $\gamma(0)=P$, $\dot\gamma(0)=\vec a$.*

Доказательство. Введем координаты $x^1,\ldots,x^n$ в окрестности P; тогда нахождение геодезической сводится к задаче нахождения решения системы (Г); существование и единственность решения гарантируется теоремами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. □

Следствие. Две геодезические, коснувшиеся друг друга в некоторой точке, совпадают.

Рассмотрим риманово M^n и риманову связность ∇. Рассмотрим геодезические, порожденные ∇, и изучим перенос вдоль геодезических. Пусть γ — геодезическая, $\dot\gamma$ — поле скоростей, $\vec T$ — векторное поле, параллельное вдоль γ. Тогда в каждой точке $\gamma(t)$ можно определить число: $\cos\alpha(t)=\frac{\langle\vec T,\dot\gamma\rangle}{|\vec T|\cdot|\dot\gamma|}$, где $\alpha(t)$ — угол между векторами $\vec T$ и $\dot\gamma$.

***Лемма* 1.** *При параллельном переносе вектора $\vec T$ вдоль геодезической γ угол α сохраняется*: $\alpha(t)\equiv\text{const}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 сохраняются все попарные скалярные произведения, т. е. в тождестве $\langle\vec T,\dot\gamma\rangle=|\vec T||\dot\gamma|\cdot\cos\alpha(t)$ сохраняются как левая часть, так и модули $|\vec T|$, $|\dot\gamma|$. □

В многомерном случае этого недостаточно, чтобы однозначно задать параллельный перенос вдоль геодезической, однако для M^2

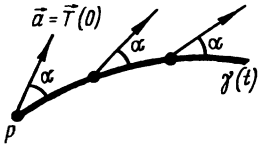


Рис. 16

из леммы 1 получаем: пусть γ — геодезическая и $\vec{a}\in T_P M^2$ (рис. 16); тогда параллельное поле $\vec{T}(t)$, такое, что $\vec{T}(0)=\vec{a}$, образовано векторами $\vec{T}(t)$, имеющими ту же длину, что и $\vec{a}=\vec{T}(0)$ и образующими с вектором $\dot{\gamma}(t)$ один и тот же угол α, равный углу между $\vec{a}$ и $\dot{\gamma}(0)$. Поскольку параллельный перенос вдоль геодезических уже определен, то можно определить параллельный перенос вдоль любой кусочно-гладкой кривой γ. Для этого следует аппроксимировать γ ломаной геодезической (составленной из гладких геодезических отрезков), а затем осуществлять перенос вдоль каждого из гладких отрезков, используя свойство постоянства угла. При параллельном переносе вдоль траектории, не являющейся геодезической, угол, образуемый переносимым вектором с вектором скорости траектории, будет, вообще говоря, переменным. Рассмотрим теперь примеры.

(1). Если $M^2=\mathbb{R}^2$, то параллельный перенос вдоль гладкой кривой осуществляется по обычному правилу: параллельное поле имеет постоянные компоненты относительно декартовой системы координат.

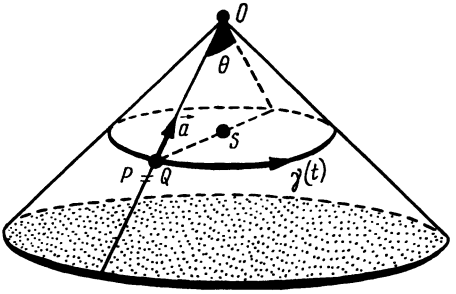


Рис. 17

(2). Пусть M^2 — прямой круговой конус в $\mathbb{R}^3$ с углом при вершине, равным θ (рис. 17). Будем считать, что вершина «выколота», чтобы иметь дело с гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\gamma(t)$ — сечение конуса плоскостью, ортогональной оси; пусть $OP=r$, $\vec{a}\in T_P M^2$ направлен в вершину конуса. Осуществим параллельный перенос этого вектора вдоль $\gamma(t)$ до возвращения обратно в P, и найдем, на какой угол повернется $\vec{a}$ после этой операции. Используем связность, согласованную с индуцированной метрикой на конусе. Так как эта метрика евклидова, то конус можно развернуть на плоскость, разрезав его вдоль образующей. Достаточно найти поворот $\vec{a}$ при его параллельном переносе на $\mathbb{R}^2$ вдоль γ_1 (рис. 18). Имеем: $PS=r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, длина $\gamma(t)=2\pi\cdot PS=2\pi\, r\sin\frac{\theta}{2}$; длина PQ (пунктирная дуга) $=2\pi\, r-2\pi\, r\sin\frac{\theta}{2}=2\pi\, r\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)=r\cdot\varphi$, т. е. $\varphi=2\pi\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)$. Итак, угол поворота φ равен $2\pi\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)$. Здесь

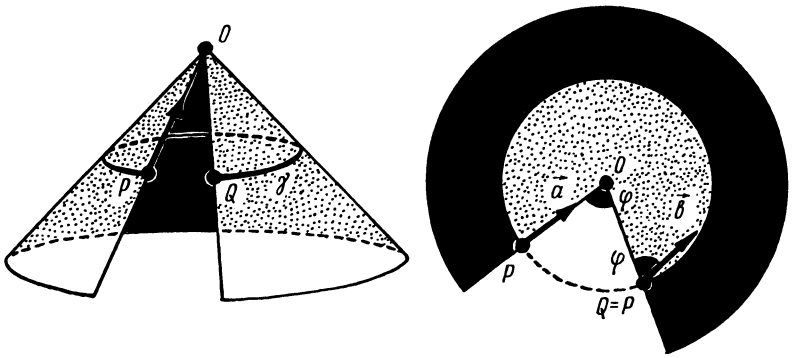


Рис. 18

мы использовали то, что $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$. Для M^2, метрика которого не евклидова, вычисления усложняются и требуют подсчета символов Кристоффеля. Обсудим геометрический смысл этих коэффициентов с точки зрения операции параллельного переноса. Найдем $\nabla_{\vec{\partial}_\alpha}(\vec{\partial}_\beta)$, где $\vec{\partial}_\alpha$ и $\vec{\partial}_\beta$ — координатные векторные поля, в координатах $x^1, \ldots, x^n$ на M^n. Тензор $\nabla_{\vec{\partial}_\alpha}(\vec{\partial}_\beta)$ снова — векторное поле.

Лемма 2. *Имеет место тождество* $\nabla_{\vec{\partial}_\alpha}(\vec{\partial}_\beta) = \Gamma^k_{\beta\alpha}\vec{\partial}_k$.

Доказательство. Имеем:

$$\Delta_{\vec{X}}(\vec{Y}) = \vec{Z}; \quad \nabla_{\vec{X}}(Y^i) = X^\alpha \nabla_\alpha (Y^i) = Z^i; \quad \left[\nabla_{\vec{\partial}_\alpha}(\vec{\partial}_\beta)\right]^k = a^q_\alpha \nabla_q (T^k_\beta),$$

где

$$\vec{\partial}_\alpha = \{a^q_\alpha = \delta^q_\alpha\}; \quad \vec{\partial}_\beta = \{T^k_\beta = \delta^k_\beta\};$$

$$a^q_\alpha \nabla_q (T^k_\beta) = a^q_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^q} T^k_\beta + T^\omega_\beta \Gamma^k_{\omega q}\right) = a^q_\alpha T^\omega_\beta \Gamma^k_{\omega q} = \delta^q_\alpha \delta^\omega_\beta \Gamma^k_{\omega q} = \Gamma^k_{\beta\alpha};$$

т. е.

$$\nabla_{\vec{\partial}_\alpha}(\vec{\partial}_\beta) = \Gamma^k_{\beta\alpha}\vec{\partial}_k.$$

Лемма доказана. □

Это утверждение можно понимать так: рассмотрим репер $\vec{\partial}_1, \ldots, \vec{\partial}_n$ в точке P и осуществим бесконечно малый перенос вектора в направлении $\vec{\partial}_\beta$; при этом $\vec{\partial}_\beta$ как-то «повернется», и коэффициенты его разложения по $\vec{\partial}_1, \ldots, \vec{\partial}_n$ как раз и равны $\Gamma^k_{\beta\alpha}$.

(3). Пусть $M^n = \mathbb{R}^n$, отнесенное к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$; тогда $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$ (связность — риманова). Уравнения геодезических имеют вид:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} \equiv 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n, \quad \text{т. е.} \quad x^\alpha = a^\alpha t + b^\alpha, \quad \text{где} \quad \{a^\alpha, b^\alpha\} = \text{const}.$$

Итак, геодезические — прямые линии и только они.

(4). Пусть $M^2 = S^2$ в стандартной метрике. Выберем на S^2 сферические координаты (θ, φ), в которых: $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$; здесь северный полюс задается так: $\theta = 0$. Для определения геодезических следует найти Γ^i_{jk}. Так как $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$, то имеем (проверьте!): $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\sin 2\theta$; $\Gamma^2_{12} = \operatorname{ctg}\theta$; $\Gamma^i_{jk} = 0$ для всех остальных наборов индексов (i, j, k); здесь $x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$; $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = \sin^2\theta$. Отсюда, уравнения геодезических имеют вид: $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$. Одно из решений имеет вид: $\varphi = \text{const}$, $\theta = t$. Это решение — меридиан, выходящий из северного полюса. Итак, одно из плоских сечений сферы плоскостью, проходящей через центр, является геодезической при выборе параметра $\theta = t$ — длина дуги.

***Предложение* 1.** *Пусть S^2 снабжена стандартной метрикой. Тогда геодезическими римановой связности являются все плоские сечения сферы (через ее центр) и только они.*

Доказательство. Сначала докажем, что любое центральное плоское сечение S^2 — геодезическая (относительно натурального параметра). Для одного меридиана γ_0 этот факт был уже установлен (см. выше). Рассмотрим произвольный «экватор» γ, т. е. плоское центральное сечение. Так как каждый экватор однозначно задается ортогональной прямой к плоскости, определяющей экватор, то всегда существует такое вращение, которое переведет γ в γ_0.

***Лемма* 3.** *Пусть $f\colon M^n \to M^n$ — изометрия риманова многообразия M^n; γ — геодезическая римановой связности. Тогда образ γ при изометрии f — также является геодезической.*

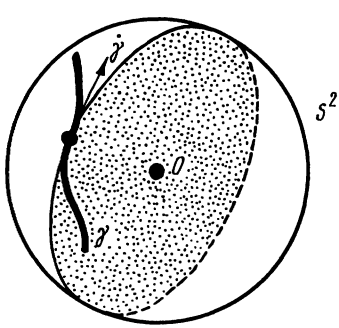


Рис. 19

Доказательство. Ясно, что изометрия сохраняет риманову связность, а потому сохраняет и уравнения геодезических, т. е. f переводит решение системы снова в решение системы, что и требовалось. □

Возвращаясь к доказательству Предложения 1, получаем, что γ — геодезическая. Обратно: пусть γ — геодезическая на S^2. Рассмотрим в произвольной точке γ ее вектор скорости $\dot{\gamma}$ и проведем через эту точку

в направлении вектора экватор (через любую точку S^2 в любом направлении проходит один и только один экватор) (рис. 19). Так как γ и экватор — решения одной и той же системы, и так как эти решения касаются, то они совпадают. □

(5). Пусть $M^2 = L_2$ — плоскость Лобачевского, отнесенная к стандартной метрике $ds^2 = d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\,\chi\, d\varphi^2$. Найдем геодезические римановой связности. Такой вид метрика принимает в полярных координатах (χ, φ), обслуживающих двумерную плоскость; рассмотрим модель Пуанкаре с метрикой $(1 - r^2)^{-2}(dr^2 + r^2\, d\varphi^2)$.

Предложение 2. *Геодезическими плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре являются все дуги окружностей, выходящих на абсолют под прямым углом (в частности, все диаметры), и только они.*

Найдем уравнения геодезических. Так как метрика L_2 получается из метрики S^2 заменой тригонометрических функций на гиперболические, то: $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(2\chi)$; $\Gamma^2_{12} = \mathrm{cth}\,\chi$; $\Gamma^i_{jk} = 0$ для всех остальных индексов (i, j, k); здесь $x^1 = \chi$, $x^2 = \varphi$. Отсюда $\frac{d^2\chi}{dt^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(2\chi)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mathrm{cth}\,\chi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\,\frac{d\chi}{dt} = 0$. Одно из решений имеет вид: $\varphi = \mathrm{const}$, $\chi = t$ — прямая, проходящая через точку 0 на плоскости. Так как (χ, φ) «обслуживают» в то же время правую полость гиперболоида — псевдосферы мнимого радиуса, а потому при стереографической проекции прямая с уравнением $\varphi = \varphi_0$, $\chi = t$ перейдет в один из диаметров единичного круга. Мы доказали, что один из диаметров γ_0 на модели Пуанкаре — геодезическая.

Докажем, что любая дуга окружности, ортогональная абсолюту — геодезическая. Используем лемму 3: надо доказать, что любая окружность указанного вида переводится изометрией в γ_0. Для этого перейдем к модели на верхней полуплоскости с метрикой $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Напомним, что существует дробно-линейное преобразование, переводящее единичный круг в верхнюю полуплоскость, — изометрия. При этом граница круга переходит в вещественную ось, диаметр γ_0 — в прямую, ортогональную вещественной оси (рис. 20). Можно считать, что ось OY на верхней полуплоскости является геодезической, поскольку она — образ диаметра γ_0 при изометрии. Итак, любая прямая, ортогональная вещественной оси, — геодезическая, так как сдвиг $z \to z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, — изометрия. Отсюда следует, что любая дуга окружности, выходящая под прямым углом на ось OX, — геодезическая, так как может быть переведена в ось OY дробно-линейным преобразованием: сначала сдвиг $z \to z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, затем $z \to \frac{-z}{z - a}$, $a \in \mathbb{R}$ (рис. 21). Доказано,

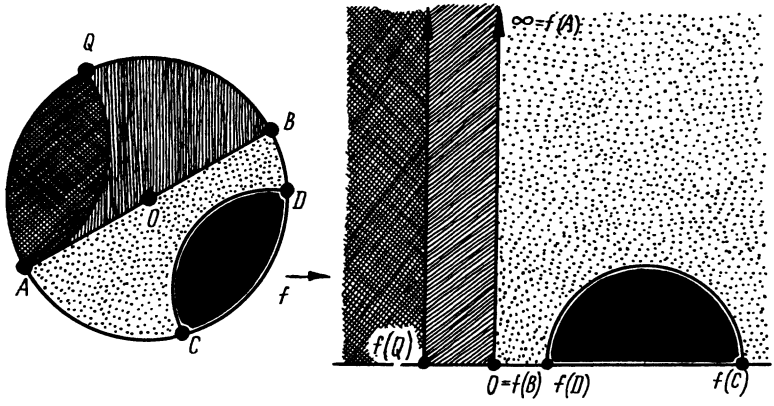


Рис. 20

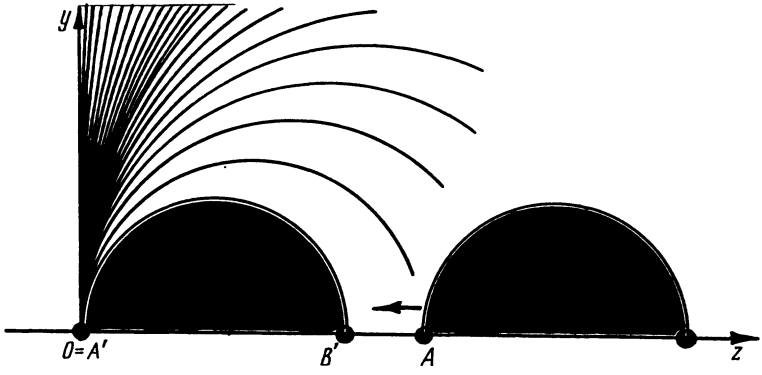


Рис. 21

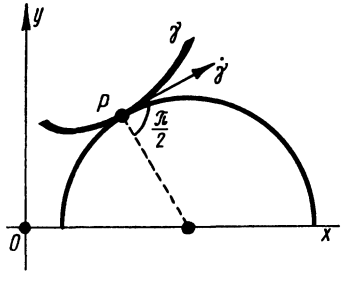


Рис. 22

что все прямые, ортогональные вещественной оси, и все дуги окружностей, встречающих ось OX под прямым углом, — геодезические. Пусть теперь γ — произвольная геодезическая (на верхней полуплоскости); надо доказать, что она совпадает либо с прямой, ортогональной оси OX, либо с окружностью, ортогональной абсолюту. Возьмем на γ точку P и рассмотрим вектор $\dot{\gamma}$. Проведем через P дугу окружности,

встречающую абсолют под прямым углом и имеющую тот же вектор скорости (рис. 22). Как мы уже знаем, γ совпадает с этой дугой.

В качестве приложения изучим, как параллельно переносится вектор на плоскости Лобачевского вдоль траектории $\gamma(t)$, задаваемой на верхней полуплоскости уравнением $y = y_0 = \text{const}$, т. е. γ — прямая, параллельная оси OX. Эта траектория не геодезическая, а потому параллельный перенос вдоль нее не сохраняет касательное поле скоростей. Аппроксимируем γ ломаной геодезической (рис. 23). Качественная картина параллельного переноса $\vec{a}$ показана на рис. 24. Переносимый вектор вращается вокруг своего начала.

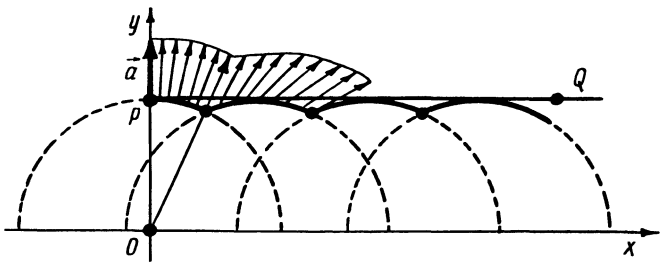


Рис. 23

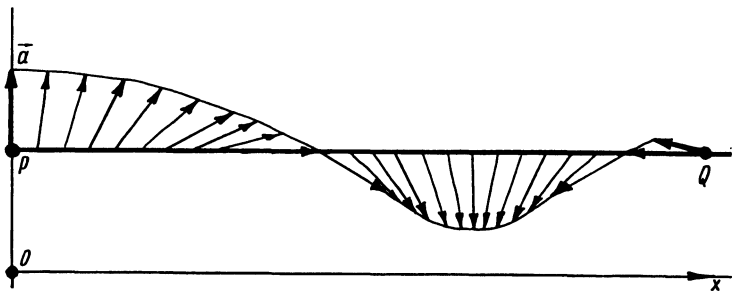


Рис. 24

Замечание. Геодезические на плоскости Лобачевского можно найти более элементарно: в явном виде проинтегрировав уравнения геодезических. Это удобно выполнить на верхней полуплоскости. Символы Кристоффеля имеют вид (проверьте!): $\Gamma^1_{12} = \frac{1}{y}$; $\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{y}$; $\Gamma^2_{22} = \frac{1}{y}$; остальные равны нулю. Уравнения геодезических $\ddot{x} = \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y}$, $\ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}$. Отсюда:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\frac{\frac{\dot{y}^2-\dot{x}^2}{y}\cdot\dot{x}-\frac{2\dot{x}\dot{y}}{y}\cdot\dot{y}}{\dot{x}^3}=-\frac{1}{y}\left(\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}+1\right)=-\frac{1}{y}(y_x'^2+1);$$

$$y''=-\frac{1}{y}(y_x'^2+1);\quad yy''+y'^2=-1;\quad (yy')'=-1;$$

$$yy'=-x+C;\quad ydy=(-x+C)\,dx;\quad \frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+Cx+\frac{D}{2};$$

$$x^2-2Cx+y^2=D;\quad (x-C)^2+y^2=C^2+D.$$

Было предположено, что $\dot{x}\neq 0$. Если же $\dot{x}=0$, то это дает прямые, ортогональные вещественной оси. Если $\dot{x}\neq 0$, то получаем, очевидно, окружности, ортогональные абсолюту.

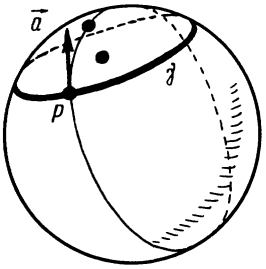


Рис. 25

ЗАДАЧА. Осуществить параллельный перенос вектора $\vec{a}$ вдоль плоского (не центрального) сечения S^2 (рис. 25).

(6). Пусть $M^2=T^2$ — двумерный тор. Его можно превратить в риманово многообразие с локально евклидовой метрикой. Введем на каждой из окружностей $S^1(\varphi)$ и $S^1(\psi)$ координаты φ и ψ; тогда координаты (φ,ψ), $0\leqslant\varphi,\ \psi\leqslant 2\pi$ будут координатами на торе, в которых метрика примет вид: $d\varphi^2+d\psi^2$. Эта метрика может быть представлена как индуцированная евклидовой метрикой из $\mathbb{R}^4$ при вложении T^2 в $\mathbb{R}^4\cong\mathbb{C}^2$ по формуле: $f(\varphi,\psi)\to(e^{i\varphi},e^{i\psi})\in\mathbb{C}^2$. Так как $ds(\mathbb{R}^4)=dzd\bar{z}+dwd\bar{w}$, то $ds^2(T^2)=d\varphi^2+d\psi^2$.

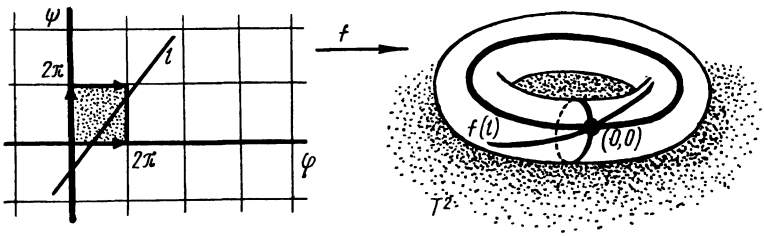


Рис. 26

Итак, поскольку в евклидовой метрике $\Gamma^i_{jk}=0$, то геодезические на торе — это образы прямых на плоскости $\mathbb{R}^2(\varphi,\psi)$ при факторизации h: $\mathbb{R}^2(\varphi,\psi)\to T^2(\varphi,\psi)$, $h(\varphi,\psi)=(\varphi,\psi)\bmod 2\pi$, т. е. $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ (рис. 26). Других геодезических на торе нет. Геодезические разбиваются на два класса: замкнутые и незамкнутые.

Геодезические на торе удобно изображать прямыми на $\mathbb{R}^2(\varphi, \psi)$ с отмеченной решеткой $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = (2\pi m, 2\pi n)$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим пучок прямых, выходящих из точки 0 на $\mathbb{R}^2(\varphi, \psi)$ и выясним: какие геодезические являются образами этих прямых. Ясно, что геодезическая, проходящая на торе через точку $(0, 0)$, замкнута тогда и только тогда, когда соответствующая ей прямая-прообраз встречает какую-либо «целую» точку: $(2\pi m, 2\pi n)$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Отсюда: геодезическая на T^2, проходящая через $(0, 0)$, незамкнута (гомеоморфна прямой) тогда и только тогда, когда соответствующая прямая не содержит «целых» точек, кроме точки $(0, 0)$. Выразим это в терминах тангенса угла наклона прямой к оси OX: геодезическая замкнута тогда и только тогда (гомеоморфна окружности), когда $\operatorname{tg} \alpha = X/Y$, где $\vec{l} = (X, Y)$ — направляющий вектор прямой l (рис. 27) — рационален; следовательно, геодезическая незамкнута, если $\operatorname{tg} \alpha$ иррационален. На рис. 27 показана прямая, проходящая через точку $(2\pi \cdot 3, 2\pi \cdot 2)$; после факторизации мы получим на квадрате $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ набор отрезков-образов этой прямой (рис. 28). На рис. 28 показана также траектория, возникающая на торе после склейки фундаментального многоугольника в соответствии с действием группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. На рис. 29 показана геодезическая, где $\operatorname{tg} \alpha = n/m$ (рационален) и геодезическая с иррациональным тангенсом. В последнем случае отрезки прямой всюду плотны на квадрате (сколь угодно близко от любой точки проходит отрезок прямой l после ее факторизации). Получающаяся траектория на торе порождает иррациональную обмотку тора — замыканием этой траектории является весь тор (рис. 30).

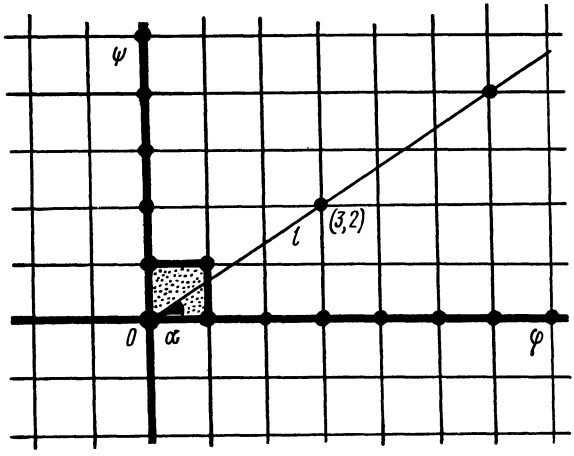


Рис. 27

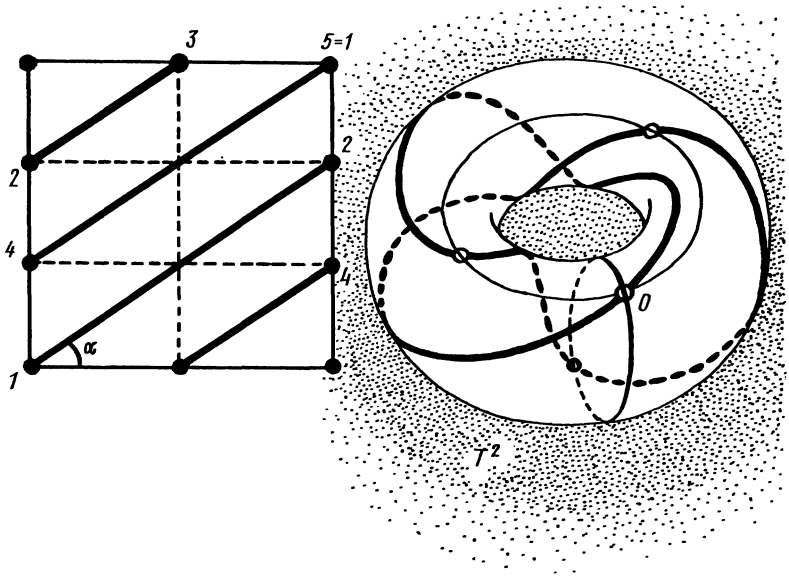


Рис. 28

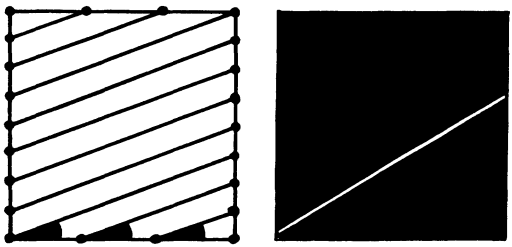


Рис. 29. Слева $\operatorname{tg}\alpha$ — рациональное число, справа — иррациональное

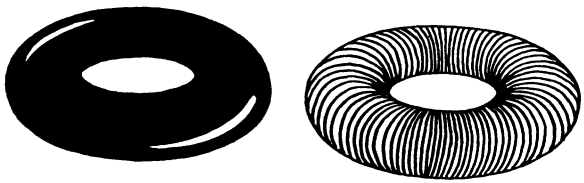


Рис. 30

Применим геодезические к конкретным геометрическим вопросам.

Теорема 2. *Пусть M^2 — одно из следующих многообразий: (а) $\mathbb{R}^2$; (б) S^2; (в) плоскость Лобачевского L_2, снабженных стандартными метриками. Пусть $\mathfrak{G} = \mathrm{Iso}(M^2)$ — группа всех изометрий M^2. Тогда каждое преобразование $g \in \mathfrak{G}$ задается тремя непрерывными параметрами, т. е.* $\dim \mathfrak{G} = 3$.

Под $\mathfrak{G}$ понимается полная группа изометрий, т. е. группа диффеоморфизмов, сохраняющих метрику. Группа $\mathfrak{G} = \mathrm{Iso}(M^n)$ может быть определена для любого гладкого риманова многообразия; эта группа может быть превращена в топологическое пространство: два преобразования g_1, g_2 считаются близкими, если они близки как диффеоморфизмы M^n, т. е. для всех точек $x \in M^n$ близки точки $g_1(x), g_2(x)$, где $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$.

Теорема 2 есть частный случай общего утверждения, которое мы сообщим без доказательства:

Пусть M^n — компактное гладкое риманово связное замкнутое многообразие и $\mathfrak{G} = \mathrm{Iso}(M^n)$; тогда $\dim \mathfrak{G} \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$, т. е. каждое преобразование $g \in \mathfrak{G}$ задается не более чем $\frac{n(n+1)}{2}$ непрерывными параметрами.

В этом общем виде теорема нами использоваться дальше не будет. Хотя доказательство мы проведем только для указанных трех многообразий, но все рассуждения верны для произвольного многообразия; в процессе доказательства мы оговорим те моменты, где мы используем конкретный вид M^2.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M^n$ и $H(x_0) \subset \mathfrak{G}$ — множество изометрий, оставляющих x_0 на месте. Ясно, что $H(x_0)$ — подгруппа. Она называется *стационарной подгруппой точки x_0*; для разных x_1 и x_2 подгруппы $H(x_1)$ и $H(x_2)$, вообще говоря, различны. Пусть $h \in H(x_0)$. Так как $h(x_0) = x_0$, то $dh(x_0)$: $T_{x_0}M^n \to T_{x_0}M^n$. Построим отображение λ: $H(x_0) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, положив $\lambda(h) = dh(x_0)$. Ясно, что $dh \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, так как h — диффеоморфизм. Далее, λ отображает $H(x_0)$ в подгруппу $O(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. В самом деле, можно считать, что в окрестности x_0 выбраны координаты, такие, что $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$; тогда $g_{ij}(x_0)$ определяет в $T_{x_0}M^n$ евклидову метрику; так как h — изометрия, то $dh(x_0)$ сохраняет евклидово скалярное произведение в $T_{x_0}M^n$. Далее: λ — гомоморфизм $H(x_0)$ в $O(n)$. В самом деле: $\lambda(h_1 \circ h_2) = d(h_1 \circ h_2)(x_0) = dh_1(x_0) \circ dh_2(x_0)$. Более того, λ — мономорфизм. В самом деле, допустим, что $dh = E$ (тождественно); надо доказать, что $h(x) = x$ для любого $x \in M^n$. Воспользуемся тем, что M^n — одно из многообразий: S^2, $\mathbb{R}^2$, L_2. На каждом из них любая пара точек может быть соединена геодезической. На плоскости утверждение очевидно. На S^2,

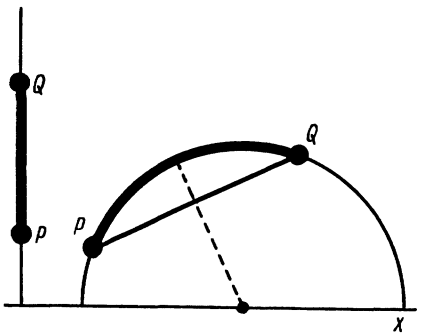


Рис. 31

в силу Предложения 1, геодезические — это экваторы, что доказывает утверждение. Если $M^2 = \mathrm{L}_2$, то рассмотрим верхнюю полуплоскость; построение геодезической показано на рис. 31. Это утверждение верно для любого многообразия указанного типа, однако мы не будем этого доказывать.

Итак, пусть $dh(x_0) = E$; соединим произвольную точку $x \in M^n$ с x_0. Пусть $\dot\gamma(0)$ — вектор скорости $\gamma(t)$ в точке x_0 геодезической $\gamma(t)$. Так как h — изометрия, то образ γ при действии h — геодезическая, а так как $dh(x_0) = E$, то геодезическая $\gamma_1 = h(\gamma)$ имеет в x_0 тот же вектор скорости, что и γ. Две касающиеся геодезические совпадают. Так как γ можно отнести к натуральному параметру, то h не меняет его вдоль γ, а потому x остается на γ на прежнем расстоянии от x_0, т. е. $h(x) = x$, что и требовалось. Итак, $H(x_0)$ — замкнутая подгруппа в $O(n)$. Замкнутость $H(x_0)$ вытекает из того, что изометрия, являющаяся пределом изометрий, сохраняющих x_0, сама сохраняет x_0. Итак, для $M^2 = S^2$, $\mathbb{R}^2$, L_2 имеем: $\dim H(x_0) \leqslant \dim O(2) = 1$. Для произвольного M^n можно показать, что $\dim H(x_0) \leqslant \dim O(n)$, т. е. $\dim H(x_0) \leqslant n(n-1)/2$. Рассмотрим теперь группу $\mathfrak{G}$.

