



**FOUNDATIONS
OF
MODERN ANALYSIS**

J. DIEUDONNÉ

*Institut des Hautes Études Scientifiques,
Paris*

**ACADEMIC PRESS · NEW YORK AND LONDON
1960**

Ж. Дьедонне

ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
И. А. ВАЙНШТЕЙНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1964

Автор этой книги — Жан Дьедонне — выдающийся французский аналитик, один из вдохновителей и активных членов известной группы Бурбаки.

Формально от читателя требуется лишь знание „первых правил математической логики“ и элементарной линейной алгебры. На самом же деле книга рассчитана на тех, кто уже знаком с основами математического анализа и хочет взглянуть на известные факты с новой точки зрения.

Характерной чертой книги является строгий аксиоматический подход и систематическое использование понятия векторного пространства. Автор умышленно не пользуется чертежами, однако его изложение в высшей степени геометрично.

Стремясь сделать книгу цельной и доступной для изучения в пределах одного академического года, Дьедонне очень строго отобрал материал. При этом его подход отличается от принятого у нас. Так, он не включил понятие меры и интеграла Лебега, но зато изложил общие факты теории функций одного и нескольких комплексных переменных. В книге со вкусом подобраны разнообразные и интересные задачи.

Эту оригинальную книгу с интересом прочтут не только студенты старших курсов университетов и аспиранты (которым она непосредственно предназначена), но и все лица, желающие углубить свои познания в современном математическом анализе.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот том возник на основе курса, предназначенного для студентов старших курсов или для особо подготовленных студентов младших курсов¹⁾. Цель этого курса (прочитанного в Северо-западном университете в 1956—1957 гг.) была двойкой: во-первых, дать запас необходимых элементарных сведений из всех областей современной математики, связанных с „анализом“ (фактически из всех, за исключением, быть может, логики и чистой алгебры); во-вторых, натренировать слушателей в употреблении наиболее фундаментального математического орудия нашего времени — аксиоматического метода (с которым за время первых студенческих лет они если и сталкиваются, то очень мало).

Читателю будет совершенно очевидно, что особое ударение мы всюду делаем на идейном аспекте каждого понятия, а не на его вычислительном аспекте, которым главным образом интересовался классический анализ (см. [26]). Это верно не только по отношению к тексту, но и по отношению к большинству задач. Мы включили в книгу значительное число задач, чтобы дополнить текст и указать дальнейшие интересные направления. Эти задачи одновременно дадут возможность проверить, насколько хорошо усвоен изложенный материал.

Хотя этот том включает в себя много материала, по большей части излагаемого в более элементарных курсах (в том числе в так называемых „дополнительных главах анализа“), точка зрения, с которой рассматривается этот материал, полностью отлична от обычно принимаемой в этих курсах. Основные понятия теории функций и дифференциального исчисления излагаются в рамках теории, достаточно общей для того, чтобы показать размах, силу и истинную природу этих понятий гораздо лучше, чем это возможно при обычных ограничениях „классического анализа“. Нет необходимости подчеркивать хорошо известную „экономию мысли“, являющуюся результатом такого общего подхода, но можно указать, что существует и

¹⁾ Ввиду различий в системах университетского образования у нас и в США нам пришлось перевести термин „undergraduate student“ как „студент младших курсов“, а „graduate student“ как „студент старших курсов“ (имея в последнем случае в виду студента, выбравшего кафедру, на которой он будет работать). — *Прим. перев.*

соответствующая „экономия обозначений“, истребляющая рои индексов, подобно тому как векторная алгебра упрощает классическую аналитическую геометрию. Однако такой подход вызывает необходимость строгого соблюдения аксиоматических методов без всякой ссылки на „геометрическую интуицию“, по крайней мере в формальных доказательствах — необходимость, которую мы подчеркиваем, умышленно воздерживаясь от введения в книгу каких бы то ни было рисунков. Я считаю, что учащийся, если он собирается когда-нибудь понять то, что общепринято в математических исследованиях, должен как можно скорее получить основательную тренировку в абстрактном и аксиоматическом способе мышления. Этот том имеет целью помочь учащемуся выработать „интуицию абстрактного“, которая так существенна для современного математика.

Ясно, что студенты, прежде чем приступить к этому курсу, должны обладать хорошими рабочими знаниями классического анализа. Однако со строго логической точки зрения изложение не опирается ни на какие предварительные сведения, за исключением:

1. Первых правил математической логики, математической индукции и основных свойств целых (положительных и отрицательных) чисел.

2. Элементарной линейной алгебры (над полем), с которой читатель может познакомиться у Халмоша [14], Джекобсона [16] или Бурбаки [4]; эти книги, впрочем, содержат намного больше материала, чем нам действительно нужно (например, мы не будем пользоваться теорией двойственности, и читателю достаточно знать понятия векторного подпространства, гиперплоскости, прямой суммы, линейного отображения, линейной формы, размерности и коразмерности).

В доказательстве каждого утверждения мы опираемся исключительно на аксиомы и на теоремы, уже доказанные в тексте, с двумя только что упомянутыми исключениями. Эта строгая последовательность логических шагов несколько нарушается в примерах и задачах, где мы часто пользуемся определениями или результатами, которые еще не были (или даже вообще не будут) доказаны в тексте.

Имеются различные мнения о том, какие части анализа студент должен изучить на первом году специализированного обучения. Поскольку мы хотели сохранить содержание этой книги в пределах того, что может быть реально продумано в течение одного академического года, некоторые разделы пришлось исключить. Одни из них были опущены потому, что они слишком специальные, другие — потому, что могут потребовать большей математической зрелости, чем обычно можно ожидать, третьи — потому, что их материал, несомненно, вошел в курсы дополнительных глав анализа. Если бы мы должны были предложить общую программу для специализирующихся студентов — математиков, мы рекомендовали бы каждому из них ознакомиться с содержанием этой книги, какова бы ни была сфера его будущей деятельности.

Я хочу выразить благодарность математикам, которые помогли мне подготовить эти лекции, особенно А. Картану и Н. Бурбаки; они открыли мне доступ к неопубликованным записям лекций и рукописям, оказавшим большое влияние на окончательную форму этой книги. Я очень признателен также моим коллегам по математическому отделению Северо-западного университета, которые предоставили мне возможность прочитать этот курс в тех направлениях, в каких я его планировал, и очень поддержали меня своей конструктивной критикой.

Ж. Дьедонне

Апрель 1960 г.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В нижеследующих определениях первая цифра указывает номер главы, в которой появляется обозначение, а вторая — параграф в этой главе.

$=$	равно, совпадает; 1.1
$\neq$	отлично от; 1.1
$\in$	является элементом, принадлежит; 1.1
$\notin$	не является элементом; 1.1
$\subset$	является подмножеством, содержится в; 1.1
$\supset$	содержит; 1.1
$\not\subset$	не содержится в; 1.1
$\{x \in X \mid P(x)\}$	множество элементов, принадлежащих X и обладающих свойством P ; 1.1
$\emptyset$	пустое множество; 1.1
$\{a\}$	множество, имеющее a своим единственным элементом; 1.1
$\mathfrak{P}(X)$	множество подмножеств множества X ; 1.1
$X \setminus Y, C_X Y, C_Y$	разность между множествами X и Y , дополнение множества Y в X ; 1.2
$\cup$	объединение; 1.2
$\cap$	пересечение; 1.2
$\{x, y\}$	объединение множеств $\{x\}$ и $\{y\}$; 1.2
(a, b)	упорядоченная пара; 1.3
$\text{pr}_1 c, \text{pr}_2 c$	первая и вторая проекции пары c ; 1.3
$X \times Y$	произведение двух множеств; 1.3
$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$	произведение n множеств; 1.3
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$	элемент произведения n множеств; 1.3
$\text{pr}_i z$	i -я проекция; 1.3
X^n	произведение n множеств, равных X ; 1.3
$F(x)$	значение отображения F на элементе x ; 1.4
$Y^X, \mathfrak{F}(X, Y)$	множество отображений X в Y ; 1.4
$x \rightarrow T(x)$	отображение; 1.4
$F(A)$	образ; 1.5
$F^{-1}(A')$	прообраз; 1.5
$F^{-1}(y)$	прообраз множества $\{y\}$; 1.5
j_A	естественное вложение; 1.6

F^{-1}	отображение, обратное к биективному; 1.6
$G \circ F$	композиция отображений; 1.7
$(x_\lambda)_{\lambda \in L}$	семейство; 1.8
$\mathbf{N}$	множество целых чисел ≥ 0 ; 1.8
$\{x_1, \dots, x_n\}$	множество элементов конечной последовательности; 1.8
$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda, \bigcup_{\lambda} A_\lambda$	объединение семейства множеств; 1.8
$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda, \bigcap_{\lambda} A_\lambda$	пересечение семейства множеств; 1.8
$\mathbf{R}$	множество действительных чисел, действительная прямая; 2.1, 3.2
$x + y, xy$	сумма и произведение действительных чисел; 2.1
0	нуль — элемент множества $\mathbf{R}$; 2.1
$-x$	противоположное число в $\mathbf{R}$; 2.1
1	единица — элемент множества $\mathbf{R}$; 2.1
$x^{-1}, 1/x$	обратное число в $\mathbf{R}$; 2.1
$x \leq y, y \geq x,$ $x < y, y > x$	отношение порядка в $\mathbf{R}$; 2.1
$[a, b], [a, b],$ $[a, b[,]a, b]$	промежутки в $\mathbf{R}$; 2.1
$\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+^*$	множество действительных чисел ≥ 0 (соответственно > 0); 2.2
$ x , x^+, x^-$	абсолютная величина, положительная и отрицательная части действительного числа x ; 2.2
$\mathbf{Q}$	множество рациональных чисел; 2.2
$\mathbf{Z}$	множество целых чисел; 2.2
$\sup X$	верхняя грань множества X ; 2.3
$\inf X$	нижняя грань множества X ; 2.3
$\sup_{x \in A} f(x), \inf_{x \in A} f(x)$	верхняя и нижняя грани функции f на множестве A ; 2.3
$d(x, y)$	расстояние между элементами x и y ; 3.1
$\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$	действительная плоскость, евклидово пространство; 3.2
$\mathcal{B}(A)$	множество ограниченных отображений множества A в $\mathbf{R}$; 3.2
$\bar{\mathbf{R}}$	расширенная действительная прямая; 3.3
$+\infty, -\infty$	бесконечные точки в $\bar{\mathbf{R}}$; 3.3
$d(A, B)$	расстояние между двумя множествами; 3.4
$B(a; r), B'(a; r),$ $S(a; r)$	открытый шар, замкнутый шар, сфера с центром a и радиусом r ; 3.4
$\delta(A)$	диаметр множества A ; 3.4
$\overset{\circ}{A}$	внутренность множества A ; 3.7
$\bar{A}$	замыкание множества A ; 3.8

$\text{Fr}(A)$	граница множества A ; 3.8
$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$	предел функции; 3.13
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	предел последовательности; 3.13
$\Omega(a; f)$	колебание функции; 3.14
$\log_a x$	логарифм действительного числа; 4.3
$\mathbb{I}$	множество иррациональных чисел; 3.14, задача 4
$\prod_{n=1}^{\infty} E_n$	бесконечное произведение; 3.20, задача 7
K	канторово множество; 4.2, задача 2
a^x	показательная функция (экспонента); 4.3
x^a	степенная функция; 4.3
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел; 4.4
$z + z', zz'$	сумма и произведение комплексных чисел; 4.4
$0, 1, i$	элементы множества $\mathbb{C}$; 4.4
$\Re z, \Im z$	действительная и мнимая части комплексного числа z ; 4.4
$\bar{z}$	сопряженное комплексное число; 4.4
$ z $	модуль комплексного числа; 4.4
$x + y, \lambda x, x\lambda$	сумма и произведение на скаляр в векторном пространстве; 5.1
0	элемент векторного пространства; 5.1
$\ x\ $	норма; 5.1
$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(I)$	множество всех действительных непрерывных на I функций; 5.1
$A + B$	сумма множеств в векторном пространстве, прямая сумма; 5.1, задача 2, 5.4
$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$	сумма ряда; 5.2
$\sum_{\alpha \in A} x_{\alpha}$	сумма абсолютно суммируемого семейства; 5.3
(c_0)	пространство последовательностей, сходящихся к нулю; 5.3, задача 5
$\mathcal{L}(E; F)$	пространство линейных непрерывных отображений; 5.7
$\ u\ $	норма линейного непрерывного отображения; 5.7
$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$	пространство полилинейных непрерывных отображений; 5.7
ℓ^1	пространство абсолютно сходящихся рядов; 5.7, задача 1

l^∞	пространство ограниченных последовательностей; 5.7, задача 1
$[x \cdot y]$	билинейное отображение; 6.1
$(x y)$	скалярное произведение; 6.2
P_F	ортогональная проекция; 6.3
l^2, l_R^2, l_C^2	гильбертовы пространства последовательностей; 6.5
$\mathcal{C}_C(I)$	множество всех комплексных непрерывных на I функций; 6.5
$\mathcal{B}_F(A), \mathcal{B}_R(A), \mathcal{B}_C(A)$	пространства ограниченных отображений; 7.1
$\mathcal{C}_F(E)$	пространство непрерывных отображений; 7.2
$\mathcal{C}_F^\infty(E)$	пространство ограниченных непрерывных отображений; 7.2
$f(x_+), f(x_-)$	пределы справа, слева; 7.6
$\text{sign } x$	функция; 7.6, задача 2
$f'(x_0), Df(x_0)$	(полная) производная в точке x_0 ; 8.1
f', Df	производная (как функция); 8.1
$f'_d(x), D_+f(x)$	правая производная; 8.4
$f'_g(\beta), D_-f(\beta)$	левая производная; 8.4
$u \cdot t$	элемент $\mathcal{L}(E; F)$; 8.1
$\int_a^\beta f(\xi) d\xi$	интеграл; 8.7
e	число; 8.8
$\exp(x), \ln x$	функции действительного переменного; 8.8
$D_1f(a_1, a_2), D_2f(a_1, a_2)$	частные производные; 8.9
$f'_{\xi_i}(\xi_1, \dots, \xi_n), \partial/\partial \xi_i f(\xi_1, \dots, \xi_n)$	частные производные; 8.10
$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)}$	
$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}$	якобиан; 8.10
$f''(x_0), D^2f(x_0), f^{(p)}(x_0), D^p f(x_0)$	производные высшего порядка; 8.12
$f * \rho$	регуляризация; 8.12, задача 2
$\mathcal{D}_F^{(p)}(A)$	пространство p раз непрерывно дифференцируемых отображений A в F со всеми ограниченными производными; 8.12, задача 8

$\mathcal{E}_F^{(p)}(A)$	пространство p раз непрерывно дифференцируемых отображений; 8.13
$ \alpha , M_\alpha, D^\alpha, D_{M_\alpha}$	символы, где α — составной индекс; 8.13
$\ln z, e^z, \exp(z),$ $\sin z, \cos z,$	
$\binom{t}{n}, (1+z)^t$	функции комплексного переменного; 9.5
π	число; 9.5
U	единичная окружность в $\mathbb{C}$; 9.5 $\arg z$ аргумент комплексного числа; 9.5, задача 8
R_-	отрицательная действительная полупрямая; 9.5, задача 8
γ°	дуга, противоположная дуге; 9.6
$\gamma_1 \vee \gamma_2$	соединение дуг; 9.6
$\int_\gamma f(z) dz$	интеграл вдоль (конечного или бесконечного) пути γ ; 9.6, 9.12, задача 2
$j(a; \gamma)$	индекс точки a относительно контура γ ; 9.8
$E(z, p)$	первичный множитель; 9.12, задача 1
$\Gamma(z)$	гамма-функция; 9.12, задача 2
γ	постоянная Эйлера; 9.12, задача 2
$\omega(a; f), \omega(a)$	порядок функции в точке; 9.15
$C(t, s)$	резольвента линейного дифференциального уравнения; 10.8
$\mathcal{L}(E)$	алгебра операторов в пространстве E ; 11.1
uv	композиция операторов; 11.1
1	тождественный оператор; 11.1
$S(u)$	спектр оператора u ; 11.1
$E(\zeta), E(\zeta, u)$	собственное пространство оператора u , соответствующее собственному значению ζ ; 11.1
$\tilde{u}$	непрерывное продолжение; 11.1, задача 5
$N(\lambda), N(\lambda; u),$ $F(\lambda); F(\lambda; u)$	подпространства, соответствующие собственному значению λ вполне непрерывного оператора u ; 11.4
$k(\lambda), k(\lambda; u)$	кратность собственного значения; 11.4
u^*	сопряженный оператор; 11.5

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Мы не будем пытаться установить теорию множеств на аксиоматическое основание. Читателя, интересующегося полным аксиоматическим описанием, мы отсылаем к книгам Келли [18] и Бурбаки [3]. Утверждения, встречающиеся в этой главе и не сопровождаемые доказательством или определением, могут рассматриваться просто как аксиомы, связывающие те термины, которые не были до этого строго определены.

Глава начинается с нескольких элементарных определений и формул, касающихся множеств, подмножеств и произведения множеств (1.1—1.3). Центральная часть главы посвящена фундаментальному понятию *отображения*, являющемуся современным обобщением классического понятия (числовой) *функции* одной или нескольких числовых „переменных“. В связи с этим понятием заслуживают внимания два момента.

а) Принципиально важным (и характеристическим) свойством отображения является то, что любому „значению“ переменной оно ставит в соответствие единственный элемент; иными словами, такого понятия, как „многозначная“ функция, не существует (хотя во многих книгах этим понятием оперируют). Вполне правомерно, конечно, определить отображение, значениями которого являются подмножества некоторого данного множества, состоящие более чем из одного элемента; но такое определение (по крайней мере в элементарном анализе) практически бесполезно, потому что не удастся разумным образом определить алгебраические операции над „значениями“ таких функций. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 9.

б) Как можно скорее следует освоиться с идеей, что функция f есть единный объект, который сам может „изменяться“ и вообще может мыслиться как „точка“ особого „функционального пространства“. В самом деле, можно сказать, что одно из главных различий между классическими и современными понятиями анализа состоит в следующем. Если в классической математике пишут $f(x)$, то f рассматривается как нечто „фиксированное“, а x как „переменное“. В наше же время в качестве „переменных“ рассматривают и f и x (и иногда фиксируется именно x , а f становится „переменным“ объектом).

В последнем параграфе (1.9) приводятся элементарные свойства счетных множеств. Это — начало обширной теории „кардинальных чисел“, развитой Кантором и его последователями, с которой интересующийся читатель может познакомиться по книге Бурбаки ([3], гл. III) или (детальнее) по

книге Бахмана ([2])¹⁾. Оказывается, однако, что, если не считать важного отрицательного результата — теоремы о несчетности множества действительных чисел [см. (2.2.17)], в приложениях теории множеств к анализу крайне редко используется что-либо, кроме этих элементарных свойств.

1. Элементы и множества

Мы будем иметь дело с различными объектами. Объекты могут обладать некоторыми *свойствами* или находиться в определенных *отношениях* между собой. Объекты обозначаются *символами* (главным образом, буквами); свойства или отношения — комбинациями символов тех объектов, к которым они относятся, и некоторых других символов, характеристических для рассматриваемого свойства или отношения. Отношение $x = y$ означает, что объекты, обозначаемые символами x и y , совпадают; его отрицание записывается так: $x \neq y$.

Некоторые из объектов называются *множествами*.

Если X — множество, то отношение $x \in X$ означает, что x есть *элемент* множества X , или что x *принадлежит* X . Отрицание этого отношения записывается так: $x \notin X$, или $x \notin X$.

Если X и Y — два множества, то отношение $X \subset Y$ означает, что каждый элемент множества X является элементом множества Y (иначе говоря, оно эквивалентно отношению $(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in Y)$). Мы имеем $X \subset X$, а из отношений $X \subset Y$ и $Y \subset Z$ следует отношение $X \subset Z$. Если $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то $X = Y$; иными словами, два множества равны в том и только в том случае, если они состоят из одних и тех же элементов. Если $X \subset Y$, то говорят, что X *содержится* в Y , или что Y *содержит* X , или что X является *подмножеством* Y ; пишут также $Y \supset X$. Отрицание отношения $X \subset Y$ записывается так: $X \not\subset Y$.

Если даны множество X и свойство P , то существует единственное подмножество X , состоящее из всех тех элементов $x \in X$, для которых истинно $P(x)$; это подмножество обозначается символом $\{x \in X | P(x)\}$. Например, мы имеем: $X = \{x \in X | x = x\}$ и $X = \{x \in X | x \in X\}$. Отношение $\{x \in X | P(x)\} \subset \{x \in X | Q(x)\}$ эквивалентно отношению $(\forall x \in X)(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Отношение $\{x \in X | P(x)\} = \{x \in X | Q(x)\}$ эквивалентно отношению $(\forall x \in X)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$.

Множество $\emptyset_X = \{x \in X | x \neq x\}$ называется *пустым подмножеством* множества X ; оно не содержит элементов. Если P — произвольное свойство, то отношение $x \in \emptyset_X \Rightarrow P(x)$ истинно для каждого x , так как для каждого x истинно отрицание отношения $x \in \emptyset_X$ (напомним, что $Q \Rightarrow P$ означает „не Q или P “). Таким образом, если X и

¹⁾ См. также Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М., 1937. — *Прим. перев.*

Y — множества, то из $x \in \emptyset_X$ следует $x \in \emptyset_Y$, иначе говоря, $\emptyset_X \subset \emptyset_Y$ и точно так же $\emptyset_Y \subset \emptyset_X$; значит, $\emptyset_X = \emptyset_Y$; все пустые множества равны. Поэтому они обозначаются символом $\emptyset$.

Если a — некоторый объект, то множество, имеющее a своим единственным элементом, записывается так: $\{a\}$.

Если X — множество, то существует (единственное) множество, элементами которого являются все подмножества X ; оно обозначается символом $\mathfrak{P}(X)$. Имеем: $\emptyset \in \mathfrak{P}(X)$, $X \in \mathfrak{P}(X)$; отношения $x \in X$ и $\{x\} \in \mathfrak{P}(X)$ эквивалентны; отношения $Y \subset X$ и $Y \in \mathfrak{P}(X)$ эквивалентны.

Задача

Покажите, что множество всех подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов ($n \geq 0$), есть конечное множество, состоящее из 2^n элементов.

2. Булевская алгебра

Если X и Y — такие два множества, что $Y \subset X$, то множество $\{x \in X \mid x \notin Y\}$, являющееся подмножеством X , называется *разностью* между X и Y , или *дополнением* Y в X , и обозначается символом $X \setminus Y$, или $C_X Y$ (или CY , когда это не может привести к путанице).

Пусть X и Y — два множества. Существует множество, состоящее из элементов, принадлежащих и X и Y , — именно множество $\{x \in X \mid x \in Y\}$; оно называется *пересечением* X и Y и обозначается символом $X \cap Y$. Существует также множество, состоящее из элементов, принадлежащих по крайней мере одному из двух множеств X и Y ; оно называется *объединением* X и Y и обозначается символом $X \cup Y$.

Из определений сразу вытекают следующие предложения:

$$(1.2.1) \quad X \setminus X = \emptyset, \quad X \setminus \emptyset = X.$$

$$(1.2.2) \quad X \cup X = X, \quad X \cap X = X.$$

$$(1.2.3) \quad X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X.$$

$$(1.2.4) \quad \text{Отношения } X \subset Y, X \cup Y = Y, X \cap Y = X \text{ эквивалентны}$$

$$(1.2.5) \quad X \subset X \cup Y, X \cap Y \subset X.$$

$$(1.2.6) \quad \text{Отношение „} X \subset Z \text{ и } Y \subset Z \text{“ эквивалентно отношению } X \cup Y \subset Z; \text{ отношение „} Z \subset X \text{ и } Z \subset Y \text{“ эквивалентно отношению } Z \subset X \cap Y.$$

$$(1.2.7) \quad X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z,$$

это объединение обозначается символом $X \cup Y \cup Z$;

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z,$$

это пересечение обозначается символом $X \cap Y \cap Z$.

$$(1.2.8) \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \text{ (дистрибутивность)}.$$

(1.2.9) Для подмножеств X и Y множества E

$$C(CX) = X;$$

$$C(X \cup Y) = (CX) \cap (CY), \quad C(X \cap Y) = (CX) \cup (CY)$$

(вместо C_E мы пишем C). Отношения $X \subset Y$, $CX \supset CY$ эквивалентны. Отношения $X \cap Y = \emptyset$, $X \subset CY$, $Y \subset CX$ эквивалентны. Отношения $X \cup Y = E$, $CX \subset Y$, $CY \subset X$ эквивалентны.

Объединение $\{x\} \cup \{y\}$ обозначается символом $\{x, y\}$; подобным же образом $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ обозначается символом $\{x, y, z\}$ и т. д.

3. Произведение двух множеств

Любым двум объектам a, b соответствует новый объект — их упорядоченная пара (a, b) ; отношение $(a, b) = (a', b')$ эквивалентно отношению „ $a = a'$ и $b = b'$ “; в частности, $(a, b) = (b, a)$ в том и только в том случае, если $a = b$. Первый (соответственно второй) элемент упорядоченной пары $c = (a, b)$ называется *первой* (соответственно *второй*) *проекцией* пары c и обозначается символом $a = \text{pr}_1 c$ (соответственно $b = \text{pr}_2 c$).

Для любых двух множеств X и Y (различных или нет) существует (единственное) множество, состоящее из всех упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$. Оно обозначается символом $X \times Y$ и называется *декартовым произведением* (или просто *произведением*) X и Y .

Отношению $R(x, y)$ между $x \in X$ и $y \in Y$ соответствует свойство $R(\text{pr}_1 z, \text{pr}_2 z)$ элемента $z \in X \times Y$; подмножество произведения $X \times Y$, состоящее из элементов, для которых истинно это свойство, есть множество пар (x, y) , для которых истинно $R(x, y)$. Это подмножество называется *графиком* отношения R . Любое подмножество G произведения $X \times Y$ есть график некоторого отношения, именно отношения $(x, y) \in G$. Если $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, то график отношения „ $x \in X'$ и $y \in Y'$ “ есть $X' \times Y'$.

Следующие предложения сразу вытекают из определений:

(1.3.1) Отношение $X \times Y = \emptyset$ эквивалентно отношению „ $X = \emptyset$ или $Y = \emptyset$ “.

(1.3.2) Если $X \times Y \neq \emptyset$ (это означает, что и X и Y не пусты), то отношение $X' \times Y' \subset X \times Y$ эквивалентно отношению

$$„X' \subset X \text{ и } Y' \subset Y“.$$

$$(1.3.3) \quad (X \times Y) \cup (X' \times Y') = (X \cup X') \times Y.$$

$$(1.3.4) \quad (X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y').$$

Произведение трех множеств X, Y, Z по определению есть $X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$, а произведение n множеств аналогично определяется по индукции $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$. Элемент z произведения $X_1 \times \dots \times X_n$ обозначается $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вместо $((\dots (x_1, x_2), x_3), \dots, x_{n-1}), x_n)$; x_i есть i -я проекция элемента z ; она обозначается символом $x_i = \text{pr}_i z$, где $1 \leq i \leq n$. Если $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, то вместо $X \times X \times \dots \times X$ (n раз) мы пишем X^n .

4. Отображения

Пусть X и Y — два множества, $R(x, y)$ — отношение между $x \in X$ и $y \in Y$. Говорят, что R функционально по y , если для каждого $x \in X$ существует один и только один такой элемент $y \in Y$, что $R(x, y)$ истинно. График F такого отношения называется *функциональным графиком* в $X \times Y$. Подмножество F произведения $X \times Y$ можно охарактеризовать, следовательно, таким образом: для каждого $x \in X$ существует один и только один такой элемент $y \in Y$, что $(x, y) \in F$; этот элемент y называется *значением F в x* и обозначается символом $F(x)$. Функциональный график в $X \times Y$ называется также *отображением X в Y* или *функцией, определенной в X и принимающей значения в Y* .

Обычно, особенно в разговоре, об отображении и функциональном графике говорят так, как будто они являются двумя различными видами объектов, находящимися во взаимно однозначном соответствии, и по этой причине пользуются выражением „график отображения“. Но это только психологическое различие (соответствующее тому, понимать ли F „геометрически“ или же „аналитически“). Во всяком случае, в современной математике важнейшую роль играет рассмотрение отображения (функции) как единого объекта (такого же, как точка или число) и проведение ясного различия между отображением F и любым из его значений $F(x)$; первое есть элемент множества $\mathfrak{P}(X \times Y)$, второе — элемент множества Y , причем $F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = F(x)\}$.

Подмножества произведения $X \times Y$, которые могут быть функциональными графиками, образуют подмножество множества $\mathfrak{P}(X \times Y)$.

называемое *множеством отображений* X в Y и обозначаемое символом Y^X или $\mathfrak{F}(X, Y)$.

Примеры отображений. (1.4.1) Если b — элемент множества Y , то $X \times \{b\}$ есть функциональный график, называемый *постоянным отображением* X в Y со значением b ; существенно отличать его от элемента b множества Y .

(1.4.2) При $Y = X$ отношение $y = x$ функционально по y . Его график является множеством всех пар (x, x) и называется *диагональю* произведения $X \times X$, или *тождественным отображением* множества X в себя.

Если для каждого $x \in X$ построить объект $T(x)$, являющийся элементом множества Y , то отношение $y = T(x)$ будет функционально по y ; соответствующее отображение обозначается символом $x \rightarrow T(x)$. Это, конечно, обычное определение функции; оно в сущности совпадает с определением, данным выше, потому что если F — функциональный график, то он является отображением $x \rightarrow F(x)$. Примеры (1.4.1) и (1.4.2) записываются соответственно так: $x \rightarrow b$ и $x \rightarrow x$.

(1.4.3) Отображение $Z \rightarrow X \setminus Z$ множества $\mathfrak{F}(X)$ в себя.

(1.4.4) Отображения $z \rightarrow \text{pr}_1 z$ произведения $X \times Y$ в X и $z \rightarrow \text{pr}_2 z$ произведения $X \times Y$ в Y , называемые соответственно *первой* и *второй проекциями* в $X \times Y$: $\text{pr}_1(X \times Y) = X$; $\text{pr}_2(X \times Y) = Y$.

Из определения равенства множеств (1.1) следует, что отношение $F = G$ между двумя отображениями множества X в Y эквивалентно отношению „ $F(x) = G(x)$ для каждого $x \in X$ “.

Если A — подмножество множества X и F — отображение X в Y , то множество $F \cap (A \times Y)$ является функциональным графиком в $A \times Y$, который как отображение называется *сужением отображения F на множество A* . Когда F и G имеют одно и то же сужение на A [т. е. когда $F(x) = G(x)$ для каждого $x \in A$], говорят, что они *совпадают на A* . Отображение F множества X в Y , имеющее сужение F' на A , называется *продолжением отображения F' на X* ; вообще говоря, существует много различных продолжений функции F' .

Мы будем рассматривать в качестве аксиомы (аксиомы выбора) следующее предложение:

(1.4.5) Если дано такое отображение F множества X в $\mathfrak{F}(Y)$, что $F(x) \neq \emptyset$ для каждого $x \in X$, то существует такое отображение f множества X в Y , что $f(x) \in F(x)$ для каждого $x \in X$.

Иногда удается показать, что теорему, доказанную с помощью этой аксиомы выбора, в действительности можно доказать, не пользуясь ею. Мы никогда не будем входить в обсуждение такого рода вопросов, по существу относящихся к курсу логики.

5. Образы и прообразы

Пусть F — отображение множества X в Y . Для любого подмножества $A \subset X$ подмножество множества Y , определяемое свойством: „существует такой элемент $x \in A$, что $y = F(x)$ “, называется *образом* множества A при отображении F и обозначается символом $F(A)$.

Имеем следующие утверждения:

$$(1.5.1) \quad F(A) = \text{pr}_2(F \cap (A \times Y)).$$

$$(1.5.2) \quad \text{Отношение } A \neq \emptyset \text{ эквивалентно отношению } F(A) \neq \emptyset.$$

$$(1.5.3) \quad F(\{x\}) = \{F(x)\} \text{ для каждого } x \in X.$$

$$(1.5.4) \quad \text{Из } A \subset B \text{ следует } F(A) \subset F(B).$$

$$(1.5.5) \quad F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B).$$

$$(1.5.6) \quad F(A \cup B) = F(A) \cup F(B).$$

В самом деле, в силу (1.5.4), $F(A) \subset F(A \cup B)$ и $F(B) \subset F(A \cup B)$. С другой стороны, если $y \in F(A \cup B)$, то существует такой элемент $x \in A \cup B$, что $y = F(x)$. Так как $x \in A$ или $x \in B$, то $y \in F(A)$ или $y \in F(B)$.

Легко привести примеры, когда $F(A \cap B) \neq F(A) \cap F(B)$ (в качестве F можно, например, взять первую проекцию произведения).

Для любого подмножества $A' \subset Y$ подмножество множества X , определяемое свойством $F(x) \in A'$, называется *прообразом* A' при отображении F и обозначается символом $F^{-1}(A')$.

Отметим такие утверждения:

$$(1.5.7) \quad F^{-1}(A') = \text{pr}_1(F \cap (X \times A')).$$

$$(1.5.8) \quad F^{-1}(A') = F^{-1}(A' \cap F(X)),$$

потому что для каждого $x \in X$ имеем $F(x) \in F(X)$.

$$(1.5.9) \quad F^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

[но равенство $F^{-1}(A') = \emptyset$ может иметь место и для непустых подмножеств $A' \subset Y$ — именно для тех, для которых $A' \cap F(X) = \emptyset$].

(1.5.10) Из $A' \subset B'$ следует $F^{-1}(A') \subset F^{-1}(B')$.

$$(1.5.11) \quad F^{-1}(A' \cap B') = F^{-1}(A') \cap F^{-1}(B').$$

$$(1.5.12) \quad F^{-1}(A' \cup B') = F^{-1}(A') \cup F^{-1}(B').$$

$$(1.5.13) \quad F^{-1}(A' \setminus B') = F^{-1}(A') \setminus F^{-1}(B'), \text{ если } A' \supset B'.$$

Отметим различие между (1.5.11) и (1.5.5). Если $B \subset A \subset X$, то в силу (1.5.6) $F(A) = F(B) \cup F(A \setminus B)$, поэтому $F(A \setminus B) \supset F(A) \setminus F(B)$; но между $F(X \setminus A)$ и $Y \setminus F(A)$ нет никакой связи¹⁾.

Множество $F^{-1}(\{y\})$ обозначают также символом $F^{-1}(y)$; таким образом, $F(x) = y$ эквивалентно $x \in F^{-1}(y)$.

Мы имеем:

$$(1.5.14) \quad F(F^{-1}(A')) = A' \cap F(X) \text{ для } A' \subset Y.$$

$$(1.5.15) \quad F^{-1}(F(A)) \supset A \text{ для } A \subset X.$$

В заключение отметим специальные соотношения, имеющие место в произведении.

$$(1.5.16) \quad \begin{aligned} \text{pr}_1^{-1}(A) &= A \times Y \text{ для любого } A \subset X; \\ \text{pr}_2^{-1}(A') &= X \times A' \text{ для любого } A' \subset Y. \end{aligned}$$

$$(1.5.17) \quad Z \subset \text{pr}_1(Z) \times \text{pr}_2(Z) \text{ для любого } Z \subset X \times Y.$$

Задачи

1. Приведите пример таких двух подмножеств $A \supset B$ множества X и отображения F , чтобы $F(A \setminus B) \neq F(A) \setminus F(B)$.

2. Приведите примеры отображений $F: X \rightarrow Y$ и подмножеств $A \subset X$, для которых:

а) $F(X \setminus A) \subset Y \setminus F(A)$;

б) $F(X \setminus A) \supset Y \setminus F(A)$;

с) ни одно из множеств $F(X \setminus A)$, $Y \setminus F(A)$ не содержится в другом (в качестве X и Y можно, например, взять конечные множества).

3. Для любого подмножества G произведения $X \times Y$, любого подмножества $A \subset X$ и любого подмножества $A' \subset Y$ положим $G(A) = \text{pr}_2(G \cap (A \times Y))$ и $G^{-1}(A') = \text{pr}_1(G \cap (X \times A'))$. Для $x \in X$ и $y \in Y$ вместо $G(\{x\})$ и

¹⁾ Очевидно, имеет место включение $Y \setminus F(A) \subset (Y \setminus F(X)) \cup F(X \setminus A)$. — Прим. перев.

$G^{-1}(\{y\})$ будем соответственно писать $G(x)$ и $G^{-1}(y)$. Докажите, что эквивалентны следующие четыре свойства:

- а) G есть график отображения некоторого подмножества X в Y ;
- б) $G(G^{-1}(A')) \subset A'$ для любого подмножества $A' \subset Y$;
- в) $G^{-1}(A' \cap B') = G^{-1}(A') \cap G^{-1}(B')$ для любой пары A', B' подмножеств Y ;
- г) $G^{-1}(A') \cap G^{-1}(B') = \emptyset$ для любой пары A', B' подмножеств Y , для которой $A' \cap B' = \emptyset$.

[Совет: покажите, что когда не выполняется а), нарушаются б), в) и г).]

6. Сюръективные, инъективные и биективные отображения

Пусть F — отображение множества X в Y . Отображение F называется:

сюръективным (или отображением на или накрытием), если $F(X) = Y$, т. е. если для каждого $y \in Y$ существует (по крайней мере один) такой элемент $x \in X$, что $y = F(x)$;

инъективным (или взаимно однозначным или вложением), если из $F(x) = F(x')$ следует $x = x'$;

биективным (или наложением), если оно является одновременно и сюръективным и инъективным.

Любое сужение инъективного отображения инъективно.

Любое отображение F множества X в Y может также рассматриваться как отображение X в $F(X)$; в этом случае оно является сюръективным, а если (как отображение X в Y) оно было инъективно, то как отображение X на $F(X)$ оно является даже биективным.

Примеры. (1.6.1). Если A — произвольное подмножество X , то сужение на A тождественного отображения $x \rightarrow x$ является инъективным отображением j_A , называемым *естественным вложением* подмножества A в X . Для любого подмножества $B \subset X$ имеем $j_A^{-1}(B) = B \cap A$.

(1.6.2) Если F — любое отображение X в Y , то отображение $x \rightarrow (x, F(x))$ множества X в $X \times Y$ инъективно.

(1.6.3) Проекции pr_1 и pr_2 являются сюръективными отображениями $X \times Y$ соответственно на X и Y .

(1.6.4) Тожественное отображение любого множества биективно.

(1.6.5) Отображение $Z \rightarrow X \setminus Z$ множества $\mathfrak{P}(X)$ в себя биективно.

(1.6.6) Если $Y = \{b\}$ состоит из одного элемента, то отображение $x \rightarrow (x, b)$ множества X в $X \times \{b\}$ биективно.

(1.6.7) Отображение $(x, y) \rightarrow (y, x)$ произведения $X \times Y$ в $Y \times X$ биективно.

Если F — инъективное отображение, то $F^{-1}(F(A)) = A$ для любого $A \subset X$. Если F — сюръективно, то $F(F^{-1}(A')) = A'$ для любого $A' \subset Y$.

Если F — биективное отображение, то в соответствии с определением отношение $y = F(x)$ функционально по x . Соответствующее отображение множества Y в X называется отображением, *обратным* отображению F , и обозначается символом F^{-1} (если же F не биективно, то это отображение не определено!). Таким образом, отношения $y = F(x)$ и $x = F^{-1}(y)$ эквивалентны, F^{-1} само биективно и $(F^{-1})^{-1} = F$. Для каждого подмножества $A' \subset Y$ образ A' при F^{-1} совпадает с прообразом A' при F , так что обозначения согласуются.

Задача

Пусть F — отображение $X \rightarrow Y$. Покажите, что эквивалентны следующие свойства:

- F — вложение;
- $F^{-1}(F(A)) = A$ для любого подмножества $A \subset X$;
- $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$ для любой пары A, B подмножеств X ;
- $F(A) \cap F(B) = \emptyset$ для любой пары A, B подмножеств X , для которой $A \cap B = \emptyset$;
- $F(A \setminus B) = F(A) \setminus F(B)$ для любой пары A, B подмножеств X , для которой $B \subset A$.

7. Композиция отображений

Пусть X, Y и Z — три множества, F — отображение множества X в Y , G — отображение множества Y в Z . Тогда $x \rightarrow G(F(x))$ есть отображение множества X в Z , которое называется *композицией* отображений G и F (в этом порядке!) или *сложным* отображением и обозначается символом $H = G \circ F$.

Справедливы соотношения:

$$(1.7.1) \quad H(A) = G(F(A)) \text{ для любого } A \subset X.$$

$$(1.7.2) \quad H^{-1}(A'') = F^{-1}(G^{-1}(A'')) \text{ для любого } A'' \subset Z.$$

Если и F и G — инъективные (соответственно сюръективные, биективные) отображения, то и $H = G \circ F$ — инъективное (соответственно сюръективное, биективное) отображение; если F и G биективны, то $H^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$. Если F биективно, то $F^{-1} \circ F$ — тождественное отображение множества X , а $F \circ F^{-1}$ — тождественное отображение множества Y .

Пусть X, Y, Z и T — множества, F_1 — отображение множества X в Y , F_2 — отображение Y в Z , F_3 — отображение Z в T . Тогда из определения следует, что $F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$. Это отображение множества X в T обозначается символом $F_3 \circ F_2 \circ F_1$. Точно таким же образом определяется композиция любого числа отображений.

Задачи

1. Пусть A, B, C, D — множества, f — отображение A в B , g — отображение B в C , h — отображение C в D . Покажите, что если $g \circ f$ и $h \circ g$ биективны, то и все отображения f, g, h будут биективными.

2. Пусть A, B, C — множества, f — отображение A в B , g — отображение B в C , h — отображение C в A . Покажите, что если среди отображений $h \circ g \circ f, g \circ f \circ h, f \circ h \circ g$ любые два являются сюръективными, а третье — инъективным или же два являются инъективными, а третье сюръективным, то все три отображения f, g, h биективны.

3. Пусть F — подмножество произведения $X \times Y$, G — подмножество произведения $Y \times X$. Предположим, что в обозначениях, введенных в задаче 3 § 1.5, $G(F(x)) = \{x\}$ для любого $x \in X$ и $F(G(y)) = \{y\}$ для любого $y \in Y$. Покажите, что F — график биективного отображения X на Y , а G — график отображения, обратного F .

4. Пусть X, Y — два множества, f — инъективное отображение X в Y , g — инъективное отображение Y в X . Покажите, что существуют такие два подмножества A, B множества $X, A \cup B = X$, и такие два подмножества A', B' множества $Y, A' \cup B' = Y$, что $A' = f(A)$ и $B = g(B')$.

[Пусть $R = X \setminus g(Y)$ и $h = g \circ f$; в качестве A возьмите пересечение всех подмножеств $M \subset X$, для которых $M \supset R \cup h(M)$.]

8. Семейства элементов. Объединение и пересечение семейств множеств

Пусть L и X — два множества. Отображение множества L в X иногда называется также *семейством элементов множества X* , имеющим L множеством *индексов*, и обозначается символом $\lambda \rightarrow x_\lambda$, или $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$, или, когда это не может привести к недоразумению, просто (x_λ) . Наиболее важные примеры дают *последовательности* (конечные или бесконечные), соответствующие случаям, когда L — конечное или бесконечное подмножество множества $\mathbb{N}$ целых чисел ≥ 0 .

Следует отличать семейство $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ элементов множества X от подмножества множества X , состоящего из элементов этого семейства; это подмножество служит образом множества L при отображении $\lambda \rightarrow x_\lambda$ и вполне может иметь только один элемент. Различные семейства могут, таким образом, иметь одно и то же множество элементов.

Для любого подмножества $M \subset L$ сужение на M отображения $\lambda \rightarrow x_\lambda$ называется *подсемейством* семейства $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$, имеющим множество индексов M , и обозначается символом $(x_\lambda)_{\lambda \in M}$.

Множество элементов конечной последовательности $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ записывается в виде $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; аналогичные обозначения можно применять и для множества элементов бесконечной последовательности.

Если $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — *семейство подмножеств* множества X ¹⁾, то множество элементов $x \in X$, для которых существует такое $\lambda \in L$, что $x \in A_\lambda$, называется *объединением* семейства $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ и обозначается символом $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ или $\bigcup_\lambda A_\lambda$. Множество элементов $x \in X$, для которых $x \in A_\lambda$ при каждом $\lambda \in L$, называется *пересечением* семейства $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ и обозначается символом $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ или $\bigcap_\lambda A_\lambda$. При $L = \{1, 2\}$ объединением и пересечением соответственно являются $A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2$.

Легко проверяются следующие предложения:

$$(1.8.1) \quad C\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} (CA_\lambda).$$

$$(1.8.2) \quad \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu).$$

$$(1.8.3) \quad \left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

$$(1.8.4) \quad F\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} F(A_\lambda),$$

если F — отображение X в Y и $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство подмножеств множества X .

$$(1.8.5) \quad F^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in L} A'_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} F^{-1}(A'_\lambda),$$

$$(1.8.6) \quad F^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in L} A'_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in L} F^{-1}(A'_\lambda),$$

если F — отображение X в Y и $(A'_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство подмножеств множества Y .

¹⁾ То есть отображение множества L в множество $\mathfrak{P}(X)$. — Прим. ред.

Если B — подмножество X , то *покрытием* B называют такое семейство $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ подмножеств множества X , что $B \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Задача

Пусть $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ — конечное семейство множеств. Для любого подмножества H промежутка $[1, n]$ множества N положим: $P_H = \bigcup_{i \in H} X_i$ и $Q_H = \bigcap_{i \in H} X_i$. Пусть $\mathfrak{F}_k$ — множество всех подмножеств промежутка $[1, n]$, состоящих из k элементов. Покажите, что

$$\begin{aligned} \bigcup_{H \in \mathfrak{F}_k} Q_H &\supset \bigcap_{H \in \mathfrak{F}_k} P_H \quad \text{если } 2k \leq n+1, \\ \bigcup_{H \in \mathfrak{F}_k} Q_H &\subset \bigcap_{H \in \mathfrak{F}_k} P_H \quad \text{если } 2k \geq n+1. \end{aligned}$$

9. Счетные множества

Множество X называется *равномощным* множеству Y , если существует биективное отображение X на Y . Ясно, что X равномощно X ; если X равномощно Y , то Y равномощно X ; если X и Y равномощны Z , то X равномощно Y . Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству N целых чисел ≥ 0 .

(1.9.1) Любое подмножество множества N целых чисел ≥ 0 конечно или счетно.

В самом деле, допустим, что $A \subset N$ бесконечно. Определим отображение $n \rightarrow x_n$ множества N в A с помощью следующего индуктивного процесса: x_0 есть наименьший элемент множества A , x_n — наименьший элемент множества $A \setminus \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, которое, по предположению, не пусто. Прежде всего отсюда следует, что $x_i \neq x_n$ при $i < n$ и поэтому отображение $n \rightarrow x_n$ инъективно. Докажем вдобавок, что $x_i < x_n$ при $i < n$. Воспользуемся индукцией по i при фиксированном n . По определению x_n мы имеем $x_0 < x_n$, и если неравенство $x_j < x_n$ доказано при $j < i$, то по определению x_i имеем $x_i \leq x_n$ и, следовательно, $x_i < x_n$, так как $x_i \neq x_n$. Далее, из неравенства $x_i < x_n$ при $i < n$ с помощью индукции по n сразу следует, что $n \leq x_n$ для каждого n ; поэтому, если $a \in A$, то мы имеем $a \leq x_a$. Пусть теперь $a > x_0$ и m — наибольшее целое число $< a$, для которого $x_m < a$. Если бы нашлось такое число $b \in A$, что $x_m < b < a$, то мы по определению имели бы $x_{m+1} \leq b < a$, что противоречит определению числа m . Таким образом, a — наименьший элемент множества $A \setminus \{x_0, \dots, x_m\}$; иными

словами, $a = x_{m+1}$ и отображение $n \rightarrow x_n$ является сюръективным, ч. т. д.

Из (1.9.1) следует, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно; такое множество называется также *не более чем счетным*.

(1.9.2) Пусть A — счетное множество и f — отображение A на множество B . Тогда B не более чем счетно.

Пусть $n \rightarrow a_n$ — биективное отображение $\mathbb{N}$ на A . Тогда $n \rightarrow f(a_n)$ — отображение $\mathbb{N}$ на B , и, следовательно, мы можем считать, что $A = \mathbb{N}$. Для каждого $b \in B$, по предположению, множество $f^{-1}(b)$ не пусто; пусть $m(b)$ — его наименьший элемент. Тогда $f(m(b)) = b$, а потому m — инъективное отображение множества B в $\mathbb{N}$. Можно рассматривать m как биективное отображение B на $m(B) \subset \mathbb{N}$, и в силу (1.9.1) $m(B)$ не более чем счетно, ч. т. д.

Заметим, что если множество A не более чем счетно, то всегда существует сюръективное отображение $\mathbb{N}$ на A . Это очевидно, если A бесконечно; в противном же случае существует биективное отображение f промежутка $0 \leq i \leq m$ на A , и, полагая $g(n) = f(m)$ при $n > m$, можно продолжить f до сюръективного отображения всего $\mathbb{N}$.

(1.9.3) Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ счетно.

Полагая

$$f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y,$$

определим инъективное отображение f множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ („диагональная нумерация“; отображение f оказывается даже биективным, но этот результат нам не потребуется). В самом деле, $(a+1) \times (a+2)/2 = a+1 + a(a+1)/2$; поэтому если $x+y = a$ и $x+y < x'+y'$, то, так как $y \leq a$, имеем $f(x, y) \leq a + a(a+1)/2 < f(x', y')$, а если $x+y = x'+y'$ и $y' < y$, то $f(x, y) = f(x', y') + y - y'$. Таким образом, из $(x, y) \neq (x', y')$ следует $f(x, y) \neq f(x', y')$. Затем применяем (1.9.1).

Будем говорить, что семейство $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ *счетно* (соответственно *не более чем счетно*), если счетно (соответственно не более чем счетно) множество индексов L .

(1.9.4) Объединение счетного семейства счетных множеств счетно.

Пусть $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — счетное семейство счетных множеств. Существует биективное отображение $n \rightarrow \lambda_n$ множества $\mathbb{N}$ на L и (для каждого $\lambda \in L$) биективное отображение $n \rightarrow f_\lambda(n)$ множества $\mathbb{N}$ на A_λ . Поло-

жим $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ и рассмотрим отображение $(m, n) \rightarrow f_{\lambda_n}(m)$ произведения $N \times N$ в A . Это отображение сюръективно. В самом деле, если $x \in A_\mu$, то существует такое n , что $\mu = \lambda_n$, и такое m , что $x = f_\mu(m) = f_{\lambda_n}(m)$. Так как A бесконечно, нужный результат следует теперь из (1.9.3) и (1.9.2).

Предложение (1.9.4) останется справедливым, если слово „счетное“ всюду заменить словами „не более чем счетное“. Нужно только, пользуясь замечанием, сделанным после (1.9.2), заменить в доказательстве биективные отображения сюръективными.

Наконец, будем рассматривать в качестве аксиомы следующий результат:

(1.9.5) *Каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Задачи

1. Покажите, что множество $\mathfrak{F}(N)$ всех конечных подмножеств множества N счетно.

[Запишите его как объединение счетного множества счетных множеств.]

2. Покажите, что множество всех конечных последовательностей элементов множества N счетно.

[Воспользуйтесь задачей 1; обратите внимание на различие между последовательностью и множеством элементов этой последовательности!]

3. Докажите утверждение задачи 4 § 1.7 следующим методом: положите $u = g \circ f$, $v = f \circ g$ и по индукции определите u_n и v_n условиями: $u_n = u_{n-1} \circ u$, $v_n = v_{n-1} \circ v$; затем рассмотрите в X (соответственно в Y) возрастающую последовательность множеств $u_n(X)$ [соответственно $v_n(Y)$] и их образы при f (соответственно при g) в Y (соответственно в X).

4. Покажите, что для того чтобы множество X было бесконечно, необходимо и достаточно следующее условие: для каждого отображения f множества X в себя существует такое непустое подмножество $A \subset X$, что $A \neq X$ и $f(A) \subset A$.

[Покажите сначала, что если бы f не обладало этим свойством и X было бесконечным, то X было бы счетным и можно было бы считать, что $X = N$ и $f(n) > n$ при $n \geq 0$; покажите, что это приводит к противоречию.]

5. Пусть E — бесконечное множество, D — не более чем счетное подмножество E , причем $E \setminus D$ бесконечно. Покажите, что $E \setminus D$ равносильно множеству E .

[С помощью (1.9.4) и (1.9.5) определите биективное отображение E на $E \setminus D$.]

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Материал этой главы является вполне классическим. Главное отличие от большинства изложений теории действительных чисел состоит в том, что здесь их свойства выводятся из небольшого числа утверждений, взятых в качестве аксиом, тогда как на самом деле эти утверждения могут быть доказаны как следствия из аксиом теории множеств (или же аксиом натуральных чисел вместе с некоторыми аксиомами теории множеств, позволяющими провести классические конструкции „дедекиндовых сечений“ или „канторовых фундаментальных последовательностей“). Эти доказательства представляют большой логический интерес, и исторически они очень помогли выяснению классического (и несколько туманного) понятия „континуума“. Но они не имеют к анализу никакого отношения. Интересующийся читатель найдет их практически в любой книге по анализу; особенно ясное и четкое изложение см. в книге Ландау [19].

1. Аксиомы действительных чисел

Поле действительных чисел есть множество $\mathbb{R}$, для которого определены:

1°) два отображения $(x, y) \rightarrow x + y$ и $(x, y) \rightarrow xy$ произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$;

2°) отношение $x \leq y$ (записываемое также в виде $y \geq x$) между элементами множества $\mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим четырем группам аксиом:

(I) Множество $\mathbb{R}$ есть *поле*, иными словами:

$$(I.1) \quad x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$$(I.2) \quad x + y = y + x;$$

(I.3) существует такой элемент $0 \in \mathbb{R}$, что $0 + x = x$ для каждого $x \in \mathbb{R}$;

(I.4) для каждого элемента $x \in \mathbb{R}$ существует такой элемент $-x \in \mathbb{R}$, что $x + (-x) = 0$;

$$(I.5) \quad x(yz) = (xy)z;$$

$$(I.6) \quad xy = yx;$$

(I.7) в $\mathbf{R}$ существует такой элемент $1 \neq 0$, что $1 \cdot x = x$ для каждого $x \in \mathbf{R}$;

(I.8) для каждого элемента $x \neq 0$ в $\mathbf{R}$ существует такой элемент $x^{-1} \in \mathbf{R}$ (обозначаемый также символом $1/x$), что $xx^{-1} = 1$;

$$(I.9) \quad x(y+z) = xy + xz.$$

Мы предполагаем, что элементарные следствия из этих аксиом (общая теория полей) известны¹⁾.

(II) Множество $\mathbf{R}$ есть *упорядоченное поле*. Это означает, что выполняются следующие аксиомы:

(II.1) из $x \leq u$ и $u \leq z$ следует $x \leq z$;

(II.2) отношение „ $x \leq u$ и $u \leq x$ “ эквивалентно отношению $x = u$;

(II.3) для любых двух элементов x, u множества $\mathbf{R}$ или $x \leq u$ или $u \leq x$;

(II.4) из $x \leq u$ следует $x + z \leq u + z$;

(II.5) из $0 \leq x$ и $0 \leq u$ следует $0 \leq xu$.

Отношение „ $x \leq u$ и $x \neq u$ “ записывается в виде $x < u$ или $u > x$.

Для любой пары элементов a и b множества $\mathbf{R}$, такой, что $a < b$, множество действительных чисел x , удовлетворяющих условию $a < x < b$, называется *открытым промежутком с началом a и концом b* и обозначается символом $]a, b[$; множество действительных чисел x , удовлетворяющих условию $a \leq x \leq b$, называется *замкнутым промежутком с началом a и концом b* и обозначается символом $[a, b]$ (при $a = b$ символ $[a, a]$ обозначает одноточечное множество $\{a\}$); множество действительных чисел x , удовлетворяющих условию $a < x \leq b$ (соответственно $a \leq x < b$), называется *полуоткрытым промежутком с началом a и концом b , открытым в a (соответственно в b) и замкнутым в b (соответственно в a)* и обозначается символом $]a, b]$ (соответственно $[a, b[$). Начало и конец промежутка называются также „концами“ этого промежутка.

(III) Множество $\mathbf{R}$ есть *архимедово упорядоченное поле*. Это означает, что оно удовлетворяет аксиоме Архимеда: для любой

¹⁾ См. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962. — *Прим. ред.*

пары x, y действительных чисел, такой, что $0 < x, 0 \leq y$, существует такое натуральное число n , что $y \leq nx$.

(IV) Множество $\mathbf{R}$ удовлетворяет аксиоме о вложенных промежутках: если $\{[a_n, b_n]\}$ — последовательность таких замкнутых промежутков, что $a_n \leq a_{n+1}$ и $b_{n+1} \leq b_n$ при каждом n , то пересечение этой последовательности не пусто.

2. Порядковые свойства действительных чисел

Отношение $x \leq y$ эквивалентно отношению „ $x < y$ или $x = y$ “.

(2.2.1) Для любой пары действительных чисел x, y выполняется одно и только одно из трех отношений: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

Это следует из (II.3) и (II.2), так как если $x \neq y$, то невозможно, чтобы одновременно выполнялись оба неравенства $x < y$ и $x > y$.