Утверждение. *Любая изометрия $g \in \mathfrak{G}$ определяется образом точки x_0, т. е. $g(x_0)$, и дифференциалом $dg(x_0)$: $T_{x_0}M^n \to T_{g(x_0)}M^n$.*

В самом деле, рассмотрим соответствие: $g \to (g(x_0); dg(x_0))$ и пусть $(g_1(x_0); dg_1(x_0)) = (g_2(x_0); dg_2(x_0))$. Отсюда $g_1(x_0) = g_2(x_0)$, $dg_1(x_0) = dg_2(x_0)$; тогда рассмотрим $g(x) = (g_1^{-1}) \circ g_2(x)$, $x \in M^n$. Имеем:

$$g(x_0) = (g_1^{-1}) \circ g_2(x_0) = x_0, \quad \text{т. е.} \quad g \in H(x_0);$$
$$dg(x_0) = d((g_1^{-1}) \circ g_2)(x_0) = ((dg_1)^{-1} \circ (dg_2))(x_0) =$$
$$= (dg_1(x_0))^{-1} \circ (dg_2(x_0)) = E,$$

см. выше: $g \equiv E$ на M^n, т. е. $g(x) = x$, $g_1(x) \equiv g_2(x)$. Так как $g(x_0)$ определяется n параметрами, а $dg(x_0)$ задается не более чем $\frac{n(n-1)}{2}$ параметрами, то g может быть задано не более, чем $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ параметрами. Для $M^2 = S^2$, $\mathbb{R}^2$, L_2 имеем:

$\dim \mathfrak{G} \leqslant 3$. С другой стороны, как было показано в гл. 4, каждая из групп $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{Iso}(S^2)$, $\mathrm{Iso}(\mathrm{L}_2)$ содержит подгруппу, преобразования которой также задаются тремя параметрами. Так как эти подгруппы открыты и замкнуты, то для $M^2 = S^2$, $\mathbb{R}^2$, L_2 имеем: $\dim \mathrm{Iso}(M^2) = 3$. Теорема доказана. □

Следствие. *Пусть* $\mathrm{Iso}(M^n)_0$ *— связная компонента единицы в* $\mathrm{Iso}(M^n)$; *тогда* $\mathrm{Iso}(M^2)_0$ *для* $M^2 = S^2$, $\mathbb{R}^2$, L_2 *совпадает с теми трехмерными группами, которые построены в гл. 4; т. е.* $\mathrm{Iso}(S^2)_0 = \mathrm{SO}(3)$; $\mathrm{Iso}(\mathrm{L}_2)_0 = \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$; $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)_0$ *совпадает с группой всех линейных изометрий плоскости, сохраняющих ориентацию.*

Теорема 3. *Любое двумерное гладкое, компактное, связное, замкнутое многообразие триангулируемо.*

Доказательство. Снабдим M^2 римановой метрикой (например, вложим M^2 в евклидово пространство) и рассмотрим геодезические на M^2. Для доказательства теоремы потребуется:

Лемма 4. *Для каждой точки* P_0 *на римановом* M^n *существует окрестность* U *и число* $\varepsilon > 0$, *такие, что*: (*а*) *каждые две точки из* U *соединяет одна и только одна геодезическая длины меньше* ε; (*б*) *эта геодезическая гладко зависит от своих концов.*

Доказательство. Напомним теорему из теории обыкновенных дифференциальных уравнений: пусть дана система $\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt}\right)$, где $\vec{u} = (u^1, \ldots, u^n)$ и $\vec{F}$ — набор из n гладких функций, определенных в окрестности W точки $(\vec{u}_1, \vec{v}_1) \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда существует окрестность U точки $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для каждой точки $(\vec{u}_0, \vec{v}_0) \in U$ уравнение $\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt}\right)$ имеет единственное решение $t \to \vec{u}(t)$, определенное при $|t| < \varepsilon$ и такое, что $\vec{u}(0) = u_1$; $\frac{d\vec{u}(0)}{dt} = \vec{v}_1$, причем решение гладко зависит от начальных условий. Пусть $P_0 \in M^n$; тогда в силу указанного утверждения существует окрестность W точки P_0 такая, что для каждой точки $P \in W$ определено отображение $\exp_P$, задаваемое так: пусть $\vec{a} \in T_P M^n$ — вектор длины, не превосходящей ε; выпустим по направлению этого вектора геодезическую $\gamma_{\vec{a}}(t)$, отнесенную к натуральному параметру t и сопоставим $\vec{a}$ точку $\gamma_{\vec{a}}(1)$, которую обозначим через $\exp_P(\vec{a})$. Получили гладкое отображение шара радиуса ε в M^n (дифференцируемость следует из указанной теоремы существования и единственности) (рис. 32). Построим отображение F: $V \to M^n \times M^n$, где V — окрестность точки $(P_0, 0)$

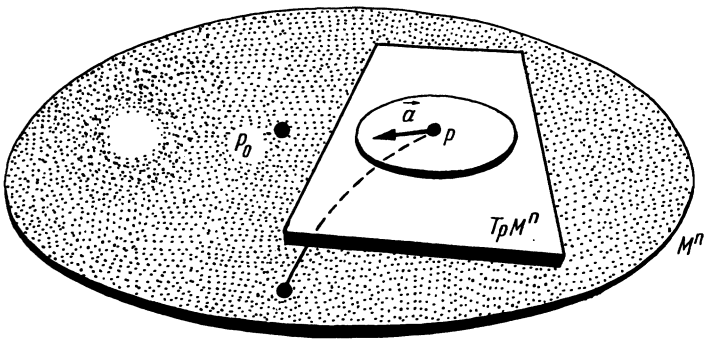


Рис. 32

в многообразии T_*M^n, т. е. $V=\{(P,\vec{a});\ P\in U(P_0),\ |\vec{a}|<\varepsilon\}$ и $F(P,\vec{a})=(P,\ \exp_P(\vec{a}))$. Структура гладкого многообразия в T_*M^n вводится так: T_*M^n состоит из всех пар $(P,\vec{a})$, $P\in M^n$, $\vec{a}\in T_PM_n$; если $x^1,\ldots,x^n$ — координаты в области $U\subset M^n$, то каждый $\vec{a}\in T_PM^n$ однозначно представляется в виде $\vec{a}=t^i\partial_i$, где $\partial_i=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P$. Функции $(x^1,\ldots,x^n;\ t^1,\ldots,t^n)$ образуют локальную систему координат в открытом множестве $\mathbb{R}^{2n}\subset T_*M^n$. Докажем, что якобиан отображения F невырожден в $(P_0,0)$. Обозначим координаты в $U\times U\subset M^n\times M^n$ через $\{x_1^i;x_2^i\}$, $1\leqslant i\leqslant n$; тогда:

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1^i}+\frac{\partial}{\partial x_2^i};\quad F_*\left(\frac{\partial}{\partial t^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2^j};$$

т. е. матрица Якоби отображения F в точке $(P_0,\ 0)$ имеет вид: $\begin{pmatrix}E & E\\ 0 & E\end{pmatrix}$; следовательно она невырождена. Из теоремы о неявной функции следует, что F диффеоморфно отображает окрестность W точки $(P_0,\ 0)\in T_*M^n$ на окрестность $\mathbb{R}^{2n}$ точки $(P_0,\ P_0)\in M^n\times M^n$. □

Эту лемму можно доказать и другим путем. Рассмотрим T_*M^n; тогда на нем возникает динамическая система, называемая *геодезическим потоком*; рассмотрим точку $(P,\ \vec{a})\in T_*M^n$; в силу теоремы существования и единственности, из P в направлении вектора $\vec{a}$ выходит единственная геодезическая $\gamma(t)$, т. е. возникает поле скоростей $\dot{\gamma}$: в T_*M^n получаем траекторию $(P(t);\ \dot{\gamma}(t))=\Gamma(t)$; эти векторы скоростей и образуют геодезический поток. Интегральные траектории этого поля могут быть продолжены неограниченно, в частности, на расстояние ε (одно и то же для всех точек T_*M^n), что и доказывает лемму 4.

Вернемся к доказательству теоремы. Так как M^2 — компактно и замкнуто, то его можно покрыть конечным числом малых дисков.

В силу леммы 4 можно считать, что каждый из них таков, что любая пара его точек может быть соединена единственной геодезической длины, не превосходящей ε, где ε достаточно мало. Покрыв M^2 достаточно плотной сетью точек $\{P_i\}$, можно соединить точки, попавшие внутрь какого-либо диска покрытия, геодезической и разбить каждый диск на треугольники, удовлетворяющие требованиям триангуляции. Важно, чтобы гладкие кривые разбиения, возникшие в одном из дисков, оставались бы гладкими и с точки зрения любого другого диска, в который они могли попасть, если соединяемые ими точки лежали в пересечении дисков покрытия. Но гладкость гарантируется гладкостью решений уравнений геодезических, а потому триангуляцию можно распространять все дальше и дальше, пока не покроем ею все M^2. □

В доказательстве существенно использована двумерность M^2.

§ 5. Тензор кривизны

1. Предварительные замечания.

Рассмотрим M^n (не обязательно риманово) с симметричной аффинной связностью ∇. Выше была доказана формула: $\nabla_{\vec{\partial}_\alpha}(\partial_\beta) = \Gamma^k_{\alpha\beta}\vec{\partial}_k$, где $\vec{\partial}_\alpha$ — базисные векторные поля. Задание ∇ определяет параллельный перенос (на бесконечно малое расстояние) вдоль координатной линии x^α. Фиксируем точку P и рассмотрим следующие параллельные переносы: $\nabla_k\nabla_l$ и $\nabla_l\nabla_k$, где $\nabla_\alpha = \nabla_{\vec{\partial}_\alpha}$ (рис. 33). Можно считать, что мы смещаемся вдоль координатных линий x^k и x^l на малые расстояния α и β. Конечные точки Q и Q' будут, вообще говоря, различны.

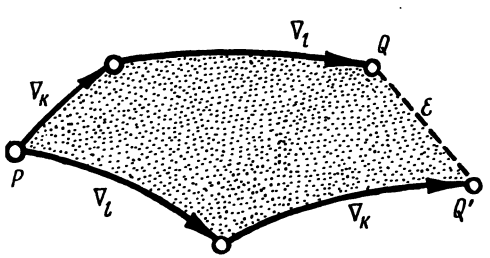


Рис. 33

Этот эффект можно обнаружить и при другом способе переноса: Рассмотрим движение, показанное на рис. 34. Этот малый «параллелограмм» будет, вообще говоря, разомкнут — мы не вернемся в точку P в силу «искривленности» M^n. Условно эту «искривленность» можно попытаться измерить разностью: $\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k = \varepsilon$. Если $M^n = \mathbb{R}^n$ и координаты декартовы, то $\nabla_k\nabla_l = \nabla_l\nabla_k$; если M^n — произвольно, то этот дифференциальный оператор, вообще говоря, отличен от нуля. Наглядный пример дает S^2, отнесенная

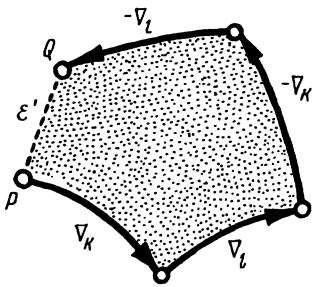


Рис. 34

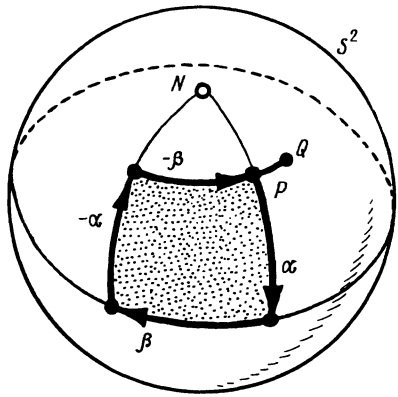


Рис. 35

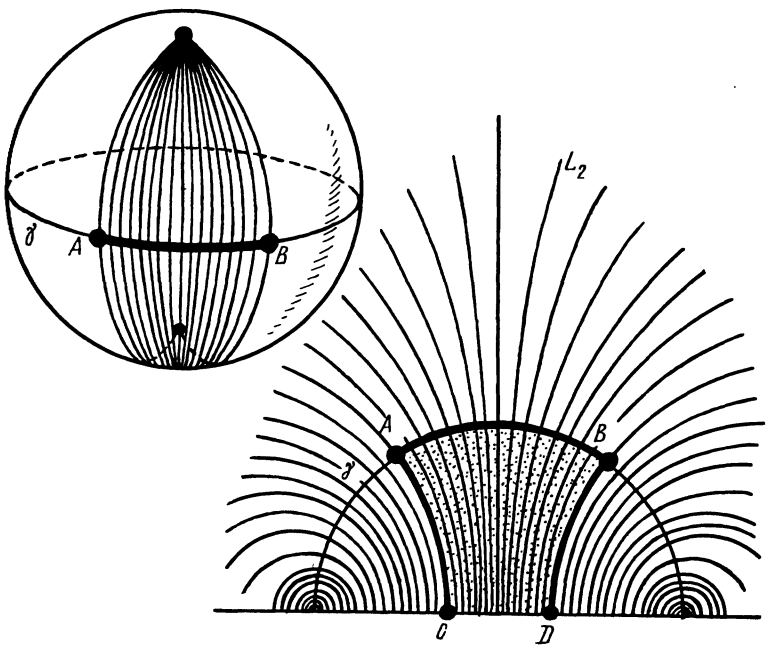


Рис. 36

к координатам (θ, φ) (рис. 35). Здесь $\pm\alpha$ — смещения вдоль меридианов, а $\pm\beta$ — смещения вдоль параллелей.

Простые примеры показывают, что характер искривленности может быть различен. Продемонстрируем это на примере S^2 и плоско-

сти Лобачевского L_2. Рассмотрим на S^2 и на L_2 геодезическую γ и из каждой точки некоторого ее отрезка выпустим ортогональные ей геодезические. Проследим за поведением этого пучка ортогональных к γ траекторий. На рис. 36 изображена качественная картина. На S^2 пучок собирается (по обоим направлениям своего распространения) в две точки: северный и южный полюсы. На L_2 пучок «расходится» и расстояние между крайними геодезическими возрастает до бесконечности. На рис. 37 видно, что разбегание геодезических на L_2 имеет место в обе стороны от отрезка AB, так как длины дуг CD и RT равны бесконечности. Различное поведение геодезических на S^2 и L_2 видно также на примере пучка геодезических, выпущенных из одной точки (рис. 38). Напомним, что

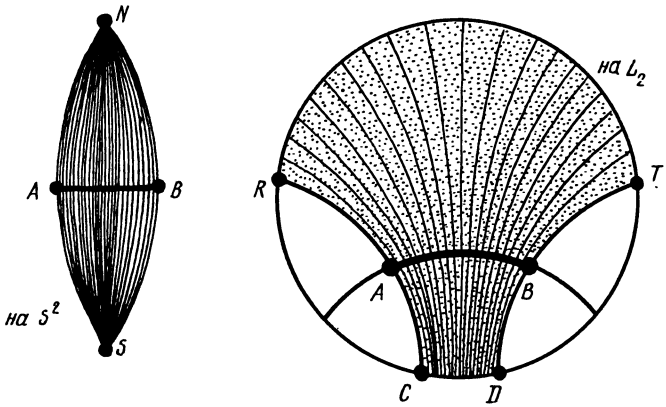


Рис. 37

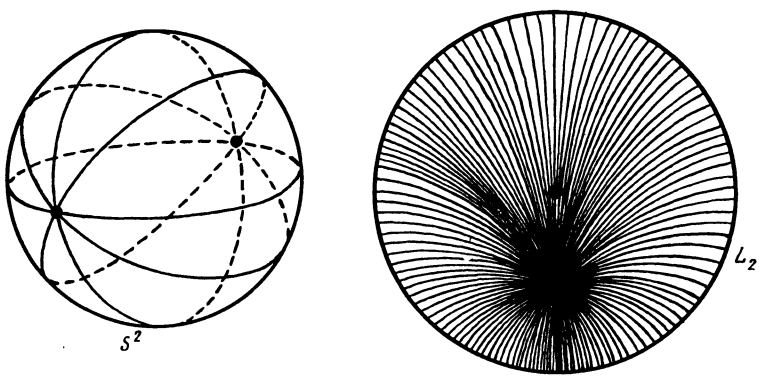


Рис. 38

S^2 и L_2 имеют различную гауссову кривизну: S^2 — постоянную положительную, а L_2 — постоянную отрицательную. Вскоре мы покажем, что гауссова кривизна (для M^2) тесно связана со свойствами оператора $\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k$, измеряющего «искривленность» M^2.

2. Координатное определение тензора кривизны. Пусть M^n отнесено к локальным координатам $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности точки P; рассмотрим $\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k$ и применим его к полю $\vec{T} = \{T^i\}$. Связность ∇ — симметрична; подсчет дает:

$$\nabla_l T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^l} + T^p\Gamma^i_{pl};$$

$$\nabla_k\nabla_l(T^i) = \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k\partial x^l} + \frac{\partial T^p}{\partial x^k}\Gamma^i_{pl} + T^p\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma^i_{pl}\right) + \nabla_l(T^p)\Gamma^i_{pk} - \nabla_p(T^i)\Gamma^p_{kl} =$$

$$= \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k\partial x^l} + \frac{\partial T^p}{\partial x^k}\Gamma^i_{pl} + T^p\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma^i_{pl}\right) + \frac{\partial T^p}{\partial x^l}\Gamma^i_{pk} + T^q\Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \frac{\partial T^i}{\partial x^p}\Gamma^p_{kl} - T^q\Gamma^i_{qp}\Gamma^p_{kl};$$

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)T^i = T^p\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{pl} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{pk}\right) -$$

$$-\left(\Gamma^p_{kl} - \Gamma^p_{lk}\right)\frac{\partial T^i}{\partial x^p} + T^q\left[\Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{qk}\Gamma^i_{pl} - \Gamma^i_{qp}\Gamma^p_{kl} + \Gamma^i_{qp}\Gamma^p_{kl}\right].$$

Так как $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, то:

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)T^i = T^q\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{ql} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{qk} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{qk}\Gamma^i_{pl}\right] = T^q R^i_{q,kl};$$

где

$$R^i_{q,kl} = \frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{qk}\Gamma^i_{pl}.$$

Лемма 1. *Набор $R^i_{q,kl}$ образует тензор 4-го ранга.*

Доказательство. Оно очевидно, так как $\nabla = \{\nabla_k\}$ — тензорная операция. □

Определение. Тензор $R^i_{q,kl}$ называется *тензором кривизны Римана данной связности* ∇.

Если $M^n = \mathbb{R}^n$, то этот тензор равен нулю. В самом деле, он обращается в нуль в декартовой системе, а потому, в силу тензорности закона преобразования, равен нулю и в любой другой системе. Существуют M^n, где $R^i_{j,kl}$ отличен от нуля (см. ниже). Напомним, что координаты — евклидовы для данной связности, если $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$ в этих координатах. Отсюда следует:

Лемма 2. *Пусть M^n снабжено симметричной аффинной связностью. Если тензор кривизны Римана этой связности отличен от нуля (в какой-то системе координат), то на M^n нельзя ввести евклидовы координаты (в окрестности точки).*

Если бы такие координаты нашлись, то в них аннулировались бы Γ^i_{jk}, а потому тензор кривизны также обратился бы в нуль. Итак, тензор кривизны описывает препятствие к введению евклидовых координат (для данной связности).

3. Инвариантное определение тензора кривизны. Выше мы построили тензор Римана в конкретной системе координат.

Дадим теперь инвариантное определение. Пусть $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ — произвольные гладкие векторные поля на M^n (с симметричной аффинной связностью). Построим *«оператор кривизны»* R, сопоставляющий тройке $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ новое векторное поле. Удобно трактовать поля как линейные дифференциальные операторы; это обстоятельство будем указывать так: вместо $\vec{X}$ напишем просто X.

Определение. Положим: $R(X, Y)(Z)=\nabla_X\nabla_Y(Z)-\nabla_Y\nabla_X(Z)-\nabla_{[X,Y]}(Z)$. Итак, R переводит $T_x\times T_x\times T_x$ в T_x, где $x\in M^n$.

Теорема 1. *Отображение R трилинейно и потому задает тензор четвертого ранга.*

Доказательство. Если рассмотреть линейные комбинации полей — аргументов с постоянными коэффициентами, то трилинейность очевидна. В доказательстве нуждается тот факт, что за знак операции R можно выносить гладкую функцию $f(x)$. Если это доказать, то R будет полностью определено действием на базисные поля: $\vec{\partial}_\alpha=\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x^\alpha}\right)$, $1\leqslant\alpha\leqslant n$. Рассмотрим отображение $(X, Y, Z)\to(X, Y, f(x)\cdot Z)$, где $f(x)$ — гладкая функция. Требуется доказать, что $R(XY)\cdot(fZ)=f\cdot R(X, Y)\cdot Z$.

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_Y(fZ)-\nabla_Y\nabla_X(fZ)-\nabla_{[X,Y]}(fZ)&=\nabla_X((\nabla_Y f)Z)+\nabla_X(f\nabla_Y Z)-\\&-\nabla_Y((\nabla_X f)Z)-\nabla_Y(f\nabla_X Z)-(\nabla_{[X,Y]}f)Z-f\nabla_{[X,Y]}Z=\\&=(\nabla_X\nabla_Y f)Z+(\nabla_Y f)\nabla_X Z+(\nabla_X f)\nabla_Y Z+f(\nabla_X\nabla_Y Z)-\\&-(\nabla_Y\nabla_X f)Z-(\nabla_X f)\nabla_Y Z-(\nabla_Y f)\nabla_X Z-f(\nabla_Y\nabla_X Z)-\\&-(\nabla_{[X,Y]}f)Z-f(\nabla_{[X,Y]}Z)=\{(X(Yf)-Y(Xf)-(XY-YX)f\}Z+\\&+f\{\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\}=0+f\cdot R(X,Y)Z,\end{aligned}$$

так как $\nabla_X f=X(f)$. Требует проверить, что: $R(fX, Y)Z=f\cdot R(X, Y)Z$. Имеем:

$$R(fX, Y)Z=\nabla_{fX}\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_{fX}Z-\nabla_{[fX,Y]}Z.$$

Ясно, что $\nabla_{fX}=f\nabla_X$, так как

$$(\nabla_{fX})T=(fX)^k\nabla_k T=f\{X^k\nabla_k T\}=f(\nabla_X T).$$

Далее:

$$[fX, Y]=f(XY)-Y(fX)=f(XY)-(Yf)X-f(YX)=f[X, Y]-(Yf)X.$$

Отсюда:

$$R(fX, Y)Z=f(\nabla_X\nabla_Y Z)-\nabla_Y(f\nabla_X Z)-\nabla_{f[X,Y]}Z+\nabla_{(Yf)X}Z=$$
$$=f(\nabla_X\nabla_Y Z)-(\nabla_Y f)\nabla_X Z-f(\nabla_Y\nabla_X Z)-f\nabla_{[X,Y]}Z+(Yf)\nabla_X Z=$$
$$=f\cdot R(X, Y)Z+0=f\cdot R(X, Y)Z,$$

что и требовалось. Соотношение: $R(X, fY)Z=f\cdot R(X, Y)Z$ проверяется аналогично. □

Свяжем инвариантное определение тензора кривизны с его координатным определением. Введем базисные поля ∂_i (как дифференциальные операторы). Разложим X, Y, Z по этим полям: $X=X^i\partial_i$; $Y=Y^j\partial_j$; $Z=Z^k\partial_k$. Получаем: $R(X, Y)Z=$ $=X^iY^jZ^k\cdot\{R(\partial_i, \partial_j)\partial_k\}$; т. е. $R(X, Y)Z$ полностью определяется заданием $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$. Далее,

$$R(\partial_i, \partial_j)Z=\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}Z-\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}Z-\nabla_{[\partial_i, \partial_j]}Z.$$

Ясно, что $\nabla_{\partial_i}=\nabla_i$ (по определению ∇_{∂_i}), т. е. $R(\partial_i, \partial_j)Z=$ $=(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)Z-\nabla_{[\partial_i, \partial_j]}Z$. Так как $[\partial_i, \partial_j]=0$, то $R(\partial_i, \partial_j)Z=$ $=(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)Z$. Итак, мы получили (в фиксированной системе координат $x^1, \ldots, x^n$) «координатное» определение тензора Римана, что и доказывает совпадение определений.

4. Алгебраические свойства тензора кривизны Римана.

Теорема 2. *Для любых трех гладких полей X, Y, Z на M^n выполняются тождества:*

1) $R(X, Y)Z+R(Y, X)Z=0$; $R^i_{j,kl}+R^i_{j,lk}=0$; *т. е. косая симметрия по аргументам X, Y.*

2) $R(X, Y)Z+R(Z, X)Y+R(Y, Z)X=0$ — *тождество Якоби; в координатах:* $R^i_{j,kl}+R^i_{l,jk}+R^i_{kl,j}=0$. *Здесь в записи $R^i_{j,kl}$ имеется такое соответствие между индексами (j, k, l) и полями X, Y, Z: $j\sim X$, $k\sim Y$, $l\sim Z$.*

3) *В том случае, когда связность ∇ — риманова, имеем $\langle R(X, Y)Z, W\rangle+\langle R(X, Y)W, Z\rangle=0$ для любых полей X, Y, Z, W; здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение, порожденное метрикой g_{ij}; в координатах:* $R_{ij,kl}+R_{ji,kl}=0$, *где* $R_{ij,kl}=g_{i\alpha}R^\alpha_{j,kl}$.

4) *Если связность ∇ риманова, то $\langle R(X, Y)Z, W\rangle=$ $=\langle R(Z, W)X, Y\rangle$, т. е. $R_{ij,kl}=R_{kl,ij}$.*

На языке компонент $R_{ij,kl}$ (т. е. после опускания индекса) имеем косую симметрию внутри каждой пары: (i, j) и (k, l),

а также — симметрию при перестановке пар (когда обе пары меняются местами, но внутри пар индексы не переставляются).

Доказательство. 1) Так как $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$, то косая симметрия $R(X, Y)Z$ по паре X, Y очевидна.

2) Сначала докажем, что для симметричной связности имеем: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. В самом деле, в координатах имеем:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = X^i \nabla_i Y - Y^i \nabla_i X =$$
$$= \left\{ X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^p \Gamma^k_{ip} \right) - Y^i \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + X^p \Gamma^k_{ip} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} =$$
$$= \left\{ X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + X^i Y^p \Gamma^k_{ip} - Y^i X^p \Gamma^k_{ip} \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} =$$
$$= \left\{ X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} = [X, Y],$$

так как $Y^i X^p \Gamma^k_{ip} = Y^p X^i \Gamma^k_{pi}$; $\Gamma^k_{pi} = \Gamma^k_{ip}$. Если X и Y коммутируют, то $\nabla_X Y = \nabla_Y X$. Теперь докажем тождество Якоби. В силу теоремы 1 достаточно проверить его только на попарно коммутирующих полях: X, Y, Z (например, на ∂_i, ∂_j, ∂_k). Достаточно проверить, что:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y -$$
$$- \nabla_{[Z,X]} Y + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \equiv 0.$$

Как было отмечено, X, Y, Z — коммутируют, а потому требуемое тождество следует из соотношений типа: $\nabla_X Y = \nabla_Y X$. Свойство (2) доказано.

3) Требуется доказать, что $\langle R(X, Y)Z, W\rangle + \langle R(X, Y)W, Z\rangle = 0$. Достаточно проверить, что $\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = 0$ (учитывая поляризацию квадратичных форм). Снова считаем, что $[X, Y] = 0$. Тогда: $\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = \langle (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)Z, Z\rangle$. Рассмотрим функцию: $\langle Z, Z\rangle = f$ и вычислим $X(f) = X\langle Z, Z\rangle = \nabla_X \langle Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_X Z, Z\rangle$. Далее:

$$YX(f) = 2\nabla_Y \langle \nabla_X Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle;$$

аналогично получаем: $XY(f) = 2\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle + 2\langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle$. В силу симметрии $\langle\ ,\ \rangle$ имеем: $\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle$, что и требовалось.

4) Требуется доказать, что $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(Z, W)X, Y\rangle$. Рассмотрим октаэдр, показанный на рис. 39. Четыре его грани заштрихованы, и в каждой его вершине поставлено скалярное произведение. Сумма произведений, расположенных в вершинах каждой заштрихованной грани, равна нулю. Проверим, например,

это для грани $a\alpha c$. Имеем, используя уже доказанные симметрии,

$$\langle R(X, Y)Z; W\rangle = -\langle R(X, Y)W; Z\rangle;$$
$$\langle R(Y, W)Z; X\rangle = -\langle R(Y, W)X; Z\rangle;$$
$$\langle R(X, W)Y; Z\rangle = -\langle R(W, X)Y; Z\rangle,$$

т. е.

$$\alpha + \alpha + c = \langle R(X, Y)Z; W\rangle + \langle R(Y, W)Z; X\rangle + \langle R(X, W)Y; Z\rangle =$$
$$= -\langle R(X, Y)W; Z\rangle - \langle R(Y, W)X; Z\rangle - \langle R(W, X)Y; Z\rangle =$$
$$= -\langle R(X, Y)W + R(Y, W)X + R(W, X)Y; Z\rangle = 0$$

в силу тождества Якоби. Аналогично проверяется равенство

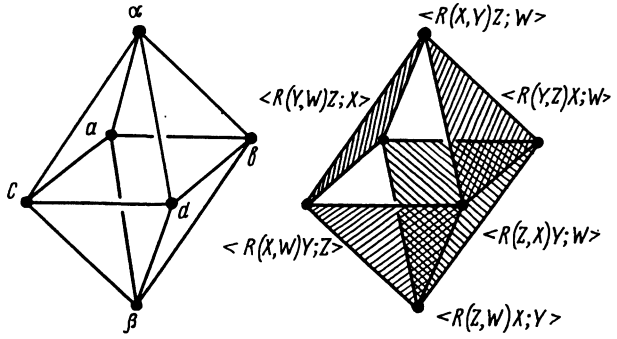


Рис. 39

нулю сумм: $\alpha + b + d$; $c + d + \beta$; $a + b + \beta$. Напишем тождество: $0 + 0 = 0 = 0 + 0$ и распишем каждый из этих нулей так: $(a + \alpha + c) + (\alpha + b + d) = 0 = (a + b + \beta) + (c + d + \beta)$; откуда $2\alpha = 2\beta$, т. е. $\langle R(X, Y)Z; W\rangle = \langle R(Z, W)X; Y\rangle$, что и требовалось. □

Определение. *Тензором Риччи* римановой связности называется тензор $R_{jl} = R^{i}_{jil}$, т. е. тензор, полученный сверткой (по паре индексов) тензора Римана. Тензор Риччи симметричен (проверьте!).

Определение. *Скалярной кривизной* R риманова многообразия называется функция $R(x) = g^{kl}R_{kl}$, т. е. полная свертка тензора Риччи с тензором, обратным к метрическому.

Ясно, что R_{kl} — тензор 2-го ранга, а $R(x)$ — скалярная функция. Для многих конкретных задач полезно знать явное выражение тензора Римана через g_{ij} и производные от g_{ij}.

Теорема 3. *На римановом многообразии имеет место тождество:*

$$R_{iq,\,kl} = g_{i\alpha} R^{\alpha}_{q,\,kl} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^q \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^q \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + g_{mp}\left(\Gamma^m_{qk}\Gamma^p_{il} - \Gamma^m_{ql}\Gamma^p_{ik}\right).$$

Доказательство. Из координатной записи тензора Римана имеем:

$$R^i_{q,\,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{qk}\Gamma^i_{pl} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk}\right)[k, l],$$

где знаком $[k, l]$ обозначена альтернация по индексам k и l без деления на 2. Далее,

$$\theta = g_{si} R^i_{q,\,kl} = R_{sq,\,kl} = g_{si}\left(\frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk}\right)[k, l] = g_{si}\left(\frac{\partial \Gamma^i_{*}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{*}\right)[k, l],$$

где знаком $*$ обозначена пара индексов (ql). Выражение в круглых скобках можно формально понимать как результат ковариантного дифференцирования ∇_k набора Γ^i_*, где на знак $*$ пока не обращаем внимания. Набор Γ^i_* не образует тензора, однако, в каждой данной системе координат можно рассмотреть и тензор с такими компонентами: Γ^i_* (в других системах этот тензор будет иметь уже какие-то другие компоненты, отличные от $\Gamma^{i'}_*$, но для дифференцирования в данной системе это обстоятельство несущественно). Так как g_{si} порождает опускание индекса у «тензора» Γ^i_*, то это можно выполнить и под знаком ковариантного дифференцирования, так как тензор g_{ij} ковариантно постоянен. Отсюда:

$$\theta = g_{si}\nabla_k\left(\Gamma^i_*\right)[k, l] = \nabla_k\left(g_{si}\Gamma^i_*\right)[k, l] = \nabla_k\left(\Gamma_{s,\,*}\right)[k, l],$$

где

$$\Gamma_{s,\,*} = \Gamma_{s,\,ql} = \frac{1}{2} g_{si} g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha l}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{\alpha q}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{sq}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^s}\right).$$

Подставляя это выражение в исходную формулу для $R_{sq,\,kl}$, получаем:

$$R_{sq,\,kl} = \nabla_k(\Gamma_{s*})[k, l] = \left(\frac{\partial \Gamma_{s*}}{\partial x^k} - \Gamma_{\alpha,*}\Gamma^\alpha_{ks}\right)[k, l] = \left(\frac{\partial \Gamma_{s,\,ql}}{\partial x^k} - \Gamma_{\alpha,\,ql}\Gamma^\alpha_{ks}\right)[k, l] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sl}}{\partial x^k \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{sq}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^s}\right)[k, l] - g_{\alpha p}\Gamma^p_{ql}\Gamma^\alpha_{ks}[k, l] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sl}}{\partial x^k \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{sk}}{\partial x^l \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^s}\right) + g_{\alpha p}\left(\Gamma^p_{qk}\Gamma^\alpha_{ls} - \Gamma^p_{ql}\Gamma^\alpha_{ks}\right). \quad \square$$

Следствие 1. *Если тензор кривизны Римана не обращается в нуль в какой-то системе координат, то на M^n нельзя ввести локальные евклидовы координаты, т. е. такие, в которых g_{ij} — постоянная матрица (или, что то же: $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$).*

Доказательство следует из леммы 2. □

Связь между равенством нулю тензора кривизны и возможностью введения евклидовых координат усматривается еще из следующих соображений. Рассмотрим закон преобразования: $\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right)$. Для того, чтобы существовали координаты, в которых $\Gamma^{i'}_{j'k'} \equiv 0$, необходимо выполнение соотношений (т. е. уравнений на координаты $x^{i'}$): $\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} = -\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk}$. Необходимым условием разрешимости этой системы являются тождества: $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{\alpha'}}\right)$. Это накладывает условия на правые части системы. Можно проверить, что выполнение этих требований эквивалентно обращению в нуль тензора кривизны. (Проверьте!).

5. Некоторые приложения тензора кривизны Римана. Рассмотрим двумерное риманово многообразие. Здесь тензор кривизны устроен особенно просто (задача: какой смысл имеет тензор кривизны для одномерного многообразия?). Рассмотрим скалярную кривизну $R(x)$ — функцию на M^2. Так как эта функция измеряет «искривленность» M^2, то есть основания считать, что она связана с гауссовой кривизной, которая, как мы знаем, также отвечает за «искривленность» M^2.

Теорема 4. *На двумерном гладком римановом многообразии имеет место тождество: $R = 2K$, где $R(P)$, $P \in M^2$, — скалярная кривизна, $K(P)$ — гауссова кривизна.*

Следствие 2. *Так как $R(P)$ полностью определяется заданием g_{ji}, то $K(P)$ также полностью определяется только g_{ij}, в частности, не меняется при изометриях M^2 в $\mathbb{R}^3$ (при изгибаниях поверхности).*

Нетривиальность этого следствия видна из того, что в исходном определении $K(P)$ участвовала вторая квадратичная форма, описывающая вложение M^2 в $\mathbb{R}^3$. Непосредственная проверка инвариантности $K(P)$ при изгибаниях также затруднительна и наиболее естественно производится только после изучения тензора Римана.

Доказательство теоремы. В силу теоремы 3:

$$R_{iq,\,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^q \partial x^k} + \frac{\partial g_{qk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^q \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + g_{mp}\left(\Gamma^m_{qk}\Gamma^p_{il} - \Gamma^m_{ql}\Gamma^p_{ik}\right).$$

Введем в $\mathbb{R}^3$ специальную декартову систему координат; выберем на M^2 точку P и зададим M^2 в окрестности P в виде графика $z = f(x, y)$, где (x, y) — декартовы координаты в $T_P M^2$. Так как $T_P M^2 = \mathbb{R}^2(x, y)$ — касательная плоскость, то $\operatorname{grad} f(P) = 0$, т. е. $g_{ij}(P) = (\delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j})(P) = \delta_{ij}$ или $\Gamma^i_{jk}(P) = 0$, так как $\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\Big|_P = 0$ (проверьте!). В силу алгебраических симметрий $R_{iq,\,kl}$ у него сейчас имеется только одна существенная компонента: $R_{12,\,12}$. Остальные — либо равны нулю, либо отличаются от $R_{12,\,12}$ только знаком, или совпадают с $R_{12,\,12}$. Запишем тензор Римана в системе координат (x, y). Имеем:

$$R_{12,\,12} = \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(f_x f_y\right)_{xy} - \left(f_y^2\right)_{xx} - \left(f_x^2\right)_{yy}\right] = \left(f_{xx} f_y + f_x f_{xy}\right)_y - \left(f_y f_{xy}\right)_x - \left(f_x f_{xy}\right)_y =$$

$$= f_{xxy} f_y + f_{xx} f_{yy} + f_{xy} f_{xy} + f_x f_{xyy} - f_{xy} f_{xy} - f_y f_{xxy} - f_{xy} f_{xy} - f_x f_{xyy} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = K.$$

Отсюда: $R_{12,\,12} = K$. Вычислим R.

$$R = g^{kl} R_{kl} = g^{kl} R^{\alpha}_{k,\,\alpha l} = g^{kl} g^{\alpha q} R_{qk,\,\alpha l} = R_{12,\,12}\left(\Sigma_{\pm} g^{kl} \cdot g^{\alpha q}\right),$$

где

$$\Sigma_{\pm} g^{kl} g^{\alpha q} = g^{22} g^{11} - g^{21} g^{21} + g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12} =$$

$$= 2(g^{22} g^{11} - (g^{12})^2) = 2 \det(g_{ij})^{-1} = \frac{2}{g}, \quad \text{где} \quad g = \det(g_{ij}).$$

Итак: $R = \frac{2}{g} R_{12,\,12}$. Отсюда: $R = 2K$, так как $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$. Но так как R и K — скаляры, то их значения не зависят от выбора координат и потому в любой системе получаем: $R = 2K$. □

Таким образом, по характеру своего поведения относительно изгибаний, $K(P)$ отличается от средней кривизны, поэтому гауссова кривизна — «внутренний инвариант» поверхности. Рассмотрим

ПРИМЕРЫ.

(1) для евклидовой метрики $dx^2 + dy^2$: $R = 2K = 0$;

(2) для сферической метрики $dr^2 + \left(\sin^2 \frac{r}{r_0}\right) d\varphi^2$: $R = 2K = \frac{2}{r_0^2}$, т. е. скалярная кривизна постоянна и положительна;

(3) для метрики плоскости Лобачевского $dr^2 + \left(\operatorname{sh}^2 \frac{r}{r_0}\right)^2 d\varphi^2$ имеем: $R = 2K = \frac{-2}{r_0^2}$, т. е. кривизна постоянна и отрицательна;

(4) для конформно-евклидовой метрики $\lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$, где $\lambda(x, y)$ — положительная функция, имеем: $R = 2K = -\frac{1}{\lambda}\Delta \ln \lambda$, где Δ — оператор Лапласа. Доказательство: прямое вычисление.

Структура тензора Римана в трехмерном случае уже более сложна. Больше число существенных компонент: $R_{12,13}$; $R_{21,23}$; $R_{31,32}$; $R_{12,12}$; $R_{13,13}$; $R_{23,23}$; остальные $R_{ij,kl}$ либо равны нулю, либо совпадают с указанными, либо отличаются знаком.

«Сложность» $R_{ij,kl}$ определяется числом существенных компонент. Для M^2 такая компонента — одна, для M^3 — шесть. Можно подсчитать, что для M^n: $N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$, где N — число существенных компонент; когда $n \to \infty$, отношение N к общему числу компонент (т. е. к n^4) стремится к $1/12$. (ЗАДАЧА: вычислите N).

В геометрии большое значение имеет *«кривизна по двумерному направлению»*. Рассмотрим риманово M^n; пусть $\vec{X}, \vec{Y} \in T_P M^n$. Пусть они выбраны так, что площадь параллелограмма $\Pi(\vec{X}, \vec{Y})$, построенного на этих векторах, равна 1 в метрике g_{ij}. Тогда *кривизной M^n в двумерном направлении σ*, определяемом $\vec{X}$, $\vec{Y}$, называется число $R(\sigma) = \langle R(X, Y)X; Y\rangle$, где X, Y — произвольные векторные поля в окрестности P, такие, что $X(P) = \vec{X}$, $Y(P) = \vec{Y}$, т. е. совпадающие в P с выбранными векторами $\vec{X}$, $\vec{Y}$. Следует доказать, что $R(\sigma)$ не зависит от способа включения векторов $\vec{X}$, $\vec{Y}$ в векторные поля X, Y.

Лемма 3. *Имеет место формула $R(\sigma) = R_{\beta j,kl} X^j X^k Y^l Y^\beta$, где X^α и Y^β — координаты векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$. Здесь $R_{ij,kl}$ — тензор и $R(\sigma)$ не зависит от способа включения $\vec{X}$, $\vec{Y}$ в X, Y.*

Доказательство. Имеем:

$$[R(X,Y)Z]^k = R^k_{j,pq} X^p Y^q Z^j;$$

$$R(\sigma) = g_{\alpha\beta} Y^\beta [R(X,Y)X]^\alpha = g_{\alpha\beta} Y^\beta R^\alpha_{j,kl} X^j X^k Y^l = R_{\beta j,kl} X^j X^k Y^l Y^\beta,$$

что и требовалось, так как $X^i = X^i(P)$, $Y^i = Y^i(P)$. □

Определение. Риманово многообразие M^n называется *многообразием положительной (постоянной, отрицательной, нулевой и т. д.)* кривизны, если его кривизны по всем двумерным направлениям положительны (постоянны, отрицательны, нулевые и т. д.).

Для оправдания определения следует сопоставить его с двумерным случаем, в котором понятия положительной и т. д. кривизн уже определены нами при помощи гауссовой кривизны.

Лемма 4. *Рассмотрим риманово M^2, и пусть $K(P)$ — гауссова кривизна, $R(\sigma)$ — кривизна по двумерному направлению, $(\vec{X}, \vec{Y}) = \sigma$ в точке $P \in M^2$. Тогда $R(\sigma) = K(P) = \frac{1}{2}R(P)$.*

Доказательство. Рассмотрим координаты (x, y), координатные линии которых ортогональны в точке P; скалярное произведение, индуцированное метрикой на $T_P M^2$, можно считать евклидовым. Тогда:

$$R(\sigma) = R_{\beta j,\, kl} X^j X^k X^\beta X^l =$$
$$= R_{12,\,12}(X^2X^2Y^1Y^1 - X^2X^1Y^2Y^1 + X^1X^1Y^2Y^2 - X^1X^2Y^1Y^2) =$$
$$= R_{12,\,12}(X^2Y^1 - Y^2X^1)^2 = R_{12,\,12} \cdot 1 = R_{12,\,12},$$

так как $X^2Y^1 - Y^2X^1 =$ [площадь параллелограмма $\Pi(\vec{X}, \vec{Y})$, натянутого на $\vec{X}$, $\vec{Y}$ в декартовых координатах (x, y) в $T_P(M^2)$]. Так как $R_{12,\,12} = K(P)$, то $R(\sigma) = K(P)$, что и требовалось. □

Итак, предложенное нами определение кривизны по двумерному направлению естественно обобщает понятие гауссовой (скалярной) двумерной кривизны римановой метрики. Ясно, что кривизны по любому двумерному направлению в $\mathbb{R}^n$ равны нулю, т. е. $\mathbb{R}^n$ — многообразие нулевой кривизны.

Для кривизны по двумерному направлению $\sigma = (\vec{X}, \vec{Y})$ существует наглядное истолкование, которое мы приведем без доказательства. Рассмотрим в точке $P \in M^n$ двумерную плоскость H, натянутую на $\vec{X}$, $\vec{Y}$, и выпустим из P в направлении каждого вектора $\vec{Z} \in H$ геодезическую $\gamma_{\vec{Z}}(t)$. Ясно, что эти геодезические (локально)

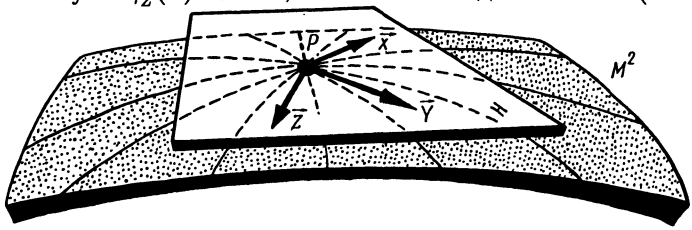


Рис. 40

образуют двумерную поверхность $M^2 \subset M^n$, касательная плоскость к которой совпадает с H (рис. 40). Эта поверхность называется *геодезической поверхностью*. На ней возникает индуцированная метрика, у которой можно вычислить гауссову кривизну. Оказывается, что $R(\sigma)$ совпадает с этой гауссовой кривизной.

Глава 6

ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

До сих пор мы в основном изучали локальные свойства гладких многообразий, т. е. такие свойства, которые можно было определять и вычислять в окрестности каждой точки P многообразия M независимо друг от друга и которые не зависели от того, каким образом M представлено в виде объединения карт. Однако во многих задачах уже недостаточно знать только локальные свойства M.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу. Пусть $M = S^1$ — окружность, в качестве локальной координаты на которой взят угловой параметр φ. Рассмотрим задачу об отыскании такой гладкой функции f на S^1, чтобы выполнялось тождество:

$$\frac{df}{d\varphi} = g(\varphi), \tag{1}$$

где g — некоторая гладкая функция на S^1. Если решать эту задачу в малой окрестности точки $P \in S^1$ с координатой φ_0, то решением будет служить любая первообразная функции g: $f(\varphi) = \int g(\varphi)\, d\varphi$. В целом же на S^1 решение существует не всегда. В самом деле, любую гладкую функцию на S^1 можно отождествить с периодической функцией одной вещественной переменной с периодом 2π. Тогда функция f является решением нашей задачи, если $f(\varphi) = \int g(\varphi)\, d\varphi$ и функция f является периодической функцией. Всякая первообразная функции g выражается через определенный интеграл: $f(\varphi) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} g(\varphi)\, d\varphi + C$. Поэтому условие периодичности функции f записывается в виде: $\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0$, или

$$\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0. \tag{2}$$

Например, если $g(\varphi) \equiv 1$, то $\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 2\pi \neq 0$. Поэтому в случае $g(\varphi) \equiv 1$ задача (1) не имеет решения на S^1. Условие (2) является

необходимым и достаточным условием для существования решения задачи (1). В рассмотренной задаче видно, что существование решения существенно зависит от структуры многообразия в целом. В настоящем параграфе будут изучены именно такие свойства многообразий, от которых зависит поведение тех или иных функций и отображений в целом на многообразии.

§ 1. Исчисление внешних дифференциальных форм. Когомологии

1. Дифференцирование внешних дифференциальных форм. Для внешних дифференциальных форм дифференциальное исчисление несколько упрощается по сравнению с дифференциальным исчислением произвольных тензорных полей. Если на многообразии фиксирована некоторая связность, то ковариантный градиент кососимметрического тензорного поля не является, вообще говоря, кососимметрическим тензорным полем. Поэтому естественно определить градиент внешней дифференциальной формы как композицию ковариантного градиента и альтернирования по всем индексам тензорного поля. При этом, если связность симметрична, то в формуле для градиента внешней дифференциальной формы вообще не участвуют символы Кристоффеля, т. е. определение градиента внешней дифференциальной формы не зависит от выбора симметрической связности на многообразии M. В самом деле, пусть в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ дифференциальная форма ω имеет компоненты $\{\omega_{i_1, \ldots, i_k}\}$. Тогда градиент $d\omega$ определим формулой:

$$(d\omega)_{j_1, \ldots, j_{k+1}} = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \nabla_{\sigma(j_{k+1})} \omega_{\sigma(j_1), \ldots, \sigma(j_k)}, \tag{1}$$

где

$$\nabla_l \omega_{i_1, \ldots, i_k} = \frac{\partial \omega_{i_1, \ldots, i_k}}{\partial x^l} - \Gamma^{\alpha}_{l i_1} \omega_{\alpha, i_2, \ldots, i_k} - \ldots - \Gamma^{\alpha}_{l i_k} \omega_{i_1, \ldots, \alpha}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$(d\omega)_{j_1, \ldots, j_{k+1}} = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \frac{\partial \omega_{\sigma(j_1), \ldots, \sigma(j_k)}}{\partial x^{\sigma(j_{k+1})}} -$$

$$- \sum_{\sigma} \sum_{s=1}^{k} (-1)^{|\sigma|} \Gamma^{\alpha}_{\sigma(j_{k+1}) \sigma(j_s)} \omega_{\sigma(j_1) \ldots \sigma(j_{s-1}) \alpha \sigma(j_{s+1}) \ldots \sigma(j_k)}.$$

Второе слагаемое обращается в нуль, ибо при фиксированных значениях индексов s и α существует ровно две перестановки σ, σ'

индексов $(j_1, \ldots, j_k, j_{k+1})$, для которых $\sigma(j_1) = \sigma'(j_1), \ldots, \sigma(j_{s-1}) = \sigma'(j_{s-1}), \sigma(j_{s+1}) = \sigma'(j_{s+1}), \ldots, \sigma(j_k) = \sigma'(j_k)$, а $\sigma(j_{k+1}) = \sigma'(j_s)$, $\sigma(j_s) = \sigma'(j_{k+1})$. При этом четность перестановок σ и σ' различна. Поэтому в силу симметричности символов Кристоффеля Γ^i_{jk} по нижним индексам пара слагаемых, соответствующих перестановкам σ и σ', уничтожается. Таким образом,

$$(d\omega)_{j_1, \ldots, j_{k+1}} = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \frac{\partial \omega_{\sigma(j_1), \ldots, \sigma(j_k)}}{\partial x^{\sigma(j_{k+1})}}. \tag{3}$$

В формуле (3) многие слагаемые повторяются. В самом деле, если σ и σ' — две перестановки, для которых $\sigma(j_{k+1}) = \sigma'(j_{k+1})$, то $\sigma' = \sigma h$, где h — перестановка, оставляющая j_{k+1} на месте. Тогда

$$(-1)^{|\sigma'|} \frac{\partial \omega_{\sigma'(j_1), \ldots, \sigma'(j_k)}}{\partial x^{\sigma'(j_{k+1})}} = (-1)^{|\sigma| + |h|} \frac{\partial \omega_{\sigma h(j_1), \ldots, \sigma h(j_k)}}{\partial x^{\sigma(j_{k+1})}} = (-1)^{|\sigma|} \frac{\partial \omega_{\sigma(j_1) \ldots \sigma(j_k)}}{\partial x^{\sigma(j_{k+1})}}.$$

Поэтому (а также для согласования операции градиента с операцией внешнего произведения) в компонентах градиента $d\omega$ будем учитывать только одно из $k!$ одинаковых слагаемых. Таким образом, дадим

Определение 1. *Градиентом внешней дифференциальной формы* ω называется внешняя дифференциальная форма $d\omega$, компоненты которой в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ имеют вид:

$$(d\omega)_{j_1, \ldots, j_{k+1}} = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial \omega_{j_1, \ldots, j_{s-1}, j_{s+1}, \ldots, j_{k+1}}}{\partial x^{j_s}}. \tag{4}$$

Формула (4) отличается от (3) множителем и знаком.

Теорема 1. *Градиент внешних дифференциальных форм удовлетворяет следующим условиям:*

а) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$,

б) $d(d\omega) = 0$.

Доказательство. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат, ω_1, ω_2 — две внешних дифференциальных формы степеней p и q, соответственно. Тогда компоненты форм ω_1 и ω_2 отличны от нуля только для таких наборов индексов $(i_1, \ldots, i_p)$, $(j_1, \ldots, j_q)$, для которых $i_s \neq i_l$, $j_s \neq j_l$ при $s \neq l$. Если $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$, $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$, то положим: $\omega_{1, I} = \omega_{1, i_1, \ldots, i_p}$, $\omega_{2, J} = \omega_{2, j_1, \ldots, j_q}$. Аналогично, если $l_1 < \ldots < l_{p+q}$, $K = \{l_1, \ldots, l_{p+q}\}$, положим $(\omega_1 \wedge \omega_2)_K = (\omega_1 \wedge \omega_2)_{l_1, \ldots, l_{p+q}}$. Тогда по формуле внешнего умножения форм (с. 318) имеем:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)_K = \sum (-1)^{|\sigma(I)|} \omega_{1, I} \omega_{2, J}, \tag{5}$$

где суммирование производится по всем подмножествам $I \subset K$, состоящим из p элементов, $J = K \setminus I$, а σ — такая перестановка, которая переставляет индексы из множества I на первые p мест с сохранением порядка. Формулу для градиента (4) тоже перепишем в виде:

$$(d\omega)_I = \sum_{i \in I} (-1)^{|\sigma(i)|} \frac{\partial \omega_{I \setminus \{i\}}}{\partial x^i}, \tag{6}$$

где $\sigma(i)$ — перестановка множества I, переставляющая индекс i на первое место, сохраняя порядок остальных индексов. Применим формулу (6) к (5), получим:

$$\begin{aligned}(d(\omega_1 \wedge \omega_2))_K &= \sum_{i \in K} (-1)^{|\sigma(i)|} \frac{\partial (\omega_1 \wedge \omega_2)_{K \setminus \{i\}}}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{i \in K} (-1)^{|\sigma(i)|} \sum_I (-1)^{|\sigma(I)|} \frac{\partial (\omega_{1, I} \cdot \omega_{2, K \setminus I \setminus \{i\}})}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{K = I \cup J \cup \{i\}} (-1)^{|\sigma(I, K, i)|} \frac{\partial (\omega_{1, I} \cdot \omega_{2, J})}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

В последней сумме суммирование производится по всевозможным разбиениям множества K на три непересекающихся подмножества $\{i\}, I, J$, а $\sigma(I, J, i)$ — перестановка, которая переставляет индекс i на первое место, а далее идут множества I и J с сохранением порядка внутри множеств I и J. Таким образом,

$$\begin{aligned}(d(\omega_1 \wedge \omega_2))_K &= \sum_{K = I \cup J \cup \{i\}} (-1)^{|\sigma(i, I, K)|} \frac{\partial (\omega_{1, I} \cdot \omega_{2, J})}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{K = I \cup J \cup \{i\}} (-1)^{|\sigma(i, I, K)|} \frac{\partial \omega_{1, I}}{\partial x^i} \omega_{2, J} + \\ + \sum_{K = I \cup J \cup \{i\}} (-1)^{|\sigma(i, I, K)|} \omega_{1, I} \frac{\partial \omega_{2, J}}{\partial x^i} &= (d\omega_1 \wedge \omega_2)_K + (-1)^{\deg \omega_1} (\omega_1 \wedge d\omega_2)_K.\end{aligned}$$

Свойство б) достаточно доказать для базисных форм, по которым разлагается любая форма. Без ограничения общности, можно считать, что в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ форма ω имеет вид: $\omega = f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$. Заметим, что если свойство (б) выполнено для форм ω_1 и ω_2, то оно справедливо и для их внешнего произведения $\omega_1 \wedge \omega_2$. В самом деле,

$$\begin{aligned}dd(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2) = \\ &= dd\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg (d\omega_1)} d\omega_1 \wedge d\omega_2 + \\ &\quad + (-1)^{\deg \omega_1} d\omega_1 \wedge d\omega_2 + (-1)^{2 \deg \omega_1} \omega_1 \wedge dd\omega_2.\end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые равны нулю по предположению, а два средних одинаковы с противоположными знаками. Таким образом, свойство б) достаточно доказать для произвольной функции f и для формы dx^k. В последнем случае $dd(dx^k)=0$, поскольку x^k — тоже некоторая функция на многообразии. Итак, покажем, что $d(df)\equiv 0$. Имеем $(df)_i=\frac{\partial f}{\partial x^i}$, далее

$$(d(df))_{ij}=\frac{\partial (df)_j}{\partial x^i}-\frac{\partial (df)_i}{\partial x^j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\equiv 0. \qquad \square$$

Отметим, что условие б) теоремы 1 основывалось на замечательном свойстве функций многих переменных — независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования. Свойство б) в некотором смысле является максимальным обобщением этого свойства на случай систем функций, образующих компоненты кососимметрического тензора.

Пример 1. В локальной системе координат всякая внешняя дифференциальная форма согласно определению имеет вид суммы $\omega=\sum\limits_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1,\ldots,i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$. Поэтому, по теореме 1 градиент формы ω вычисляется по формуле

$$d\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}=d(\omega_{i_1,\ldots,i_p})\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}. \tag{7}$$

Далее, градиент гладкой функции df в локальной системе координат имеет компоненты $\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$. Следовательно, $df=\sum\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$. Поэтому $d\omega=\sum\limits_{i_1<\ldots<i_p}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge,\ldots,\wedge dx^{i_p}$. Последняя формула, очевидно, эквивалентна формуле (4).

Рассмотрим задачу отыскания такой дифференциальной формы ω, чтобы выполнялось тождество:

$$d\omega=\Omega, \tag{8}$$

где Ω — фиксированная дифференциальная форма. В каждой локальной системе координат уравнение (8) превращается в систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s+1}\frac{\partial\omega_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{k+1}}}{\partial x^{i_s}}=\Omega_{i_1,\ldots,i_{k+1}}.$$

По условию б) теоремы 1 решения уравнения (8) существуют только тогда, когда $d\Omega=0$. В самом деле, применив к левой и

правой части (8) операцию d, получаем: $d\Omega = d(d\omega) = 0$. В частном случае, когда $\deg \Omega = 1$, задача сводится к отысканию такой гладкой функции f на многообразии M, градиент которой равен заданной форме Ω. В локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ форма Ω имеет вид: $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i dx^i$, уравнение (8) эквивалентно системе

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \Omega_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Если решение системы (9) существует, то, продифференцировав (9) по переменным x^j, получаем: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x^j}$. Поскольку смешанные частные производные гладкой функции f не зависят от порядка дифференцирования, то

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x^i}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{10}$$

Условия (10) в бескоординатной записи эквивалентны условию $d\Omega = 0$. Покажем, что условия (10) достаточны для того, чтобы система (9) имела решение в достаточно малой окрестности любой точки P многообразия M. Для этого решим сначала одно из уравнений системы (9), скажем $\frac{\partial f}{\partial x^1} = \Omega_1$. Имеем:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \int_{x_0^1}^{x^1} \Omega_1(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^1 + \varphi_2(x^2, \ldots, x^n), \tag{11}$$

где $\varphi_2(x^2, \ldots, x^n)$ — произвольная гладкая функция от переменных $(x^2, \ldots, x^n)$. Подставим правую часть (11) во второе уравнение системы (9):

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \int_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^2}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}(x^2, \ldots, x^n) = \Omega_2(x^1, \ldots, x^n).$$

Учитывая (10), получаем:

$$\Omega_2(x^1, \ldots, x^n) = \int_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^1}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}(x^2, \ldots, x^n) =$$

$$= \Omega_2(x^1, \ldots, x^n) - \Omega_2(x_0^1, x^2, \ldots, x^n) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}(x^2, \ldots, x^n),$$

т. е.

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}(x^2, \ldots, x^n) = \Omega_2(x_0^1, x^2, \ldots, x^n). \tag{12}$$

Общее решение уравнения (12) имеет вид:

$$\varphi_2(x^2, \ldots, x^n) = \int\limits_{x_0^2}^{x^2} \Omega_2(x_0^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 + \varphi_3(x^3, \ldots, x^n). \qquad (13)$$

Подставляя (11) и (13) в третье уравнение системы (9), получаем

$$\Omega_3(x^1, \ldots, x^n) = \int\limits_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^3}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 + \\ + \int\limits_{x_0^2}^{x^2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^3}(x_0^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3, \ldots, x^n),$$

и снова, учитывая условие (10), получаем уравнение на функцию φ_3,

$$\Omega_3(x^1, \ldots, x^n) = \int\limits_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_3}{\partial x^1}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 + \\ + \int\limits_{x_0^2}^{x^2} \frac{\partial \Omega_3}{\partial x^2}(x_0^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3, \ldots, x^n) = \\ = \Omega_3(x^1, \ldots, x^n) - \Omega_3(x_0^1, x^2, \ldots, x^n) + \Omega_3(x_0^1, x^2, \ldots, x^n) - \\ - \Omega_3(x_0^1, x_0^2, x^3, \ldots, x^n) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3, \ldots, x^n);$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3, \ldots, x^n) = \Omega_3(x_0^1, x_0^2, x^3, \ldots, x^n).$$

Продолжим этот процесс; получим последовательность функций $\varphi_k(x^k, \ldots, x^n)$, определяемых рекуррентно формулами:

$$\varphi_k(x^k, \ldots, x^n) = \int\limits_{x_0^k}^{x^k} \Omega_k(x_0^1, \ldots, x_0^{k-1}, x^k, \ldots, x^n)\, dx^k + \\ + \varphi_{k+1}(x^{k+1}, \ldots, x^n),$$

$$\varphi_{n+1} \equiv \text{const},$$

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0^k}^{x^k} \Omega_k(x_0^1, \ldots, x_0^{k-1}, x^k \ldots, x^n)\, dx^k + \varphi_{n+1}.$$

Последняя формула дает нам произвольное решение системы (9), зависящее от одного числового параметра $\varphi_{n+1} = \text{const}$. Впрочем,

неединственность решения системы (9) следует из общих алгебраических свойств внешних дифференциальных форм. В самом деле, если f_1 и f_2 — два решения системы (9), то $df_1 = \Omega$, $df_2 = \Omega$, т. е. $d(f_1 - f_2) = \Omega - \Omega = 0$. Функция $h = f_1 - f_2$ обладает тем свойством, что ее градиент тождественно равен нулю на многообразии M. Следовательно, h — локально постоянная функция. Если M — связное многообразие, то тогда h — постоянная функция. Таким образом, *любые два решения системы* (9) *отличаются на константу, а множество всех решений системы* (9) *или пусто или является одномерным многообразием в пространстве всех гладких функций на многообразии* M.

Переходя к общему случаю решений системы (8), мы можем сделать следующие заключения:

а) *необходимым условием существования решения системы* (8) *является условие* $d\Omega = 0$;

б) *если* ω *— решение системы* (8), *то всякая форма вида* $\omega + d\omega'$ *тоже является решением системы* (8).

2. Когомологии гладкого многообразия (когомологии де Рама). Системы (8) имеют глубокое значение для изучения структуры данного многообразия. Свойства решений системы (8) удобно формулируются в терминах так называемой теории когомологий де Рама.

***Определение* 2.** Внешняя дифференциальная форма ω на гладком многообразии M называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Форма ω называется *точной*, если ее можно представить в виде $\omega = d\omega'$. Факторпространство пространства замкнутых форм степени k по подпространству точных форм называется *группой когомологий* (*де Рама*) *размерности* k многообразия M и обозначается через $H^k(M)$.

Всякая точная форма ω является замкнутой, поскольку $d\omega = d(d\omega') = dd(\omega) = 0$. Поэтому пространство всех точных форм является подпространством в пространстве замкнутых форм. Группа когомологий $H^k(M)$ является векторным пространством (вообще говоря бесконечной размерности). В терминах групп когомологий задача о решении уравнения (8) формулируется следующим образом. Пусть ω — замкнутая внешняя дифференциальная форма степени k. Обозначим через $[\omega]$ — элемент группы когомологий $H^k(M)$, равный классу смежности формы ω по подпространству точных форм. Тогда имеет место

***Теорема* 2.** *Рассмотрим уравнение*

$$d\omega = \Omega, \quad \deg \Omega = k + 1. \tag{14}$$

а) *Решение уравнения* (14) *существует тогда и только тогда, когда форма* Ω *замкнута, а класс когомологий* $[\Omega] \in H^{k+1}(M)$ *равен нулю.*

б) *Всякие два решения* ω *и* ω' *уравнения* (14) *отличаются на замкнутую форму, т. е.* $d(\omega - \omega') = 0$. *Множество всех решений уравнения является классом смежности формы* ω *по подпространству всех замкнутых форм степени* k.

в) *Пространство всех замкнутых форм степени* k *изоморфно прямой сумме пространства точных форм степени* k *и группы когомологий* $H^k(M)$.

Доказательство. Если ω — решение уравнения (14), то Ω — точная форма, значит, согласно определению, $[\Omega] = 0$. Обратно, если $[\Omega] = 0$, то Ω — точная форма, т. е. $\Omega = d\omega$ для некоторой формы ω, которая и является решением уравнения (14). Пусть ω и ω' — два решения уравнения (14), т. е. $d\omega = \Omega$, $d\omega' = \Omega$. Тогда $d(\omega - \omega') = d\omega - d\omega' = \Omega - \Omega = 0$, т. е. $\omega - \omega'$ — замкнутая форма. Следовательно, всякое решение ω' уравнения (14) можно получить путем прибавления к форме ω некоторой замкнутой формы. Обозначим через $\Omega_k(M)$ линейное пространство всех внешних дифференциальных форм степени k на многообразии M. Тогда градиент d является линейным отображением:

$$d\colon \Omega_k(M) \to \Omega_{k+1}(M) \tag{15}$$

из пространства форм степени k в пространство форм степени $k+1$. Пространство замкнутых форм степени k совпадает с ядром $\operatorname{Ker} d \subset \Omega_k(M)$ отображения (15). Аналогично, градиент d отображает пространство $\Omega_{k-1}(M)$ в $\Omega_k(M)$:

$$d\colon \Omega_{k-1}(M) \to \Omega_k(M). \tag{16}$$

Тогда пространство точных форм степени k совпадает с образом отображения (16): $\operatorname{Im} d = d(\Omega_{k-1}(M)) \subset \operatorname{Ker} d \subset \Omega_k(M)$. Следовательно, группа k-мерных когомологий $H^k(M)$ совпадает с факторпространством $\operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$. В обозначении последнего пространства мы одной и той же буквой d обозначили два различных отображения (15) и (16). Однако это не приведет к путанице, поскольку мы рассматриваем подпространства в одном пространстве $\Omega_k(M)$ форм степени k. В линейном пространстве $\operatorname{Ker} d$ рассмотрим алгебраическое дополнение H' к подпространству $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d$. Тогда пространство $\operatorname{Ker} d$ разлагается в прямую сумму своих подпространств $\operatorname{Ker} d = \operatorname{Im} d \oplus H'$.

Покажем, что пространство H' изоморфно группе когомологий $H^k(M)$. В самом деле, пусть $\varphi\colon H' \to H^k(M)$ — отображение, сопоставляющее замкнутой форме $\omega \in H'$ ее класс смежности

$[\omega] \in H^k(M)$. Если $\varphi(\omega) = 0$, то $[\omega] = 0$, т. е. ω — точная форма. Это значит, что $\omega \in \operatorname{Im} d$. Поскольку подпространства $\operatorname{Im} d$ и H' пересекаются только по нулевому элементу, то $\omega = 0$. Таким образом, отображение φ является мономорфизмом. Пусть $x \in H^k(M)$ — произвольный элемент. Тогда x является классом смежности некоторой формы $\omega \in \operatorname{Ker} d$ по подпространству $\operatorname{Im} d$, $x = [\omega]$. Поскольку пространство $\operatorname{Ker} d$ разложено в прямую сумму своих подпространств $\operatorname{Im} d$ и H', то и форма ω разлагается в сумму $\omega = d\Omega + \omega'$, $d\Omega \in \operatorname{Im} d$, $\omega' \in H'$. Тогда $x = [\omega] = [\omega'] = \varphi(\omega')$. Следовательно, φ является эпиморфизмом. Мы доказали, что φ является изоморфизмом. □

ПРИМЕР 2. Рассмотрим в качестве многообразия открытый интервал вещественных чисел $M = (a, b)$. Вычислим его группы когомологий. Поскольку многообразие M одномерно, то отличны от нуля только пространства форм степени 0 и 1. Сначала рассмотрим пространство $\Omega_0(M)$ форм степени 0. Всякая форма степени 0 — это гладкая функция на интервале (a, b). Ее градиент df имеет вид: $df = \frac{df}{dx}(x)\,dx$, где x — декартова координата на интервале (a, b). Поэтому пространство замкнутых форм степени 0, т. е. $\operatorname{Ker} d$, состоит из всех таких функций, для которых $\frac{df}{dx}(x) \equiv 0$, т. е. $\operatorname{Ker} d$ состоит из постоянных функций. Следовательно, пространство $\operatorname{Ker} d$ изоморфно одномерному пространству $\mathbb{R}^1$. Точных форм в пространстве $\Omega_0(M)$ нет. Поэтому $H^0(M) = \operatorname{Ker} d = \mathbb{R}^1$. Рассмотрим теперь пространство $\Omega_1(M)$ форм степени 1. Поскольку всякая форма степени 2 на одномерном пространстве равна нулю, то $\operatorname{Ker} d$ совпадает с пространством $\Omega_1(M)$. Вычислим теперь $\operatorname{Im} d$. Пусть $\omega \in \Omega_1(M)$ — произвольная дифференциальная форма степени 1. В локальной системе координат она имеет вид: $\omega = g(x)dx$. Поэтому если $df = \omega$, то $\frac{df}{dx}(x) \equiv g(x)dx$, т. е. $\frac{df}{dx} = g$. Следовательно, функцию f можно определить равенством

$$f(x) = \int_c^x g(x)\,dx, \quad x \in (a, b), \quad a < c < b. \tag{17}$$

Таким образом, всякая форма $\omega \in \Omega_1(M)$ представима в виде $\omega = df$ для подходящей функции f. Это значит, что $\operatorname{Im} d = \Omega_1(M) = \operatorname{Ker} d$. Тогда группа одномерных когомологий $H^1(M)$, определяемая как факторпространство $\operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$, равна нулю: $H^1(M) = 0$. Для всех других размерностей $k \geqslant 2$ группы когомологий $H^k(M)$ равны нулю, поскольку уже пространство форм степени k при $k \geqslant 2$ равны нулю на одномерном многообразии M. Ответ: $H^0(M) = \mathbb{R}^1$, $H^k(M) = 0$ при $k \geqslant 1$.

ПРИМЕР 3. Пусть $M = S^1$ — одномерная окружность. Так же как и в примере 1 вычисляется группа нульмерных когомологий $H^0(S^1) = \mathbb{R}^1$, и группы $H^k(S^1) = 0$ при $k \geqslant 2$. Остается вычислить одномерную группу когомологий $H^1(S^1)$. В силу одномерности S^1 ядро $\operatorname{Ker} d$ совпадает с $\Omega_1(S^1)$. Пусть φ — локальный угловой параметр окружности S^1. Решим уравнение $df = \omega$ для некоторой формы $\omega = g(\varphi)d\varphi$. Функция $f(\varphi)$ должна быть периодической по параметру φ с периодом 2π. Используя формулу (17), получаем, что $f(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} g(\varphi)\, d\varphi$ и $\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0$. Таким образом, не всякая форма $\omega \in \Omega^1(S^1)$ попадает в образ градиента $\operatorname{Im} d$, а только такая форма, для которой выполнено условие: $\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0$. Покажем, что пространство форм $\Omega^1(S^1)$ разлагается в прямую сумму своих подпространств $\Omega^1(S^1) = \operatorname{Im} d \oplus \mathbb{R}^1$, причем второе слагаемое состоит из форм с постоянным коэффициентом $g(\varphi) \equiv \text{const}$. В самом деле, пусть $\omega = g(\varphi)d\varphi$ — произвольная форма, $c = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi$. Тогда форма $\omega' = g'(\varphi)d\varphi = (g(\varphi) - c)d\varphi$ уже лежит в $\operatorname{Im} d$, поскольку $\int\limits_0^{2\pi} g'(\varphi)\, d\varphi = 0$. С другой стороны, любая форма $\omega = g(\varphi)d\varphi$ с постоянным коэффициентом $g(\varphi) \equiv c = \text{const}$ при $c \neq 0$ не лежит в $\operatorname{Im} d$, ибо $\int\limits_0^{2\pi} c\, d\varphi = 2\pi c \neq 0$. Тогда факторгруппа $H^1(S^1) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d = \Omega_1(S^1)/\operatorname{Im} d = \mathbb{R}^1$. Ответ: $H^0(S^1) = H^1(S^1) = \mathbb{R}^1$, $H^k(S^1) = 0$ при $k \geqslant 2$.