(2.2.2) Из каждого из отношений „ $x \leq y$ и $y < z$ “ и „ $x < y$ и $y \leq z$ “ следует отношение $x < z$.

В самом деле, в силу (II.1) из них следует неравенство $x \leq z$, и если бы мы имели $x = z$, то мы имели бы одновременно $x \leq y$ и $y < x$ (или же $x < y$ и $y \leq x$), что абсурдно.

(2.2.3) Любое конечное подмножество A множества $\mathbf{R}$ имеет наибольший элемент b и наименьший элемент a (т. е. для каждого $x \in A$ имеем: $a \leq x \leq b$).

Проведем индукцию по числу n элементов множества A . При $n = 1$ свойство очевидно. Пусть c — произвольный элемент множества A и $B = A \setminus \{c\}$. Так как B имеет $n - 1$ элемент, то существует в этом множестве наименьший элемент a' и наибольший элемент b' . Если $a' \leq c \leq b'$, то a' — наименьший, а b' — наибольший элемент множества A . Если $b' \leq c$, то c — наибольший, а a' — наименьший элемент множества A . Если $c \leq a'$, то c — наименьший, а b' — наибольший элемент множества A .

(2.2.4) Если A — конечное подмножество $\mathbf{R}$, состоящее из n элементов, то существует единственное такое биективное отображение f множества I_n натуральных чисел i , удовлетворяющих условию $1 \leq i \leq n$, на A , что $f(i) < f(j)$ при $i < j$.

Отображение f называется естественным упорядочением множества A .

Проведем индукцию по n . При $n = 1$ результат очевиден. Пусть b — наибольший элемент множества A (2.2.3) и $B = A \setminus \{b\}$. Пусть

g — естественное упорядочение множества B . Любое отображение f множества I_n на A , обладающее указанными выше свойствами, должно быть таким, что $f(n) = b$, и, следовательно, $f(I_{n-1}) = B$. Поэтому f на I_{n-1} должно совпадать с естественным упорядочением g множества B , откуда следует, что f единственно. Наоборот, определяя f как отображение, равное g на I_{n-1} и такое, что $f(n) = b$, сразу видим, что f обладает требуемыми свойствами.

(2.2.5) Если (x_i) и (y_i) — две такие конечные последовательности, состоящие из n действительных чисел ($1 \leq i \leq n$), что $x_i \leq y_i$ для каждого i , то

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Если, кроме того, по крайней мере для одного индекса i имеем $x_i < y_i$, то

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n < y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

При $n = 2$ из предположений с помощью (II. 4) последовательно получаем

$$x_1 + x_2 \leq y_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$$

и, таким образом, первое заключение в этом случае верно. Кроме того, из равенства $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ следует $x_1 + x_2 = x_1 + y_2 = y_1 + y_2$, поэтому $x_2 = y_2$ и $x_1 = y_1$, откуда вытекает наше второе утверждение. Доказательство завершается индукцией по n , причем применяется результат, только что установленный для $n = 2$.

(2.2.6) Отношение $x \leq u$ эквивалентно отношению $x + z \leq u + z$; тот же результат останется справедливым, если знак $\leq$ заменить на $<$.

Нам уже известно (II. 4), что из $x \leq u$ следует $x + z \leq u + z$. Наоборот, из $x + z \leq u + z$ следует $x + z + (-z) \leq u + z + (-z)$, т. е. $x \leq u$. С другой стороны, $x + z = u + z$ эквивалентно $x = u$.

(2.2.7) Отношения $x \leq u$, $0 \leq u - x$, $x - u \leq 0$, $-u \leq -x$, эквивалентны; тот же результат останется справедливым, если знак $\leq$ заменить на $<$.

Это следует из (2.2.6), если последовательно положить $z = -x$, $z = -u$ и $z = -x - u$.

Действительные числа, удовлетворяющие условию $x \geq 0$ (соответственно $x > 0$), называются *положительными* (соответственно *строго положительными*), а числа, удовлетворяющие условию $x \leq 0$ (соответственно $x < 0$), называются *отрицательными* (соответственно *строго отрицательными*)¹⁾. Множество положительных

¹⁾ В переводе сохранена терминология автора, отличающаяся от общепринятой. — Прим. перев.

(соответственно строго положительных) чисел обозначается символом R_+ (соответственно R_+^*).

(2.2.8) Если числа $x_1, \dots, x_n$ положительны, то и сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ положительна; если, кроме того, не имеют места равенства $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, то $x_1 + x_2 + \dots + x_n > 0$.

Это — частный случай (2.2.5). В силу этого утверждения отношение $x \geq 0$ (соответственно $x > 0$) эквивалентно отношению $nx \geq 0$ (соответственно $nx > 0$) для любого целого $n > 0$.

Положительное число $b - a$ называется длиной промежутка с началом a и концом b .

(2.2.9) Пусть $J_1, \dots, J_n$ — n открытых промежутков, никакие два из которых не имеют общих точек, и пусть I — промежуток, содержащий $\bigcup_{k=1}^n J_k$. Тогда если l_k — длина промежутка J_k ($1 \leq k \leq n$) и l — длина I , то $l_1 + l_2 + \dots + l_n \leq l$.

Пусть $I =]a, b[$, $J_k =]c_k, d_k[$. Для каждого $k \neq 1$ мы имеем или $c_k < d_k \leq c_1$ или $d_1 \leq c_k < d_k$, так как в противном случае пересечение $J_1 \cap J_k$ было бы непусто. При $n = 1$ утверждение проверяется непосредственно; поскольку $a \leq c_1 < d_1 \leq b$, то $-c_1 \leq -a$ и $d_1 - c_1 \leq b - a$. Проведем индукцию по n . Пусть $J_{i_1}, \dots, J_{i_p}$ — промежутки, содержащиеся в $]a, c_1[$, и $J_{j_1}, \dots, J_{j_{n-1-p}}$ — промежутки, содержащиеся в $]d_1, b[$; тогда по индукции $\sum_{h=1}^p l_{i_h} \leq c_1 - a$,

$$\sum_{k=1}^{n-1-p} l_{j_k} \leq b - d_1 \text{ и}$$

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 + \dots + l_n &= l_1 + \sum_h l_{i_h} + \sum_{k=1}^{n-1-p} l_{j_k} \leq \\ &\leq d_1 - c_1 + c_1 - a + b - d_1 = b - a. \end{aligned}$$

Для любого действительного числа x определим абсолютную величину числа x как число, равное x , если $x \geq 0$, и $-x$, если $x \leq 0$. Таким образом, $|-x| = |x|$; отношение $|x| = 0$ эквивалентно отношению $x = 0$. Обозначим $x^+ = \frac{(x + |x|)}{2}$ (положительная часть числа x) и $x^- = \frac{(|x| - x)}{2}$ (отрицательная часть числа x). Очевидно, что

$$\begin{aligned} x^+ &= \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0; \end{cases} & x^- &= \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x \leq 0; \end{cases} \\ x &= x^+ - x^-; & |x| &= x^+ + x^-. \end{aligned}$$

(2.2.10) Если $a > 0$, то отношение $|x| \leq a$ эквивалентно отношению $-a \leq x \leq a$, а отношение $|x| < a$ эквивалентно отношению $-a < x < a$.

В самом деле, если $x \geq 0$, то неравенство $x > -a$ выполняется всегда и отношение $|x| \leq a$ (соответственно $|x| < a$) эквивалентно отношению $x \leq a$ (соответственно $x < a$). Если же $x \leq 0$, то всегда выполняется неравенство $x < a$ и отношение $|x| \leq a$ (соответственно $|x| < a$) эквивалентно отношению $-x \leq a$ (соответственно $-x < a$).

(2.2.11) Для любой пары действительных чисел x, y

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{и} \quad ||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

Если оба числа x, y положительны или отрицательны, то первое неравенство вытекает из определения (2.2.8). Если же, например, $x \leq 0 \leq y$, то $x+y \leq y \leq y+|x| = |y|+|x|$ и $x+y \geq x \geq x-|y| = -|x|-|y|$. Из первого неравенства следует: $|x| = |y+(x-y)| \leq |y| + |x-y|$ и $|y| = |x+(y-x)| \leq |x| + |y-x|$, поэтому $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$.

Из (2.2.11) по индукции следует, что

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

(2.2.12) Если $z \geq 0$, то из $x \leq y$ следует $xz \leq yz$.

В самом деле, в силу (2.2.7) из $x \leq y$ следует $0 \leq y-x$, и, значит, в силу (II.5) $0 \leq z(y-x) = zy - zx$.

(2.2.13) Из $x \leq 0$ и $y \geq 0$ следует $xy \leq 0$; из $x \leq 0$ и $y \leq 0$ следует $xy \geq 0$. Те же результаты останутся справедливыми, если знак $\leq$ заменить на $<$. В частности, для любого действительного числа $x^2 \geq 0$, а если $x \neq 0$, то $x^2 > 0$.

Первое утверждение следует из (II.5) и из того, что $(-x)y = -(xy)$, $(-x)(-y) = xy$; с другой стороны, из $xy = 0$ следует $x = 0$ или $y = 0$.

Из (2.2.13) вытекает, что для любой пары действительных чисел x, y

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

Из (2.2.13) и (I.7) следует, что $1 = 1^2 > 0$; поэтому в силу (2.2.8) действительное число $n \cdot 1$ (1 складывается n раз) при $n > 0$ будет > 0 ; это показывает, что отображение $n \rightarrow n \cdot 1$ множества натуральных чисел¹⁾ в $\mathbb{R}$ инъективно и сохраняет отношение порядка, сложение и умножение. Поэтому натуральные числа с помощью

¹⁾ См. примечание на стр. 31; автор причисляет к натуральным числам и 0. — *Прим. перев.*

этого отображения отождествляются с соответствующими действительными числами.

(2.2.14) Если $x > 0$, то $x^{-1} > 0$. При $z > 0$ отношение $x \leq y$ эквивалентно отношению $xz \leq yz$. Отношение $0 < x < y$ эквивалентно отношению $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Первое утверждение следует из того факта, что $xx^{-1} = 1 > 0$, поэтому в силу (2.2.13) $x^{-1} > 0$. Второе утверждение следует из первого и из (2.2.12), так как $x = (xz)z^{-1}$. Третье утверждение является очевидным следствием второго.

Действительные числа вида $\pm r/s$, где r и s — натуральные числа, $s \neq 0$, называются *рациональными числами*. Рациональные числа, у которых $s = 1$, называются *целыми числами* (положительными или отрицательными).

Множество всех целых чисел обозначается буквой $\mathbf{Z}$, а множество рациональных чисел — буквой $\mathbf{Q}$.

(2.2.15) Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел счетно.

Поскольку $\mathbf{Q}$ является объединением множеств $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$ и $\mathbf{Q} \cap (-\mathbf{R}_+)$, достаточно доказать, что счетно пересечение $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$. Но существует сюръективное отображение $(m, n) \rightarrow m/n$ подмножества произведения $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, состоящего из всех пар, у которых $n \neq 0$, на $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$, и, таким образом, требуемый результат следует из (1.9.2), (1.9.3) и (1.9.4).

(2.2.16). Каждый открытый промежуток в $\mathbf{R}$ содержит бесконечное множество рациональных чисел.

Достаточно доказать, что $]a, b[$ содержит одно рациональное число c , потому что тогда и промежуток $]a, c[$ содержит рациональное число, и индукция докажет окончательный результат. Пусть $x = b - a > 0$; в силу (III) существует целое число $n > 1/x$, поэтому в силу (2.2.14) $1/n < x$. Мы можем считать, что $b > 0$ (в противном случае мы рассмотрели бы промежуток $]-b, -a[$, где $-a > 0$). Ввиду (III) существует такое целое $k > 0$, что $b \leq k/n$. Пусть h — наименьшее целое число, для которого $b \leq h/n$. Тогда $(h-1)/n < b$. Покажем, что $(h-1)/n > a$. Если бы это было не так, то в силу (2.2.9) мы имели бы $b - a = x \leq 1/n$ в противоречии с определением n .

(2.2.17). Множество действительных чисел несчетно.

Проведем рассуждение от противного. Допустим, что имеется биективное отображение $n \rightarrow x_n$ множества $\mathbf{N}$ на $\mathbf{R}$. Определим, по индукции последовательность $n \rightarrow p(n)$ целых чисел. Положим $p(0) = 0$; и пусть $p(1)$ — наименьшее значение n , для которого $x_n > x_0$. Допустим, что $p(n)$ уже определено для $n \leq 2m-1$ и что $x_{p(2m-2)} < x_{p(2m-1)}$. Тогда множество $]x_{p(2m-2)}, x_{p(2m-1)}[$ в силу (2.2.16) бесконечно. В качестве $p(2m)$ возьмем наименьшее

целое число $k > p(2m-1)$, для которого $x_{p(2m-2)} < x_k < x_{p(2m-1)}$, затем определим $p(2m+1)$ как наименьшее целое число $k > p(2m)$, для которого $x_{p(2m)} < x_k < x_{p(2m+1)}$. Сразу видно, что последовательность $(p(n))$ является строго возрастающей, поэтому $p(n) \geq n$ для всех n . С другой стороны, из построения следует, что замкнутый промежуток $[x_{p(2m)}, x_{p(2m+1)}]$ содержится в открытом промежутке $]x_{p(2m-2)}, x_{p(2m-1)}[$.

В силу (IV) существует действительное число u , принадлежащее всем замкнутым промежуткам $[x_{p(2m)}, x_{p(2m+1)}]$, и оно не может совпадать ни с одним из концов этого промежутка, так как концы любого такого промежутка не принадлежат следующему. Пусть q — целое число, для которого $u = x_q$, и пусть n — наибольшее целое число, такое, что $p(n) \leq q$, и, значит, $q < p(n+1)$. Предположим сначала, что $n = 2m$; тогда неравенства $x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m+1)} < x_{p(2m+1)}$ противоречат определению числа $p(2m+1)$. Если, напротив, $n = 2m-1$, то неравенства $x_{p(2m-2)} < x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m-1)}$ противоречат определению числа $p(2m)$. Теорема доказана.

Задачи

1. Пусть A — счетное подмножество $\mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами: для каждой пары элементов x, y множества A , для которой $x < y$, существуют такие элементы u, v, w множества A , что $u < x < v < y < w$. Покажите, что существует такое биективное отображение f множества A на множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, что из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$.

[Пусть $n \rightarrow a_n$ и $n \rightarrow b_n$ — биективные отображения множества $\mathbb{N}$ на A и $\mathbb{Q}$. Индукцией по n покажите, что существуют конечные подмножества $A_n \subset A$, $B_n \subset \mathbb{Q}$ и биективное отображение f_n множества A_n на B_n , обладающие следующими свойствами:

- 1°) элемент a_i при $i \leq n$ принадлежит A_n ;
- 2°) элемент b_i при $i \leq n$ принадлежит B_n ;
- 3°) из $x < y$ в A_n следует $f_n(x) < f_n(y)$;
- 4°) $A_n \subset A_{n+1}$ и f_n есть сужение биективного отображения f_{n+1} на A_n].

2. Покажите, что множество I всех иррациональных чисел равномощно множеству $\mathbb{R}$.

[См. задачу 5 § 1.9.]

3. Верхняя и нижняя грани

Действительное число b называется *мажорантой* (соответственно *минорантой*) некоторого множества X действительных чисел, если $x \leq b$ (соответственно $b \leq x$) для каждого $x \in X$. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *мажорируемым* или *ограниченным сверху* (соответственно *минорируемым* или *ограниченным снизу*), если множество мажорант (соответственно минорант) множества X не пусто. Если X мажорируемо, то $-X$ (множество чисел $-x$, где $x \in X$) минор-

рируемо, и для каждой мажоранты b множества X число $-b$ является минорантой множества $-X$ и наоборот. Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется *ограниченным*.

(2.3.1) Для того чтобы множество $X \subset \mathbb{R}$ было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое целое число n , что $|x| \leq n$ для всех $x \in X$.

В самом деле, из (III) следует, что если a — миноранта и b — мажоранта множества X , то существуют такие целые числа p, q , что $-p < a$ и $b < q$; возьмем $n = p + q$. Обратное очевидно.

(2.3.2) Если непустое множество $X \subset \mathbb{R}$ мажорируемо, то множество M его мажорант имеет наименьший элемент.

Пусть $a \in X, b \in M$; в силу (III) для каждого натурального числа n существует такое целое число m , что $b \leq a + m2^{-n}$. С другой стороны, если c — мажоранта множества X , то мажорантой будет и каждое число $y \geq c$ и, таким образом, существует наименьшее целое число p_n , для которого $a + p_n 2^{-n}$ будет мажорантой множества X . Отсюда следует, что если $I_n = [a + (p_n - 1)2^{-n}, a + p_n 2^{-n}]$, то $I_n \cap X$ не пусто. Поскольку $p_n 2^{-n} = 2p_n 2^{-n-1}$ и число $(2p_n - 2)2^{-n-1}$ не является мажорантой, мы necessarily имеем $p_{n+1} = 2p_n$ или $p_{n+1} = 2p_n - 1$, иными словами $I_{n+1} \subset I_n$. Из (IV) следует, что промежутки I_n имеют непустое пересечение J . Если бы J содержало хотя бы два различных элемента $\alpha < \beta$, то промежуток $[\alpha, \beta]$ содержался бы в каждом I_n , и, следовательно, в силу (2.2.9) мы имели бы $2^{-n} \leq \beta - \alpha$ или $1 \geq 2^n(\beta - \alpha)$ для каждого n , а это противоречит аксиоме (III) (напомним, что $2^n \geq n$, что очевидным образом доказывается по индукции). Следовательно, $J = \{\gamma\}$.

Покажем прежде всего, что γ является мажорантой множества X . Если бы это было не так, то существовал бы такой элемент $x \in X$, что $x > \gamma$, но тогда нашлось бы такое n , что $2^{-n} < x - \gamma$, и, так как $\gamma \in I_n$, мы имели бы $a + p_n 2^{-n} < x$ вопреки определению p_n . С другой стороны, каждый элемент $y \in M$ удовлетворяет условию $y \geq \gamma$. В противном случае нашлось бы такое n , что $2^{-n} < \gamma - y$, и, так как $\gamma \in I_n$, мы имели бы $a_n + (p_n - 1)2^{-n} > y$ и число $a + (p_n - 1)2^{-n}$ не было бы мажорантой множества X ; это снова противоречит определению p_n .

Таким образом, число γ является наименьшим элементом множества M ; оно называется *верхней гранью* множества X и обозначается символом $\sup X$.

(2.3.3) Если непустое множество $X \subset \mathbb{R}$ минорируемо, то множество M' его минорант имеет наибольший элемент.

Нужно (2.3.2) применить к множеству $-X$.

Наибольший элемент множества M' называется *нижней гранью* множества X и обозначается символом $\inf X$. Для непустого ограниченного множества X существуют и $\inf X$ и $\sup X$, и при этом $\inf X \leq \sup X$.

(2.3.4) *Верхняя грань мажорируемого множества X есть действительное число γ , характеризующееся следующими двумя свойствами:*

1°) γ является мажорантой множества X ;

2°) для каждого целого числа $n > 0$ существует такой элемент $x \in X$, что $\gamma - 1/n < x \leq \gamma$.

Из определения следует, что $\gamma = \sup X$ обладает обоими свойствами, так как второе из них выражает тот факт, что число $\gamma - 1/n$ не является мажорантой множества X . Если, наоборот, число γ обладает этими свойствами, то мы не могли бы иметь $\sup X = \beta < \gamma$, потому что в этом случае существовало бы такое n , что $1/n < \gamma - \beta$, поэтому $\beta < \gamma - 1/n$ и число $\gamma - 1/n$ было бы мажорантой множества X вопреки свойству 2°.

Аналогичным образом, применяя (2.3.4) к множеству $-X$ и пользуясь тем, что $\inf X = -\sup(-X)$, можно охарактеризовать $\inf X$.

Если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент b (соответственно наименьший элемент a), то $b = \sup X$ (соответственно $a = \inf X$) и вместо $\sup X$ (соответственно $\inf X$) мы пишем $\max X$ (соответственно $\min X$). В силу (2.2.3) это, в частности, относится к конечным множествам. Но нижняя и верхняя грани ограниченного бесконечного множества X не обязаны принадлежать X . Например, если X — множество всех чисел вида $1/n$, где n — целые строго положительные числа, то нижней гранью X является 0, а $\min X$ не существует.

(2.3.5) *Если $A \subset \mathbb{R}$ мажорируемо и $B \subset A$, то B мажорируемо и $\sup B \leq \sup A$.*

Это следует из определений.

(2.3.6) *Пусть $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство непустых мажорируемых множеств в $\mathbb{R}$; пусть $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ и B — множество чисел $\sup A_\lambda$.*

Для того чтобы A было мажорируемо, необходимо и достаточно, чтобы было мажорируемо B , и в этом случае $\sup A = \sup B$.

Из определения сразу следует, что любая мажоранта множества A является мажорантой и множества B и наоборот, откуда и вытекает требуемый результат.

Пусть f — отображение множества A в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел; это отображение f называется *мажорируемым*

(соответственно *минорируемым, ограниченным*) в A , если множество $f(A) \subset \mathbb{R}$ мажорируемо (соответственно, минорируемо, ограничено). Введем обозначения

$$\sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x), \quad \inf f(A) = \inf_{x \in A} f(x)$$

(*верхняя и нижняя грани отображения f на множестве A*), когда эти числа определены. Если f мажорируемо, то $-f$ минорируемо и

$$\inf(-f(x)) = -\sup f(x).$$

(2.3.7) Пусть f — отображение произведения $A_1 \times A_2$ в $\mathbb{R}$. Если f мажорируемо, то

$$\sup_{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2} f(x_1, x_2) = \sup_{x_1 \in A_1} \left(\sup_{x_2 \in A_2} f(x_1, x_2) \right).$$

В самом деле, $f(A_1 \times A_2)$ мы можем записать как объединение множеств $f(\{x_1\} \times A_2)$, где x_1 пробегает множество A_1 , а затем применить (2.3.6).

(2.3.8) Пусть f, g — такие два отображения множества A в $\mathbb{R}$, что $f(x) \leq g(x)$ для каждого $x \in A$. Тогда если g мажорируемо, то и f мажорируемо и $\sup_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in A} g(x)$.

Это сразу следует из определений.

(2.3.9) Пусть f и g — два отображения множества A в $\mathbb{R}$. Если и f и g мажорируемы, то мажорируемо и $f+g$ [т. е. отображение $x \rightarrow f(x) + g(x)$] и $\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x)$. Если g , кроме того, и минорируемо, то

$$\sup_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x) \leq \sup_{x \in A} (f(x) + g(x)).$$

Пусть $a = \sup_{x \in A} f(x)$, $b = \sup_{x \in A} g(x)$. Тогда для каждого $x \in A$ имеем $f(x) \leq a$ и $g(x) \leq b$, поэтому $f(x) + g(x) \leq a + b$, откуда следует первое неравенство. Пусть $c = \inf_{x \in A} g(x)$. Тогда для каждого $x \in A$ имеем: $f(x) + c \leq f(x) + g(x) \leq d = \sup_{x \in A} (f(x) + g(x))$. Но это дает $f(x) \leq d - c$ для каждого $x \in A$, значит, $a \leq d - c$, или $a + c \leq d$, и мы получили второе неравенство.

(2.3.10) Пусть f — мажорируемое отображение множества A в $\mathbb{R}$. Тогда для каждого действительного числа c имеем $\sup_{x \in A} (f(x) + c) = c + \sup_{x \in A} f(x)$.

В (2.3.9) в качестве g нужно взять постоянную функцию, равную c .

(2.3.11) Пусть f_1 (соответственно f_2) — мажорируемое отображение множества A_1 (соответственно A_2) в $\mathbb{R}$. Тогда отображение $(x_1, x_2) \rightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2)$ мажорируемо и

$$\sup_{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2} (f_1(x_1) + f_2(x_2)) = \sup_{x_1 \in A_1} f_1(x_1) + \sup_{x_2 \in A_2} f_2(x_2).$$

Это вытекает из (2.3.7) и (2.3.10).

Мы предоставляем читателю сформулировать аналогичные свойства для $\inf$ (всюду нужно изменить знаки).

Задача

Пусть $x \rightarrow I(x)$ — отображение множества $\mathbb{R}$ в множество открытых промежутков в $\mathbb{R}$, где $I(x)$ — открытый промежуток с центром x и длины $\leq c$ (c — некоторое данное положительное число). Покажите, что для каждого замкнутого промежутка $[a, b]$ в $\mathbb{R}$ существует конечное число точек $x_i \in [a, b]$, обладающих следующими свойствами:

1°) промежутки $I(x_i)$ образуют покрытие промежутка $[a, b]$;

2°) сумма длин промежутков $I(x_i)$ не превосходит $c + 2(b - a)$. Приведите пример, подтверждающий, что это — наилучшая возможная оценка.

[Докажите, что если теорема верна для любого промежутка $[a, x]$, где $a \leq x < u < b$, то существует такое v , что $u < v < b$ и что теорема все еще верна для любого промежутка $[a, u]$, где $a \leq u < v$. Затем рассмотрите верхнюю грань всех таких чисел $u < b$, что теорема верна для любого промежутка $[a, x]$, где $a \leq x < u$.]

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Эта глава вместе с гл. 5 составляет сердцевину книги: в ней развивается геометрический язык, на котором теперь выражаются результаты анализа. Этот язык позволяет придать им полную общность и вместе с тем дать наиболее простые и наиболее отражающие суть дела доказательства. Большая часть понятий, вводимых в этой главе, в применении к „обычному“ трехмерному пространству очень наглядна. После того как читатель, решив ряд задач и прочитав следующие главы, приобретет некоторый опыт в обращении с этими понятиями, он убедится, что с должными предосторожностями геометрическая интуиция и в общей ситуации является исключительно надежным руководителем и что было бы жалко ограничить ее использование лишь классическими областями.

В этой главе почти нет настоящих теорем; большинство результатов непосредственно следует из определений, а те из них, которые требуют несколько большего труда, никогда не лежат очень глубоко. Параграфы 3.1—3.13 по существу посвящены установлению терминологии. Неподготовленному читателю может показаться, что есть очень много терминов, особенно в 3.5—3.8, которые на самом деле позволяют лишь различными способами снова и снова говорить одно и то же. Причину этой очевидной перегруженности языка следует искать в приложениях: отказ от нее (теоретически возможный) привел бы к очень неуклюжим и громоздким выражениям, а на практике доказано, что для достижения большей ясности стоит обременить память несколькими дополнительными терминами.

Наиболее важными понятиями, изучаемыми в этой главе, являются понятия *полноты* (3.14), *компактности* (3.16—3.18) и *связности* (3.19). Прежде чем идти дальше, читатель должен попытаться овладеть ими как можно лучше, так как они будут неоднократно и широко использоваться.

Метрические пространства составляют только один из частных видов „топологических пространств“, и эта глава может, таким образом, рассматриваться как введение в изучение „общей топологии“, излагаемой, например, у Келли [18] и Бурбаки [5]. Путь к этому обобщению указывается в (3.12), где становится ясным, что в большинстве вопросов расстояние, определяющее метрическое пространство, играет лишь вспомогательную роль и что, существенно не нарушая изучаемых явлений, его можно заменять „эквивалентными“ расстояниями.

1. Расстояния и метрические пространства

Пусть E — некоторое множество. *Расстояние в E* есть отображение d произведения $E \times E$ в множество $\mathbf{R}$ действительных чисел, обладающее следующими свойствами:

- (I) $d(x, y) \geq 0$ для любой пары элементов x, y множества E .
- (II) Отношение $d(x, y) = 0$ эквивалентно отношению $x = y$.
- (III) $d(y, x) = d(x, y)$ для любой пары элементов x, y множества E .
- (IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ для любых трех элементов x, y, z множества E (*неравенство треугольника*).

Из (IV) по индукции следует для любого $n > 2$

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

(3.1.1) Если d — расстояние в E , то

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

для любых трех элементов x, y и z множества E .

В самом деле, из (III) и (IV) следует, что

$$d(x, z) \leq d(y, z) + d(x, y)$$

и

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z),$$

поэтому

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y).$$

Множество E вместе с заданным в E расстоянием называют *метрическим пространством*.

2. Примеры расстояний

(3.2.1) Функция $d(x, y) = |x - y|$ есть расстояние в множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел, как это сразу следует из (2.2.11). Соответствующее метрическое пространство называется *действительной прямой*. Если $\mathbf{R}$ рассматривается как метрическое пространство, причем в явной форме не оговорено, при каком расстоянии, то всегда подразумевается, что речь идет о только что введенном расстоянии.

(3.2.2) В обычном трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ для обычного *евклидова расстояния*, определяемого формулой

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ — два элемента, аксиомы (I), (II) и (III) тривиальны; аксиома (IV) проверяется прямым вычислением.

(3.2.3) На действительной плоскости $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ для любых двух элементов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ положим

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|;$$

аксиомы (I), (II) и (III) снова проверяются тривиально, а (IV) следует из (2.2.11).

(3.2.4) Пусть A — произвольное множество, $E = \mathcal{B}(A)$ — множество ограниченных отображений A в $\mathbf{R}$ (см. 2.3). Тогда для любых двух функций f и g , принадлежащих E , разность $f - g$ также принадлежит E и определено число

$$d(f, g) = \sup_{t \in A} |f(t) - g(t)|.$$

Отображение $(f, g) \rightarrow d(f, g)$ является расстоянием в E . В самом деле, (I) и (III) тривиальны, а (IV) сразу следует из (2.3.9) и (2.3.8). Далее, если $d(f, g) = 0$, то $f(t) - g(t) = 0$ для всех $t \in A$; но это означает, что $f = g$ (см. 1.4), откуда следует (II).

(3.2.5) Пусть E — произвольное множество; положим $d(x, y) = 1$, если $x \neq y$ и $d(x, x) = 0$. Тогда аксиомы (I), (II) и (III) выполняются. Аксиома (IV) очевидна, если два из трех элементов x, y, z равны; если же это не так, то $d(x, z) = 1$, $d(x, y) + d(y, z) = 2$, и, таким образом, аксиома (IV) справедлива во всех случаях. Соответствующее метрическое пространство, определяемое на E этим расстоянием, называется *дискретным* метрическим пространством.

(3.2.6) Пусть p — простое число. Для любого целого $n > 0$ определим $v_p(n)$ — показатель степени числа p в разложении числа n на простые множители. Из определения сразу следует, что

$$(3.2.6.1) \quad v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n')$$

для любой пары целых чисел > 0 . Пусть, далее, $x = \pm r/s$ — рациональное число $\neq 0$, где r и s — целые числа > 0 . Положим $v_p(x) = v_p(r) - v_p(s)$. Из (3.2.6.1) сразу следует, что это число не зависит от способа представления числа x в виде дроби. То же соотношение показывает также, что

$$(3.2.6.2) \quad v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

для любой пары рациональных чисел $\neq 0$.

Для любой пары рациональных чисел x, y положим теперь

$$d(x, y) = p^{-v_p(x-y)}, \quad \text{если } x \neq y, \\ d(x, x) = 0.$$

Докажем, что это — расстояние (так называемое *p-адическое расстояние*) на множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. Аксиомы (I), (II) и (III)

сразу следуют из определения. Кроме того, мы докажем следующую усиленную форму аксиомы (IV):

$$(3.2.6.3) \quad d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$$

Так как в случае, когда два из трех элементов x, y, z равны, это неравенство очевидно, то мы можем считать, что все они различны, и тогда нам нужно доказать, что для любой пары рациональных чисел x, y , для которой $x \neq 0, y \neq 0$ и $x - y \neq 0$, мы имеем

$$(3.2.6.4) \quad v_p(x - y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)).$$

Можно считать, что $v_p(x) \geq v_p(y)$; если учесть (3.2.6.2), то неравенство, которое нужно доказать, сведется к неравенству

$$(3.2.6.5) \quad v_p(z - 1) \geq 0$$

для любого рационального числа z , такого, что $z \neq 0, z \neq 1$ и $v_p(z) \geq 0$. Но в этом случае, по определению, $z = \pm p^h r/s$, где $h \geq 0$, а r и s не делятся на p . Так как знаменатель числа не делится на p , неравенство (3.2.6.5) следует из определения v_p .

Другие примеры будут подробно изучаться в гл. 5, 6 и 7.

3. Изометрия

Пусть E, E' — два метрических пространства, d, d' — расстояния в E и E' . Биективное отображение f пространства E на E' называется *изометрией*, если

$$(3.3.1) \quad d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

для любой пары элементов пространства E ; обратное отображение f^{-1} является тогда изометрией пространства E' на E . Два метрических пространства E и E' *изометричны*, если существует изометрия E на E' . Любая теорема, доказанная в E , в которой участвуют только расстояния между элементами пространства E , немедленно дает соответствующую теорему в любом изометричном пространстве E' относительно расстояний между образами при отображении f элементов пространства E , о которых шла речь в исходной теореме.

Пусть теперь E — метрическое пространство, d — расстояние в E и f — биективное отображение E на множество E' (в E' до этого расстояние могло быть и не определено). Мы можем тогда определить в E' расстояние d' с помощью формулы (3.3.1), и в таком случае f будет изометрией пространства E на E' . Говорят, что расстояние d' было *перенесено* с E на E' отображением f .

(3.3.2) **Пример:** расширенная действительная прямая $\bar{\mathbb{R}}$. Функция f , определенная на $\mathbb{R}$ условием $f(x) = x/(1 + |x|)$, является

биективным отображением $\mathbf{R}$ на открытый промежуток $J =]-1, +1[$. Обратное отображение g определяется формулой $g(x) = x/(1 - |x|)$ при $|x| < 1$. Пусть J — замкнутый промежуток $[-1, +1]$ и пусть $\bar{\mathbf{R}}$ — множество, являющееся объединением $\mathbf{R}$ и двух новых элементов, обозначаемых символами $+\infty$ и $-\infty$ (бесконечные точки).

Продолжим f до биективного отображения множества $\bar{\mathbf{R}}$ на J , полагая $f(+\infty) = +1$, $f(-\infty) = -1$, и будем вновь буквой g обозначать обратное отображение. Так как J — метрическое пространство с расстоянием $|x - y|$, мы можем применить описанный выше процесс и, положив $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, превратить $\bar{\mathbf{R}}$ в метрическое пространство. С этим расстоянием (которое, когда оно рассматривается для элементов пространства $\mathbf{R}$, отличается от расстояния, определенного в (3.2.1)) метрическое пространство $\bar{\mathbf{R}}$ называется *расширенной действительной прямой*. Отметим, что $d(+\infty, x) = 1/(1 + |x|)$ при $x \geq 0$ и $d(-\infty, x) = 1/(1 + |x|)$ при $x \leq 0$.

Введем в $\bar{\mathbf{R}}$ отношение порядка, по определению считая неравенство $x \leq y$ эквивалентным неравенству $f(x) \leq f(y)$. Легко проверить, что когда x и y принадлежат $\mathbf{R}$, это отношение порядка эквивалентно отношению порядка, уже определенному в $\mathbf{R}$, и что, кроме того, для любого $x \in \mathbf{R}$ мы имеем $-\infty < x < +\infty$. Действительные числа называются также *конечными* элементами пространства $\bar{\mathbf{R}}$. Все свойства и определения, рассмотренные в гл. 2 и связанные только с отношением порядка (исключая все то, в чем участвуют алгебраические операции), можно немедленно „перенести“ на $\bar{\mathbf{R}}$ отображением g .

Непустое подмножество A пространства $\bar{\mathbf{R}}$ при рассматриваемом отношении порядка всегда ограничено, и, следовательно, $\sup A$ и $\inf A$ определены, но могут оказаться как действительными числами, так и $+\infty$ или $-\infty$. Верхняя и нижняя грани $\sup_{x \in A} u(x)$ и $\inf_{x \in A} u(x)$ (любого отображения u множества A в $\bar{\mathbf{R}}$) определяются точно так же, и, в частности, без изменений сохраняются свойства (2.3.5), (2.3.6), (2.3.7) и (2.3.8).

4. Шары, сферы, диаметр

В теории метрических пространств чрезвычайно удобно пользоваться геометрическим языком, на который наталкивает классическая геометрия. Элементы метрического пространства обычно будут называться *точками*. Если даны метрическое пространство E с расстоянием d , точка $a \in E$ и действительное число $r > 0$, то *открытый шар* (соответственно *замкнутый шар, сфера*) с центром a и *радиусом* r есть множество $B(a; r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$ (соот-

ветственно $B'(a; r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\}$, $S(a; r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}$. Открытые и замкнутые шары с центром a всегда содержат точку a , но сфера с центром a может оказаться пустой (примеры „странных“ свойств, которыми могут обладать шары в общем метрическом пространстве, см. в задаче 4 § 3.8).

Примеры. На действительной прямой открытый (соответственно замкнутый) шар с центром a и радиусом r есть промежуток $]a - r, a + r[$ (соответственно $[a - r, a + r]$); сфера с центром a и радиусом r состоит из двух точек: $a - r$ и $a + r$.

На расширенной прямой $\bar{\mathbb{R}}$ открытый шар с центром $+\infty$ и радиусом $r < 1$ есть промежуток $](1 - r)/r, +\infty[$.

В дискретном пространстве E шар (открытый или замкнутый) с центром a и радиусом $r < 1$ сводится к a , а соответствующая сфера пуста. Если, напротив, $r \geq 1$, то $B(a; r) = B'(a; r) = E$, $S(a; r) = \emptyset$ при $r > 1$ и $S(a; r) = E \setminus \{a\}$ при $r = 1$.

Пусть A, B — два непустых подмножества пространства E . *Расстояние* от A до B , по определению, есть положительное число

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

Если A состоит из одной точки x , то вместо $d(A, B)$ пишут также $d(x, B)$. В силу (2.3.7) имеем $d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B)$. Если

$A \cap B \neq \emptyset$, то $d(A, B) = 0$, но обратное может и не иметь места. Вообще если $d(A, B) = a$, то не обязательно существуют такие две точки $x \in A$, $y \in B$, для которых $d(x, y) = a$. Пусть, например, на действительной прямой A — множество всех целых чисел ≥ 1 , а B — множество всех чисел вида $n - 1/n$ для всех целых чисел $n \geq 2$. Хотя A и B не имеют общих точек, но расстояние $d(n, n - 1/n) = 1/n$ сколь угодно мало; поэтому $d(A, B) = 0$ (см. задачу 2 § 3.17).

(3.4.1) Если точка x не принадлежит шару $B(a; r)$ [соответственно $B'(a; r)$], то $d(x, B(a; r)) \geq d(a, x) - r$ [соответственно $d(x, B'(a; r)) \geq d(a, x) - r$].

В самом деле, из предположения следует, что $d(a, x) \geq r$. Для любой точки $y \in B(a; r)$ [соответственно $y \in B'(a; r)$] в силу неравенства треугольника $d(x, y) \geq d(a, x) - d(a, y) \geq d(a, x) - r$.

(3.4.2) Если A — непустое множество в пространстве E и x, y — две точки E , то

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Для каждой точки $z \in A$ имеем $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, поэтому

$$\begin{aligned} d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z) &\leq \inf_{z \in A} (d(x, y) + d(y, z)) = \\ &= d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) = d(x, y) + d(y, A) \end{aligned}$$

в силу (2.3.8) и (2.3.10). Точно так же $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$.

Диаметр произвольного непустого множества $A \subset E$, по определению, есть $\delta(A) = \sup_{x \in A, y \in A} d(x, y)$; он может быть положительным действительным числом или $+\infty$. Из $A \subset B$ следует $\delta(A) \leq \delta(B)$. Равенство $\delta(A) = 0$ имеет место в том и только в том случае, если A — одноточечное множество.

(3.4.3) Для любого шара $\delta(B'(a; r)) \leq 2r$.

В самом деле, если $d(a, x) \leq r$ и $d(a, y) \leq r$, то в силу неравенства треугольника $d(x, y) \leq 2r$.

Ограниченным множеством в E называется непустое множество, диаметр которого конечен. Ограниченным может быть и все пространство E , как показывает пример расширенной действительной прямой $\bar{\mathbb{R}}$. Непустое подмножество ограниченного множества ограничено.

(3.4.4) Объединение двух ограниченных множеств A и B ограничено.

В самом деле, если $a \in A$, $b \in B$ и x, y — две любые точки объединения $A \cup B$, то либо x и y принадлежат A , и тогда $d(x, y) \leq \delta(A)$, либо обе они принадлежат B и $d(x, y) \leq \delta(B)$, либо же, например, $x \in A$ и $y \in B$, и тогда в силу неравенства треугольника $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$, поэтому

$$\delta(A \cup B) \leq d(a, b) + \delta(A) + \delta(B).$$

Поскольку это верно для любых $a \in A$, $b \in B$, имеем

$$\delta(A \cup B) \leq d(A, B) + \delta(A) + \delta(B)$$

по определению $d(A, B)$.

Из доказанного следует, что если A ограничено, то, какова бы ни была точка $x_0 \in E$, множество A содержится в замкнутом шаре с центром x_0 и с радиусом $d(x_0, A) + \delta(A)$.

5. Открытые множества

Открытым множеством в метрическом пространстве E с расстоянием d называется подмножество $A \subset E$, обладающее следующим свойством: для любой точки $x \in A$ существует такое $r > 0$, что

$V(x; r) \subset A$. Пустое множество открыто (см. 1.1); все пространство E открыто.

(3.5.1) *Любой открытый шар является открытым множеством.*

В самом деле, если $x \in V(a; r)$, то, по определению, $d(a, x) < r$; поэтому из неравенства $d(x, y) < r - d(a, x)$ следует неравенство $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < r$, которое доказывает включение

$$V(x; r - d(a, x)) \subset V(a; r).$$

(3.5.2) *Объединение любого семейства $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ открытых множеств открыто.*

В самом деле, если $x \in A_\mu$ для некоторого $\mu \in L$, то существует такое $r > 0$, что $V(x; r) \subset A_\mu \subset A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Например, на действительной прямой $\mathbb{R}$ любой промежуток $]a, +\infty[$ открыт как объединение открытых множеств $]a, x[$ для всех $x > a$. Точно так же открыт и промежуток $]-\infty, a[$.

(3.5.3) *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Достаточно доказать, что открыто пересечение двух открытых множеств A_1, A_2 , а затем провести индукцию. Если $x \in A_1 \cap A_2$, то существуют такие $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, что $V(x; r_1) \subset A_1$ и $V(x; r_2) \subset A_2$; очевидно, $V(x; r) \subset A_1 \cap A_2$, где $r = \min(r_1, r_2)$.

Пересечение бесконечного семейства открытых множеств, вообще говоря, не будет открытым. Например, пересечение промежутков $] -1/n, 1/n[$ в $\mathbb{R}$ — одноточечное множество $\{0\}$, которое в силу (2.2.16) не открыто.

(3.5.4) *В дискретном пространстве любое множество открыто.*

На основании (3.5.2) достаточно доказать, что открыто одноточечное множество $\{a\}$. Но по определению $\{a\} = V(a; 1/2)$, и утверждение следует из (3.5.1).

6. Окрестности

Если A — непустое множество в метрическом пространстве E , то *открытой окрестностью* множества A называется любое открытое множество, содержащее A , а *окрестностью* множества A — любое множество, содержащее открытую окрестность A . В случае когда $A = \{x\}$, мы говорим об окрестностях точки x (а не множества $\{x\}$).

(3.6.1) *Для любого непустого множества $A \subset E$ и любого $r > 0$ множество $\dot{V}_r(A) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$ является открытой окрестностью A .*

В самом деле, если $d(x, A) < r$ и $d(x, y) < r - d(x, A)$, то из (3.4.2) следует, что $d(y, A) < d(x, A) + r - d(x, A) = r$; поэтому $V_r(A)$ открыто и, очевидно, содержит A .

В случае когда $A = \{a\}$, множество $V_r(A)$ есть открытый шар $B(a; r)$.

Фундаментальная система окрестностей множества A есть семейство (U_λ) окрестностей A , обладающее тем свойством, что любая окрестность A содержит хотя бы одно из множеств U_λ . Для произвольного множества A множества $V_r(A)$ ($r > 0$), вообще говоря, не образуют фундаментальную систему окрестностей A [см., однако, (3.17.11)]. Из определений следует, что

(3.6.2) Шары $B(a; 1/n)$ (n — целые числа > 0) образуют фундаментальную систему окрестностей точки a .

(3.6.3) Пересечение конечного числа окрестностей множества A является окрестностью множества A .

Это следует из (3.5.3).

(3.6.4) Для того чтобы множество A было окрестностью каждой из своих точек, необходимо и достаточно, чтобы A было открыто.

Условие, очевидно, достаточно. Если, напротив, A — окрестность каждой точки $x \in A$, то для каждой точки $x \in A$ существует открытое множество $U_x \subset A$, содержащее x . Из того, что $x \in U_x \subset A$, заключаем, что $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset A$. Поэтому на основании (3.5.2)

$A = \bigcup_{x \in A} U_x$ является открытым множеством.

Задача

Покажите, что на действительной прямой множество $\mathbb{N}$ всех целых чисел ≥ 0 не имеет счетной фундаментальной системы окрестностей.

[Допустите противное и воспользуйтесь следующим замечанием: если (a_{mn}) — двойная последовательность чисел > 0 , то последовательность (b_n) , где $b_n = a_{nn}/2$, обладает тем свойством, что ни для какого номера n неравенство $b_n \geq a_{mn}$ не может выполняться сразу для всех номеров m .]

7. Внутренность множества

Точка x называется **внутренней точкой** множества A , если A является окрестностью точки x . Множество всех внутренних точек множества A называется **внутренностью** множества A и обозначается символом $\mathring{A}$.

Например, внутренность любого промежутка с началом a и концом b ($a < b$) на действительной прямой $\mathbb{R}$ есть открытый промежуток $]a, b[$, так как ни a ни b не могут быть внутренними точками промежутков $[a, b]$, $[a, b[$ и $]a, b]$: никакой промежуток с центром a или b не может содержаться в этих трех промежутках.

(3.7.1) Для любого множества A внутренность $\overset{\circ}{A}$ есть наибольшее открытое множество, содержащееся в A .

В самом деле, если $x \in \overset{\circ}{A}$, то существует открытое множество $U_x \subset A$, содержащее x . Для всякой точки $y \in U_x$, по определению, A есть окрестность y , поэтому $y \in \overset{\circ}{A}$ и, значит, $U_x \subset \overset{\circ}{A}$, откуда в силу (3.6.4) следует, что $\overset{\circ}{A}$ открыто. Если, наоборот, множество $B \subset A$ открыто, то из определения ясно, что $B \subset \overset{\circ}{A}$. Таким образом, открытые множества характеризуются условием $A = \overset{\circ}{A}$.

(3.7.2) Если $A \subset B$, то $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Это сразу следует из (3.7.1).

(3.7.3) Для любой пары множеств A и B имеем $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Включение $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ следует из (3.7.2). С другой стороны, в силу (3.5.3) пересечение $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ открыто и содержится в $A \cap B$.

Поэтому ввиду (3.7.1) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$.

Внутренность непустого множества может быть пуста. Это, например, имеет место для одноточечных множеств в $\mathbb{R}$.

Внутренняя точка множества $E \setminus A$ называется *внешней точкой* для A , а внутренность множества $E \setminus A$ — *множеством внешних точек* множества A .

(3.7.4) Для того чтобы точка $x \in E$ была внешней для A , необходимо и достаточно условие $d(x, A) > 0$.

В самом деле, из этого условия следует, что $B(x; d(x, A)) \subset E \setminus A$, поэтому x является внутренней точкой множества $E \setminus A$. Наоборот, если x — точка, внешняя для A , то существует шар $B(x; r)$, где $r > 0$, содержащийся в $E \setminus A$. Для любой точки $y \in A$ мы, таким образом, имеем $d(x, y) > r$, и, значит, $d(x, A) \geq r$.

8. Замкнутые множества, точки прикосновения, замыкание множества

По определению *замкнутое множество* в метрическом пространстве E есть дополнение открытого множества. Пустое множество замкнуто, замкнуто и все пространство E . Промежутки

$[a, +\infty[$ и $] -\infty, a]$ и множество $\mathbb{Z}$ целых чисел — замкнутые множества на действительной прямой. Промежутки $[a, b[$ и $]a, b]$ не являются ни открытыми, ни замкнутыми множествами.

(3.8.1) *Замкнутый шар есть замкнутое множество; сфера есть замкнутое множество.*

В самом деле, в силу (3.4.1) если $x \notin B'(a; r)$, то $d(x, B'(a; r)) \geq d(a, x) - r > 0$. Поэтому открытый шар с центром x и радиусом $d(a, x) - r$ содержится в дополнении шара $B'(a; r)$; тем самым доказано, что это дополнение открыто. Дополнение сферы $S(a; r)$ является объединением шара $B(a; r)$ и дополнения шара $B'(a; r)$, и ввиду (3.5.2) оно открыто.

(3.8.2) *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

(3.8.3) *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Утверждения следуют соответственно из (3.5.2) и (3.5.3), если перейти к дополнениям [см. формулы (1.2.9) и (1.8.1)].

В частности, одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто.

(3.8.4) *В дискретном пространстве любое множество замкнуто.* Это сразу вытекает из (3.5.4).

Точкой прикосновения множества A называется такая точка $x \in E$, каждая окрестность которой имеет с A непустое пересечение. Множество всех точек прикосновения множества A называется *замыканием* A и обозначается символом $\bar{A}$.

Таким образом, сказать, что x не является точкой прикосновения множества A , значит сказать, что она является внутренней точкой дополнения $E \setminus A$.

(3.8.5) *Замыкание множества A есть дополнение множества внешних точек A .*

Замыкание открытого шара $B(a; r)$ содержится в замкнутом шаре $B'(a; r)$, но может не совпадать с ним. Если подмножество A действительной прямой ограничено сверху (соответственно снизу), то, как это следует из (2.3.4), его верхняя грань $\sup A$ (соответственно нижняя грань $\inf A$) является точкой прикосновения A .

Ввиду (3.8.5) свойства внутренних точек и внутренности множества, доказанные в 3.7, с помощью формул булевой алгебры можно переформулировать как следующие свойства точек прикосновения и замыкания.

(3.8.6) *Для любого множества A замыкание $\bar{A}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A .*

В частности, замкнутые множества характеризуются условием $A = \bar{A}$.

(3.8.7) Если $A \subset B$, то $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(3.8.8) Для любой пары множеств A и B имеем $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(3.8.9) Для того чтобы точка x была точкой прикосновения множества A , необходимо и достаточно, чтобы $d(x, A) = 0$.

(3.8.10) Замыкание множества A есть пересечение открытых окрестностей $V_r(A)$ множества A .

Это просто другая формулировка утверждения (3.8.9).

(3.8.11) Любое замкнутое множество в метрическом пространстве E является пересечением убывающей последовательности открытых множеств; любое открытое множество является объединением возрастающей последовательности замкнутых множеств.

Первое утверждение доказываем, рассматривая открытые множества $V_{1/n}(A)$, а второе следует из первого, если перейти к дополнениям.

(3.8.12) Если точка прикосновения x множества A не принадлежит A , то пересечение $V \cap A$ множества A с любой окрестностью V точки x бесконечно.

Допустим противное, и пусть $V \cap A = \{y_1, \dots, y_n\}$. По предположению $r_k = d(x, y_k) > 0$. Выберем $r > 0$ так, чтобы $B(x; r) \subset V$ и $r < \min(r_1, \dots, r_n)$. Тогда пересечение A и $B(x; r)$ вопреки предположению пусто.

Точка $x \in E$ называется *граничной точкой* множества A , если она является точкой прикосновения как A , так и $\bar{C}A$. Множество $\text{Fr}(A)$ всех граничных точек множества A называется *границей* A . Ясно, что $\text{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{C}A = \text{Fr}(CA)$. В силу (3.8.2) $\text{Fr}(A)$ — замкнутое множество, которое может быть и пустым [см. (3.19.9)].

Граничная точка x множества A характеризуется тем свойством, что в любой ее окрестности содержится по крайней мере одна точка множества A и по крайней мере одна точка множества $\bar{C}A$. Все пространство E является объединением внутренности множества A , множества его внешних точек и его границы, потому что если окрестность точки x не содержится ни в A ни в $\bar{C}A$, то она должна содержать точки обоих этих множеств. Любые два из этих трех множеств не имеют общих точек.

Граница любого промежутка с началом a и концом b в $\mathbb{R}$ есть множество $[a, b]$; граница множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ есть само $\mathbb{R}$.

Задачи

1. а) Пусть A — открытое множество в метрическом пространстве E . Покажите, что для любого множества $B \subset E$ справедливо включение $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

б) Приведите примеры таких открытых множеств A, B на действительной прямой, что все четыре множества $A \cap \bar{B}$, $B \cap \bar{A}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ и $\bar{A} \cap B$ различны.

с) Приведите пример двух промежутков A, B на действительной прямой, для которых $A \cap \bar{B}$ не содержится в $\bar{A} \cap \bar{B}$.

2. Пусть A — произвольное множество в метрическом пространстве E .

Обозначим $\alpha(A) = \overset{\circ}{A}$ и $\beta(A) = \bar{\overset{\circ}{A}}$.

а) Покажите, что если A открыто, то $A \subset \alpha(A)$, а если A замкнуто, то $A \supset \beta(A)$.

б) Покажите, что $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ и $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ для любого A [воспользуйтесь а)].

с) Приведите пример такого множества A на действительной прямой, для которого все семь множеств $A, \overset{\circ}{A}, \bar{A}, \alpha(A), \beta(A), \alpha(\overset{\circ}{A})$ и $\beta(\bar{A})$ различны и не связаны никакими включениями, кроме следующих: $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$, $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(\overset{\circ}{A}) \subset \beta(A) \subset \bar{A}$, $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(A) \subset \beta(\bar{A}) \subset \bar{A}$.

3. Пусть E — метрическое пространство.

а) Покажите, что для каждого множества $A \subset E$ справедливо включение $\text{Fr}(\bar{A}) \subset \text{Fr}(A)$ и $\text{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Fr}(A)$, и приведите примеры, когда эти три множества (на действительной прямой) различны.

б) Пусть A, B — два множества в пространстве E . Покажите, что $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$, и приведите пример, когда эти множества (на действительной прямой) различны. Покажите, что если $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, то $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.

с) Покажите, что если A и B открыты, то

$$(A \cap \text{Fr}(B)) \cup (B \cap \text{Fr}(A)) \subset \text{Fr}(A \cap B) \subset (A \cap \text{Fr}(B)) \cup (B \cap \text{Fr}(A)) \cup (\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)),$$

и приведите пример, когда эти три множества (на действительной прямой) различны.

4. Пусть d — расстояние в множестве E , удовлетворяющее ультраметрическому неравенству

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)),$$

где $x, y, z \in E$ [см. пример (3.2.6)].

а) Покажите, что если $d(x, y) \neq d(y, z)$, то

$$d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z)).$$

б) Покажите, что в таком метрическом пространстве любой открытый шар $B(x; r)$ является одновременно и открытым и замкнутым множеством и что $B(y; r) = B(x, r)$ для любой точки $y \in B(x; r)$.

с) Покажите, что в таком метрическом пространстве любой замкнутый шар $B'(x; r)$ является одновременно и открытым и замкнутым множеством и что $B'(y; r) = B'(x; r)$ для любой точки $y \in B'(x; r)$.

д) Покажите, что если два шара в E имеют общую точку, то один из них содержится в другом.

е) Покажите, что расстояние между двумя различными открытыми шарами радиуса r , содержащимися в замкнутом шаре радиуса r , равно r .

9. Плотные подмножества; сепарабельные пространства

Множество A в метрическом пространстве E называется *плотным относительно множества B* , если любая точка множества B является точкой прикосновения множества A , иными словами, если $B \subset \bar{A}$ (или, что равносильно, если любая окрестность каждой точки $x \in B$ содержит точки множества A).

(3.9.1) Если A плотно относительно B и B плотно относительно C , то A плотно относительно C .

В самом деле, из включения $B \subset \bar{A}$ на основании (3.8.6) следует, что $\bar{B} \subset \bar{A}$, и так как по предположению $C \subset \bar{B}$, мы имеем $C \subset \bar{A}$.

Множество A , плотное относительно E , называется *всюду плотным* или просто *плотным в E* . Такие множества характеризуются тем, что $\bar{A} = E$, или, равносильно, что всякое непустое открытое множество содержит точку множества A .

Метрическое пространство E называется *сепарабельным*, если в E существует не более чем счетное плотное множество.

(3.9.2) Действительная прямая $\mathbb{R}$ сепарабельна.

В самом деле, в силу (2.2.16) множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$, а в силу (2.2.15) $\mathbb{Q}$ счетно.

Семейство $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ непустых открытых множеств называется *базой* открытых множеств метрического пространства E , если каждое непустое открытое множество пространства E является объединением некоторого подсемейства семейства (G_λ) .

(3.9.3) Для того чтобы семейство $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ было базой, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x \in E$ и каждой ее окрестности V существовал такой индекс λ , что $x \in G_\lambda \subset V$.

Это условие необходимо, потому что по определению существует открытая окрестность $W \subset V$ точки x , и, поскольку W является объединением множеств G_λ , существует по крайней мере один такой индекс μ , что $x \in G_\mu$. Условие достаточно, ибо если оно выполняется и U — произвольное открытое множество, то в силу (1.4.5) для каждой точки $x \in U$ существует такой индекс $\mu(x)$, что $x \in G_{\mu(x)} \subset U$.

Следовательно, $U \subset \bigcup_{x \in U} G_{\mu(x)} \subset U$.

(3.9.4) Для того чтобы метрическое пространство E было сепарабельно, необходимо и достаточно, чтобы существовала не более чем счетная база открытых множеств пространства E .