3. Гомотопические свойства групп когомологий. Группы когомологий гладких многообразий обладают рядом полезных свойств, использующихся при описании этих групп. Заметим прежде всего, что каждое гладкое отображение многообразий индуцирует отображение внешних дифференциальных форм, направленное в обратную сторону: $f\colon M_1 \to M_2$, $f^*\colon \Omega_k(M_2) \to \Omega_k(M_1)$.

***Определение* 3.** Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — гладкое отображение многообразий, $\omega \in \Omega_k(M_2)$ — внешняя дифференциальная форма степени k на многообразии M_2. *Обратным образом* $f^*(\omega)$ *формы* ω называется внешняя дифференциальная форма на многообразии M_1, задаваемая следующей формулой: $f^*(\omega)(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k) = \omega(df(\vec{\xi}_1), \ldots, df(\vec{\xi}_k))$, где $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k \in T_P(M_1)$ — касательные векторы в точке P многообразия M_1, а $df(\vec{\xi}_1), \ldots, df(\vec{\xi}_k) \in T_{f(P)}(M_2)$ — их образы при дифференциале отображения f.

Так определенное отображение $f^*\colon \Omega_k(M_2) \to \Omega_k(M_1)$ пространств дифференциальных форм является, очевидно, линейным отображением линейных пространств.

Теорема 3. *Обратный образ дифференциальных форм удовлетворяет следующим соотношениям:*

а) *если* $f\colon M_1 \to M_2$ *и* $g\colon M_2 \to M_3$, *то*

$$(gf)^* = f^* g^*, \tag{18}$$

б) *отображение* f^* *коммутирует с оператором* d, *т. е.*

$$f^* d = d f^*; \tag{19}$$

в) *отображение* f^* *ядро* $\operatorname{Ker} d$ *отображает в ядро* $\operatorname{Ker} d$, *а классы когомологий в классы когомологий:* $f\colon H^k(M_2) \to \to H^k(M_1)$;

д) *если в локальных координатах отображение* f *записывается системой функций* $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$, *а форма* ω *записывается в виде* $\omega = \sum \omega_{i_1, \ldots, i_k}(y^1, \ldots, y^m) dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}$, *то*

$$f^*(\omega) = \sum \omega_{i_1, \ldots, i_k}(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f^m(x^1, \ldots, x^n)) \times \\ \times df^{i_1}(x^1, \ldots, x^n) \wedge \ldots \wedge df^{i_k}(x^1, \ldots, x^n). \tag{20}$$

Последнее соотношение (20) является обобщением так называемого свойства инвариантности дифференциала функции, гласящего, что вид дифференциала функции $y = f(x)$ не зависит от того, является переменная x независимой или, в свою очередь, функцией от другой переменной: $dy = \frac{df}{dx}(x) dx$.

Доказательство теоремы 3 начнем с соотношения (20). Пусть $\vec{\xi}_1 = (\xi_1^i), \ldots, \vec{\xi}_k = (\xi_k^i)$ — касательные векторы в точке P многообразия M в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда, согласно определению,

$$f^*(\omega)(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k) = \omega(df(\vec{\xi}_1), \ldots, df(\vec{\xi}_k)). \tag{21}$$

Компоненты векторов $\vec{\eta}_i = df(\vec{\xi}_i)$ в локальной системе координат $(y^1, \ldots, y^m)$ многообразия M_2 имеют следующий вид:

$$\eta_i^j = \sum_k \frac{\partial f^j}{\partial x^k} \xi_i^k = df^j(\vec{\xi}_i).$$

Поэтому:

$$f^*(\omega)(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k) = \sum \omega_{j_1 \ldots j_k} \eta_1^{j_1} \eta_2^{j_2} \ldots \eta_k^{j_k} = \\ = \sum \omega_{j_1 \ldots j_k} df^{j_1}(\vec{\xi}_1) \ldots df^{j_k}(\vec{\xi}_k) = \\ = \left(\sum \omega_{j_1 \ldots j_k} df^{j_1} \wedge \ldots \wedge df^{j_k}\right)(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k).$$

Формула (20) доказана. Соотношение (18) непосредственно следует из (20) в любой локальной системе координат. Докажем соотношение (19). Согласно (20), если

$$\omega = \sum \omega_{i_1, \ldots, i_k}(y^1, \ldots, y^m) dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k},$$

то

$$f^*(\omega) = \sum \omega_{i_1, \ldots, i_k}(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots) df^{i_1} \wedge \ldots \wedge df^{i_k}.$$

Поэтому:

$$d\omega = \sum d\omega_{i_1, \ldots, i_k}(y^1, \ldots, y^m) \wedge dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k} =$$

$$= \sum \frac{\partial \omega_{i_1, \ldots, i_k}}{\partial y^j}(y^1, \ldots, y^m) dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}.$$

$$f^* d\omega = \sum \frac{\partial \omega_{i_1, \ldots, i_k}}{\partial y^j}(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots) df^j \wedge df^{i_1} \wedge \ldots \wedge df^{i_k} =$$

$$= \sum d(\omega_{i_1, \ldots, i_k}(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots)) \wedge df^{i_1} \wedge \ldots \wedge df^{i_k}. \quad (22)$$

С другой стороны,

$$df^*(\omega) = \sum d(\omega_{i_1, \ldots, i_k}(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots)) \wedge df^{i_1} \wedge \ldots \wedge df^{i_k}, \quad (23)$$

т. е. правые части (22) и (23) совпадают. Наконец, свойство в) следует из б). В самом деле, если $\omega \in \operatorname{Ker} d \subset \Omega_k(M_2)$, то $d\omega = 0$. Тогда $df^*(\omega) = f^* d(\omega) = 0$, т. е. $f^*(\omega) \in \operatorname{Ker} d \subset \Omega_k(M_1)$. Класс когомологий $[\omega] \in H^k(M_2)$ — это класс смежности формы ω по подпространству $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d \subset \Omega_k(M_2)$. Образ этого класса смежности при отображении f^* состоит из форм вида $f^*(\omega + d\omega')$, $\omega \in \Omega_{k-1}(M_2)$. В силу (19) все такие формы имеют вид: $f^*(\omega + d\omega') = f^*(\omega) + df^*(\omega')$, т. е. лежат в классе смежности формы $f^*(\omega)$ по подпространству $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d \subset \Omega_k(M_1)$. Поэтому корректно определяется гомоморфизм f^*: $H^k(M_2) \to H^k(M_1)$ групп когомологий многообразий M_1 и M_2. По свойству а) для отображений групп когомологий тоже выполнено соотношение $(gf)^* = f^* g^*$. □

Теорема 3 полезна во многих отношениях. Так, например, если два многообразия M_1 и M_2 диффеоморфны, то их группы когомологий изоморфны. В самом деле, если f: $M_1 \to M_2$ — тождественный диффеоморфизм, то гомоморфизм f^*: $H^k(M_2) \to H^k(M_1)$ тоже является тождественным изоморфизмом. Поэтому если φ: $M_1 \to M_2$ — произвольный диффеоморфизм, то, взяв обратный диффеоморфизм ψ: $M_2 \to M_1$, получаем две возможные композиции $\psi\varphi$: $M_1 \to M_1$, $\varphi\psi$: $M_2 \to M_2$, причем обе являются тождественными диффеоморфизмами: $\psi\varphi = 1_{M_1}$, $\varphi\psi = 1_{M_2}$. Тогда, применяя теорему 3, получаем

$\varphi^*\psi^* = 1_{H^k(M_1)}$, $\psi^*\varphi^* = 1_{H^k(M_2)}$, т. е. гомоморфизмы φ^* и ψ^* взаимно обратны. Следовательно, φ^* (а также и ψ^*) является изоморфизмом групп когомологий.

В действительности, гомоморфизмы когомологий f^*: $H^k(M_2) \to H^k(M_1)$, индуцированные гладкими отображениями f: $M_1 \to M_2$ многообразий, обладают более сильными свойствами.

***Определение* 4.** Пусть X, Y — произвольные топологические пространства, I — единичный отрезок вещественных чисел. Непрерывное отображение f: $X \times I \to Y$ называется *гомотопией между отображениями* $f_0 = f|_{X \times \{0\}}$ *и* $f_1 = f|_{X \times \{1\}}$. Если X, Y — гладкие многообразия, а f — гладкое отображение, то f называется *гладкой гомотопией.* При этом отображения f_0 и f_1 называются *гомотопными отображениями.*

Замечание. Если X — гладкое многообразие, то декартово произведение $X \times I$ не является многообразием (точные определения будут даны в следующем параграфе). Однако для декартового произведения имеет смысл понятие гладкого отображения. В самом деле, если $U_\alpha \subset X$ — некоторая карта, $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ — локальная система координат, то отображение f на множестве $U_\alpha \times I$ представляется в виде функции от $(n+1)$ переменных $f = f(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, t)$, $t \in I = [0; 1]$. Скажем, что функция $f(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, t)$ является *гладкой функцией*, если в окрестности каждой точки $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, t)$, $0 < t < 1$, функция f гладкая класса C^∞, а все ее частные производные непрерывно продолжаются на граничные точки вида $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, 0)$ или $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, 1)$. Такое определение не зависит от выбора локальной системы координат, а ограничения $f|_{X \times \{0\}}$, $f|_{X \times \{1\}}$ являются гладкими отображениями многообразия X в Y.

***Теорема* 4.** *Гомотопные гладкие отображения* f_0, f_1: $M_1 \to M_2$ *индуцируют одинаковый гомоморфизм групп когомологий* $f_0^* = f_1^*$: $H^k(M_2) \to H^k(M_1)$.

Доказательство. Построим такое линейное отображение пространств внешних дифференциальных форм D: $\Omega_k(M_2) \to \Omega_{k-1}(M_1)$, чтобы выполнялось тождество

$$(f_0^* - f_1^*)(\omega) = (dD \pm Dd)(\omega) \tag{24}$$

для любой формы $\omega \in \Omega_k(M_2)$. В самом деле, если ω — замкнутая форма, представляющая класс когомологий $[\omega] \in H^k(M_2)$, то формы $f_0^*(\omega)$ и $f_1^*(\omega)$ тоже замкнуты и представляют классы когомологий $f_0^*([\omega])$ и $f_1^*([\omega])$. В силу же (24) разность форм $f_0^*(\omega) - f_1^*(\omega)$ равна $(dD \pm Dd)\omega = d(D\omega) \pm D(d\omega) = d(D\omega)$, поскольку $d\omega = 0$.

Поэтому формы $f_0^*(\omega)$ и $f_1^*(\omega)$ лежат в одном классе смежности по подпространству точных форм, т. е. они представляют один класс когомологий $[f_0^*(\omega)]=[f_1^*(\omega)]$. Таким образом, $f_0^*([\omega])=f_1^*([\omega])$, что и требуется доказать.

Итак, осталось построить отображение D, удовлетворяющее тождеству (24). Поскольку отображения f_0 и f_1 гомотопны, то существует такое гладкое отображение $F\colon M_1\times I\to M_2$, что $F(P,0)=f_0(P)$, $F(P,1)=f_1(P)$. Пусть $\omega\in\Omega_k(M_2)$ — произвольная форма степени k, $\Omega=F^*(\omega)$. Форма Ω определена по крайней мере на многообразии $M_1\times(0;1)$, причем в любой локальной системе координат все коэффициенты формы Ω продолжаются по непрерывности на $M_1\times[0;1]$. Скажем, что форма Ω степени k на многообразии $M_1\times I$ *не зависит от* dt, если форма равна нулю на любой системе векторов вида $(\vec{\xi}_1,\ldots,\vec{\xi}_{k-1},\frac{\vec{\partial}}{\partial t})$. В локальной системе координат $(x^1,\ldots,x^n,t)$ условие независимости формы Ω от dt означает, что она разлагается в сумму $\Omega=\sum\Omega_{i_1,\ldots,i_k}(x^1,\ldots,x^n,t)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$, т. е. в разложении отсутствуют слагаемые с сомножителем dt. Тогда форму Ω можно интерпретировать как семейство внешних дифференциальных форм $\Omega_{M_1}(t)$ степени k на многообразии M_1, непрерывно зависящее от параметра t. Если $\varphi_t\colon M_1\to M_1\times I$ — вложение $\varphi_t(P)=(P,t)$, то $\Omega_{M_1}(t)=\varphi_t^*(\Omega)$.

Лемма 1. *Всякая внешняя дифференциальная форма Ω степени k на многообразии $M_1\times I$ однозначно представляется в виде*

$$\Omega=\Omega_1+\Omega_2\wedge dt, \tag{25}$$

причем формы Ω_1, Ω_2 не зависят от dt.

Доказательство леммы 1 достаточно провести в каждой карте U_α многообразия M_1. В самом деле, понятие независимости формы от dt не зависит от выбора карты и выполняется независимо в каждой точке. Поэтому, если разложение (25) произведено в каждой карте, то они совпадают на пересечениях карт. Поскольку условие независимости от dt инвариантно относительно линейных операций над формами, то лемму достаточно проверить только для форм специальных видов: $\Omega=f(x^1,\ldots,x^n,t)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ или $\Omega=f(x^1,\ldots,x^n,t)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}\wedge dt$, для которых утверждение леммы очевидно.

Определим теперь отображение D. Положим

$$D(\omega)=\int_0^1\Omega_{2,M_1}(t)\,dt, \tag{26}$$

где $\Omega = F^*(\omega)$, $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \wedge dt$ — разложение по формуле (25). Если форма Ω на $M_1 \times I$ не зависит от dt, то ее градиент $d\Omega$ тоже разлагается по формуле (25) в сумму $d\Omega = d_x\Omega_{M_1} + \frac{\partial}{\partial t}\Omega_{M_1} \wedge dt$. Здесь d_x обозначает градиент формы Ω_{M_1} на многообразии M_1, Докажем теперь формулу (24). Левая часть (24) может быть получена следующим образом. Сначала вычисляется форма $\Omega = F^*(\omega)$, а потом берется ее ограничение на подмногообразия $M_1 \times \{0\}$ и $M_1 \times \{1\}$, при вложении φ_0: $M_1 \to M_1 \times I$ и φ_1: $M_1 \to M_1 \times I$. В локальной системе координат вложения φ_0 и φ_1 задаются следующими функциями:

$$\varphi_0\colon \begin{cases} x^1 = x^1, \\ \cdots\cdots \\ x^n = x^n, \\ t \equiv 0, \end{cases} \qquad \varphi_1\colon \begin{cases} x^1 = x^1, \\ \cdots\cdots \\ x^n = x^n, \\ t \equiv 1. \end{cases}$$

Другими словами, в форме Ω нужно подставить $t = 0$ или 1 и $dt = 0$. Это в точности означает, что

$$f_0^*(\omega) = \Omega_{1, M_1}(0), \quad f_1^*(\omega) = \Omega_{1, M_1}(1). \tag{27}$$

Для вычисления правой части (24), вычислим последовательно $Dd(\omega)$ и $Dd\omega$. Имеем:

$$F^*(d\omega) = dF^*(\omega) = d(\Omega_1 + \Omega_2 \wedge dt) = \\ = d_x\Omega_{1, M_1}(t) + \frac{\partial}{\partial t}\Omega_{1, M_1}(t) \wedge dt + d_x\Omega_{2, M_1} \wedge dt.$$

Поэтому

$$Dd(\omega) = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\Omega_{1, M_1}(t) + d_x\Omega_{2, M_1}(t)\right) dt = \\ = \Omega_{1, M_1}(1) - \Omega_{1, M_1}(0) + d_x \int_0^1 \Omega_{2, M_1}(t)\, dt. \tag{28}$$

С другой стороны,

$$dD(\omega) = d_x \int_0^1 \Omega_{2, M_1}(t)\, dt. \tag{29}$$

Сравнивая (27) и (28), (29), получаем $f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = (Dd - dD)(\omega)$, что и требовалось доказать. □

Следствие. *Если $M = \mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, то $H^0(M) = \mathbb{R}^1$, $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$, $k \geqslant 1$.*

Доказательство. Если $n = 0$, т. е. M состоит из одной точки, то утверждение следствия очевидно, поскольку одноточечное многообразие не имеет нетривиальных форм степени больше

нуля. Формы же степени 0 — это функции на M, т. е. попросту вещественные числа. Поэтому $\Omega_0(M) = \mathbb{R}^1$, ядро градиента совпадает с $\Omega_0(M)$, а образ градиента равен нулю. Следовательно, $H_0(M) = \operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} d = \Omega_0(M)/0 = \Omega_0(M) = \mathbb{R}^1$. Пусть теперь $n > 0$, $M_0 = \mathbb{R}^0$ — одноточечное многообразие. Рассмотрим два отображения: φ: $M_0 \to M$, $\varphi(M_0) = 0 \in M$, ψ: $M \to M_0$, $\psi(M) = 0 = M_0$. Таким образом, отображение φ отправляет единственную точку многообразия M_0 в нулевой вектор, а отображение ψ отображает все евклидово пространство $M = \mathbb{R}^n$ в единственную точку M_0. Рассмотрим две возможные композиции $\psi\varphi$: $M_0 \to M_0$, $\varphi\psi$: $M \to M$. Композиция $\psi\varphi$ является, очевидно, тождественным отображением одноточечного многообразия M_0. Композиция $\varphi\psi$ отображает все евклидово пространство M в нулевой вектор. Покажем, что отображение $\varphi\psi$ гомотопно тождественному отображению евклидового пространства. Для этого построим гомотопию в явном виде: F: $M \times I$, $F(\vec{x}, t) = t\vec{x}$, $\vec{x} \in M = \mathbb{R}^n$, $t \in [0; 1] = I$. При $t = 1$ мы получаем тождественное отображение $f_1(\vec{x}) = \vec{x} = F(\vec{x}, 1)$. При $t = 0$ мы получаем композицию $\varphi\psi(\vec{x}) = \vec{0} = F(\vec{x}, 0)$. Согласно теореме 4 отображение $\varphi\psi$ и тождественное отображение индуцируют один и тот же гомоморфизм групп когомологий. Таким образом, гомоморфизмы $(\psi\varphi)^*$: $H^k(M_0) \to H^k(M_0)$, $(\varphi\psi)^*$: $H^k(M) \to H^k(M)$, являются тождественными изоморфизмами групп. Поскольку $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$, $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$, то гомоморфизмы φ^* и ψ^* взаимно обратные изоморфизмы групп. Следовательно, у евклидового пространства группы когомологий $H^k(\mathbb{R}^n)$ такие же, как и у одноточечного пространства, т. е. $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^1$, $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$, $k \geqslant 1$. □

Приведенное выше следствие имеет следующую формулировку, известную под названием леммы Пуанкаре:

***Теорема* 5** (лемма Пуанкаре). *Любая замкнутая форма Ω на многообразии M в достаточно малой окрестности каждой точки $P \in M$ является точной, т. е. $\Omega = d\omega$.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность U точки $P \in M$, гомеоморфную евклидовому пространству $\mathbb{R}^n$. Тогда $H^k(U) = 0$ при $k \geqslant 1$. Следовательно, если Ω — замкнутая форма на многообразии M, то класс когомологий $[\Omega]$ равен нулю, что означает, что форма Ω точна в окрестности U. □

§ 2. Интегрирование внешних форм

Интегрирование внешних дифференциальных форм — это аналог операции, обратной к дифференцированию функций. Рассмотрим

следующий пример. Пусть в ограниченной области V евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ задана внешняя дифференциальная форма ω степени n. Тогда в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ форма ω имеет вид:

$$\omega = f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{1}$$

Если $(y^1, \ldots, y^n)$ — другая система координат, то в этой новой системе форма ω примет согласно тензорному закону преобразования компонент тензора следующий вид:

$$\omega = f(x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)) \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n. \tag{2}$$

Теперь вспомним, что в интегральном исчислении функций многих переменных встречалась похожая формула для преобразования подынтегральной функции при замене координат. Именно, интеграл функции f по объему V в различных системах координат связан следующим соотношением:

$$\int\limits_V f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n = \int\limits_V f(x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots) \left|\det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\right| dy^1 \ldots dy^n. \tag{3}$$

Формула (3) показывает, что по сути дела интегрируется по объему V не функция, а некоторый геометрический объект, компонента которого меняется при переходе от координат $(x^1, \ldots, x^n)$ к координатам $(y^1, \ldots, y^n)$ путем умножения на модуль якобиана замены координат. Это наблюдение можно применить к определению интеграла от внешней дифференциальной формы.

1. Интеграл дифференциальной формы по многообразию. Вернемся теперь к формуле (3), и обобщим ее на случай произвольного гладкого многообразия с краем. Рассмотрим произвольное гладкое многообразие с краем M. Скажем, что множество $X \subset M$ имеет *меру нуль*, $\mu(X) = 0$, если для любой карты U_α и координатного гомеоморфизма φ: $U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n_+$ множество $\varphi(X \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n_+$ имеет меру нуль в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Определение множества меры нуль корректно и не зависит от выбора атласа карт. Для этого достаточно показать, что если f: $V_1 \to V_2$ гладкий гомеоморфизм области $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ на область $V_2 \subset \mathbb{R}^n$, то образ $f(X)$ любого множества $X \subset V_1$ меры нуль является множеством меры нуль. В самом деле, если $X \subset V_1$ — множество меры нуль,

$\mu(X)=0$, то множество X представимо в виде объединения не более чем счетного числа компактных подмножеств: $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, $\mu(X_i)=0$. Тогда $\mu(f(X))\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(f(X_i))$. Следовательно, достаточно доказать, что $\mu(f(X_i))=0$. Отображение f в локальной системе координат $(x^1,\ldots,x^n)$ представляется набором гладких функций $y^i=f^i(x^1,\ldots,x^n)$. Поэтому

$$\mu(f(X_i))\leqslant\int\limits_{X_i}\left|\det\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^j}\right)\right|dx^1\ldots dx^n\leqslant C\int\limits_{X_i}dx^1\ldots dx^n=C\mu(X_i),$$

где C — такая константа, для которой выполнена оценка

$$\left|\det\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^j}\right)\right|\leqslant C$$

на компакте X. Множества меры нуль на многообразии удовлетворяют стандартным свойствам, справедливым для множеств евклидового пространства:

а) $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}X_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(X_i)=0$,

б) образ $f(Y)$ гладкого $(n-1)$-мерного многообразия Y при гладком отображении $f\colon Y\to M$ имеет меру нуль.

Определим теперь интеграл от внешней дифференциальной формы ω степени n на n-мерном ориентированном многообразии M в случае, когда форма ω имеет компактный носитель. Пусть $U\subset M$ — произвольная открытая область. Если область U целиком лежит в некоторой карте U_α с координатами $(x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n)$, то форма ω в карте U_α имеет вид $\omega=f_\alpha(x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n)dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n$. Тогда положим

$$\int\limits_U\omega=\int\limits_U\cdots\int f_\alpha(x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n)dx_\alpha^1\ldots dx_\alpha^n. \tag{4}$$

Правая часть формулы (4) не зависит от выбора локальной системы координат $(x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n)$. В самом деле, если $U\subset U_\alpha\cap U_\beta$, то по формуле (2):

$$\omega=f_\alpha(x_\alpha^1(x_\beta^1,\ldots,x_\beta^n),\ldots,x_\alpha^n(x_\beta^1,\ldots,x_\beta^n))\times$$
$$\times\det\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right)dx_\beta^1\wedge\ldots\wedge dx_\beta^n=f_\beta(x_\beta^1,\ldots,x_\beta^n)dx_\beta^1\wedge\ldots\wedge dx_\beta^n.$$

Тогда, в силу (3), и учитывая, что для ориентируемого многообразия $\det\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right) > 0$, получаем:

$$\int\limits_U \cdots \int f_\alpha(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \ldots dx_\alpha^n = \int\limits_U \cdots \int f_\beta(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n) dx_\beta^1 \ldots dx_\beta^n.$$

***Определение* 1.** Пусть M — n-мерное гладкое ориентированное многообразие с краем, ω — внешняя дифференциальная форма степени n с компактным носителем. Пусть $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}\}$ — конечный набор карт, покрывающий носитель формы ω. Положим

$$\int\limits_M \omega = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{U_{\alpha_i} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} U_{\alpha_j}} \omega. \tag{5}$$

Определение 1 не зависит от выбора карт $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}$. Для того чтобы показать независимость определения 1 от выбора карт, дадим другое определение интеграла формы ω.

***Определение* 1′.** Пусть M — n-мерное гладкое ориентированное многообразие с краем, ω — внешняя дифференциальная форма степени n с компактным носителем, $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное атласу карт $\{U_\alpha\}$. Тогда

$$\int\limits_M \omega = \sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} \varphi_\alpha \omega. \tag{6}$$

Определение 1′ более удобно с точки зрения математической строгости, поскольку использует интегрирование только по открытым областям в евклидовом пространстве, в то время как в формуле (5) приходится интегрировать по множествам более сложного вида. С другой стороны, в определении 1′ необходимо доказать, что правая часть формулы (6) не зависит от выбора разбиения единицы.

Без ограничения общности можно считать, что атлас карт U_α конечен, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$. Пусть $\{\varphi'_\alpha\}$ — другое разбиение единицы. Тогда, полагая $\psi_\alpha = \varphi_\alpha - \varphi'_\alpha$, получаем: $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \equiv 0$. Требуется же доказать, что

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = 0. \tag{7}$$

Имеем $\psi_N = -\sum\limits_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha$; поскольку $\operatorname{supp} \psi_N \subset U_N$, то найдется другая функция χ, равная тождественно единице на $\operatorname{supp} \psi_N$, и

$\operatorname{supp}\chi \subset U_N$. Тогда $\chi(P)\psi_N(P) \equiv \psi_N(P)$. Поэтому $\psi_N = -\sum\limits_{\alpha=1}^{N-1} \chi\psi_\alpha$; $\operatorname{supp}\chi\psi_\alpha \subset U_N \cap U_\alpha$. Тогда

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = \int\limits_{U_N} \psi_N \omega + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_N} \chi\psi_\alpha \omega + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\chi\psi_\alpha\omega \subset U_N \cap U_\alpha$, то $\int\limits_{U_N} \chi\psi_\alpha\omega = \int\limits_{U_\alpha} \chi\psi_\alpha\omega$. Следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} (\psi_\alpha - \chi\psi_\alpha)\omega. \tag{8}$$

В правой части (8) стоит такое же выражение, как и в (7), состоящее из $(N-1)$ слагаемого, у которых вместо функций ψ_α стоят функции $(\psi_\alpha - \chi\psi_\alpha)$, причем

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} (\psi_\alpha - \chi\psi_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha - \chi \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha + \chi\psi_N = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha + \psi_N = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha = 0.$$

Поэтому формула (7) доказана по индукции по числу слагаемых N. Пусть теперь дано два атласа карт $\{U_\alpha\}$ и $\{U_\beta\}$ и подчиненные им разбиения единицы $\{\varphi_\alpha\}$ и $\{\varphi'_\beta\}$. Тогда каждое разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$ и $\{\varphi'_\beta\}$ можно дополнить нулевыми функциями до разбиения единицы нового атласа карт, равного объединению $\{U_\alpha\} \cup \{U_\beta\}$. Нулевые функции не изменят правой части (6), а по формуле (7) следует, что правые части (6) совпадают для разбиения единицы $\{\varphi_\alpha\}$ и $\{\varphi'_\beta\}$.

***Предложение* 1.** а) *Определения интеграла по формулам* (5) *и* (6) *совпадают.*

б) $\int\limits_M (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 \int\limits_M \omega_1 + \lambda_2 \int\limits_M \omega_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1$.

в) *Если* M' *— противоположная к* M *ориентация, то* $\int\limits_{M'} \omega = -\int\limits_M \omega$.

Доказательство. Свойство б) очевидно как для формулы (5), так и для формулы (6). Поэтому совпадение формул (5) и (6) достаточно доказать для таких форм, носитель которых достаточно мал. Если $\operatorname{supp}\omega \subset U_{\alpha_{i_0}}$, то по формуле (4) $\int\limits_U \omega = \int\limits_{U \cap U_{\alpha_{i_0}}} \omega$. Поэтому

в формуле (5) имеем:

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{U_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_{\alpha_j}} \omega = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{U_{\alpha_{i_0}} \cap (U_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_{\alpha_j})} \omega.$$

Поскольку все множества $U_{\alpha_{i_0}} \cap (U_{\alpha_i} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} U_{\alpha_j})$ лежат в одной карте и попарно не пересекаются, то сумма интегралов равна интегралу по объединению

$$\bigcup_{i=1}^{N} (U_{\alpha_{i_0}} \cap (U_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_{\alpha_j})) = U_{\alpha_{i_0}} \cap (\bigcup_{i=1}^{N} U_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_{\alpha_j}) =$$

$$= U_{\alpha_{i_0}} \cap M = U_{\alpha_{i_0}}.$$

Следовательно, в формуле (5) правая часть равна $\int\limits_{U_{\alpha_{i_0}}} \omega$. С другой стороны, поскольку $\operatorname{supp} \omega \subset U_{\alpha_{i_0}}$, то разбиение единицы можно подобрать так, чтобы $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \cap \operatorname{supp} \omega = \varnothing$ при $\alpha \neq \alpha_{i_0}$. Тогда $\varphi_{\alpha_{i_0}} \equiv 1$ на $\operatorname{supp} \omega$ и формула (6) приобретает вид: $\int\limits_M \omega = \int\limits_{U_{\alpha_{i_0}}} \varphi_{\alpha_{i_0}} \omega = \int\limits_{U_{\alpha_{i_0}}} \omega$. Таким образом, утверждение а) доказано.

Докажем утверждение в). Противоположную ориентацию на многообразии M можно задать не меняя атласа карт, а изменив только систему координат в каждом атласе U_α: $(y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^n) = (-x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n)$. Тогда по формуле (4) для новой ориентации имеем

$$\int\limits_{U'} \omega = \int\limits_{U'} \cdots \int f'_\alpha(y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^n) dy_\alpha^1 \ldots dy_\alpha^n =$$

$$= \int\limits_{U'} \cdots \int f'_\alpha(y_\alpha^1(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n), \ldots) \left| \det \left(\frac{\partial y_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j} \right) \right| dx_\alpha^1 \ldots dx_\alpha^n.$$

Поскольку $f_\alpha(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n) = f'_\alpha(y_\alpha^1(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n), \ldots) \det \left(\frac{\partial y_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j} \right)$, то

$$\int\limits_{U'} \omega = \int f_\alpha(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n) \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial y_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j} \right) dx_\alpha^1 \ldots dx_\alpha^n =$$

$$= - \int f_\alpha(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \ldots dx_\alpha^n = - \int\limits_U \omega.$$

Следовательно, и в формуле (5) во всех слагаемых изменится знак при изменении ориентации многообразия M. □

2. Формула Стокса. Теперь мы докажем основную формулу, обобщающую многочисленные формулы интегрирования из математического анализа.

Теорема 1. *Пусть M — n-мерное ориентированное многообразие с краем ∂M, ω — внешняя дифференциальная форма степени $(n-1)$ с компактным носителем. Тогда*

$$(-1)^n \int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega. \tag{9}$$

Формула (9) носит название *общей формулы Стокса.* Прежде чем доказывать теорему 1, рассмотрим некоторые частные случаи этой формулы.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в плоскости $\mathbb{R}^2$ гладкую замкнутую кривую Γ без самопересечений, ограничивающую открытую область V в $\mathbb{R}^2$. Будем считать, что на кривой Γ введен параметр t, задающий направление обхода и, следовательно, ориентацию Γ как одномерного многообразия. Тогда замыкание $\overline{V}$ является ориентированным двумерным многообразием с краем $\partial V = \Gamma$. Если ориентация области $\overline{V}$ задается линейной системой координат (x^1, x^2), то ориентация на границе Γ окажется согласованной с ориентацией в области $\overline{V}$, если при обходе кривой Γ при увеличении параметра t область $\overline{V}$ остается слева (см. рис. 1). Пусть ω — произвольная форма степени 1 на плоскости $\mathbb{R}^2$. Форма ω в координатах (x^1, x^2) имеет вид $\omega = P(x^1, x^2)dx^1 + Q(x^1, x^2)dx^2$. Тогда интеграл от формы ω по кривой Γ совпадает с интегралом второго рода:

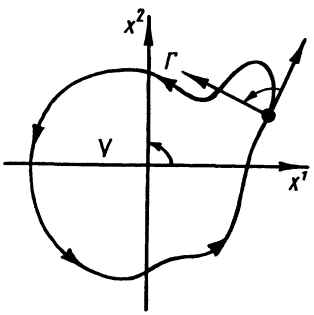


Рис. 1

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_\Gamma P dx^1 + Q dx^2 = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(P(x^1(t), x^2(t)) \frac{dx^1}{dt} + Q(x^1(t), x^2(t)) \frac{dx^2}{dt} \right) dt.$$

По формуле (9) имеем:

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_V d\omega = \int\limits_V (dP \wedge dx^1 + dQ \wedge dx^2) =$$

$$= \int\limits_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \iint\limits_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2.$$

Таким образом, мы получили известную *формулу Грина* на плоскости:

$$\int_{\Gamma}(Pdx^1+Qdx^2)=\iint_{V}\left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}-\frac{\partial P}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2.$$

ПРИМЕР 2. Аналогично, пусть Γ — гладкая замкнутая кривая без самопересечений в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, ограничивающая некоторую двумерную поверхность V. Тогда по формуле (9) получаем известную *формулу Стокса*. Для этого рассмотрим форму ω степени 1 в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

$$\omega=P(x^1,x^2,x^3)dx^1+Q(x^1,x^2,x^3)dx^2+R(x^1,x^2,x^3)dx^3.$$

Тогда интеграл второго рода по кривой Γ интерпретируется как интеграл от формы ω:

$$\int_{\Gamma}\omega=\int_{t_0}^{t_1}\left(P(x^1,x^2,x^3)\frac{dx^1}{dt}+Q(x^1,x^2,x^3)\frac{dx^2}{dt}+R(x^1,x^2,x^3)\frac{dx^3}{dt}\right)dt.$$

На основании формулы (9) имеем: $\int\limits_{\Gamma}\omega=\int\limits_{V}d\omega$;

$$d\omega=dP\wedge dx^1+dQ\wedge dx^2+dR\wedge dx^3=$$

$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}-\frac{\partial P}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2+\left(\frac{\partial R}{\partial x^2}-\frac{\partial Q}{\partial x^3}\right)dx^2\wedge dx^3+\left(\frac{\partial P}{\partial x^3}-\frac{\partial R}{\partial x^1}\right)dx^3\wedge dx^1.$$

Таким образом, интеграл по кривой Γ выражается через интеграл второго рода по поверхности V:

$$\int_{\Gamma}(Pdx^1+Qdx^2+Rdx^3)=$$

$$=\iint_{V}\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}-\frac{\partial P}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2+\left(\frac{\partial R}{\partial x^2}-\frac{\partial Q}{\partial x^3}\right)dx^2dx^3+\left(\frac{\partial P}{\partial x^3}-\frac{\partial R}{\partial x^1}\right)dx^3dx^1\right).$$

ПРИМЕР 3. Последняя формула, *формула Гаусса — Остроградского*, тоже является частным случаем формулы (9). Пусть Γ — замкнутая поверхность в $\mathbb{R}^3$, ограничивающая область V. Пусть ω — внешняя дифференциальная форма степени 2. Форма ω в координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид:

$$\omega=Pdx^1\wedge dx^2+Qdx^2\wedge dx^3+Rdx^3\wedge dx^1.$$

Тогда интеграл второго рода по поверхности Г интерпретируется как интеграл формы ω. Применяя формулу (9), получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = -\int\limits_{V} d\omega;$$

$$d\omega = dP \wedge dx^1 \wedge dx^2 + dQ \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dR \wedge dx^3 \wedge dx^1 =$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} + \frac{\partial Q}{\partial x^1} + \frac{\partial R}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Gamma} (P dx^1 dx^2 + Q dx^2 dx^3 + R dx^3 dx^1) =$$
$$= -\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} + \frac{\partial Q}{\partial x^1} + \frac{\partial R}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2 dx^3.$$

Мы пришли к формуле Гаусса — Остроградского с обратным знаком. Знак минус связан с тем, что в классической формуле Гаусса — Остроградского ориентация поверхности Г, задаваемая парой векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в касательном пространстве к поверхности Г, выбирается так, чтобы третий вектор $\vec{e}_3$ указывал направление вне области V.

ПРИМЕР 4. Наконец, частным случаем формулы (9) можно считать и *формулу Ньютона — Лейбница*: $\int\limits_a^b \frac{df}{dx}(x)dx = f(b) - f(a)$. Левую часть формулы Ньютона — Лейбница интерпретируем как интеграл формы $df = \frac{df}{dx}dx$ по отрезку $[a, b]$ вещественных чисел, который является одномерным ориентированным многообразием с краем. Краем отрезка $[a, b]$ является совокупность двух точек $\{a, b\}$, которые мы будем считать нульмерным многообразием. Однако для нульмерных многообразий мы не определяли понятие ориентации, поскольку у них отсутствуют касательные векторы. Поэтому можно поступить следующим образом. Будем считать, что точка края одномерного многообразия M имеет положительную ориентацию, если вектор, указывающий направление внутрь M, дает исходную ориентацию многообразия M, и, наоборот, имеет отрицательную, если вектор, указывающий направление внутрь M, дает противоположную ориентацию многообразия M. Нульмерная форма на многообразии является просто функцией. Поэтому интеграл функции по нульмерному многообразию будем считать суммой значений функции в точках, взятых со знаком, равным ориентации

точек на многообразии. В нашем случае, правая часть формулы Ньютона — Лейбница будет истолкована как интеграл функции f по краю, состоящему из двух точек $\{a, b\}$. При этом точка a имеет положительную ориентацию, а точка b — отрицательную. Поэтому $\int\limits_{\partial[a,\,b]} f = f(a) - f(b)$. Формула же (9) имеет вид: $\int\limits_{[a,\,b]} df = (-1)^n \int\limits_{\partial[a,\,b]} f$.

Доказательство теоремы 1. Левая и правая часть формулы (9) линейна относительно формы ω. Поэтому, разлагая форму ω в сумму $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_N$, достаточно доказывать формулу (9) для случая, когда носитель формы ω компактен и лежит в одной карте. Более того, достаточно доказать формулу (9) для случая формы ω вида:

$$\omega = f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где f — функция с компактным носителем, определенная в $\mathbb{R}^n_+$. Тогда $d\omega = (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Рассмотрим два случая. Пусть $k < n$. Тогда ограничение формы ω на край $\mathbb{R}^{n-1}_0 \subset \mathbb{R}^n_+$ равно нулю, поскольку $dx^n = 0$. Поэтому $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_0} \omega = 0$. С другой стороны, $\int\limits_{\mathbb{R}_+} d\omega = \int \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1 \ldots dx^n$. Переходя к повторному интегралу, сначала по переменной x^k, а потом по всем остальным переменным получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} \cdots \int dx^1 \ldots dx^{k-1} dx^{k+1} \ldots dx^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

Внутренний интеграл равен нулю в силу следующих очевидных соотношений: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f(x^1, \ldots, x^n)\big|_{x^k = -\infty}^{x^k = +\infty}$. Поэтому $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = 0$.

Пусть теперь $k = n$. Тогда $\omega = f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$,

$$d\omega = (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1} \wedge dx^n.$$

Имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_0} \omega = \int \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_0} f(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) dx^1 \ldots dx^{n-1};$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = \int \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^1 \ldots dx^{n-1} dx^n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}_0} \cdots \int dx^1 \ldots dx^{n-1} \int_0^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}_0} \cdots \int dx^1 \ldots dx^{n-1} ((-1)^{n-1} f(x^1, \ldots, x^n)|_{x^n=0}^{x^n=+\infty}) =$$

$$= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}_0} \cdots \int f(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) dx^1 \ldots dx^{n-1}.$$

Следовательно, $\int_{\mathbb{R}^{n-1}_0} = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n_+} d\omega$. Таким образом, для завершения доказательства, достаточно разложить форму ω в сумму $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_N$ так, чтобы носитель каждого слагаемого лежал в одной карте многообразия M. Рассмотрим атлас карт $\{U_\alpha\}$ и разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$, подчиненное атласу $\{U_\alpha\}$. Тогда $1 \equiv \sum \varphi_\alpha$, $\omega = \sum \varphi_\alpha \omega$, $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \omega \subset U_\alpha$. □

ПРИМЕР 5. Теорему 1 можно применять для определения класса когомологий, определяемого замкнутой формой ω на многообразии. Прежде всего заметим, что *если ω — точная форма*, т. е. определяет нулевой класс когомологий $[\omega] = 0 \in H^k(M)$, то *интеграл формы ω по любому замкнутому ориентированному подмногообразию $W \subset M$, $\dim W = k$, равен нулю*: $\int_W \omega = 0$. В самом деле, поскольку $\omega = d\Omega$, а $\partial W = \varnothing$, то по формуле Стокса имеем: $\int_W \omega = (-1)^{k-1} \int_{\partial W} \Omega = 0$. Верно и обратное утверждение: *если интеграл от замкнутой формы $f^*\omega$ степени k по любому замкнутому ориентированному многообразию W, $\dim W = k$, отображенному в M, $f\colon W \to M$, равен нулю, то ω является точной формой.*

Мы проверим это утверждение в частном случае, когда $k = 1$. Тогда условие, что $\int_\gamma \omega = 0$ по любой замкнутой кривой γ, означает, что интеграл $\int_\gamma \omega$ по незамкнутой кривой зависит только от начальной и конечной точки кривой γ. Тогда функцию f, такую, что $df = \omega$, будем искать в виде $f(P) = \int_\gamma \omega$, где γ — некоторая кривая, соединяющая фиксированную точку P_0 с «переменной» точкой P. Для доказательства равенства $df = \omega$ достаточно выбрать локальную систему координат в окрестности точки P, скажем $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда в качестве кривой γ всегда можно выбрать кривую, составленную из следующих кривых: фиксированная γ_0 — соединяет

точку P_0 с началом координат $(0, \ldots, 0)$, последовательность отрезков, соединяющих точки: $(0, \ldots, 0)$, $(x^1, \ldots, 0)$; $(x^1, x^2, \ldots, 0)$; $\ldots$ $\ldots$; $(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)$, $(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n)$. Тогда, полагая $\omega = \sum g_i dx^i$, имеем:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \int\limits_{\gamma_0} \omega + \int\limits_0^{x^1} g_1(x^1, \ldots, 0)dx^1 + \\ + \int\limits_0^{x^2} g_2(x^1, x^2, \ldots, 0)dx^2 + \ldots + \int\limits_0^{x^n} g_n(x^1, \ldots, x^n)dx^n.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x^k} = g_k(x^1, \ldots, x^k, \ldots, 0) + \int\limits_0^{x^{k+1}} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{k+1}(x^1, \ldots, x^{k+1}, \ldots, 0)dx^{k+1} + \\ + \int\limits_0^{x^n} \frac{\partial}{\partial x^k} g_n(x^1, \ldots, x^n)dx^n = g_k(x^1, \ldots, x^k, \ldots, 0) + \\ + \int\limits_{x^{k+1}}^{x^n 0} \frac{\partial}{\partial x^{k+1}} g_k(x^1, \ldots, x^{k+1}, \ldots, 0)dx^{k+1} + \ldots \\ \ldots + \int\limits_0^{x^n} \frac{\partial}{\partial x^n} g_k(x^1, \ldots, x^n)dx^n = g_k(x^1, \ldots, x^k, \ldots, 0) + \\ + [g_k(x^1, \ldots, x^{k+1}, \ldots, 0) - g_k(x^1, \ldots, x^k, \ldots, 0)] + \ldots \\ \ldots + [g_k(x^1, \ldots, x^n) - g_k(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)] = g_k(x^1, \ldots, x^n).$$

§ 3. Степень отображения и ее приложения

В этом параграфе мы опишем один важный геометрический инвариант отображений — степень отображения.

1. Пример. Рассмотрим окружность S^1, понимаемую как множество комплексных чисел, по модулю равных единице. Рассмотрим отображение f: $S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$. Это отображение является гладким отображением. Любая точка окружности S^1 является регулярной для отображения f. Действительно, в локальном параметре φ отображение f имеет вид: $f(\varphi) = n\varphi$; $df(\xi) = n\xi$, $n \neq 0$. Следовательно, дифференциал df является изоморфизмом. Прообраз любой точки $z_0 \in S^1$ состоит из ровно n точек — корней степени n комплексного числа z_0. Геометрически отображение f можно представлять себе как «намотку» окружности S^1 на

S^1 n раз (рис. 2). Рассмотрим теперь внешнюю дифференциальную форму ω, равную в локальном параметре $\omega = d\varphi$. Тогда $f^*(\omega) = d(f(\varphi)) = d(n\varphi) = nd\varphi = n \cdot \omega$. Поэтому

$$\int\limits_{S^1} f^*(\omega) = n \int\limits_{S^1} \omega. \tag{1}$$

С другой стороны, разбив окружность на n интервалов $I_1, \ldots, I_n$ (с помощью, например, корней степени n из единицы), обнаруживаем, что на каждом интервале I_k отображение f является диффеоморфизмом на окружность S^1 (без одной точки). Поэтому в силу инвариантности интеграла внешней дифференциальной формы при заменах координат (с положительным якобианом) получаем $\int\limits_{I_k} f^*(\omega) = \int\limits_{S^1} \omega$. Значит, соотношение (1) можно получить следующим образом: подсчитать число прообразов у регулярной точки и умножить интеграл от формы ω на это число. Получится левая часть формулы (1).

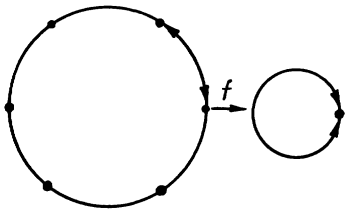


Рис. 2

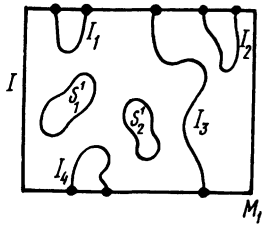


Рис. 3

Используя пример 5 § 2, получаем, что на окружности S^1 то же число n определяет и поведение гомоморфизма f^*: $H^1(S^1) \to \to H^1(S^1)$ в группах когомологий.

2. Степень отображения.

***Определение* 1.** Пусть f: $M_1 \to M_2$ гладкое отображение компактных, связных, ориентированных замкнутых многообразий, $\dim M_1 = \dim M_2$, $P \in M_2$ — регулярная точка. Для $Q \in f^{-1}(P)$ положим $\varepsilon(Q) = +1$, если детерминант матрицы Якоби отображения f в точке Q положителен, и $\varepsilon(Q) = -1$, если этот же детерминант отрицателен. *Степенью отображения* f (относительно регулярной точки P) называется число

$$\deg_P f = \sum_{Q \in f^{-1}(P)} \varepsilon(Q). \tag{2}$$

Теорема 1. *Формула* (2) *не зависит:*

а) *от выбора регулярной точки* $P \in M_2$,

б) *от выбора отображения* f *в классе гладко гомотопных отображений.*

Доказательство. Пункт а) сводится к пункту б). В самом деле, если P, P' — две регулярные точки, то существует такое непрерывное семейство диффеоморфизмов $\varphi_t\colon M_2 \to M_2$, что φ_0 — тождественное отображение, а $\varphi_1(P') = P$. Тогда отображения f и $\varphi_1 \circ f$ гомотопны и у обоих точка P регулярна. С другой стороны, $\deg_P(\varphi_1 \circ f) = \deg_{P'} f$. Итак, пусть $F\colon M_1 \times I \to M_2$ гладкое отображение, точка $P \in M_2$ регулярна для $f_0 = F|_{(M_1 \times \{0\})}$ и для $f_1 = F|_{(M_1 \times \{1\})}$. Тогда для отображения F точка P является регулярной во всех точках края $\partial(M_1 \times I) = (M_1 \times \{0\}) \cup (M_1 \times \{1\})$.

По теореме Сарда для отображения F найдется регулярная точка P', сколь угодно близкая к точке P. Тогда точка P' регулярна и для отображений f_0 и f_1. Поскольку точку P' можно выбрать сколь угодно близко к точке P, то для каждого прообраза $Q \in f_0^{-1}(P)$ существует единственный близкий прообраз $Q' \in f_0^{-1}(P')$, причем $\varepsilon(Q) = \varepsilon(Q')$. Значит, $\deg_P f_0 = \deg_{P'} f_0$. Аналогично устанавливаем, что $\deg_P f_1 = \deg_{P'} f_1$. Снова обозначая точку P' через P, получаем, что прообраз $F^{-1}(P)$ является гладким одномерным многообразием с краем, причем, край $\partial F^{-1}(P)$ лежит в $\partial(M_1 \times I)$. Одномерное компактное многообразие всегда является объединением своих связных компонент — окружностей и отрезков (см. рис. 3). Следовательно, и многообразие $F^{-1}(P)$ разлагается в несвязную сумму отрезков I_k и окружностей S_l^1: $F^{-1}(P) = \bigcup\limits_k I_k \cup \bigcup\limits_l S_l^1$. Каждый отрезок I_k имеет две граничные точки a_k и b_k. Множество всех точек $\{a_k, b_k\}$ образует объединение прообразов $f_0^{-1}(P)$ и $f_1^{-1}(P)$. Покажем, что если пара (a_k, b_k) лежит в одной компоненте края $\partial(M_1 \times I)$, то $\varepsilon(a_k) = -\varepsilon(b_k)$, а если в различных, то $\varepsilon(a_k) = \varepsilon(b_k)$. В самом деле, на многообразии $M_1 \times I$ в качестве атласа карт можно выбирать карты $U_\alpha \times I$ с координатами $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, t)$. На отрезке I_k введем параметр φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Пусть сначала точки a_k, b_k лежат на связной компоненте $M_1 \times \{0\}$, $a_k \in U_\alpha \times \{0\}$, $b_k \in U_\beta \times \{0\}$. Тогда выполнены неравенства:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{a_k} > 0, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{b_k} < 0. \tag{3}$$

С другой стороны, для достаточно малой окрестности $V \ni P$ все прообразы из $F^{-1}(V)$ в окрестности I_k являются отрезками, параметризованными одним параметром φ, так что $F^{-1}(V) = V \times F^{-1}(P) = V \times I_k$. Если в окрестности V выбраны координаты

$(y^1, \ldots, y^n)$, то в области $F^{-1}(V)$ в качестве координат можно взять координаты $(y^1, \ldots, y^n, \varphi)$. Поэтому для вычисления чисел $\varepsilon(a_k)$, $\varepsilon(b_k)$ нужно вычислить знак детерминанта матриц: $\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial y^j}\right)$, $\left(\frac{\partial x_\beta^i}{\partial y^j}\right)$. Поскольку многообразие $M_1 \times I$ ориентировано, то матрицы Якоби перехода от координат $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, t)$ к координатам $(y^1, \ldots, y^n, \varphi)$ имеют одинаковый знак детерминанта независимо от индекса α. Например,

$$\left.\frac{\partial(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, t)}{\partial(y^1, \ldots, y^n, \varphi)}\right|_{a_k} = \frac{\partial(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)} \cdot \left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{a_k}. \tag{4}$$

Значит, первые сомножители в правой части (4) имеют различные знаки для точек a_k и b_k. Если точка $a_k \in M_1 \times \{0\}$, а $b_k \in M_1 \times \{1\}$, то вместо неравенств (3) выполнены неравенства

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{a_k} > 0, \qquad \left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{b_k} > 0. \tag{5}$$

Поэтому из формулы (4) следует, что $\varepsilon(a_k) = \varepsilon(b_k)$. Таким образом, все точки прообразов $f_0^{-1}(P)$ и $f_1^{-1}(P)$ разбиваются на пары точек, причем если пара лежит на одной компоненте края $\partial(M_1 \times I)$, то в сумме (2) она дает нулевой вклад. Если же пара лежит на различных компонентах края $\partial(M_1 \times I)$, то она дает в сумме (2) одинаковый вклад как для $\deg_P f_0$, так и для $\deg_P f_1$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Для неориентируемых многообразий тоже можно определить аналог степени отображения по формуле (2). Тогда вместо теоремы 1 следует утверждать независимость степени отображения от выбора точки и гомотопии по модулю 2.

3. Основная теорема алгебры. Так называется теорема, гласящая, что *любой многочлен $P(z)$ степени $\geqslant 1$ над полем комплексных чисел имеет хотя бы один комплексный корень.*

Существует много различных доказательств этой теоремы. Одно из них получается применением понятия степени отображения и теоремы 1. Рассмотрим гладкое отображение $P\colon \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ комплексной плоскости, задаваемое формулой:

$$\omega = P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0. \tag{6}$$

Это отображение можно продолжить до отображения двумерной сферы S^2 в себя, считая S^2 комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}(1)$. Для этого будем считать, что комплексный параметр z равен отношению однородных координат на $\mathbb{CP}(1)$: $z = \frac{z_1}{z_0}$ при $z_0 \neq 0$. Аналогично $w = \frac{w_1}{w_0}$ при $w_0 \neq 0$. Поэтому отображение

$$\begin{aligned} \omega_1 &= z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \ldots + a_1 z_1 z_0^{n-1} + a_0 z_0^n, \\ w_0 &= z_0^n \end{aligned} \tag{7}$$

корректно определяет отображение $\mathbb{CP}(1)$ в себя. Отображение (7), очевидно, является гладким отображением. В самом деле, в карте $z_0 \neq 0$ это следует из (6). В карте же $z_1 \neq 0$ в качестве комплексной координаты можно взять функцию $z' = \frac{z_0}{z_1}$. Положим $w' = \frac{w_0}{w_1}$. Тогда

$$\omega' = (z')^n(1 + a_{n-1}z' + \ldots + a_1(z')^{n-1} + a_0(z')^n)^{-1}, \qquad (8)$$

Тогда, подбирая достаточно малым $\varepsilon > 0$, выберем карту, содержащую точку $z' = 0$, задавая ее неравенством $|z'| < \varepsilon$ так, чтобы знаменатель в формуле не обращался в нуль. Таким образом, отображение $f\colon \mathbb{CP}(1) \to \mathbb{CP}(1)$, задаваемое формулой (7), является гладким отображением. Вычислим его степень. Согласно теореме 1, вместо отображения f можно взять гомотопное ему отображение. Рассмотрим гомотопию по параметру t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, задаваемую формулой (9)

$$\begin{gathered} \omega_1 = z_1^n + t(a_{n-1}z^{n-1}z_0 + \ldots + a_0z_0^n), \qquad (9) \\ w_0 = z_0^n \end{gathered}$$

Как и в случае (7), отображения (9) являются гладкими отображениями. При $t = 0$ получается простое отображение:

$$w_1 = z_1^n, \qquad w_0 = z_0^n. \qquad (10)$$

В локальных координатах $w = \frac{w_1}{w_0}$, $z = \frac{z_1}{z_0}$ оно имеет вид: $w = z^n$, и, скажем, точка $w = 1$ является регулярной. В самом деле, следует вычислить матрицу Якоби отображения $u = \operatorname{Re} w = \operatorname{Re} z^n$, $v = \operatorname{Im} w = \operatorname{Im} z^n$, $z = x + iy$. Тогда:

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial z} & -\operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial z} & \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= n^2 \det \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z^{n-1} & -\operatorname{Im} z^{n-1} \\ \operatorname{Im} z^{n-1} & \operatorname{Re} z^{n-1} \end{pmatrix} = n^2|z^{n-1}|^2 > 0$$

при $z \neq 0$. Поскольку уравнение $z^n = 1$ имеет ровно n решений, то степень отображения (10), а вместе с ним и (7), равна n: $\deg f = n$. Если бы многочлен P не имел корней, то это значило бы, что точка $w = 0$ не принадлежит образу отображения f. Следовательно, отображение $f\colon \mathbb{CP}(1) \to \mathbb{CP}(1)$ имело бы регулярную точку ($w = 0$) с пустым прообразом, т. е. степень отображения f равнялась бы нулю. Противоречие доказывает теорему.

4. Интегрирование форм.

Теорема 2. *Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — гладкое отображение ориентированных компактных связных многообразий, ω — внешняя дифференциальная форма,* $\deg \omega = \dim M_1 = \dim M_2$. *Тогда*

$$\int\limits_{M_1} f^*(\omega) = \deg f \cdot \int\limits_{M_2} \omega. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку левая и правая часть формулы (11) линейны относительно ω, то ее достаточно доказать для формы ω, носитель которой лежит в малой окрестности U точки $Q \in M_2$. Пусть $Q_0 \in M_2$ — регулярная точка отображения f, $U_0 \ni Q_0$ — достаточно малая окрестность, состоящая из регулярных точек отображения f. Тогда существует непрерывное семейство диффеоморфизмов $\varphi_t\colon M_2 \to M_2$ такое, что $\varphi_0(P) = P$ — тождественное отображение, а $\varphi_1(U_0) = U \ni Q$. В самом деле, соединим точки Q и Q_0 непрерывным путем γ. Без ограничения общности можно считать, что точки Q и Q_0 лежат в одной карте V, диффеоморфной $\mathbb{R}^n$, а путь γ является прямолинейным отрезком в локальной системе координат. Построим векторное поле $\vec{\xi}$ на пути γ, равное касательному вектору к γ и имеющее компактный носитель в карте V. Тогда соответствующая векторному полю $\vec{\xi}$ динамическая система, т. е. однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ_t, передвигает точку Q в точку Q_0, а при $t = 0$ диффеоморфизм φ_0 является тождественным. Тогда формы $\varphi_0^*(\omega) = \omega$, $\varphi_1^*(\omega) = \omega_1$ согласно теореме 4 § 1 когомологичны, а по теореме Стокса $\int\limits_{M_2} \omega = \int\limits_{M_2} \omega_1$. Аналогично, $\int\limits_{M_1} f^*(\omega) = \int\limits_{M_1} f^*(\omega_1)$. Поскольку $\operatorname{supp} \omega \subset U$, то $\operatorname{supp} \omega_1 \subset U_0$. Следовательно, $\int\limits_{M_2} \omega = \int\limits_{U_0} \omega_1$. С другой стороны, прообраз $f^{-1}(U_0)$ состоит из объединения конечного числа открытых множеств $f^{-1}(U_0) = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$, на каждом из которых отображение f является диффеоморфизмом. Тогда, поскольку $\operatorname{supp} f^*(\omega) \subset f^{-1}(U_0)$, то

$$\int\limits_{M_1} f^*(\omega_1) = \int\limits_{f^{-1}(U_0)} f^*(\omega_1) = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{V_i} f^*(\omega_1) = \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{sgn} df|_{V_i}) \int\limits_{U_0} \omega_1 =$$

$$= \Big[\sum_{i=1}^{N} (\operatorname{sgn} df|_{V_i})\Big] \int\limits_{U_0} \omega = \Big[\sum_{P \in f^{-1}(Q_0)} \varepsilon(P)\Big] \int\limits_{U_0} \omega_1 = \deg f \cdot \int\limits_{U_0} \omega. \quad \square$$

5. Гауссово отображение гиперповерхности. Рассмотрим гиперповерхность M в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\dim M = n-1$, задаваемое уравнением $F(x)=0$, $\operatorname{grad} F \neq 0$. Тогда на многообразии M определены: риманова метрика $\{g_{ij}\}$, форма объема $\sqrt{|g|}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}$, где $|g| = \det(g_{ij})$; гауссова кривизна $K = K(y^1, \ldots, y^n)$. Определим новую форму $Kd\sigma = K(y^1, \ldots, y^n)\sqrt{|g|}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}$, называемую *формой кривизны* гиперповерхности M. Кроме того, для гиперповерхности M определено гладкое отображение f: $M \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, которое каждой точке P сопоставляет его нормаль. Это отображение называется *сферическим отображением*. Пусть Ω — форма объема на сфере S^{n-1}.

Теорема 3. *Для сферического отображения f: $M \to S^{n-1}$ гиперповерхности M прообраз формы объема Ω на сфере S^{n-1} равен форме кривизны на гиперповерхности M: $f^*\Omega = K\, d\sigma$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что в окрестности точки $P_0 \in M$ многообразие M является графиком функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$, а в точке $P_0 = (0, \ldots, 0)$ нормаль к многообразию M параллельна оси Ox^n. Тогда в точке P_0 риманова метрика имеет вид единичной матрицы: $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда гауссова кривизна в точке P_0 имеет вид: $K = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)$. На сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в окрестности точки $f(P_0) = (0, \ldots, 0, 1)$ в качестве координат выберем координаты $(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Тогда метрика на сфере S^{n-1} в точке $f(P_0)$ тоже имеет диагональный вид: $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда форма Ω на сфере S^{n-1} в точке $f(P_0)$ равна: $\Omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$. Вычислим теперь сферическое отображение. Касательное пространство к многообразию M порождается касательными векторами

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ f_{x^1} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \\ f_{x^2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{r}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \\ f_{x^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Тогда нормальный вектор $\vec{n}$ имеет координаты

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \ldots + f_{x^{n-1}}^2}} \begin{pmatrix} f_{x^1} \\ f_{x^2} \\ \ldots \\ f_{x^{n-1}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Прообраз формы Ω при сферическом отображении вычисляется путем подстановки вместо dx^i дифференциала координаты нормального вектора $\vec{n}$:

$$f^*(\Omega) = d\frac{f_{x^1}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\ldots f_{x^{n-1}}^2}} \wedge \ldots \wedge d\frac{f_{x^{n-1}}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\ldots f_{x^{n-1}}^2}}.$$

Имеем:

$$d\frac{f_{x^i}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\ldots f_{x^{n-1}}^2}} = \frac{df_{x^i}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\ldots f_{x^{n-1}}^2}} - \frac{f_{x^i}(f_{x^1}df_{x^1}+\ldots+f_{x^{n-1}}df_{x^{n-1}})}{\sqrt{(1+f_{x^1}^2+\ldots f_{x^{n-1}}^2)^3}}.$$

Тогда, поскольку в точке P_0 первые частные производные функции f равны нулю, $f_{x^i}(P_0)=0$, то

$$d\frac{f_{x^i}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\ldots+f_{x^{n-1}}^2}} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\,dx^j$$

в точке P_0. Следовательно,

$$f^*(\Omega) = \left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j}\,dx^j\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{n-1}\partial x^j}\,dx^j\right) =$$

$$= \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1} = K d\sigma. \quad \square$$

В качестве следствия получается известная *теорема Гаусса — Бонне*:

Теорема 4. *Пусть M — замкнутая компактная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Тогда $\int\limits_M K\,d\sigma = 4\pi\lambda$, где λ — некоторое целое число.*

Доказательство. Применим теоремы 2 и 3:

$$\int\limits_M K\,d\sigma = \int\limits_M f^*(\Omega) = (\deg f)\int\limits_{S^2}\Omega = 4\pi\deg f \qquad \square$$

Замечание. Теорема Гаусса — Бонне утверждает больше, чем теорема 4. Оказывается, целое число λ не зависит от римановой метрики и всегда равно $\lambda = g-1$, где g — число ручек на ориентированной поверхности M.

Глава 7

ПРОСТЕЙШИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Понятие функционала. Экстремальные функции. Уравнение Эйлера

Вариационные задачи являются одним из важнейших классов математических задач, ведущих свое происхождение от общих физических и механических проблем движения и устойчивости. Так, например, мы увидим, что геодезические траектории являются решениями соответствующей вариационной задачи.

Начнем с общего понятия вариации функционала. Предварительно поговорим о самом понятии функционала. Мы знакомы с понятием функции $y=f(x)$, где y — вещественное число, а аргумент x может быть записан в виде набора числа $(x^1, \ldots, x^n)$ в некоторой криволинейной системе координат на гладком многообразии. Однако, далеко не все физические соответствия могут быть записаны на таком, относительно простом языке. Например, мы знакомы с таким соответствием: каждому конечному отрезку гладкой кривой $\gamma(t)$ сопоставляется его длина $l_a^b(\gamma)=\int\limits_a^b |\dot{\gamma}|\,dt$. Это соответствие: $\gamma(t)\to l_a^b(\gamma(t))$ уже не является «функцией» в прежнем нашем понимании, так как «аргументом» является произвольная гладкая кривая. Это соответствие: $\gamma \to l(\gamma)$ является важным примером нелинейного функционала, определенного на пространстве гладких кривых $\gamma(t)$. Обобщим этот пример; при этом в круг наших рассмотрений попадут другие важные соответствия.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ ограниченную область D с гладкой границей ∂D; пусть $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты. Рассмотрим на D всевозможные гладкие вектор-функции $\vec{f}(x^1, \ldots, x^n) = \vec{f}(x^\alpha) = (f^1(x^\alpha), \ldots, f^k(x^\alpha)) = \{f^i(x^\alpha)\}$, где числа k и n никак друг с другом не связаны. Область D называют областью изменения параметров $x^1, \ldots, x^n$. Пусть даны две функции: $\{f^i(x^\alpha)\}$ и $\{g^i(x^\alpha)\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$; тогда для любых вещественных чисел a и b

определена новая вектор-функция $a\vec{f}+b\vec{g}=\{af^i(x^\alpha)+bg^i(x^\alpha)\}$, т. е. все гладкие вектор-функции на D образуют линейное пространство F. Это пространство бесконечномерно. Различные функционалы мы будем рассматривать именно на этом пространстве F, «точки» которого (т. е. вектор-функции) и будут являться «аргументами» функционалов $J[\vec{f}]$, $\vec{f}\in F$. Впрочем, в тех простых примерах, с которыми мы будем иметь дело, наличие линейной структуры в F не будет существенно: мы не будем существенно пользоваться операцией сложения вектор-функций.

В работе с функционалами полезно иметь в виду аналогию с обычными функциями.

Определение. *Функционалом* J, определенным на пространстве F (или на каком — либо подмножестве пространства F), мы будем называть непрерывное отображение F (или его подмножества) в вещественные числа: $J\colon F\to\mathbb{R}^1$; отображение J линейным не предполагается. Если $J[a\vec{f}+b\vec{g}]=aJ[\vec{f}]+bJ[\vec{g}]$ (т. е. J — линейно), то функционал J называется *линейным.*

ПРИМЕР: D — отрезок на вещественной прямой: $x^1=t$, $\vec{f}(t)=(f^1(t), f^2(t), f^3(t))$ — вектор-функция на D, т. е. $\vec{f}(t)=\gamma(t)$ определяет гладкую кривую в $\mathbb{R}^3$; при этом F есть линейное пространство всех таких кривых в $\mathbb{R}^3$ (радиус-векторы $\vec{f}$ и $\vec{g}$ кривых $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(t)$ можно складывать и умножать на числа). В качестве J возьмем интеграл $J[\vec{f}]=\int\limits_0^1|\dot{\gamma}(t)|\,dt=\int\limits_D|\vec{f}(t)|\,dt$, т. е. длину кривой $\vec{f}(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Этот функционал нелинеен, так как $J[a\vec{f}+b\vec{g}]\neq aJ[\vec{f}]+bJ[\vec{g}]$ (постройте пример).

Пусть задана гладкая функция $L(x^\beta; p^i; q^i_\alpha)$, зависящая от трех групп переменных: x^β, $1\leqslant\beta\leqslant n$; p^i, $1\leqslant i\leqslant k$; q^i_α, $1\leqslant\alpha\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant k$. Назовем эту функцию *лагранжианом.* Таким образом, лагранжианом может служить любая гладкая функция от трех групп переменных. Пусть $\vec{f}=\{f^i(x^\beta)\}$ — гладкая вектор-функция, определенная на $D\subset\mathbb{R}^n$. Построим функционал $J[\vec{f}]$ так:

$$J[\vec{f}]=\int\limits_D L(x^\beta; f^i(x^\beta); f^i_{x^\alpha}(x^\beta))\,d\sigma^n,$$

где $\int\limits_D$ обозначает кратный интеграл $\int\cdots\int\limits_D$ (n раз) по n-мерной области D; $d\sigma^n=dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ — n-мерный элемент объема в D (т. е. декартова внешняя форма евклидова объема) $f^i_{x^\alpha}(x^\beta)=\dfrac{\partial f^i(x^\beta)}{\partial x^\alpha}$ — частные производные. Сокращенно запишем $J[\vec{f}]$ так: $J[\vec{f}]=\int\limits_D L(x^\beta, f^i, f^i_{x^\alpha})\,d\sigma^n$, опуская аргументы

у функций f^i и $f^i_{x^\alpha}$. Функция L (лагранжиан) фиксирована тем самым для каждого функционала J. Определенный нами класс функционалов включает практически все содержательные примеры функционалов в механике, физике и их приложениях. Рассмотрим функционал длины дуги

$$J[\vec{f}] = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))\frac{dy^i(t)}{dt}\frac{dy^j(t)}{dt}}\, dt,$$

т. е. $D = I = [0, 1]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n = 1$, $\vec{f}(t) = \gamma(t) = (y^1(t), \ldots, y^k(t))$; $\gamma(t)$ — гладкая кривая в k-мерном пространстве с римановой метрикой $g_{ij}(y^1, \ldots, y^k)$; лагранжиан имеет вид

$$L(x^\beta, \vec{f}, \vec{f}_{x^\alpha}) = L\left(t; y^1, \ldots, y^n; \frac{dy^1}{dt}, \ldots, \frac{dy^k}{dt}\right) = \sqrt{g_{ij}(y^1, \ldots, y^k)\dot{y}^i\dot{y}^j}.$$

Если кривая $\gamma(t)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана явно: $y = f(x)$, то

$$L(x, f, f_x) = L(f_x) = \sqrt{1 + f_x^2}.$$

Этот функционал определен также на кривых, лежащих в гладком многообразии M^k. Мы будем обычно рассматривать малую окрестность конкретной кривой; в этой окрестности будем предполагать введенными локальные координаты $y^1, \ldots, y^k$, и тем самым события переносятся в некоторую область в k-мерном евклидовом пространстве, снабженном римановой (вообще говоря, неевклидовой) метрикой. При этом сложение вектор-функций, задающих кривые, можно выполнять только в некоторой окрестности фиксированной кривой.