Условие достаточно, потому что если (G_n) — база и a_n — точка, принадлежащая G_n , то каждое непустое открытое множество является объединением некоторых G_n и поэтому его пересечение с не более чем счетным множеством точек a_n не пусто. Допустим, напротив, что существует такая последовательность (a_n) точек пространства E , что множество точек этой последовательности всюду плотно. Тогда не более чем счетное [в силу (1.9.3) и (1.9.2)] семейство открытых шаров $B(a_n; 1/m)$ является базой открытых множеств пространства E . Действительно, для каждой точки $x \in E$ и каждого $r > 0$ существует такой индекс m , что $1/m < r/2$, и такой индекс n , что $a_n \in B(x; 1/m)$. Отсюда следует, что $x \in B(a_n; 1/m)$. С другой стороны, если $y \in B(a_n; 1/m)$, то $d(x, y) \leq d(x, a_n) + d(a_n, y) \leq 2/m < r$, так что $B(a_n; 1/m) \subset B(x; r)$, а потому на основании (3.9.3) доказательство закончено.

Задачи

1. Покажите, что объединение открытого множества и множества его внешних точек в метрическом пространстве E всюду плотно.

2. Пусть A — множество в метрическом пространстве E . Точка $x \in A$ называется *изолированной*, если существует такая окрестность V точки x в E , что $V \cap A$ состоит из одной лишь точки x .

а) Покажите, что множество всех изолированных точек сепарабельного метрического пространства E не более чем счетно.

б) Покажите, что любое семейство $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ непустых открытых множеств сепарабельного метрического пространства E , обладающих тем свойством, что $U_\lambda \cap U_\mu = \emptyset$ при $\lambda \neq \mu$, не более чем счетно.

3. Пусть A — непустое множество на действительной прямой и B — множество точек $x \in \bar{A}$, для которых существует промежуток $]x, y[$ (где $y > x$), имеющий пустое пересечение с A . Покажите, что B не более чем счетно.

[Покажите, что B равномощно множеству открытых промежутков, попарно не имеющих общих точек.]

4. Пусть E — сепарабельное метрическое пространство. Точка $x \in E$ называется *точкой конденсации* множества $A \subset E$, если в любой окрестности точки x содержится несчетное множество точек из A . Докажите следующие утверждения.

а) Если A не имеет точек конденсации, то оно счетно.

[Рассмотрите пересечения A с множествами, входящими в базу открытых множеств пространства E .]

б) Если B — множество точек конденсации множества A , то каждая точка, принадлежащая B , является точкой конденсации множества B , а множество $A \cap (CB)$ не более чем счетно.

[Убедитесь, что B замкнуто, и примените а).]

5. Покажите, что из каждого открытого покрытия сепарабельного метрического пространства можно выделить счетное открытое покрытие.

6. Пусть E — сепарабельное метрическое пространство, f — произвольное отображение E в $\mathbb{R}$. Будем говорить, что в точке $x_0 \in E$ отображение f достигает *относительного максимума* (соответственно *строгого относительного максимума*), если существует такая окрестность V точки x_0 , что $f(x) \leq f(x_0)$ [соответственно $f(x) < f(x_0)$] для любой точки $x \in V$, отличной от x_0 . Покажите, что множества M точек $x \in E$, в которых f достигает строгого относительного максимума, не более чем счетно.

[Пусть (U_n) — база открытых множеств пространства E . Рассмотрите те значения n , для которых существует единственная такая точка $x \in U_n$, что $f(x)$ равно верхней грани отображения f в U_n .]

10. Подпространства метрического пространства

Пусть F — непустое подмножество метрического пространства E . Сужение на $F \times F$ отображения $(x, y) \rightarrow d(x, y)$, очевидно, является расстоянием в F , называемым расстоянием, *индуцированным* в F расстоянием d пространства E . Метрическое пространство, определяемое этим индуцированным расстоянием, называется *подпространством* F метрического пространства E .

(3.10.1) Для того чтобы множество $B \subset F$ было открыто в подпространстве F , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое множество A , открытое в E , что $B = A \cap F$.

Если $a \in F$, то пересечение $F \cap B(a; r)$ является открытым шаром с центром a и радиусом r в подпространстве F . Если A открыто в E и $x \in A \cap F$, то существует такое $r > 0$, что $B(x; r) \subset A$, следовательно, $x \in F \cap B(x; r) \subset A \cap F$ и потому $F \cap A$ открыто в F . Если, наоборот, B открыто в подпространстве F , то для каждой точки $x \in B$ существует такое число $r(x) > 0$, что $F \cap B(x; r(x)) \subset B$.

Тогда $B = \bigcup_{x \in B} (F \cap B(x; r(x))) = F \cap A$, где $A = \bigcup_{x \in B} B(x; r(x))$,

и в силу (3.5.1) и (3.5.2) A открыто в E .

(3.10.2) Для того чтобы каждое подмножество $B \subset F$, открытое в F , было открыто в E , необходимо и достаточно, чтобы F было открыто в E .

Полагая $B = F$, видим, что условие необходимо; ввиду (3.10.1) и (3.5.3) оно достаточно.

(3.10.3) Если $x \in F$, то, для того чтобы подмножество $W \subset F$ было окрестностью точки x в F , необходимо и достаточно, чтобы $W = V \cap F$, где V — окрестность точки x в E .

(3.10.4) Для того чтобы каждая окрестность в F точки $x \in F$ была окрестностью точки x в E , необходимо и достаточно, чтобы F было окрестностью точки x в E .

Эти свойства сразу следуют из (3.10.1) и определения окрестности.

(3.10.5) Для того чтобы множество $B \subset F$ было замкнуто в подпространстве F , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое множество A , замкнутое в E , что $B = A \cap F$.

Сказать, что B замкнуто в F , значит сказать, что $F \setminus B$ открыто в F , а это в силу (3.10.1) равносильно существованию такого множества C , открытого в E , что $F \setminus B = C \cap F$. Но это равенство эквивалентно равенству $B = F \cap (E \setminus C)$, откуда и следует требуемый результат.

(3.10.6) Для того чтобы каждое подмножество $B \subset F$, замкнутое в F , было замкнуто в E , необходимо и достаточно, чтобы F было замкнуто в E .

Доказательство точно такое же, как для (3.10.2); нужно применить (3.10.5) и (3.8.2).

(3.10.7) Замыкание в F множества $B \subset F$ равно $\bar{B} \cap F$, где $\bar{B}$ — замыкание множества B в E .

В самом деле, для всякой окрестности V точки $x \in F$ в E имеем $V \cap B = (V \cap F) \cap B$, и требуемый результат следует из (3.10.3) и определения точки прикосновения.

(3.10.8) Пусть F — множество, плотное в пространстве E . Для каждой точки $x \in F$ и каждой окрестности W точки x в F замыкание $\bar{W}$ окрестности W в E является окрестностью точки x в E .

По определению существует такая открытая окрестность U точки x в E , что $U \cap F \subset W$. Достаточно доказать, что $U \subset \bar{W}$. Но если $y \in U$ и V — любая окрестность точки y в E , то $U \cap V$ является окрестностью точки y в E . Поэтому $F \cap (U \cap V)$ не пусто, а это означает, что $(F \cap U) \cap V$ не пусто, т. е. $y \in \overline{F \cap U} \subset \bar{W}$.

(3.10.9) Любое подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.

В самом деле, если (G_n) — не более чем счетная база открытых множеств пространства E , то в силу (3.10.1) и (1.8.2) множества $G_n \cap F$ образуют счетную базу открытых множеств подпространства $F \subset E$. Отсюда на основании (3.9.4) следует требуемый результат.

Задачи

1. Пусть B и B' — два непустых множества в метрическом пространстве E и A — подмножество пересечения $B \cap B'$, открытое (соответственно замкнутое) и в B и в B' . Покажите, что A открыто (соответственно замкнуто) в $B \cup B'$.

2. Пусть (U_α) — покрытие метрического пространства E , состоящее из открытых множеств. Покажите, что для того, чтобы множество $A \subseteq E$ было замкнуто в E , необходимо и достаточно, чтобы каждое множество $A \cap U_\alpha$ было замкнуто в U_α .

3. Множество A в метрическом пространстве E называется *локально замкнутым*, если у каждой точки $x \in A$ существует такая окрестность V , что $A \cap V$ замкнуто в V . Покажите, что локально замкнутыми множествами в пространстве E являются множества вида $U \cap F$, где U открыто, а F замкнуто в E .

[Для доказательства того, что локально замкнутое множество имеет этот вид, воспользуйтесь задачей 2.]

4. Приведите пример такого подпространства A плоскости $\mathbb{R}^2$, что в A существует открытый шар, являющийся замкнутым множеством, но не замкнутым шаром, и замкнутый шар, являющийся открытым множеством, но не открытым шаром.

[Возьмите в качестве A две точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ и подходящее подмножество оси x .]

5. Докажите утверждение (3.10.9), не пользуясь понятием базы (иными словами, укажите не более чем счетное подмножество, плотное в подпространстве).

§ 11. Непрерывные отображения

Пусть E и E' — два метрических пространства, d и d' — расстояния в них. Отображение f пространства E в E' называется *непрерывным в точке* $x_0 \in E$, если для каждой окрестности V' точки $f(x_0)$ в E' существует такая окрестность V точки x_0 в E , что $f(V) \subseteq V'$. Отображение f называется *непрерывным в E* (или просто непрерывным), если оно непрерывно в каждой точке пространства E .

Если принять, что математическое понятие окрестности соответствует интуитивной идее „близости“, то предыдущее определение можно выразить еще нагляднее, сказав, что точка $f(x)$, где f — непрерывное отображение, сколь угодно близка к $f(x_0)$, как только точка x достаточно близка к x_0 .

(3.11.1) Для того чтобы отображение f было непрерывно в точке $x_0 \in E$, необходимо и достаточно, чтобы прообраз $f^{-1}(V')$ каждой окрестности V' точки $f(x_0)$ в E' был окрестностью точки x_0 в E .

(3.11.2) Для того чтобы отображение f было непрерывно в точке $x_0 \in E$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что из $d(x_0, x) < \delta$ следует $d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

Это — только другие формулировки определения.

Естественное вложение $j_F: F \rightarrow E$ подпространства $F \subset E$ в E [см. (1.6.1)] непрерывно. Любое постоянное отображение непрерывно.

(3.11.3) Если $x_0 \in E$ — точка прикосновения множества $A \subset E$ и если отображение f непрерывно в точке x_0 , то $f(x_0)$ — точка прикосновения множества $f(A)$.

В самом деле, если V' — окрестность точки $f(x_0)$ в E' , то $f^{-1}(V')$ — окрестность точки x_0 в E . Поэтому существует точка $y \in A \cap f^{-1}(V')$, и, значит, $f(y) \in f(A) \cap V'$.

(3.11.4) Пусть f — отображение пространства E в E' . Следующие свойства эквивалентны:

- f непрерывно;
- прообраз $f^{-1}(A')$ каждого множества A' , открытого в E' , открыт в E ;
- прообраз $f^{-1}(A')$ каждого множества A' , замкнутого в E' , замкнут в E ;
- для каждого множества $A \subset E$ имеет место включение $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Ввиду (3.11.3) имеем $a) \Rightarrow d)$. Далее, $d) \Rightarrow c)$, потому что если A' замкнуто и $A = f^{-1}(A')$, то $f(\bar{A}) \subset \bar{A}' = A'$; следовательно, $\bar{A} \subset f^{-1}(A') = A$, и так как $A \subset \bar{A}$, то A замкнуто. Доказательств $c) \Rightarrow b)$ проводится на основании определения замкнутого множества и формулы (1.5.13). Наконец, $b) \Rightarrow a)$, потому что если V' — окрестность точки $f(x_0)$, то существует открытая окрестность $W' \subset V'$ точки $f(x_0)$; прообраз $f^{-1}(W')$ является открытым множеством, содержащим x_0 и содержащимся в $f^{-1}(V')$, и, таким образом, в силу (3.11.1) отображение f непрерывно в каждой точке x_0 .

Следует заметить, что образ открытого (соответственно замкнутого) множества при непрерывном отображении, вообще говоря, не будет открытым (соответственно замкнутым) множеством. Например, отображение $x \rightarrow x^2$ непрерывно в $\mathbb{R}$, но образ $[0, 1]$ открытого множества $] -1, +1[$ не открыт; отображение $x \rightarrow 1/x$ непрерывно на подпространстве $A = [1, +\infty[$ пространства $\mathbb{R}$, но образ замкнутого множества A есть промежуток $]0, 1]$, не замкнутый в $\mathbb{R}$ [см., однако, (3.17.9) и (3.20.13)].

(3.11.5) Пусть f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' и g — отображение простран-

ства E' в метрическое пространство E'' . Если f непрерывно в точке x_0 и g непрерывно в точке $f(x_0)$, то $h = g \circ f$ непрерывно в точке x_0 . Если f непрерывно в E и g непрерывно в E' , то h непрерывно в E .

Второе утверждение, очевидно, следует из первого. Пусть W'' — окрестность точки $h(x_0) = g(f(x_0))$. Тогда из (3.11.1) и предположений следует, что $g^{-1}(W'')$ — окрестность точки $f(x_0)$ в E' и $f^{-1}(g^{-1}(W''))$ — окрестность точки x_0 в E . Но $f^{-1}(g^{-1}(W'')) = h^{-1}(W'')$. В частности,

(3.11.6) Если f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' , непрерывное в точке x_0 , и F — подпространство пространства E , содержащее x_0 , то сужение отображения f на F непрерывно в точке x_0 .

В самом деле, это сужение является отображением $f \circ j_F$, где j_F — естественное вложение подпространства F в E .

Отметим, однако, что сужение отображения $f: E \rightarrow E'$ на подпространстве F может оказаться непрерывным и в случае, когда f не является непрерывным ни в одной точке $x \in E$. Примером служит отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, равное нулю на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и единице на его дополнении (функция Дирихле); сужение отображения f на $\mathbb{Q}$ постоянно и потому непрерывно.

Равномерно непрерывное отображение пространства E в E' есть отображение, обладающее тем свойством, что для каждого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $d(x, y) < \delta$ следует $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$. Из этого определения и (3.11.2) вытекает, что

(3.11.7) Равномерно непрерывное отображение непрерывно.

Обратное, вообще говоря, не верно. Например, функция $x \rightarrow x^2$ не равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, так как для данного $\alpha > 0$ разность $(x + \alpha)^2 - x^2 = \alpha(2x + \alpha)$ может принимать сколь угодно большие значения [см., однако, (3.16.5)].

В приведенных выше примерах (постоянное отображение; естественное вложение) отображения были равномерно непрерывны.

(3.11.8) Для любого непустого множества $A \subseteq E$ отображение $x \rightarrow d(x, A)$ равномерно непрерывно.

Это следует из определения и (3.4.2).

(3.11.9). Если f — равномерно непрерывное отображение E в E' и g — равномерно непрерывное отображение E' в E'' , то $h = g \circ f$ равномерно непрерывно.

В самом деле, для заданного $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $d'(x', y') < \delta$ следует $d''(g(x'), g(y')) < \epsilon$; далее, существует такое $\eta > 0$, что из $d(x, y) < \eta$ следует $d'(f(x), f(y)) < \delta$. Таким образом, из $d(x, y) < \eta$ следует $d''(h(x), h(y)) < \epsilon$.

Задачи

1. Пусть f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' . Покажите, что следующие свойства эквивалентны:

- f непрерывно;
- для каждого множества $A' \subset E'$ имеем $f^{-1}(\overset{\circ}{A}') \subset (f^{-1}(A'))^\circ$;
- для каждого множества $A' \subset E'$ имеем $\overline{f^{-1}(A')} \subset f^{-1}(\overline{A'})$. Приведите пример непрерывного отображения f и такого множества $A' \subset E'$, что $f^{-1}(\overline{A'})$ не является замыканием прообраза $f^{-1}(A')$.

2. Покажите, что для любого метрического пространства E любого числа $r > 0$ и любого множества $A \subset E$ множество $V'_r(A)$ замкнуто. ($V'_r(A)$ — множество таких точек $x \in E$, для которых $d(x, A) \leq r$.)

[Примените (3.11.8).]

3. Пусть A и B — два непустых множества в метрическом пространстве E , для которых $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Покажите, что существует такое открытое множество $U \supset A$ и такое открытое множество $V \supset B$, что $U \cap V = \emptyset$.

[Рассмотрите функцию $x \rightarrow d(x, A) - d(x, B)$.]

12. Гомеоморфизмы. Эквивалентные расстояния

Отображение f метрического пространства E в метрическое пространство E' называется *гомеоморфизмом*, если: 1°) оно биективно; 2°) и f и обратное отображение f^{-1} непрерывны. Такие отображения называются также *взаимно непрерывными*. Обратное отображение f^{-1} является в этом случае гомеоморфизмом пространства E' на E . Если f — гомеоморфизм пространства E на E' и g — гомеоморфизм пространства E' на E'' , то отображение $g \circ f$ в силу (3.11.5) является гомеоморфизмом пространства E на E'' . Гомеоморфизм может не быть равномерно непрерывным (например, гомеоморфизм $x \rightarrow x^3$ действительной прямой $\mathbb{R}$ на себя).

Два метрических пространства E и E' *гомеоморфны*, если существует гомеоморфизм пространства E на E' . Два пространства, гомеоморфные третьему, гомеоморфны. Отступая от правильного словоупотребления, пространство, гомеоморфное дискретному метрическому пространству (3.2.5), называют *дискретным* пространством, даже если расстояние в нем определено не как в (3.2.5).

Изометрия в соответствии с определением всегда взаимно непрерывна и потому является гомеоморфизмом. Например, расширенная действительная прямая $\overline{\mathbb{R}}$, согласно определению, гомеоморфна подпространству $[-1, 1]$ пространства $\mathbb{R}$.

Пусть d_1 и d_2 — два расстояния в множестве E . Они определяют на E два метрических пространства, которые нужно рассматривать как различные (хотя они имеют одно и то же множество точек).

Пусть E_1 и E_2 — эти пространства. Если тождественное отображение $x \rightarrow x$ пространства E_1 на E_2 является гомеоморфизмом, то d_1 и d_2 называются *эквивалентными расстояниями* (или *топологически эквивалентными расстояниями*) в E . Из (3.11.4) видно, что в этом случае в E_1 и E_2 совпадают семейства открытых множеств. Семейство открытых множеств метрического пространства E часто называют *топологией* пространства E ; эквивалентные расстояния — это такие расстояния, которые порождают одну и ту же топологию.

Можно убедиться в том, что определения *окрестностей*, *замкнутых множеств*, *точек прикосновения*, *замыкания*, *внутренности множества*, *множества внешних точек*, *плотных множеств*, *границы*, *непрерывной функции* зависят только от топологии рассматриваемых пространств; они являются *топологическими понятиями*. С другой стороны, понятия *шаров*, *сфер*, *диаметра*, *ограниченного множества*, *равномерно непрерывной функции* не являются топологическими. Топологические свойства метрического пространства *инвариантны при гомеоморфизмах*.

Может случиться, что тождественное отображение $x \rightarrow x$ пространства E_1 на E_2 непрерывно, но не взаимно непрерывно. Возьмем, например, $E = \mathbb{R}$, $d_2(x, y) = |x - y|$, а $d_1(x, y)$ — расстояние, определенное в (3.2.5) и принимающее только значения 0 и 1. В таком случае расстояние d_1 (соответственно топология пространства E_1) называется *более сильным* (соответственно *сильной*), чем расстояние d_2 (соответственно топология пространства E_2).

Задачи

1. Пусть a — иррациональное число > 0 . Для каждого рационального числа $x > 0$ пусть $f_a(x)$ — такое (однозначно определенное) действительное число, что $0 < f_a(x) < a$ и что $x - f_a(x)$ является целочисленно кратным числу a . Покажите, что f_a — непрерывное инъективное отображение пространства $\mathbb{Q}_+^*$ рациональных чисел > 0 в промежуток $]0, a[$ пространства $\mathbb{R}$ и что $f_a(\mathbb{Q}_+^*)$ плотно в $]0, a[$. Выведите из этого результата и из задачи 1 § 2.2, что существует непрерывное биективное отображение пространства $\mathbb{Q}$ на себя, не являющееся взаимно непрерывным [ср. с (4.2.2)].

2. Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства E в метрическое пространство F .

а) Пусть (V_λ) — покрытие пространства F открытыми множествами. Покажите, что если для каждого λ сужение отображения f на подпространстве $f^{-1}(V_\lambda)$ есть гомеоморфизм этого подпространства на подпространство $V_\lambda \subset F$, то f — гомеоморфизм пространства E на пространство F .

б) Приведите пример такого отображения f , не являющегося инъективным, и такого покрытия (U_α) пространства E открытыми множествами, что сужение отображения f на каждом из U_α есть гомеоморфизм подпространства $U_\alpha \subset E$ на подпространство $f(U_\alpha) \subset F$.

[И E и F можно взять дискретными.]

3. Пусть E , F и G — три метрических пространства, f — непрерывное отображение пространства E в F и g — непрерывное отображение пространства F в G . Покажите, что если f сюръективно и $g \circ f$ — гомеоморфизм пространства E на G , то f — гомеоморфизм E на F и g — гомеоморфизм F на G .

13. Пределы

Пусть E — метрическое пространство, A — подмножество в нем, a — точка прикосновения множества A , f — отображение множества A в метрическое пространство E' . Предположим сначала, что a не принадлежит A . Мы будем говорить, что $f(x)$ имеет предел $a' \in E'$ при $x \in A$, стремящемся к a (или a' есть предел отображения f в точке $a \in \bar{A}$ по множеству A), если отображение g подпространства $A \cup \{a\}$ в E' , определяемое условиями: $g(x) = f(x)$ при $x \in A$ и $g(a) = a'$, непрерывно в точке a . В этом случае мы пишем

$$a' = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x).$$

Если $a \in A$, то мы пользуемся той же терминологией и теми же обозначениями в случае, когда отображение f непрерывно в точке a , причем $a' = f(a)$.

(3.13.1) Для того чтобы точка $a' \in E'$ была пределом отображения $f(x)$ при $x \in A$, стремящемся к a , необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности V' точки a' в E' существовала такая окрестность V точки a в E , что $f(V \cap A) \subset V'$.

(3.13.2) Для того чтобы точка $a' \in E'$ была пределом отображения $f(x)$ при $x \in A$, стремящемся к a , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\epsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что из $x \in A$ и $d(x, a) < \delta$ следует неравенство $d'(a', f(x)) < \epsilon$.

Эти критерии являются лишь перефразировкой определений.

(3.13.3) Отображение может иметь лишь один предел по множеству A в данной точке $a \in \bar{A}$.

В самом деле, если бы a' и b' были двумя пределами отображения f в точке a , то из (3.13.2) и неравенства треугольника следовало бы, что $d'(a', b') < 2\epsilon$ для любого $\epsilon > 0$, что невозможно, если $a' \neq b'$.

(3.13.4) Пусть f — отображение пространства E в E' . Для того чтобы f было непрерывно в точке $x_0 \in E$, являющейся

точкой прикосновения множества $E \setminus \{x_0\}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_0) = \lim_{\substack{x \in E \setminus \{x_0\}, \\ x \rightarrow x_0}} f(x)$.

Это лишь пересказ определений.

(3.13.5) Пусть $a' = \lim_{x \in A, x \rightarrow a} f(x)$. Тогда для каждого подмножества $B \subset A$, для которого $a \in \bar{B}$, точка a' является пределом отображения f в точке a и по B . Это, в частности, относится к случаю, когда $B = V \cap A$, где V — окрестность точки a .

Очевидное следствие определения и (3.11.6).

(3.13.6) Пусть f имеет предел a' в точке $a \in \bar{A}$ по множеству A . Если g — отображение пространства E' в E'' , непрерывное в точке a' , то $g(a') = \lim_{x \in A, x \rightarrow a} g(f(x))$.

Это сразу следует из (3.11.5).

(3.13.7) Если $a' = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$, то $a' \in \overline{f(A)}$.

В самом деле, в силу (3.13.1) для каждой окрестности V' точки a' пересечение $V' \cap f(A)$ содержит образ $f(V \cap A)$, который не пуст, поскольку $a \in \bar{A}$.

Важным является случай предела последовательности. Рассмотрим на расширенной действительной прямой точку $+\infty$, являющуюся точкой прикосновения множества $\mathbb{N}$ целых чисел ≥ 0 . Отображение множества $\mathbb{N}$ в метрическое пространство E есть последовательность $n \rightarrow x_n$ точек этого пространства. Если $a \in E$ — предел этого отображения в точке $+\infty$ по множеству $\mathbb{N}$, то мы будем говорить, что a есть предел последовательности (x_n) [или что последовательность (x_n) сходится к a], и писать $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Критерии

(3.13.1) и (3.13.2) в этом случае превращаются в следующие:

(3.13.8) Для того чтобы $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности V точки a существовал такой номер n_0 , что из неравенства $n \geq n_0$ следует $x_n \in V$.

Иными словами, V содержит x_n при всех индексах n , за исключением конечного числа индексов.

(3.13.9) Для того чтобы $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\epsilon > 0$ существовал такой номер n_0 , что из $n \geq n_0$ следует $d(a, x_n) < \epsilon$.

Последний критерий можно также записать в виде $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0$.

Подпоследовательность последовательности (x_n) есть последовательность $k \rightarrow x_{n_k}$, где $k \rightarrow n_k$ — строго возрастающая бесконечная последовательность целых чисел ≥ 0 . Из (3.13.5) видно, что

(3.13.10) Если $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ для любой подпоследовательности последовательности (x_n) .

Пусть (x_n) — последовательность точек в метрическом пространстве E . Точка $b \in E$ называется *предельной точкой* последовательности (x_n) , если существует такая подпоследовательность (x_{n_k}) , что $b = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$.

Предельная точка подпоследовательности последовательности (x_n) является предельной точкой и самой последовательности (x_n) . Если последовательность (x_n) имеет предел a , то, как следует из (3.13.10), a является единственной предельной точкой этой последовательности. Обратное, вообще говоря, не верно; например, последовательность (x_n) действительных чисел, где $x_{2n} = 1/n$ и $x_{2n+1} = n$ ($n \geq 1$), имеет нуль своей единственной предельной точкой, но не сходится к нулю [см., однако, (3.16.4)].

(3.13.11). Для того чтобы точка $b \in E$ была предельной точкой последовательности (x_n) , необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности V точки b и любого номера t существовал такой номер $n \geq t$, что $x_n \in V$.

Условие, очевидно, необходимо. Допустим, напротив, что оно выполняется, и определим подпоследовательность (x_{n_k}) следующим образом: n_k есть наименьший номер $> n_{k-1}$, для которого $d(b, x_{n_k}) < 1/k$. Так как $d(x_{n_k}, b) < 1/h$ при любом $k \geq h$, то подпоследовательность (x_{n_k}) сходится к b .

(3.13.12) Если b — предельная точка последовательности (x_n) в E и если отображение g пространства E в E' непрерывно в b , то $g(b)$ — предельная точка последовательности $(g(x_n))$.
Ясно из определения и (3.13.6).

Из (3.13.7) следует, что если b — предельная точка (и тем более предел) последовательности (x_n) точек, принадлежащих множеству $A \subset E$, то $b \in \bar{A}$. Наоборот:

(3.13.13) Для любой точки $a \in \bar{A}$ существует такая последовательность (x_n) точек множества A , что $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

В самом деле, по предположению множество $A \cap B(a; 1/n)$ не пусто. Поэтому в силу (1.4.5) для каждого n существует точка

$x_n \in A \cap B(a; 1/n)$, и на основании (3.13.9) последовательность (x_n) сходится к a .

(3.13.14) Пусть f — отображение множества $A \subseteq E$ в метрическое пространство E' и $a \in A$. Для того чтобы f имело предел $a' \in E'$ в точке a по A , необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности (x_n) точек множества A , сходящейся к a , последовательность $f(x_n)$ сходилась к a' .

Необходимость следует из определений и (3.13.6). Допустим, напротив, что условие выполняется и что a' не является пределом отображения f в точке a по множеству A . Тогда в силу (3.13.2) существует такое $\alpha > 0$, что для любого номера n существует точка $x_n \in A$, удовлетворяющая двум условиям: $d(a, x_n) < 1/n$ и $d(a', f(x_n)) \geq \alpha$. Это означает, что последовательность (x_n) сходится к a , но последовательность $(f(x_n))$ не сходится к a' , и мы пришли к противоречию.

Задачи

1. Пусть (u_n) — последовательность действительных чисел ≥ 0 , сходящаяся к нулю. Покажите, что существует бесконечно много таких номеров n , что $u_n \geq u_m$ при каждом $m \geq n$.

2. а) Пусть (x_n) — последовательность в метрическом пространстве E . Покажите, что если сходятся три подпоследовательности (x_{2n}) , (x_{2n+1}) и (x_{3n}) , то сходится и последовательность (x_n) .

б) Приведите пример последовательности (x_n) действительных чисел, которая не сходится, но обладает тем свойством, что для каждого $k \geq 2$ подпоследовательность (x_{kn}) сходится.

[Рассмотрите подпоследовательность (x_{p_k}) , где (p_k) — строго возрастающая последовательность простых чисел.]

3. Пусть E — сепарабельное метрическое пространство, f — произвольное отображение пространства E в $\mathbb{R}$. Покажите, что множество тех точек $a \in E$, для которых предел $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x)$ существует и отличен от $f(a)$, не более чем счетно.

[Для каждой пары рациональных чисел p, q , удовлетворяющих условию $p < q$, рассмотрите множество точек $a \in E$, для которых

$$f(a) \leq p < q \leq \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x),$$

и, пользуясь задачей 2, а) § 3.9, покажите, что это множество не более чем счетно. Аналогично рассмотрите множество точек $a \in E$, для которых

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) \leq p < q \leq f(a).]$$

14. Последовательности Коши. Полные пространства

Последовательность Коши в метрическом пространстве E есть последовательность (x_n) , удовлетворяющая следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что из $p \geq n_0$ и $q \geq n_0$ следует $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

(3.14.1) *Любая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.*

В самом деле, если $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что из $n \geq n_0$ следует $d(a, x_n) < \varepsilon/2$. В силу неравенства треугольника из $p \geq n_0$ и $q \geq n_0$ вытекает $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

(3.14.2) *Если (x_n) — последовательность Коши, то любая предельная точка этой последовательности является ее пределом.*

Действительно, если задано $\varepsilon > 0$, то существует такой номер n_0 , что из $p \geq n_0$ и $q \geq n_0$ следует $d(x_p, x_q) < \varepsilon/2$, и если b — предельная точка последовательности (x_n) , то в силу (3.13.11) существует такой номер $p_0 \geq n_0$, что $d(b, x_{p_0}) < \varepsilon/2$. Из неравенства треугольника тогда вытекает, что $d(b, x_n) \leq \varepsilon$ для любого $n \geq n_0$.

Метрическое пространство E называется *полным*, если любая последовательность Коши в E сходится (разумеется, к точке пространства E).

(3.14.3) *Действительная прямая $\mathbb{R}$ является полным метрическим пространством.*

Пусть (x_n) — последовательность Коши действительных чисел. По индукции определим последовательность (n_k) целых чисел следующим образом: n_{k+1} есть наименьшее целое число $> n_k$, такое, что при $p \geq n_{k+1}$ и $q \geq n_{k+1}$ выполняется неравенство $|x_p - x_q| < 1/2^{k+2}$; возможность такого определения чисел n_k следует из того факта, что (x_n) — последовательность Коши. Пусть I_k — замкнутый промежуток $[x_{n_k} - 2^{-k}, x_{n_k} + 2^{-k}]$. Так как $|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| < 2^{-k-1}$, мы имеем $I_{k+1} \subset I_k$. С другой стороны, при $m \geq n_k$ по определению $x_m \in I_k$. Теперь из аксиомы [2.1. (IV)] следует, что вложенные промежутки I_k имеют непустое пересечение. Пусть $a \in I_k$ при всех k . Тогда ясно, что $|a - x_m| \leq 2^{-k+1}$ при всех $m \geq n_k$, и поэтому $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(3.14.4) *Если подпространство F метрического пространства E является полным, то F замкнуто в E .*

В самом деле, в силу (3.13.13) любая точка $a \in \bar{F}$ является пределом последовательности (x_n) точек множества F . Последовательность (x_n) в силу (3.14.1) является последовательностью Коши и

поэтому, по предположению, сходится к точке b , принадлежащей F . Но ввиду (3.13.3) $b = a$ и, следовательно, $a \in F$. Таким образом, $\bar{F} = F$, ч. т. д.

(3.14.5) В полном метрическом пространстве E любое замкнутое множество F является полным подпространством.

Действительно, последовательность Коши (x_n) точек множества F , по предположению, сходится к точке $a \in E$, и так как $x_n \in F$, то в силу (3.13.7) $a \in \bar{F} = F$.

Теоремы (3.14.4) и (3.14.5) позволяют (исходя из того факта, что действительная прямая является полным пространством) сразу же строить примеры и полных и неполных пространств.

Фундаментальная важность полных пространств основывается на том, что для доказательства сходимости некоторой последовательности в таком пространстве достаточно доказать, что она является последовательностью Коши (говорят также, что такая последовательность удовлетворяет критерию Коши). Главное различие между проверкой этого критерия и проверкой определения сходящейся последовательности состоит в том, что в критерии Коши не нужно заранее знать значение предела.

Мы уже упоминали, что два расстояния d_1 и d_2 в одном и том же множестве E могут быть топологически эквивалентны, но тождественное отображение пространства E_1 на E_2 (где E_1 и E_2 — соответствующие метрические пространства) может не быть равномерно непрерывным. Это, например, будет иметь место, если взять $E = \mathbb{R}$, $d_2(x, y) = |x - y|$, а $d_1(x, y)$ — расстояние на расширенной действительной прямой, рассматриваемое только на $\mathbb{R}$. Пространство E_2 будет тогда полным, но E_1 полным быть не может, так как оно не замкнуто в $\bar{\mathbb{R}}$.

Когда два расстояния d_1 и d_2 таковы, что тождественное отображение E_1 на E_2 и обратное к нему отображение равномерно непрерывны, d_1 и d_2 называются *равномерно эквивалентными*. Тогда последовательности Коши при том и другом расстоянии совпадают. Например, если существуют два таких действительных числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что для любой пары точек x, y пространства E выполняются неравенства $\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$, то d_1 и d_2 — равномерно эквивалентные расстояния.

Пусть E и E' — два метрических пространства, A — множество в E , f — отображение множества A в E' . *Колебание отображения f на A* есть, по определению, диаметр $\delta(f(A))$ (который может оказаться равным и $+\infty$). Пусть a — точка прикосновения множества A . *Колебание отображения f в точке a по множеству A* есть число $\Omega(a; f) = \inf_V \delta(f(V \cap A))$, где V — всевозможные окрест-

ности точки a (или же V принадлежат только фундаментальной системе окрестностей).

(3.13.6) Пусть E' — полное метрическое пространство. Для того чтобы существовал предел $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы колебание отображения f в точке a по множеству A было равно нулю.

В силу (3.13.2) условие необходимо. Допустим, напротив, что оно выполняется, и пусть (x_n) — последовательность точек множества A , сходящаяся к a . Тогда из предположения следует, что последовательность $(f(x_n))$ является в E' последовательностью Коши. В самом деле, если задано $\varepsilon > 0$, то существует такая окрестность V точки a , что для любых двух точек x, y , принадлежащих $V \cap A$, выполняется неравенство $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Но мы имеем $x_n \in V \cap A$ при всех n , за исключением конечного их числа. Поэтому последовательность $(f(x_n))$ имеет предел a' . Далее, какова бы ни была другая последовательность (y_n) точек множества A , сходящаяся к a , пределы последовательностей $(f(x_n))$ и $(f(y_n))$ совпадают. Действительно, как только и x_n и y_n попадут в $V \cap A$, мы будем иметь $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Таким образом, из определения предела и (3.13.14) следует, что $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = a'$.

Задачи

1. а) Пусть E — ультраметрическое пространство (задача 4 § 3.8). Покажите, что для того, чтобы последовательность (x_n) была в E последовательностью Коши, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

б) Пусть X — произвольное множество, E — множество всех бесконечных последовательностей $x = (x_n)$ элементов множества X . Для любых двух различных элементов $x = (x_n)$ и $y = (y_n)$ множества E пусть $k(x, y)$ — наименьший номер n , при котором $x_n \neq y_n$. Пусть $d(x, y) = 1/k(x, y)$, если $x \neq y$ и $d(x, x) = 0$. Докажите, что d — ультраметрическое расстояние в E и что метрическое пространство E , определяемое расстоянием d , является полным.

2. Пусть φ — возрастающая действительная функция, определенная на промежутке $0 \leq u < +\infty$ и такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$ и $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$. Пусть $d(x, y)$ — расстояние в множестве E . Тогда $d_1(x, y) = \varphi(d(x, y))$ — другое расстояние в E .

а) Покажите, что если функция φ непрерывна в точке $u = 0$, то расстояния d и d_1 равномерно эквивалентны. Наоборот, если для расстояния d существует точка $x_0 \in E$, не изолированная в E (задача 2 § 3.9), и если d и d_1 топологически эквивалентны, то функция φ непрерывна в точке $u = 0$.

б) Докажите, что функции

$$u^r \ (0 < r \leq 1), \quad \ln(1+u), \quad u/(1+u), \quad \inf(1, u)$$

удовлетворяют указанным выше условиям. Рассматривая две последние функции, убедитесь, что для любого расстояния в E существует равномерно эквивалентное расстояние, являющееся ограниченным.

3. Пусть на действительной прямой $d(x, y) = |x - y|$ — обычное расстояние и $d'(x, y) = |x^3 - y^3|$. Покажите, что эти два расстояния топологически эквивалентны и что последовательности Коши при этих двух расстояниях совпадают, но что они не равномерно эквивалентны.

4. Пусть E — полное метрическое пространство, d — расстояние в E , A — пересечение некоторой последовательности (U_n) открытых множеств пространства E . Положим $F_n = E \setminus U_n$ и для каждой пары точек x, y множества A определим

$$f_n(x, y) = \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right|,$$

$$d_n(x, y) = f_n(x, y) / (1 + f_n(x, y)) \quad \text{и} \quad d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x, y) / 2^n.$$

Покажите, что на подпространстве $A \subset E$ расстояние d' топологически эквивалентно расстоянию d и что с расстоянием d' подпространство A является полным метрическим пространством. Примените это к подпространству $I \subset \mathbb{R}$, состоящему из всех иррациональных чисел.

[Обратите внимание на то, что последовательность Коши при d' является последовательностью Коши и при d , но что ее предел в E не может принадлежать ни одному из F_n]

15. Элементарные теоремы о продолжении

(3.15.1) Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в метрическое пространство E' . Множество A точек $x \in E$, в которых $f(x) = g(x)$, замкнуто в E .

Докажем равносильное утверждение, а именно что множество $E \setminus A$ открыто. Пусть $a \in E \setminus A$; тогда $f(a) \neq g(a)$. Пусть $d'(f(a), g(a)) = \alpha > 0$. Из непрерывности отображений f и g в точке a и из (3.6.3) следует, что существует такая окрестность V точки a в E , что при $x \in V$ имеем $d'(f(a), f(x)) < \alpha/2$ и $d'(g(a), g(x)) < \alpha/2$. Тогда при $x \in V$ будем иметь $f(x) \neq g(x)$, так как в противном случае из неравенства треугольника мы получили бы $d'(f(a), g(a)) < \alpha$.

(3.15.2) (Принцип продолжения тождеств) Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в метрическое пространство E' . Если $f(x) = g(x)$ во всех точках x множества A , плотного в E , то $f = g$.

В самом деле, множество точек x , в которых $f(x) = g(x)$, в силу (3.15.1) замкнуто и содержит A .

(3.15.3) Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в расширенную действительную пря-

мую $\bar{R}$. Множество P точек $x \in E$, в которых $f(x) \leq g(x)$, замкнуто в E .

Докажем, что множество $E \setminus P$ открыто. Допустим, что $f(a) > g(a)$, и пусть $\beta \in \bar{R}$ выбрано так, что $f(a) > \beta > g(a)$ [ср. (2.2.16) и определение пространства $\bar{R}$ в 3.3]. Прообраз V при f открытого промежутка $[\beta, +\infty]$ в силу (3.11.1) является окрестностью точки a ; окрестностью точки a является и прообраз W при g открытого промежутка $[-\infty, \beta]$. Следовательно, окрестностью точки a на основании (3.6.3) будет и $V \cap W$, а при $x \in V \cap W$ имеем $f(x) > \beta > g(x)$, ч. т. д.

(3.15.4) (Принцип продолжения неравенств) Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в расширенную действительную прямую $\bar{R}$. Если $f(x) \leq g(x)$ во всех точках x множества A , плотного в E , то $f(x) \leq g(x)$ при всех $x \in E$.

Доказательство следует из (3.15.3), так же как (3.15.2) было получено из (3.15.1).

(3.15.5) Пусть A — множество, плотное в метрическом пространстве E , и f — отображение множества A в метрическое пространство E' . Для того чтобы существовало непрерывное отображение $\bar{f}$ пространства E в E' , совпадающее на A с f , необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x \in E$ в E' существовал предел $\lim_{y \rightarrow x, y \in A} f(y)$. Непрерывное отображение $\bar{f}$ в этом случае единственно.

Поскольку любая точка $x \in E$ принадлежит $\bar{A}$, на основании (3.13.5) мы должны иметь $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in A} \bar{f}(y)$ и, значит, $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in A} f(y)$. Тем самым доказаны необходимость условия и тот факт, что если непрерывное отображение существует, то лишь одно [это следует также из (3.15.2)]. Допустим, напротив, что условие выполняется, и докажем, что отображение $\bar{f}$, определяемое равенством $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in A} f(y)$, есть решение задачи о продолжении.

Прежде всего если $x \in A$, то из существования предела по определению следует $\bar{f}(x) = f(x)$, поэтому отображение $\bar{f}$ продолжает f , и остается убедиться в том, что $\bar{f}$ непрерывно. Пусть $x \in E$ и V' — окрестность точки $\bar{f}(x)$ в E' . Существует замкнутый шар B' с центром $\bar{f}(x)$, содержащийся в V' . По предположению, в силу (3.13.1) существует такая открытая окрестность V точки x в E , что $f(V \cap A) \subset B'$. Для любой точки $y \in V$ точка $\bar{f}(y)$ является пределом f в точке y по множеству A , значит ввиду (3.13.5) и по

множеству $V \cap A$. Поэтому из (3.13.7) следует, что $\bar{f}(y) \in \overline{f(V \cap A)}$, и, так как шар B' замкнут, $\bar{f}(y) \in B'$, ч. т. д.

(3.15.6) Пусть A — множество, плотное в метрическом пространстве E , и f — равномерно непрерывное отображение множества A в полное метрическое пространство E' . Тогда существует непрерывное отображение $\bar{f}$ пространства E в E' ; на A совпадающее с f . При этом отображение $\bar{f}$ равномерно непрерывно.

Чтобы доказать, что отображение $\bar{f}$ существует, в силу (3.15.5) и (3.14.6) нужно лишь убедиться в том, что колебание отображения f в любой точке $x \in E$ по множеству A равно нулю. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $d(y, z) < \delta$ следует $d'(f(y), f(z)) < \varepsilon/3$ (y и z принадлежат A). Поэтому диаметр множества $f(A \cap B(x; \delta/2))$ не больше $\varepsilon/3$, и наше утверждение доказано. Рассмотрим теперь любые две точки s, t пространства E , для которых $d(s, t) < \delta/2$. Найдутся такая точка $y \in A$, что $d(s, y) < \delta/4$ и $d'(\bar{f}(s), f(y)) < \varepsilon/3$, и такая точка $z \in A$, что $d(t, z) < \delta/4$ и $d'(\bar{f}(t), f(z)) < \varepsilon/3$. Из неравенства треугольника следует, что $d(y, z) < \delta$, и, поскольку y и z принадлежат A , $d'(f(y), f(z)) < \varepsilon/3$. Таким образом, в силу неравенства треугольника $d'(\bar{f}(s), \bar{f}(t)) < \varepsilon$. Это доказывает, что $\bar{f}$ равномерно непрерывно.

Задача

Пусть $n \rightarrow r_n$ — биективное отображение множества N на множество A всех рациональных чисел x , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x \leq 1$ (2.2.15). Определим на $E = [0, 1]$ функцию f , полагая $f(x) = \sum_{r_n < x} 1/2^n$, где

бесконечная сумма распространяется только на те n , для которых $r_n < x$. Покажите, что сужение отображения f на множестве B всех иррациональных чисел $x \in [0, 1]$ непрерывно, но оно не может быть продолжено до функции, непрерывной в E .

16. Компактные пространства

Метрическое пространство E называется *компактным*, если оно удовлетворяет следующему условию (аксиоме Бореля — Лебега): для каждого покрытия $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ пространства E открытыми множествами (открытого покрытия) существует конечное подсемейство $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ ($H \subset L$ и конечно), являющееся покрытием пространства E .

Метрическое пространство E называется *вполне ограниченным*, если для любого $\epsilon > 0$ существует конечное покрытие пространства E множествами диаметра $< \epsilon$. Это условие, очевидно, эквивалентно следующему: для любого $\epsilon > 0$ существует такое конечное множество $F \subset E$, что $d(x, F) < \epsilon$ для всякой точки $x \in E$.

В теории метрических пространств эти понятия служат заменой понятия „конечности“ в чистой теории множеств: они выражают свойство метрического пространства быть, так сказать, „приближенно конечным“. Заметим, что (это следует из определения) компактность является топологическим понятием, но полная ограниченность топологическим понятием не является [см. замечание после (3.17.6)].

(3.16.1) Для метрического пространства E следующие три условия эквивалентны:

- а) E компактно;
- б) любая бесконечная последовательность в E имеет по крайней мере одну предельную точку;
- с) E является полным и вполне ограниченным.

а) $\Rightarrow$ б): Пусть (x_n) — последовательность в компактном пространстве E и пусть F_n — замыкание множества $\{x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}, \dots\}$. Докажем, что существует точка, принадлежащая всем F_n . Если бы это было не так, то открытые множества $U_n = E \setminus F_n$ составляли бы покрытие пространства E и поэтому нашлось бы конечное число $U_{n_1}, \dots, U_{n_k}$ этих множеств, образующих покрытие E . Это означало бы, что $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_k} = \emptyset$. Но это абсурдно, так как если n больше, чем $\max(n_1, \dots, n_k)$, то множество F_n (по определению не пустое) содержится во всех F_{n_i} ($1 \leq i \leq k$). Таким об-

разом, пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ содержит по крайней мере одну точку a .

В силу (3.13.11) и определения точки прикосновения a является предельной точкой последовательности (x_n) .

б) $\Rightarrow$ с): Прежде всего любая последовательность Коши в E имеет предельную точку; поэтому в силу (3.14.2) она сходится и, следовательно, E является полным пространством. Допустим, что E не вполне ограничено, т. е. что существует такое число $\alpha > 0$, что E не имеет конечного покрытия шарами радиуса α . Тогда мы можем определить последовательность (x_n) по индукции следующим образом. Допустим, что при $i \neq j$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-1$ уже $d(x_i, x_j) \geq \alpha$. Объединение шаров с центром x_i ($1 \leq i \leq n-1$) и радиусом α не составляет всего пространства, и, значит, существует точка x_n , для которой $d(x_i, x_n) \geq \alpha$ при $i < n$. Последовательность (x_n) не может иметь предельной точки, потому что если бы a была такой точкой, то нашлась бы подпоследовательность (x_{n_k}) , сходящаяся к a , и тогда при $k \geq$ некоторого k_0 мы

имели бы $d(a, x_{n_k}) < \alpha/2$ и, следовательно, при $h \geq k_0$, $k \geq k_0$ и $h \neq k$ выполнялось бы неравенство $d(x_{n_h}, x_{n_k}) < \alpha$, что противоречит определению последовательности.

с) $\Rightarrow$ а): Допустим, что $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие пространства E , никакое конечное подсемейство которого не покрывает E . По индукции следующим образом определим последовательность (B_n) шаров. Предположим, что B_{n-1} имеет радиус $1/2^{n-1}$ и что не существует конечного подсемейства семейства $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$, покрывающего B_{n-1} . Тогда рассмотрим конечное покрытие $(V_k)_{1 \leq k \leq m}$ пространства E шарами радиуса $1/2^n$. Среди шаров V_k , имеющих непустое пересечение с B_{n-1} , найдется по крайней мере один такой шар B_n , который не покрывается никаким конечным подсемейством семейства (U_λ) . В самом деле, в противном случае, поскольку шары V_k образуют покрытие шара B_{n-1} , нашлось бы конечное подсемейство семейства (U_λ) , покрывающее B_{n-1} .

Пусть x_n — центр шара B_n . Так как B_{n-1} и B_n имеют общую точку, из неравенства треугольника следует, что

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq 1/2^{n-1} + 1/2^n < 1/2^{n-2}.$$

Поэтому, если $n \leq p < q$, мы имеем

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \dots$$

$$\dots + d(x_{q-1}, x_q) < \frac{1}{2^{p-1}} + \dots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{p-2}}.$$

Это доказывает, что (x_n) — последовательность Коши в E , и, следовательно, она сходится к некоторой точке a . Пусть λ_0 — индекс, при котором $a \in U_{\lambda_0}$. Существует такое $\alpha > 0$, что $B(a; \alpha) \subset U_{\lambda_0}$. Из определения точки a следует, что найдется такой номер n , что $d(a, x_n) < \alpha/2$ и $1/2^n < \alpha/2$. Неравенство треугольника тогда показывает, что $B_n \subset B(a; \alpha) \subset U_{\lambda_0}$. Но это — противоречие, так как предполагалось, что никакое конечное подсемейство семейства (U_λ) не может быть покрытием шара B_n .

(3.16.2) Любое вполне ограниченное пространство сепарабельно.

Если E вполне ограничено, то, по определению, для любого n существует такое конечное множество $A_n \subset E$, что для каждой точки $x \in E$ выполняется неравенство $d(x, A_n) < 1/n$. Пусть $A = \bigcup_n A_n$. Множество A не более чем счетно, и для каждой точки $x \in E$ при любом n мы имеем $d(x, A) \leq d(x, A_n) < 1/n$; следовательно, $d(x, A) = 0$ и $E = \bar{A}$.

(3.16.3) Пусть E — метрическое пространство. Из любых двух следующих свойств вытекает третье:

- а) E компактно;
- б) E дискретно (точнее, гомеоморфно дискретному пространству);
- с) E конечно.

Из а) и б) следует с), потому что всякое одноточечное множество $\{x\}$ в этом случае открыто и, значит, семейство множеств $\{x\}$ является открытым покрытием пространства E , а конечное подсемейство этого семейства может быть покрытием E только если E конечно. С другой стороны, из с) следуют и а) и б), потому что в этом случае, поскольку каждое одноточечное множество замкнуто, всякое подмножество пространства E замкнуто, как объединение конечного числа замкнутых множеств. Поэтому всякое подмножество пространства E открыто и, следовательно, E гомеоморфно дискретному пространству. Наконец, так как существует только конечное число открытых множеств, E компактно.

(3.16.4) Любая последовательность (x_n) в компактном метрическом пространстве E , имеющая только одну предельную точку a , сходится к a .

Допустим, что a не является пределом последовательности (x_n) . Тогда найдется такое число $\alpha > 0$, что существует бесконечная подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n) , точки которой принадлежат множеству $E \setminus B(a; \alpha)$. По предположению эта подпоследовательность имеет предельную точку b , и так как множество $E \setminus B(a; \alpha)$ замкнуто, то в силу (3.13.7) $b \in E \setminus B(a; \alpha)$. Таким образом, последовательность (x_n) имеет две различные предельные точки, в противоречии с предположением.

(3.16.5) Любое непрерывное отображение f компактного метрического пространства E в метрическое пространство E' равномерно непрерывно.

Предположим противное. Тогда существует такое число $\alpha > 0$ и две последовательности (x_n) и (y_n) точек пространства E , что $d(x_n, y_n) < 1/n$ и $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$. Найдется подпоследовательность (x_{n_k}) , сходящаяся к некоторой точке a и, так как $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < 1/n_k$, из неравенства треугольника следует, что тогда и последовательность (y_{n_k}) будет сходиться к a . Но f непрерывно в точке a , поэтому существует такое $\delta > 0$, что при $d(a, x) < \delta$ будет выполняться неравенство $d'(f(a), f(x)) < \alpha/2$. Возьмем номер k , при котором $d(a, x_{n_k}) < \delta$ и $d(a, y_{n_k}) < \delta$. Тогда $d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) < \alpha$ в противоречии с определением последовательностей (x_n) и (y_n) .

Задачи

1. а) Пусть E — компактное метрическое пространство, $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие пространства E . Покажите, что существует такое число $\alpha > 0$, что любой открытый шар радиуса α содержится по крайней мере в одном из U_λ (свойство Лебега).

[Пусть для каждой точки $x \in E$ шар $B(x, r_x)$ выбран так, что шар $B(x, 2r_x)$ содержится в каком-либо из U_λ . Покройте E конечным числом шаров $B(x, r_x)$ и покажите, что наименьший из соответствующих радиусов r_x обладает требуемым свойством.]

б) Приведите пример вполне ограниченного пространства, для которого утверждение а) неверно.

2. Покажите, что для метрического пространства E эквивалентны следующие свойства:

а) E компактно;

б) каждое счетное открытое покрытие пространства E содержит конечное подпокрытие;

с) каждая убывающая последовательность (F_n) непустых замкнутых множеств пространства E имеет непустое пересечение;

д) для любого бесконечного открытого покрытия $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ пространства E существует подмножество $H \subset L$, отличное от L и такое, что $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ все еще является покрытием E ;

е) каждое *точечно конечное* открытое покрытие (U_λ) пространства E (т. е. такое покрытие, что для любой точки $x \in E$ включение $x \in U_\lambda$ имеет место лишь для конечного числа индексов) содержит конечное подпокрытие;

ф) каждое бесконечное дискретное подпространство пространства E не замкнуто.

[Пользуясь (3.16.1), покажите, что из ф) следует а) и что из д) и е) следует ф).]

3. Пусть E — метрическое пространство, d — расстояние в E , $\mathfrak{F}(E) \subset \mathfrak{P}(E)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства E . Предположим, что расстояние d ограничено в E (задача 2 § 3.14). Для любых двух элементов A, B множества $\mathfrak{F}(E)$ положим $\rho(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$ и $h(A, B) = \sup(\rho(A, B), \rho(B, A))$.

а) Покажите, что h является расстоянием в $\mathfrak{F}(E)$ (хаусдорфово расстояние).

б) Покажите, что если E — полное пространство, то и $\mathfrak{F}(E)$ — полное пространство.

[Пусть (X_n) — последовательность Коши в $\mathfrak{F}(E)$. Пусть Y_n для каждого n есть замыкание объединения множеств X_{n+p} , где $p \geq 0$. Рассмотрите в E пересечение убывающей последовательности (Y_n) .]

с) Покажите, что если E вполне ограничено, то и $\mathfrak{F}(E)$ вполне ограничено. Следовательно, если E компактно, то и $\mathfrak{F}(E)$ компактно.

[Примените задачу из 1.1.]

17. Компактные множества

Компактным (соответственно *вполне ограниченным*) *множеством* в метрическом пространстве E называется такое множество A , для которого подпространство A пространства E компактно (соответственно вполне ограничено).

(3.17.1) *Любое вполне ограниченное множество ограничено.*

Это следует из того, что объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено (3.4.4).

Утверждение, обратное к (3.17.1), вообще говоря, не верно, потому что любое расстояние эквивалентно ограниченному расстоянию (задача 2 § 3.14) [см., однако, (3.17.6)].

(3.17.2) *Любое компактное множество в метрическом пространстве замкнуто.*

В самом деле, в силу (3.16.1) такое подпространство является полным, и нам остается только применить (3.14.4).

(3.17.3) *В компактном пространстве E всякое замкнутое множество компактно.*

Действительно, такое множество, очевидно, вполне ограничено и в силу (3.14.5) является полным подпространством.

Относительно компактным множеством в метрическом пространстве E называется множество $A \subseteq E$, замыкание $\bar{A}$ которого компактно.

(3.17.4) *Любое подмножество относительно компактного (соответственно вполне ограниченного) множества относительно компактно (соответственно вполне ограничено).*

Это сразу следует из определений и (3.17.3).

(3.17.5) *Относительно компактное множество вполне ограничено. В полном пространстве вполне ограниченное множество относительно компактно.*

Первое утверждение сразу следует из (3.17.4). Допустим, далее, что E — полное пространство и что $A \subseteq E$ вполне ограничено. Для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества A , состоящее из конечного числа множеств $C_k \subseteq A$ диаметра $< \varepsilon/2$. Каждое C_k содержится в замкнутом (в E) шаре D_k радиуса $\varepsilon/2$. Таким образом $\bar{A} \subseteq \bigcup_k D_k$, причем объединение $\bigcup_k D_k$ замкнуто и каждый шар D_k

имеет диаметр $\leq \varepsilon$. С другой стороны, в силу (3.14.5) $\bar{A}$ является полным подпространством, откуда и следует требуемый результат.

Вполне ограниченное, но неполное пространство E дает пример вполне ограниченного множества, не являющегося относительно компактным в E .