Другой пример: функционал площади $J[\vec{f}] = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy$.

Здесь $D(x, y)$ — область изменения параметров (x, y), $\vec{f} = (u^1(x, y); u^2(x, y); u^3(x, y))$ — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$ с индуцированной метрикой $ds^2 = E\, dx^2 + 2F\, dxdy + G\, dy^2$;

$$L = L(\vec{f}_x, \vec{f}_y) = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(\vec{f}_x, \vec{f}_x)(\vec{f}_y, \vec{f}_y) - (\vec{f}_x, \vec{f}_y)^2}.$$

Здесь пространство F — это линейное пространство всех вектор-функций $(u^1(x, y), u^2(x, y), u^3(x, y))$, определенных на D. Можно было бы рассмотреть функционал площади в ином виде: $J[\vec{f}] = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$, где D — область в $\mathbb{R}^2(x, y)$;

$\vec{f}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, т. е. вектор-функция $\vec{f}$ задана в явном виде графиком $z = f(x, y)$ над областью D в $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$; $L = L(z_x, z_y) = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$. Сложение таких вектор-функций означает сложение графиков этих функций в $\mathbb{R}^3$ над D. Но далеко не каждая поверхность в $\mathbb{R}^3$ может быть задана графиком однозначной функции.

Какие вопросы будут нас в первую очередь интересовать при изучении $J[\vec{f}]$? Обратимся к аналогии с обычными функциями; например, рассмотрим функции от одного или от двух переменных: $\alpha(t)$ и $\alpha(u, v)$. Как нам известно, в большой степени поведение функции $\alpha(t)$ или $\alpha(u, v)$ определяется количеством и расположением тех точек t_0 (или (u_0, v_0)), в которых $\alpha'(t_0) = 0$ (или $\alpha_u(u_0, v_0) = \alpha_v(u_0, v_0) = 0$), т. е. $\operatorname{grad}(\alpha) = 0$. Такие точки, в которых $\operatorname{grad}(\alpha) = 0$, называются *критическими* или *стационарными точками* функции α. Иногда употребляется название: *экстремальные* точки. Например, для функции $\alpha = \alpha(t)$ стационарными точками являются точки максимума, минимума и точки перегиба (рис. 1). Если $\alpha = \alpha(u, v)$, то среди точек, для которых $\operatorname{grad}(\alpha) = 0$, содержатся, например, точки максимума, минимума и седловые точки (седла) порядка два; кроме того, здесь возможны седла более высоких порядков (рис. 2).

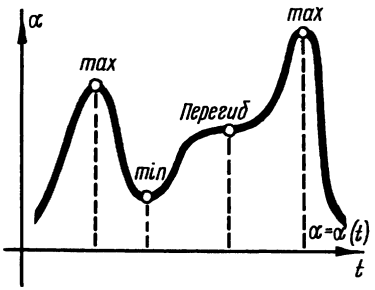


Рис. 1

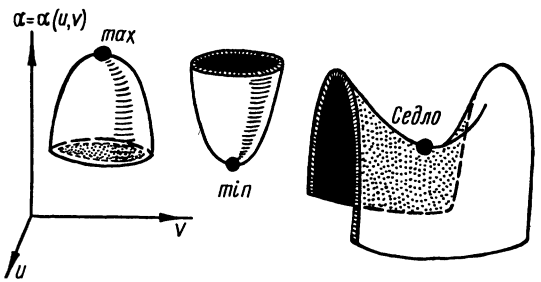


Рис. 2

Так, например, в механике знание тех точек, в которых гладкая функция — потенциал достигает максимума (т. е. потенциальная

энергия — минимума), имеет первостепенное значение для нахождения устойчивого положения равновесия системы.

Аналогично, при изучении $J[\vec{f}]$ большое внимание уделяется нахождению тех стационарных вектор-функций $\vec{f}_0$, в которых функционал J достигает минимума, максимума или имеет «седло». Однако мы должны сформулировать эту геометрическую аналогию на дифференциальном языке; грубо говоря, нужно правильно понять, что такое «производная по направлению» от функционала J в некоторой точке $\vec{f} \in F$. Как было отмечено, для функций $\alpha(t)$ и $\alpha(u, v)$ все интересующие нас критические точки являются решениями уравнения $\operatorname{grad}(\alpha) = 0$. Нужно получить аналог этого уравнения в функциональном случае. Вернемся к уравнению $\operatorname{grad}(\alpha) = 0$. Как мы знаем, если в точке $(u, v) \in G$ задано некоторое направление (вектор) $\vec{a} = (a^1, a^2)$, то производная функции $\alpha(u, v)$ по направлению $\vec{a}$ имеет вид:

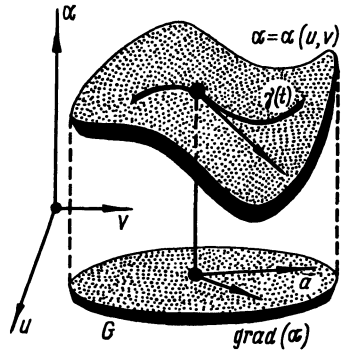


Рис. 3

$$\frac{d}{d\vec{a}}\alpha(u, v) = a^1\frac{\partial\alpha}{\partial u} + a^2\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \langle\vec{a}, \operatorname{grad}\alpha\rangle$$

(рис. 3). Отсюда следует, что $\operatorname{grad}\alpha(u_0, v_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{d}{d\vec{a}}\alpha(u_0, v_0) = 0$ для любого направления $\vec{a}$ в точке (u_0, v_0). Если $\alpha = \alpha(t)$, то это означает, что $\alpha'_t(t_0) = 0$. Производная от $\alpha(u, v)$ по направлению $\vec{a}$ может быть вычислена так:

$$\frac{d\alpha}{d\vec{a}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[\alpha(u + \varepsilon a^1, v + \varepsilon a^2) - \alpha(u, v)],$$

где $\vec{a} = (a^1, a^2)$, ε — параметр, т. е.

$$\frac{d\alpha}{d\vec{a}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[\alpha(\vec{x} + \varepsilon\vec{a}) - \alpha(\vec{x})],$$

где $\vec{x} = (u, v)$ — радиус-вектор точки из области G. Именно в такой форме мы и обобщим понятие производной по направлению на случай функционалов $J[\vec{f}]$.

Рассмотрим «точку» $\vec{f} \in F$ и рассмотрим функцию $\vec{\eta} \in F$, достаточно малую и такую, что $\vec{\eta}|_{\partial D} \equiv 0$. Такие функции $\vec{\eta}$ будем называть *возмущениями* функции $\vec{f}$. Сместимся из точки $\vec{f}$ в точку $\vec{f} + \varepsilon\vec{\eta}$ (рис. 4). Функция $\vec{\eta}$ (напомним, что $\vec{\eta}|_{\partial D} \equiv 0$) задает «направление смещения» из «точки» $\vec{f}$, точно так же, как вектор $\vec{a}$

задавал направление смещения из точки $(u_0, v_0) \in G$; отличие от случая обычной функции в том, что теперь этих «направлений» бесконечно много.

Далее, в точном соответствии с операцией для обычных функций строим следующее выражение: $\frac{1}{\varepsilon}(J[\vec{f}+\varepsilon\vec{\eta}]-J[\vec{f}])$ и, переходя к пределу по ε, получаем число, которое обозначим через

$$\frac{d}{d\vec{\eta}}J[\vec{f}]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(J[\vec{f}+\varepsilon\vec{\eta}]-J[\vec{f}])$$

и которое естественно назвать *производной функционала J в точке $\vec{f}$ по направлению $\vec{\eta}$*. Развивая эту аналогию с обычными функциями, дадим еще одно естественное

Определение. Функцию $\vec{f}_0 \in F$ назовем *стационарной (экстремальной, критической)* функцией для функционала $J[\vec{f}]$, если $\frac{d}{d\vec{\eta}}J[\vec{f}_0]=0$ для любого возмущения $\vec{\eta}$ такого, что $\vec{\eta}|_{\partial D}=0$.

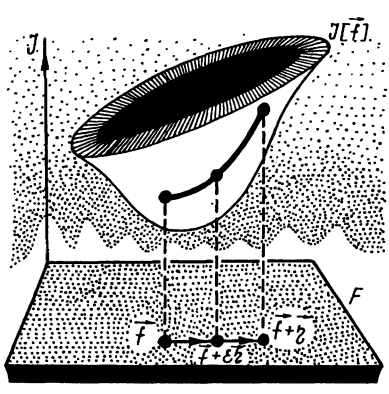


Рис. 4

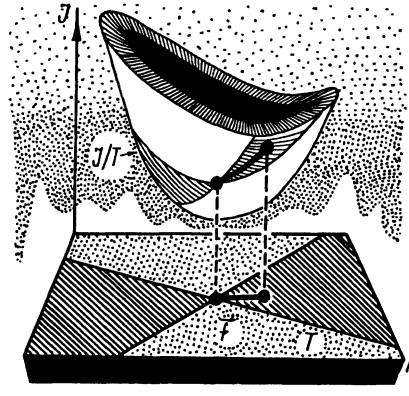


Рис. 5

Если в качестве F рассмотреть пространство вектор-функций $\vec{f}$ с постоянными координатами (т. е. $f^i(x^\alpha)=(\text{const})^i$), то эти определения превращаются в обычные определения производной по направлению и стационарной точки.

Удобно представлять функционал J в виде «графика» над F (рис. 5). Если $\vec{f} \in F$, то совокупность функций $\vec{f}+\varepsilon\vec{\eta}$, где $\vec{\eta}|_{\partial D}=0$, образует, очевидно, линейное пространство T (если принять $\vec{f}$ за «нуль» пространства T), на которое мы и ограничиваем наш функционал J. С этой наглядной точки зрения те «точки» $\vec{f}_0$,

где $\frac{d}{d\vec{\eta}} J[\vec{f}_0] = 0$ (для любого $\vec{\eta}$), являются точками минимума, максимума или «седловыми точками» графика $J[\vec{f}]$, ограниченного на подпространство $T \subset F$. Смысл операции ограничения J на T ясен: мы хотим изучить поведение J при таких возмущениях $\vec{\eta}$, которые не меняют $\vec{f}$ на границе ∂D, т. е. изучаются локальные, дифференциальные свойства функции $\vec{f}_0$, такой, что $\frac{d}{d\vec{\eta}} J[\vec{f}_0] = 0$ (для любого $\vec{\eta}$). На рис. 6 концы кривой фиксированы в точках A и B: $\vec{\eta}(A) = \vec{\eta}(B) = 0$. Выведем теперь явную формулу для производной $\frac{d}{d\vec{\eta}} J[\vec{f}_0]$. (Выражение $\frac{d}{d\vec{\eta}} J[\vec{f}_0]$ называется иногда *первой вариацией* $J[\vec{f}]$.) Имеем

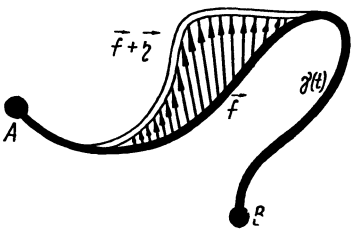


Рис. 6

$$\frac{d}{d\vec{\eta}} J[\vec{f}] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(J[\vec{f} + \varepsilon\vec{\eta}] - J[\vec{f}] \right).$$

Положим $\delta J = J[\vec{f} + \varepsilon\vec{\eta}] - J[\vec{f}]$; тогда

$$\delta J = \int_d \left[L(x^\beta; f^i + \varepsilon\eta^i; f^i_{x^\alpha} + \varepsilon\eta^i_{x^\alpha}) - L(x^\beta; f^i; f^i_{x^\alpha}) \right] d\sigma^n.$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора, получаем

$$\delta J = \int_D \left[\sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial f^i} \varepsilon\eta^i + \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \varepsilon\eta^i_{x^\alpha} + o(\varepsilon) \right] d\sigma^n =$$
$$= \varepsilon \int_D \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} \eta^i + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \eta^i_{x^\alpha} \right] + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\} d\sigma^n.$$

Выполним интегрирование по частям. Рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \eta^i \right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \right) \eta^i + \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \eta^i_{x^\alpha};$$

отсюда

$$\delta J = \varepsilon \int_D \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \eta^i \right) d\sigma^n +$$
$$+ \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \right) \right) \eta^i \, d\sigma^n + \int_D o(\varepsilon) \, d\sigma^n.$$

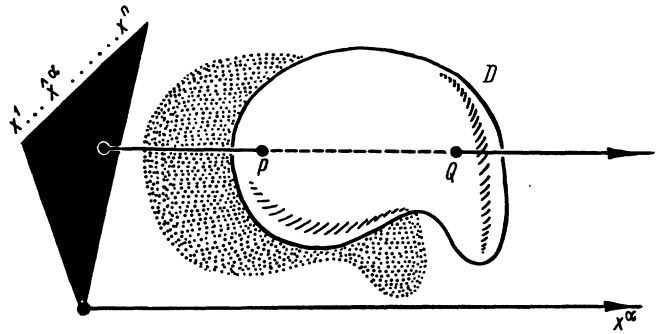


Рис. 7

Так как все функции предполагались гладкими, то в первом интеграле интегрирование по x^α можно отделить от интегрирования по остальным переменным x^i $(1 \leqslant i \leqslant n;\ i \neq \alpha)$ в силу теоремы о перемене порядка интегрирования, что дает:

$$\int\limits_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) d\sigma^n = \int\limits_{x^1 \ldots \widehat{x^\alpha} \ldots x^n} \cdots \int \left(\int\limits_Q^P \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) dx^\alpha\right) d\sigma^{n-1}$$

(рис. 7). Так как в $\int\limits_Q^P$ на переменные $x^1, \ldots, \widehat{x^\alpha}, \ldots, x^n$ (переменная x^{al} пропущена) можно смотреть как на параметры, то интегрирование полностью выполняется, т. е.

$$\int\limits_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) d\sigma^n =$$

$$= \int\limits_{x^1 \ldots \widehat{x^\alpha} \ldots x^n} \cdots \int \left[\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}(Q)\eta^i(Q) - \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}(P)\eta^i(P)\right] d\sigma^{n-1} \equiv 0,$$

так как $\eta^i(P) = \eta^i(Q) = 0$; $P, Q \in \partial D$. Итак,

$$\delta J = \varepsilon \int\limits_D \sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right] \eta^i\, d\sigma^n + \int\limits_D o(\varepsilon)\, d\sigma^n.$$

Отсюда

$$\frac{d}{d\vec{\eta}} J[\vec{f}] = \int\limits_D \sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right] \eta^i\, d\sigma^n,$$

так как $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_D o(\varepsilon)\, d\sigma^n = 0$. Пусть $\vec{f}_0$ — стационарная функция для J. Тогда для любой функции $\vec{\eta}$ $(\vec{\eta}|_{\partial D} = 0)$ должно быть выполнено

равенство

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{k} \eta^i \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \right) \right] d\sigma^n \equiv 0.$$

Как известно из курса анализа, это означает, что

$$\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{A}$$

Система дифференциальных уравнений (A) называется *системой уравнений Эйлера для функционала* $J[\vec{f}]$. Тем самым доказана важная

Теорема 1. *Функция* $\vec{f}_0 \in F$ *является экстремальной (стационарной) функцией для функционала* $J[\vec{f}]$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений Эйлера* (A).

Если функционал является обычной функцией на области G, то условие экстремальности точки $x_0 \in G$ означает, что $\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$, т. е. $\operatorname{grad} L = 0$, что и следовало ожидать. Здесь $J = cL$, где $c = \text{const}$.

§ 2. Экстремальность геодезических

Для риманова многообразия мы определили геодезические как траектории, вдоль которых параллельный перенос сохраняет поле скоростей траектории. Оказывается, что для геодезических существует еще одна исключительно важная характеристика, которая может также служить определением геодезической. Эта характеристика связана с экстремальными свойствами специального функционала, весьма «похожего» на функционал длины; геодезические выступают как экстремальные решения этого функционала.

Пусть M^n — риманово многообразие с метрикой g_{ij}; $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты; тогда траектория $\gamma(t)$ может быть задана так: $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$; в качестве области D возьмем отрезок $I = [0, 1]$. Для удобства будем рассматривать траектории $\gamma(t)$ с фиксированными началом и концом: $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$, где P, $Q \in M^n$.

Определение. Функционал

$$L(\gamma) = \int\limits_0^1 |\dot{\gamma}|\, dt = \int\limits_0^1 \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j}\, dt$$

называется *функционалом длины траектории*. Функционал

$$E(\gamma)=\int_0^1 |\dot\gamma|^2\,dt=\int_0^1 g_{ij}(x)\dot x^i\dot x^j\,dt$$

называется *функционалом действия траектории* $\gamma(t)$.

Функционалы L и E различны, но между ними существует связь в виде неравенства: $L^2\leqslant E$; связаны также и их экстремали (см. ниже).

Лемма 1. *Имеет место неравенство* $L^2\leqslant E$.

Доказательство. Применяя известное неравенство Шварца

$$\left(\int_0^1 fg\,dt\right)^2\leqslant\left(\int_0^1 f^2\,dt\right)\cdot\left(\int_0^1 g^2\,dt\right)$$

к функциям $f(t)\equiv 1$ и $g(t)=|\dot\gamma(t)|$, получаем $(L(\gamma))^2\leqslant E(\gamma)$, причем равенство достигается только при постоянной функции $g(t)$, т. е. тогда и только тогда, когда параметр t пропорционален длине дуги. □

Рассмотрим экстремали функционалов E и L.

Теорема 1. *Экстремалями функционала* $E(\gamma)$ *являются геодезические траектории* $\gamma(t)$, *параметризованные параметром* t, *пропорциональным длине дуги* s. *Если, в частности, наложить начальное условие* $|\dot\gamma(0)|=1$ *в начальной точке* P, *то параметр* t *определяется однозначно и является натуральным, т. е. совпадает с длиной дуги.*

Доказательство. Напомним, что мы всегда рассматриваем траектории с параметром, т. е. две траектории, описывающие одно и то же геометрическое место точек, но имеющие различные параметры, рассматриваются нами как различные траектории. В силу теоремы 1 § 1 экстремали функционала $E(\gamma)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера, которые в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x^k}\right)=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n;$$

лагранжиан L равен: $L(x^i,\dot x^j)=g_{ij}(x)\dot x^i\dot x^j$. Вычисление дает

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot x^i\dot x^j;\quad \frac{\partial L}{\partial\dot x^k}=2g_{kj}\dot x^j;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x^k}\right)=2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^\alpha}\dot x^\alpha\dot x^j+2g_{kj}\ddot x^j;\quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot x^i\dot x^j=2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot x^i\dot x^j-2g_{kj}\ddot x^j;$$

$$g_{kj}\ddot x^j+\frac12\left(2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot x^i\dot x^j-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot x^i\dot x^j\right)=0;$$

$$\ddot x^\alpha+\frac12 g^{k\alpha}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot x^i\dot x^j=0;$$

т. е. $\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$. Итак, уравнения Эйлера совпали с уравнениями геодезических в римановой связности. Теорема доказана. □

Экстремаль функционала $E(\gamma)$ определяется из уравнений Эйлера как траектория с параметром. Если на геодезической сделать произвольную гладкую замену параметра, то эта траектория перестанет, вообще говоря, быть геодезической.

Теорема 2. *Экстремалями функционала $L(\gamma)$ являются гладкие траектории $\gamma(t)$, получающиеся из геодезических траекторий путем произвольных гладких замен параметра на них. В частности, любая экстремаль функционала $E(\gamma)$ (параметризованная геодезическая) является экстремалью $L(\gamma)$, но не наоборот.*

Грубо говоря, у функционала $L(\gamma)$ «больше» экстремалей, чем у функционала $E(\gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнения Эйлера для $L(\gamma)$. Лагранжиан L имеет вид: $L(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$. Получаем

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n;$$

$$\frac{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)\right) = 0.$$

Пусть $\gamma(t)$ — какое-либо решение этой системы. Так как $\gamma(t)$ — гладкая кривая в M^n, то на ней можно ввести натуральный параметр $t = s$. Тогда $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ вдоль γ; следовательно, уравнения Эйлера превращаются в

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)\right) = 0,$$

так как $\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} = 1$. Но эти уравнения совпадают в силу теоремы 1 с уравнениями геодезических. Итак, если на произвольном решении $\gamma(t)$ — экстремали $L(\gamma)$ — ввести натуральный параметр, то эта траектория превращается в геодезическую. Обратно, пусть $\gamma(s)$ — произвольная геодезическая на M^n; в силу предыдущего она — экстремаль $L(\gamma)$. Пусть $s = s(t)$ — произвольная гладкая замена параметра на $\gamma(s)$; тогда $L(\gamma(s)) = L(\gamma(s(t)))$, так как длина дуги не меняется при гладких заменах параметра; следовательно, значение L не меняется. Итак, $\gamma(s(t))$ — снова экстремаль L. Теорема доказана. □

Удобно представлять себе взаимоотношение между экстремалями E и экстремалями L следующим образом. Рассмотрим

пространство ΩM^n всех гладких кривых на M^n и рассмотрим на нем действие бесконечномерной группы $\mathfrak{G}$, элементами которой являются всевозможные гладкие замены параметра на кривой. Тогда из каждой точки этого пространства, т. е. кривой γ, «вырастает» орбита $\mathfrak{G}(\gamma)$ действия $\mathfrak{G}$ на ΩM^n. В силу инвариантности L относительно действия $\mathfrak{G}$ он постоянен на каждой орбите $\mathfrak{G}(\gamma)$, $\gamma \in \Omega$ (рис. 8). Так как $L(\gamma)$ постоянен вдоль каждой орбиты,

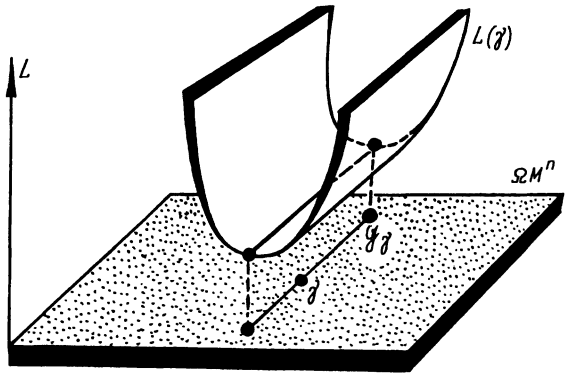


Рис. 8

то все точки на орбите $\mathfrak{G}(\gamma)$ «вырождены» в том смысле, что сколь угодно близко к кривой γ имеются кривые (т. е. параметризованные траектории), на которых L принимает то же значение, что и на γ. Для E ситуация иная: этот функционал меняется при заменах параметра, а потому он не постоянен на орбитах действия $\mathfrak{G}$. Итак, для того, чтобы получить все экстремали L, следует рассмотреть орбиты всех экстремалей функционала E.

Геодезические являются локальными минимумами обоих функционалов L и E, т. е. если рассмотреть малое возмущение η геодезической γ, где носитель η также мал, то новая траектория $\gamma + \eta$ будет иметь длину, не меньшую, чем γ. Сформулируем точную задачу. Рассмотрим компактное риманово многообразие M^n. В силу результатов гл. 5, существует такое $\varepsilon > 0$, что любая пара точек P, Q, расположенных в шаре D_ε^n радиуса ε, соединяется единственной геодезической, целиком лежащей в этом шаре.

Теорема 3. *Пусть D_ε^n, ε — указанные выше шар и число, и пусть $\gamma\colon [0,1] \to M^n$ — геодезическая длины меньше ε, соединяющая две точки из D_ε^n; пусть $\omega\colon [0,1] \to M^n$ — любой другой гладкий путь, соединяющий эти же точки (путь можно было бы брать и кусочно гладким).*

Тогда $L(\omega) \geqslant L(\gamma)$, причем равенство достигается лишь при совпадении точечных множеств $\gamma[0, 1]$ и $\omega[0, 1]$ (т. е. когда эти два пути совпадают как гладкие кривые в M^n). В этом смысле геодезическая γ — кратчайший путь, соединяющий точки P и Q.

Доказательство. Пусть P_0 — центр шара D_ε^n; как было доказано в гл. 5, гладкое отображение $\exp_{P_0} : B_\varepsilon^n \to M^n$, определенное формулой $\exp_{P_0}(\vec{a}) = \gamma_{\vec{a}}(1)$, является диффеоморфизмом. Здесь $\vec{a} \in T_{P_0}M^n$; B_ε^n — шар радиуса ε в $T_{P_0}M^n$; $\gamma_{\vec{a}}(t)$ — геодезическая в M^n такая, что $\gamma_{\vec{a}}(0) = P_0$; $\dot{\gamma}_{\vec{a}}(0) = \vec{a}$ (рис. 9). Это отображение называется *экспоненциальным.*

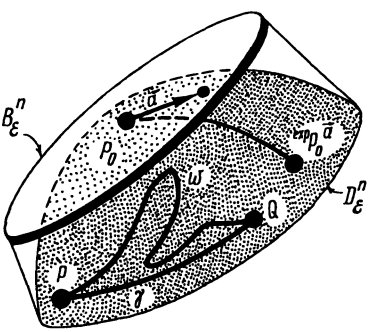


Рис. 9

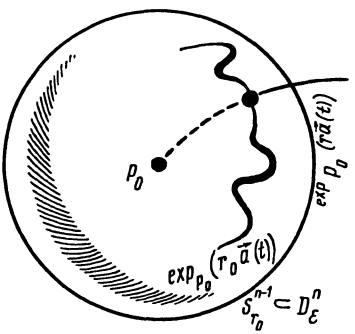


Рис. 10

Так как $T_{P_0}M^n$ снабжено индуцированным метрикой скалярным произведением, то $\exp_{P_0}$ сохраняет длины векторов, выходящих из точки 0. Докажем, что в D_ε^n геодезические, выходящие из P_0, ортогональны к гиперповерхностям $S^{n-1} = \{\exp_{P_0}(\vec{a}),\ |\vec{a}| = \text{const}\}$. В самом деле, пусть $t \to \vec{a}(t)$ — любая кривая в $T_{P_0}M^n$ такая, что $|\vec{a}(t)| = 1$. Надо проверить, что соответствующие кривые в M^n: $t \to \exp_{P_0}(r_0\vec{a}(t))$, где $0 < r_0 \leqslant \varepsilon$, ортогональны геодезическим $r \to \exp_{P_0}(r\vec{a}(t))$ (рис. 10).

Рассмотрим двумерную, параметризованную параметрами r и t поверхность

$$f(r, t) = \exp_{P_0}(r\vec{a}(t)), \quad \begin{cases} 0 \leqslant r < \varepsilon, \\ t_0 - \lambda \leqslant t \leqslant t_0 + \lambda. \end{cases}$$

Можно считать, что она является «конусом», образующей которого является кривая $f(r_0, t)$ (рис. 11). Надо доказать, что $\left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \right\rangle = 0$ в каждой точке этой поверхности, где $\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}$ и $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$ — касательные

векторы к координатной сетке на поверхности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right\rangle = \nabla_r \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right\rangle,$$

где ∇_r — ковариантная производная по переменной r. Далее

$$\nabla_r \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \nabla_r \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \nabla_r \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right\rangle.$$

Здесь $\left\langle \nabla_r \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right\rangle = 0$, так как $\nabla_r \frac{\partial \vec{f}}{\partial r} = 0$, поскольку кривые $r \to$ $\to f(r, t)$ — геодезические и $\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}$ — поле скоростей геодезической. Далее, $\left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \nabla_r \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \nabla_t \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right\rangle$, так как $\nabla_t \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial r}\right) = \nabla_r \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial t}\right)$, т. е. $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial r}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial t}\right)$ в силу коммутирования полей $\frac{\vec{\partial}}{\partial r}$ и $\frac{\vec{\partial}}{\partial t}$ (см. гл. 5, § 5). Отсюда

$$\left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \nabla_t \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right\rangle = \frac{1}{2} \nabla_t \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right\rangle = 0,$$

так как $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right|^2 = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right\rangle =$ $= \text{const}$, так как $\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}$ — вектор скорости геодезической $r \to$ $\to f(r, t)$ (см. рис. 11).

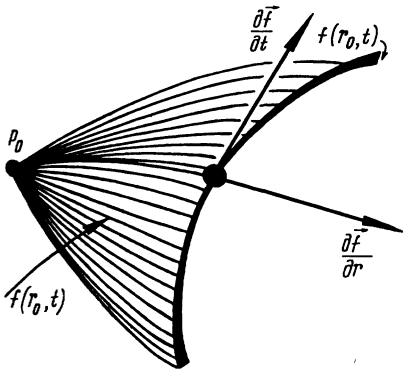


Рис. 11

Итак, функция $\left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right\rangle$ от r не зависит. Но при $r = 0$ имеем $f(0, t) = \exp_{P_0}(0) = P_0$, т. е. $\frac{\partial \vec{f}(0, t)}{\partial t} = 0$, отсюда $\left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right\rangle =$ $= 0$ уже при всех r, что и требовалось. Пусть теперь ω: $[a, b] \to$ $\to D_\varepsilon^n \setminus P_0$ — произвольная гладкая кривая. Каждая точка $\omega(t)$ однозначно записывается в виде $\exp_{P_0}(r(t) \cdot \vec{a}(t))$, где $0 < r(t) < \varepsilon$ и $|\vec{a}(t)| = 1$, $\vec{a}(t) \in T_{P_0} M^n$. Докажем, что $\int\limits_a^b |\dot{\omega}(t)|\, dt \geqslant |r(b) - r(a)|$, причем равенство достигается только в том случае, когда функция $r(t)$ монотонна, а функция $\vec{a}(t)$ постоянна. Как только мы докажем этот факт, так сразу же получим,

что кратчайшим путем, соединяющим две концентрические сферы с центром в точке P_0, служит радиальная геодезическая, (рис. 12). Напомним, что $f(r, t) = \exp_{P_0}(r \cdot \vec{a}(t))$, а потому $\omega(t) = f(r(t), t)$. Имеем $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$. Так как $\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}$ и $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$ ортогональны (см. выше) и $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right| \equiv 1$, то

$$\left|\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}\right|^2 = \left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right|^2 + \left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right|^2 \geqslant \left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right|^2,$$

причем равенство достигается лишь в том случае, когда $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right| = 0$, т. е. при $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$. Отсюда

$$\int_a^b \left|\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right| dt \geqslant \int_a^b \left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial r}\right| dt \geqslant |r(b) - r(a)|,$$

причем равенство достигается лишь в том случае, когда $r(t)$ монотонна, а $\vec{a}(t)$ постоянна. Неравенство доказано.

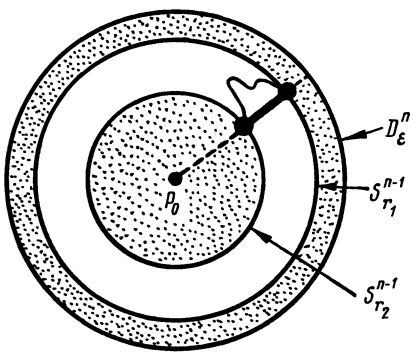


Рис. 12

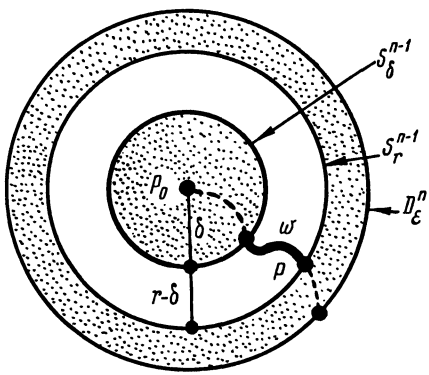


Рис. 13

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $\omega(t)$ — произвольный гладкий путь из P_0 в точку $P = \exp_{P_0}(r\vec{a}) \in D^n_\varepsilon$, где $0 < r < \varepsilon$, $|\vec{a}| = 1$. Тогда для любого $\delta > 0$ путь $\omega(t)$ должен содержать некоторый свой гладкий отрезок, идущий со сферы радиуса δ: S^{n-1}_δ на сферу радиуса r: S^{n-1}_r, (рис. 13). По доказанному выше, длина этого отрезка не меньше, чем $r - \delta$. Устремляя δ к нулю, получаем, что длина ω не меньше, чем r. С другой стороны, отрезок геодезической, идущей из P_0 в P, имеет как раз длину r. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $\omega\colon [0, \varepsilon] \to M^n$ *— гладкая траектория, параметризованная натуральным параметром, и пусть длина от* $P_0 = \omega(0)$ *до* $\omega(\varepsilon)$ *не превосходит длины любого другого пути, идущего из* P_0 *в* $\omega(\varepsilon)$. *Тогда* ω *— геодезическая.*

Доказательство. Рассмотрим любой отрезок пути, расположенный внутри шара D_ε^n, введенного выше, где P_0 — начало пути. Тогда утверждение следует из теоремы 3. □

Определение. Геодезическая $\gamma\colon [a, b] \to M^n$ называется *минимальной*, если она не длиннее никакого гладкого пути, соединяющего ее концы $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Доказанная теорема 3 утверждает, что любой, достаточно малый отрезок геодезической минимален. В то же время достаточно длинная геодезическая может не быть минимальной. Например, мы доказали ранее, что любой экватор на сфере S^2 — геодезическая. Рассмотрим его отрезок SNP, показанный на рис. 14. Ясно, что геодезическая SNP не минимальна, поскольку отрезок экватора $P\alpha S$ имеет меньшую длину, чем SNP.

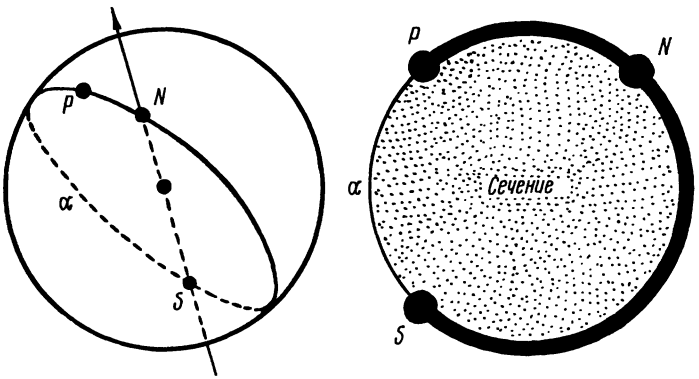


Рис. 14

Минимальная (длинная) геодезическая, соединяющая две точки P и Q, может быть неединственна. Например, северный и южный полюсы на двумерной сфере соединяются бесконечным числом минимальных геодезических — меридианов.

В качестве еще одного следствия из теоремы 3 покажем, как находятся все геодезические на n-мерной сфере S^n (n произвольно). Можно было бы, конечно, поступить по аналогии с двумерным случаем, выписав все символы Кристоффеля и проведя вычисления с уравнением геодезических, однако мы предпочтем поступить более изящным образом.