(3.17.6) (Теорема Бореля—Лебега) *Для того чтобы множество на действительной прямой было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено.*

Благодаря (3.17.1), (3.17.4) и (3.17.5) нам нужно только доказать, что любой замкнутый промежуток $[a, b]$ вполне ограничен. Для каждого целого $n > 0$ положим $x_k = a + k(b-a)/n$ ($0 \leq k \leq n$). Тогда открытые промежутки с центром x_k длины $2(b-a)/n$ образуют покрытие промежутка $[a, b]$, ч. т. д.

Если на действительной прямой рассмотреть два расстояния d_1 и d_2 , определенные в 3.14, то из (3.17.1) следует, что E_2 не вполне ограничено, а $\bar{E}_1$ вполне ограничено, так как расширенная действительная прямая $\bar{\mathbf{R}}$, будучи гомеоморфна замкнутому промежутку $[-1, +1]$ пространства $\mathbf{R}$ (3.12), в силу (3.17.6) компактна.

(3.17.7) *Для того чтобы множество A в метрическом пространстве E было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность точек множества A имела предельную точку в E .*

Ввиду (3.16.1) это условие, очевидно, необходимо. Допустим, напротив, что оно выполняется, и докажем, что каждая последовательность (x_n) точек множества $\bar{A}$ имеет предельную точку в E (которая, следовательно, в силу (3.13.7) принадлежит $\bar{A}$); тогда на основании (3.16.1) $\bar{A}$ компактно. Из определения замыкания следует, что для всякого n существует такая точка $y_n \in A$, что $d(x_n, y_n) \leq 1/n$. По предположению найдется подпоследовательность (y_{n_k}) , сходящаяся к некоторой точке a . Из неравенства треугольника следует, что и (x_{n_k}) сходится к a , ч. т. д.

(3.17.8) *Объединение двух относительно компактных множеств относительно компактно.*

Из (3.8.8) следует, что достаточно доказать компактность объединения двух компактных множеств A и B . Пусть $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие подпространства $A \cup B$. Каждое множество U_λ в силу (3.10.1) можно записать в виде $(A \cup B) \cap V_\lambda$, где V_λ открыто в E . По предположению существует такое конечное подмножество H (соответственно K) множества L , что подсемейство $(A \cap V_\lambda)_{\lambda \in H}$ (соответственно $(B \cap V_\lambda)_{\lambda \in K}$) покрывает A (соответственно B). Тогда ясно, что семейство $((A \cup B) \cap V_\lambda)_{\lambda \in H \cup K}$ покрывает $A \cup B$.

(3.17.9) *Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' . Образ $f(A)$ каждого компактного (соответственно относительно компак-*

ного) множества $A \subseteq E$ компактен и поэтому замкнут в E' (соответственно относительно компактен в E').

Достаточно доказать, что если компактно A , то компактно и $f(A)$. Пусть $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие подпространства $f(A)$. Тогда в силу (3.11.4) множества $A \cap f^{-1}(U_\lambda)$ образуют открытое покрытие подпространства A . По предположению существует такое конечное подмножество $H \subseteq L$, что при $\lambda \in H$ множества $A \cap f^{-1}(U_\lambda)$ все еще образуют покрытие A . Но тогда множества $U_\lambda = f(A \cap f^{-1}(U_\lambda))$ при $\lambda \in H$ образуют покрытие $f(A)$, ч. т. д.

(3.17.10) Пусть E — компактное метрическое пространство и f — непрерывное отображение пространства E в $\mathbb{R}$. Тогда $f(E)$ ограничено, и в E существуют такие две точки a и b , что

$$f(a) = \inf_{x \in E} f(x), \quad f(b) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Первое утверждение следует из (3.17.9) и (3.17.1). С другой стороны, в силу (3.17.2) $f(E)$ замкнуто в $\mathbb{R}$, и поэтому точки $\sup f(E)$ и $\inf f(E)$, являющиеся точками прикосновения множества $f(E)$, принадлежат $f(E)$.

(3.17.11) Пусть A — компактное множество в метрическом пространстве E . Тогда множества $V_r(A)$ (см. 3.6) образуют фундаментальную систему окрестностей множества A .

Пусть U — окрестность множества A . В силу (3.11.8) действительная функция $x \rightarrow d(x, E \setminus U)$ непрерывна в A и > 0 . Поэтому ввиду (3.17.10) существует такая точка $x_0 \in A$, что $d(x_0, E \setminus U) = \inf_{x \in A} d(x, E \setminus U)$. Но $d(x_0, E \setminus U) = r > 0$, следовательно, $V_r(A) \subseteq U$.

(3.17.12) Если E — компактное метрическое пространство и f — непрерывное инъективное отображение пространства E в метрическое пространство E' , то f — гомеоморфизм на $f(E)$.

Ввиду (3.11.4) нам нужно лишь доказать, что образ $f(A)$ каждого замкнутого множества $A \subseteq E$ замкнут в $f(E)$. Но это следует из (3.17.3) и (3.17.9).

Задачи

1. Пусть f — равномерно непрерывное отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' . Покажите, что образ $f(A)$ любого вполне ограниченного множества $A \subseteq E$ вполне ограничен.

2. Пусть A — компактное и B — замкнутое множества в метрическом пространстве E и $A \cap B = \emptyset$. Покажите, что $d(A, B) > 0$.

3. Пусть E — компактное ультраметрическое пространство (§ 3.8, задача 4) и d — расстояние в E . Покажите, что для каждой точки $x_0 \in E$ образ пространства E при отображении $x \rightarrow d(x_0, x)$ является не более чем счетным подмножеством промежутка $[0, +\infty[$, в котором каждая точка (кроме, быть может, точки 0) изолирована (§ 3.9, задача 2).

[Рассмотрите для любого $r = d(x_0, x) > 0$ верхнюю грань функции $d(x_0, y)$ на множестве точек y , в которых $d(x_0, y) < r$, и нижнюю грань функции $d(x_0, z)$ на множестве точек z , в которых $d(x_0, z) > r$; воспользуйтесь задачей 4 § 3.8.]

4. Пусть E — компактное метрическое пространство, d — расстояние в E и f — такое отображение E в E , что для любой пары точек (x, y) пространства E выполняется неравенство $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Покажите, что f является изометрией E на E .

[Пусть a и b — две произвольные точки пространства E . Положите $f_n = f_{n-1} \circ f$, $a_n = f_n(a)$ и $b_n = f_n(b)$. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер k , что $d(a, a_k) \leq \varepsilon$ и $d(b, b_k) \leq \varepsilon$, и выведите отсюда, что $f(E)$ плотно в E и что $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.]

5. Пусть E и E' — два метрических пространства и f — отображение E в E' . Покажите, что если сужение f на любом компактном подпространстве пространства E непрерывно, то f непрерывно в E .

[Примените (3.13.14).]

18. Локально компактные пространства

Метрическое пространство E называется *локально компактным*, если у каждой точки $x \in E$ в E существует компактная окрестность. Любое дискретное пространство локально компактно, но не компактно, если оно бесконечно (3.16.3).

(3.18.1) Действительная прямая $\mathbb{R}$ локально компактна, но не компактна.

Это немедленно следует из теоремы Бореля — Лебега (3.17.6).

(3.18.2) Пусть A — компактное множество в локально компактном метрическом пространстве E . Тогда существует такое $r > 0$, что множество $V_r(A)$ (см. 3.6) относительно компактно в E .

У каждой точки $x \in A$ существует компактная окрестность V_x . Множества $\dot{V}_x$ образуют открытое покрытие множества A ; поэтому существует такое конечное множество точек $\{x_1, \dots, x_n\}$ в A , что $\dot{V}_{x_i} (1 \leq i \leq n)$ образуют открытое покрытие A . Множество $U = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ в силу (3.17.8) компактно и является окрестностью множества A . Применяя (3.17.11), получаем требуемый результат.

(3.18.3) Пусть E — локально компактное метрическое пространство. Следующие свойства эквивалентны:

а) в E существует такая возрастающая последовательность (U_n) открытых относительно компактных множеств, что $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ при каждом n и $E = \bigcup_n U_n$;

б) E является счетным объединением компактных подмножеств;

с) E сепарабельно.

Так как множества $\bar{U}_n$ компактны, ясно, что из а) следует б).

Если E есть объединение последовательности (K_n) компактных множеств, то [в силу (3.16.2)] каждое подпространство K_n сепарабельно, и если D_n — не более чем счетное подмножество K_n , плотное в K_n , то $D = \bigcup_n D_n$ не более чем счетно и, поскольку

$E = \bigcup_n K_n \subset \bigcup_n \bar{D}_n \subset \bar{D}$, плотно в E . Таким образом, из б) следует с).

Допустим, наконец, что E сепарабельно, и пусть (V_n) не более чем счетная база открытых множеств пространства E [см. (3.9.4)]. У каждой точки $x \in E$ существует компактная окрестность W_x , и поэтому в силу (3.9.3) найдется такой номер $n(x)$, что $x \in V_{n(x)} \subset W_x$. Отсюда следует, что те из V_n , которые относительно компактны, уже образуют базу открытых множеств пространства E . Мы можем, следовательно, считать, что все V_n относительно компактны. Определим теперь множества U_n по индукции следующим образом: $U_1 = V_1$, U_{n+1} есть объединение V_{n+1} и $V_r(\bar{U}_n)$, где $r > 0$ выбрано так, что множество $V_r(\bar{U}_n)$ относительно компактно [ввиду (3.18.2) такой выбор возможен]. Тогда ясно, что последовательность (U_n) удовлетворяет условиям, указанным в а).

(3.18.4) Каждое открытое и каждое замкнутое подпространство локально компактного метрического пространства E локально компактно.

Пусть A открыто в E . Из определения локально компактного пространства и (3.17.3) следует, что для каждой точки $a \in A$ в E существует компактный замкнутый шар $B'(a; r)$. С другой стороны, существует такое $r' \leq r$, что шар $B'(a; r')$ содержится в A . Так как в силу (3.17.3) он компактен, A локально компактно.

Пусть A замкнуто в E и $a \in A$. Тогда, если V — компактная окрестность точки a в E , пересечение $V \cap A$ в силу (3.10.4) является окрестностью точки a в A , а в силу (3.17.3) компактно. Это доказывает, что A локально компактно.

Задачи

1. Покажите, что если A — локально компактное подпространство метрического пространства E , то A локально замкнуто в E (§ 3.10, задача 3). Обратное верно, если E локально компактно.

[Примените (3.18.4).]

2. а) Покажите, что пересечение двух локально компактных подпространств локально компактного метрического пространства локально компактно (ср. с задачей 1).

б) Приведите пример двух локально компактных подпространств действительной прямой, объединение которых не локально компактно, и пример локально компактного подпространства действительной прямой, дополнение которого не локально компактно.

3. а) Приведите пример локально компактного метрического пространства, не являющегося полным.

б) Пусть E — метрическое пространство, для которого существует такое число $r > 0$, что каждый замкнутый шар $B'(x; r)$ ($x \in E$) компактен. Покажите, что E — полное пространство и что для любого относительно компактного множества $A \subseteq E$ множество $V'_{r/2}(A)$ точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $d(x, A) \leq r/2$, компактно.

19. Связные пространства и связные множества

Метрическое пространство E называется *связным*, если из всех подмножеств пространства E только пустое множество $\emptyset$ и само E одновременно открыты и замкнуты. Эквивалентная формулировка: E связно, если не существует двух таких открытых непустых подмножеств A и B пространства E , что $A \cup B = E$ и $A \cap B = \emptyset$. Пространство, состоящее из одной точки, связно.

Множество F в метрическом пространстве E *связно*, если связно подпространство F пространства E .

Метрическое пространство E *локально связно*, если у каждой точки $x \in E$ есть фундаментальная система связных окрестностей.

(3.19.1) Для того чтобы множество A на действительной прямой $\mathbb{R}$ было связно, необходимо и достаточно, чтобы A было промежутком (ограниченным или нет). Действительная прямая — связное и локально связное пространство.

Второе утверждение, очевидно, следует из первого.

Пусть A связно. Если A состоит из одной точки, то A — промежуток. Допустим, что A содержит две различные точки $a < b$. Докажем, что каждая точка x , удовлетворяющая условию $a < x < b$, принадлежит A . В противном случае A было бы объединением непустых множеств $B = A \cap]-\infty, x[$ и $C = A \cap]x, +\infty[$, причем оба эти множества открыты в A и $B \cap C = \emptyset$. Из этого свойства заключаем, что A необходимо является промежутком. В самом деле,

пусть $c \in A$ и пусть p и q — нижняя и верхняя грани множества A в $\bar{R}$. Если $p = -\infty$, то для каждой точки $x < c$ найдется точка $y < x$, принадлежащая A ; поэтому $x \in A$ и, таким образом, промежуток $]-\infty, c[$ содержится в A . Если нижняя грань p конечна и $p < c$, то для каждой точки x , удовлетворяющей условию $p < x < c$, найдется такая точка $y \in A$, что $p < y < x$; поэтому снова $x \in A$, так что A содержит промежуток $]p, c[$. Точно так же можно показать, что если $q > c$, то A содержит промежуток $[c, q[$. Отсюда следует, что в любом случае множество A содержит промежуток $]p, q[$ и, значит, оно должно быть одним из четырех промежутков в $\bar{R}$ с концами p и q [конечно, если $p = -\infty$ (соответственно $q = +\infty$), то p (соответственно q) не входит в A].

Предположим, наоборот, что A — промежуток с началом a и концом b в $\bar{R}$ (возможности $a = -\infty$, $a \notin A$ и $b = +\infty$, $b \notin A$ не исключаются). Допустим, что $A = B \cup C$, где B и C — непустые открытые множества в A и $B \cap C = \emptyset$. Пусть, например, $x \in B$, $y \in C$ и $x < y$. Пусть z — верхняя грань ограниченного множества $B \cap [x, y]$. Если $z \in B$, то $z < y$ и, по предположению, существует промежуток $[z, z+h[$, содержащийся в $[x, y]$ и в B , что противоречит определению z . Если, с другой стороны, $z \in C$, то $x < z$ и точно так же существует промежуток $]z-h, z] \subset C \cap [x, y]$, что снова противоречит определению z [см. (2.3.4)]. Таким образом, z не может принадлежать ни B , ни C , что противоречит включению $[x, y] \subset A$. Следовательно, A связно.

(3.19.2) Если A — связное множество в метрическом пространстве E , то всякое множество B , $A \subset B \subset \bar{A}$, связно.

В самом деле, допустим, что X и Y — два таких непустых открытых в B множества, что $X \cup Y = B$ и $X \cap Y = \emptyset$. Так как A плотно в B , множества $X \cap A$ и $Y \cap A$ не пусты, открыты в A , и мы имеем $(X \cap A) \cup (Y \cap A) = A$ и $(X \cap A) \cap (Y \cap A) = \emptyset$, что противоречит связности A .

(3.19.3) Пусть $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство связных множеств в метрическом пространстве E , имеющее непустое пересечение. Тогда $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ связно.

Пусть a — точка множества $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$; допустим, что $A = B \cup C$, где B и C — непустые множества, открытые в A и $B \cap C = \emptyset$. Пусть, например, $a \in B$. По предположению существует по крайней мере один такой индекс λ , что $C \cap A_\lambda \neq \emptyset$. Тогда, так как $B \cap A_\lambda \neq \emptyset$,

множества $B \cap A_\lambda$ и $C \cap A_\lambda$ не пусты, открыты в A_λ и таковы, что $(B \cap A_\lambda) \cup (C \cap A_\lambda) = A_\lambda$ и $(B \cap A_\lambda) \cap (C \cap A_\lambda) = \emptyset$, что невозможно.

(3.19.4) Пусть $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ — последовательность связных множеств, обладающая тем свойством, что $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ при $1 \leq i \leq n-1$. Тогда объединение $\bigcup_{i=1}^n A_i$ связно.

Это сразу выводится из (3.19.3) индукцией по n .

Из (3.19.3) следует, что объединение $C(x)$ всех связных множеств пространства E , содержащих произвольную точку $x \in E$, связно и потому является наибольшим связным множеством, содержащим x . Оно называется *компонентой связности точки x в E* . Ясно, что для любой точки $y \in C(x)$ имеем $C(y) = C(x)$, а если $y \notin C(x)$, то $C(x) \cap C(y) = \emptyset$. Кроме того, из (3.19.2) следует, что $C(x)$ замкнуто в E .

Для любого множества $A \subseteq E$ компоненты связности точек подпространства A называются *компонентами связности множества A* . Если каждая компонента связности множества A состоит из одной точки, A называется *вполне несвязным*.

Дискретное пространство вполне несвязно; множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел в силу (2.2.16) и (3.19.1) вполне несвязны.

(3.19.5) Для того чтобы метрическое пространство E было локально связно, необходимо и достаточно, чтобы компоненты связности открытых множеств пространства E были открыты.

Условие достаточно, потому что если V — открытая окрестность точки $x \in E$, то компонента связности точки x в подпространстве V является связной окрестностью точки x , содержащейся в V , и, следовательно, E локально связно.

Условие необходимо, потому что если E локально связно, A — открытое в E множество и B — компонента связности множества A , то у любой точки $x \in B$, по предположению, существует связная окрестность V , содержащаяся в A . Таким образом, по определению B имеется включение $V \subseteq B$ и, следовательно, B является окрестностью каждой из своих точек, а значит — открытым множеством.

(3.19.6) Любое непустое открытое множество A на действительной прямой $\mathbb{R}$ является объединением не более чем счетного множества открытых промежутков, попарно не имеющих общих точек.

Из (3.19.1) и (3.19.5) следует, что компоненты связности множества A являются промежутками и открытыми множествами, следова-

тельно — открытыми промежутками. Пересечение $A \cap \mathbb{Q}$ множества A с множеством $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно, и каждая компонента множества A в силу (2.2.16) содержит точки множества $A \cap \mathbb{Q}$. Отображение $r \rightarrow C(r)$ множества $A \cap \mathbb{Q}$ в множество $\mathcal{C}$ компонент связности множества A сюръективно, а поэтому ввиду (1.9.2) $\mathcal{C}$ не более чем счетно.

(3.19.7) Пусть f — непрерывное отображение E в E' . Образ $f(A)$ любого связного множества $A \subseteq E$ связан.

Допустим, что $f(A) = M \cup N$, где M и N — непустые множества, открытые в $f(A)$, и $M \cap N = \emptyset$. Тогда в силу (3.11.4) пересечения $A \cap f^{-1}(M)$ и $A \cap f^{-1}(N)$ являются непустыми множествами, открытыми в A , и такими, что $A = (A \cap f^{-1}(M)) \cup (A \cap f^{-1}(N))$ и $(A \cap f^{-1}(M)) \cap (A \cap f^{-1}(N)) = \emptyset$ в противоречии с предположением.

(3.19.8) (Теорема Больцано) Пусть E — связное пространство и f — непрерывное отображение пространства E в действительную прямую $\mathbb{R}$. Пусть a и b — две точки образа $f(E)$ и $a < b$. Тогда для любого числа c , удовлетворяющего условию $a < c < b$, существует такая точка $x \in E$, что $f(x) = c$.

В самом деле, в силу (3.19.7) образ $f(E)$ связан в $\mathbb{R}$ и поэтому в силу (3.19.1) он является промежутком.

(3.19.9) Пусть A — множество в метрическом пространстве E . Если B — такое связное множество в E , что и $A \cap B$ и $(E \setminus A) \cap B$ не пусты, то пересечение $\text{Fr}(A) \cap B$ не пусто. В частности, если E связно, то любое множество $A \subseteq E$, отличное от E и от $\emptyset$, имеет по крайней мере одну граничную точку.

Допустим, что $\text{Fr}(A) \cap B = \emptyset$. Пусть $A' = E \setminus A$. Так как E является объединением A , A' и $\text{Fr}(A)$, то B должно быть объединением множеств $U = A \cap B$ и $V = A' \cap B$, каждое из которых открыто в B и по предположению не пусто (поскольку $\text{Fr}(A) \cap B = \emptyset$, то любая точка множества $A \cap B$ должна принадлежать $A \cap B$ и аналогично для $A' \cap B$). Так как $U \cap V = \emptyset$, то это противоречит предположению о связности B .

Замечание. Если мы условимся называть „кривой“ образ промежутка действительной прямой при непрерывном отображении (см. задачу 5 § 4.2), то (3.19.7) показывает, что „кривая“ связна, а (3.19.9) — что „кривая“, соединяющая точку множества A и точку дополнения $E \setminus A$, пересекает $\text{Fr}(A)$, и это соответствует интуитивной идее „связности“ (см. ниже задачу 3 и задачу 4 § 5.1).

Задачи

1. Пусть E — связное метрическое пространство, расстояние в котором не ограничено. Покажите, что каждая сфера в E не пуста.

2. а) Пусть E — компактное метрическое пространство, в котором замыкание любого открытого шара $B(a; r)$ есть замкнутый шар $B'(a; r)$. Покажите, что в E любой открытый шар $B(a; r)$ связан.

[Допустите, что $B(a; r)$ является объединением $C \cup D$ двух непустых открытых в $B(a; r)$ множеств, для которых $C \cap D = \emptyset$. Если $a \in C$, то рассмотрим точку $x \in D$, у которой расстояние $d(a, x)$ минимально (3.17.10).]

б) Приведите пример вполне несвязного метрического пространства, в котором замыкание любого открытого шара $B(a; r)$ есть замкнутый шар $B'(a; r)$.

с) Пусть E — компактное подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$, рассматриваемой с расстоянием $d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, состоящее из точек (x_1, x_2) , у которых $x_1 = 0$ и $0 \leq x_2 \leq 1$ или же $0 \leq x_1 \leq 1$ и $x_2 = 0$. Покажите, что в E каждый шар связан, но замыкание открытого шара $B(a; r)$ не обязательно есть $B'(a; r)$.

3. Пусть E — подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящее из точек (x, y) , у которых или x иррационально и $0 \leq y \leq 1$, или же x рационально и $-1 \leq y < 0$.

а) Покажите, что E связно и не локально связно.

[Примените (3.19.1) и (3.19.2) к изучению строения одновременно открытого и замкнутого подмножества подпространства E .]

б) Пусть $t \rightarrow (f(t), g(t))$ — непрерывное отображение промежутка $[0, 1]$ в E (где f и g непрерывны). Покажите, что функция f постоянна.

[Если существуют точки $t_0 \in [0, 1]$, в которых $g(t_0) < 0$, то рассмотрим открытое множество $U \subset [0, 1]$, состоящее из всех t , в которых $g(t) < 0$, и примените (3.19.6).]

4. Пусть A и B — два таких связных множества в метрическом пространстве E , что $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$. Покажите, что $A \cup B$ связно.

5. Пусть A и B — два непустых множества в метрическом пространстве E . Покажите, что если A и B замкнуты, а $A \cup B$ и $A \cap B$ связны, то A и B связны. Приведите пример множеств на действительной прямой, показывающий, что предположение о том, что A и B замкнуты, отбросить нельзя.

6. Пусть E — связное метрическое пространство, имеющее по крайней мере две точки.

а) Пусть A — связное множество в E , а B — подмножество дополнения CA , одновременно открытое и замкнутое в CA . Покажите, что объединение $A \cup B$ связно.

[Примените задачу 1 § 3.10 к двум множествам $A \cup B$ и CA .]

б) Пусть A — связное множество в E , а B — некоторая компонента связности дополнения CA . Покажите, что CB связно.

[Проведите доказательство от противного и примените а).]

с) Покажите, что в E есть два таких непустых связных множества M и N , что $M \cup N = E$ и $M \cap N = \emptyset$.

[Примените б).]

7. Покажите, что в счетном метрическом пространстве E каждая точка имеет фундаментальную систему одновременно открытых и замкнутых окрестностей.

8. а) Покажите, что компонента связности точки x в метрическом пространстве E содержится в каждом одновременно открытом и замкнутом множестве, содержащем x .

б) Пусть A_n — множество пар $(1/n, y)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, где $-1 \leq y \leq 1$, B — множество пар $(0, y)$, где $0 < y \leq 1$, и C — множество пар $(0, y)$, где $-1 \leq y < 0$. Пусть E — подпространство $\mathbb{R}^2$, являющееся объединением B , C и A_n при $n \geq 1$. Покажите, что E локально компактно, но не локально связно. Компонентами связности множества E являются B , C и A_n ($n \geq 1$), но пересечение всех одновременно открытых и замкнутых множеств, содержащих B , равно $B \cup C$.

9. Пусть E — локально компактное метрическое пространство.

а) Пусть C — компактная компонента связности пространства E . Покажите, что множество C является пересечением всех одновременно открытых и замкнутых его окрестностей.

[Пользуясь (3.18.2), сведите задачу к случаю, когда E компактно. Допустите, что пересечение B всех одновременно открытых и замкнутых окрестностей C отлично от C . Тогда B есть объединение двух замкнутых множеств $M \supset C$ и N без общих точек. Рассмотрите в E два открытых множества $U \supset M$ и $V \supset N$, не имеющих общих точек (§ 3.11, задача 3), и возьмите пересечение множества $E \setminus (M \cup N)$ с дополнениями одновременно открытых и замкнутых окрестностей множества C .]

б) Пусть E связно и A — относительно компактное открытое множество в E . Покажите, что всякая компонента связности множества A имеет по крайней мере одну точку прикосновения в $\bar{A}$.

[Предположив, что это не так, примените к каждой такой компоненте результат а) и получите противоречие.]

с) Выведите из б), что пересечение компонент связности любого компактного множества $K \subset E$ с $\bar{E} \setminus K$ не пусто.

20. Произведение двух метрических пространств

Пусть E_1 и E_2 — два метрических пространства, а d_1 и d_2 — расстояния в E_1 и E_2 . Для любой пары точек $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ произведения $E = E_1 \times E_2$ положим

$$d(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

Непосредственно проверяется, что эта функция удовлетворяет аксиомам (I) — (IV) § 3.1, иначе говоря, она является расстоянием в E . Метрическое пространство, получаемое из E , если взять в нем в качестве расстояния d , называется *произведением* метрических пространств E_1 и E_2 . Отображение $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$ пространства $E_1 \times E_2$ на $E_2 \times E_1$ есть изометрия.

Легко проверить, что две функции d' и d'' , определяемые формулами

$$d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

$$d''(x, y) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2},$$

также представляют собой расстояния в E , равномерно эквивалентные расстоянию d (см. 3.14), так как

$$d(x, y) \leq d''(x, y) \leq d'(x, y) \leq 2d(x, y).$$

Таким образом, во всех вопросах, относящихся к топологическим свойствам (или к последовательностям Коши и равномерно непрерывным функциям), безразлично, какое из расстояний — d , d' или d'' — брать в E . В случае когда не будет сделано никакой оговорки, мы будем рассматривать в E расстояние d .

Открытые (соответственно замкнутые) шары для расстояний d , d_1 , d_2 будут соответственно обозначаться символами B , B_1 , B_2 (соответственно B' , B'_1 , B'_2) вместо стандартного обозначения B (соответственно B'), которым мы пользовались до сих пор.

(3.20.1) Для любой точки $a = (a_1, a_2) \in E$ и любого $r > 0$ имеем

$$B(a; r) = B_1(a_1; r) \times B_2(a_2; r) \quad \text{и} \quad B'(a; r) = B'_1(a_1; r) \times B'_2(a_2; r).$$

Это сразу следует из определения d .

(3.20.2) Если A_1 — открытое множество в E_1 и A_2 — открытое множество в E_2 , то множество $A_1 \times A_2$ открыто в $E_1 \times E_2$.

В самом деле, если $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, то существуют такие $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, что $B_1(a_1; r_1) \subset A_1$ и $B_2(a_2; r_2) \subset A_2$. Возьмем $r = \min(r_1, r_2)$. Тогда в силу (3.20.1) $B(a; r) \subset A_1 \times A_2$.

(3.20.3) Для любой пары множеств $A_1 \subset E_1$ и $A_2 \subset E_2$ имеем $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$. В частности, для того чтобы $A_1 \times A_2$ было замкнуто в E , необходимо и достаточно, чтобы A_1 было замкнуто в E_1 и A_2 было замкнуто в E_2 .

Если $a = (a_1, a_2) \in \overline{A_1} \times \overline{A_2}$, то по предположению для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие точки $x_1 \in A_1$ и $x_2 \in A_2$, что $d_1(a_1, x_1) < \varepsilon$ и $d_2(a_2, x_2) < \varepsilon$. Поэтому для точки $x = (x_1, x_2)$ имеем: $d(a, x) < \varepsilon$. С другой стороны, если $(a_1, a_2) \notin \overline{A_1} \times \overline{A_2}$, то или $a_1 \notin \overline{A_1}$ или же $a_2 \notin \overline{A_2}$. В первом случае множество $(E_1 \setminus \overline{A_1}) \times E_2$ в силу (3.20.2) открыто в E , содержит a и имеет непустое пересечение с $A_1 \times A_2$, и, таким образом, $a \notin \overline{A_1 \times A_2}$; второй случай рассматривается точно так же.

(3.20.4) Пусть $z \rightarrow f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ — отображение метрического пространства F в $E = E_1 \times E_2$. Для того чтобы f было непрерывно в точке z_0 , необходимо и достаточно, чтобы f_1 и f_2 были непрерывны в z_0 .

Пусть $x_0 = (f_1(z_0), f_2(z_0))$. Тогда в силу (3.20.1)

$$f^{-1}(B(x_0; r)) = f_1^{-1}(B_1(f_1(z_0); r)) \cap f_2^{-1}(B_2(f_2(z_0); r))$$

и требуемый результат следует из (3.11.1) и (3.6.3).

(3.20.5) Пусть $f = (f_1, f_2)$ — отображение подпространства A метрического пространства F в $E_1 \times E_2$ и пусть $a \in A$. Для того чтобы f имело в точке a предел по множеству A , необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow a, z \in A} f_1(z) \quad \text{и} \quad b_2 = \lim_{z \rightarrow a, z \in A} f_2(z),$$

и в этом случае предел отображения f равен $b = (b_1, b_2)$.

Это сразу следует из (3.20.4) и определения предела. В частности,

(3.20.6) Для того чтобы последовательность точек $z_n = (x_n, y_n)$ в $E = E_1 \times E_2$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, и в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = (a, b)$.

Заметим, что если (a, b) — предельная точка последовательности $((x_n, y_n))$, то, как следует из (3.20.6) и определения предельных точек, a является предельной точкой последовательности (x_n) , а b — последовательности (y_n) . Но может случиться, что и (x_n) и (y_n) имеют предельные точки, а последовательность $((x_n, y_n))$ предельных точек не имеет; например, на плоскости $\mathbb{R}^2$ возьмем $x_{2n} = 1/n$, $y_{2n} = n$, $x_{2n+1} = n$, $y_{2n+1} = 1/n$. Однако если (x_n) имеет предел a , а (y_n) — предельную точку b , то из (3.20.6) следует, что (a, b) будет предельной точкой последовательности $((x_n, y_n))$.

(3.20.7) Для того чтобы последовательность точек $z_n = (x_n, y_n)$ в $E_1 \times E_2$ была последовательностью Коши, необходимо и достаточно, чтобы каждая из последовательностей (x_n) и (y_n) была последовательностью Коши.

Это сразу следует из определения расстояния в $E_1 \times E_2$ и определения последовательности Коши.

(3.20.8) Пусть $z \rightarrow f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ — отображение метрического пространства F в $E_1 \times E_2$. Для того чтобы f было равномерно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы и f_1 и f_2 были равномерно непрерывны.

Это немедленно следует из определений.

(3.20.9) Если E — метрическое пространство и d — расстояние в E , то отображение d произведения $E \times E$ в $\mathbb{R}$ равномерно непрерывно.

В самом деле, в силу неравенства треугольника

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

(3.20.10) Проекции pr_1 и pr_2 равномерно непрерывны в $E = E_1 \times E_2$.

Достаточно к тождественному отображению пространства E применить (3.20.8).

(3.20.11) Для любой точки $a_2 \in E_2$ (соответственно $a_1 \in E_1$) отображение $x_1 \rightarrow (x_1, a_2)$ (соответственно $x_2 \rightarrow (a_1, x_2)$) есть изометрия пространства E_1 (соответственно E_2) на замкнутое подпространство $E_1 \times \{a_2\}$ (соответственно $\{a_1\} \times E_2$) произведения $E_1 \times E_2$.

Это — очевидное следствие определения расстояния в $E_1 \times E_2$ и (3.20.3).

(3.20.12) Для любого множества A открытого (соответственно замкнутого) в $E_1 \times E_2$ и любой точки $a_1 \in E_1$ множество $A(a_1) = \text{pr}_2(A \cap (\{a_1\} \times E_2))$ открыто (соответственно замкнуто) в E_2 .

В силу (3.20.11) достаточно доказать, что множество $A \cap (\{a_1\} \times E_2)$ открыто (соответственно замкнуто) в $\{a_1\} \times E_2$. Но это следует из (3.10.1) и (3.10.5).

(3.20.13) Для любого множества A , открытого в $E_1 \times E_2$, множество $\text{pr}_1 A$ (соответственно $\text{pr}_2 A$) открыто в E_1 (соответственно в E_2).

В самом деле, мы можем написать $\text{pr}_2 A = \bigcup_{x_1 \in E_1} A(x_1)$, и требуемый результат следует тогда из (3.20.12) и (3.5.2).

Отметим, что если A замкнуто в $E_1 \times E_2$, то множество $\text{pr}_1 A$ может не быть замкнуто в E_1 . Например, гипербола с уравнением $xy = 1$ представляет собою замкнутое множество на плоскости $\mathbb{R}^2$, но обе ее проекции являются дополнениями в $\mathbb{R}$ точки $\{0\}$ и, таким образом, не замкнуты.

(3.20.14) Пусть f — отображение произведения $E = E_1 \times E_2$ в метрическое пространство F . Если f непрерывно в точке (a_1, a_2) (соответственно равномерно непрерывно), то отображение $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$ непрерывно в a_1 (соответственно равномерно непрерывно).

Это отображение можно представить в виде $x_1 \rightarrow (x_1, a_2) \rightarrow f(x_1, a_2)$. Поэтому требуемый результат следует из (3.20.11), (3.11.5) и (3.11.9).

Утверждение, обратное к (3.20.14), вообще говоря, не верно. Классический противоречащий пример дает функция f , определяемая в $\mathbb{R}^2$ формулой $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$. Функция f не непрерывна в $(0, 0)$, так как $f(x, x) = 1/2$ при $x \neq 0$.

(3.20.15) Пусть E_1, E_2, F_1 и F_2 — четыре метрических пространства и f_1 (соответственно f_2) — отображение пространства E_1 в F_1 (соответственно пространства E_2 в F_2). Для того чтобы отображение $f: (x_1, x_2) \rightarrow (f_1(x_1), f_2(x_2))$ произведения $E_1 \times E_2$ в $F_1 \times F_2$ было непрерывно в точке (a_1, a_2) (соответственно равномерно непрерывно), необходимо и достаточно, чтобы f_1 было непрерывно в a_1 и f_2 — в a_2 (соответственно чтобы f_1 и f_2 были равномерно непрерывны).

Отображение $(x_1, x_2) \rightarrow f_1(x_1)$ можно представить в виде $f \circ \text{pr}_1$, поэтому достаточность условия следует из (3.20.4), (3.20.8) и (3.20.10). С другой стороны, отображение f_1 можно представить в виде $x_1 \rightarrow \text{pr}_1(f(x_1, a_2))$ и необходимость условия следует из (3.20.14) и (3.20.10).

(3.20.16) Пусть E_1 и E_2 — два непустых метрических пространства. Для того чтобы произведение $E = E_1 \times E_2$ было пространством одного из следующих типов:

- (i) дискретным;
- (ii) ограниченным;
- (iii) сепарабельным;
- (iv) полным;
- (v) компактным;
- (vi) вполне ограниченным;
- (vii) локально компактным;
- (viii) связным;
- (ix) локально связным;

— необходимо и достаточно, чтобы E_1 и E_2 были пространствами того же типа.

Доказательство необходимости для свойств (i) — (vii) проводится по одной и той же схеме: из (3.20.11) следует, что E_1 и E_2 изометричны замкнутым подпространствам произведения $E_1 \times E_2$, а эти свойства (i) — (vii) „наследственны“ по отношению к замкнутым подпространствам [для (i) и (ii) это очевидно; для свойств (iii) — (vii) доказано в (3.10.9), (3.14.5), (3.17.3), (3.17.4), (3.18.4)]. Для свойства (viii) необходимость следует из теоремы (3.19.7), примененной к проекциям pr_1 и pr_2 . Аналогично если E локально связно, то для любой точки $(a_1, a_2) \in E$ и любой окрестности V_1 точки a_1 в E_1 произведение $V_1 \times E_2$ является окрестностью точки (a_1, a_2) и поэтому содержит связную окрестность W этой точки. Но тогда в силу

(3.19.7) и (3.20.13) $pr_1 W$ будет связной окрестностью точки a_1 , содержащейся в V_1 .

Достаточность условия для (i) и (ii) является очевидным следствием определения расстояния в $E_1 \times E_2$. Если множества D_1 и D_2 не более чем счетны и плотны соответственно в E_1 и в E_2 , то в силу (1.9.3) произведение $D_1 \times D_2$ не более чем счетно, а в силу (3.20.3) — плотно в E , т. е. утверждение для (iii) верно. Перейдем к свойству (iv). Если (z_n) — последовательность Коши в E , то в силу (3.20.7) $(pr_1 z_n)$ и $(pr_2 z_n)$ являются последовательностями Коши соответственно в E_1 и в E_2 , поэтому они сходятся соответственно к некоторым точкам a_1 и a_2 и, значит, ввиду (3.20.6) последовательность (z_n) сходится к (a_1, a_2) . Достаточность условия для (vi) очевидна: если (A_i) (соответственно B_j) — конечное покрытие пространства E_1 (соответственно E_2) множествами диаметра $< \varepsilon$, то $(A_i \times B_j)$ является конечным покрытием произведения $E_1 \times E_2$ множествами диаметра $< \varepsilon$. Достаточность условия для (iv) и (vi) в силу (3.16.1) доказывает и достаточность условия для (v). Доказательство достаточности для (v) дает и доказательство достаточности для (vii), если вспомнить определение окрестностей в $E_1 \times E_2$. Наконец, обратимся к свойству (viii). Пусть (a_1, a_2) и (b_1, b_2) — две произвольные точки пространства E . В силу (3.20.11) и предположения множества $\{a_1\} \times E_2$ и $E_1 \times \{b_2\}$ связны и имеют общую точку (a_1, b_2) . Поэтому на основании (3.19.3) их объединение связно и содержит обе точки (a_1, a_2) и (b_1, b_2) . Следовательно, компонента связности точки (a_1, a_2) в E есть само E . То же рассуждение, учитывая определение окрестностей в E , доказывает достаточность условия и для (ix).

(3.20.17) *Для того чтобы множество $A \subset E_1 \times E_2$ было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы $pr_1 A$ и $pr_2 A$ были относительно компактны соответственно в E_1 и в E_2 .*

Необходимость следует из теоремы (3.17.9), примененной к pr_1 и pr_2 . Достаточность следует из (3.20.16), (3.20.3) и (3.17.4).

Все определения и теоремы, рассмотренные в этом параграфе, сразу же распространяются на случай произведения конечного числа метрических пространств.

Задачи

1. Пусть E, F — два метрических пространства, $A \subset E$ и $B \subset F$. Покажите, что $Fr(A \times B) = (Fr(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times Fr(B))$.

2. Пусть E, F — два связных метрических пространства, $A \neq E$ — множество в E и $B \neq F$ — множество в F . Покажите, что дополнение в $E \times F$ множества $A \times B$ связно.

3. а) Пусть E, F — два метрических пространства и A (соответственно B) — компактное множество в E (соответственно в F). Покажите, что если W — произвольная окрестность множества $A \times B$ в $E \times F$, то существуют такая окрестность U множества A в E и такая окрестность V множества B в F , что $U \times V \subset W$.

[Сначала рассмотрите случай, когда B состоит из одной точки.]

б) Пусть E — компактное метрическое пространство, F — метрическое пространство, A — замкнутое множество в $E \times F$. Покажите, что проекция множества A в F является замкнутым множеством.

[С помощью а) докажите, что дополнение проекции $\text{pr}_2 A$ открыто.]

с) Пусть, наоборот, E — метрическое пространство, обладающее тем свойством, что для любого метрического пространства F и любого замкнутого подмножества A произведения $E \times F$ проекция A в F замкнута в F . Докажите, что E компактно.

[В противном случае в E нашлась бы последовательность (x_n) , не имеющая предельной точки. Возьмите в качестве F подпространство действительной прямой $\mathbb{R}$, состоящее из нуля и точек $1/n$ (n — целые числа ≥ 1), и в $E \times F$ рассмотрите множество точек $(x_n, 1/n)$.]

4. Пусть E — компактное метрическое пространство, F — метрическое пространство, A — замкнутое множество в $E \times F$ и B — (замкнутая) проекция множества A в F . Пусть $y_0 \in B$ и C — сечение $A^{-1}(y_0) = \{x \in E \mid (x, y_0) \in A\}$. Покажите, что для любой окрестности V множества C в E найдется такая окрестность W точки y_0 в F , что из $y \in W$ следует $A^{-1}(y) \subset V$ (непрерывность „корней“ уравнения, зависящего от параметра).

[Воспользуйтесь задачей 3, а).]

5. а) Пусть f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство F и пусть G — график отображения f в произведении $E \times F$. Покажите, что если f непрерывно, то множество G замкнуто в $E \times F$ и сужение проекции pr_1 на G является гомеоморфизмом G на E .

б) Наоборот, если F компактно и G замкнуто в $E \times F$, то f непрерывно.

[Воспользуйтесь задачей 3, б).]

с) Пусть F — метрическое пространство, обладающее тем свойством, что для всякого метрического пространства E любое отображение пространства E в F , график которого замкнут в $E \times F$, непрерывно. Покажите, что F компактно.

[Примените конструкцию из задачи 3, с).]

6. Пусть E, F, G — три метрических пространства, A — множество в $E \times F$, B — множество в $F \times G$, $C = B \circ A = \{(x, z) \in E \times G \mid \exists y \in F, \text{ такое, что } (x, y) \in A \text{ и } (y, z) \in B\}$. Пусть A и B замкнуты и проекция множества A в F относительно компактна. Покажите, что C замкнуто в $E \times G$.

[Воспользуйтесь задачей 3, б).]

7. Пусть (E_n) ($n \geq 1$) — бесконечная последовательность непустых метрических пространств, и пусть при всех n расстояние d_n в E_n таково, что диаметр E_n не превосходит единицы (см. задачу 2, б) § 3.14). Пусть E — множество всех последовательностей $x = (x_n)$, где $x_n \in E_n$ при каждом n

[бесконечное произведение последовательности (E_n) ; его обозначают символом $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$].

а) Покажите, что в E функция $d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x_n, y_n)/2^n$ является расстоянием.

б) Пусть для любой точки $x = (x_n) \in E$, любого целого $m \geq 1$ и любого числа $r > 0$ множество $V_m(x; r)$ есть множество всех таких точек $y = (y_n) \in E$, что $d_k(x_k, y_k) < r$ при $k \leq m$. Покажите, что множества $V_m(x; r)$ (при всех m и r) образуют фундаментальную систему окрестностей точки x в E .

с) Пусть $(x^{(m)})$ — последовательность точек $x^{(m)} = (x_n^{(m)})_{n \geq 1}$ пространства E . Покажите, что, для того чтобы последовательность $(x^{(m)})$ сходилась в E к $a = (a_n)$ (соответственно была в E последовательностью Коши), необходимо и достаточно, чтобы при каждом n последовательность $(x_n^{(m)})_{m \geq 1}$ сходилась в E_n к a_n (соответственно была в E_n последовательностью Коши). Для того чтобы E было полным пространством, необходимо и достаточно, чтобы полным было каждое E_n .

д) Пусть A_n — множество в E_n при любом n . Покажите, что замыкание в E множества $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ равно $\prod_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$.

е) Покажите, что, для того чтобы E было вполне ограничено (соответственно компактно), необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было вполне ограничено (соответственно компактно).

ф) Покажите, что, для того чтобы E было локально компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было локально компактно и чтобы все E_n , за исключением не более конечного числа из них, были компактны.

г) Покажите, что, для того чтобы E было связно, необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было связно.

н) Покажите, что, для того чтобы E было локально связно, необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было локально связно и чтобы все E_n , за исключением не более конечного числа из них, были связны.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Многие из свойств действительной прямой уже упоминались в гл. 3 в связи с различными рассмотренными в ней топологическими понятиями. Факты, собранные в настоящей главе, по большей части элементарные и классические, не имеют с этими понятиями непосредственной связи, но именно они фактически являются теми свойствами, которые ставят действительную прямую в столь исключительное положение среди других, более общих пространств.

Логарифмическая и показательная функции вводятся несколько неортодоксальным образом: мы отправляемся не от показательной функции, а от логарифмов. Это дает нам известное техническое преимущество, делая необязательным предварительное определение $a^{m/n}$ (m и n — целые числа > 0) в качестве основного шага перед определением a^x для любого x .

Теорема Титце — Урысона занимает в настоящее время и в функциональном анализе и в алгебраической топологии центральное место. Ее можно рассматривать как первый шаг в изучении общей задачи продолжения непрерывного отображения замкнутого подмножества A пространства E в пространство F до непрерывного отображения *всего* пространства E в F . В книге Н. Стинрода [22] читатель может увидеть, как эта общая задача естественно приводит к наиболее важным и наиболее активно изучаемым задачам современной алгебраической топологии.

1. Непрерывность алгебраических операций

(4.1.1) *Отображение $(x, y) \rightarrow x + y$ произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ равномерно непрерывно.*

Это сразу следует из неравенства

$$|(x' + y') - (x + y)| \leq |x' - x| + |y' - y|$$

и определений.

(4.1.2) *Отображение $(x, y) \rightarrow xy$ произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ непрерывно; для любого $a \in \mathbb{R}$ отображение $x \rightarrow ax$ действительной прямой $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ равномерно непрерывно.*

Непрерывность xy в точке (x_0, y_0) следует из тождества

$$xy - x_0y_0 = x_0(y - y_0) + (x - x_0)y_0 + (x - x_0)(y - y_0).$$

Если задано произвольное $\varepsilon > 0$, то возьмем δ так, чтобы $0 < \delta < 1$ и $\delta(|x_0| + |y_0| + 1) < \varepsilon$. Тогда из неравенств $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ будет вытекать неравенство $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$. Равномерная непрерывность отображения $x \rightarrow ax$ очевидна, так как справедливо равенство $|ax' - ax| = |a||x' - x|$.

(4.1.3) Любое непрерывное отображение f действительной прямой $\mathbb{R}$ в себя, удовлетворяющее условию $f(x+y) = f(x) + f(y)$, имеет вид $x \rightarrow cx$, где $c \in \mathbb{R}$.

В самом деле, для каждого целого $n > 0$ индукцией по n получаем $f(nx) = nf(x)$. С другой стороны, $f(0+x) = f(0) + f(x)$, поэтому $f(0) = 0$ и $f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, следовательно, $f(-x) = -f(x)$. Отсюда следует, что $f(x/n) = f(x)/n$ для любого целого $n > 0$, поэтому для любой пары целых чисел p и q , где $q > 0$, имеем $f(px/q) = pf(x)/q$; иными словами, $f(rx) = rf(x)$ для любого рационального числа r . Но любое действительное число t является пределом последовательности (r_n) рациональных чисел [в силу (2.2.16) и (3.13.13)]. Поэтому из предположения относительно f и (4.1.2) находим

$$f(tx) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(x) = f(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = tf(x).$$

Положив $c = f(1)$, мы получим $f(x) = cx$ для каждого $x \in \mathbb{R}$.

(4.1.4) Отображение $x \rightarrow 1/x$ непрерывно в каждой точке $x_0 \neq 0$ пространства $\mathbb{R}$.

В самом деле, если задано произвольное $\varepsilon > 0$, то возьмем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < \min(|x_0|/2, \varepsilon|x_0|^2/2)$. Тогда из неравенства $|x - x_0| < \delta$ прежде всего следует, что $|x| > |x_0| - \delta > |x_0|/2$, а затем что

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x_0 - x|}{|xx_0|} \leq \frac{2|x_0 - x|}{|x_0|^2} < \varepsilon.$$

(4.1.5) Любая рациональная функция

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(x_1, \dots, x_n)/Q(x_1, \dots, x_n),$$

где P и Q — многочлены с действительными коэффициентами, непрерывна в каждой точке $(a_1, \dots, a_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, в которой $Q(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Непрерывность одночлена в $\mathbb{R}^n$ доказывается индукцией по его степени на основании (4.1.2). Затем, исходя из (4.1.1), индукцией по числу членов доказывается непрерывность многочленов P и Q . Окончательный результат следует из (4.1.4).

(4.1.6) Отображения $(x, y) \rightarrow \sup(x, y)$ и $(x, y) \rightarrow \inf(x, y)$ равномерно непрерывны в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Так как $\sup(x, y) = (x + y + |x - y|)/2$ и $\inf(x, y) = (x + y - |x - y|)/2$, утверждение следует из (4.1.1) и (3.20.9).

(4.1.7) Открытый промежуток в $\mathbb{R}$ гомеоморфен $\mathbb{R}$.

Из (4.1.1) и (4.1.2) следует, что любая линейная функция $x \rightarrow ax + b$ при $a \neq 0$ является гомеоморфизмом пространства $\mathbb{R}$ на себя, потому что обратное отображение $x \rightarrow a^{-1}x - a^{-1}b$ имеет ту же форму. Любые два открытых промежутка $]x, \beta[$, $] \gamma, \delta[$ являются образами один другого при отображении $x \rightarrow ax + b$, поэтому они гомеоморфны. Рассмотрим теперь отображение $x \rightarrow x/(1 + |x|)$ пространства $\mathbb{R}$ на промежуток $] -1, +1[$; обратным к нему является отображение $x \rightarrow x/(1 - |x|)$ и оба они непрерывны, так как непрерывно отображение $x \rightarrow |x|$. Так доказывается, что $\mathbb{R}$ гомеоморфно любому ограниченному открытому промежутку. Наконец, при только что рассмотренном гомеоморфизме пространства $\mathbb{R}$ на $] -1, +1[$ любой неограниченный открытый промежуток $]a, +\infty[$ или $] -\infty, b[$ пространства $\mathbb{R}$ отображается на ограниченный открытый промежуток, содержащийся в $] -1, +1[$. Поэтому эти промежутки также гомеоморфны $\mathbb{R}$.

(4.1.8) Функция $(x, y) \rightarrow x + y$ в каждой точке (a, b) пространства $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$, за исключением точек $(-\infty, +\infty)$ и $(+\infty, -\infty)$, имеет предел по множеству $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Если по крайней мере одна из координат a, b равна $+\infty$ (соответственно $-\infty$), то этот предел равен $+\infty$ (соответственно $-\infty$).

Докажем, например, что если $a \neq -\infty$, то $x + y$ имеет в точке $(a, +\infty)$ предел, равный $+\infty$. Если задано произвольное $c \in \mathbb{R}$, то из неравенств $x > b$ и $y > c - b$ следует неравенство $x + y > c$, и промежутки $]b, +\infty[$ и $]c - b, +\infty[$, если b взято конечным и $< a$, являются соответственно окрестностями точек a и $+\infty$. Отсюда следует наше утверждение. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

(4.1.9) Функция $(x, y) \rightarrow xy$ в каждой точке (a, b) пространства $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$, за исключением точек $(0, +\infty)$, $(0, -\infty)$, $(+\infty, 0)$, $(-\infty, 0)$ имеет предел по множеству $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Если по крайней мере одна из координат a, b бесконечна и если при этом обе координаты имеют один и тот же знак (соответственно противоположные знаки), то этот предел равен $+\infty$ (соответственно $-\infty$).

Покажем, например, что если $a > 0$, то xy имеет в точке $(a, +\infty)$ предел $+\infty$. Если задано произвольное $c \in \mathbb{R}$, то из неравенств $x > b$ и $y > c/b$ при $b > 0$ следует неравенство $xy > c$ и промежутки $]b, +\infty[$ и $]c/b, +\infty[$, если b взято конечным и $< a$, являются окрестностями точек a и $+\infty$. Аналогичны доказательства и для других случаев.

Мы опускаем доказательства следующих двух свойств:

(4.1.10) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} 1/x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} 1/x = -\infty$.

(4.1.11) Отображения $(x, y) \rightarrow \sup(x, y)$ и $(x, y) \rightarrow \inf(x, y)$ непрерывны в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Монотонные функции

Пусть E — непустое подмножество расширенной действительной прямой $\bar{\mathbb{R}}$. Отображение f множества E в $\bar{\mathbb{R}}$ называется *возрастающим* (соответственно *строго возрастающим, убывающим, строго убывающим*), если из $x < y$ (в E) следует $f(x) \leq f(y)$ (соответственно $f(x) < f(y)$, $f(x) \geq f(y)$, $f(x) > f(y)$). Функция, являющаяся возрастающей или убывающей (соответственно строго возрастающей или строго убывающей), называется *монотонной* (соответственно *строго монотонной*). Строго монотонное отображение инъективно. Если f — возрастающее (соответственно строго возрастающее) отображение, то $-f$ убывающее (соответственно строго убывающее) отображение. Если f и g — возрастающие отображения и отображение $f+g$ определено, то $f+g$ возрастающее отображение; если вдобавок и f и g конечны и хотя бы одно из них является строго возрастающим, то и $f+g$ строго возрастающее отображение.

(4.2.1) Пусть E — непустое множество в $\bar{\mathbb{R}}$ и $a = \sup E$. Для любого монотонного отображения f множества E в $\bar{\mathbb{R}}$ предел $\lim_{x \rightarrow a, x \in E} f(x)$ существует и равен $\sup_{x \in E} f(x)$, если f — возрастающее, и $\inf_{x \in E} f(x)$, если f — убывающее отображение.

Допустим, например, что f — возрастающее отображение, и пусть $c = \sup_{x \in E} f(x)$. Если $c = -\infty$, то f постоянно (равно $-\infty$) на E и результат тривиален. Если $c > -\infty$, то для любого $b < c$ существует такая точка $x \in E$, что $b < f(x) \leq c$. Поэтому при $y \in E$ и $x \leq y \leq a$ мы, по предположению, имеем $b < f(x) \leq f(y) \leq c$, откуда следует наше заключение.

(4.2.2) Пусть I — промежуток в $\bar{\mathbb{R}}$. Любое непрерывное инъективное отображение f промежутка I в $\bar{\mathbb{R}}$ строго монотонно; любое непрерывное строго монотонное отображение f промежутка I в $\bar{\mathbb{R}}$ является гомеоморфизмом I на промежуток $f(I)$.

Пусть отображение f непрерывно и инъективно. Пусть a и b — две такие точки из I , что $a < b$, и допустим, например, что $f(a) < f(b)$. Тогда при $a < c < b$ мы должны иметь $f(a) < f(c) < f(b)$. В самом деле, из наших предположений следует, что $f(c) \neq f(b)$ и $f(c) \neq f(a)$, и если бы мы, например, имели $f(c) > f(b)$, то по теореме Больцано (3.19.8) нашлась бы такая точка x , что $a < x < c$ и $f(x) = f(b)$, что противоречит предположению. Аналогично мы убеждаемся в том, что невозможно и неравенство $f(c) < f(a)$. Если теперь $b < c$, то $f(b) < f(c)$, ибо предыдущее рассуждение показывает, что $f(b)$ должно содержаться в промежутке с концами $f(a)$ и $f(c)$. Точно так же, если $c < a$, то $f(c) < f(a)$. Наконец, если x и y — две произвольные точки промежутка I и $x < y$, то,

повторяя предыдущее рассуждение по отношению к a , x и y вместо a , b и c , мы получим $f(x) < f(y)$, и первое утверждение доказано.

Если f непрерывно и строго монотонно, то оно является биективным отображением I на $f(I)$, а $f(I)$, будучи связным, должно быть промежутком [(3.19.1) и (3.19.7)]. Для любой точки $x \in I$ образ при f любого промежутка, содержащего x и содержащегося в I , является тогда промежутком, содержащим $f(x)$ и содержащимся в $f(I)$. Это доказывает, что образ при отображении f любой окрестности точки x в I является окрестностью точки $f(x)$ в $f(I)$. Следовательно, f — гомеоморфизм [см. (3.11.1)].

Задачи

1. Пусть f — отображение $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, при котором $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

а) Покажите, что если f на промежутке $]a, b[$ ограничено сверху, то оно на нем ограничено и снизу.

[Если c — фиксированная точка промежутка $]a, b[$, то рассмотрите пары точек x, y этого промежутка, для которых $x < c < y$, а отношение $(y-c)/(c-x)$ рационально.]

б) Докажите, что при том же предположении отображение f ограничено на любом компактном промежутке и непрерывно в $\mathbf{R}$ и поэтому имеет вид $f(x) = cx$.

[Пользуясь аксиомой выбора, можно показать, что существуют решения уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$, неограниченные на каждом промежутке.]

2. Пусть b — целое число > 1 .

а) Покажите, что для любой бесконечной последовательности (c_n) целых чисел, удовлетворяющих условию $0 \leq c_n \leq b-1$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n/b^n$ сходится к числу $x \in [0, 1]$. Обратно, для любого $x \in [0, 1]$ существует такая последовательность (c_n) , что $0 \leq c_n \leq b-1$ при каждом n и $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n/b^n$. Если x

не имеет вида k/b^m (k и m — целые числа ≥ 0), то эта последовательность единственна; в противном случае существуют ровно две последовательности (c_n) , обладающие требуемыми свойствами.

[Воспользуйтесь тем фактом, что для любого целого $m \geq 0$ и любого $x \in [0, 1]$ существует единственное целое число k , при котором $k/b^m \leq x < (k+1)/b^m$.]

б) Пользуясь случаем $b=2$ задачи а) и задачей 5 § 1.9, покажите, что множество $[0, 1]$ [а поэтому и само $\mathbf{R}$, см. (4.1.7)] равномощно множеству $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$.

с) Пусть K — подмножество промежутка $[0, 1]$, состоящее из всех чисел вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n/3^n$, где $c_n = 0$ или $c_n = 2$ (троичное канторово множество). Покажите, что K компактно, а его дополнение в $[0, 1]$ является объединением счетного множества неперекрывающихся открытых промежутков. Опишите эти промежутки и покажите, что (бесконечная) сумма их длин равна 1.

д) Для каждой точки $x \in K$, где $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n/3^n$, определим $f(x)$ как действительное число $\sum_{n=0}^{\infty} b_n/2^n$, где $b_n = c_n/2$. Покажите, что если x записывается в виде $\sum_{n=0}^{\infty} c_n/3^n$ двумя различными способами, то два соответствующих числа $\sum_{n=0}^{\infty} b_n/2^n$ равны. Докажите, далее, что f является непрерывным сюръективным отображением множества K на промежуток $[0, 1]$ действительной прямой $\mathbf{R}$ и что, следовательно, K и $\mathbf{R}$ равномощны. Объясните, как можно продолжить f в непрерывное отображение промежутка $I = [0, 1]$ на себя, постоянное на каждой компоненте связности (3.19.6) дополнения $I \setminus K$.

3. а) Пусть E — метрическое пространство, удовлетворяющее следующему условию: для каждой конечной последовательности $s = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ элементы которой равны 0 или 1, существует такое непустое множество $A_s \subseteq E$, что

(i) E является объединением двух множеств $A_{(0)}$, $A_{(1)}$ и если для каждой конечной последовательности s , состоящей из n элементов, s' и s'' — две последовательности из $n+1$ элемента, первые n элементов которых совпадают с s , то $A_s = A_{s'} \cup A_{s''}$;

(ii) для каждой бесконечной последовательности $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$, элементы которой равны 0 или 1, диаметр множества A_{s_n} , где $s_n = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$, стремится к нулю при n , стремящемся к $+\infty$ и пересечение множеств A_{s_n} не пусто.

Покажите, что при этих условиях существует непрерывное отображение трюичного канторова множества K (задача 2) на E и потому, в частности, E компактно.

б) Пусть, напротив, E — произвольное компактное метрическое пространство. Покажите, что существует непрерывное отображение K на E .

[Примените метод задачи а) и определение вполне ограниченного пространства (3.16); обратите внимание на то, что из свойств (i) и (ii) не вытекает, что два множества $A_{s'}$ и $A_{s''}$ должны быть отличны от A_s для всех последовательностей s .]

с) Если вдобавок E вполне несвязно и не имеет изолированных точек (задача 2 § 3.9), то E гомеоморфно K .

[Сначала докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует покрытие пространства E конечным числом множеств A_ε , одновременно открытых и замкнутых и имеющих диаметр $\leq \varepsilon$; для этой цели воспользуйтесь задачей 9, а) § 3.19. Затем примените метод задачи а).]

4. а) Пусть E (соответственно F) — множество четных (соответственно нечетных) целых чисел ≥ 0 . Покажите, что, ставя пару $(X \cap E, X \cap F)$ в соответствие каждому подмножеству $X \subseteq \mathbf{N}$, мы определяем биективное отображение множества $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$ на $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(F)$.

б) Выведите из а), что при всех $n > 1$ множества $\mathbb{R}^n$ равномощны $\mathbb{R}$ (см., однако, задачу 6 § 5.1).

5. Пусть I — промежуток $[0, 1]$ в $\mathbb{R}$. Покажите, что существует непрерывное отображение f промежутка I на „квадрат“ $I \times I$ (кривая Пеано).

[Покажите сначала, что существует непрерывное отображение канторова множества K на $I \times I$ (задача 3), а затем линейно продолжите это отображение на компоненты связности дополнения множества K в I .]

6. Пусть g — отображение промежутка $]0, 1[$ в промежуток $[-1, 1]$; предположим, что $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g(x) = 0$. Покажите, что существуют такое не-

прерывное убывающее отображение g_1 и такое непрерывное возрастающее отображение g_2 промежутка $]0, 1[$ в промежуток $[-1, 1]$, что $g_1(0) = g_2(0) = 0$ и $g_1(x) \leq g(x) \leq g_2(x)$ при $0 < x \leq 1$.

[Для каждого целого n рассмотрите нижнюю грань x_n множества точек x , в которых $g(x) \geq 1/n$.]

3. Логарифмы и показательная функция

(4.3.1) Для любого числа $a > 1$ существует единственное возрастающее отображение f промежутка $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям; $f(xy) = f(x) + f(y)$ и $f(a) = 1$. При этом f является гомоморфизмом промежутка $\mathbb{R}_+^*$ на $\mathbb{R}$.

Предварительно докажем лемму.

(4.3.1.1) Для любого $x > 0$ существует такое целое число m (положительное или отрицательное), что $a^m \leq x \leq a^{m+1}$.

Допустим сначала, что $x \geq 1$. Последовательность (a^n) является строго возрастающей. Если бы мы имели $a^n \leq x$ для всех целых $n > 0$, то $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \sup_n a^n$ было бы конечным, > 1 и $\leq x$. Но в силу (4.1.2) $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^n$, откуда $b = ab$, что противоречит предположению о том, что $a > 1$. Следовательно, существует такое целое n , что $x < a^n$. В качестве $m+1$ возьмем тогда наименьшее из этих целых чисел. Если же, напротив, $0 < x < 1$, то $x^{-1} > 1$, и если $a^m \leq x^{-1} \leq a^{m+1}$, то мы имеем $a^{-(m+1)} \leq x \leq a^{-(m+1)+1}$.

Обратимся теперь к (4.3.1). Предположим, что существует функция f , обладающая свойствами, перечисленными в (4.3.1). Тогда f является гомоморфизмом мультипликативной группы $\mathbb{R}_+^*$ в аддитивную группу $\mathbb{R}$, и, таким образом, при любом $x > 0$ и любом целом n (положительном или отрицательном) мы должны иметь $f(1) = 0$, $f(x^n) = nf(x)$ и, в частности, $f(a^n) = n$. Кроме того, если $a^m \leq x \leq a^{m+1}$, то $f(a^m) \leq f(x) \leq f(a^{m+1})$. Иными словами, $m \leq$

$\leq nf(x) \leq m+1$, поэтому $m/n \leq f(x)$ и $|f(x) - m/n| \leq 1/n$. Это показывает, что если мы обозначим через A_x множество рациональных чисел m/n (m положительное или отрицательное, $n \geq 1$), для которых $a^m \leq x^n$ (заметим, что неравенства $a^m \leq x^n$ и $a^{mq} \leq x^{nq}$, где q — целое число > 0 , эквивалентны), то будет выполняться равенство $f(x) = \sup A_x$, которое показывает, что f единственно.

Чтобы доказать, что отображение f существует, остается убедиться в том, что отображение $f: x \rightarrow \sup A_x$ удовлетворяет всем нашим условиям. Пусть x и y — два элемента множества $\mathbb{R}_+^*$. Пусть для любого целого $n \geq 1$ целые числа m и m' таковы, что $a^m \leq x^n \leq a^{m+1}$ и $a^{m'} \leq y^n \leq a^{m'+1}$. Из этих неравенств следует, что $a^{m+m'} \leq (xy)^n \leq a^{m+m'+2}$. Поэтому $\frac{m}{n} \leq f(x) \leq \frac{m+1}{n}$, $\frac{m'}{n} \leq f(y) \leq \frac{m'+1}{n}$, $\frac{m+m'}{n} \leq f(xy) \leq \frac{m+m'+2}{n}$, а также $\frac{m+m'}{n} \leq f(x) + f(y) \leq \frac{m+m'+2}{n}$. Отсюда мы заключаем, что

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{n},$$

и, так как n произвольно, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Из (4.3.1.1) следует, что для любого $z > 1$ существует такое целое число $n \geq 1$, что $a < z^n$. Поэтому $f(z) \geq 1/n > 0$, откуда следует, что f — строго возрастающее отображение, так как если $x < y$, то $y = zx$, где $z > 1$, и $f(y) = f(x) + f(z) > f(x)$. С другой стороны, имеем следующую лемму:

(4.3.1.2) Для любого целого $n \geq 1$ существует такое $z > 1$, что $z^n \leq a$.

Заметим, что существует такое x , что $1 < x < a$, поэтому $a = xy$, где $y > 1$. Если $z_1 = \min(x, y)$, то $z_1^2 \leq xy = a$ и $z_1 > 1$. По индукции определим $z_n > 1$, так чтобы $z_n^2 \leq z_{n-1}$, откуда $z_n^{2^n} \leq a$ и тем более $z_n^n \leq a$.

Лемма показывает, что $0 < f(z) \leq 1/n$. Для любого $x \in \mathbb{R}_+^*$ возьмем такое δ , что $\frac{x+\delta}{x} < z$ и $\frac{x-\delta}{x} > \frac{1}{z}$. Тогда $|f(y) - f(x)| \leq f(z) \leq 1/n$ при $|y - x| \leq \delta$. Этим доказано, что отображение f непрерывно. Следовательно, в силу (4.2.2) f является гомеоморфизмом промежутка $\mathbb{R}_+^*$ на некоторый промежуток $I \subset \mathbb{R}$. Но поскольку $f(a^n) = n$ произвольно велико, этот промежуток есть сама действительная прямая $\mathbb{R}$.

(4.3.2) Для любого числа $a > 0$ и $a \neq 1$ существует одно и только одно непрерывное отображение f промежутка $\mathbb{R}_+^*$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям $f(xy) = f(x) + f(y)$ и $f(a) = 1$.

Пусть $b > 1$. По теореме (4.3.1) мы имеем такой гомеоморфизм f_0 промежутка $\mathbb{R}_+^*$ на $\mathbb{R}$, что $f_0(xy) = f_0(x) + f_0(y)$ и $f_0(b) = 1$. Пусть g_0 — обратный гомеоморфизм, так что $g_0(x+y) = g_0(x)g_0(y)$ и $g_0(1) = b$. Если f удовлетворяет условиям теоремы (4.3.2), то $h = f \circ g_0$ есть непрерывное отображение пространства $\mathbb{R}$ в себя, такое, что $h(x+y) = h(x) + h(y)$. В силу (4.1.3) $h(x) = cx$. Следовательно, $f(x) = cf_0(x)$ и существует только одно значение c , при котором $f(a) = 1$, именно $c = 1/f_0(a)$ (так как $a \neq 1$, то $f_0(a) \neq 0 = f_0(1)$).

Отображение, охарактеризованное в (4.3.2), называется *логарифмом при основании a* , а функция $f(x)$ обозначается символом $\log_a x$. Из доказательства теоремы (4.3.2) сразу следует, что если $a, b > 0$ и $a \neq 1$, то $\log_a x$ и $\log_b x$ пропорциональны. Поэтому, полагая $x = a$, получим

$$(4.3.3) \quad \log_b x = \log_b a \cdot \log_a x.$$

Из (4.3.1) и (4.2.1) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{при } a > 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad \text{при } a < 1.$$

При любом $a > 0$ и $a \neq 1$ отображение, обратное отображению $x \rightarrow \log_a x$, называется *показательной функцией (экспонентой) с основанием a* и обозначается символом $x \rightarrow a^x$. (Это — согласованное обозначение, так как $\log_a(a^n) = n$ и, следовательно, для целых значений x новое обозначение имеет тот же смысл, что и старое, алгебраическое.) Кроме того, по определению мы полагаем $1^x = 1$ для всех действительных чисел x .

Если $a > 0$, x и y — произвольные действительные числа, то из определения следует, что

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^0 = 1.$$

Заменяя в (4.3.3) x на b^x и меняя местами a и b , получаем

$$(4.3.4) \quad \log_a(b^x) = x \log_a b \quad (b > 0, \quad x \text{ — действительное число}),$$

а заменяя в этой последней формуле b на a^y , находим

$$(4.3.5) \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad (x, y \text{ — действительные числа, } a > 0).$$

При $a > 1$ отображение $x \rightarrow a^x$ является строго возрастающим и таким, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty.$$

При $a < 1$ отображение $x \rightarrow a^x$ является строго убывающим и таким, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$$

(4.3.6) Отображение $(x, y) \rightarrow x^y$ непрерывно в $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ и стремится к пределу в каждой точке пространства $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$, принадлежащей замыканию множества $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ и отличной от точек $(0, 0)$, $(+\infty, 0)$, $(1, +\infty)$, $(1, -\infty)$.

Из (4.3.4) получаем $x^y = a^{y \log_a x}$ (a — фиксированное число > 1), поэтому результат следует из (4.1.2) и (4.1.9).

(4.3.7) Любое непрерывное отображение g промежутка $\mathbb{R}_+^*$ в себя, удовлетворяющее условию $g(xy) = g(x)g(y)$, имеет вид $x \rightarrow x^a$, где a — действительное число.

В самом деле, если $b > 1$, то отображение $f(x) = \log_b g(b^x)$ для действительных x и y удовлетворяет условию $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и непрерывно. Поэтому в силу (4.1.3) $f(x) = cx$, следовательно, $g(b^x) = b^{cx} = (b^x)^c$, что и доказывает утверждение.

Так как $\log_b(x^a) = a \cdot \log_b x$, то отображение $x \rightarrow x^a$ (степенная функция) при $a > 0$ является строго возрастающим, а при $a < 0$ строго убывающим. Кроме того, при $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^a = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty,$$

а при $a < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^a = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0.$$

Таким образом, при $a \neq 0$ отображение $x \rightarrow x^a$ на основании (4.2.2) является гомеоморфизмом промежутка $\mathbb{R}_+^*$ на себя. Обратным отображением является $x \rightarrow x^{1/a}$.

Задача

Пусть f — отображение действительной прямой $\mathbb{R}$ в себя, удовлетворяющее условиям $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(xy) = f(x)f(y)$. Покажите, что либо $f(x) = 0$ при каждом $x \in \mathbb{R}$, либо же $f(x) = x$ при каждом $x \in \mathbb{R}$.

[Если $f(1) \neq 0$, то $f(1) = 1$. Во втором случае покажите, что $f(x) = x$ для рациональных x , а затем, пользуясь тем фактом, что любое действительное число $z > 0$ является квадратом, покажите, что f — строго возрастающее отображение.]

4. Комплексные числа

Формулами

$$((x, y), (x', y')) \rightarrow (x + x', y + y'),$$

$$((x, y), (x', y')) \rightarrow (xx' - yy', xy' + yx')$$

определим два отображения множества $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Они соответственно называются *сложением* и *умножением* и обозначаются символами $(z, z') \rightarrow z + z'$ и $(z, z') \rightarrow zz'$. Если положить

$$0 = (0, 0), 1 = (1, 0) \text{ и } z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \text{ при } z = (x, y) \neq 0$$

[из (2.2.8) и (2.2.13) видно, что при $z \neq 0$ имеем $x^2 + y^2 \neq 0$], то эти два отображения будут удовлетворять аксиомам [2.1, (I)] поля.

Таким образом определенное поле обозначается буквой $\mathbb{C}$ и называется *полем комплексных чисел*, а его элементы называются *комплексными числами*. Отображение $x \rightarrow (x, 0)$ пространства $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ инъективно и сохраняет сложение и умножение. Поэтому мы отождествим $\mathbb{R}$ с подполем поля $\mathbb{C}$, состоящим из элементов $(x, 0)$. Элемент $i = (0, 1)$ обладает тем свойством, что $i^2 = (-1, 0) = -1$, и для любого элемента $(x, y) \in \mathbb{C}$ мы можем писать, что $(x, y) = x + iy$.

Если $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, то x обозначается символом $\Re z$ и называется *действительной частью* числа z , а y обозначается символом $\Im z$ и называется *мнимой частью* z .

(4.4.1) Любое рациональное отображение $(z_1, \dots, z_n) \rightarrow P(z_1, \dots, z_n)/Q(z_1, \dots, z_n)$, где P и Q — многочлены с комплексными коэффициентами, непрерывно в каждой точке $(a_1, \dots, a_n)$ пространства $\mathbb{C}^n$, в которой $Q(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Это доказывается точно так же, как (4.1.5), с помощью теорем, аналогичных (4.1.1), (4.1.2) и (4.1.4); эти теоремы сразу следуют из написанных выше формул для суммы, произведения, обратного комплексного числа и из (3.20.4) и (4.1.5).

Для любого комплексного числа $z = x + iy$ число $\bar{z} = x - iy$ называется *числом, сопряженным с z* . Имеем

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}';$$

иными словами, $z \rightarrow \bar{z}$ есть автоморфизм поля $\mathbb{C}$, который в силу (3.20.4) и (4.1.2) является взаимно непрерывным. *Действительные* числа характеризуются условием $\bar{z} = z$, числа вида ix (x действительно; такие числа называются также *чисто мнимыми*) — условием $\bar{z} = -z$. Если $z = x + iy$, то $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$.

Положительное действительное число $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$ называется *модулем* числа z и в случае, когда z действительно, совпадает

с абсолютной величиной, определенной в (2.2). Равенство $|z| = 0$ равносильно равенству $z = 0$. Имеем $|zz'|^2 = zz'zz' = zz'z'z' = |z|^2|z'|^2$, поэтому $|zz'| = |z| \cdot |z'|$, откуда следует, что при $z \neq 0$ справедливо равенство $|1/z| = 1/|z|$. Наконец, прямым вычислением проверяется неравенство треугольника

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|,$$

которое показывает, что $|z - z'| = d(z, z')$ есть расстояние, определенное в $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, равномерно эквивалентное расстоянию, рассмотренному в (3.20). Шары, соответствующие этому расстоянию, называются *кругами*.

Любое комплексное число $z \neq 0$ одним и только одним способом может быть записано в виде произведения $r\zeta$, где $r > 0$ и $|\zeta| = 1$, а именно нужно положить $r = |z|$ и $\zeta = z/|z|$.

Задача

Пусть f — непрерывное отображение пространства $\mathbb{C}$ в себя, удовлетворяющее условиям $f(z + z') = f(z) + f(z')$ и $f(zz') = f(z)f(z')$. Покажите, что либо $f(z) = 0$ при каждом $z \in \mathbb{C}$, либо же f есть одно из отображений $z \rightarrow z$, $z \rightarrow \bar{z}$.

[Воспользуйтесь (4.1.3).]

5. Теорема Титце — Урысона о продолжении

(4.5.1) (Теорема Титце — Урысона о продолжении.) Пусть E — метрическое пространство, A — замкнутое подмножество E и f — непрерывное ограниченное отображение множества A в $\mathbb{R}$. Тогда существует непрерывное отображение g пространства E в $\mathbb{R}$, на A совпадающее с f и такое, что

$$\sup_{x \in E} g(x) = \sup_{y \in A} f(y), \quad \inf_{x \in E} g(x) = \inf_{y \in A} f(y).$$

Заменяя, если потребуется, f отображением $y \rightarrow \alpha f(y) + \beta$, $\alpha \neq 0$ (случай, когда f постоянно, тривиален), можно считать, что

$$\inf_{y \in A} f(y) = 1, \quad \sup_{y \in A} f(y) = 2.$$

Определим отображение $g(x)$ так: $g(x)$ равно $f(x)$, если $x \in A$, и

$$g(x) = \inf_{y \in A} \frac{f(y) d(x, y)}{d(x, A)},$$

если $x \in E \setminus A$. Из неравенств $1 \leq f(y) \leq 2$ при $y \in A$ и определения расстояния $d(x, A)$ следует, что $1 \leq g(x) \leq 2$ при $x \in E \setminus A$. Нам нужно, таким образом, только доказать непрерывность отобра-

жения g в каждой точке $x \in E$. Если $x \in \mathring{A}$, то непрерывность следует из предположения относительно непрерывности f . Если x принадлежит открытому множеству $E \setminus A$, то мы можем написать $g(x) = h(x)/d(x, A)$, где $h(x) = \inf_{y \in A} (f(y)d(x, y))$, и так как $d(x, A)$

непрерывно и $\neq 0$ [в силу (3.8.9) и (3.11.8)], то [ввиду (4.1.2) и (4.1.4)] нам остается только доказать, что h непрерывно в каждой точке $x \in E \setminus A$. Пусть $r = d(x, A)$; при $d(x, x') \leq \varepsilon < r$ мы имеем $d(x, y) \leq d(x', y) + \varepsilon$, поэтому (так как $f(y) \leq 2$) $h(x) \leq h(x') + 2\varepsilon$ и точно так же $h(x') \leq h(x) + 2\varepsilon$, что и доказывает непрерывность отображения h . Допустим, наконец, что x — граничная точка множества A . Пусть $r > 0$ выбрано для данного $\varepsilon > 0$ так, что $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ при $y \in A \cap B(x; r)$. Пусть $C = A \cap B(x; r)$, $D = A \setminus C$. Если $x' \in E \setminus A$ и $d(x, x') \leq r/4$, то для каждой точки $y \in D$ имеем $d(x', y) \geq d(x, y) - d(x, x') \geq 3r/4$, поэтому

$$\inf_{y \in D} (f(y)d(x', y)) \geq \frac{3r}{4}.$$

С другой стороны, $f(x)d(x', x) \leq 2d(x', x) \leq r/2$ и, следовательно, $\inf_{y \in A} (f(y)d(x', y)) = \inf_{y \in C} (f(y)d(x', y))$. Но так как при $y \in C$ выполняются неравенства

$$f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon \quad \text{и} \quad \inf_{y \in C} d(x', y) = d(x', A),$$

то

$$(f(x) - \varepsilon)d(x', A) \leq \inf_{y \in A} (f(y)d(x', y)) \leq (f(x) + \varepsilon)d(x', A),$$

откуда следует, что $|g(x') - f(x)| \leq \varepsilon$ при $x' \in E \setminus A$ и $d(x, x') \leq r/4$. Если же $x' \in A$ и $d(x, x') \leq r/4$, то $|g(x') - f(x)| = |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon$, что и завершает доказательство теоремы.

(4.5.2) Пусть A и B — два непустых замкнутых множества в метрическом пространстве E , причем $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует такая непрерывная в E функция f со значениями в $[0, 1]$, что $f(x) = 1$ на A и $f(x) = 0$ на B .

Применяем (4.5.1) к отображению $A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$, равному 0 на B и 1 на A и непрерывному на $A \cup B$.

Задачи

1. Пусть (F_n) — последовательность замкнутых множеств в метрическом пространстве E и A — объединение множеств F_n . Покажите, что при $x \notin A$ существует функция $f \geq 0$, ограниченная и непрерывная в E и такая, что $f(x) = 0$ и $f(y) > 0$ в каждой точке $y \in A$.

[Воспользуйтесь (4.5.2) и (7.2.1).]

2. а) Пусть E — метрическое пространство, обладающее тем свойством, что каждое ограниченное в E множество относительно компактно. Покажите, что E локально компактно и сепарабельно.

[Воспользуйтесь (3.16.2).]

б) Пусть, наоборот, E — локально компактное (но не компактное) сепарабельное метрическое пространство и d' — расстояние в E . Пусть (U_n) — такая последовательность относительно компактных открытых подмножеств пространства E , что $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ и E является объединением последовательности (U_n) (3.18.3). Покажите, что существует такая действительная функция f , непрерывная в E , что $f(x) \leq n$ при $x \in \bar{U}_n$ и $f(x) \geq n$ при $x \in E \setminus \bar{U}_n$. Тогда расстояние $d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ топологически эквивалентно расстоянию d и при расстоянии d' любое ограниченное множество относительно компактно.

[Примените (4.5.2).]

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Терминология, введенная в гл. 3, соответствует таким свойствам геометрических объектов, которые интуитивно остаются неизменными при „деформации“. В настоящей же главе мы значительно ближе подходим к понятиям классической геометрии, так как здесь с топологической точки зрения изучаются прямые, плоскости и т. д. (Напомним, что чисто алгебраические аспекты этих понятий составляют линейную алгебру, которую мы предполагаем известной читателю.)

В этом контексте свое естественное определение получает понятие ряда. Особенно следует подчеркнуть тот факт, что для наиболее важного типа сходящихся рядов (5.3) остаются справедливыми обычные свойства коммутативности и ассоциативности конечных сумм. Это, естественно, приводит к заключению, что в случае таких рядов порядок их членов совершенно несуществен. Это же позволяет разумным образом сформулировать теорему о произведении двух таких рядов действительных чисел (см. (5.5.3)) в отличие от нелепого так называемого „умножения Коши“, все еще встречающегося в некоторых учебниках и не имеющего смысла ни для каких рядов, кроме степенных рядов одной переменной.

Основными результатами этой главы являются критерий непрерывности (5.5.1) и теорема Ф. Рисса (5.9.4), характеризующая конечномерные пространства и являющаяся ключом к элементарной спектральной теории, развиваемой в гл. 9.

Конечно, эта глава представляет собой лишь краткое введение в общую теорию *банаховых пространств* и *линейных топологических пространств*, которая излагается, например, в книгах Тейлора [23] и Бурбаки [6]. Главных же вопросов — понятия „бэровской категории“ и теории двойственности, — играющих фундаментальную роль в доказательстве более глубоких результатов функционального анализа, мы здесь не касаемся.

1. Нормированные пространства и банаховы пространства

Когда в этой и следующих главах мы говорим о *векторном пространстве*, мы всегда имеем в виду векторное пространство (конечной или бесконечной *размерности*) над полем действительных чисел или над полем комплексных чисел (эти пространства называются соответственно *действительным* и *комплексным* вектор-

ными пространствами). Если поле скаляров не указано, то подразумевается, что и определения и результаты верны в обоих случаях¹⁾. Если в одном и том же утверждении речь идет о нескольких векторных пространствах, то предполагается (если не сказано противное), что все они имеют одно и то же поле скаляров.

Комплексное векторное пространство E может также рассматриваться и как действительное векторное пространство, у которого скаляры принадлежат $\mathbb{R}$; когда необходимо различать эти пространства, мы говорим, что это действительное векторное пространство E_0 является *базисным* для комплексного векторного пространства E . Если E имеет конечную размерность n над $\mathbb{C}$, то E_0 имеет размерность $2n$ над $\mathbb{R}$.

Норма в векторном пространстве E есть отображение (обычно записываемое в виде $x \rightarrow \|x\|$, причем, если потребуется, знак $\|\dots\|$ сопровождается индексами) пространства E в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, обладающее следующими свойствами:

- (I) $\|x\| \geq 0$ для каждого элемента $x \in E$.
- (II) Отношение $\|x\| = 0$ эквивалентно отношению $x = 0$.
- (III) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для любого элемента $x \in E$ и любого скаляра λ .
- (IV) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любой пары элементов пространства E (*неравенство треугольника*).

(5.1.1) Если $x \rightarrow \|x\|$ — норма в векторном пространстве E , то $d(x, y) = \|x - y\|$ — расстояние в E , обладающее тем свойством, что $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ и $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ для любого скаляра λ .

Проверка аксиом из (3.1) тривиальна.

Нормированное пространство есть векторное пространство с заданной в нем нормой. Такое пространство всегда можно рассматривать как метрическое пространство с расстоянием $d(x, y) = \|x - y\|$. *Банахово пространство* есть полное нормированное пространство.

Если E — комплексное нормированное векторное пространство, то $x \rightarrow \|x\|$ является также нормой и на базисном действительном векторном пространстве E_0 , и потому метрические пространства E и E_0 тождественны. Если E — банахово пространство, то и E_0 — банахово пространство.

Примеры норм. (5.1.2) Пространства, рассмотренные в (3.2.1) — (3.2.4), являются действительными векторными простран-

¹⁾ Произведение скаляра λ и вектора x записывается и в виде λx и в виде $x\lambda$. Нейтральный элемент аддитивной группы векторного пространства обозначается символом 0.

ствами, а введенные в них расстояния получены из норм указанным в (5.1.1) способом. Определенные в примерах (3.2.1)—(3.2.3) нормированные пространства на основании (3.20.16) и (3.14.3) являются полными и потому банаховыми. Пространство, рассмотренное в примере (3.2.4), будет специально изучаться в гл. 7 и, как мы увидим, также является банаховым.

(5.1.3) Новые примеры получаются, если всюду в предыдущих примерах заменить действительные числа комплексными [и в примере (3.2.2) выражение $(x_i - y_i)^2$ заменить на $|x_i - y_i|^2$].

(5.1.4) Пусть $I = [a, b]$ — замкнутый ограниченный промежуток в $\mathbb{R}$ и $E = \mathcal{C}_\mathbb{R}(I)$ — множество всех действительных непрерывных в I функций. Покажем, что E — векторное пространство (где $f + g$ и λf соответственно являются отображениями $t \rightarrow f(t) + g(t)$ и $t \rightarrow \lambda f(t)$). Если мы запишем

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt,$$

то $\|f\|_1$ будет нормой в E . Единственной аксиомой, проверка которой нетривиальна, является аксиома (II), но она следует из теоремы о среднем значении (см. гл. 8). Можно доказать, что E — неполное пространство (см. задачу 1).

Другие важные примеры норм см. в 5.7 и в гл. 6.

(5.1.5) Если E — действительное (соответственно комплексное) нормированное пространство, то отображение $(x, y) \rightarrow x + y$ равномерно непрерывно в $E \times E$, отображение $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ непрерывно в $\mathbb{R} \times E$ (соответственно в $\mathbb{C} \times E$), отображение $x \rightarrow \lambda x$ равномерно непрерывно в E .

Доказательства проводятся по той же схеме, что и доказательства утверждений (4.1.1) и (4.1.2). Например, чтобы доказать непрерывность отображения $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ в точке (λ_0, x_0) , воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| &= \|\lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)\| \leq \\ &\leq |\lambda_0| \cdot \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \cdot \|x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \cdot \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Как следствие из (5.1.5) получим, что любой сдвиг $x \rightarrow a + x$ и любое гомотетическое отображение $x \rightarrow \lambda x$ ($\lambda \neq 0$) являются гомеоморфизмом пространства E на себя, потому что обратное отображение снова есть сдвиг (соответственно гомотетическое отображение).

Задачи

1. Пусть $I = [0, 1]$ и пусть E — нормированное пространство, определенное в (5.1.4).

а) Пусть f_n для любого $n \geq 3$ есть непрерывная функция, определенная в I и удовлетворяющая следующим условиям: $f_n(t) = 1$ при $0 \leq t \leq 1/2$, $f_n(t) = 0$ при $1/2 + 1/n \leq t \leq 1$ и $f_n(t)$ имеет вид $\alpha_n t + \beta_n$ на промежутке $[1/2, 1/2 + 1/n]$, (где α_n и β_n — константы, которые следует подобрать). Покажите, что f_n есть последовательность Коши в E , которая не сходится.

[Покажите, что если бы у последовательности f_n в E существовал предел g , то необходимо должно было бы быть $g(t) = 1$ при $0 \leq t \leq 1/2$ и $g(t) = 0$ при $1/2 < t \leq 1$, что несовместимо с непрерывностью g .]

б) Покажите, что расстояние в E , определенное в (5.1.4), топологически не эквивалентно расстоянию, определенному в (3.2.4).

[Приведите пример последовательности в E , сходящейся к 0 при расстоянии $\|f - g\|$, но не имеющей предела при расстоянии, определенном в (3.2.4).]

2. Пусть A и B — два множества в нормированном пространстве E . Обозначим через $A + B$ множество всевозможных сумм $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

а) Покажите, что если одно из множеств A и B открыто, то и $A + B$ открыто.

б) Покажите, что если A и B компактны, то и $A + B$ компактно.

[Примените (3.17.9) и (3.20.16).]

с) Покажите, что если A компактно и B замкнуто, то $A + B$ замкнуто.

д) Приведите пример двух замкнутых множеств A и B в $\mathbb{R}$, для которых $A + B$ не замкнуто [ср. пример, приведенный перед (3.4.1)].

3. Пусть E — нормированное пространство.

а) Покажите, что замыкание открытого шара в E есть замкнутый шар с тем же центром и того же радиуса, внутренность замкнутого шара в E есть открытый шар с тем же центром и того же радиуса и граница открытого шара (или замкнутого шара) в E есть сфера с тем же центром и того же радиуса (см. задачу 4 § 3.8).]

б) Покажите, что открытый шар $B(0; r)$ гомеоморфен E .

[Рассмотрите отображение $x \rightarrow rx/(1 + \|x\|)$.]

4. *Сегмент* в нормированном пространстве E есть образ промежутка $[0, 1]$ пространства $\mathbb{R}$ при непрерывном отображении $t \rightarrow ta + (1 - t)b$, где $a \in E$ и $b \in E$; a и b называются *концами* этого сегмента. Сегмент компактен и связан. *Ломаная линия* в E есть такое множество $L \subset E$, что существует конечная последовательность $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ точек пространства E , обладающая тем свойством, что L есть объединение сегментов S_i с концами x_i и x_{i+1} при $0 \leq i \leq n - 1$. Говорят, что последовательность (x_i) *определяет ломаную линию* L (данная ломаная линия, вообще говоря, может определяться бесконечным числом различных конечных последовательностей). Если A — множество в пространстве E и a , b — две точки множества A , то говорят, что a и b *соединены в A ломаной линией*, если существует такая

последовательность $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, что $a = x_0$, $b = x_n$ и что ломаная L , определяемая этой последовательностью, содержится в A .

Если любые две точки множества A могут быть соединены в A ломаной линией, то A связно. Покажите, что, наоборот, если $A \subset E$ — связное открытое множество, то любые две точки множества A могут быть соединены в A ломаной линией.

[Докажите, что множество тех точек $y \in A$, которые могут быть соединены в A ломаной линией с данной точкой $a \in A$, одновременно открыто и замкнуто в A].

5. *Линейное многообразие* V в действительном векторном пространстве E есть множество вида $a + M$, где M — линейное подпространство пространства E ; *размерность* (соответственно *коразмерность*) многообразия V есть, по определению, размерность (соответственно коразмерность¹⁾ подпространства M . Если $b \notin V$ и V имеет конечную размерность p (соответственно конечную коразмерность q), то наименьшее линейное многообразие W , содержащее b и V , имеет конечную размерность $p+1$ (соответственно конечную коразмерность $q-1$).

Пусть A — открытое связное множество в действительном нормированном пространстве E и пусть (V_n) — счетная последовательность линейных многообразий в E , каждое из которых имеет коразмерность ≥ 2 . Покажите, что если B — объединение всех V_n , то множество $A \cap (E \setminus B)$ связно.

[Воспользуйтесь задачей 4; докажите, что если L — ломаная линия, соединяющая в A две точки a и b множества $A \cap (E \setminus B)$, то существует другая ломаная линия L' , «близкая» к L и содержащаяся в $A \cap (E \setminus B)$. Чтобы это доказать, заметьте, что ввиду (2.2.17) для любой точки $x \in E \setminus B$ множество тех точек $y \in E$, для которых сегмент с концами x и y не пересекает ни одного из многообразий V_n , плотно в E .]

В частности, если размерность пространства $E \geq 2$ и D — счетное множество в E , то множество $A \cap (E \setminus D)$ связно.

6. Покажите, что если E — действительное нормированное пространство размерности ≥ 2 , то никакое непустое множество, открытое в E , не может быть гомеоморфно никакому подмножеству действительной прямой $\mathbb{R}$.

[Примените задачу 5.]

7. а) Покажите, что никакой шар в нормированном пространстве E не может содержать линейного многообразия (задача 5) размерности > 0 .

б) Пусть (E_n) — бесконечная последовательность нормированных пространств размерности > 0 . Покажите, что в метрическом пространстве

$E = \prod_{n=0}^{\infty} E_n$ не существует такой нормы, что расстояние $\|x - y\|$ топологи-

¹⁾ Коразмерностью (фактор-размерностью) подпространства $M \subset E$ называют размерность алгебраического дополнения в E к подпространству M . См., например, Райков Д. А., Векторные пространства, Физматгиз, М., 1962. — *Прим. ред.*

чески эквивалентно расстоянию, определенному в задаче 7 § 3.20 (где в качестве d_n взято ограниченное расстояние в E_n , эквивалентное расстоянию, определяемому в E_n нормой этого пространства).

{Примените а.)}

2. Ряды в нормированном пространстве

Пусть E — нормированное пространство. Пара последовательностей $(x_n)_{n \geq 0}$, $(s_n)_{n \geq 0}$ называется *рядом*, если их элементы x_n , s_n при любом n связаны соотношениями $s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, или, что равносильно, $x_0 = s_0$, $x_n = s_n - s_{n-1}$ при $n \geq 1$. Элемент x_n называется *n -м членом*, а s_n — *n -й частичной суммой* ряда. Рассматриваемый ряд часто называется *рядом с общим членом x_n* или просто *рядом (x_n)* (или иногда *рядом $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$* , что следует признать неудачным).

Ряд (x_n) называется *сходящимся к s* , если $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$; в этом случае s называют *суммой* ряда и пишут $s = x_0 + \dots + x_n + \dots$ или $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Величина $r_n = s - s_n$ называется *n -м остатком* ряда; r_n есть сумма ряда, имеющего k -м членом x_{n+k} ; из определения следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

(5.2.1) (Критерий Коши) *Если ряд с общим членом x_n сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что при $n \geq n_0$ и $p \geq 0$ имеет место неравенство*

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}\| \leq \varepsilon.$$

Наоборот, если выполняется это условие и если E — полное пространство, то ряд с общим членом x_n сходится.

Это — лишь приложение критерия Коши для последовательности (s_n) (см. 3.14).

В качестве очевидного следствия из (5.2.1) получаем, что если ряд (x_n) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$. Но это необходимое условие ни в каком случае не является достаточным.

(5.2.2) *Если ряды (x_n) и (x'_n) сходятся и имеют суммы s и s' , то ряд $(x_n + x'_n)$ сходится к сумме $s + s'$, а ряд (λx_n) для любого скаляра λ — к сумме λs .*

Сразу следует из определения и из (5.1.5).

(5.2.3) Если (x_n) и (x'_n) — два таких ряда, что $x'_n = x_n$ при всех n , за исключением конечного их числа, то оба они сходятся или оба расходятся.

В самом деле, ряд $(x'_n - x_n)$ сходится, так как его члены при всех n , за исключением конечного их числа, равны 0.

(5.2.4) Пусть (k_n) — строго возрастающая последовательность целых чисел ≥ 0 и $k_0 = 0$. Если ряд (x_n) сходится к s и если

$$y_n = \sum_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} x_p, \text{ то ряд } (y_n) \text{ также сходится к } s.$$

Это сразу следует из равенства $\sum_{i=0}^n y_i = \sum_{j=0}^{k_{n+1}-1} x_j$ и из (3.13.10).

Задачи

1) Пусть (a_n) — произвольная последовательность в нормированном пространстве E . Покажите, что существует такая последовательность (x_n) точек пространства E , что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, и такая строго возрастающая последовательность (k_n) целых чисел, что $a_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{k_n}$ при каждом n .

2. Пусть σ — биективное отображение $\mathbb{N}$ на себя и пусть $\varphi(n)$ для каждого n означает наименьшее число таких промежутков $[a, b]_*$ в $\mathbb{N}$, что объединение этих промежутков есть $\sigma([0, n])$.

а) Предположим, что φ ограничено в $\mathbb{N}$. Пусть (x_n) сходящийся ряд в нормированном пространстве E . Покажите, что ряд $(x_{\sigma(n)})$ сходится в E

$$\text{и что } \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

б) Предположим, что φ неограничено в $\mathbb{N}$. Постройте сходящийся ряд (x_n) действительных чисел, для которого ряд $(x_{\sigma(n)})$ не сходится в $\mathbb{R}$.

[Индукцией по k постройте строго возрастающую последовательность (m_k) целых чисел, обладающую следующими свойствами: 1° если n_k — наибольший элемент множества $\sigma([0, m_k])$, то $[0, n_k]$ содержится в $\sigma([0, m_{k+1}])$; 2° $\varphi(m_k) \geq k+1$. Затем при $n_k < n \leq n_{k+1}$ определите x_n так, чтобы $x_n = 0$ при всех n , за исключением $2k$ подходящим образом выбранных значений n , при которых x_n поочередно равно $1/k$ или $-1/k$.]

3. Пусть (x_n) — сходящийся ряд в нормированном пространстве E . Пусть σ — биективное отображение множества $\mathbb{N}$ на себя и пусть

$$r(n) = |\sigma(n) - n| \cdot \sup_{m \geq n} \|x_m\|.$$

Покажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = 0$, то ряд $(x_{\sigma(n)})$ сходится в E , и что

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

$$\left[\text{Оцените разность } \sum_{k=0}^n x_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^n x_k \text{ при больших } n. \right]$$

4. Пусть (x_{mn}) ($m \geq 0, n \geq 0$) — двойная последовательность точек нормированного пространства E . Допустим, что:

1°) ряд $x_{m0} + x_{m1} + \dots + x_{mn} + \dots$ при каждом $m \geq 0$ сходится в E ; пусть y_m — его сумма и $r_{mn} = x_{mn} + x_{m, n+1} + \dots$;

2°) ряд $r_{0n} + r_{1n} + \dots + r_{mn} + \dots$ при каждом $n \geq 0$ сходится в E ; пусть t_n — его сумма.

а) Покажите, что ряд $x_{0n} + x_{1n} + \dots + x_{mn} + \dots$ при каждом $n \geq 0$ сходится; пусть z_n — его сумма.

б) Для того чтобы имело место равенство $\sum_{m=0}^{\infty} y_m = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$.

5. а) Покажите, что ряд $\sum_{n \geq 1, n \neq m} \frac{1}{m^2 - n^2}$, где m — целое число > 0 , сходится и его сумма равна $-3/4m^2$.

[Разложите дробь $1/(m^2 - x^2)$.]

б) Пусть $u_{mn} = 1/(m^2 - n^2)$ при $m \neq n$ и $u_{nn} = 0$. Покажите, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn} \right) \neq 0.$$

6. Если f — функция, определенная в $N \times N$ с значениями в метрическом пространстве, то обозначим через $\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} f(m, n)$ предел функции f

(если он существует) в точке $(+\infty, +\infty)$ пространства $\bar{R} \times \bar{R}$ по подпространству $N \times N$ (3.13). Пусть (x_{mn}) — двойная последовательность действительных чисел и $s_{mn} = \sum_{h \leq m, k \leq n} x_{hk}$.

а) Если предел $\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} s_{mn}$ существует, то $\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} x_{mn} = 0$. Приведите пример, в котором $x_{nm} = x_{mn}$, $x_{m, 2n} = -x_{m, 2n+1} = -x_{m+1, 2n}$ при $m \geq 2n+1$, $x_{2n, 2n} = 0$, предел $\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} s_{mn} = 0$ и ни один из рядов $x_{m0} + x_{m1} + \dots + x_{mn} + \dots$, $x_{0n} + x_{1n} + \dots + x_{mn} + \dots$ не сходится.

б) Приведите пример, в котором $x_{mn} = 0$ при всех m и n , кроме $m = n+1$, $m = n$ и $n = m+1$ (так что все ряды $\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn}$ и $\sum_{m=0}^{\infty} x_{mn}$ сходятся), $\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} x_{mn} = 0$ при всех m и n , но предел $\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} s_{mn}$ не существует.

3. Абсолютно сходящиеся ряды

(5.3.1) Для того чтобы ряд (x_n) положительных чисел сходился, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой возрастающей последовательности (k_n) целых чисел ≥ 0 последо-

вательность (s_{k_n}) частичных сумм была ограничена сверху;

в этом случае сумма $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ равна $\sup s_{k_n}$.

Предположение о том, что $x_n \geq 0$, эквивалентно условию $s_{n-1} \leq s_n$, и потому результат сразу следует из (4.2.1).

Ряд (x_n) в банаховом пространстве E называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд с общим членом $\|x_n\|$.

(5.3.2) В банаховом пространстве E абсолютно сходящийся

ряд (x_n) сходится и $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$.

По предположению для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что при $n \geq n_0$ и при любом $p \geq 0$ имеем $\|x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+p}\| \leq \varepsilon$; поэтому

$$\|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}\| \leq \varepsilon.$$

Отсюда в силу (5.2.1) следует сходимость ряда (x_n) . Кроме того, $\|x_0 + \dots + x_n\| \leq \|x_0\| + \dots + \|x_n\|$ при любом n . Тогда нужное неравенство следует из принципа продолжения неравенств (3.15.4).

(5.3.3) Если (x_n) — абсолютно сходящийся ряд и σ — биективное отображение множества $\mathbb{N}$ на себя, то (y_n) , где $y_n = x_{\sigma(n)}$, есть абсолютно сходящийся ряд и

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

(коммутативность абсолютно сходящихся рядов).

Пусть $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$, $s'_n = \sum_{k=0}^n y_k$. Пусть для каждого n число m — наибольшее в множестве $\sigma([0, n])$. Тогда, по определению, $\sum_{k=0}^n \|y_k\| \leq \sum_{i=0}^m \|x_i\|$ и из (5.3.1) следует, что ряд (y_n) абсолютно сходится. Пусть, далее, для произвольного $\varepsilon > 0$ номер n_0 выбран так, что $\|x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+p}\| \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0$ и $p \geq 0$. Если тогда m_0 — наибольшее число в $\sigma^{-1}([0, n_0])$, то при $n \geq m_0$, $p \geq 0$ имеем $\|y_{n+1}\| + \dots + \|y_{n+p}\| \leq \varepsilon$. Разность $s'_{m_0} - s_{n_0}$ является суммой членов x_j с номерами $j > n_0$, поэтому $\|s'_{m_0} - s_{n_0}\| \leq \varepsilon$. Следовательно, при $n \geq n_0$ и $n \geq m_0$ выполняется неравенство $\|s'_n - s_n\| \leq 3\varepsilon$, а это доказывает, что $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

Пусть A — произвольное счетное множество. Мы будем говорить, что семейство $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ элементов банахова пространства E абсолютно

суммируемо, если для некоторого биективного отображения φ множества N на A ряд $(x_{\varphi(n)})$ абсолютно сходится. Из (5.3.3) следует, что это свойство не зависит от выбора биективного отображения φ и что можно определить сумму семейства $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ как $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}$; будем обозначать ее также символом $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$. Так как любое счетное множество $S \subset E$ можно рассматривать как семейство (с S в качестве множества индексов), то мы можем также говорить об *абсолютно суммируемом (счетном) множестве* в пространстве E и об его *сумме*.

(5.3.4) Для того чтобы счетное семейство $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ элементов банахова пространства E было абсолютно суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы конечные суммы $\sum_{\alpha \in J} \|x_\alpha\|$ ($J \subset A$ и конечно) были ограничены. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное подмножество $H \subset A$, что каково бы ни было конечное подмножество $K \subset A$, для которого $H \cap K = \emptyset$, имеет место неравенство $\sum_{\alpha \in K} \|x_\alpha\| \leq \varepsilon$, а для любого конечного подмножества $L \supset H$ множества A — неравенство $\left\| \sum_{\alpha \in A} x_\alpha - \sum_{\alpha \in L} x_\alpha \right\| \leq 2\varepsilon$.

Первые два утверждения сразу следуют из определения и из (5.3.1). Далее, для любого конечного подмножества $L \supset H$ множества A мы можем написать $L = H \cup K$, где $H \cap K = \emptyset$, поэтому $\left\| \sum_{\alpha \in L} x_\alpha - \sum_{\alpha \in H} x_\alpha \right\| \leq \varepsilon$. Из определения суммы $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ следует (после того, как A упорядочено в соответствии с произвольным биективным отображением множества N на A), что $\left\| \sum_{\alpha \in A} x_\alpha - \sum_{\alpha \in H} x_\alpha \right\| \leq \varepsilon$, и, следовательно, $\left\| \sum_{\alpha \in A} x_\alpha - \sum_{\alpha \in L} x_\alpha \right\| \leq 2\varepsilon$.

(5.3.5) Пусть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ — абсолютно суммируемое семейство элементов банахова пространства E . Тогда для любого множества $B \subset A$ семейство $(x_\alpha)_{\alpha \in B}$ абсолютно суммируемо и $\sum_{\alpha \in B} \|x_\alpha\| \leq \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|$.

Если B конечно, то результат немедленно следует из определения. Если B бесконечно, то $\sum_{\alpha \in J} \|x_\alpha\| \leq \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|$ для каждого конечного подмножества $J \subset B$, и результат следует из (5.3.4).

(5.3.6) Пусть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ — абсолютно суммируемое семейство элементов банахова пространства E . Пусть (B_n) — такая бесконечная последовательность непустых подмножеств A , что $A = \bigcup_n B_n$ и $B_p \cap B_q = \emptyset$ при $p \neq q$. Пусть, далее, $z_n = \sum_{\alpha \in B_n} x_\alpha$. Тогда ряд (z_n) абсолютно сходится и

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha$$

(ассоциативность абсолютно сходящихся рядов).

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть n — любое целое число ≥ 0 . Тогда в силу (5.3.2) для каждого $k \leq n$ существует конечное подмножество $J_k \subset B_k$, такое, что $\|z_k\| \leq \sum_{\alpha \in J_k} \|x_\alpha\| + \varepsilon/(n+1)$. Если

мы положим $J = \bigcup_{k=0}^n J_k$, то будем, таким образом, иметь $\sum_{k=0}^n \|z_k\| \leq \sum_{\alpha \in J} \|x_\alpha\| + \varepsilon \leq \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\| + \varepsilon$, и из (5.3.1) тогда следует, что ряд (z_n)

абсолютно сходится. Пусть, далее, H — такое конечное подмножество A , что для любого конечного подмножества $K \subset A$, для которого $H \cap K = \emptyset$, выполняется неравенство $\sum_{\alpha \in K} \|x_\alpha\| \leq \varepsilon$, и поэтому

для любого конечного подмножества $L \subset A$, содержащего H , неравенство $\left\| \sum_{\alpha \in A} x_\alpha - \sum_{\alpha \in L} x_\alpha \right\| \leq 2\varepsilon$ [см. (5.3.4)]. Пусть n_0 — наибольшее

целое число, для которого $H \cap B_{n_0} \neq \emptyset$, и пусть n — произвольное целое число $\geq n_0$. Пусть J_k для каждого $k \leq n$ — конечное подмножество B_k , содержащее $H \cap B_k$ и такое, что для любого конечного подмножества $L_k \subset B_k$, содержащего J_k , выполняется неравенство

$\left\| z_k - \sum_{\alpha \in L_k} x_\alpha \right\| \leq \varepsilon/(n+1)$ (5.3.4). Положим $L = \bigcup_{k=0}^n L_k$. Тогда

мы имеем $\left\| \sum_{k=0}^n z_k - \sum_{\alpha \in L} x_\alpha \right\| \leq \varepsilon$ и, так как $L \supset H$, из определения H

следует $\left\| \sum_{k=0}^n z_k - \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \right\| \leq 3\varepsilon$, что и завершает доказательство.

Существует аналогичный (и более простой) результат, относящийся к случаю, когда A разлагается на конечное число подмножеств B_k ($1 \leq k \leq n$). В этом случае справедливо и обратное к (5.3.6) утверждение, а именно: если каждое из семейств $(x_\alpha)_{\alpha \in B_k}$ абсолютно суммируемо, то абсолютно суммируемо и семейство $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Доказательство следует из критерия (5.3.4) индукцией по n .

Задачи

1. Пусть (d_n) такая последовательность действительных чисел $d_n \geq 0$, что ряд (d_n) расходится (т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n d_k = +\infty$). Что можно сказать о сходимости следующих рядов:

$$\frac{d_n}{1+d_n}; \quad \frac{d_n}{1+nd_n}; \quad \frac{d_n}{1+n^2d_n}; \quad \frac{d_n}{1+d_n^2}?$$

2. Пусть (u_n) — сходящийся (но не абсолютно сходящийся) ряд действительных чисел и пусть $s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Покажите, что для каждого числа $s' \geq s$ существует такое биективное отображение σ множества $\mathbb{N}$ на себя, что $\sigma(n) = n$ для всех n , для которых $u_n \geq 0$, и что $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = s'$.

[По индукции покажите следующее: для каждого n существует такое биективное отображение σ_n множества $\mathbb{N}$ на себя, что $\sigma_n(k) = k$ для всех k , для которых $u_k \geq 0$, и, если обозначить $u_k^{(n)} = u_{\sigma_n(k)}$, существует индекс p_n , обладающий тем свойством, что при $k \geq p_n$

$$\left| s' - \sum_{i=0}^k u_i^{(n)} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Биективное отображение σ_{n+1} , кроме того, таково, что $\sigma_{n+1}(k) = \sigma_n(k)$ для всех k , для которых $\sigma_n(k) < p_n$, и всех k , для которых $u_k \leq -1/n$].

3. Покажите, что для каждого конечного семейства $(x_i)_{i \in I}$ точек пространства $\mathbb{R}^n$ (с нормой $\|x\| = \sup |\xi_k|$, где $x = (\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$) имеет место неравенство

$$\sum_{i \in I} \|x_i\| \leq 2n \cdot \sup_{J \subset I} \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|.$$

[Сначала рассмотрите случай $n = 1$.]

4. Ряд (x_n) в нормированном пространстве E называется *коммутативно сходящимся*, если для каждого биективного отображения σ множества $\mathbb{N}$ на себя ряд $(x_{\sigma(n)})$ сходится.

а) Покажите, что, для того чтобы сходящийся ряд (x_n) был коммутативно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое конечное подмножество J множества $\mathbb{N}$, что для любого подмножества $H \subset \mathbb{N}$, для которого $J \cap H = \emptyset$, выполнялось бы неравенство

$\left\| \sum_{n \in H} x_n \right\| \leq \varepsilon$. Если это условие выполняется, то сумма $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ не зависит от σ .

[Доказательство последнего утверждения и достаточности условия проводится так же, как в (5.3.3). Чтобы доказать, что условие необходимо, допустите противное. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$ и бесконечное число

попарно не пересекающихся подмножеств $H_k \subset N$ ($k = 1, 2, \dots$), для которых $\left\| \sum_{n \in H_k} x_n \right\| \geq \alpha$ при каждом k ; пользуясь этим, определите такое ε , что ряд (x_n) расходится.]

б) Допустим, что ряд (x_n) обладает тем свойством, что для любой строго возрастающей последовательности (n_k) целых чисел $n_k \geq 0$ ряд (x_{n_k}) сходится. Покажите, что ряд (x_n) является коммутативно сходящимся. В предположении, что E — полное пространство, докажите обратное.

[Примените а)].

с) Пусть $E = \mathbb{R}^n$. Покажите, что в E любой коммутативно сходящийся ряд абсолютно сходится.

[Воспользуйтесь задачей 3 и критерием из а).]

д) Распространите ассоциативное свойство (5.3.6) на коммутативно сходящиеся ряды.

5. Пусть E — действительное векторное пространство, состоящее из всех бесконечных последовательностей $x = (\xi_n)_{n \geq 0}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$. Для любой точки $x \in E$ положим $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$.

а) Покажите, что $\|x\|$ есть норма в E и что E с этой нормой является банаховым пространством (пространство (c_0) Банаха).

б) Пусть e_m — последовательность $(\delta_{mn})_{n \geq 0}$, где $\delta_{mn} = 0$, если $m \neq n$, и $\delta_{mm} = 1$. Покажите, что для каждой точки $x = (\xi_n) \in E$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n$ коммутативно сходится в E и что его сумма равна x . Приведите пример, когда этот ряд сходится не абсолютно.

4. Подпространства и конечные произведения нормированных пространств

Пусть E — нормированное пространство и F — *векторное подпространство* пространства E (т. е. подмножество, обладающее тем свойством, что для любой пары α и β скаляров из $x \in F$ и $y \in F$ следует $\alpha x + \beta y \in F$). Сужение на F нормы пространства E , очевидно, является нормой в F , определяющей в F расстояние и топологию, индуцированные расстоянием и топологией пространства E . Когда мы будем говорить о „подпространстве“ пространства E , мы будем, если не оговорено противное, подразумевать векторное его подпространство с этой индуцированной нормой.

Если E — банахово пространство, то любое замкнутое подпространство $F \subset E$ в силу (3.14.5) является банаховым пространством. Наоборот, если подпространство F нормированного пространства E является банаховым пространством, то в силу (3.14.4) F замкнуто в E .

(5.4.1) Если F — векторное подпространство нормированного пространства E , то его замыкание $\bar{F}$ в E есть векторное подпространство.

По предположению отображение $(x, y) \rightarrow x + y$ произведения $E \times E$ в E переводит $F \times F$ в F , и поэтому в силу (3.11.4) отображает $\bar{F} \times \bar{F}$ в $\bar{F}$. Так как ввиду (3.20.3) $\bar{F} \times \bar{F} = \bar{F} \times \bar{F}$, то из $x \in \bar{F}$, $y \in \bar{F}$ следует $x + y \in \bar{F}$. Точно так же, пользуясь непрерывностью отображения $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$, показываем, что для любого скаляра λ из $x \in \bar{F}$ следует $\lambda x \in \bar{F}$.

Мы будем говорить, что множество A в нормированном пространстве E *тотально*, если (конечные) линейные комбинации векторов из A образуют подпространство, *плотное* в E . Мы будем говорить, что семейство (x_α) *тотально*, если тотально множество его элементов.