Следствие 2. *Геодезическими на сфере S^n, снабженной стандартной метрикой, являются всевозможные экваторы (т. е. плоские сечения S^n-двумерными плоскостями через ее центр) и только они.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$, пересекающую S^n по экватору γ. Пусть g — отражение в $\mathbb{R}^n$, оставляющее $\mathbb{R}^2$ на месте. Тогда возникает изометрия g: $S^n \to S^n$, множество неподвижных точек которой в точности совпадает с экватором γ. Пусть P и Q — две достаточно близкие точки на γ, которые соединяются единственной минимальной геодезической (см. теорему 3) ω. Так как g — изометрия, то кривая $g(\omega)$, проходящая через те же точки P и Q, также геодезическая, соединяющая P и Q; следовательно $\omega = g(\omega)$, т. е. $\omega = \gamma$ — геодезическая. То, что никаких других геодезических нет, доказывается так же, как и в двумерном случае: через любую точку сферы S^n в любом направлении проходит экватор. Следствие доказано. □

Проводя точно такие же рассуждения, можно доказать, что на поверхности вращения любой меридиан является геодезической.

Рассмотрим произвольное риманово компактное многообразие, и пусть P и Q — две произвольные точки; обозначим через $\Omega(P, Q)$ пространство всех гладких кривых γ, соединяющих P и Q, т. е. $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$. На этом пространстве определены два функционала: E и L (см. выше). Определим расстояние $\rho(P, Q)$ между точками P и Q как нижнюю грань длин гладких кривых, соединяющих эти точки.

Предложение 1. *Пусть P и Q — две достаточно близкие точки многообразия, находящиеся на расстоянии d друг от друга. Тогда функционал действия E: $\Omega(P, Q) \to \mathbb{R}$ достигает абсолютного минимума d^2 в точности на минимальной геодезической, соединяющей точки P и Q.*

Замечание. Так как локально минимальная геодезическая единственна (см. выше), то она является изолированной точкой абсолютного минимума: на любой гладкой кривой, достаточно близкой к минимальной геодезической (близкой поточечно и близкой в смысле поля скоростей), значение функционала E строго больше, чем значение на минимальной геодезической.

Доказательство. Пусть γ — минимальная геодезическая, $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$. В силу леммы 1 $E(\gamma) = L^2(\gamma) \leqslant L^2(\omega) \leqslant E(\omega)$, где ω — гладкая кривая из P в Q. Равенство $L^2(\omega) = L^2(\gamma)$ имеет место в том и только том случае, когда ω — также минимальная

геодезическая (возможно, иначе параметризованная, с точностью до масштабного преобразования). В то же время, равенство $L^2(\omega) = E(\omega)$ достигается, только если параметр пропорционален длине дуги. Отсюда $E(\gamma) < E(\omega)$ во всех тех случаях, когда ω не является минимальной геодезической. Предложение доказано. □

§ 3. Минимальные поверхности

В гл. 4 мы познакомились с минимальными двумерными поверхностями, т. е. с такими M^2, для которых средняя кривизна H равна нулю. Посмотрим теперь на минимальные поверхности с точки зрения экстремальных функций функционала площади.

Рассмотрим функционал $(n-1)$-мерного объема, определенный на компактных гиперповерхностях, являющихся графиками гладких функций $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$ с областью определения D, вложенной в $\mathbb{R}^{n-1}(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Мы считаем, что D имеет гладкую границу ∂D и ограничена (рис. 15). Из гл. 5

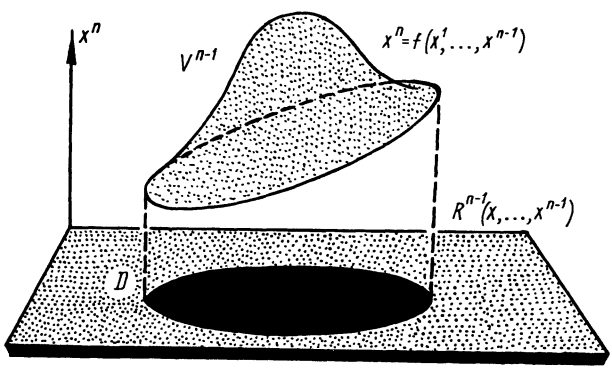


Рис. 15

мы уже знаем, что $(n-1)$-мерный объем гиперповерхности $V^{n-1} = \{x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})\}$ записывается так:

$$\operatorname{vol}(V^{n-1}) = \int\limits_D \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}\, dx^1 \ldots dx^{n-1},$$

где $f_{x^i} = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$. Так как лагранжиан L имеет вид

$$L(f_{x^1}, \ldots, f_{x^{n-1}}) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2},$$

то уравнение Эйлера имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2\right)^{-1/2}\right)=0.$$

Это одно дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет экстремальная функция $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Теперь рассмотрим произвольную $(n-1)$-мерную гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, являющуюся экстремальной для функционала $(n-1)$-мерного объема. Поскольку объем является скаляром, не зависящим от выбора координат на поверхности, то мы можем выбрать удобные для нас координаты. Пусть V^{n-1} — экстремальная поверхность. $P \in V^{n-1}$ — произвольная точка; положим $\mathbb{R}^{n-1}(x^1, \ldots, x^{n-1}) = T_P V^{n-1}$, т. е. в качестве координатной плоскости выберем касательную плоскость с декартовыми координатами; запишем локально V^{n-1} в виде графика функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$.

Теорема 1. *Гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ экстремальна для функционала $(n-1)$-мерного объема тогда и только тогда, когда ее средняя кривизна H тождественно равна нулю.*

Доказательство. Проведем вычисления для случая $n=3$, так как вычисления для любого n аналогичны. Для $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)=0.$$

Дифференцируя, получаем:

$$f_{xx}+f_{xx}f_x^2+f_{xx}f_y^2-f_x^2f_{xx}-f_xf_yf_{xy}+f_{yy}+ \\ +f_{yy}f_x^2+f_{yy}f_y^2-f_xf_yf_{xy}-f_y^2f_{yy}=0,$$

т. е.

$$f_{xx}(1+f_y^2)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(1+f_x^2)=0.$$

В силу гл. 4, это уравнение совпадает с уравнением $H \equiv 0$.

Итак, минимальные поверхности можно определять как поверхности, задаваемые экстремальными радиус-векторам.

Рассмотрим поверхности M^2 в $\mathbb{R}^3$, отнесенные к (u, v), т. е. $\vec{r}(u, v) = (x(u, v); y(u, v); z(u, v))$. Тогда функционал площади запишется так (см. гл. 5): $S[\vec{r}] = \int\limits_{D(u,v)} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$. Пусть (u, v) — конформные параметры, т. е. в них метрика на M^2 имеет вид

$$E = G = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle = \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle, \quad F = 0.$$

Тогда

$$S[\vec{r}] = \int\limits_D (\langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle)^{1/2}\, du\, dv.$$

Уравнения Эйлера таковы:

$$\frac{\partial}{\partial u}(2x_u) + \frac{\partial}{\partial v}(2x_v) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}(2y_u) + \frac{\partial}{\partial v}(2y_v) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(2z_u) + \frac{\partial}{\partial v}(2z_v) = 0,$$

т. е. $\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\vec{r}(u, v) = 0$. Итак $\vec{r}$ — гармонический (относительно координат (u, v)) радиус-вектор. Пояснение:

$$L(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = \sqrt{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)}$$

и при варьировании все частные производные рассматриваются как независимые. □

Поступая по аналогии с одномерным случаем, рассмотрим бесконечномерное пространство F гладких отображений $D^2(u, v)$ в $\mathbb{R}^3$. На F определен нелинейный функционал площади $S[\vec{r}]$; его экстремальные «точки» (т. е. радиус-векторы $\vec{r}(u, v)$) описывает

Теорема 2. *Экстремальными векторами $\vec{r}(u, v)$ для $S[\vec{r}]$ являются те и только те векторы, для которых средняя кривизна H равна нулю.*

Это вытекает из теоремы 1. Теперь рассмотрим наряду с $S[\vec{r}]$ еще один функционал (Дирихле): $D[\vec{r}] = \frac{1}{2}\int\limits_{D(u, v)} (E + G)\, du\, dv$. Сравним экстремальные «точки» функционалов D и S.

Теорема 3. *Экстремальными векторами $\vec{r}(u, v)$ для функционала Дирихле являются те и только те векторы, которые гармонические относительно (u, v), т. е. $\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\vec{r}(u, v) = 0$.*

Доказательство. Уравнения Эйлера имеют вид $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_v}\right) = 0$, где $L = E + G = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle + \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle$, т. е. $L = x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 + z_u^2 + z_v^2$, т. е. $\Delta(\vec{r}) = 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$. Теорема доказана. □

Координаты (u, v) могут быть гармоническими для некоторого гармонического радиус-вектора, но не быть конформными для индуцированной метрики на поверхности, заметаемой этим вектором. Рассмотрим теперь специальные гармонические поверхности,

на которых гармонические координаты являются в то же время и конформными, т. е. $E = G$, $F = 0$. Тогда эти поверхности минимальны. Итак, некоторые экстремальные «точки» функционала Дирихле порождают экстремальные «точки» функционала площади: из каждой «гармонической точки», отнесенной к конформным координатам, «вырастает» целое семейство минимальных радиус-векторов, если подвергнуть исходные параметры гармонического вектора произвольной регулярной замене координат. В этом можно усмотреть аналогию с взаимодействием экстремальных «точек» функционалов длины и действия в одномерной вариационной задаче — на пространстве гладких траекторий. Не каждый гармонический вектор порождает минимальную поверхность. Между D и S имеется соотношение $D[\vec{r}] \geqslant S[\vec{r}]$, справедливое для любого радиус-вектора, причем равенство достигается в том и только том случае, когда $E = G$, $F = 0$, т. е. координатная сетка ортогональна и координаты (u, v) конформны. Доказательство следует из очевидного неравенства $\frac{E+G}{2} \geqslant \sqrt{EG - F^2}$, которое превращается в равенство тогда и только тогда, когда $F = 0$, $E = G$.

Пока доказано только то, что минимальные поверхности — экстремали функционала площади; мы не обосновали выбора термина «минимальные поверхности». Для одномерного случая такое обоснование было дано: мы доказали, что геодезические — локально минимальные траектории. Оказывается, такое же утверждение имеет место и для экстремалей функционала площади: минимальные поверхности обладают тем свойством, что если рассмотреть произвольное возмущение $\vec{\eta}$ минимального радиус-вектора $\vec{r}$ с малым носителем (т. е. возмущение отлично от нуля только в малой области), то площадь «возмущенной поверхности» $\vec{r} + \vec{\eta}$ будет не меньше, чем площадь исходной поверхности. Для доказательства потребуется дополнительный анализ, так как равенство нулю первой вариации отнюдь не гарантирует локальной минимальности экстремальной «точки» в пространстве всех радиус-векторов. Даже для обычной функции одного аргумента равенство нулю первой производной еще не позволяет различать точки минимума, максимума, перегиба. Так, в случае геодезических мы были вынуждены предпринять довольно тонкий анализ локальных свойств функционалов длины и действия пути. Причем это были рассмотрения «второго порядка», в точности так, как для обычных функций одного аргумента выяснение локального поведения функции около критической точки требует изучения второго дифференциала. При изучении локальной минимальности геодезических мы изучали фактически так называемую «вторую вариацию» функционала действия

(или длины) — аналог второго дифференциала. Следовательно, и в случае экстремалей функционала площади надо изучить «вторую производную» функционала. Мы не будем углубляться в довольно тонкие вопросы, связанные с теорией второй вариации, а воспользуемся более простым (но зато более специальным и не столь универсальным) приемом.

Рассмотрим минимальную поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ (для произвольного n рассуждения аналогичны), $P \in M^2$; зададим M^2 в малой окрестности P в виде графика гладкой функции $z = f(x, y)$, где декартовы координаты (x, y) меняются в касательной плоскости к M^2 в точке P. Докажем, что любое достаточно малое возмущение (с малым носителем) поверхности M^2 не уменьшает площади. Итак, в $\mathbb{R}^3$ задан график $z = f(x, y)$, определенный над некоторой областью D в плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$; поверхность — минимальна, т. е. $H = 0$; мы рассматриваем возмущение графика, равное нулю на границе D. Требуется доказать, что $S[f] \leqslant S[f + \eta]$ (рис. 16).

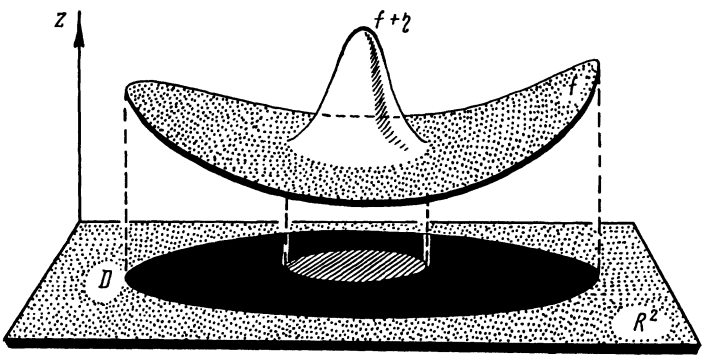


Рис. 16

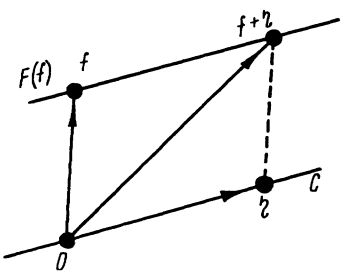


Рис. 17

Рассмотрим пространство $F(f)$ всех гладких функций $f + \eta$, определенных на D, и таких, что $\eta|_{\partial D} = 0$. Это линейное пространство зависит от выбора функции f. Пространство $F(f)$ получается из линейного пространства C, состоящего из гладких функций η, равных нулю на границе области, т. е. из «возмущений» функции f путем сдвига на функцию f (рис. 17). Рассмотрим ограничение функционала S на $F(f)$.

Функционал S на этом пространстве сопоставляет каждой $f+\eta$ площадь ее графика. Докажем, что этот функционал является выпуклым вниз, т. е. $S[\alpha r+\beta g]\leqslant \alpha S[r]+\beta S[g]$, где $\alpha+\beta=1$; $r, g\in F(f)$, т. е. $r=f+\eta_1$; $g=f+\eta_2$, где $\eta_i|_{\partial D}=0$, $i=1,2$. Отметим, что $\alpha r+\beta g\in F(f)$, так как

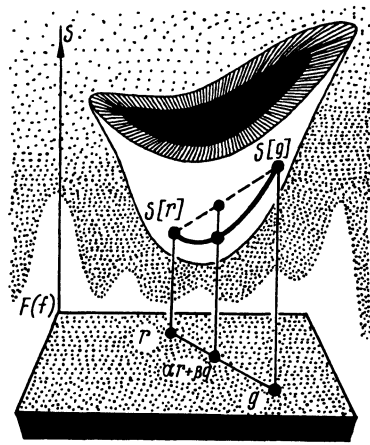


Рис. 18

$$(\alpha r+\beta g)|_{\partial D}=\alpha r|_{\partial D}+(1-\alpha)g|_{\partial D}=\alpha f|_{\partial D}+(1-\alpha)f|_{\partial D}=f|_{\partial D},$$

т. е. $\alpha r+\beta g=f+\eta_3$, где $\eta_3|_{\partial D}=0$. Определение выпуклого вниз функционала копирует аналогичное определение для обычных функций; если условно изобразить график выпуклого вниз функционала, то картина будет такой, как это показано на рис. 18.

Итак, достаточно проверить, что

$$\sqrt{1+(\alpha r_x+\beta g_x)^2+(\alpha r_y+\beta g_y)^2}\leqslant \alpha\sqrt{1+r_x^2+r_y^2}+\beta\sqrt{1+g_x^2+g_y^2},$$

т. е. после возведения в квадрат:

$$1+2\alpha\beta(r_xg_x+r_yg_y)\leqslant \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\sqrt{(1+r_x^2+r_y^2)(1+g_x^2+g_y^2)};$$

так как $1-\alpha^2-\beta^2=2\alpha\beta$, то

$$1+r_xg_x+r_yg_y\leqslant\sqrt{(1+r_x^2+r_y^2)(1+g_x^2+g_y^2)};$$

или $\langle\vec a,\vec b\rangle\leqslant|\vec a||\vec b|$, где

$$\vec a=(r_x, r_y, -1)=\operatorname{grad}(r(x, y)-z),$$
$$\vec b=(g_x, g_y, -1)=\operatorname{grad}(g(x, y)-z).$$

Неравенство $\langle\vec a,\vec b\rangle\leqslant|\vec a||\vec b|$ — очевидно. Итак, выпуклость вниз S на $F(f)$ установлена. Отсюда уже следует, что любая экстремальная «точка» в пространстве $F(f)$ для функционала S является минимумом; в частности, для всех точек r, расположенных в окрестности экстремальной точки $g\in F(f)$, выполнено соотношение $S[r]\geqslant S[g]$. Так как точка $f\in F(f)$ является экстремальной, то $S[f]\leqslant S[f+\eta]$, $\eta|_{\partial D}=0$. Итак, доказана

Теорема 4. *Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — произвольная минимальная поверхность. Тогда она локально минимальна, т. е. любое гладкое, достаточно малое ее возмущение с достаточно малым носителем не уменьшает площади поверхности.*

Совершенно аналогично доказывается теорема о локальной минимальности экстремальных решений функционала $(n-1)$-мерного объема в $\mathbb{R}^n$.

§ 4. Вариационное исчисление и симплектическая геометрия

Пусть T_*M^n — касательный пучок многообразия M^n, т. е. $2n$-мерное гладкое многообразие, точками которого являются пары $\{(x, \vec{a})\}$, где $x \in M^n$, $\vec{a} \in T_xM^n$. Пусть $P, Q \in M^n$ и $\Omega(P, Q)$ — пространство всех гладких кривых, соединяющих P и Q. Пусть на M^n введены локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$, в которых траектории записываются в виде $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, $x(0) = P$, $x(1) = Q$; $\dot{x}(t)$ — вектор скорости. Рассмотрим функционал $I[\gamma] = \int\limits_0^1 L(x, \dot{x})\, dt$, где L — гладкая функция от двух групп переменных: $(x, \dot{x}) = \vec{a}$, т. е. $L(x, \vec{a})$ — функция на T_*M^n.

Определение. *Импульсом* $p = (p_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, называется ковектор со следующими компонентами (в данной системе координат): $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$. *Энергией* E называется функция $E(x, \dot{x}) = \dot{x}^i p_i - L(x, \dot{x})$.

Энергию можно рассматривать как функцию на T_*M^n, т. е. $E(x, \vec{a}) = a^i p_i - L(x, \vec{a})$. Важный пример L: $L(x, \dot{x}) = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$; отсюда $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 2g_{ij}\dot{x}^j$, т. е. p — ковектор, двойственный относительно метрики g_{ij} вектору скорости $\vec{a} = \dot{x}$. Энергия E имеет вид:

$$E(x, \dot{x}) = \dot{x}^i 2g_{ij}\dot{x}^j - g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

т. е. является «кинетической энергией».

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа Ли, гладко действующая на $M^n(x^1, \ldots, x^n)$ (т. е. каждый элемент $g \in \mathfrak{G}$ представлен диффеоморфизмом M^n); будем рассматривать в основном следующий пример: $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^1$ — вещественная прямая (группа по сложению). Это действие (для $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^1$) порождает на M^n векторное поле: $\vec{X}(x_0) = \dfrac{d}{dt} g_t(x_0)|_{t=0}$, где орбита $\mathfrak{G}(x_0) = g_t(x_0)$; $g_0(x_0) = x_0$. Действие $\mathfrak{G}$ на M^n порождает действие $\mathfrak{G}$ на T_*M^n по формуле g_*: $(x, \vec{a}) \to (g(x), dg_x(\vec{a}))$.

Определение. Говорят, что лагранжиан $L(x, \vec{a})$ *сохраняется при действии* $\mathfrak{G}$ (*инвариантен относительно* $\mathfrak{G}$), если при действии $\mathfrak{G}$ на T_*M^n функция $L(x, \vec{a})$ переходит в себя, т. е.

$$L(g(x); dg_x(\vec{a})) \equiv L(x, \vec{a}), \quad (x, \vec{a}) \in T_*M^n.$$

Найдем аналитические условия инвариантности L. Условие его сохранения имеет вид: $\frac{dL}{dt} = 0$, где t — время вдоль траектории $g_t(x)$. Дифференцируя сложную функцию, получаем

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial a^i}\frac{da^i}{dt}, \quad \frac{dx^i}{dt} = X^i(x)$$

(см. выше). Найдем $\frac{da^i}{dt}$. Рассмотрим $\vec{a}$ и касательную траекторию $\varphi(\tau) = (x^i(\tau))$ такую, что $a^i = \left.\frac{dx^i}{d\tau}\right|_{\tau=0}$. При малом смещении на Δt вдоль $g_t(x)$ функции x^i переходят в функции $x^i + X^i\Delta t$ (мы пренебрегаем малыми порядка выше первого). Отсюда

$$\frac{dx^i}{d\tau} \to \frac{dx^i}{d\tau} + \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\Delta t\frac{dx^k}{d\tau}, \quad \text{т. е. } a^i \to a^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^k}a^k\,\delta t, \quad \text{т. е. } \frac{da^i}{dt} = \frac{\partial X^i}{\partial x^k}a^k.$$

Далее

$$g_{\Delta t}(x^i) = \{x^i + X^i\Delta t + \ldots\},$$
$$\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{\Delta t}(x^i)) = \frac{\partial}{\partial x^k}(x^i + X^i\Delta t + \ldots) \cong \left(\delta^i_k + \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\Delta t\right) = J^i_k,$$

$J = (J^i_k)$ — матрица Якоби. Отсюда

$$a^j \to J^j_k a^k = a^j + \frac{\partial X^j}{\partial x^k}a^k\Delta t.$$

Итак,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i}X^i + \frac{\partial L}{\partial a^i}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}a^k \equiv 0,$$

где $(x, \vec{a})$ — независимые аргументы. Мы доказали

Утверждение 1. *Аналитическое условие сохранения лагранжиана* $L(x, \vec{a})$ *группой* $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^1$ *имеет вид*

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}X^i + \frac{\partial L}{\partial a^i}\cdot\frac{\partial X^i}{\partial x^k}a^k = 0,$$

где $(x, \vec{a})$ — *независимые аргументы, а* $\vec{X}$ — *векторное поле скоростей действия групп* $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^1$.

Выведем так называемый закон сохранения проекции импульса вдоль экстремалей функционала $J[\gamma]$. Рассмотрим $\int_0^1 L(x, \dot{x})\,dt = J[\gamma]$, и пусть γ_0 — экстремаль $J[\gamma]$, т. е. решение системы уравнений Эйлера $\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0$, где через τ обозначено время вдоль экстремали. Если точкой обозначить дифференцирование по параметру τ (вдоль экстремали), то уравнения Эйлера переписываются так: $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \dot{p}_i$, где p — импульс. Рассмотрим свертку $f(\tau) = (p, \vec{X}) = X^i p_i$, где $f(\tau)$ — гладкая функция вдоль $\gamma_0(\tau)$. Здесь $f(\tau)$ можно понимать как значение ковектора p на векторе $\vec{X}$: $f(\tau) = p(\vec{X})$.

Теорема 1. *Имеет место тождество* $(f(\tau))^{\cdot} \equiv 0$, *т. е.* $(p, \vec{X})^{\cdot} \equiv 0$.

Доказательство. Из утверждения 1, имеем

$$(X^i p_i)^{\cdot} = \dot{X}^i p_i + X^i \dot{p}_i = X^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial L}{\partial \alpha^i}\frac{dx^k}{d\tau} = \\ = \frac{\partial L}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial L}{\partial a^k} a^k = 0,$$

что и требовалось. Теорема доказана. □

Рассмотрим наш модельный пример: $L(x, \dot{x}) = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$. Тогда $p_i = 2g_{ij}\dot{x}^j$, т. е. $X^i p_i = 2g_{ij}X^i\dot{x}^j = 2\langle \vec{X}, \dot{\gamma}_0\rangle = \text{const}$ вдоль $\gamma_0(\tau)$. Для этого лагранжиана экстремали являются геодезическими (см. § 2); в частности $|\dot{\gamma}_0| = \text{const}$ вдоль $\gamma_0(\tau)$; отсюда $|\vec{X}| \cos\alpha(\tau) = \text{const}$, где $\alpha(\tau)$ — угол между векторами $\vec{X}$ и $\dot{\gamma}_0$ (измеренный в метрике g_{ij}).

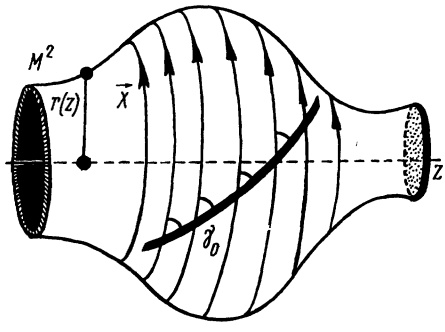


Рис. 19

Применим этот результат к задаче нахождения геодезических на поверхности вращения M^2 в $\mathbb{R}^3$. Пусть $r(z)$ — гладкая функция, являющаяся образующей поверхности вращения, т. е. кривая $y = r(z)$ вращается вокруг оси Oz (рис. 19). Пусть ω — постоянная скорость вращения; тогда на M^2 возникает действие $r\omega t$ группы $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^1$. Тогда поле $\vec{X}$ скоростей этого действия имеет

модуль $|\vec{X}| = r\omega$. В силу доказанного выше для любой геодезической $\gamma_0(\tau)$ на M^2 выполняется тождество $r(z)\cos\alpha(z) = c = \text{const}$. Итак, доказано

Утверждение 2. *На поверхности вращения $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ с образующей $r(z)$ вдоль любой геодезической $\gamma_0(\tau)$ на M^2 выполняется тождество $r(z)\cos\alpha(z) = \text{const}$.*

Рассмотрим примеры. Пусть $r(z) = \text{const}$; тогда соответствующая поверхность вращения является цилиндром и геодезические на нем являются образами прямых после свертки евклидовой плоскости в цилиндр (рис. 20).

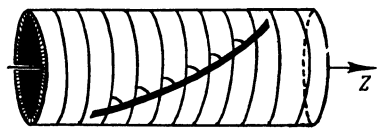


Рис. 20

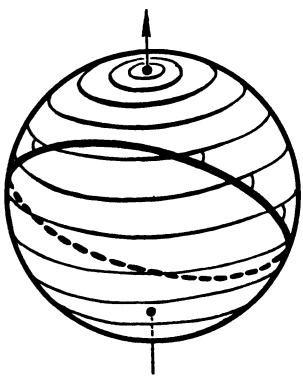


Рис. 21

Пусть $r(z)$ определяет S^2 (рис. 21). Геодезические экваторы (угол — переменный).

Условие $r(z)\cos\alpha(z) = \text{const}$ — необходимое условие геодезичности траектории, но не достаточное. (Приведите пример.) В самом деле, если $\gamma(\tau)$ — орбита действия группы $\mathfrak{G}$, то $\alpha(\tau) = 0$, т. е. $(p, \vec{X}) = |\vec{X}|\ |p| = \text{const}$ (на поверхности вращения), однако далеко не всегда является геодезической. Рассмотрим, например, прямой круговой конус и его вращения вокруг оси (рис. 22). Как мы уже знаем, все геодезические на конусе являются образами прямых

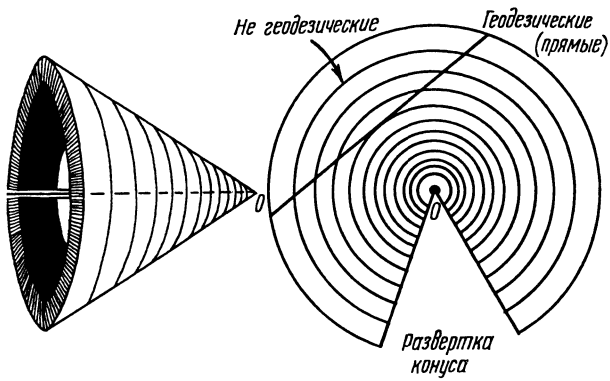


Рис. 22

при сворачивании куска евклидовой плоскости в конус; окружности, очевидно, не геодезические на конусе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку $\frac{dL}{dt} \equiv 0$ вдоль орбит действия $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^1$ (для инвариантного лагранжиана), то локально можно пустить вдоль орбит $\mathfrak{G}(x)$ координату x^n; тогда $(p, \vec{X}) \equiv 0$, что эквивалентно: $p_n = 0$, где p_n — проекция импульса по координате x^n; иными словами, в этом случае можно считать, что импульс p не зависит от координаты x^n; функция L, кстати, тоже не зависит от этой координаты.

Докажем так называемый закон сохранения энергии вдоль экстремалей. Пусть $L(x, \vec{a})$ — лагранжиан (уже не обязательно инвариантный относительно действия какой-либо группы) и пусть $\gamma_0(\tau)$ — экстремаль функционала $J[\gamma] = \int L(x, \dot{x})\, d\tau$. Рассмотрим энергию $E = \dot{x}^i p_i - L$; $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$, пусть $L = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - U(x)$, где функция $U(x)$ называется потенциалом.

Теорема 2. *Вдоль экстремалей $\gamma_0(\tau)$ функционала $J[\gamma]$ имеет место тождество:* $\frac{dE}{d\tau} \equiv 0$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{dE}{d\tau} = (p_i\dot{x}^i - L)_\tau = (p_i a^i - L)^{\cdot} =$$
$$= \dot{p}_i a^i + p_i \dot{a}^i - \frac{\partial L}{\partial x^i}\dot{x}^i - \frac{\partial L}{\partial a^i}\dot{a}^i = \frac{\partial L}{\partial x^i}a^i + \frac{\partial L}{\partial a^i}\dot{a}^i - \frac{\partial L}{\partial x^i}a^i - \frac{\partial L}{\partial a^i}\dot{a}^i \equiv 0.$$

так как $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}$ в силу уравнений Эйлера, $p_i = \frac{\partial L}{\partial a^i}$ по определению. Теорема доказана. □

Перейдем к изучению простейших понятий гамильтоновой механики на многообразиях.

Пусть T_*M^n — касательный пучок многообразия, снабженный координатами $(x, \vec{a})$, L — лагранжиан на T_*M^n.

Определение. Лагранжиан $L(x, \vec{a})$ называется *невырожденным*, если уравнение

$$\vec{p} = \frac{\partial L(x, \vec{a})}{\partial \vec{a}} \qquad \left(\text{т. е. } p_i = \frac{\partial L(x, \vec{a})}{\partial a^i},\ 1 \leqslant i \leqslant n\right)$$

имеет для любого $x \in M^n$ единственное решение $\vec{a} = \vec{a}(x, p)$.

Рассмотрим наряду с T_*M^n также кокасательный пучок T^*M^n, т. е. $2n$-мерное гладкое многообразие, точками которого являются пары (x, p), где $p \in T_x^*M^n$, т. е. p — ковектор. Рассмотрим энергию

$$E(x, \vec{a}) = p_i a^i - L(x, \vec{a}) = \frac{\partial L(x, \vec{a})}{\partial a^i}a^i - L.$$

Здесь $p = p(x, \vec{a})$. Выразим $\vec{a} = \vec{a}(x, p)$ и подставим в E; получим $E \to E(x, \vec{a}(x, p))$. Мы получили некоторую функцию $E(x, \vec{a}(x, p)) = H(x, p)$, называемую *гамильтонианом*. Она имеет вид $H = p_i a^i(x, p) - L(x, \vec{a}(x, p))$, т. е. $L(x, \vec{a}(x, p)) = p_i a^i(x, p) - H(x, p)$. Пусть $\gamma(t) \subset M^n$ — гладкая траектория; тогда $(x, \dot{x}) \in T_*M^n$, где $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $x = x(t)$, т. е. $\gamma(t)$ порождает траекторию на T_*M^n: $(x(t), \dot{x}(t)) = \Gamma(t)$. Рассмотрим лагранжиан $L(x, \vec{a})$ на траекториях T_*M^n, причем на всех траекториях, а не только на траекториях вида $\Gamma(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ (не каждая кривая на T_*M^n имеет такой вид).

Отметим, что T_*M^n и T^*M^n диффеоморфны. В самом деле, пусть на M^n задана метрика g_{ij}; тогда существует инвариантно определенное отождествление φ: $T_*M^n \to T^*M^n$; $\varphi(\{x^i\}, \{a^\alpha\}) = (\{x^i\}, \{g_{\beta\alpha} a^\alpha\}) \in T^*M^n$. Наряду с этим отождествлением T_*M^n и T^*M^n мы имеем еще и другое отождествление, возникающее при задании невырожденного лагранжиана $L(x, \vec{a})$. В самом деле, уравнение $p = \frac{\partial L(x, \vec{a})}{\partial \vec{a}}$ имеет единственное решение (при фиксированном x) $\vec{a} = \vec{a}(x, p)$, а потому можем сопоставить каждой паре $(x, \vec{a})$ пару (x, p), где $p = \frac{\partial L(x, \vec{a})}{\partial \vec{a}}$. Рассмотрим именно это отождествление T_*M^n и T^*M^n, являющееся диффеоморфизмом. В частном случае, когда $L(x, \vec{a}) = g_{ij} a^i a^j$, имеем $p_i = 2g_{ik} a^k$, т. е. отождествление с помощью такого лагранжиана совпадает с «римановым отождествлением» (см. выше) (рис. 23).

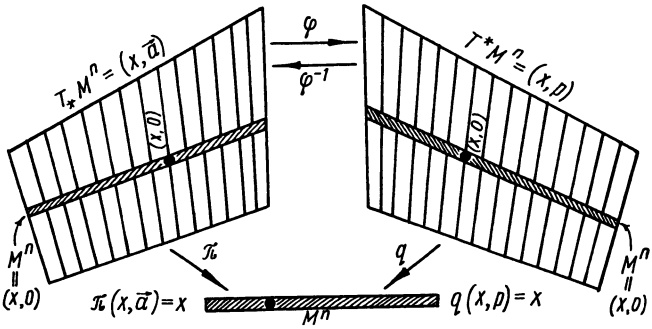


Рис. 23

Рассмотрим вариационную задачу на нахождение экстремалей функционала $I[\alpha] = \int_R^S L(x(t), \vec{a}(t))dt$, где $L(x, \vec{a})$ рассматривается на всех гладких траекториях $\alpha(t)$ в T_*M^n, а точки R и S — две фиксированные точки на T_*M^n, т. е. $R(x_0, \vec{a}_0)$, $S(y_0, \vec{b}_0)$ (рис. 24).

Рассмотрим уравнения Эйлера для этого функционала. Будем рассматривать вариации, при которых точки R и S не смещаются.

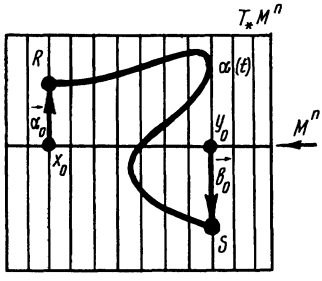


Рис. 24

Уравнения Эйлера на T_*M^n имеют вид $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial a^i}\right)$. Запишем их в терминах T^*M^n, т. е. сделаем замену $(x, p) \to (x, \vec{a})$ с помощью описанного выше диффеоморфизма, построенного по лагранжиану L. Имеем

$$L(x, \vec{a}(x, p)) = p_i a^i(x, p) - H(x, p);$$
$$p_i = \frac{\partial}{\partial a^i} L(x, \vec{a}(x, p)).$$

Отметим, что $\frac{\partial}{\partial p_i} L(x, \vec{a}(x, p)) = 0$, так как импульс p явно не входит в $L(x, \vec{a})$, а при работе с уравнениями Эйлера вариации берутся только по явно входящим в лагранжиан функциям. Итак

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_i} L(x, \vec{a}(x, p)) = a^i(x, p) - \frac{\partial}{\partial p_i} H(x, p)$$

$\left(\text{при этом } L(x, \vec{a}(x, p)) = \left(\frac{\partial}{\partial a^i} L(x, \vec{a}(x, p))\right) a^i(x, p) - H(x, p)\right)$, т. е. $a^i(x, p) = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}$. Отсюда

$$\int_A^B L(x, \vec{a}(x, p))dt = \int_A^B [p_i a^i(x, p) - H(x, p)]dt =$$
$$= \int_A^B \left[p_i \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i} - H(x, p)\right] dt = J[\omega(t)],$$

где $\omega(t) \in T^*M^n$, $\omega(t) = (x(t), p(t))$; $\omega(0) = A$, $\omega(1) = B$ (рис. 25).

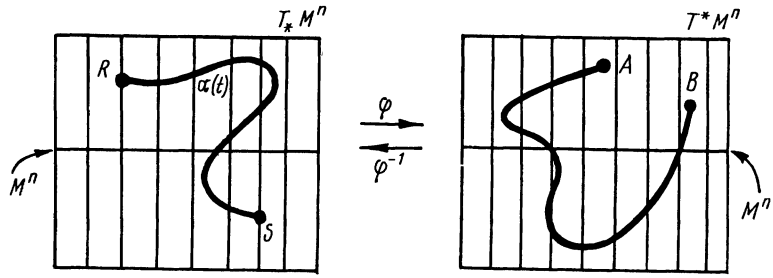


Рис. 25

Запишем теперь уравнения Эйлера для функционала $J[\omega(t)]$ на T^*M^n. Пусть $\omega_0(t)=(x(t), p(t))$ — экстремаль функционала $J[\omega(t)]$. Выше было установлено, что $a^\alpha=\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_\alpha}$, но так как $a^\alpha=\dot{x}^\alpha$ (вдоль экстремали), то $\dot{x}^\alpha=\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_\alpha}$ (вдоль экстремали). Далее

$$J[\omega]=\int_A^B (p_i a^i-H)dt=\int_A^B L(x,\vec{a}(x,p))dt.$$

Уравнения Эйлера приобретают вид $\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial a^i}\right)$, но так как $\frac{\partial L}{\partial a^i}=p_i$, то $\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial x^i}$. Далее $\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}(a^i p_i-H(x,p))=-\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}$, так как $\frac{\partial}{\partial x^i}(a^i p_i)=0$. В доказательстве равенства $\frac{\partial}{\partial x^i}(a^i p_i)=0$ мы пользуемся тем, что в паре $(x,\vec{a})$ координаты x и $\vec{a}$ рассматриваются как независимые координаты, а потому $\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}=0$; далее, вариация по x^i должна выполняться только по явному вхождению переменной x^i в сумму $a^i p_i$, а так как эта переменная явно не входит, то $\frac{\partial}{\partial x^i}(a^i p_i)=0$, что и требовалось. Отсюда $\dot{p}_i=-\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}$. Итак, нами доказана важная

Теорема 3. *В координатах (x,p) на кокасательном пучке T^*M^n уравнения Эйлера для функционала $J[\omega]=\int_A^B L(x,\vec{a}(x,p))dt$ записываются в так называемой «гамильтоновой форме»*

$$\dot{x}^i=\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}\quad (\textit{уравнения Гамильтона}).$$

Сделаем дополнение к вопросу о неявном вхождении переменной x^i в сумму $a^i p_i$. Например, если $L=g_{ij}a^i a^j$, то a^i выражается только через импульс p (т. е. без явного вхождения x): $p_i=\frac{\partial L}{\partial a^i}=2g_{ij}a^j$; отсюда $a^\alpha=\frac{1}{2}g^{\alpha k}p_k$. Конечно, функции $g^{\alpha k}=g^{\alpha k}(x)$ зависят от x, однако переменная x не входит тем не менее явно в a^α, а потому варьирование по ней не производится.

Изучим уравнения Гамильтона на T^*M^n. Они определяют на T^*M^n гладкое векторное поле, отнесенное к координатам (x^i,p_j), $1\leqslant i,j\leqslant n$. Это — поток специального вида; не каждое векторное поле на T^*M^n можно представить в виде $\dot{x}^i=\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i=-\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}$. Это поле тесно связано с полем $\operatorname{grad} H$, которое является ковекторным полем на M^n. В самом деле, рассмотрим на M^n

внешнюю дифференциальную форму степени два $\omega^{(2)} = dp_i \wedge dx^i$, отнесенную к указанным локальным координатам; эта форма задается в каждой точке (x, p) кососимметрической матрицей

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ \hline & & \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

а потому определяет кососимметрическое, невырожденное скалярное произведение в $T_{(x,p)}(T^*M^n)$ и в $T^*_{(x,p)}(T^*M^n)$. Это скалярное произведение задает, следовательно, отождествление касательного и кокасательного пространств $T_{(x,p)}(T^*M^n)$, $T^*_{(x,p)}(T^*M^n)$ в каждой точке. Рассмотрим поток $\operatorname{grad} H(x, p)$, имеющий координаты $\left(\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}; \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}\right)$; тогда поток, двойственный к нему относительно этого скалярного произведения, имеет вид $\left(\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}; -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}\right)$, т. е. совпадает с гамильтоновым потоком, полученным нами в теореме 3. Итак, гамильтоново поле можно определить как поток, двойственный относительно внешней 2-формы к градиенту функции $H(x, p)$, заданной на T^*M^n ($H(x, p)$ — гамильтониан). Будем теперь считать, что M^n — риманово многообразие, а потому T^*M^n и T_*M^n можно считать канонически отождествленными; в частности, мы не будем различать векторы и ковекторы и будем все индексы у координат писать наверху.

Дальнейший материал не предполагает знакомства с предыдущим анализом, выполненным нами для функционала $J[\omega]$; на этот материал можно смотреть как на обоснование важности гамильтоновых потоков в римановой геометрии.

Рассмотрим четномерное риманово многообразие M^{2n}; в предыдущем примере в качестве M^{2n} фигурировало многообразие $T^*M^n \cong T_*M^n$; пусть $\omega^{(2)} = \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ — невырожденная внешняя 2-форма на M^{2n}, задающая кососимметрическое скалярное произведение. Если на M^{2n} задано такое произведение, то для любой гладкой функции $f(x)$ на M^{2n} можно определить понятие «кососимметрического градиента» $\operatorname{sgrad} f(x)$.

Определение. *Кососимметрическим градиентом* $\operatorname{sgrad} f$ гладкой функции f (относительно скалярного произведения ω) называется векторное поле, однозначно определяемое соотношением $\omega(\vec{Y}, \operatorname{sgrad} f) = \vec{Y}(f)$, где $\vec{Y}$ пробегает множество всех гладких векторных полей на M^{2n}, а $\vec{Y}(f)$ — значение оператора $\vec{Y}$ на функции f.

Хотя определение $\operatorname{sgrad} f$ аналогично по форме определению $\operatorname{grad} f$ (для симметричного скалярного произведения), но свойства $\operatorname{sgrad} f$ отличаются от свойств операции $\operatorname{grad} f$. Отметим, что однозначность определения $\operatorname{sgrad} f$ следует из невырожденности ω.

Напомним важное определение. Пусть $\omega^{(k)} = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ — дифференциальная форма степени k; форма $\omega^{(k+1)} = d\omega^{(k)}$, определяемая равенством $d\omega^{(k)} = \sum_{i_0} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, называется внешним дифференциалом от формы $\omega^{(k)}$. Для 1-формы $\omega^{(1)} = \omega_i dx^i$ операция d принимает вид

$$d\omega^{(1)} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^i = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j, \quad i < j.$$

Определение. Гладкое многообразие M^{2n} называется *симплектическим*, если на нем задана внешняя дифференциальная 2-форма $\omega^{(2)}$ такая, что:

(1) $\omega^{(2)}$ невырождена;

(2) $d\omega^{(2)} = 0$, т. е. форма $\omega^{(2)}$ замкнута.

Оказывается, что для симплектических многообразий существует атлас специального вида, в котором форма $\omega^{(2)}$ (называемая иногда «симплектической структурой») принимает канонический вид; а именно: для любой точки $P \in M^{2n}$ существуют окрестность $U(P)$ и координаты $\{p^1, \dots, p^n; q^1, \dots, q^n\}$ в ней, в которых $\omega^{(2)}$ имеет вид $\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i$. Эти координаты называются *симплектическими*. Существование этих координат составляет содержание известной теоремы Дарбу, доказывать которую мы не будем, поскольку мы ограничимся только рассмотрением примера симплектического многообразия: пусть $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$; $p^1, \dots, p^n$, $q^1, \dots, q^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{2n}$ и $\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i$. Так как эта форма имеет постоянные коэффициенты $\omega_{ij}^{(2)}$, то $d\omega^{(2)} \equiv 0$, т. е. форма замкнута. Невырожденность ее очевидна, а потому $\mathbb{R}^{2n}$ с такой формой $\omega^{(2)}$ становится симплектическим многообразием. Другим важным примером симплектических многообразий являются гладкие двумерные ориентируемые многообразия, т. е. S^2 с некоторым количеством ручек: на каждом из них можно задать симплектическую структуру, взяв в качестве искомой 2-формы внешнюю форму объема относительно римановой метрики, т. е. форму, задаваемую в локальных координатах (x, y) так: $\omega^{(2)} = \sqrt{g} dx \wedge dy$, где $g = \det(g_{ij})$. Тогда M^2 превращается в симплектическое многообразие. В самом

деле, невырожденность $\omega^{(2)}$ следует из того, что $\sqrt{g} \neq 0$; замкнутость $\omega^{(2)}$ очевидна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы Дарбу о существовании симплектического атласа не есть тривиальное следствие возможности приведения 2-формы к каноническому «блочному» виду в каждой точке: теорема Дарбу утверждает, что это приведение можно осуществить сразу в целой окрестности, а этот факт требует специальных рассуждений.

Определение. Гладкое векторное поле X на симплектическом многообразии M^{2n} с формой $\omega^{(2)}$ называется *гамильтоновым*, если оно имеет вид $\vec{X} = \operatorname{sgrad} H$, где H — некоторая гладкая функция на M^{2n}. Функция H называется *гамильтонианом потока.*

Найдем явную формулу для операции $\overrightarrow{\operatorname{sgrad} f}$ (в координатах). Имеем $\omega(\overrightarrow{\operatorname{sgrad} f}, \vec{Y}) = \omega_{ij}(\operatorname{sgrad} f)^i Y^j = Y^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$, откуда $(\operatorname{sgrad} f)^i = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$, т. е. вектор $\operatorname{sgrad} f$ двойствен (относительно скалярного произведения ω) ковектору $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$. Приведем пример гамильтонова поля. Пусть H — произвольная гладкая функция на M^{2n}, отнесенном к симплектическим координатам (p^i, q^i), т. е. $\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i$ и (p^i, q^i) декартовы. Тогда операция $\operatorname{sgrad} f$ имеет вид $\operatorname{sgrad}\colon H \to \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}; -\frac{\partial H}{\partial p^i}\right)$, т. е. поле $\vec{X} = \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}; -\frac{\partial H}{\partial p^i}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, гамильтоново. На этом примере стоит подчеркнуть отличие гамильтоновых полей от потенциальных: гамильтоново поле имеет вид $\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}; -\frac{\partial H}{\partial p^i}\right)$, а потенциальное $\operatorname{grad} H = \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}; \frac{\partial H}{\partial q^i}\right)$. В частности, эти поля (для одной и той же функции H) ортогональны относительно евклидова скалярного произведения. Некоторые поля, являясь гамильтоновыми для какой-то функции H, могут быть потенциальными для какой-то другой функции $\widetilde{H}$.

Гамильтоновы поля допускают важное описание на языке однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной этим полем. Пусть $\vec{X} = \operatorname{sgrad} H$ — гамильтоново поле; $\mathfrak{G}_t$ — соответствующая группа сдвигов вдоль интегральных траекторий этого поля. Тогда эта группа действует на форму $\omega^{(2)}$, переводя ее в некоторую, вообще говоря, другую 2-форму $(\mathfrak{G}_t)^* \omega^{(2)}$. Здесь $(\mathfrak{G}_t)^* \omega^{(2)}$ можно представить так. Если при действии преобразования $\mathfrak{G}_t$ точка y переходит в точку $x_t(y) = \mathfrak{G}_t(y)$, то можно считать координаты $(x_t^i(y))$

гладкими функциями от координат (y^j), тогда

$$(\mathfrak{G}_t)^*\omega^{(2)} = \omega_{ij}(x_t(y))dx_t^i(y) \wedge dx_t^j(y) =$$
$$= \omega_{ij}(x_t(y))\frac{\partial x_t^i(y)}{\partial y^k}\frac{\partial x_t^j(y)}{\partial y^p}dy^k \wedge dy^p = \omega_{kp}(t, y)dy^k \wedge dy^p,$$

где $\omega_{kp}(t, y) = \omega_{ij}(x_t(y))\frac{\partial x_t^i(y)}{\partial y^k}\frac{\partial x_t^j(y)}{\partial y^p}$ (рис. 26).

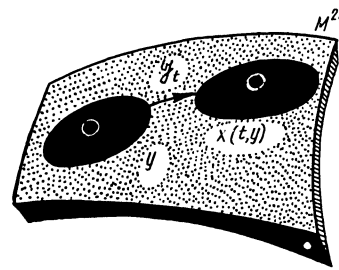


Рис. 26

Векторное поле $\vec{X}$ на симплектическом многообразии может не допускать глобального представления в виде $\vec{X} = \operatorname{sgrad} H$, однако оно может обладать следующим важным свойством: для любой точки $P \in M^{2n}$ существует такая окрестность $U(P)$ точки P и такая функция H_U, определенная на этой поверхности, что $\vec{X}(\alpha) = \operatorname{sgrad} H_U(\alpha)$, где $\alpha \in U$. Такие поля $\vec{X}$ назовем локально-гамильтоновыми. Гамильтонианы H_U строятся для каждой окрестности U, однако, вообще говоря, не могут быть «сшиты» в единый гамильтониан, определенный на всем многообразии. Изучение локально-гамильтоновых полей сводится тем самым к изучению гамильтоновых полей в $\mathbb{R}^{2n}$ со структурой $\sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i$, так как можно диффеоморфно отобразить окрестность U на область в симплектическом многообразии $(\mathbb{R}^{2n}; \omega^{(2)})$.

Теорема 4. *Векторное поле $\vec{X}$ на симплектическом многообразии M^{2n} является локально-гамильтоновым в том и только том случае, когда однопараметрическая группа $\mathfrak{G}_t$ сохраняет симплектическую структуру $\omega^{(2)}$.*

Доказательство. Докажем теорему только для того случая, когда M^{2n} есть $\mathbb{R}^{2n}$ со структурой $\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i$. Общий случай сводится к этому с помощью теоремы Дарбу, доказательство которой мы опустили.

Докажем, что если $\omega^{(2)}$ сохраняется при действии $\mathfrak{G}_t$, то поле $\vec{X}$ локально-гамильтоново. То, что $\omega^{(2)}$ переходит в себя при действии $\mathfrak{G}_t$, означает, что производная формы вдоль поля $\vec{X}$ равна нулю ($\vec{X}$ — поле скоростей действия $\mathfrak{G}_t$), т. е. $0 = \frac{d}{dt}\omega^{(2)}(\gamma(t))$,

где $\gamma(t)$ — интегральная траектория $\vec{X}$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\omega^{(2)}(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} dp^i(t)\wedge dq^i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}(dp^i(t))\wedge dq^i(t) + dp^i(t)\wedge\frac{d}{dt}dq^i(t)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[d\left(\frac{dp^i(t)}{dt}\right)\wedge dq^i(t) + dp^i(t)\wedge d\left(\frac{dq^i(t)}{dt}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[d(X^i(t))\wedge dq^i(t) + dp^i(t)\wedge dY^i(t)\right],$$

где $\vec{X} = (X^i, Y^i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Далее

$$\frac{d}{dt}\omega^{(2)}(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial X^i}{\partial p^k}dp^k + \frac{\partial X^i}{\partial q^k}dq^k\right)\wedge dq^i + \right.$$

$$\left. + dp^i\wedge\left(\frac{\partial Y^i}{\partial p^k}dp^k + \frac{\partial Y^i}{\partial q^k}dq^k\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial X^i}{\partial p^k} + \frac{\partial Y^k}{\partial q^i}\right)dp^k\wedge dq^i + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial X^i}{\partial q^k} - \frac{\partial X^k}{\partial q^i}\right)dq^k \underset{(k<i)}{\wedge} dq^i + \left(\frac{\partial Y^i}{\partial p^k} - \frac{\partial Y^k}{\partial p^i}\right)dp^i \underset{(i<k)}{\wedge} dp^k\right] = 0,$$

т. е.

$$-\frac{\partial X^i}{\partial p^k} = \frac{\partial Y^k}{\partial q^i};\quad \frac{\partial X^k}{\partial q^i} = \frac{\partial X^i}{\partial q^k};\quad \frac{\partial Y^i}{\partial p^k} = \frac{\partial Y^k}{\partial p^i}.$$

Это означает, что 1-форма $\omega^{(1)} = \sum_{i=1}^{n}(Y^i dp^i - X^i dq^i)$ является замкнутой. В самом деле

$$d\omega^{(1)} = d\sum_{i=1}^{n}(Y^i dp^i - X^i dp^i) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Y^i}{\partial p^k}dp^k + \frac{\partial Y^i}{\partial q^k}dq^k\right)\wedge dp^i - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial X^i}{\partial p^k}dp^k + \frac{\partial X^i}{\partial q^k}dq^k\right)\wedge dq^i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Y^i}{\partial p^k} - \frac{\partial Y^k}{\partial p^i}\right)dp^k \underset{(k<i)}{\wedge} dp^i + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Y^i}{\partial q^k} + \frac{\partial X^k}{\partial p^i}\right)dq^k\wedge dp^i + \left(\frac{\partial X^k}{\partial q^i} - \frac{\partial X^i}{\partial q^k}\right)dq^k\wedge dq^i\right] = 0$$

в силу полученных выше соотношений. Поскольку 1-форма $\omega^{(1)}$ определена на $\mathbb{R}^{2n}$, то из замкнутости следует, что на $\mathbb{R}^{2n}$ существует гладкая функция H, градиент которой (обычный grad) равен этой форме, т. е. $\omega^{(1)} = dH$. В самом деле, H можно в явном виде восстановить по форме $\omega^{(1)}$, для этого достаточно положить

$$H(x) = \int_{\gamma}\omega^{(1)} = \int_{\gamma(t)}\sum_{i=1}^{n}\left(Y^i dp^i - X^i dq^i\right) = \int_{0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y^i\frac{dp^i}{dt} - X^i\frac{dq^i}{dt}\right)dt,$$

где $\gamma(t)$ — произвольная гладкая траектория в $\mathbb{R}^{2n}$, идущая из фиксированной точки (например, точки 0) в переменную точку с координатами (p^i, q^i). Число $H(x)$ не зависит от выбора пути, идущего из точки 0 в точку $x=(p^i, q^i)$. Для $n=2$ мы уже доказывали этот факт в гл. 4. Для $n>2$ это следует из формулы Стокса. В самом деле, рассмотрим два пути: $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, где $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$; $\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$; тогда

$$\int\limits_{\gamma_1}\omega^{(1)}-\int\limits_{\gamma_2}\omega^{(1)}=\int\limits_{\gamma_1\cup(-\gamma_2)}\omega^{(1)}=\int\limits_{\partial D^2}\omega^{(1)}=\int\limits_{D^2}d\omega^{(1)}=0,$$

где D^2 — произвольный диск, ограниченный двумя траекториями: γ_1 и γ_2 (диск может иметь самопересечения). Итак, построение H закончено. Осталось доказать обратное: если $\vec{X}$ — гамильтоново поле в $\mathbb{R}^{2n}$, то группа $\mathfrak{G}_t$ сохраняет $\omega^{(2)}$, т. е. $\vec{X}(\omega^{(2)})=0$. Достаточно повторить в обратном порядке все предыдущие выкладки. Теорема доказана. □

Этот результат позволяет легко предъявлять примеры гамильтоновых потоков. Например, рассмотрим сферу с g ручками, снабженную какой-либо римановой метрикой и симплектической структурой $\omega^{(2)}=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx\wedge dy$ (см. выше). Как описать все гамильтоновы потоки на этом симплектическом многообразии? Напомним, что поле $\vec{X}$ на M_g^2 имеет нулевую дивергенцию, если площадь произвольной области A не меняется при сдвигах вдоль интегральных траекторий поля.

Следствие 1. *Гамильтоновы потоки на M_g^2 — это несжимаемые потоки и только они, т. е. потоки, для которых* $\operatorname{div} X=0$.

Доказательство. В силу теоремы 4 мы должны описать все потоки, сохраняющие форму $\omega^{(2)}$. Поскольку в качестве такой формы мы выбрали форму объема: $\omega^{(2)}=\sqrt{\det(g_{ij})}dx\wedge dy$, то гамильтонов поток — это такое поле, которое сохраняет форму объема. Как мы знаем из гл. 4, это потоки с нулевой дивергенцией и только они. Следствие доказано. □

Рассмотрим, например, двумерную сферу S^2, представленную как пополненная комплексная прямая: $\mathbb{R}^2\cup\infty$. Тогда на S^2 можно предъявить богатый запас гамильтоновых потоков (по отношению к стандартной метрике на S^2): следует рассмотреть поля вида $\operatorname{grad}\operatorname{Re}(f(z))$, $\operatorname{grad}\operatorname{Im}(f(z))$, где $f(z)$ — комплексно аналитическая функция переменной $z=x+iy$. Следовательно, все разобранные нами в гл. 4, § 4 примеры несжимаемых (и безвихревых) потоков являются гамильтоновыми. Симплектическая структура на S^2,

отнесенной к координатам (x, y) (обслуживающим все «конечные» точки), имеет вид $\omega^{(2)} = dx \wedge dy$. В то же время, например, на S^2 существуют гамильтоновы потоки, не являющиеся безвихревыми (см. ниже).

Рассмотрим важный пример гамильтонова потока — динамическую систему, описывающую движение трехмерного твердого тела с одной неподвижной точкой. Для этого следует рассмотреть $\mathbb{R}^3$, отождествленное с линейным пространством всех вещественных кососимметрических матриц 3-го порядка; пусть $X \in \mathbb{R}^3$ — такая матрица. Зададим в $\mathbb{R}^3$ самосопряженный линейный оператор: φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, действующий по формуле $\varphi X = XI + IX$, где I — матрица вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, (λ_i) — вещественные числа. Ясно, что матрица φX кососимметрическая. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (записанную в матричном виде) $\varphi \dot{X} = [X, \varphi X]$. Из механики известно, что этими уравнениями и описывается движение трехмерного твердого тела с закрепленной точкой. Запишем уравнения в координатной форме. При этом удобно в действительности рассматривать сразу n-мерное твердое тело, вращающееся в $\mathbb{R}^n$ вокруг закрепленной точки, и систему вида $\varphi \dot{X} = [X, \varphi X]$, где φ: $so(n) \to so(n)$; $so(n) = (X\colon X^T = -X)$ имеет вид $\varphi X = XI + IX$, $I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Считая, что $X = (x_{ij})$, $x_{ij} = -x_{ji}$, получаем

$$(\varphi X)_{ij} = (\lambda_i + \lambda_j) x_{ij}; \quad (\dot{X})_{ij} = \sum_k (x_{ik}(\varphi X)_{kj} - (\varphi X)_{ik} x_{kj}) =$$

$$= \sum_k (x_{ik}(\lambda_k + \lambda_j) x_{kj} - (\lambda_i + \lambda_k) x_{ik} x_{kj}) = (\lambda_j - \lambda_i) \sum_k x_{ik} x_{kj},$$

$$\dot{x}_{ij} = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_j + \lambda_i} \sum_k x_{ik} x_{kj}.$$

При $n = 3$ имеем

$$\dot{x}_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} x_{13} x_{32}; \quad \dot{x}_{13} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} x_{12} x_{23}; \quad \dot{x}_{23} = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 + \lambda_2} x_{21} x_{13}.$$

Положив $x_{12} = x$, $x_{13} = y$, $x_{23} = z$, получаем систему:

$$\dot{x} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} yz; \quad \dot{y} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} xz; \quad \dot{z} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} yx.$$

Этот поток (в $\mathbb{R}^3$) допускает два интеграла: $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$, где $P = x^2 + y^2 + z^2$; $Q = x^2(\lambda_1 + \lambda_2) + y^2(\lambda_1 + \lambda_3) + z^2(\lambda^2 + \lambda^3)$.

В самом деле, для доказательства того, что эти две функции постоянны вдоль интегральных траекторий потока, достаточно найти производные $\dot{X}(P)$ и $\dot{X}(Q)$. Имеем

$$\dot{X}(P) = 2xyz\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1}+\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right) =$$

$$= \frac{2xyz}{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)}\left[(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_3)+\right.$$

$$\left.+(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_1)\right] = 0,$$

$$\dot{X}(Q) = 2xyz(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3) \equiv 0,$$

что и требовалось.

Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ и λ_i попарно различны, то эти два интеграла функционально независимы (в точках общего положения) (проверьте!); следовательно, интегральные траектории являются линиями пересечения двух семейств поверхностей — сфер $P = \text{const}$ и эллипсоидов $Q = \text{const}$. Поле X удобно изобразить на поверхности уровня $Q = \text{const}$ (рис. 27). Теперь зафиксируем какую-либо сферу $P = \text{const}$ и ограничим поток $\dot{X}$ на эту сферу. Мы утверждаем, что этот поток гамильтонов. В самом деле, достаточно доказать, что $\dot{X}$ сохраняет форму объема, т. е. бездивергентен. Достаточно доказать, что поток сохраняет форму объема в объемлющем евклидовом пространстве. Но это очевидно, так как выражение $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$ тождественно равно нулю (см. явный вид $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$). Как видно на данном примере, большое значение для описания геометрического поведения потока имеют его интегралы; в случае трехмерного твердого тела уравнения движения оказались вполне интегрируемы, т. е. мы указали два интеграла движения. Оказывается, что полностью интегрируемы (в некотором точном смысле) и уравнения движения n-мерного твердого тела; однако доказательство этого факта уже весьма нетривиально, и мы, конечно, не будем здесь на этом останавливаться.

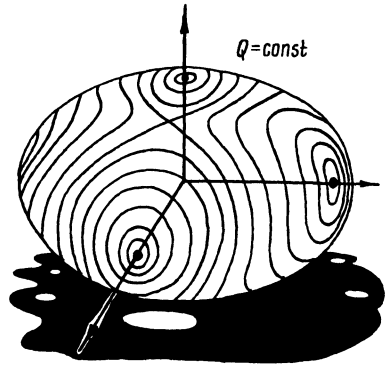


Рис. 27

Рассмотрим вопрос об интегралах гамильтоновых потоков. Для этого оказывается полезным ввести новую операцию на пространстве гладких функций на симплектическом многообразии, порожденную симплектической структурой.

Определение. *Скобкой Пуассона* двух гладких функций f, g на симплектическом многообразии M^{2n} называется функция $\{f, g\}$, определяемая формулой

$$\{f, g\} = \omega^{(2)}(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = \omega_{ij}(\operatorname{sgrad} f)^i (\operatorname{sgrad} g)^j.$$

Явная формула для операции $f, g \to \{f, g\}$ такова:

$$\{f, g\} = \omega^{k\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha},$$

так как $(\operatorname{sgrad} f)^i = \omega^{i\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$.

Предложение 1. *Операция $f, g \to \{f, g\}$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

(1) *операция $\{f, g\}$ билинейна;*

(2) *операция $\{f, g\}$ кососимметрична, т. е. $\{f, g\} = -\{g, f\}$;*

(3) *имеет место тождество Якоби*

$$\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0.$$

Доказательство. Докажем эту теорему для частного случая $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ с канонической симплектической структурой. Свойства (1) и (2) сразу следуют из определения симплектической структуры. Докажем (3). Через L_f обозначим дифференцирование вдоль поля $\operatorname{sgrad} f$, т. е. $L_f(h) = (\operatorname{sgrad} f)h$. Мы утверждаем, что выражение, стоящее в левой части (3), есть сумма мономов, в каждый из которых входит вторая частная производная какой-либо из трех функций: f, g, h. В самом деле рассмотрим $\{f, g\}$; из определения sgrad получаем

$$\{f, g\} = \omega^{(2)}(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = -(\operatorname{sgrad} g)f = \\ = -L_g(f) = -(\operatorname{sgrad} g)^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Но компоненты поля $(\operatorname{sgrad} g)^i$ сами являются частными производными от функции g. В самом деле, так как $\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i$, то $(\operatorname{sgrad} g)^i = -\frac{\partial g}{\partial q^i}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$; $(\operatorname{sgrad} g)^j = \frac{\partial g}{\partial p^j}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$; матрица формы $\omega^{(2)}$ в $\mathbb{R}^{2n}(p^1, \ldots, p^n; q^1, \ldots, q^n)$ постоянна и имеет канонический «блочный» вид. Следовательно, $\{f, g\}$ является линейной комбинацией мономов, состоящих из произведений частных производных первого порядка. Отсюда

$$\{h, \{f, g\}\} = -\{\{f, g\}, h\} = -L_{\{f, g\}}(h) = -(\operatorname{sgrad}\{f, g\})^i \frac{\partial h}{\partial x^i},$$

т. е. выражение $\{h, \{f, g\}\}$ есть сумма мономов, каждый из которых содержит вторые частные производные либо от функции f, либо от функции g. Итак, доказано, что левая часть тождества (3) есть сумма мономов, в каждый из которых множителем входит вторая частная производная. Фиксируем теперь, например, h. Соберем вместе все члены в левой части (3), содержащие вторые производные функции h. Эти члены имеют вид:

$$\{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = L_f L_g h - L_g L_f h = [L_f, L_g]h.$$

С другой стороны, нам уже известно, что коммутатор двух операторов первого порядка L_f и L_g является оператором первого порядка (а не второго), т. е. выражение $[L_f, L_g]h$ содержит только производные первых порядков от h. Итак, левая часть (3) вообще не содержит вторых производных от h. По тем же причинам левая часть (3) не содержит и вторых производных от f и g, т. е. левая часть (3) равна нулю. Предложение доказано. □

Линейное пространство с билинейной операцией, удовлетворяющее свойствам (1)–(3), называется *алгеброй Ли.*

Следствие 2. *Линейное пространство $F(M^{2n})$ всех гладких функций на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) является алгеброй Ли по отношению к скобке Пуассона $\{f, g\}$.*

Это следует из доказанного выше. Алгебра Ли $F(M)$ бесконечномерна. Рассмотрим отображение α алгебры Ли $F(M)$ в алгебру Ли $V(M)$ всех гладких векторных полей на M, определенное формулой $\alpha(f) = \operatorname{sgrad} f$.

Следствие 3. *Отображение $\alpha\colon f \to \operatorname{sgrad} f$ является гомоморфизмом алгебр Ли, т. е. $\alpha\{f, g\} = [\alpha f, \alpha g]$.*

Доказательство. Следует доказать, что $\operatorname{sgrad}\{f, g\} = [\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g]$. Из тождества Якоби имеем:

$$(\operatorname{sgrad}\{f, g\})h = \omega(\operatorname{sgrad}\{f, g\}, \operatorname{sgrad} h) = -\{h, \{f, g\}\} =$$
$$= -\{g, \{f, h\}\} + \{f, \{g, h\}\} = -L_g L_f h + L_f L_g h = [L_f, L_g]h,$$
$$\operatorname{sgrad}\{f, g\} = [\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g],$$

что и требовалось. □

Так как α — гомоморфизм алгебр Ли, то образом алгебры Ли $F(M)$ в алгебре Ли $V(M)$ всех гладких полей на M является некоторая подалгебра, которую мы обозначим через $H(M)$. Из определения α следует, что это — алгебра Ли всех гамильтоновых полей на M. Тем самым $\alpha\colon F(M) \to H(M)$ — эпиморфизм. Однако α не мономорфизм, так как имеет нетривиальное

ядро: ядром α являются локально постоянные функции, а если предположить, что M связно, то ядро α одномерно и состоит из постоянных функций на M. Следовательно, $H(M) \cong F(M)/R_1$. Подалгебра $H(M) \subset V(M)$, $H(M) = H_\omega(M)$ зависит, конечно, от выбора симплектической структуры ω на M; если мы введем на M другую симплектическую структуру ω', то изменится и подалгебра $H_{\omega'}(M) \subset V(M)$. Отметим отличие потенциальных полей $\operatorname{grad} f$ от гамильтоновых полей $\operatorname{sgrad} f$. В самом деле, потенциальные поля не образуют подалгебры в $V(M)$, т. е. коммутатор двух потенциальных полей может не быть потенциальным полем. Пример: потенциальные поля на окружности. Каждое векторное поле на S^1 можно задать гладкой функцией $P(\varphi)$, где φ — угловая координата, а $P(\varphi)$ — компонента касательного вектора. Тогда для двух полей, $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$, на S^1 их коммутатор есть поле с компонентой: $R = PQ'_\varphi - QP'_\varphi$ (проверьте!). Положим $P = \cos\varphi$, $Q = \sin\varphi$; тогда $R \equiv 1$. Итак, мы представили поле с постоянной компонентой (равной 1) в виде коммутатора двух потенциальных полей. Постоянное поле не потенциально, так как имеет замкнутую траекторию без особенностей.

Операция взятия скобки Пуассона играет роль в изучении интегралов гамильтоновых потоков.

Предложение 2. *Пусть* $\vec{v} = \operatorname{sgrad} H$ *— гамильтонов поток на* M^{2n}, *и пусть* $f(x)$ *— гладкая функция, коммутирующая с гамильтонианом* H, *т. е.* $\{f, H\} \equiv 0$. *Тогда* f *является интегралом потока* $\vec{v}$, *т. е. функция* f *постоянна вдоль интегральных траекторий поля* $\vec{v}$. *Обратно: любой интеграл* g *поля* $\operatorname{sgrad} H$ *коммутирует с* H: $\operatorname{sgrad}\{g, H\} = 0$.

Доказательство. Достаточно найти производную f вдоль поля $\vec{v}$, т. е. $(\operatorname{sgrad} H)f$. В силу определения $\operatorname{sgrad} H$, имеем: $(\operatorname{sgrad} H)f = \{H, f\} \equiv 0$, что и требовалось. □