Пусть E_1 и E_2 — два нормированных пространства; рассмотрим векторное пространство — произведение $E = E_1 \times E_2$ [где $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ и $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$]. Немедленно проверяется, что отображение $(x_1, x_2) \rightarrow \sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$ является нормой в E , определяющей в E расстояние, соответствующее расстояниям в E_1 и E_2 , и, следовательно, топологию пространства-произведения $E_1 \times E_2$, как оно определено в 3.20. „Естественные“ вложения $x_1 \rightarrow (x_1, 0)$ и $x_2 \rightarrow (0, x_2)$ представляют собой изометрии пространств E_1 и E_2 соответственно на замкнутые подпространства $E'_1 = E_1 \times \{0\}$ и $E'_2 = \{0\} \times E_2$ пространства E (3.20.11), и E есть прямая сумма своих подпространств E'_1 и E'_2 , часто отождествляемых соответственно с E_1 и E_2 : $E = E_1 + E_2$.

Наоборот, допустим, что нормированное пространство E есть *прямая сумма* двух векторных подпространств F_1, F_2 . Каждый элемент $x \in E$ может быть единственным образом записан в виде $x = p_1(x) + p_2(x)$, где $p_1(x) \in F_1$, $p_2(x) \in F_2$ и p_1, p_2 являются линейными отображениями пространства E соответственно в F_1 и F_2 („проекции“ пространства E на F_1 и F_2). „Естественное“ отображение $(y_1, y_2) \rightarrow y_1 + y_2$ пространства-произведения $F_1 \times F_2$ на E линейно, биективно и в силу (5.1.5) непрерывно, но не обязательно взаимно непрерывно (см. задачу 2 § 6.5).

(5.4.2) Для того чтобы отображение $(y_1, y_2) \rightarrow y_1 + y_2$ было гомеоморфизмом пространства $F_1 \times F_2$ на E , необходимо и достаточно, чтобы одно из линейных отображений p_1, p_2 было непрерывно.

Заметим, что так как $x = p_1(x) + p_2(x)$, то, если непрерывно одно из отображений p_1 и p_2 , непрерывным будет и другое. Отображение $x \rightarrow (p_1(x), p_2(x))$ пространства E на $F_1 \times F_2$ является

отображением, обратным отображению $(y_1, y_2) \rightarrow y_1 + y_2$; поэтому заключение следует из (3.20.4).

В случае когда выполняется условие утверждения (5.4.2), E называется *топологической прямой суммой* пространств F_1 и F_2 . Подпространство $F \subseteq E$, для которого существует такое другое подпространство G , что E есть топологическая прямая сумма F и G , называется *топологическим прямым слагаемым* пространства E , а любое подпространство G , обладающее указанным свойством, называется *топологическим дополнением* подпространства F . Любое топологическое прямое слагаемое обязательно замкнуто [в силу (3.20.11)], но могут существовать замкнутые подпространства, не являющиеся топологическими прямыми слагаемыми (хотя любое подпространство всегда имеет в E алгебраическое дополнение). Примеры таких пространств см. в книге Бурбаки [6].

Определения и результаты относительно произведения двух нормированных пространств немедленно распространяются (индукцией по n) на случай произведения конечного числа n нормированных пространств.

5. Критерий непрерывности полилинейного отображения

(5.5.1) Пусть $E_1, \dots, E_n$ — n нормированных пространств, F — нормированное пространство, u — полилинейное отображение $E_1 \times \dots \times E_n$ в F . Для того чтобы u было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $a > 0$, что для любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$

$$\|u(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leq a \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|.$$

Проведем доказательство для случая $n = 2$.

Достаточность. Чтобы доказать, что u непрерывно в произвольной точке (c_1, c_2) , напомним:

$$u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2) = u(x_1 - c_1, x_2) + u(c_1, x_2 - c_2).$$

Отсюда следует, что

$$\|u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2)\| \leq a (\|x_1 - c_1\| \cdot \|x_2\| + \|c_1\| \cdot \|x_2 - c_2\|).$$

Пусть δ — любое число, удовлетворяющее условиям $0 < \delta < 1$, $\|x_1 - c_1\| \leq \delta$ и $\|x_2 - c_2\| \leq \delta$ и, значит, $\|x_2\| \leq \|c_2\| + 1$. Тогда

$$\|u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2)\| \leq a (\|c_1\| + \|c_2\| + 1) \delta,$$

где правая часть произвольно мала вместе с δ .

Необходимость. Если u непрерывно в точке $(0, 0)$, то в $E_1 \times E_2$ существует такой шар $B: \sup(\|x_1\|, \|x_2\|) \leq r$, что из $(x_1, x_2) \in B$ следует $\|u(x_1, x_2)\| \leq 1$. Пусть теперь (x_1, x_2) — произвольная точка. Допустим сначала, что $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$. Тогда, полагая $z_1 = rx_1/\|x_1\|$, $z_2 = rx_2/\|x_2\|$, получим $\|z_1\| = \|z_2\| = r$ и,

следовательно, $\|u(z_1, z_2)\| \leq 1$. Но $u(z_1, z_2) = r^2 u(x_1, x_2) / \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ и, значит, $\|u(x_1, x_2)\| \leq a \|x_1\| \cdot \|x_2\|$, где $a = 1/r^2$. Если же $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$, то $u(x_1, x_2) = 0$ и поэтому предыдущее неравенство остается справедливым.

(5.5.2) Пусть u — непрерывное линейное отображение банахова пространства E в банахово пространство F . Если (x_n) — сходящийся (соответственно абсолютно сходящийся) ряд в E , то $(u(x_n))$ — сходящийся (соответственно абсолютно сходящийся) ряд в F и $\sum_n u(x_n) = u\left(\sum_n x_n\right)$.

Сходимость ряда $(u(x_n))$ и равенство $\sum_n u(x_n) = u\left(\sum_n x_n\right)$ сразу следуют из определения непрерывного линейного отображения [см. (3.13.14)]. Из (5.5.1) следует, что существует такая константа $a > 0$, что $\|u(x_n)\| \leq a \|x_n\|$, и поэтому в силу (5.3.1) ряд $(u(x_n))$ абсолютно сходится, если абсолютно сходится ряд (x_n) .

(5.5.3) Пусть E , F и G — три банаховых пространства и u — непрерывное билинейное отображение произведения $E \times F$ в G . Если (x_n) — абсолютно сходящийся ряд в E и (y_n) — абсолютно сходящийся ряд в F , то семейство $(u(x_m, y_n))$ абсолютно суммируемо и

$$\sum_{m,n} u(x_m, y_n) = u\left(\sum_n x_n, \sum_n y_n\right).$$

На основании критерия (5.3.4) нам нужно доказать, что для любого p суммы $\sum_{m \leq p, n \leq p} \|u(x_m, y_n)\|$ ограничены. Но в силу (5.5.1) существует такое $a > 0$, что $\|u(x_m, y_n)\| \leq a \|x_m\| \cdot \|y_n\|$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq p, n \leq p} \|u(x_m, y_n)\| &\leq a \sum_{m \leq p, n \leq p} \|x_m\| \cdot \|y_n\| = \\ &= a \left(\sum_{n=0}^p \|x_n\| \right) \left(\sum_{n=0}^p \|y_n\| \right), \end{aligned}$$

и из предположений относительно (x_n) и (y_n) следует, что правая часть ограничена. Кроме того, из (5.3.6) и (5.5.2) следует, что

$$\sum_{m,n} u(x_m, y_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u(x_m, y_n) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} u(x_m, s') = u(s, s'),$$

где $s = \sum_n x_n$, $s' = \sum_n y_n$.

(5.5.4) Пусть E — нормированное пространство, F — банахово пространство, G — подпространство, плотное в E , и f — непрерывное линейное отображение подпространства G в F . Тогда существует единственное непрерывное линейное отображение $\bar{f}$ пространства E в F , являющееся продолжением f .

Так как $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq a \cdot \|x - y\|$, из (5.5.1) следует, что f равномерно непрерывно в G . Поэтому в силу (3.15.6) существует единственное непрерывное продолжение $\bar{f}$ отображения f на E . Из (5.1.5) и принципа продолжения тождеств (3.15.2) следует, что $\bar{f}$ линейно.

Задачи

1. Пусть u — отображение нормированного пространства E в нормированное пространство F , обладающее тем свойством, что $u(x+y) = u(x) + u(y)$ для любой пары точек x, y пространства E и что u ограничено в шаре $B(0; 1) \subset E$. Покажите, что u линейно и непрерывно.

[Рассмотрите отображение $x \rightarrow \|u(x)\|$ пространства E в $\mathbb{R}$ и убедитесь в том, что $\|u(x+y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\|$ и $u(rx) = ru(x)$ для рациональных r ; для доказательства того, что $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ при любом действительном λ , воспользуйтесь тем же рассуждением, что и в задаче 1 § 4.2.]

2. Пусть E, F — два нормированных пространства и u — линейное отображение E в F . Покажите, что если для каждой последовательности (x_n) в пространстве E , для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, последовательность $(u(x_n))$ в F ограничена, то u непрерывно.

[Проведите доказательство от противного.]

3. а) Пусть a и b — две точки нормированного пространства E . Пусть B_1 — множество всех точек $x \in E$, для которых $\|x - a\| = \|x - b\| = \|a - b\|/2$, а $B_n, n > 1$, — множество всех точек $x \in B_{n-1}$, для которых $\|x - y\| \leq \delta(B_{n-1})/2$ для всех $y \in B_{n-1}$ (где $\delta(A)$ — диаметр множества A). Покажите, что $\delta(B_n) \leq \delta(B_{n-1})/2$ и что пересечение всех B_n есть точка $(a+b)/2$.

б) Выведите из а), что если f — изометрия действительного нормированного пространства E на действительное нормированное пространство F , то $f(x) = u(x) + c$, где u — линейная изометрия и $c \in F$.

4. Назовем *прямоугольником* в $N \times N$ произведение двух промежутков множества N . Для любого конечного множества $H \subset N \times N$, пусть $\psi(H)$ — наименьшее число прямоугольников, объединением которых является H . Пусть (H_n) — возрастающая последовательность конечных подмножеств произведения $N \times N$, объединение которых равно $N \times N$, обладающая тем свойством, что последовательность $(\psi(H_n))$ ограничена. Пусть E, F, G — три нормированных пространства, (x_n) (соответственно (y_n)) сходящийся ряд в E (соответственно в F) и f — непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G . Покажите, что

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(h, k) \in H_n} f(x_h, y_k) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

5. Пусть (H_n) — возрастающая последовательность конечных подмножеств произведения $N \times N$, объединение которых равно $N \times N$. Для каждого $j \in N$ и каждого $n \in N$ пусть $\varphi(j, n)$ — наименьшее число промежутков множества N , объединение которых есть множество $H_n^{-1}(j)$ всех целых чисел i ,

для которых $(i, j) \in H_n$. Предположим, что $\varphi(j, n)$ ограничено в $N \times N$. Пусть (x_n) — сходящийся ряд в нормированном пространстве E , (y_n) — абсолютно сходящийся ряд в нормированном пространстве F и u — непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в нормированное пространство G . Покажите, что формула (*) из задачи 4 сохраняет силу.

[Воспользуйтесь (5.5.1) и убедитесь в том, что суммы $\sum_{(i, j) \in H_n} x_i$ при всех j и n ограничены в E .]

6. Эквивалентные нормы

Пусть E — векторное пространство (над полем действительных или комплексных чисел), $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ — две нормы в E . Мы будем говорить, что норма $\|x\|_1$ *сильнее* нормы $\|x\|_2$, если топология, определяемая нормой $\|x\|_1$, сильнее топологии, определяемой нормой $\|x\|_2$ [см. 3.12]. Если мы обозначим через E_1 (соответственно E_2) нормированное пространство, определяемое нормой $\|x\|_1$ (соответственно $\|x\|_2$), то это означает, что тождественное отображение $x \rightarrow x$ пространства E_1 на E_2 непрерывно. Поэтому в силу (5.5.1) это условие эквивалентно существованию такого числа $a > 0$, что $\|x\|_2 \leq a\|x\|_1$.

Будем говорить, что две нормы $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ *эквивалентны*, если они определяют в E одну и ту же топологию. Предыдущее неравенство сразу даёт

(5.6.1) *Для того чтобы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ в векторном пространстве E были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две константы $a > 0$ и $b > 0$, что*

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

для любой точки $x \in E$.

Соответствующие расстояния будут в этом случае равномерно эквивалентны (3.14).

Например, нормы $\sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$, $\|x_1\| + \|x_2\|$, $\sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}$ в произведении $E_1 \times E_2$ двух нормированных пространств эквивалентны. Норма $\|f\|_1$ в пространстве $E = \mathcal{C}_R(I)$, определенная в (5.1.4), не эквивалентна норме $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$ (см. задачу 1 § 5.1).

7. Пространства непрерывных полилинейных отображений

Пусть E и F — два нормированных пространства. Как следует из (5.1.5), (3.20.4) и (3.11.5), множество $\mathcal{L}(E, F)$ всех непрерывных линейных отображений пространства E в F является векторным пространством.

Для каждого отображения $u \in \mathcal{L}(E; F)$ пусть $\|u\|$ — нижняя грань всех чисел $a > 0$, для которых при всех $x \in E$ выполняется неравенство $\|u(x)\| \leq a\|x\|$ [см. (5.5.1)]. Мы можем также написать

$$(5.7.1) \quad \|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

В самом деле, по определению, для каждого $a > \|u\|$ и каждой точки x с нормой $\|x\| \leq 1$ имеем $\|u(x)\| \leq a$ и, значит, $\sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \leq a$; это доказывает равенство (5.7.1) при $\|u\| = 0$.

Если $\|u\| > 0$, то для любого b , удовлетворяющего неравенствам $0 < b < \|u\|$, существует такая точка $x \in E$, что $\|u(x)\| > b\|x\|$. Следовательно, $x \neq 0$ и поэтому если мы положим $z = x/\|x\|$, то все еще будем иметь $\|u(z)\| > b\|z\| = b$, и так как $\|z\| = 1$, то отсюда следует, что $b \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$, т. е. $\|u\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$, и формула (5.7.1) доказана.

Точно такое же рассуждение показывает, что

$$(5.7.2) \quad \|u\| = \sup_{\|z\|=1} \|u(z)\|.$$

Покажем теперь, что $\|u\|$ есть норма в векторном пространстве $\mathcal{L}(E; F)$. В самом деле, если $u = 0$, то в силу (5.7.1) $\|u\| = 0$. Наоборот, если $\|u\| = 0$, то $u(x) = 0$ при $\|x\| \leq 1$, поэтому для любой точки $x \neq 0$ пространства E имеем $u(x) = \|x\|u(x/\|x\|) = 0$. Из (5.7.1) также следует, что $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$. Наконец, если $w = u + v$, то $\|w(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|$, и, следовательно, в силу (5.7.1) $\|w\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(5.7.3) Если F — полное пространство, то и $\mathcal{L}(E; F)$ — полное пространство.

В самом деле, пусть (u_n) — последовательность Коши в $\mathcal{L}(E; F)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$. Следовательно, в силу (5.7.1) для любого x с нормой $\|x\| \leq 1$ при $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$ мы имеем $\|u_m(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon$, а это показывает, что $(u_n(x))$ есть последовательность Коши в F . Поэтому она сходится к некоторому элементу $v(x) \in F$. Это верно и для любого $x \in E$, так как мы можем записать $x = \lambda z$, где $\|z\| \leq 1$, и поэтому $u_n(x) = \lambda u_n(z)$ сходится к пределу $v(x) = \lambda v(z)$. Из равенства $u_n(x + y) = u_n(x) + u_n(y)$ и из (5.1.5) следует, что $v(x + y) = v(x) + v(y)$, и точно так же покажем, что $v(\lambda x) = \lambda v(x)$; иными словами, v линейно. Далее, из неравенства $\|u_m(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon$, выполняющегося при $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$, заключаем, что $\|v(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon$ при $\|x\| \leq 1$. Следовательно, $\|v(x)\| \leq \|u_n\| + \varepsilon$, чем [в силу (5.5.1)] доказано, что v непрерывно и, таким образом, принадлежит $\mathcal{L}(E; F)$.

Наконец, $\|v - u_n\| \leq \epsilon$ при $n \geq n_0$ [в силу (5.7.1)] и, значит, последовательность (u_n) сходится к v .

Из определения следует, что для каждой точки $x \in E$ и каждого $u \in \mathcal{L}(E; F)$

$$(5.7.4) \quad \|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|,$$

откуда на основании (5.5.1) следует, что билинейное отображение $(x, u) \rightarrow u(x)$ произведения $E \times \mathcal{L}(E; F)$ в F непрерывно.

Определение нормы в $\mathcal{L}(E; F)$ зависит от норм в E и в F . Но легко видеть, что если мы заменим нормы в E и в F эквивалентными нормами, то новая норма в $\mathcal{L}(E; F)$ будет эквивалентна старой.

(5.7.5) Пусть u — непрерывное линейное отображение нормированного пространства E в нормированное пространство F и v — непрерывное линейное отображение пространства F в нормированное пространство G . Тогда $\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$.

В самом деле, если $\|x\| \leq 1$, то в силу (5.7.4) $\|v(u(x))\| \leq \|v\| \cdot \|u(x)\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$, и утверждение следует из (5.7.1).

(5.7.6) Если F — действительное (соответственно комплексное) нормированное пространство, то отображение, ставящее каждому $a \in F$ в соответствие элемент $\theta_a: \xi \rightarrow \xi a$ пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ [соответственно $\mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$], есть линейная изометрия пространства F на $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ [соответственно на $\mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$].

Отображение $a \rightarrow \theta_a$, очевидно, линейно. Оно сюръективно, так как каждое линейное отображение f пространства $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$) в F имеет вид $f(\xi) = f(\xi \cdot 1) = \xi f(1) = \xi a$, где $a = f(1)$. Наконец, по аксиоме (III) § 5.1 $\|\theta_a\| = \sup_{|\xi| \leq 1} \|\xi a\| = \|a\|$.

Пусть теперь $E_1, \dots, E_n, F$ — $n+1$ нормированное пространство. Определим $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ как векторное пространство всех непрерывных полилинейных отображений произведения $E_1 \times \dots \times E_n$ в F . Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что при $u \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ нижняя грань $\|u\|$ всех чисел $a > 0$, для которых

$$\|u(x_1, \dots, x_n)\| \leq a \|x_1\| \dots \|x_n\|,$$

может быть определена равенством

$$(5.7.7) \quad \|u\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_n\| \leq 1} \|u(x_1, \dots, x_n)\|.$$

Мы видим также, что $\|u\|$ есть норма в $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Однако в действительности это векторное пространство может быть сведено к пространствам $\mathcal{L}(X; Y)$.

(5.7.8) Для каждого $u \in \mathcal{L}(E, F; G)$ и каждого $x \in E$ пусть u_x — линейное отображение $y \rightarrow u(x, y)$. Тогда $\tilde{u}: x \rightarrow u_x$ есть линейное отображение пространства E в $\mathcal{L}(F; G)$, а отображение $u \rightarrow \tilde{u}$ есть линейная изометрия пространства $\mathcal{L}(E, F; G)$ на пространство $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$.

Имеем $\|u_x(y)\| = \|u(x, y)\| \leq \|u\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$, поэтому в силу (5.5.1) отображение u_x непрерывно. Далее, $\|u_x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|u(x, y)\|$, следовательно, учитывая (2.3.7),

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|u_x\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \|u(x, y)\| = \|u\|.$$

Поэтому отображение $x \rightarrow u_x$ (очевидно, линейное) непрерывно, а отображение $u \rightarrow \tilde{u}$ есть изометрия пространства $\mathcal{L}(E, F; G)$ в пространство $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$. Наконец, отображение $u \rightarrow \tilde{u}$ сюръективно, так как если $v \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$, то отображение $u: (x, y) \rightarrow (v(x))(y)$, очевидно, билинейно и, поскольку $\|(v(x))(y)\| \leq \|v(x)\| \cdot \|y\| \leq \|v\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ в силу (5.7.4) непрерывно и $v(x) = u_x$, что завершает доказательство.

Индукцией по n убеждаемся, что пространство $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ может быть естественным образом (с сохранением нормы) отождествлено с пространством

$$\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; \dots, \mathcal{L}(E_n; F)) \dots).$$

Задачи

1. а) Пусть E — пространство (c_0) Банаха, определенное в задаче 5 § 5.3; мы сохраним обозначения этой задачи. Пусть u — непрерывное линейное отображение пространства E в $\mathbb{R}$ и $u(e_n) = \eta_n$. Покажите, что ряд $\sum \eta_n$ абсолютно сходится и что в банаховом пространстве $E' = \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ норма

$$\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|.$$

[Примените (5.5.1) к подходящим значениям $x \in E$.]

Наоборот, для любого абсолютно сходящегося ряда (η_n) действительных чисел существует одно и только одно непрерывное линейное отображение u пространства E в $\mathbb{R}$, для которого $u(e_n) = \eta_n$ при каждом n , и если $x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n \in E$, то $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \xi_n$ (пространство E' с определенной выше нормой есть пространство l^1 Банаха).

б) Как векторное пространство (без нормы) E' может рассматриваться как подпространство пространства E . Покажите, что норма в E' строго сильнее (в смысле 5.6), чем сужение на E' нормы пространства E .

с) Покажите, что пространство $E'' = \mathcal{L}(E'; \mathbb{R})$ непрерывных линейных отображений пространства E' в $\mathbb{R}$ можно отождествить с пространством всех

ограниченных последовательностей $x = (\zeta_n)$ действительных чисел с нормой $\|x\| = \sup_n |\zeta_n|$ (пространство l^∞ Банаха). Пространство E может рассматриваться как замкнутое подпространство пространства E'' .

[Примените тот же метод, что и в а).]

д) Пусть P — подмножество пространства E' , состоящее из всех абсолютно сходящихся рядов $u = (\eta_n)$ с членами $\eta_n \geq 0$. Любой элемент пространства E' может быть записан в виде $u - v$, где u и v принадлежат P . Покажите, что внутренность множества P тем не менее пуста.

2. а) Пусть E — пространство (c_0) Банаха и U — непрерывное линейное отображение пространства E в себя. Пусть в обозначениях задачи 1

$U(e_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$. Покажите, что: 1°) $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{mn} = 0$; 2°) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ сходится при каждом m ; 3°) верхняя грань $\sup_m \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ конечна.

[Тот же метод, что и в задаче 1, а).]

Докажите обратное и покажите, что банахово пространство $\mathcal{L}(E; E)$ можно отождествить с пространством двойных последовательностей $U = (\alpha_{mn})$, удовлетворяющих предыдущим условиям, с нормой $\|U\| = \sup_m \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$.

б) Пусть E' — пространство l^1 Банаха (задача 1). Покажите, что банахово пространство $\mathcal{L}(E'; E')$ можно отождествить с пространством двойных последовательностей $U = (\alpha_{mn})$, удовлетворяющих условиям: 1°) ряд $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ сходится при каждом n ; 2°) верхняя грань $\sup_n \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ конечна. В этом случае норма равна $\|U\| = \sup_n \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$.

3. Пусть E — нормированное пространство. Покажите, что не может существовать двух непрерывных линейных отображений u, v пространства E в себя, для которых $u \circ v - v \circ u = 1$ (тождественному отображению).

[Докажите, что из предположения о существовании такого отображения следовало бы, что $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)v^n$, т. е. $(n+1)\|v^n\| \leq 2\|u\| \cdot \|v\| \cdot \|v^n\|$, откуда $v^n = 0$, как только n достаточно велико, и, значит, $v = 0$.]

8. Замкнутые гиперплоскости и непрерывные линейные формы

Напомним, что *линейная форма* в действительном (соответственно комплексном) векторном пространстве E есть линейное отображение f пространства E в $\mathbb{R}$ (соответственно в $\mathbb{C}$). Ядро $H = f^{-1}(0)$ этого отображения есть тогда такое векторное подпро-

пространство, что для любого $a \notin H$ пространство E есть алгебраическая прямая сумма H и $\mathbb{R}a$ (соответственно $\mathbb{C}a$).

Подпространство, обладающее этим последним свойством, называется *гиперплоскостью*. Если H — некоторая гиперплоскость, $a \notin H$ и если для любого $x \in E$ мы напишем $x = f(x) \cdot a + y$, где $f(x)$ — скаляр и $y \in H$, то f есть линейная форма и $H = f^{-1}(0)$. Отношение $f(x) = 0$ называется *уравнением* гиперплоскости H . Если f_1 — другая линейная форма, для которой $H = f_1^{-1}(0)$, то $f_1 = \alpha f$ (α — скаляр). Напомним также, что гиперплоскость максимальна: любое векторное подпространство пространства E , содержащее гиперплоскость H , если либо H , либо само E .

(5.8.1) Пусть H — гиперплоскость с уравнением $f(x) = 0$ в действительном (соответственно комплексном) нормированном пространстве E . Для того чтобы гиперплоскость H была замкнута в E , необходимо и достаточно, чтобы форма f была непрерывна. В этом случае для любого $b \notin H$ пространство E есть топологическая прямая сумма (5.4) гиперплоскости H и одномерного подпространства $D = \mathbb{R}b$ (соответственно $D = \mathbb{C}b$).

Ясно, что если форма f непрерывна, то гиперплоскость $H = f^{-1}(0)$ замкнута [см. (3.15.1)]. Докажем обратное. Пусть элемент $a \notin H$ выбран так, что $f(a) = 1$. Так как гиперплоскость H замкнута, то [в силу (5.1.5)] и множество $a + H$ замкнуто, и, так как $0 \notin a + H$, найдется шар $V: \|x\| \leq r$, не пересекающий $a + H$. Таким образом, из $x \in V$ следует $f(x) \neq 1$. Докажем, что из $x \in V$ следует $|f(x)| \leq 1$. Допустим противное, и пусть $f(x) = \alpha$, где $|\alpha| > 1$. Тогда $\|x/\alpha\| = (1/|\alpha|)\|x\| < r$ и $f(x/\alpha) = 1$, что противоречит определению V . Из однородности и (5.5.1) следует, что форма f непрерывна. Если $b \notin H$, то для каждого $x \in E$ мы имеем $x = g(x)b + y$, где $y \in H$, и $g(x) = 0$ — другое уравнение гиперплоскости H . Поэтому форма g непрерывна и, значит, отображение $x \rightarrow g(x)b$ пространства E в $D = \mathbb{R}b$ (соответственно $\mathbb{C}b$) непрерывно, что в силу (5.4.2) и доказывает последнюю часть нашего утверждения.

(5.8.2) Гиперплоскость H в нормированном пространстве E или замкнута или всюду плотна.

В самом деле, $\bar{H}$ [в силу (5.4.1)] есть векторное подпространство, которое может только совпадать или с E , или с H .

Задачи

1. Пусть E — (неполное) подпространство пространства (c_0) Банаха, состоящее из последовательностей $x = (\xi_n)$ действительных чисел, имеющих лишь конечное число отличных от нуля элементов. Для любой последовательности (α_n) действительных чисел отображение $x \rightarrow u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \xi_n$ есть линейная форма в E , и таким способом получаются все линейные формы в E . Какие из них непрерывны?

[См. (5.5.4) и задачу 1 § 5.7.]

2. а) Пусть H — замкнутая гиперплоскость с уравнением $u(x) = 0$ в нормированном пространстве E , где u — непрерывная линейная форма. Покажите, что для любой точки $a \in E$ расстояние $d(a, H) = |u(a)| / \|u\|$.

б) Пусть H — замкнутая гиперплоскость с уравнением $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \xi_n = 0$ в пространстве (c_0) Банаха. Покажите, что если $a \notin H$, то не существует точки $b \in H$, для которой $d(a, H) = d(a, b)$.

3. Линейные многообразия коразмерности 1 (задача 5 § 5.1) в действительном векторном пространстве E также называются *гиперплоскостями*; они представляют собой множества, определяемые уравнением вида $u(x) = \alpha$, где u — линейная форма, а α — произвольное действительное число. В тексте § 5.8 рассматривались фактически те из этих гиперплоскостей, которые содержат 0; они называются также *однородными гиперплоскостями*. Любая гиперплоскость, определяемая уравнением $u(x) = \alpha$, называется *параллельной* однородной гиперплоскости, определяемой уравнением $u(x) = 0$. Если A — непустое множество в пространстве E , то *опорная гиперплоскость* множества A есть гиперплоскость H , определяемая таким уравнением $u(x) = \alpha$, что либо для всех точек $x \in A$ выполняется неравенство $u(x) - \alpha \geq 0$, либо же для всех точек $x \in A$ выполняется неравенство $u(x) - \alpha \leq 0$, и по крайней мере для одной точки $x_0 \in A$ имеет место равенство $u(x_0) = \alpha$.

а) Опорная гиперплоскость множества A в действительном нормированном пространстве E , содержащего хотя бы одну внутреннюю точку, замкнута [см. (5.8.2)].

б) Пусть A — компактное множество в действительном нормированном пространстве E . Покажите, что для любой однородной замкнутой гиперплоскости H_0 , определяемой уравнением $u(x) = 0$, существуют две опорные гиперплоскости множества A , которые определяются уравнениями вида $u(x) = \alpha$ и, вообще говоря, могут и совпадать. Расстояние между этими гиперплоскостями не превосходит диаметра множества A .

в) Рассмотрите в пространстве (c_0) Банаха непрерывную линейную форму $x \rightarrow u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \xi_n$. Покажите, что замкнутый шар $B'(0; 1)$ не имеет опорной гиперплоскости, определяемой уравнением вида $u(x) = \alpha$ [ср. с задачей 2, б)].

9. Конечномерные нормированные пространства

(5.9.1) Пусть E — n -мерное действительное (соответственно комплексное) нормированное векторное пространство. Если $(a_1, \dots, a_n)$ — базис пространства E , то отображение

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n$$

пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) на E взаимно непрерывно.

Докажем сначала это утверждение для $n=1$, а затем проведем индукцию по n . Из (5.1.5) мы знаем, что отображение $\xi \rightarrow \xi a_1$ непрерывно. Так как $a_1 \neq 0$ и $\|\xi a_1\| = \|a_1\| \cdot |\xi|$, то $|\xi| \leq (1/\|a_1\|) \cdot \|\xi a_1\|$, откуда на основании (5.5.1) следует непрерывность отображения $\xi a_1 \rightarrow \xi$.

Допустим, что теорема доказана для $n-1$, и пусть H — гиперплоскость в пространстве E , порождаемая элементами $a_1, \dots, a_{n-1}$. Из индуктивного предположения следует, что норма в H (индуцированная нормой в E) эквивалентна норме $\sup_{1 \leq i \leq n-1} |\xi_i|$, поэтому

H — полное пространство (и с той и с другой нормой) и, следовательно [в силу (3.14.4)], замкнуто в E . Из (5.8.1) следует, что отображение $(\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n) \rightarrow \xi_n$ непрерывно, и это вместе с индуктивным предположением завершает доказательство [в силу 3.20.4) и (5.4.2)].

(5.9.2) Пусть V — замкнутое подпространство и W — конечномерное подпространство нормированного пространства E . Тогда $V+W$ замкнуто в E . В частности, любое конечномерное подпространство замкнуто в E .

Мы можем провести индукцию по размерности подпространства W и, таким образом, свести доказательство к случаю, когда эта размерность равна 1. Пусть $W = Ra$ (соответственно $W = Ca$). Если $a \in V$, то $V+W=V$, и нам нечего доказывать. Если $a \notin V$, то любой элемент $x \in V+W$ мы можем записать в виде $x = f(x)a + y$, где $y \in V$, и так как V — замкнутая гиперплоскость в $V+W$, то в силу (5.8.1) f — непрерывная форма в $V+W$. Пусть (x_n) — последовательность точек подпространства $V+W$, сходящаяся к предельной точке b этого подпространства [см. (3.13.13)]; запишем $x_n = f(x_n)a + y_n$. В силу (5.5.1) последовательность $(f(x_n))$ является в $\mathbb{R}$ (соответственно в $\mathbb{C}$) последовательностью Коши и поэтому сходится к некоторому пределу λ . Тогда последовательность $y_n = x_n - f(x_n)a$ сходится к $b - \lambda a$. Но V замкнуто, предел последовательности (y_n) принадлежит V , и, значит, $b \in V+W$, ч. т. д. (см. задачу 2 § 6.5).

(5.9.3) Пусть V — замкнутое подпространство конечной размерности (т. е. подпространство, имеющее конечномерное алгебраическое дополнение) нормированного пространства E . Тогда любое алгебраическое дополнение подпространства V является и его топологическим дополнением.

Пусть W — алгебраическое дополнение подпространства V в E . Проведем индукцию по размерности n подпространства W ; для $n = 1$ утверждение уже доказано в (5.8.1). Мы можем написать $W = D + U$, где D одномерно и U — $(n - 1)$ -мерно (прямая сумма). В силу (5.9.2) $V + D$ замкнуто в E , поэтому по индуктивному предположению U есть топологическое дополнение подпространства $V + D$. Иными словами, E естественно гомеоморфно $(V + D) \times U$. В силу (5.8.1) $V + D$ естественно гомеоморфно $V \times D$, поэтому E естественно гомеоморфно $V \times D \times U$. Наконец, так как $D \times U$ естественно гомеоморфно W , то E естественно гомеоморфно $V \times W$, ч. т. д.

(5.9.4) (Теорема Ф. Рисса) Локально компактное нормированное пространство E конечномерно.

Заменяя, если потребуется, норму пространства E эквивалентной нормой, можем считать, что шар $B: \|x\| \leq 1$ компактен. Таким образом (3.16.1), существует такая конечная последовательность точек a_i ($1 \leq i \leq n$), что B содержится в объединении шаров с центром a_i и с радиусом $1/2$. Пусть V — конечномерное подпространство, порожденное точками a_i . Докажем от противного, что $V = E$. Пусть, в самом деле, существует точка $x \in E$, не принадлежащая V . Так как V замкнуто [в силу (5.9.2)], $d(x, V) = \alpha > 0$. По определению расстояния $d(x, V)$ найдется такая точка $y \in V$, что $\alpha \leq \|x - y\| \leq 3\alpha/2$. Пусть $z = (x - y)/\|x - y\|$. Так как $\|z\| = 1$, то существует такой индекс i , что $\|z - a_i\| \leq 1/2$. Напишем

$$x = y + \|x - y\| z = y + \|x - y\| a_i + \|x - y\| (z - a_i)$$

и заметим, что $y + \|x - y\| a_i \in V$. Поэтому по определению расстояния $d(x, V)$ мы будем иметь $\|x - y\| \cdot \|z - a_i\| \geq \alpha$, и, значит, $\|x - y\| \geq 2\alpha$, что, так как $\alpha \neq 0$, противоречит выбору u .

Задачи

1. Покажите, что если E — конечномерное нормированное пространство, то каждое линейное отображение E в нормированное пространство F непрерывно.

[Воспользуйтесь (5.9.1) и (5.1.5).]

2. Напомним, что базис векторного пространства E есть такое семейство $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ его элементов, что любой элемент пространства E может быть единственным образом записан в виде линейной комбинации конеч-

ного числа из a_λ . Отсюда, в частности, следует, что элементы a_λ линейно независимы.

а) Пусть (a_n) — последовательность в банаховом пространстве E , элементы которой линейно независимы. Следующим образом определим по индукции последовательность (μ_n) действительных чисел > 0 : если d_n — расстояние точки $\mu_n a_n$ от подпространства V_{n-1} , порождаемого элементами $a_1, \dots, a_{n-1}$ [заметим, что в силу (5.9.2) $d_n > 0$], то выберем μ_{n+1} так, чтобы $|\mu_{n+1}| \cdot \|a_{n+1}\| \leq d_n/3$. Покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n a_n$ абсолютно сходится и что его сумма x не принадлежит ни одному из подпространств V_n .

б) Выведите из а), что банахово пространство бесконечной размерности не может иметь счетного базиса.

3. Покажите, что нормированное пространство, в котором существует компактная сфера, конечномерно.

[Заметьте, что множество точек нормированного пространства E , удовлетворяющих неравенствам $a \leq \|x\| \leq b$ (где $a > 0$), гомеоморфно произведению промежутка $[a, b]$ и сферы $S: \|x\| = 1$; примените теорему Рисса (5.9.4).]

10. Сепарабельные нормированные пространства

(5.10.1) Если в нормированном пространстве E существует *тотальная* (5.4) *последовательность*, то E *сепарабельно*. Наоборот, в любом сепарабельном нормированном пространстве E существует *тотальная последовательность*, состоящая из линейно независимых векторов.

Пусть (a_n) — тотальная последовательность и D — множество всех (конечных) линейных комбинаций $r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ с рациональными коэффициентами (в случае когда E — комплексное векторное пространство, под „рациональным“ скаляром мы понимаем комплексное число $\alpha + i\beta$ с рациональными α и β). В силу (1.9.3) и (1.9.4) D — счетное множество. Так как, по определению, множество L всех линейных комбинаций векторов a_n плотно в E , то нам нужно лишь доказать, что D плотно в L , а так как

$$\|(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) - (r_1 a_1 + \dots + r_n a_n)\| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j - r_j| \cdot \|a_j\|,$$

то это следует из (2.2.16).

Допустим, наоборот, что E сепарабельно. Мы можем, конечно, считать, что E бесконечномерно (в противном случае любой базис пространства E уже был бы конечным тотальным подмножеством). Пусть (a_n) — бесконечная всюду плотная последовательность векторов пространства E . По индукции построим ее подпоследовательность (a_{k_n}) , обладающую тем свойством, что она состоит из линейно независимых векторов и что a_m есть линейная комбинация векторов $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}$.

для любого $m \leq k_n$. Для этого возьмем в качестве k_1 первый индекс, при котором $a_n \neq 0$, а в качестве k_{n+1} — наименьший индекс $m > k_n$, при котором a_m не принадлежит подпространству V_n , порождаемому векторами $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}$. Такой индекс существует, так как в противном случае V_n [являющееся, в силу (5.9.2), замкнутым множеством] содержало бы замыкание E множества всех a_n , что противоречит предположению. Теперь ясно, что последовательность (a_{k_n}) обладает требуемыми свойствами, и из построения очевидно, что она является тотальной последовательностью.

Задача

Покажите, что пространства (c_0) и l^1 Банаха (задача 5 § 5.3 и задача 1 § 5.7) сепарабельны, а пространство l^∞ (задача 1 § 5.7) не сепарабельно.

[Пользуясь задачей 2, b) § 4.2 и (2.2.17), покажите, что в l^∞ существует несчетное семейство (x_λ) таких точек, что $\|x_\lambda - x_\mu\| = 1$ при $\lambda \neq \mu$.]

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Гильбертовы пространства являются наиболее важными примерами банаховых пространств не только потому, что они представляют наиболее естественное и ближайшее обобщение на случай „бесконечной размерности“ классической евклидовой геометрии, но главным образом из-за того, что они до сих пор являются наиболее полезными пространствами в приложениях функционального анализа.

За исключением теоремы (6.3.1), все результаты настоящей главы легко следуют из определений и из основного неравенства Коши — Шварца (6.2.4).

1. Эрмитовы формы

Для любого действительного или комплексного числа λ символом $\bar{\lambda}$ мы обозначаем сопряженное с ним комплексное число (равное λ , если λ действительно). Эрмитова форма в действительном (соответственно комплексном) векторном пространстве E есть отображение f произведения $E \times E$ в $\mathbb{R}$ (соответственно в $\mathbb{C}$), обладающее следующими свойствами:

$$(I) \quad f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y),$$

$$(II) \quad f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y'),$$

$$(III) \quad f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y),$$

$$(IV) \quad f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y),$$

$$(V) \quad f(y, x) = \overline{f(x, y)}.$$

[Заметим, что тождества (II) и (IV) следуют из остальных тождеств; из (V) вытекает, что $f(x, x)$ действительно.] В случае когда E — действительное векторное пространство, условия (I) — (IV) выражают тот факт, что отображение f билинейно¹⁾, а условие (V) превращается в условие $f(y, x) = f(x, y)$, выражающее тот факт, что f симметрично.

Для любых конечных систем (x_i) , (y_j) , (α_i) , (β_j) скаляров индукцией по числу элементов этих систем получаем

$$(6.1.1) \quad f\left(\sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j y_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j f(x_i, y_j).$$

¹⁾ Билинейное отображение $f(x, y): E \times E \rightarrow R$ иногда в дальнейшем обозначается символом $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$. — Прим. ред.

Из (6.1.1) следует, что если E конечномерно и (a_i) — базис пространства E , то форма f полностью определяется ее значениями $\alpha_{ij} = f(a_i, a_j)$, причем в силу (V) имеют место равенства

$$(6.1.2) \quad \alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}}.$$

В самом деле, в этом случае при $x = \sum_i \xi_i a_i$ и $y = \sum_j \eta_j a_j$ имеем

$$(6.1.3) \quad f(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi_i \overline{\eta_j}.$$

Наоборот, какова бы ни была система (α_{ij}) действительных (соответственно комплексных) чисел, удовлетворяющих условиям (6.1.2), правая часть (6.1.3) определяет в действительном (соответственно комплексном) векторном пространстве E некоторую эрмитову форму.

(6.1.4) **Пример.** Пусть D — относительно компактное открытое множество в $\mathbb{R}^2$ и E — действительное (соответственно комплексное) векторное пространство всех действительных (соответственно комплексных) ограниченных непрерывных функций в D , имеющих в D ограниченные непрерывные первые производные. Тогда отображение

$$(f, g) \rightarrow \varphi(f, g) = \int_D (a(x, y) f(x, y) \overline{g(x, y)} + b(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \overline{g}}{\partial x} + c(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \overline{g}}{\partial y}) dx dy$$

(где a, b, c — непрерывные ограниченные действительные функции в D) есть эрмитова форма в E .

Пара векторов x, y векторного пространства E *ортгогональна относительно эрмитовой формы f в E* , если $f(x, y) = 0$ [из (V) следует, что это отношение симметрично относительно x и y]. Вектор, ортгогональный самому себе [т. е. такой, что $f(x, x) = 0$], называется *изотропным* относительно f . Для любого множества $M \subset E$ множество векторов u , ортгогональных всем векторам $x \in M$ есть векторное подпространство пространства E , называемое *ортгогональным множеством M (относительно f)*. Может случиться, что существует вектор $a \neq 0$, ортгогональный всему пространству E . В этом случае говорят, что форма f *вырождается*. Среди эрмитовых форм f в конечномерном пространстве E , определяемых формулой (6.1.3), не вырождаются те, для которых матрица (α_{ij}) обратима.

Задача

а) Пусть f — эрмитова форма в векторном пространстве E . Покажите, что если E — действительное векторное пространство, то

$$4f(x, y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y),$$

а если E — комплексное векторное пространство, то

$$4f(x, y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) + if(x+iy, x+iy) - if(x-iy, x-iy).$$

б) Выведите из а), что если $f(x, x) = 0$ для любого вектора, принадлежащего подпространству M пространства E , то $f(x, y) = 0$ для любой пары векторов x, y , принадлежащих M .

с) Докажите б), не пользуясь тождествами, установленными в а).

[Запишите, что $f(x + \lambda y, x + \lambda y) = 0$ для любого λ .]

2. Положительные эрмитовы формы

Говорят, что эрмитова форма f в векторном пространстве E *положительна*, если $f(x, x) \geq 0$ для любого $x \in E$. Например, если $a, b, c \geq 0$ в D , то форма φ , определенная в примере (6.1.4), положительна.

(6.2.1) (Неравенство Коши—Шварца) Если f — положительная эрмитова форма, то

$$|f(x, y)|^2 \leq f(x, x)f(y, y)$$

для любой пары x, y векторов пространства E .

Положим $a = f(x, x)$, $b = f(x, y)$, $c = f(y, y)$ и вспомним, что a и c действительны и ≥ 0 . Предположим сначала, что $c \neq 0$, и запишем, что $f(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$ для любого скаляра λ , откуда $a + b\bar{\lambda} + b\bar{\lambda} + c\lambda\bar{\lambda} \geq 0$. Подставляя сюда $\lambda = -b/c$, получаем нужное неравенство. Точно такое же рассуждение годится в случае, когда $c = 0$, $a \neq 0$. Наконец, если $a = c = 0$, то, подставляя $\lambda = -b$, находим $-2b\bar{b} \geq 0$, т. е. $b = 0$.

(6.2.2) Для того чтобы положительная эрмитова форма f в E была невырождающейся, необходимо и достаточно, чтобы не существовал изотропный относительно f вектор, отличный от 0, т. е. чтобы для любого вектора $x \neq 0$ пространства E выполнялось неравенство $f(x, x) > 0$.

В самом деле, из $f(x, x) = 0$ в силу неравенства Коши—Шварца следует $f(x, y) = 0$ для всех $y \in E$.

(6.2.3) (Неравенство Минковского) Если f — положительная эрмитова форма, то

$$\sqrt{f(x+y, x+y)} \leq \sqrt{f(x, x)} + \sqrt{f(y, y)}$$

для любой пары x, y векторов пространства E .

Так как $f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + \bar{f}(x, y) + f(y, y)$, неравенство Минковского эквивалентно неравенству

$$2\Re f(x, y) = f(x, y) + \bar{f}(x, y) \leq 2\sqrt{f(x, x)f(y, y)},$$

которое следует из неравенства Коши—Шварца.

Таким образом, функция $x \rightarrow \sqrt{f(x, x)}$ удовлетворяет условиям (I), (III) и (IV) § 5.1. В силу (6.2.2) условие (II) § 5.1 эквивалентно требованию, чтобы форма f была невырождающейся. Следовательно, в случае, когда f есть невырождающаяся положительная эрмитова форма (называемая также *положительно определенной формой*), $\sqrt{f(x, x)}$ есть норма в пространстве E .

Предгильбертово пространство есть векторное пространство E вместе с заданной в E невырождающейся положительной эрмитовой формой. Когда не может возникнуть никаких недоразумений, мы будем эту форму обозначать символом $(x|y)$, а ее значение называть *скалярным произведением* векторов x и y . Предгильбертово пространство E мы всегда будем рассматривать как нормированное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$; конечно, такое пространство одновременно является метрическим пространством с соответствующим расстоянием $d(x, y) = \|x - y\|$.

В этих обозначениях неравенство Коши — Шварца запишется в виде

$$(6.2.4) \quad |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|;$$

и из него на основании (5.5.1) следует, что если E — действительное предгильбертово пространство, то $(x, y) \rightarrow (x|y)$ есть непрерывная билинейная форма в $E \times E$. [В случае когда E — комплексное предгильбертово пространство, можно провести рассуждения теоремы (5.5.1) и также доказать непрерывность отображения $(x, y) \rightarrow (x|y)$, хотя в этом случае оно не является билинейной формой.]

В качестве частного случая (6.1.1) имеем

(6.2.5) (Теорема Пифагора) Если x и y — ортогональные векторы в предгильбертовом пространстве E , то

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Изоморфизм предгильбертова пространства E на предгильбертово пространство E' есть линейное биективное отображение E на E' , обладающее тем свойством, что $(f(x)|f(y)) = (x|y)$ для любой пары x, y векторов пространства E . Ясно, что изоморфизм есть линейная изометрия пространства E на E' .

Пусть E — предгильбертово пространство. Тогда сужение скалярного произведения на любом векторном подпространстве F пространства E есть положительная невырождающаяся эрмитова форма. Если не оговорено противное, то всегда, когда F рассматривается как предгильбертово пространство, имеется в виду именно это скалярное произведение.

Гильбертово пространство есть полное предгильбертово пространство. Любое конечномерное предгильбертово пространство

в силу (5.9.1) является гильбертовым пространством; другие примеры гильбертовых пространств будут построены в 6.4.

Если в примере (6.1.4) взять $a > 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то можно показать, что таким образом определенное предгильбертово пространство не будет полным.

Задачи

1. Докажите последнее утверждение в случае $a = 1$, $b = c = 0$ (см. задачу 1 § 5.1).

2. Пусть E — действительное нормированное пространство, в котором для любых двух точек x, y пространства E справедливо равенство $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Покажите, что $f(x, y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ есть положительная невырождающаяся эрмитова форма в E .

3. Пусть f — положительная невырождающаяся эрмитова форма. Для того чтобы были равны правая и левая части неравенства (6.2.1), необходимо и достаточно, чтобы x и y были линейно зависимы. Для того чтобы были равны правая и левая части неравенства (6.2.3), необходимо и достаточно, чтобы x и y были линейно зависимы и, если оба эти вектора $\neq 0$, чтобы $y = \lambda x$, где λ действительно и ≥ 0 . Докажите эти утверждения.

4. Пусть a, b, c, d — четыре точки в предгильбертовом пространстве E . Покажите, что

$$\|a-c\| \cdot \|b-d\| \leq \|a-b\| \cdot \|c-d\| + \|b-c\| \cdot \|a-d\|.$$

Когда правая и левая части неравенства равны?

[Сведите задачу к случаю, когда $a = 0$, и рассмотрите в E преобразование $x \rightarrow x/\|x\|^2$, определенное при $x \neq 0$.]

3. Ортогональная проекция на полное подпространство

(6.3.1) Пусть E — предгильбертово пространство, F — полное векторное подпространство пространства E (т. е. гильбертово пространство). Для любой точки $x \in E$ существует одна и только одна такая точка $y = P_F(x) \in F$, что $\|x-y\| = d(x, F)$. Точка $y = P_F(x)$ является также единственной точкой $z \in F$, для которой разность $x-z$ ортогональна F . Отображение $x \rightarrow P_F(x)$ пространства E на F линейно, непрерывно и, если $F \neq \{0\}$, имеет норму 1. Его ядро $F' = P_F^{-1}(0)$ есть подпространство, ортогональное F , и E есть топологическая прямая сумма (5.4) F и F' . Наконец, F есть подпространство, ортогональное F' .

Пусть $\alpha = d(x, F)$; по определению существует последовательность (y_n) точек подпространства F , для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \alpha$.

Докажем, что (y_n) есть последовательность Коши. В самом деле, из (6.1.1) следует, что для любых двух точек u, v пространства E

$$(6.3.1.1) \quad \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Поэтому $\|y_m - y_n\|^2 = 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\right\|^2$. Но $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in F$, следовательно, $\left\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\right\|^2 \geq \alpha^2$. Таким образом, если n_0 выбрано так, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\|x - y_n\|^2 \leq \alpha^2 + \epsilon$, то при $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$ мы будем иметь $\|y_m - y_n\|^2 \leq 4\epsilon$, что доказывает наше утверждение.

Так как F — полное, последовательность (y_n) сходится к некоторой точке $y \in F$, для которой $\|x - y\| = d(x, F)$. Допустим, что точка $y' \in F$ также обладает тем свойством, что $\|x - y'\| = d(x, F)$. Снова пользуясь (6.3.1.1), получаем $\|y - y'\|^2 = 4\alpha^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y + y')\right\|^2$, и, так как $\frac{1}{2}(y + y') \in F$, отсюда следует, что $\|y - y'\|^2 \leq 0$, т. е. $y' = y$. Пусть теперь $z \neq 0$ — произвольная точка подпространства F . Для любого действительного скаляра $\lambda \neq 0$ выполняется неравенство $\|x - (y + \lambda z)\| > \alpha^2$. Ввиду (6.1.1) отсюда получаем

$$2\lambda \Re(x - y | z) + \lambda^2 \|z\|^2 > 0,$$

и если бы $\Re(x - y | z) \neq 0$, то, выбрав соответствующим образом λ , мы пришли бы к противоречию. Поэтому $\Re(x - y | z) = 0$, а (в случае когда E — комплексное предгильбертово пространство) заменяя z на iz , получаем, что и $\Im(x - y | z) = 0$. Значит, в любом случае $(x - y | z) = 0$, иными словами, разность $x - y$ ортогональна F . Пусть $y' \in F$ — такой вектор, что разность $x - y'$ ортогональна F . Тогда для любого вектора $z \neq 0$, принадлежащего F , по теореме Пифагора $\|x - (y' + z)\|^2 = \|x - y'\|^2 + \|z\|^2$, и это в силу предыдущего доказывает, что $y' = y$.

Теперь легко убедиться, что отображение $y = P_F(x)$ линейно. В самом деле, если $x - y$ и $x' - y'$ ортогональны подпространству F , то ему ортогональны и векторы $\lambda x - \lambda y$ и $(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y')$, а так как $y + y' \in F$ и $\lambda y \in F$, то это показывает, что $y + y' = P_F(x + x')$ и $\lambda y = P_F(\lambda x)$. По теореме Пифагора

$$(6.3.1.2) \quad \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2.$$

Следовательно, $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$, и в силу (5.5.1) отображение P_F непрерывно и имеет норму ≤ 1 . Но поскольку при $x \in F$ мы имеем $P_F(x) = x$, то, если F не состоит из одной лишь точки 0, $\|P_F\| = 1$. Из определения отображения P_F следует, что ядро $F' = P_F^{-1}(0)$ состоит из векторов x , ортогональных F .

Так как для любого вектора $x \in E$ мы имеем $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ и $x - P_F(x) \in F'$, то $E = F + F'$. Кроме того, если $x \in F \cap F'$, то x изотропен, поэтому $x = 0$, и это показывает, что сумма $F + F'$ здесь прямая. Далее, поскольку отображение $x \rightarrow P_F(x)$ непрерывно, E есть топологическая прямая сумма F и F' (5.4.2). Наконец, если вектор $x \in E$ ортогонален F' , то, в частности, $(x|x - P_F(x)) = 0$. Но мы имеем также $(P_F(x)|x - P_F(x)) = 0$, значит, $\|x - P_F(x)\|^2 = 0$, т. е. $x = P_F(x) \in F$, ч. т. д.

Линейное отображение P_F называется *ортогональной проекцией* пространства E на F , а его ядро F' — *ортогональным дополнением* подпространства F в E . Теорема (6.3.1) в силу (3.14.5) применима к любому замкнутому подпространству F гильбертова пространства E и в силу (5.9.1) — к любому конечномерному подпространству предгильбертова пространства.

(6.3.2) Пусть E — предгильбертово пространство. Тогда для любого вектора $a \in E$ отображение $x \rightarrow (x|a)$ есть непрерывная линейная форма с нормой $\|a\|$. Наоборот, если E — гильбертово пространство, то для любой непрерывной линейной формы u в E существует единственный такой вектор $a \in E$, что $u(x) = (x|a)$ для любого $x \in E$.

По неравенству Коши — Шварца $|(x|a)| \leq \|a\| \cdot \|x\|$, откуда в силу (5.5.1) следует, что форма $x \rightarrow (x|a)$ непрерывна и имеет норму $\leq \|a\|$. С другой стороны, если $a \neq 0$, то для $x_0 = a/\|a\|$ мы имеем $(x_0|a) = \|a\|$. Так как $\|x_0\| = 1$, то это показывает, что норма формы $x \rightarrow (x|a)$ не меньше $\|a\|$.

Допустим теперь, что E — гильбертово пространство. Так как в случае, когда $u = 0$, существование вектора a ($= 0$) очевидно, мы можем предположить, что $u \neq 0$. Тогда $H = u^{-1}(0)$ есть замкнутая гиперплоскость в E . Ортогональное дополнение H' гиперплоскости H есть одномерное подпространство; пусть $b \neq 0$ — точка из H' . Тогда в силу (6.3.1) гиперплоскость H ортогональна b , другими словами, мы имеем $(x|b) = 0$ для любого вектора $x \in H$. Но любые два уравнения гиперплоскости пропорциональны, поэтому существует такой скаляр λ , что $u(x) = \lambda(x|b) = (x|a)$ для всех $x \in E$, где $a = \bar{\lambda}b$. Единственность a следует из того факта, что форма $(x|y)$ не вырождается.

Задачи

1. Пусть B — замкнутый шар с центром 0 и радиусом 1 в предгильбертовом пространстве E . Покажите, что для каждой точки x сферы с центром 0 и радиусом 1 существует единственная опорная гиперплоскость шара B (задача 3 § 5.8), содержащая x .

2. Пусть E — предгильбертово пространство, A — компактное множество в E , δ — его диаметр. Покажите, что существуют две точки a и b мно-

жества A , для которых $\|a - b\| = \delta$, и две параллельные опорные гиперплоскости множества A (задача 3 § 5.8), содержащие соответственно a и b и такие, что расстояние между ними равно δ .

[Рассмотрите шар с центром a и радиусом δ и примените утверждение из задачи 1].

3. Пусть E — гильбертово пространство, F — всюду плотное линейное подпространство пространства E , отличное от E . Покажите, что в предгильбертовом пространстве F существует такая замкнутая гиперплоскость H , что в F не существует вектора $\neq 0$, ортогонального H .

4. Гильбертова сумма гильбертовых пространств

Пусть (E_n) — последовательность гильбертовых пространств; скалярное произведение в E_n мы будем обозначать символом $(x_n | y_n)$.

Пусть E — множество всех таких последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, что $x_n \in E_n$ при каждом n и ряд $(\|x_n\|^2)$ сходится. Сначала определим на E структуру векторного пространства. Ясно, что если $x = (x_n) \in E$, то последовательность $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \dots)$ также принадлежит E . Если, с другой стороны, $y = (y_n)$ — вторая последовательность, принадлежащая E , то заметим, что в силу (6.3.1.1) $\|x_n + y_n\|^2 \leq 2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2)$, поэтому ряд $(\|x_n + y_n\|^2)$ в силу (5.3.1) сходится и, значит, последовательность $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$ принадлежит E . По определению полагаем $x + y = (x_n + y_n)$, $\lambda x = (\lambda x_n)$; проверка аксиом векторного пространства тривиальна.

Далее, по неравенству Коши — Шварца

$$|(x_n | y_n)| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n\| \leq \frac{1}{2} (\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2).$$

Поэтому если $x = (x_n)$ и $y = (y_n)$ — последовательности, принадлежащие E , то ряд $((x_n | y_n))$ (действительных или комплексных чисел) абсолютно сходится. Для $x = (x_n) \in E$ и $y = (y_n) \in E$ положим, по

определению, $(x | y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n | y_n)$. Немедленно проверяется, что отображение $(x, y) \rightarrow (x | y)$ есть эрмитова форма в E . Кроме того, $(x | x) = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$, поэтому $(x | y)$ есть положительная невырождающаяся эрмитова форма, и она определяет на E структуру предгильбертова пространства.

Докажем, наконец, что E в действительности является гильбертовым пространством, иными словами, что оно полно. Пусть, в самом деле, $(x^{(m)}) = (x_n^{(m)})$ — последовательность Коши в E . Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m_0 , что при $p \geq m_0$ и $q \geq m_0$

имеем

$$(6.4.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\|^2 \leq \varepsilon.$$

Отсюда прежде всего следует, что при каждом фиксированном n выполняется неравенство $\|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\|^2 \leq \varepsilon$, поэтому последовательность $(x_n^{(m)})_{m=1, 2, \dots}$ является в E_n последовательностью Коши и, значит, сходится к некоторому пределу y_n . Из (6.4.1) заключаем, что для любого данного N

$$\sum_{n=1}^N \|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\|^2 \leq \varepsilon,$$

как только p и q будут $\geq m_0$, поэтому из непрерывности нормы следует, что при $p \geq m_0$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{n=1}^N \|x_n^{(p)} - y_n\|^2 \leq \varepsilon, \text{ и так как оно верно для любых номеров } N,$$

то $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^{(p)} - y_n\|^2 \leq \varepsilon$. Это, во-первых, доказывает, что последовательность $(x_n^{(p)} - y_n)$ принадлежит E , а во-вторых, что при $p \geq m_0$ выполняется неравенство $\|x^{(p)} - y\|^2 \leq \varepsilon$ и, значит, последовательность $(x^{(m)})$ сходится в E к y . Утверждение доказано.

Так определенное гильбертово пространство E называется *гильбертовой суммой* последовательности гильбертовых пространств (E_n) . Заметим, что каждое из пространств E_n мы можем отобразить в E , поставив в соответствие каждому вектору $x_n \in E_n$ последовательность $j_n(x_n) \in E$, равную $(0, \dots, 0, x_n, 0, \dots)$ (все члены равны 0, за исключением n -го, который равен x_n). Легко проверяется, что j_n есть изоморфизм E_n на (необходимо замкнутое) подпространство E'_n пространства E ; j_n называется *естественным вложением* пространства E_n в E .

Из определения скалярного произведения в E следует, что при $m \neq n$ любой вектор из E'_m ортогонален любому вектору из E'_n . Далее, из определения нормы в E следует, что для любого $x = (x_n) \in E$ ряд $(j_n(x))$ сходится в E и $x = \sum_{n=1}^{\infty} j_n(x_n)$ [заметим, что, вообще говоря, ряд $(j_n(x_n))$ сходится не абсолютно]. Это доказывает, что (алгебраическая) сумма подпространств E'_n пространства E (очевидно, являющаяся прямой) плотна в E , иными словами, что наименьшее замкнутое векторное подпространство, содержащее все E'_n , есть само E . Обратное утверждение:

(6.4.2) Пусть F — гильбертово пространство и (F_n) — такая последовательность замкнутых его подпространств, что:

1°) при $m \neq n$ любой вектор из F_m ортогонален любому вектору из F_n ;

2°) алгебраическая сумма H подпространств F_n плотна в F .

Тогда если E — гильбертова сумма подпространств F_n , то существует единственный изоморфизм пространства F на E , совпадающий с естественным вложением j_n подпространства F_n в E на каждом F_n .

Пусть $F'_n = j_n(F_n)$ и пусть h_n — отображение F'_n на F_n , обратное j_n . Пусть G — алгебраическая сумма подпространств F'_n в E . Поскольку эта сумма прямая, мы можем определить линейное отображение h суммы G в F так, чтобы на каждом F'_n оно совпадало с h_n . Докажем, что h есть изоморфизм G на предгильбертово пространство H [это вместе с тем докажет, что (алгебраическая) сумма подпространств F_n является прямой суммой в F]. Учитывая определение скалярного произведения в E , нам нужно проверить, что

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \mid \sum_{k=1}^n y_k \right) = \sum_{k=1}^n (j_k(x_k) \mid j_k(y_k))$$

при $x_k \in F_k$, $y_k \in F_k$. Но по предположению если $h \neq k$, то $(x_h \mid y_k) = 0$, и требуемый результат следует из того факта, что каждое j_k является изоморфизмом.

Теперь в силу (5.5.4) существует единственное непрерывное продолжение $\bar{h}$ отображения h , являющееся линейным отображением $\bar{G} = E$ в $\bar{H} = F$. Из принципа продолжения тождеств (3.15.2) и непрерывности скалярного произведения следует, что $\bar{h}$ есть изоморфизм пространства E на подпространство пространства F , которое, будучи полным и всюду плотным, должно совпадать с F . Изоморфизм, обратный $\bar{h}$, удовлетворяет условиям, указанным в (6.4.2). Единственность такого изоморфизма вытекает из того факта, что он полностью определен в H и непрерывен в F (3.15.2).

При условиях, указанных в (6.4.2), гильбертово пространство F часто отождествляется с гильбертовой суммой его подпространств F_n .

(6.4.3) Замечание. Мы можем также доказать (6.4.2), установив сначала, что сумма подпространств F_n прямая. В самом деле, если $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, где $x_i \in F_i$ ($1 \leq i \leq n$), то мы также имеем

$\left(x_j \mid \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0$ при любом $j \leq n$, и, так как $(x_j \mid x_i) = 0$ при $i \neq j$, это дает $\|x_j\|^2 = 0$ и, значит, $x_j = 0$ при $1 \leq j \leq n$. Затем определим отображение g , обратное h так, чтобы оно совпадало с j_n на каждом F_n . Сразу (как выше) проверяется, что g есть изоморфизм H на $\bar{G}$, и затем точно так же, как и раньше, применяем (5.5.4).

Заметим, что это рассуждение сохраняет силу и в случае, когда F — предгильбертово пространство, а F_n — его полные подпространства. Оно доказывает, что существует изоморфизм пространства F на подпространство, плотное в гильбертовой сумме E подпространств F_n , причем этот изоморфизм на каждом F_n совпадает с j_n .

5. Ортонормальные системы

Если (в обозначениях 6.4) в качестве каждого E_n мы возьмем одномерное пространство [тождественное полю скаляров со скалярным произведением $(\xi|\eta) = \xi\bar{\eta}$], то их гильбертова сумма даст пример бесконечномерного гильбертова пространства, обычно обозначаемого символом l^2 (с индексом $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, если необходимо указать, какие скаляры). Пространство $l^2_{\mathbf{R}}$ (соответственно $l^2_{\mathbf{C}}$) есть, таким образом, *пространство всех последовательностей* $x = (\xi_n)$ действительных (соответственно комплексных) чисел, таких, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ сходится.

Скалярное произведение $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n$.

Пусть (e_n) — принадлежащая l^2 последовательность, все элементы которой равны 0, за исключением n -го, который равен 1. Тогда мы имеем $(e_m|e_n) = 0$ при $m \neq n$ и $\|e_n\| = 1$ при каждом n , а в 6.4 мы видели, что в этом случае для каждого вектора $x = (\xi_n) \in l^2$ можно написать $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$, где ряд сходится в l^2 . Это показывает, что последовательность (e_n) *тотальна* в l^2 , и поэтому в силу (5.10.1) пространство l^2 *сепарабельно*.

Рассмотрим теперь произвольное предгильбертово пространство F . Будем говорить, что (конечная или бесконечная) последовательность (a_n) в F является *ортogonalной системой*, если $(a_m|a_n) = 0$ при $m \neq n$ и $a_n \neq 0$ при каждом n . Мы будем говорить, что (a_n) — *ортонормальная система*, если, кроме того, $\|a_n\| = 1$ при каждом n . Из любой ортogonalной системы (a_n) с помощью „нормировки“ мы сразу получаем ортонормальную систему: достаточно рассмотреть последовательность векторов $b_n = a_n / \|a_n\|$.

Мы уже видели пример ортонормальной системы в l^2 . Вот другой важный пример.

(6.5.1) Пусть I — промежуток $[-1, 1]$ действительной прямой $\mathbf{R}$ и пусть $F = \mathcal{C}(I)$ — векторное пространство всех непрерывных на I комплексных функций. Определим в F скалярное произведение формулой

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

(тот факт, что это — невырождающаяся положительная эрмитова форма, легко проверяется). Пусть для каждого положительного или отрицательного целого числа n

$$\varphi_n(t) = e^{pnit}.$$

Легко убедиться в том, что $(\varphi_n/\sqrt{2})$ — ортонормальная система в F ; она называется *тригонометрической системой*.

Пусть теперь (a_n) — произвольная ортонормальная система в гильбертовом пространстве F . Для каждого $x \in F$ число $c_n(x) = (x|a_n)$ называется *n -м коэффициентом* (или *n -й координатой*) вектора x относительно системы (a_n) [*n -й коэффициент Фурье* вектора x в случае системы (6.5.1)].

(6.5.2) Пусть (a_n) — ортонормальная система в гильбертовом пространстве F и V — замкнутое подпространство пространства F , порожденное векторами a_n . Тогда для любого вектора $x \in F$:

1°) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |(x|a_n)|^2$ сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|a_n)|^2 = \|P_V(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{неравенство Бесселя}),$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x|a_n)(y|\overline{a_n}) = (P_V(x)|P_V(y));$$

2°) ряд с общим членом $(x|a_n)a_n$ сходится в F , причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x|a_n)a_n = P_V(x).$$

Наоборот, пусть (λ_n) — последовательность скаляров, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ сходится. Тогда существует такой единственный вектор $y \in V$, что $(y|a_n) = \lambda_n$ при каждом n ; любой другой вектор $x \in F$, для которого $(x|a_n) = \lambda_n$ при каждом n , имеет вид $x = y + z$, где вектор z ортогонален V , и наоборот.

Для любого $x \in F$ мы можем написать $x = P_V(x) + z$, где вектор z ортогонален V (6.3.1), и, таким образом, имеем $(x|a_n) = (P_V(x)|a_n)$. Чтобы доказать теорему, можно, следовательно, считать, что $V = F$. Но тогда одномерные подпространства F_n , порожденные векторами a_n , удовлетворяют предположениям теоремы (6.4.2), и требуемый результат (принимая во внимание определение гильбертовой суммы) является теоремой (6.4.2), лишь иначе сформулированной в применении к рассматриваемому частному случаю.

Наиболее интересен случай, когда $V=F$, т. е. когда ортонормальная система (a_n) тотальна. В этом случае она называется *ортонормальным базисом* пространства F ; система (e_n) представляет такой базис для l^2 . В (7.4.3) будет доказано, что тригонометрическая система (6.5.1) тотальна.

В случае гильбертова пространства F и тотальной ортонормальной системы (a_n) мы можем всюду в (6.5.2) заменить отображение P_V тождественным отображением. Тогда равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|a_n)|^2 = \|x\|^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x|a_n) \overline{(y|a_n)} = (x|y)$$

называются *равенствами Парсеваля*. Из (6.5.2) сразу следует, что эти равенства представляют не только необходимое, но и достаточное условие того, чтобы система (a_n) была тотальной системой в гильбертовом пространстве.

(6.5.3) Для того чтобы ортонормальная система (a_n) в гильбертовом пространстве F была тотальной, необходимо и достаточно, чтобы из выполнения при каждом n условий $(x|a_n)=0$ следовало, что $x=0$.

Действительно, в силу (6.5.2) это означает, что из $P_V(x)=0$ следует $x=0$, а это [так как $P_V(x-P_V(x))=0$] эквивалентно тому, что $V=F$.

(6.5.4) Замечание. Пусть E — предгильбертово пространство и ортонормальная система (a_n) в E тотальна. Тогда сохраняют силу утверждения 1° и 2° теоремы (6.5.2), в которых $P_V(x)$ заменено на x . Это доказывается аналогично (6.5.2), причем нужно учесть замечание (6.4.3).

Задачи

1. Пусть E — гильбертово пространство с ортонормальным базисом $(e_n)_{n \geq 1}$. Пусть A — множество в E , состоящее из всех линейных комбинаций

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(1 - \frac{1}{k}\right) e_k, \text{ где } \lambda_k \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \text{ (} n \text{ произвольно).}$$

а) Покажите, что замыкание $\bar{A}$ есть множество всех сумм рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_n$, где $\lambda_n \geq 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ сходится и имеет сумму, равную 1.

б) Докажите, что диаметр множества $\bar{A}$ равен 2, но не существует пары точек a, b множества $\bar{A}$, для которых $\|a-b\|=2$ (ср. задачу 2 § 6.3).

2. Пусть E — гильбертово пространство с ортонормальным базисом $(e_n)_{n \geq 0}$. Пусть $a_n = e_{2n}$ и $b_n = e_{2n} + \frac{1}{n+1} e_{2n+1}$ при каждом $n \geq 0$. Пусть A (соответственно B) — замкнутое векторное подпространство пространства E , порожденное векторами a_n (соответственно b_n). Покажите, что:

а) $A \cap B = \{0\}$, поэтому сумма $A + B$ прямая (алгебраически).

б) Прямая сумма $A + B$ не является топологической прямой суммой.

[Рассмотрите в этом подпространстве последовательность точек $b_n - a_n$ и примените (5.4.2).]

с) Подпространство $A + B$ пространства E плотно, но не замкнуто в E .

[Покажите, что вектор $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n)$ не принадлежит $A + B$.]

3. Покажите, что банахово пространство $\mathcal{S}(l^1; l^2)$ можно отождествить с пространством двойных последовательностей $U = (\alpha_{mn})$, удовлетворяющих

условиям: 1°) ряд $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ сходится при каждом n ; 2°) верхняя грань

$$\sup \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 \text{ конечна. Норма в этом случае равна } \|U\| = \sup_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 \right)^{1/2}.$$

[Тот же метод, что и в задаче 2, б) § 5.7.]

4. а) Пусть u — непрерывное линейное отображение пространства l^2

в себя и пусть $u(e_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$. Покажите, что ряды $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ и $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ сходятся при всех значениях m и n и что их суммы $\leq \|u\|^2$.

[Убедитесь в том, что отображение $x \rightarrow (u(x) | e_m)$ является непрерывной линейной формой в E и примените (6.3.2).]

б) Приведите пример такой двойной последовательности (α_{mn}) , что

$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 \leq 1$ и $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 \leq 1$ при всех значениях m и n , но не суще-

ствует непрерывного линейного отображения u пространства l^2 в себя, для которого для любой пары (m, n) выполняются условия $(u(e_n) | e_m) = \alpha_{mn}$.

[Пусть V — подпространство пространства l^2 , порожденное векторами e_n , где $n \in H$ и H — множество, состоящее из p целых чисел ≥ 0 . Покажите, что существует такое линейное отображение u_p подпространства V в себя, что $(u_p(e_n) | e_m) = 1/\sqrt{p}$ для всех индексов m и n из множества H , но $\|u_p\| \geq \sqrt{p}$.]

6. Ортонормализация

(6.6.1) Пусть E — сепарабельное предгильбертово пространство, (b_n) — тотальная последовательность линейно независимых векторов в E (5.10.1) и пусть V_n — n -мерное подпространство пространства E , порожденное векторами $b_1, \dots, b_n$.

Тогда если мы положим $c_n = b_n - P_{V_{n-1}}(b_n)$, то последовательность (c_n) будет тотальной ортогональной системой, обладающей тем свойством, что при каждом n векторы $c_1, \dots, c_n$ порождают V_n .

Проведем индукцию по n , предполагая, что $c_1, \dots, c_{n-1}$ — ортогональная система, порождающая V_{n-1} . Тогда по определению проекции $\hat{P}_{V_{n-1}}$ (6.3.1) вектор c_n ортогонален V_{n-1} , откуда следует, что $(c_i | c_j) = 0$ при $1 \leq i < j \leq n$. Далее, так как, по предположению, $b_n \notin V_{n-1}$, то $c_n \neq 0$ и поэтому $c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$ — ортогональная система. Кроме того, $b_n - c_n \in V_{n-1}$, следовательно, векторы $c_1, \dots, c_n$ порождают то же подпространство, что и объединение V_{n-1} и $\{b_n\}$, т. е. подпространство V_n . Это завершает доказательство.

Нормируя систему (c_n) , то есть полагая $a_n = c_n / \|c_n\|$, приходим к системе (a_n) , про которую говорят, что она получается из (b_n) процессом ортонормализации. Например, в пространстве $F = \mathcal{C}_c(I)$, рассмотренном в (6.5.1), последовательность (t^n) тотальна [как будет доказано в (7.4.1)] и, очевидно, состоит из линейно независимых векторов. Если мы обозначим через (Q_n) ортонормальную систему, полученную из (t^n) с помощью ортонормализации, то ясно, что $Q_n(t) = a_n t^n + \dots$ есть многочлен степени n (где $a_n \neq 0$) с действительными коэффициентами. Многочлены Q_n (с точностью до постоянного множителя) равны полиномам Лежандра (см. задачу 1 § 8.14).

(6.6.2) Любое сепарабельное предгильбертово пространство (соответственно гильбертово пространство) изоморфно всюду плотному подпространству пространства l^2 (соответственно пространству l^2).

Так как в сепарабельном предгильбертовом пространстве в силу (6.6.1) существует тотальная ортонормальная система, то утверждение сразу следует из (6.5.2).

Задачи

1. Пусть E — сепарабельное неполное предгильбертово пространство. Покажите, что в E существует ортонормальная система, которая не тотальна, но не является собственной частью никакой ортонормальной системы.

[Погрузите E в гильбертово пространство в качестве его плотного подпространства и примените задачу 3 § 6.3.]

2. Пусть E — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство и V — замкнутое его векторное подпространство. Покажите, что если V бесконечномерно, то существует изометрия пространства E на V .

[Запишите E как прямую сумму V и его ортогонального дополнения V' и возьмите в V и V' ортонормальные базисы.]

3. Пусть $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ — конечная последовательность точек в предгильбертовом пространстве E . *Определитель Грама* этой последовательности есть определитель $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det((x_i | x_j))$.

а) Покажите, что $G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ и $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ в том и только в том случае, если векторы x_i линейно зависимы.

[Рассмотрите ортонормальный базис подпространства, порожденного векторами x_i , и выразите x_i как линейные комбинации элементов этого базиса.]

б) Пусть векторы x_i линейно независимы и пусть V — n -мерное подпространство, которое они порождают. Покажите, что расстояние x от V равно $\sqrt{G(x, x_1, \dots, x_n) / G(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

[Найдите проекцию вектора x на V и запишите ее как линейную комбинацию векторов x_i .]

ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

По своему значению в функциональном анализе пространства непрерывных функций уступают лишь гильбертовым пространствам. Введение этих пространств позволяет придать значительно более наглядный смысл классическому понятию *равномерной сходимости*. Наиболее важными результатами в этой главе являются:

1°. Теорема Стоуна — Вейерштрасса об аппроксимации (7.3.1), представляющая мощный инструмент для доказательства общих теорем о непрерывных функциях. Такого рода теоремы доказываются по следующей схеме: сначала они устанавливаются для функций какого-либо специального вида, а затем распространяются на все непрерывные функции с помощью соображений, связанных с плотностью.

2°. Теорема Асколи (7.5.7), лежащая в основании большинства доказательств компактности в функциональных пространствах и вместе с теоремой (7.5.6) мотивирующая введение понятия *равнотепенной непрерывности*. Последнее понятие играет еще более существенную роль в общей теории двойственности, упоминавшейся в гл. 5.

В последнем параграфе настоящей главы в качестве полезного технического орудия в развитии анализа вводятся функции, которые с классической точки зрения описываются как „функции с точками разрыва первого рода“. Стремясь сделать термин более кратким и избежать повторения избитого слова „regular“ (регулярный), автор сделал попытку ввести неологизм „regulated functions“ (соответствующий французскому „fonctions réglées“) ¹⁾, который, как он надеется, не будет звучать слишком варварски для читателей, говорящих по-английски.

1. Пространства ограниченных функций

Пусть A — произвольное множество и F — действительное (соответственно комплексное) нормированное пространство. Отображение f множества A в F *ограничено*, если множество $f(A)$ ограничено в F , или, что то же самое, если верхняя грань $\sup_{t \in A} \|f(t)\|$ конечна. Множество $\mathscr{B}_F(A)$ *всех ограниченных отображений множества A*

¹⁾ При переводе был выбран термин „простые“ функции. — *Прим. перев. и ред.*

в F является действительным (соответственно комплексным) векторным пространством, поскольку $\|f(t) + g(t)\| \leq \|f(t)\| + \|g(t)\|$. Кроме того,

$$(7.1.1) \quad \|f\| = \sup_{t \in A} \|f(t)\|$$

есть норма в этом пространстве, что можно без труда проверить.

Если F конечномерно и $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ — базис пространства F , причем $\|a_i\| = 1$, то любое отображение множества A в F может быть одним и только одним способом записано в виде

$$(7.1.1.1) \quad t \rightarrow f(t) = f_1(t) a_1 + \dots + f_n(t) a_n,$$

и f ограничено в том и только в том случае, если скалярные отображения $f_i (1 \leq i \leq n)$ ограничены. Кроме того, норма отображения $t \rightarrow f_i(t) a_i$ равна $\|f_i(t)\| \cdot \|a_i\| = \|f_i\|$, (норма отображения f_i берется в $\mathcal{B}_R(A)$, соответственно в $\mathcal{B}_C(A)$). Из (5.9.1), (5.4.2) и (5.5.1) следует, что существует такая константа c , что для каждого $t \in A$ выполняется неравенство $|f_i(t)| \leq c \cdot \|f(t)\|$, и, значит, $\|f_i\| \leq c \cdot \|f\|$.

Пусть L_i — подпространство пространства $\mathcal{B}_F(A)$, состоящее из всех ограниченных отображений вида $t \rightarrow f(t) a_i$ (f скалярно). Тогда, если снова воспользоваться (5.4.2) и (5.5.1), предыдущие замечания докажут, что

(7.1.2) Если F конечномерно, то $\mathcal{B}_F(A)$ есть топологическая прямая сумма подпространств L_i , каждое из которых изометрично $\mathcal{B}_R(A)$ (соответственно $\mathcal{B}_C(A)$).

В частности, если мы рассмотрим действительное нормированное векторное пространство, базисное для пространства $\mathcal{B}_C(A)$, то увидим, что оно есть топологическая прямая сумма $\mathcal{B}_R(A) + i\mathcal{B}_R(A)$.

(7.1.3) Если F — банахово пространство, то и $\mathcal{B}_F(A)$ — банахово пространство.

Пусть (f_n) — последовательность Коши в $\mathcal{B}_F(A)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\|f_m - f_n\| \leq \varepsilon$. Из (7.1.1) следует, что для любого $t \in A$ при $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$ имеем $\|f_m(t) - f_n(t)\| \leq \varepsilon$, поэтому, так как F — полное пространство, последовательность $(f_n(t))$ сходится к некоторому элементу $g(t) \in F$. Далее, по принципу продолжения неравенств для любого $t \in A$ и всех $m \geq n_0$, мы имеем $\|f_m(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$. Отсюда прежде всего заключаем, что при всех $t \in A$ имеет место неравенство $\|g(t)\| \leq \|f_m\| + \varepsilon$ и, значит, отображение g ограничено. Кроме того, при всех $m \geq n_0$ имеем $\|f_m - g\| \leq \varepsilon$,

а это значит, что последовательность (f_n) сходится в пространстве $\mathcal{B}_F(A)$ к g .

Вообще если (f_n) — последовательность отображений множества A в метрическое пространство F , то говорят, что последовательность (f_n) *просто сходится в A к отображению g* множества A в F , если для каждого $t \in A$ последовательность $(f_n(t))$ сходится в F к $g(t)$. Говорят, что последовательность (f_n) *равномерно сходится в A к g* , если последовательность чисел $(\sup_{t \in A} d(f_n(t), g(t)))$ стремится к 0. Ясно, что из равномерной сходимости следует простая сходимости; обратное не верно.

Если F — нормированное пространство, то сходимости последовательности элементов пространства $\mathcal{B}_F(A)$, таким образом, по определению, означает *равномерную сходимости* этой последовательности в A . Точно так же говорят, что ряд (u_n) , сходящийся в $\mathcal{B}_F(A)$ к сумме s , *равномерно сходится в A к сумме s* .

Если F — банахово пространство, то из (7.1.3) следует: для того чтобы ряд (u_n) отображений, принадлежащих $\mathcal{B}_F(A)$, был равномерно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_0 , что при $n \geq n_0$, $p \geq 0$ и при любом $t \in A$ выполнялось неравенство

$$\|u_n(t) + u_{n+1}(t) + \dots + u_{n+p}(t)\| \leq \varepsilon.$$

Из (7.1.3) и (5.3.2) следует, что если F — банахово пространство и если ряд (u_n) ограниченных функций обладает тем свойством, что ряд $(\|u_n\|)$ в $\mathbb{R}$ сходится, то ряд (u_n) сходится равномерно. Кроме того, так как $\|u_n(t)\| \leq \|u_n\|$, в этом случае ряд $(u_n(t))$ при каждом $t \in A$ сходится абсолютно. Однако обратное неверно: из этих двух последних свойств не следует, что ряд $(\|u_n\|)$ сходится. Чтобы избежать недоразумений, мы будем поэтому в случае, когда сходится ряд $(\|u_n\|)$, говорить, что ряд (u_n) в $\mathcal{B}_F(A)$ *сходится нормально*. Подобным же образом определяем *нормально суммируемое* семейство $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ в $\mathcal{B}_F(A)$ [L счетно, ср. (5.3)].

Задачи

1. Пусть u_n — функция, принадлежащая пространству $\mathcal{B}_\mathbb{R}(\mathbb{R})$, равная $1/n$ при $n \leq t < n+1$ и 0 при всех остальных значениях t . Покажите, что ряд (u_n) сходится равномерно и коммутативно (задача 4 § 5.3) и что при каждом $t \in \mathbb{R}$ ряд $(u_n(t))$ сходится абсолютно, но что вместе с тем ряд (u_n) не сходится нормально.

2. Пусть A — произвольное множество. Покажите, что отображение $u \rightarrow \sup_{t \in A} u(t)$ пространства $\mathcal{B}_\mathbb{R}(A)$ в $\mathbb{R}$ непрерывно.

3. Пусть E — метрическое пространство и F — нормированное пространство. Покажите, что множество всех отображений $f \in \mathcal{B}_F(E)$, колебание которых (3.14) в каждой точке пространства E не превосходит данного числа $\alpha > 0$, замкнуто в пространстве $\mathcal{B}_F(E)$.

2. Пространства ограниченных непрерывных функций

Пусть теперь E — метрическое пространство. Обозначим через $\mathcal{C}_F(E)$ векторное пространство *всех непрерывных отображений пространства E в нормированное пространство F* , а через $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ — множество *всех ограниченных непрерывных отображений E в F* . Заметим, что если E компактно, то в силу (3.17.10) $\mathcal{C}_F^\infty(E) = \mathcal{C}_F(E)$, вообще же $\mathcal{C}_F^\infty(E) = \mathcal{C}_F(E) \cap \mathcal{B}_F(E)$. Если не сказано противное, мы будем рассматривать $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ как нормированное подпространство пространства $\mathcal{B}_F(E)$.

Если F конечномерно, то f непрерывно в том и только в том случае, если непрерывно каждое из f_i в разложении (7.1.2.1) [см. (3.20.4) и (5.4.2)]. Замечания, предшествующие (7.1.2), показывают, что в этом случае $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ есть топологическая прямая сумма конечного числа подпространств, каждое из которых изометрично $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(E)$ (соответственно $\mathcal{C}_\mathbb{C}^\infty(E)$). В частности, базисное действительное нормированное пространство для пространства $\mathcal{C}_\mathbb{C}^\infty(E)$ есть топологическая прямая сумма $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(E) + i\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(E)$.

(7.2.1) Подпространство $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ замкнуто в $\mathcal{B}_F(E)$; иначе говоря, предел равномерно сходящейся последовательности ограниченных непрерывных функций есть непрерывная функция.

Действительно, пусть (f_n) — последовательность ограниченных непрерывных отображений пространства E в F , сходящаяся в $\mathcal{B}_F(E)$ к g . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что при $n \geq n_0$ имеет место неравенство $\|f_n - g\| \leq \varepsilon/3$. Пусть t_0 — произвольная точка пространства E и V — такая окрестность точки t_0 , что $\|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)\| \leq \varepsilon/3$ для любой точки $t \in V$. Тогда, поскольку для всех $t \in E$ имеем $\|f_{n_0}(t) - g(t)\| \leq \varepsilon/3$, для любой точки $t \in E$ выполняется неравенство $\|g(t) - g(t_0)\| \leq \varepsilon$, что и доказывает непрерывность отображения g .

Хорошо известные примеры (например, $x \rightarrow x^n$ в $[0, 1]$) показывают, что предел просто сходящейся последовательности непрерывных функций может не быть непрерывной функцией. С другой стороны, легко привести примеры последовательностей непре-

рывных функций, неравномерно сходящихся к непрерывной функции (см. задачу 2). Однако [см. также (7.5.6)]:

(7.2.2) (Теорема Дини) Пусть E — компактное метрическое пространство. Если возрастающая (соответственно убывающая) последовательность (f_n) действительных непрерывных функций просто сходится к непрерывной функции g , то она сходится к g равномерно.

Предположим, что последовательность возрастающая. Для каждого $\epsilon > 0$ и каждой точки $t \in E$ существует такой номер $n(t)$, что при $m \geq n(t)$ выполняется неравенство $g(t) - f_m(t) \leq \epsilon/3$. Так как g и $f_{n(t)}$ непрерывны, у точки t существует такая окрестность $V(t)$, что из $t' \in V(t)$ следует $|g(t) - g(t')| \leq \epsilon/3$ и $|f_{n(t)}(t) - f_{n(t)}(t')| \leq \epsilon/3$. Таким образом, для любой точки $t' \in V(t)$ мы имеем $g(t') - f_{n(t)}(t') \leq \epsilon$. Выберем теперь конечное число точек $t_i \in E$ так, чтобы окрестности $V(t_i)$ покрывали E , и пусть n_0 — наибольший из номеров $n(t_i)$. Тогда любая точка $t \in E$ принадлежит по крайней мере одной из окрестностей $V(t_i)$, поэтому при $n \geq n_0$ имеют место неравенства $g(t) - f_n(t) \leq g(t) - f_{n_0}(t) \leq g(t) - f_{n(t_i)}(t) \leq \epsilon$, ч. т. д.

Задачи

1. Пусть E — метрическое пространство, F — нормированное пространство и (u_n) — последовательность ограниченных непрерывных отображений пространства E в F , просто сходящаяся в E к ограниченному отображению v .

а) Для того чтобы отображение v было непрерывно в точке $x_0 \in E$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ и любого целого m существовали такая окрестность V точки x_0 и такой номер $n > m$, что $\|v(x) - u_n(x)\| \leq \epsilon$ в каждой точке $x \in V$.

б) Пусть E , кроме того, компактно. Тогда, для того чтобы отображение v было непрерывно в E , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ и любого целого m существовало конечное число таких номеров $n_i > m$, что для каждой точки $x \in E$ нашелся бы по крайней мере один индекс i , для которого $\|v(x) - u_{n_i}\| \leq \epsilon$.

[Примените а) и аксиому Бореля — Лебега.]

2. Пусть g_n (где n — любое целое число > 0) — непрерывная функция в $\mathbb{R}$, определяемая следующими условиями: $g_n(t) = 0$ при $t \leq 0$ и при $t \geq 2/n$, $g_n(1/n) = 1$, а в каждом из промежутков $[0, 1/n]$ и $[1/n, 2/n]$ функция $g_n(t)$ имеет вид $at + \beta$ (где a и β — надлежащим образом выбранные константы). Последовательность (g_n) сходится в $\mathbb{R}$ к 0 просто, но сходимости не является равномерной ни в одном открытом промежутке, содержащем точку $t = 0$.

Пусть $m \rightarrow r_m$ — биективное отображение множества $\mathbb{N}$ на множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и пусть $f_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} g_n(t - r_m)$. Функции f_n непрерывны (7.2.1), и последовательность (f_n) просто сходится в $\mathbb{R}$ к 0, но сходимость не является равномерной ни в каком открытом промежутке в $\mathbb{R}$. Докажите эти утверждения.

3. Пусть I — компактный промежуток в $\mathbb{R}$ и (f_n) — последовательность монотонных действительных функций в I , просто сходящаяся в I к непрерывной действительной функции f . Покажите, что функция f монотонна и что последовательность (f_n) сходится в I к f равномерно.

4. Пусть E — метрическое пространство, F — банахово пространство, A — множество, плотное в E . Пусть (f_n) — последовательность ограниченных непрерывных отображений пространства E в F , для которых сужения отображений f_n на A образуют равномерно сходящуюся последовательность. Покажите, что последовательность (f_n) равномерно сходится в E .

5. Пусть E — метрическое пространство и F — нормированное пространство. Покажите, что отображение $(x, u) \rightarrow u(x)$ пространства $E \times \mathcal{C}_F^{\infty}(E)$ в F непрерывно.

6. Пусть E, E' — метрические пространства и F — нормированное пространство. Для каждого отображения f пространства $E \times E'$ в F и каждой точки $y \in E'$ обозначим через f_y отображение $x \rightarrow f(x, y)$ пространства E в F .

а) Покажите, что если f ограничено и каждое из f_y непрерывно в E и если отображение $y \rightarrow f_y$ пространства E' в $\mathcal{C}_F^{\infty}(E)$ непрерывно, то f непрерывно. Докажите обратное, дополнительно предполагая, что E компактно.

[Примените задачу 3, а) § 3.20.]

б) Пусть $E = E' = F = \mathbb{R}$, а в качестве $f(x, y)$ возьмем функцию $\sin xy$, которая непрерывна и ограничена в $E \times E'$. Покажите, что отображение $y \rightarrow f_y$ пространства E' в $\mathcal{C}_F^{\infty}(E)$ не является непрерывным ни в одной точке пространства E' .

с) Предположим, что оба пространства E и E' компактны, и для каждого отображения $f \in \mathcal{C}_F(E \times E')$ обозначим символом $\tilde{f}$ отображение $y \rightarrow f_y$ пространства E' в $\mathcal{C}_F(E)$. Покажите, что отображение $f \rightarrow \tilde{f}$ есть линейная изометрия пространства $\mathcal{C}_F(E \times E')$ на пространство $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_F(E)}(E')$.

7. Пусть E — метрическое, а F — нормированное пространство. Для каждого ограниченного непрерывного отображения f пространства E в F обозначим через $G(f)$ график отображения f в пространстве $E \times F$.

а) Покажите, что $f \rightarrow G(f)$ — равномерно непрерывное инъективное отображение нормированного пространства $\mathcal{C}_F^{\infty}(E)$ в пространство $\mathcal{G}(E \times F)$ замкнутых множеств произведения $E \times F$, рассматриваемое в качестве метрического пространства с хаусдорфовым расстоянием (см. задачу 3 § 3.16).

б) Пусть Γ — образ пространства $\mathcal{C}_F^{\infty}(E)$ при отображении $f \rightarrow G(f)$. Покажите, что если E компактно, то обратное отображение G^{-1} множества Γ на $\mathcal{C}_F^{\infty}(E)$ непрерывно.

[Проведите доказательство от противного.]

с) Покажите, что в случае, когда $E = [0, 1]$ и $F = \mathbb{R}$, отображение G^{-1} не равномерно непрерывно.

8. Пусть E — метрическое пространство с ограниченным расстоянием d . Пусть d_x для каждой точки $x \in E$ — ограниченное непрерывное отображение $y \rightarrow d(x, y)$ пространства E в $\mathbb{R}$. Покажите, что $x \rightarrow d_x$ есть изометрия пространства E на подпространство банахова пространства $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\infty(E)$.

3. Теорема Стоуна — Вейерштрасса об аппроксимации

Для любого метрического пространства E векторное пространство $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\infty(E)$ (соответственно $\mathcal{B}_\mathbb{C}^\infty(E)$) является алгеброй над полем действительных (соответственно комплексных) чисел. Из (7.1.1) следует, что в этой алгебре мы имеем $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$, поэтому в силу (5.5.1) билинейное отображение $(f, g) \rightarrow fg$ непрерывно. Из этого замечания легко следует, что для любой подалгебры A алгебры $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\infty(E)$ (соответственно $\mathcal{B}_\mathbb{C}^\infty(E)$) замыкание $\bar{A}$ множества A в $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\infty(E)$ (соответственно в $\mathcal{B}_\mathbb{C}^\infty(E)$) также есть подалгебра [см. доказательство теоремы (5.4.1)].

Мы будем говорить, что подмножество A пространства $\mathcal{B}_\mathbb{R}(E)$ (соответственно $\mathcal{B}_\mathbb{C}(E)$) отделяет точки пространства E , если для любой пары различных точек x и y пространства E существует такая функция $f \in A$, что $f(x) \neq f(y)$.

(7.3.1) (Теорема Стоуна — Вейерштрасса) Пусть E — компактное метрическое пространство. Если подалгебра $A \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}(E)$ содержит постоянные функции и отделяет точки пространства E , то множество A плотно в банаховом пространстве $\mathcal{B}_\mathbb{R}(E)$.

Иными словами, если S — подмножество пространства $\mathcal{B}_\mathbb{R}(E)$, отделяющее точки, то для любой непрерывной в E действительной функции f существует такая последовательность (g_n) функций, равномерно сходящаяся к f , что каждая функция g_n может быть представлена как многочлен относительно функций, принадлежащих S , с действительными коэффициентами.

Доказательство распадается на несколько шагов.

(7.3.1.1) Существует возрастающая последовательность действительных полиномов (u_n) , равномерно сходящаяся в промежутке $[0, 1]$ к $\sqrt{t}$.

Определим u_n по индукции, взяв $u_1 = 0$ и положив

$$(7.3.1.2) \quad u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) \quad \text{при } n \geq 1.$$

По индукции докажем, что $u_{n+1} \geq u_n$ и $u_n(t) \leq \sqrt{t}$ в $[0, 1]$. Из (7.3.1.2) видим, что первое утверждение следует из второго. С дру-

гой стороны,

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - u_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) = \\ &= (\sqrt{t} - u_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n(t))\right),\end{aligned}$$

и из $u_n(t) \leq \sqrt{t}$ следует, что $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n(t)) \leq \sqrt{t} \leq 1$. Таким образом, в каждой точке $t \in [0, 1]$ последовательность $(u_n(t))$ возрастает и ограничена и, следовательно, сходится к некоторому пределу $v(t)$ (4.2.1). Но формула (7.3.1.2) дает $t - v^2(t) = 0$, и так как $v(t) \geq 0$, то $v(t) = \sqrt{t}$. Поскольку функция v непрерывна и последовательность (u_n) возрастает, из теоремы Дини (7.2.2) следует, что эта последовательность равномерно сходится к v .

(7.3.1.3) Для любой функции $f \in A$ функция $|f|$ принадлежит замыканию $\bar{A}$ множества A в $\mathcal{C}_R(E)$.

Пусть $a = \|f\|$. В силу (7.3.1.1) последовательность функций $u_n(f^2/a^2)$, принадлежащих A (по определению алгебры), равномерно сходится в E к $\sqrt{f^2/a^2} = |f|/a$.

(7.3.1.4) Для любой пары функций f, g , принадлежащих $\bar{A}$, функции $\sup(f, g)$ и $\inf(f, g)$ принадлежат $\bar{A}$.

В самом деле, мы можем написать $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ и $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$; таким образом, требуемый результат следует из утверждения (7.3.1.3), примененного к алгебре $\bar{A}$.

(7.3.1.5) Для любой пары различных точек x, y пространства E и любой пары действительных чисел α, β существует такая функция $f \in \bar{A}$, что $f(x) = \alpha$ и $f(y) = \beta$.

По предположению существует функция $g \in A$, для которой $g(x) \neq g(y)$. Так как A содержит постоянные функции, то мы можем взять $f = \alpha + (\beta - \alpha)(g - \gamma)/(\delta - \gamma)$, где $\gamma = g(x)$ и $\delta = g(y)$.

(7.3.1.6) Для любой функции $f \in \mathcal{C}_R(E)$, любой точки $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g \in \bar{A}$, что $g(x) = f(x)$ и что для любой точки $y \in E$ имеет место неравенство $g(y) \leq f(y) + \varepsilon$.

Пусть h_z для любой точки $z \in E$ есть функция, принадлежащая $\bar{A}$ и такая, что $h_z(x) = f(x)$ и $h_z(z) \leq f(z) + \varepsilon/2$; существование такой функции при $z = x$ очевидно, а при $z \neq x$ следует из (7.3.1.5).

Ввиду непрерывности функций f и h_z существует такая окрестность $V(z)$ точки z , что при $y \in V(z)$ выполняется неравенство $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$. Покроем E конечным числом окрестностей $V(z_i)$. Тогда в силу (7.3.1.4) функция $g = \inf(h_{z_i})$ принадлежит $\bar{A}$ и, поскольку каждая точка $y \in E$ принадлежит некоторой окрестности $V(z_i)$, удовлетворяет требуемым условиям.

$$(7.3.1.7) \quad \bar{A} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E).$$

Пусть f — произвольная функция из $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$. Для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой точки $x \in E$ выберем функцию $g_x \in \bar{A}$ так, чтобы $g_x(x) = f(x)$ и чтобы для всех точек $y \in E$ имело место неравенство $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$ (7.3.1.6). Тогда ввиду непрерывности функций f и g найдется такая окрестность $U(x)$ точки x , что для всех точек $y \in U(x)$ будет выполняться неравенство $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$. Покроем E конечным числом окрестностей $U(x_i)$. Тогда в силу (7.3.1.4) функция $\varphi = \sup(g_{x_i})$ принадлежит $\bar{A}$ и (поскольку каждая точка $y \in E$ принадлежит некоторой окрестности $U(x_i)$) для всех $y \in E$ будут выполняться неравенства $f(y) - \varepsilon \leq \varphi(y) \leq f(y) + \varepsilon$; иными словами, $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$. А это показывает, что f принадлежит замыканию множества $\bar{A}$, т. е. самому множеству $\bar{A}$.

Соответствующая теорема для $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E)$ не верна (см. гл. 9); имеется только более слабый результат:

(7.3.2) Пусть E — компактное метрическое пространство. Если подалгебра A алгебры $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E)$ содержит постоянные функции, отделяет точки пространства E и обладает тем свойством, что для всякой функции $f \in A$ сопряженная функция $\bar{f}$ также принадлежит A , то множество A плотно в $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E)$.

Заметим, что для любой функции $f \in A$ функции $\Re f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ и $\Im f = (f - \bar{f})/2i$ также принадлежат A . Поэтому если A_0 — (действительная) подалгебра A , состоящая из действительных функций, то из определения сразу следует, что A_0 отделяет точки пространства E и содержит (действительные) постоянные функции. Следовательно, A_0 плотно в $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ и отсюда, поскольку $A = A_0 + iA_0$, сразу следует, что A плотно в $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E) = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E) + i\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$.

4. Приложения

В теореме Стоуна — Вейерштрасса возьмем в качестве E любое компактное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, а в качестве A — алгебру сужений на E многочленов от n координат. Так как у любых

двух различных точек множества E по крайней мере одна из координат имеет различные значения, условие об отделении точек E выполняется. Таким образом, мы получаем классическую теорему Вейерштрасса о приближении:

(7.4.1) *Любая действительная непрерывная функция на компактном множестве E в пространстве $\mathbb{R}^n$ является пределом равномерно сходящейся на E последовательности многочленов.*

Возьмем теперь в качестве E единичную окружность $\bar{x}^2 + y^2 = 1$ в $\mathbb{R}^2$, параметризованную углом πt , так что непрерывные на E функции могут быть отождествлены с функциями, непрерывными в пространстве $\mathbb{R}$ и имеющими период 2 (см. гл. 9). В качестве A возьмем (комплексную) алгебру, порожденную константами и функциями $e^{\pi i t}$ и $e^{-\pi i t}$. Ясно, что элементы A — тригонометрические многочлены $\sum_{n=-N}^N c_n e^{\pi i n t}$. Так как функция $e^{\pi i t}$ отделяет точки пространства E , то все условия теоремы (7.3.2) выполнены. Таким образом:

(7.4.2) *Любая комплексная непрерывная функция в $\mathbb{R}$, периодическая с периодом 2, является пределом равномерно сходящейся в $\mathbb{R}$ последовательности тригонометрических многочленов.*

Этот последний результат позволяет нам дать доказательство следующего факта, уже упоминавшегося в 6.5:

(7.4.3) *Тригонометрическая система тотальна в предгильбертовом пространстве $F = \mathcal{E}_c(I)$.*

[Это пространство определено в (6.5.1); заметим, что здесь мы не вводим в $\mathcal{E}_c(I)$ норму (7.1.1).]

В самом деле, для любой функции $f \in \mathcal{E}_c(I)$ и любого целого числа $n > 0$ рассмотрим функцию g , равную f при $-1 + 1/n \leq t \leq 1$, равную $f(1)$ при $t = -1$ и линейную между -1 и $-1 + 1/n$. Тогда $f(t) - g(t) = 0$, если $t \geq -1 + 1/n$, и $|f(t) - g(t)| \leq 4 \|f\|_\infty$ при всех остальных значениях t [символом $\|\cdot\|_\infty$ обозначена норма, определенная формулой (7.1.1), а символом $\|\cdot\|_2$ — предгильбертова норма]. Следовательно,

$$\|f - g\|_2^2 = \int_{-1}^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \frac{16}{n} \|f\|_\infty^2;$$

иными словами, норма $\|f - g\|_2$ сколь угодно мала. Так как функция g непрерывна и (поскольку $g(1) = g(-1)$) может быть продолжена периодически на всю ось t , то в силу (7.4.2) существует такой тригонометрический многочлен h , что норма $\|g - h\|_2 \leq \sqrt{2} \|g - h\|_\infty$ сколь угодно мала, и это завершает доказательство.

(7.4.4) Если E — компактное метрическое пространство, то пространства $\mathcal{C}_R(E)$ и $\mathcal{C}_C(E)$ сепарабельны.

Так как $\mathcal{C}_C(E)$ есть топологическая прямая сумма пространств $\mathcal{C}_R(E)$ и $i\mathcal{C}_R(E)$, то нам нужно провести доказательство только для $\mathcal{C}_R(E)$. Пусть (U_n) — счетная база открытых множеств пространства E (3.16.2) и пусть $g_n(t) = d(t, E \setminus U_n)$. Одночлены $g_1^a \dots g_n^a$ относительно g_n также образуют счетное множество (h_n) [ввиду (1.9.3) и (1.9.4)], а векторное пространство A , порожденное функциями h_n , есть подалгебра алгебры $\mathcal{C}_R(E)$, порожденная элементами g_n . Если мы докажем, что A плотно в $\mathcal{C}_R(E)$, то доказательство будет закончено (5.10.1).

Итак, нам нужно только применить теорему Стоуна — Вейерштрасса и, значит, убедиться в том, что семейство (g_n) отделяет точки пространства E . Но если $x \neq y$, то существует такая окрестность U_n , что $x \in U_n$ и $y \notin U_n$. Поэтому по определению $g_n(x) \neq 0$ и $g_n(y) = 0$, ч. т. д.

Задачи

1. Пусть E и F — два компактных метрических пространства и f — непрерывное отображение произведения $E \times F$ в $\mathbb{R}$. Покажите, что для любого $\epsilon > 0$ существуют такая конечная система $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ непрерывных отображений пространства E в $\mathbb{R}$ и такая конечная система $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ непрерывных отображений пространства F в $\mathbb{R}$, что для любой точки $(x, y) \in E \times F$ выполняется неравенство $\left| f(x, y) - \sum_{i=1}^n u_i(x) v_i(y) \right| \leq \epsilon$.

[Примените теорему Стоуна — Вейерштрасса к алгебре, порожденной непрерывными отображениями $(x, y) \rightarrow u(x)$ и $(x, y) \rightarrow v(y)$, где $u \in \mathcal{C}_R(E)$ и $v \in \mathcal{C}_R(F)$.]

2. Пусть $n \rightarrow r_n$ — биективное отображение множества $\mathbb{N}$ на множество рациональных чисел, принадлежащих промежутку $[0, 1] = I$. По индукции определим последовательность (I_n) замкнутых промежутков, содержащихся в I и удовлетворяющих следующим условиям: 1°) центром промежутка I_n является число r_{k_n} , где k_n — наименьший индекс p , для которого число r_p не содержится в объединении промежутков I_h с индексами $h < n$; 2°) длина промежутка $I_n \leq 1/4^n$ и I_n не пересекается ни с одним из промежутков I_h с $h < n$. В произведении $I \times \mathbb{R}$ определим действительную непрерывную ограниченную функцию u , обладающую следующими свойствами: 1°) для каждого целого числа $n \geq 0$ отображение $x \rightarrow u(x, n)$ принимает значение 1 при $x = r_{k_n}$, равно 0 при $x \notin I_n$ и $0 \leq u(x, n) \leq 1$ во всех точках $x \in I$; 2°) для каждой точки $x \in I$ функция $y \rightarrow u(x, y)$ в каждом из промежутков $] -\infty, 0]$ и $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $\alpha y + \beta$. Покажите, что не существует конечной системы функций $v_i \in \mathcal{C}_R(I)$, $w_i \in \mathcal{C}_R^\infty(\mathbb{R})$ ($1 \leq i \leq n$), для которых в $I \times \mathbb{R}$

$$\left| u(x, y) - \sum_{i=1}^n v_i(x) w_i(y) \right| \leq 1/4.$$

[Допустим противное; рассмотрим функции $u_n: x \rightarrow u(x, n)$, принадлежащие $\mathcal{C}_R(I)$, и заметим, что $\|u_n\| = 1$, $\|u_n - u_m\| = 1$ при $m \neq n$. Если бы существовало конечномерное подпространство E пространства $\mathcal{C}_R(I)$, для которого при каждом n имело место неравенство $d(u_n, E) \leq 1/4$, то в E нашлась бы такая бесконечная последовательность (h_n) , что $\|h_n\| = 2$ и $\|h_n - h_m\| \geq 1/2$ при $m \neq n$, что противоречит (5.10.1).]

3. Пусть E — промежуток $[0, 1]$ в $\mathbb{R}$.

а) Покажите, что если a_k ($1 \leq k \leq n$) — n различных точек промежутка E , то функции $x \rightarrow |x - a_k|$ линейно независимы в $\mathcal{C}_R(E)$.

б) Выведите из а), что функция $(x, y) \rightarrow |x - y|$ в $E \times E$ не может быть представлена в виде конечной суммы $\sum_{i=1}^n v_i(x) w_i(y)$, где v_i и w_i непрерывны в E .

4. Покажите, что банахово пространство $\mathcal{C}_R^\infty(\mathbb{R})$ не сепарабельно.

[Примените метод, аналогичный тому, которым пользовались в задаче § 5.10.]

5. Равностепенно непрерывные множества

Пусть H — множество в пространстве $\mathcal{F}_F(E)$ (E — метрическое пространство, F — нормированное пространство). Мы говорим, что H *равностепенно непрерывно в точке* $x_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $d(x_0, x) \leq \delta$ следует $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$ для каждой функции $f \in H$ (здесь важно, что δ не зависит от f). Далее, H *равностепенно непрерывно*, если оно равностепенно непрерывно в каждой точке пространства E .

Примеры. (7.5.1) Допустим, что существуют такие две константы $c, \alpha > 0$, что для любой функции $f \in H$ и любой пары точек x и y пространства E выполняется неравенство $\|f(x) - f(y)\| \leq c \cdot (d(x, y))^\alpha$. Тогда H равностепенно непрерывно.

(7.5.2) Любое конечное множество функций, непрерывных в точке x_0 (соответственно в E), равностепенно непрерывно в x_0 (соответственно равностепенно непрерывно). Более общее утверждение: любое объединение конечного числа множеств функций, равностепенно непрерывных в точке x_0 (соответственно равностепенно непрерывных), равностепенно непрерывно в точке x_0 (соответственно равностепенно непрерывно).

(7.5.3) Пусть (f_n) — последовательность функций, принадлежащих $\mathcal{F}_F(E)$, просто сходящаяся к функции g и равностепенно непрерывная в точке x_0 (соответственно равностепенно непрерывная). Тогда функция g непрерывна в точке x_0 (соответственно непрерывна).

В самом деле, допустим, что для любой точки x , для которой $d(x, x_0) \leq \delta$, и любого n выполняется неравенство $\|f_n(x_0) - f_n(x)\| \leq \epsilon$. Тогда по принципу продолжения неравенств для любой точки x , для которой $d(x, x_0) \leq \delta$, мы будем иметь $\|g(x) - g(x_0)\| \leq \epsilon$, ч. т. д.

(7.5.4) В пространстве $\mathcal{E}_F^\infty(E)$ замыкание любого равномерно непрерывного множества равномерно непрерывно.

Это сразу следует из (3.13.13) и из доказательства (7.5.3).

(7.5.5) Пусть F — банахово пространство, (f_n) — равномерно непрерывная последовательность в $\mathcal{E}_F^\infty(E)$ и пусть последовательность $(f_n(x))$ для любой точки x множества D , плотного в E , сходится в F . Тогда последовательность (f_n) просто сходится к (непрерывной) функции g .

Так как F — полное пространство, нужно лишь доказать, что для каждой точки $x \in E$ последовательность $(f_n(x))$ является в F последовательностью Коши. Для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $d(x, y) \leq \delta$ следует $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \epsilon/3$ при каждом n . С другой стороны, существует такая точка $y \in D$, что $d(x, y) \leq \delta$, и, по предположению, найдется такой номер n_0 , что при $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$ будет иметь место неравенство $\|f_m(y) - f_n(y)\| \leq \epsilon/3$. Отсюда следует, что при $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$ мы будем иметь $\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \epsilon$, ч. т. д.

(7.5.6) Пусть E — компактное метрическое пространство, (f_n) — равномерно непрерывная последовательность в $\mathcal{E}_F(E)$. Если последовательность (f_n) сходится в E к функции g просто, то она сходится к ней в E равномерно.

Пусть задано $\epsilon > 0$. У каждой точки $x \in E$ существует такая окрестность $V(x)$, что из $y \in V(x)$ следует $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \epsilon/3$ при каждом n . Покроем E конечным числом окрестностей $V(x_i)$. Выберем номер n_0 так, чтобы мы имели $\|g(x_i) - f_n(x_i)\| \leq \epsilon/3$ при $n \geq n_0$ и при всех индексах i . Но любая точка $x \in E$ принадлежит какой-либо из окрестностей $V(x_i)$, поэтому при всех n выполняется неравенство $\|f_n(x) - f_n(x_i)\| \leq \epsilon/3$, и, устремляя n к $+\infty$, получаем $\|g(x) - g(x_i)\| \leq \epsilon/3$. Таким образом, для любого $n \geq n_0$ и любой точки $x \in E$ мы имеем $\|g(x) - f_n(x)\| \leq \epsilon$, ч. т. д.

(7.5.7) (Теорема Асколи) Пусть F — банахово пространство и E — компактное метрическое пространство. Для того чтобы подмножество H банахова пространства $\mathcal{E}_F(E)$ было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы H было равномерно непрерывно и чтобы для каждой точки $x \in E$ множество $H(x)$ всех $f(x)$, для которых $f \in H$, было относительно компактно в F .

Необходимость. Если H относительно компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число таких функций $f_i \in H$, что для каждой функции $f \in H$ найдется индекс i , при котором $\|f - f_i\| \leq \varepsilon/3$ (3.17.5). Отсюда прежде всего следует, что для каждой точки $x \in E$ выполняется неравенство $\|f(x) - f_i(x)\| \leq \varepsilon/3$, и, поскольку F — полное пространство, это ввиду (3.17.5) показывает, что $H(x)$ относительно компактно. С другой стороны, пусть V — такая окрестность точки x , что из $y \in V$ при каждом i следует $\|f_i(y) - f_i(x)\| \leq \varepsilon/3$. Тогда для любой функции $f \in H$ из $y \in V$ следует $\|f(y) - f(x)\| \leq \varepsilon$, что доказывает равностепенную непрерывность множества H .

Достаточность. Так как пространство $\mathcal{C}_F(E)$ в силу (7.1.3) и (7.2.1) является полным, нам нужно лишь доказать, что H вполне ограничено (3.17.5). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x \in E$ пусть $V(x)$ — такая ее окрестность, что из $y \in V(x)$ для всех $f \in H$ следует $\|f(y) - f(x)\| \leq \varepsilon/4$. Покроем E конечным числом окрестностей $V(x_i)$ ($1 \leq i \leq m$). Каждое из множеств $H(x_i)$, по предположению, относительно компактно в F , поэтому относительно компактным будет и их объединение K . Пусть $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ — такое конечное подмножество множества K , что каждая точка из K содержится в шаре с центром в одной из точек c_j и радиусом $\varepsilon/4$. Пусть теперь Φ — (конечное) множество всех отображений промежутка $[1, m]$ в $[1, n]$ (промежутки в $\mathbb{N}$). Для каждого отображения $\varphi \in \Phi$ обозначим через L_φ множество всех функций $f \in H$, для которых при всех $i \in [1, m]$ выполняется неравенство $\|f(x_i) - c_{\varphi(i)}\| \leq \varepsilon/4$. Некоторые из множеств L_φ могут оказаться пустыми, но из определения точек c_j следует, что объединение всех L_φ покрывает H . Чтобы завершить доказательство, нам нужно только показать, что диаметр каждого из множеств L_φ не превосходит ε . Пусть функции f и g принадлежат L_φ . Для каждой точки $y \in E$ найдется такой номер i , что $y \in V(x_i)$, и, следовательно, $\|f(y) - f(x_i)\| \leq \varepsilon/4$ и $\|g(y) - g(x_i)\| \leq \varepsilon/4$. Так как по определению множества L_φ можем написать $\|f(x_i) - c_{\varphi(i)}\| \leq \varepsilon/4$, то для каждой точки $y \in E$ имеем $\|f(y) - g(y)\| \leq \varepsilon$, т. е. $\|f - g\| \leq \varepsilon$, ч. т. д.

Задачи

1. Пусть E — метрическое пространство, F — нормированное пространство и H — ограниченное множество в $\mathcal{C}_F^\infty(E)$. Для каждой точки $x \in E$ пусть $\tilde{x}$ есть отображение $u \rightarrow u(x)$ множества H в F , являющееся непрерывным и ограниченным. Покажите, что, для того чтобы H было равностепенно непрерывно в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы отображение $x \rightarrow \tilde{x}$ пространства E в $\mathcal{C}_F^\infty(H)$ было непрерывно в точке x_0 .

2. Пусть E — метрическое пространство, F — нормированное пространство и (f_n) — равномерно непрерывная последовательность в $\mathcal{C}_F^\infty(E)$. Покажите, что множество точек $x \in E$, для которых $(f_n(x))$ есть последовательность Коши в F , замкнуто в F .

3. Пусть E — промежуток $[0, +\infty[$ в $\mathbb{R}$ и пусть для любого n

$$f_n(t) = \sin \sqrt{t + 4n^2\pi^2}$$

— функция на множестве E . Покажите, что последовательность (f_n) равномерно непрерывна в E и просто сходится в E к 0, но не относительно компактна в пространстве $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty(E)$.

[Покажите, что если бы она была относительно компактна, то она равномерно сходилась бы к 0.]

4. Пусть E — метрическое пространство, F — нормированное пространство и (f_n) — последовательность функций, принадлежащих $\mathcal{C}_F^\infty(E)$, равномерно непрерывная в точке $a \in E$. Покажите, что если последовательность $(f_n(a))$ сходится к $b \in F$, то для любой последовательности (x_n) в E , для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, последовательность $(f_n(x_n))$ сходится в F к b .

5. Пусть E — метрическое пространство и F — нормированное пространство. Будем говорить, что множество $H \subset \mathcal{C}_F^\infty(E)$ *равномерно равномерно непрерывно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $d(x, y) \leq \delta$ следует $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ для каждой функции $f \in H$. Любая функция $f \in H$ равномерно непрерывна; когда H конечно, верно и обратное: конечное множество равномерно непрерывных функций равномерно равномерно непрерывно. Покажите, что для множества H , ограниченного в $\mathcal{C}_F^\infty(E)$, эквивалентны следующие свойства:

а) H равномерно равномерно непрерывно;

б) отображение $x \rightarrow \tilde{x}$ пространства E в $\mathcal{C}_F^\infty(H)$ (задача 1) равномерно непрерывно;

γ) отображение $(u, x) \rightarrow u(x)$ пространства $H \times E$ в F (H рассматривается как подпространство пространства $\mathcal{C}_F^\infty(E)$) равномерно непрерывно.

6. Пусть E — метрическое пространство, F — нормированное пространство и H — равномерно равномерно непрерывное множество в $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ (задача 5). Покажите, что замыкание множества H в $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ равномерно равномерно непрерывно.

7. Пусть E — компактное метрическое пространство и F — нормированное пространство. Покажите, что любое равномерно равномерно непрерывное множество в $\mathcal{C}_F(E)$ равномерно равномерно непрерывно.

8. Пусть E — компактное метрическое пространство и F — банахово пространство. Покажите, что если множество H в $\mathcal{C}_F(E)$ относительно компакно, то объединение всех множеств $H(x)$, где $x \in E$, относительно компакно в F .

[Примените задачу 5 § 7.2.]

9. Покажите, что заключение теоремы Асколи (7.5.7) останется справедливым, если предположение о том, что $H(x)$ относительно компактно в F для всех точек $x \in E$, заменить предположением, что $H(x)$ относительно компактно только для всех точек $x \in D$, где D — множество, плотное в E .

10. Пусть E — метрическое пространство и H — равномерно непрерывное множество в $\mathcal{C}_R^\infty(E)$. Покажите, что множество A точек $x \in E$, для которых $H(x)$ ограничено в $\mathbb{R}$, одновременно открыто и замкнуто в E . Если E компактно и связно и если для одной точки $x_0 \in E$ множество $H(x_0)$ ограничено в $\mathbb{R}$, то H относительно компактно в $\mathcal{C}_R(E)$.

11. Пусть E — метрическое пространство и H — равномерно непрерывное множество в $\mathcal{C}_R^\infty(E)$. Для каждой точки $x \in E$ положим

$$v(x) = \sup_{f \in H} f(x), \quad w(x) = \inf_{f \in H} f(x).$$

Покажите, что если верхняя грань v (соответственно нижняя грань w) конечна в некоторой точке x_0 , то она конечна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 ; если $v(x_0) = +\infty$ (соответственно $w(x_0) = -\infty$), то $v(x) = +\infty$ (соответственно $w(x) = -\infty$), в некоторой окрестности точки x_0 . Заключите отсюда, что множество точек $x \in E$, для которых $v(x)$ (соответственно $w(x)$) конечно, одновременно открыто и замкнуто в E .

6. Простые функции

Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$ с началом a и концом b (a или b или и a и b могут быть бесконечны) и F — банахово пространство. Мы будем говорить, что отображение f промежутка I в F есть *ступенчатая функция*, если существует такая возрастающая конечная последовательность $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ точек промежутка I (замыкания промежутка I в $\bar{\mathbb{R}}$), что $x_0 = a$, $x_n = b$ и что отображение f постоянно на каждом из открытых промежутков $]x_i, x_{i+1}[$ ($0 \leq i \leq n-1$).

Для любого отображения f промежутка I в F и любой точки $x \in I$, отличной от b , будем говорить, что f имеет в этой точке *предел справа*, если существует предел $\lim_{\substack{y \in I, y > x \\ y \rightarrow x}} f(y)$; в этом случае

такой предел обозначается символом $f(x+)$. Точно так же для каждой точки $x \in I$, отличной от a , мы определяем *предел слева* отображения f в точке x и обозначаем его символом $f(x-)$; эти пределы мы называем также *односторонними пределами* отображения f .

Отображение f промежутка I в F называется *простой функцией*, если оно имеет односторонние пределы в каждой точке промежутка I . Ясно, что каждая ступенчатая функция является простой.

(7.6.1) Для того чтобы отображение f компактного промежутка $I=[a, b]$ в F было простым, необходимо и достаточно, чтобы f было пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций.

Необходимость. Для каждого целого $n > 0$ и каждой точки $x \in I$ существует такой открытый промежуток $V(x) =]y(x), z(x)[$, содержащий x , что $\|f(s) - f(t)\| \leq 1/n$, если обе точки s и t принадлежат $]y(x), x[\cap I$ или обе они принадлежат $]x, z(x)[\cap I$. Покроем I конечным числом промежутков $V(x_i)$, и пусть $(c_j)_{0 \leq j \leq m}$ — строго возрастающая последовательность, состоящая из точек $a, b, x_i, y(x_i)$ и $z(x_i)$. Так как каждая точка c_j содержится в некотором промежутке $V(x_i)$, то c_{j+1} либо принадлежит тому же промежутку $V(x_i)$, либо же мы имеем $c_{j+1} = z(x_i)$ (где $j \leq m-1$). Иными словами, если точки s и t принадлежат одному и тому же промежутку $]c_j, c_{j+1}[$, то $\|f(s) - f(t)\| \leq 1/n$. Пусть теперь g_n — ступенчатая функция, равная f в точках c_j и в середине каждого промежутка $]c_j, c_{j+1}[$ и постоянная в каждом из этих промежутков. Ясно, что $\|f - g_n\| \leq 1/n$.

Достаточность. Пусть f — предел равномерно сходящейся последовательности (f_n) ступенчатых функций. Для каждого $\epsilon > 0$ существует такое n , что $\|f - f_n\| \leq \epsilon/3$. Далее, для каждой точки $x \in I$ найдется такой промежуток $]c, d[$, содержащий x , что $\|f_n(s) - f_n(t)\| \leq \epsilon/3$, если обе точки s и t содержатся в $]c, x[$ или обе они содержатся в $]x, d[$. Поэтому при том же предположении $\|f(s) - f(t)\| \leq \epsilon$, и, поскольку F — полное пространство, это доказывает существование односторонних пределов отображения f в точке x (3.14.6).

Теорему (7.6.1) можно сформулировать по-другому, сказав, что множество простых функций замкнуто в $\mathscr{P}_F(E)$ и что множество ступенчатых функций плотно в множестве простых функций.

(7.6.2) Любое непрерывное отображение промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство является простым; любое монотонное отображение промежутка I в $\mathbb{R}$ является простым.

Это следует из определения, если принять во внимание (3.16.5) и (4.2.1).

Задачи

1. Пусть f — простое отображение промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство F . Покажите, что образ $f(H)$ каждого компактного подмножества H промежутка I относительно компактен в F . Приведите пример, показывающий, что образ $f(H)$ может быть не замкнут в F .

2. Функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ непрерывна и, значит, проста в $I = [0, 1]$; функция $g(x) = \text{sign } x$ ($g(x) = 1$ при $x > 0$, $g(0) = 0$,

$g(x) = -1$ при $x < 0$) проста в $\mathbb{R}$, но сложная функция $g \circ f$ не является простой в I .

3. Пусть $I = [a, b]$ — компактный промежуток в $\mathbb{R}$. Функция ограниченной вариации в I есть отображение f промежутка I в банахово пространство F , обладающее следующим свойством: существует такое число $V \geq 0$, что для любой строго возрастающей конечной последовательности $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ точек промежутка I имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \leq V.$$

а) Покажите, что множество $f(I)$ относительно компактно в F .

[Докажите от противного, что $f(I)$ вполне ограничено.]

б) Покажите, что f — простая функция в I .

[Примените а) и (3.16.4).]

с) Функция, равная $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$ и 0 при $x = 0$, не является в $I = [0, 1]$ функцией ограниченной вариации, несмотря на то, что она имеет производную в каждой точке промежутка I .

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Эта глава содержит лишь элементарные теоремы дифференциального исчисления, но способ, которым они излагаются, вероятно, окажется новым для большинства читателей.

Такое изложение, строго соответствующее нашей общей „геометрической“ точке зрения на анализ, имеет целью как можно ярче и выпуклее оттенить основную идею дифференциального исчисления, а именно идею „локального“ приближения функций линейными функциями. В классическом преподавании анализа эта идея с самого начала затемняется тем случайным фактом, что между линейными формами в одномерном векторном пространстве и числами существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому производная в точке определяется в классических курсах анализа не как линейная форма, а как число. Рабское подчинение фетишу числовой интерпретации, чего бы это ни стоило, приносит намного больше вреда, когда такая интерпретация распространяется и на функции нескольких переменных. Именно так, например, обстоит дело с теоремой (8.9.2), выражающей частные производные сложной функции. Ее классическая запись лишена какой бы то ни было наглядности, в то время как эта теорема, конечно, состоит в том, что (полная) производная композиции функций есть композиция их производных (8.2.1) — весьма естественная формулировка для того, кто привык рассуждать в терминах линейных приближений.

Такие „внутренние“ формулировки определений и теорем анализа в отличие от рутины классических формул требуют, несомненно, известного умственного напряжения, обусловленного большой „абстрактностью“ и в частности, тем, что приходится вновь и вновь покидать исходное пространство и взбираться все выше и выше в новые „функциональные пространства“ (особенно в теории производных высшего порядка). Но результат вполне заслуживает потраченного труда, так как он подготавливает к усвоению более общей идеи анализа — идеи *дифференцируемого многообразия*. Читатель, желающий познакомиться с этой идеей и с вопросами, к которым она приводит, может обратиться к книгам Шевалле [9] и де Рама [12]. Конечно, он заметит, что все встречающиеся в этих приложениях векторные пространства имеют конечную размерность. Разумеется, это дополнительное предположение можно при желании сделать и во всех теоремах настоящей главы. Однако читатель сам увидит, что теоремы от этого не сделаются ни на йоту короче или проще. Иными словами, предположение о конечной размерности для рассматриваемого материала абсолютно несущественно. Поэтому лучше вообще обойтись без такого ограничения,

хотя приложения дифференциального исчисления к конечномерному случаю намного превосходят остальные как по числу, так и по важности.

Формальные правила дифференциального исчисления выводятся в 8.1—8.4. Остальные параграфы этой главы посвящены различным приложениям, пожалуй, самой полезной теоремы анализа — теоремы о среднем значении, доказываемой в 8.5. Читатель заметит, что формулировка этой теоремы (которая дается для вектор-функций) по форме отличается от классической теоремы о среднем значении (для действительных скалярных функций), обычно записываемой в виде равенства $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Неудобства этой классической формулировки состоят в следующем:

- 1°) нет ничего на нее похожего, если f принимает векторные значения;
- 2°) в ней полностью затушевывается тот факт, что о числе c не известно ничего, кроме того, что оно лежит между a и b .

Между тем для большинства приложений нужно знать только то, что $f'(c)$ есть число, заключенное между нижней и верхней гранями производной f' на промежутке $[a, b]$, а вовсе не то, что это и в самом деле значение производной. Иными словами, настоящая природа теоремы о среднем значении выявляется, если записать ее не в виде равенства, а в виде неравенства.

Наконец, читателю бросится в глаза отсутствие интеграла Римана, составляющего осязаемый раздел курса анализа. Можно быть уверенным, что если бы этот раздел не носил столь авторитетное имя, он давно был бы исключен из курсов анализа, ибо любому работающему математику (при всем уважении к гению Римана) совершенно ясно, что в наши дни эта „теория“ может претендовать лишь на место не слишком интересного упражнения в общей теории меры и интеграла. Только упрямый консерватизм педагогической традиции сохраняет интеграл Римана как полноправную часть учебной программы, хотя давно уже он пережил свое историческое значение.

Конечно, чтобы избежать каких бы то ни было рассуждений из теории меры, вполне возможно ограничить процесс интегрирования классом функций, достаточно широким для всех целей элементарного анализа (на уровне нашего курса), но достаточно близким к классу непрерывных функций. Именно это мы и сделали, определив только интеграл от простых функций (иногда называемый *интегралом Коши*). В случае когда требуется более мощный инструмент, не имеет смысла останавливаться на полпути, и единственное разумное решение дает общая теория (*лебеговского*) интегрирования.

1. Производная непрерывного отображения

Пусть E, F — банаховы пространства (оба действительные или же оба комплексные) и A — открытое множество в E . Пусть f и g — два непрерывные отображения множества A в F . Будем говорить, что f и g касательны в точке $x_0 \in A$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

откуда, конечно, следует, что $f(x_0) = g(x_0)$. Заметим, что это определение зависит только от топологий пространств E и F , потому что если f и g касательны при данных нормах в пространствах E и F , то они останутся касательными и при эквивалентных нормах (5.6). Если f и g касательны в точке x_0 и g и h касательны в точке x_0 , то, как следует из неравенства

$$\|f(x) - h(x)\| \leq \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - h(x)\|,$$

отображения f и h касательны в точке x_0 .

Среди всех функций, касательных к функции f в точке x_0 , существует не больше одного отображения вида $x \rightarrow f(x_0) + u(x - x_0)$, где u линейно. В самом деле, если две такие функции $x \rightarrow f(x_0) + u_1(x - x_0)$ и $x \rightarrow f(x_0) + u_2(x - x_0)$ касательны в точке x_0 , то для линейного отображения $v = u_1 - u_2$ это означает, что $\lim_{y \rightarrow 0, y \neq 0} \|v(y)\|/\|y\| = 0$. Но отсюда следует, что $v = 0$. Дей-

ствительно, если задать произвольное $\epsilon > 0$, то найдется такое $r > 0$, что при $\|y\| \leq r$ будет выполняться неравенство $\|v(y)\| \leq \epsilon \|y\|$. Это последнее неравенство будет справедливо и для любой точки $x \neq 0$, в чем можно убедиться, применив его к $y = rx/\|x\|$. Так как ϵ произвольно, то мы видим, что $v(x) = 0$ для любой точки x .

Будем говорить, что непрерывное отображение f множества A в F дифференцируемо в точке $x_0 \in A$, если существует такое линейное отображение u пространства E в F , что отображение $x \rightarrow f(x_0) + u(x - x_0)$ касательно к f в точке x_0 . Мы уже видели, что такое отображение в этом случае единственно; оно называется производной (или полной производной) отображения f в точке x_0 и обозначается символом $f'(x_0)$ или $Df(x_0)$.

(8.1.1) Если непрерывное отображение f множества A в пространство F дифференцируемо в точке x_0 , то производная $f'(x_0)$ является непрерывным линейным отображением пространства E в F .

Пусть $u = f'(x_0)$. Если задано $\epsilon > 0$, то существует такое r , что $0 < r < 1$ и что из $\|t\| \leq r$ следует $\|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \leq \epsilon/2$ и $\|f(x_0 + t) - f(x_0) - u(t)\| \leq \epsilon\|t\|/2$. Поэтому из $\|t\| \leq r$ следует $\|u(t)\| \leq \epsilon$, что в силу (5.5.1) доказывает непрерывность отображения u .

Производная непрерывного отображения f множества A в F в точке $x_0 \in A$ (когда она существует) является, таким образом, элементом банахова пространства $\mathcal{L}(E; F)$ [см. 5.7], а не пространства F . Ниже для любого отображения $u \in \mathcal{L}(E; F)$ и точки $t \in E$ вместо $u(t)$ мы будем писать $u \cdot t$. Напомним (5.7), что $\|u \cdot t\| \leq \|u\| \cdot \|t\|$ и $\|u\| = \sup_{\|t\| \leq 1} \|u \cdot t\|$.

В случае когда E имеет конечную размерность n , а F — конечную размерность m , производную $f'(x_0)$ можно, таким образом,

отождествить с матрицей, имеющей m строк и n столбцов. Эта матрица будет определена в (8.10).

Примеры (8.1.2) Постоянная функция дифференцируема в каждой точке множества A , и ее производная есть элемент 0 пространства $\mathcal{L}(E; F)$.

(8.1.3) Производная непрерывного линейного отображения u пространства E в F существует в каждой точке $x \in E$ и $Du(x) = u$.

Действительно, по определению $u(x_0) + u(x - x_0) = u(x)$.

(8.1.4) Пусть E, F и G — три банаховых пространства и $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$ — непрерывное билинейное отображение пространства $E \times F$ в G . Тогда это отображение дифференцируемо в каждой точке $(x, y) \in E \times F$ и его производная есть линейное отображение $(s, t) \rightarrow [x \cdot t] + [s \cdot y]$.

В самом деле, мы имеем

$$[(x+s) \cdot (y+t)] - [x \cdot y] - [x \cdot t] - [s \cdot y] = [s \cdot t],$$

и по предположению существует такое число $c > 0$, что $\|[s \cdot t]\| \leq c \cdot \|s\| \cdot \|t\|$ (5.5.1). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ из $\sup(\|s\|, \|t\|) = \|(s, t)\| \leq \varepsilon/c$ следует, что

$$\frac{\|[(x+s) \cdot (y+t)] - [x \cdot y] - [x \cdot t] - [s \cdot y]\|}{\|(s, t)\|} \leq \varepsilon,$$

и наше утверждение доказано.

Этот результат легко обобщается на случай непрерывного полилинейного отображения.

(8.1.5) Пусть $F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$ — произведение банаховых пространств и $f = (f_1, \dots, f_m)$ — непрерывное отображение открытого в пространстве E множества A в пространство F . Для того чтобы f было дифференцируемо в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы каждое отображение f_i было дифференцируемо в точке x_0 ; в этом случае $f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_m(x_0))$ (считая, что $\mathcal{L}(E; F)$ отождествлено с произведением пространств $\mathcal{L}(E; F_i)$).

Действительно, любое линейное отображение u пространства E в F единственным образом можно записать в виде $u = (u_1, \dots, u_m)$, где u_i — линейное отображение пространства E в F_i , и, по определению, мы имеем тогда $\|u(x)\| = \sup(\|u_1(x)\|, \dots, \|u_m(x)\|)$. Отсюда [в силу (5.7.1) и (2.3.7)] следует, что $\|u\| = \sup(\|u_1\|, \dots, \|u_m\|)$, и это позволяет отождествить пространство $\mathcal{L}(E; F)$ с произведением

$\prod_{i=1}^m$

$\mathcal{L}(E; F_i)$. Из определения сразу следует, что u является произ-

водной отображения f в точке x_0 в том и только в том случае, если u_i является производной отображения f_i в точке x_0 при $1 \leq i \leq m$.

Пусть E, F — комплексные банаховы пространства и E_0, F_0 — базисные для них действительные банаховы пространства. Тогда если отображение f множества A , открытого в пространстве E , в F дифференцируемо в точке x_0 , то оно также дифференцируемо и имеет ту же самую производную и как отображение множества A в F_0 (линейное отображение пространства E в F будет линейным и как отображение пространства E_0 в F_0). Но обратное не верно, как сразу показывает пример отображения $z \rightarrow \bar{z}$ пространства $\mathbb{C}$ в себя. В качестве отображения пространства $\mathbb{R}^2$ в себя отображение $u: z \rightarrow \bar{z}$ (которое можно записать в виде $(x, y) \rightarrow (x, -y)$) дифференцируемо и в силу (8.1.3) имеет в каждой точке производную, равную u ; но u не является комплексным линейным отображением, откуда и следует наше утверждение. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 9 (9.10.2).

Когда отображение f множества A в F дифференцируемо в каждой точке множества A , оно называется *дифференцируемым в A* . Отображение $x \rightarrow f'(x) = Df(x)$ множества A в $\mathcal{L}(E; F)$ обозначается символом f' или Df и называется *производной отображения f в множестве A* .

2. Формальные правила дифференцирования

(8.2.1) Пусть E, F и G — три банахова пространства, A — открытая окрестность точки $x_0 \in E$, f — непрерывное отображение окрестности A в F , $y_0 = f(x_0)$, B — открытая окрестность точки y_0 в F и g — непрерывное отображение окрестности B в G . Тогда если f дифференцируемо в точке x_0 и g дифференцируемо в точке y_0 , то отображение $h = g \circ f$ (которое определено и непрерывно в некоторой окрестности точки x_0) дифференцируемо в точке x_0 и

$$h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0).$$

По предположению для заданного $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < 1$, найдется такое $r > 0$, что при $\|s\| \leq r$ и $\|t\| \leq r$ мы можем написать

$$\begin{aligned} f(x_0 + s) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot s + o_1(s), \\ g(y_0 + t) &= g(y_0) + g'(y_0) \cdot t + o_2(t), \end{aligned}$$

где $\|o_1(s)\| \leq \varepsilon \|s\|$ и $\|o_2(t)\| \leq \varepsilon \|t\|$. С другой стороны, в силу (8.1.1) и (5.5.1) существуют такие числа a и b , что для любых s и t

$$\|f'(x_0) \cdot s\| \leq a \|s\| \quad \text{и} \quad \|g'(y_0) \cdot t\| \leq b \|t\|.$$

Следовательно, при $\|s\| \leq r$

$$\|f'(x_0) \cdot s + o_1(s)\| \leq (a+1)\|s\|.$$

Таким образом, при $\|s\| \leq r/(a+1)$ имеем

$$\|o_2(f'(x_0) \cdot s + o_1(s))\| \leq (a+1)\varepsilon\|s\|$$

и

$$\|g'(y_0) \cdot o_1(s)\| \leq b\varepsilon\|s\|.$$

Поэтому можно написать

$$\begin{aligned} h(x_0 + s) &= g(y_0 + f'(x_0) \cdot s + o_1(s)) = \\ &= g(y_0) + g'(y_0) \cdot (f'(x_0) \cdot s) + o_3(s), \end{aligned}$$

где $\|o_3(s)\| \leq (a+b+1)\varepsilon\|s\|$, и теорема доказана.

Теорема (8.2.1) имеет, конечно, бесчисленное множество приложений, из которых мы упомянем только следующее:

(8.2.2) Пусть f и g — два непрерывных отображения открытого множества A пространства E в F . Если f и g дифференцируемы в точке x_0 , то $f+g$ и αf (α — скаляр) дифференцируемы в точке x_0 , причем $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ и $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

Отображение $f+g$ есть композиция отображения $(u, v) \rightarrow u+v$ пространства $F \times F$ в F и отображения $x \rightarrow (f(x), g(x))$ множества A в $F \times F$. Оба эти отображения в силу (8.1.3) и (8.1.5) дифференцируемы, и наше утверждение (относительно $f+g$) следует из (8.2.1). Для отображения αf рассуждение еще проще ввиду того, что отображение $u \rightarrow \alpha u$ пространства F в себя в силу (8.1.3) дифференцируемо. Разумеется, теорему (8.2.2) можно очень просто доказать и непосредственно.

Пусть E, F — два банаховых пространства, A — открытое множество в E и B — открытое множество в F . Если A и B гомеоморфны и если существует дифференцируемый гомеоморфизм f множества A на B , то отсюда не следует, что для каждой точки $x_0 \in A$ производная $f'(x_0)$ является линейным гомеоморфизмом пространства E на F (рассмотрите, например, отображение $\xi \rightarrow \xi^3$ пространства $\mathbb{R}$ на себя).

(8.2.3) Пусть f — гомеоморфизм открытого множества A банахова пространства E на открытое множество B банахова пространства F и g — обратный гомеоморфизм. Пусть отображение f дифференцируемо в точке x_0 и $f'(x_0)$ есть линейный гомеоморфизм пространства E на F . Тогда отображение g дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$ и $g'(y_0)$ является отображением, обратным отображению $f'(x_0)$ [ср. (10.2.5)].

По предположению отображение $s \rightarrow f(x_0 + s) - f(x_0)$ есть гомеоморфизм некоторой окрестности V точки 0 в E на некоторую окрестность W точки 0 в F и отображение $t \rightarrow g(y_0 + t) - g(y_0)$ является обратным гомеоморфизмом. По предположению линейное отображение $f'(x_0)$ пространства E на F имеет обратное отображение u , которое непрерывно, и поэтому в силу (5.5.1) существует такое $c > 0$, что для любой точки $t \in F$ выполняется неравенство $\|u(t)\| \leq c\|t\|$. Возьмем произвольное ε , удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < 1/2c$. Тогда найдется такое $r > 0$, что если мы напишем $f(x_0 + s) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot s + o_1(s)$, то из $\|s\| \leq r$ будет следовать $\|o_1(s)\| \leq \varepsilon\|s\|$. Пусть теперь r' — такое число, что шар $\|t\| \leq r'$ содержится в W и что его образ при отображении $t \rightarrow g(y_0 + t) - g(y_0)$ содержится в шаре $\|s\| \leq r$. Пусть $z = g(y_0 + t) - g(y_0)$. По определению из этого равенства при $\|t\| \leq r'$ следует, что $t = f(x_0 + z) - f(x_0)$, и, так как $\|z\| \leq r$, мы можем написать $t = f'(x_0) \cdot z + o_1(z)$, где $\|o_1(z)\| \leq \varepsilon\|z\|$. Отсюда по определению u имеем

$$u \cdot t = u \cdot (f'(x_0) \cdot z) + u \cdot o_1(z) = z + u \cdot o_1(z),$$

причем $\|u \cdot o_1(z)\| \leq c\|o_1(z)\| \leq c\varepsilon\|z\| \leq \|z\|/2$ и, значит, $\|u \cdot t\| \geq \|z\| - \|z\|/2 = \|z\|/2$. Следовательно, $\|z\| \leq 2\|u \cdot t\| \leq 2c\|t\|$, и, наконец, $\|u \cdot o_1(z)\| \leq c\varepsilon\|z\| \leq 2c^2\varepsilon\|t\|$. Таким образом, мы доказали, что из $\|t\| \leq r'$ следует $\|g(y_0 + t) - g(y_0) - u \cdot t\| \leq 2c^2\varepsilon\|t\|$, и, поскольку ε произвольно, это завершает доказательство.

Теорему (8.2.3) можно также (при тех же предположениях) записать в виде

$$(8.2.3.1) \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}.$$

Задачи

1. Пусть E — действительное предгильбертово пространство. Покажите, что отображение $x \rightarrow \|x\|$ пространства E в $\mathbb{R}$ дифференцируемо в каждой точке $x \neq 0$ пространства E и что его производная в такой точке есть линейное отображение $s \rightarrow (s|x)/\|x\|$.

2. а) Покажите, что норма $x \rightarrow \|x\|$ в пространстве (c_0) Банаха (задача 5 § 5.3) дифференцируема в точке $x = (\xi_n)$ в том и только в том случае, если существует такой номер n_0 , что при каждом $n > n_0$ выполняется неравенство $|\xi_{n_0}| > |\xi_n|$. Вычислите производную.

б) Покажите, что норма $x \rightarrow \|x\|$ в пространстве l^1 Банаха (задача 1 § 5.7) не дифференцируема ни в одной точке.

[Воспользуйтесь (8.1.1) и задачей 1, с) § 5.7.]

3. Покажите, что в пространстве $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(I)$, где $I = [0, 1]$, норма $x \rightarrow \|x\|$ не дифференцируема ни в одной точке.

4. Пусть f — дифференцируемая действительная функция, определенная в открытом множестве A банахова пространства E .

а) Покажите, что если в точке $x_0 \in A$ функция f достигает относительного максимума (задача 6 § 3.9), то $Df(x_0) = 0$.

б) Пусть E конечномерно, A — относительно компактно, функция f определена и непрерывна на $\bar{A}$ и равна 0 на границе множества A . Покажите, что существует точка $x_0 \in A$, в которой $Df(x_0) = 0$ (теорема Ролля). [Примените а) и (3.17.10).]

3. Производные в пространствах непрерывных линейных функций

(8.3.1) Пусть E, F и G — три банаховых пространства. Тогда отображение $(u, v) \rightarrow v \circ u$ (обозначаемое также через vu) произведения $\mathcal{L}(E; F) \times \mathcal{L}(F; G)$ в $\mathcal{L}(E; G)$ дифференцируемо, и его производной в точке (u_0, v_0) является отображение $(s, t) \rightarrow v_0 \circ s + t \circ u_0$.

Если мы заметим, что в силу (5.7.5) отображение $(u, v) \rightarrow v \circ u$ билинейно и непрерывно, то станет ясно, что наше утверждение является частным случаем теоремы (8.1.4).

(8.3.2) Пусть E и F — такие два банаховых пространства, что существует по крайней мере один линейный гомеоморфизм пространства E на F . Тогда множество $\mathcal{H}$ всех этих линейных гомеоморфизмов открыто в $\mathcal{L}(E; F)$; отображение $u \rightarrow u^{-1}$ множества $\mathcal{H}$ на множество $\mathcal{H}^{-1}$ линейных гомеоморфизмов пространства F на E непрерывно и дифференцируемо, и производная отображения $u \rightarrow u^{-1}$ в точке u_0 есть линейное отображение $s \rightarrow -u_0^{-1} \circ s \circ u_0^{-1}$ (пространства $\mathcal{L}(E; F)$ в $\mathcal{L}(F; E)$).

Рассмотрим сначала случай, когда $F = E$, и обозначим через 1 тождественное отображение пространства E^1). Тогда

(8.3.2.1) Если $\|w\| < 1$ в $\mathcal{L}(E; E)$, то линейное отображение $1 + w$ является гомеоморфизмом; обратное к нему отображение $(1 + w)^{-1}$ равно сумме абсолютно сходящегося ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$, и имеет место неравенство

$$(8.3.2.2) \quad \|(1 + w)^{-1} - 1 + w\| \leq \frac{\|w\|^2}{1 - \|w\|}.$$

Имеем $\sum_{n=0}^N \|w\|^n = (1 - \|w\|^{N+1}) / (1 - \|w\|) \leq 1 / (1 - \|w\|)$, поэтому

в силу (5.7.5), (5.3.1), (5.3.2) и (5.7.3) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$ абсолютно

¹⁾ Таким образом, символом 1 обозначается и число 1 и тождественное отображение. — Прим. перев.

сходится в $\mathcal{L}(E; E)$. Кроме того,

$$(1 + w)(1 - w + w^2 + \dots + (-1)^N w^N) = \\ = (1 - w + w^2 + \dots + (-1)^N w^N)(1 + w) = 1 - w^{N+1},$$

и так как w^{N+1} стремится к 0 вместе с $1/N$, то по определению

и в силу (5.7.5) для элемента $v = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$ пространства $\mathcal{L}(E; E)$

имеют место равенства $(1 + w)v = v(1 + w) = 1$, и первые два утверждения доказаны. Неравенство (8.3.2.2) следует из соотношения $(1 + w)^{-1} - 1 + w = w^2(1 - w + w^2 + \dots)$ и из (5.7.5) и (5.3.2).

Рассмотрим теперь в теореме (8.3.2) общий случай. Пусть элемент $s \in \mathcal{L}(E; F)$ удовлетворяет условию $\|s\| \cdot \|u_0^{-1}\| < 1$. Тогда ввиду (5.7.5) и (8.3.2.1) элемент $1 + u_0^{-1}s$ пространства $\mathcal{L}(E; E)$ имеет обратный, и так как мы можем написать $u_0 + s = u_0(1 + u_0^{-1}s)$, то это верно и для элемента $u_0 + s$, обратным к которому является элемент $(1 + u_0^{-1}s)^{-1} u_0^{-1}$. Поэтому

$$(u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} = ((1 + u_0^{-1}s)^{-1} - 1) u_0^{-1}.$$

Применяя (8.3.2.2) к $w = u_0^{-1}s$, при $\|s\| < 1/\|u_0^{-1}\|$ получаем

$$\|(u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} + u_0^{-1}s u_0^{-1}\| \leq \frac{\|u_0^{-1}\|^3 \cdot \|s\|^2}{1 - \|u_0^{-1}\| \cdot \|s\|}.$$

Следовательно, если взять $\|s\| \leq 1/2 \|u_0^{-1}\|$, то мы будем иметь

$$\|(u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} + u_0^{-1}s u_0^{-1}\| \leq c \|s\|^2,$$

где $c = 2 \|u_0^{-1}\|^3$, и это завершает доказательство.

4. Производные функций одной переменной

Если в качестве E взять одномерное векторное пространство (отождествленное с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то, отождествляя вектор $b \in F$ с линейным отображением $\xi \rightarrow b\xi$ пространства E в F , мы естественным образом отождествляем пространство $\mathcal{L}(E; F)$ с самим пространством F (5.7.6). Если f — дифференцируемое отображение открытого множества $A \subset E$ в F , то его производная $Df(\xi_0)$ в точке $\xi_0 \in A$ отождествляется тогда с вектором пространства F , а отображение Df — с отображением множества A в F . Если само F одномерно (отождествлено с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то мы получаем классический случай производной (в точке) как числа. Общие результаты, установленные выше, превращаются в этом последнем случае в классические формулы дифференциального исчисления. Например, когда E и F одно-

мерны, (8.3.2) сводится просто к теореме о том, что при $\xi \neq 0$ производная функции $1/\xi$ равна $-1/\xi^2$. Сформулируем следствие из теоремы (8.2.1):

(8.4.1) Пусть E и F — два действительных (соответственно комплексных) банаховых пространства, f — дифференцируемое отображение открытого множества A пространства E в F и g — дифференцируемое отображение открытого множества I пространства $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$) в A . Тогда производная в точке $\xi \in I$ сложного отображения $h = f \circ g$ множества I в F есть вектор из F , равный $Df(g(\xi)) \cdot g'(\xi)$.

Напомним, что $g'(\xi)$ принадлежит E , а $Df(g(\xi))$ — пространству $\mathcal{L}(E; F)$.

Замечание. Пусть F — комплексное банахово пространство и f — дифференцируемое отображение открытого множества $A \subset \mathbb{C}$ в F . Его производная в точке $z \in A$ отождествляется тогда с вектором пространства F . Пусть теперь g — дифференцируемое отображение открытого множества $I \subset \mathbb{R}$ в пространстве $\mathbb{C}$ (рассматриваемое как базисное двумерное действительное векторное пространство). Тогда $f \circ g$ есть дифференцируемое отображение множества I в базисное действительное банахово пространство F_0 пространства F и теорема (8.4.1) показывает, что его производная в точке $\xi \in I$ равна $g'(\xi) Df(g(\xi))$ (напомним, что здесь $g'(\xi)$ есть комплексное число).

В случае когда $E = \mathbb{R}$ и F — действительное банахово пространство, понятие производной может быть значительно обобщено: для любого множества $J \subset \mathbb{R}$ и любой точки $\xi_0 \in J$, являющейся точкой прикосновения множества $J \setminus \{\xi_0\}$, мы можем определить производную отображения f множества J в F в точке ξ_0 (относительно множества J) как предел

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0, \xi \in J \setminus \{\xi_0\}} \frac{(f(\xi) - f(\xi_0))}{\xi - \xi_0},$$

если он существует. В этом случае мы говорим, что f дифференцируемо в точке ξ_0 относительно J .

Будем рассматривать только случай, когда J — промежуток в $\mathbb{R}$. Тогда во внутренней точке промежутка J производная относительно J совпадает (если она существует) с обычной производной. Производная отображения f относительно J в начале α (соответственно конце β) промежутка J , если α (соответственно β) принадлежит J , называется также *правой* (соответственно *левой*) *производной* отображения f в точке α (соответственно β) и обозначается символом $f'_d(\alpha)$ или $D_+f(\alpha)$ [соответственно $f'_g(\beta)$ или $D_-f(\beta)$]. Теорема (8.4.1) остается справедливой и в предположении, что I — промежуток и g имеет производную относительно I в точке ξ . В этом случае, если f дифференцируемо в A , отображение $f \circ g$

имеет в точке ξ производную относительно I и ее можно найти по той же формуле (заменяв $g'(\xi)$ производной отображения g относительно I). Доказательство проводится (с очевидными изменениями) так же, как в (8.2.1). Мы опускаем самые обычные следствия этой теоремы, вроде результата, соответствующего (8.2.2).

Задачи

1. а) Пусть f — непрерывное отображение промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство E . Для того чтобы f было дифференцируемо во внутренней точке x_0 промежутка I , необходимо и достаточно, чтобы отношение $(f(x_0 + h) - f(x_0 - k))/(h + k)$ имело в E предел, когда точка (h, k) стремится к $(0, 0)$ по множеству пар, удовлетворяющих условию $h > 0$, $k > 0$.

б) Действительная функция f , равная $x^2 \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и 0 при $x = 0$ дифференцируема в $\mathbb{R}$, но отношение $(f(x) - f(y))/(x - y)$ не имеет предела, когда (x, y) стремится к $(0, 0)$ по множеству пар, удовлетворяющих условию $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$.

в) Последовательность непрерывных функций f_n в промежутке $I = [0, 1]$, определяется следующим образом: $f_0(t) = t$; при каждом $n \geq 1$ функция f_n в каждом из 3^n промежутков $k/3^n \leq t \leq (k+1)/3^n$ при $0 \leq k \leq 3^n - 1$ имеет вид $at + \beta$ и, кроме того,

$$f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right) = f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right), \quad f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}\right) = f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}\right), \\ f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}\right) = f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}\right).$$

Покажите, что последовательность (f_n) сходится в I равномерно к непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке промежутка I .

[Примените а).]

2. Пусть f — непрерывное отображение открытого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство E , имеющее в каждой точке $t \in I$ и левую производную $f'_g(t)$ и правую производную $f'_d(t)$.

а) Пусть U — непустое открытое множество в E и A — множество точек $t \in I$, в которых $f'_d(t) \in U$. Для любого $\alpha > 0$ пусть B_α — подмножество промежутка I , состоящее из точек t , для которых существует по крайней мере одна такая точка $s \in I$, что $t - \alpha \leq s < t$ и $(f(t) - f(s))/(t - s) \in U$. Покажите, что B_α открыто и что пересечение $A \cap CB_\alpha$ счетно. На основании этого результата заключите, что множество точек $t \in A$, в которых $f'_g(t) \notin \bar{U}$, не более чем счетно.

[Примените задачу 3 § 3.9.]

б) Выведите из а), что множество точек $t \in I$, в которых $f'_g(t) \neq f'_d(t)$, не более чем счетно.

[Сначала убедитесь в том, что $f(I)$ есть объединение счетного числа компактных метрических пространств, и, рассмотрев замкнутое векторное

подпространство пространства E , порожденное $f(I)$, сведите задачу к случаю, когда в E существует счетная база (U_n) открытых множеств. Затем заметьте, что для каждой пары различных точек a, b пространства E существует пара множеств U_p, U_q , удовлетворяющая условиям $a \in U_p, b \in U_q, U_p \cap U_q = \emptyset$.

3. а) Пусть отображение f определено в $\mathbb{R}^2$ условиями

$$f(x) = \frac{\xi_1 \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad \text{при } x = (\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0) \text{ и } f(0) = 0.$$

Покажите, что для любых точек $x \in \mathbb{R}^2$ и $y \in \mathbb{R}^2$ предел

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} (f(x+ty) - f(x))/t = g(x, y)$$

существует, но отображение $y \rightarrow g(0, y)$ не является линейным (и поэтому отображение f не дифференцируемо в точке 0).

б) Пусть отображение f определено в $\mathbb{R}^2$ условиями

$$f(x) = \frac{\xi_1^3 \xi_2}{\xi_1^4 + \xi_2^2} \quad \text{при } x = (\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0) \text{ и } f(0) = 0.$$

Покажите, что предел $g(x, y)$ существует при каждом x и y и отображение $y \rightarrow g(x, y)$ линейно при каждом $x \in \mathbb{R}^2$, но f не дифференцируемо в точке 0.

4. а) Пусть f — непрерывное отображение открытого множества A банахова пространства E в банахово пространство F . Будем говорить, что функция f в точке $x_0 \in A$ квазидифференцируема, если существует линейное отображение u пространства E в F такое, что для любого непрерывного отображения g промежутка $I = [0, 1]$ в A , такого, что $g(0) = x_0$ и что существует производная $g'(0)$ отображения g в точке 0 (относительно I), отображение $t \rightarrow f(g(t))$ имеет в точке $t = 0$ производную (относительно I), равную $u(g'(0))$. Линейное отображение u называется в этом случае квазипроизводной отображения f в точке x_0 . Покажите, что если f квазидифференцируемо в точке x_0 , то его квазипроизводная единственна. Распространите свойство (8.2.1) на квазидифференцируемые отображения.

б) Покажите, что если f квазидифференцируемо в x_0 , то его квазипроизводная u — непрерывное линейное отображение пространства E в F .

[Допустим, что $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. Проведите доказательство от противного: если бы отображение u не было ограничено в шаре $B(0; 1)$, то нашлась бы такая последовательность (a_n) векторов в E , что $\|a_n\| = 1$, и такая последовательность (t_n) чисел > 0 , что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ и что $\|t_n^{-1} f(t_n a_n)\| = a_n$

стремится к $+\infty$; можно считать, что последовательности (t_n) и $(\sqrt[n]{a_n} t_n)$ убывают и стремятся к 0. Определите непрерывное отображение g промежутка $[0, 1]$ в E , такое, что $g(0) = 0$, что производная $g'(0)$ существует и равна 0 и что $g(\sqrt[n]{a_n} t_n) = t_n a_n$.]

5. а) Пусть E, F — два банаховых пространства и f — непрерывное отображение открытого множества $A \subset E$ в F . Покажите, что если f диф-

ференцируемо в точке $x_0 \in A$, то оно квазидифференцируемо в x_0 и его квазипроизводная равна его производной.

б) Предположим, что E имеет конечную размерность. Покажите, что если f квазидифференцируемо в точке $x_0 \in A$, то оно дифференцируемо в точке x_0 .

[Проведите доказательство от противного. Пусть u — квазипроизводная отображения f в точке x_0 и пусть существует такое число $\alpha > 0$ и такая последовательность (x_n) точек множества A , сходящаяся к точке x_0 , что $\|f(x_n) - f(x_0) - u \cdot (x_n - x_0)\| \geq \alpha \|x_n - x_0\|$. Пользуясь локальной компактностью пространства E , покажите, что можно считать, что последовательность $(\|x_n - x_0\|)$ убывает и последовательность $z_n = (x_n - x_0) / \|x_n - x_0\|$ имеет в E предел. Затем определите такое непрерывное отображение g промежутка $[0, 1]$ в E , что $g(0) = x_0$ и существует производная $g'(0)$, но $u(g'(0))$ не является производной отображения $t \rightarrow f(g(t))$ в точке $t = 0$.]

6. Пусть $I = [0, 1]$ и пусть E — банахово пространство $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}(I)$. Для того чтобы отображение $x \rightarrow \|x\|$ пространства E в $\mathbf{R}$ было квазидифференцируемо в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы функция $t \rightarrow |x_0(t)|$ достигала своего максимума в I в единственной точке $t_0 \in I$. Квазипроизводная отображения $x \rightarrow \|x\|$ в точке x_0 есть в этом случае такое линейное отображение u , что $u(z) = z(t_0)$, если $x_0(t_0) > 0$, и $u(z) = -z(t_0)$, если $x_0(t_0) < 0$ (см. задачу 3 § 8.2).

[Чтобы доказать необходимость, допустим, что $|x_0|$ достигает своего максимума по крайней мере в двух различных точках t_0, t_1 . Пусть y — непрерывное отображение промежутка I в себя, равное 1 в t_0 и 0 — в t_1 . Исследуйте поведение отношения $(\|x_0 + \lambda y\| - \|x_0\|) / \lambda$, когда действительное число $\lambda \neq 0$ стремится к 0. Чтобы доказать достаточность, допустим, что $\lambda \rightarrow z_\lambda$ — непрерывное отображение промежутка I в E , имеющее в точке $\lambda = 0$ производную $a \in E$ и такое, что $z_0 = 0$. Убедитесь в том, что если t_λ — наибольшее число в I (или наименьшее число в I), в котором функция $t \rightarrow |x_0(t) + z_\lambda(t)|$ достигает своего максимума, то t_λ стремится к t_0 , когда λ стремится к 0.]

7. Пусть f — непрерывное отображение открытого множества A банахова пространства E в банахово пространство F . Предположим, что f удовлетворяет в A условию Липшица; это значит [см. 10.5.4], что существует такая константа $k > 0$, что для любой пары точек множества A выполняется неравенство $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|$. Пусть $x_0 \in A$ и пусть существует такое линейное отображение u пространства E в F , что для любого вектора $a \neq 0$ в E предел отношения $(f(x_0 + at) - f(x_0)) / t$ при $t \neq 0$ и стремящемся к 0 в $\mathbf{R}$ существует и равен $u(a)$. Покажите, что f квазидифференцируемо в точке x_0 .

8. а) Пусть a и b — две точки в банаховом пространстве E . Покажите, что отображение $t \rightarrow \|a + tb\|$ пространства $\mathbf{R}$ в себя в каждой точке $t \in \mathbf{R}$ имеет правую и левую производную.

[Докажите, что если $0 < t < s$, то $(\|a + bt\| - \|a\|) / t \leq (\|a + bs\| - \|a\|) / s$, и примените (4.2.1).]

б) Пусть u — непрерывное отображение промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в E . Покажите, что если в точке $t_0 \in I$ отображение u имеет правую производную, то в точке t_0 правую производную имеет и отображение $t \rightarrow \|u(t)\|$ и $D_+ \|u(t_0)\| \leq \|D_+ u(t_0)\|$.

[Примените а.)]

с) Пусть U — непрерывное отображение промежутка I в $\mathcal{L}(E; E)$. Покажите, что если отображение U имеет в точке $t_0 \in I$ правую производную и $U(t_0)$ есть линейный гомеоморфизм пространства E на себя, то отображение $t \rightarrow \|U(t)\|^{-1}$, которое определено в некоторой окрестности точки t_0 , имеет в t_0 правую производную и $D_+ (\|U(t_0)\|^{-1})^{-1} \leq \|D_+ U(t_0)\|$.

5. Теорема о среднем значении

(8.5.1) Пусть $I = [\alpha, \beta]$ — компактный промежуток в $\mathbb{R}$, f — непрерывное отображение I в банахово пространство F и φ — непрерывное отображение I в $\mathbb{R}$. Предположим, что существует такое счетное подмножество $D \subset I$, что в каждой точке $\xi \in I \setminus D$ отображения f и φ имеют производные относительно I и $\|f'(\xi)\| \leq \varphi'(\xi)$. Тогда $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$.

Пусть $n \rightarrow \rho_n$ — биективное отображение множества $\mathbb{N}$ на D . Мы докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\beta - \alpha + 1)$, и так как левая часть не зависит от ε , то тем самым теорема будет доказана.

Пусть A — подмножество промежутка I , состоящее из всех точек ξ , для которых при $\alpha \leq \zeta < \xi$ имеет место неравенство $\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}$. Ясно, что $\alpha \in A$;

если $\xi \in A$ и $\alpha < \eta < \xi$, то по определению и $\eta \in A$. Это показывает, что если γ — верхняя грань A , то A должно совпадать либо с промежутком $[\alpha, \gamma]$, либо с промежутком $[\alpha, \gamma]$; но в действительности из определения A сразу следует, что $A = [\alpha, \gamma]$. Более того, из непрерывности f и φ следует, что

$$(8.5.1.1) \quad \|f(\gamma) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \gamma} 2^{-n},$$

и, таким образом, нам остается только доказать, что $\gamma = \beta$.

Допустим, что $\gamma \neq \beta$; если $\gamma \notin D$, то из определения производной следует, что существует такой промежуток $[\gamma, \gamma + \lambda]$, содержащийся в I , что при $\gamma \leq \zeta < \gamma + \lambda$

$$\|f(\zeta) - f(\gamma) - f'(\gamma)(\zeta - \gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma)$$

и

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) - \varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f(\zeta) - f(\gamma)\| &\leq \|f'(\gamma)\|(\zeta - \gamma) + \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma) \leq \varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma) \leq \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta - \gamma), \end{aligned}$$

и из (8.5.1.1) получаем

$$\begin{aligned} \|f(\zeta) - f(\alpha)\| &\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \gamma} 2^{-n} \leq \\ &\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n} \end{aligned}$$

в противоречии с определением γ . Если $\gamma \in D$, то пусть $\gamma = \rho_m$. Из непрерывности f и φ следует, что существует такой промежуток $[\gamma, \gamma + \lambda]$, содержащийся в I , что при $\gamma \leq \zeta < \gamma + \lambda$

$$\|f(\zeta) - f(\gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}, \quad |\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m},$$

поэтому снова из (8.5.1.1) получаем

$$\begin{aligned} \|f(\zeta) - f(\alpha)\| &\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n} \leq \\ &\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}, \end{aligned}$$

и мы вновь приходим к противоречию, ч. т. д.

Наиболее важен случай, когда $\varphi(\xi) = M(\xi - \alpha)$, где $M > 0$:

(8.5.2) Если существует такое счетное подмножество $D \subset I$, что в каждой точке $\xi \in I \setminus D$ отображение f имеет производную относительно I , удовлетворяющую условию, $\|f'(\xi)\| \leq M$, то $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha)$.

Для действительных функций точно такие же рассуждения, как в (8.5.1), доказывают первую часть следующей теоремы:

(8.5.3) Пусть φ — такое непрерывное отображение промежутка I в $\mathbb{R}$, что в каждой точке $\xi \in I \setminus D$ отображение φ имеет производную относительно I и $m \leq \varphi'(\xi) \leq M$. Тогда $m(\beta - \alpha) \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \leq M(\beta - \alpha)$; строгие неравенства

$$m(\beta - \alpha) < \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) < M(\beta - \alpha)$$

имеют место, если $\varphi(\xi) \neq \varphi(\alpha) + m(\xi - \alpha)$ и $\varphi(\xi) \neq \varphi(\alpha) + M(\xi - \alpha)$ при $\xi \in I$.

Чтобы доказать вторую часть, заметим, что в силу первой части функция $\varphi(\xi) - \varphi(\alpha) - m(\xi - \alpha)$ возрастает в I ; если она не тождественно равна 0, то $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) - m(\beta - \alpha) > 0$. Для второго неравенства проводим точно такое же рассуждение.

Определим *сегмент*, соединяющий две точки a и b в нормированном пространстве E , как множество точек $a + \xi(b - a)$, где $0 \leq \xi \leq 1$.

(8.5.4) Пусть E, F — два банаховых пространства и f — непрерывное отображение в F некоторой окрестности сегмента S , соединяющего две точки x_0 и $x_0 + t$ пространства E . Если f дифференцируемо в каждой точке сегмента S , то

$$\|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \leq \|t\| \cdot \sup_{0 \leq \xi \leq 1} \|f'(x_0 + \xi t)\|.$$

Рассмотрим отображение g промежутка $I = [0, 1]$ в F , определяемое формулой $g(\xi) = f(x_0 + \xi t)$. В силу (8.4.1), (8.2.2) и (8.1.3) g дифференцируемо в каждой точке промежутка I (относительно I) и его производная равна $f'(x_0 + \xi t) \cdot t$. Отсюда и из (8.5.2) и (5.7.4) следует требуемый результат.

Задачи

1. а) Пусть $I =]a, b[$ — открытый промежуток в $\mathbb{R}$ и f — действительная функция, определенная в I и непрерывная слева в каждой точке $t \in I$ [т. е. удовлетворяющая условию $f(t) = f(t-)$]. Предположим, что существует такое счетное подмножество $D \subset I$, что в каждой точке $t \in I \setminus D$ функция f возрастает справа (это означает, что существует такой промежуток $[t, t+h]$ ($h > 0$), что при $t \leq t' \leq t+h$ выполняется неравенство $f(t) \leq f(t')$). Покажите, что функция f возрастает в I .

[Проведите рассуждение такого же характера, как в (8.5.1).]

б) Для каждого числа $t \in J = [0, 1]$ пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/2^n$ — единственное „двоичное“ разложение числа t , где a_n равно 0 или 1 и не существует такого номера m , что $a_n = 1$ при всех $n \geq m$ (см. задачу 2 § 4.2). Пусть $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/4^n$. Покажите, что функция f непрерывна справа в каждой точке $t \in J$ [т. е. $f(t+) = f(t)$], не постоянна ни в одном подпромежутке J , содержащем более одной точки, и имеет в каждой точке $t \in J$ правую производную, равную 0.

2. Покажите, что заключение теоремы (8.5.1) останется справедливым, если предположить только, что f и φ имеют в каждой точке $\xi \in I \setminus D$ (исключая β) правую производную и что $\|f'_d(\xi)\| \leq \varphi'_d(\xi)$.

3. Пусть f — действительная непрерывная функция в компактном промежутке $[\alpha, \beta]$, имеющая в каждой точке промежутка $[\alpha, \beta]$ правую производную. Пусть m и M — нижняя и верхняя грани f'_d в $[\alpha, \beta]$.

а) Покажите, что если f не есть отображение $t \rightarrow \lambda t + \mu$, то множество всех чисел вида $(f(x) - f(y))/(x - y)$, где x и y — произвольные числа из промежутка $[\alpha, \beta]$, и $x \neq y$ совпадает с промежутком $]m, M[$.

[Выбтя подходящим образом выбранную функцию вида $t \rightarrow \lambda t + \mu$, сведите задачу к доказательству того, что если $f'_d(\gamma) f'_d(\delta) < 0$ и $\gamma < \delta$, то в промежутке $[\gamma, \delta]$ существуют две различные точки, в которых f принимает одно и то же значение.]

б) Покажите, что если f , кроме того, в каждой точке промежутка $]\alpha, \beta[$ имеет левую производную, то верхние (соответственно нижние) грани производных f'_d и f'_g в $]\alpha, \beta[$ совпадают.

с) Выведите из б), что если f в каждой точке промежутка $]\alpha, \beta[$ имеет производную, то образ при f' любого промежутка, содержащегося в $]\alpha, \beta[$, связан [см. (3.19.1)].

4. Пусть f — отображение промежутка $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$, определяемое следующим образом: $f(t) = (0, 0)$, если $-1 \leq t \leq 0$, и $f(t) = (t^2 \sin(1/t), t^2 \cos(1/t))$, если $0 < t \leq 1$. Покажите, что f имеет производную в каждой точке промежутка $]-1, +1[$, но образ этого промежутка при отображении f' несвязен.

5. Распространите теорему (8.5.4) на случай, когда f предполагается только квазидифференцируемой (задача 4 § 8.4) в каждой точке сегмента S и f' обозначает квазипроизводную.

6. Пусть F — действительное гильбертово пространство. Выведите теорему (8.5.1) из такой же теоремы для действительных функций g , применяя ее к действительной функции $\xi \rightarrow (f(\xi)|a)$, где $a \in F$. (Этот метод фактически можно применить к любому банахову пространству и даже к более общему классу топологических векторных пространств; см. книги [6] и [23].)

6. Приложения теоремы о среднем значении

(8.6.1) Пусть A — открытое связное множество в банаховом пространстве E и f — непрерывное отображение множества A в банахово пространство F . Если f имеет в каждой точке множества A производную, равную 0, то f постоянно.

Пусть x_0 — произвольная точка множества A и B — множество тех точек $x \in A$, в которых $f(x) = f(x_0)$. Очевидно, B замкнуто в A (3.15.1). С другой стороны, если $x \in B$ и U — открытый шар с центром x , содержащийся в A , то U содержит сегмент, соединяющий x с любой из его точек y ; поэтому в силу (8.5.4) $f(y) = f(x) = f(x_0)$. Это показывает, что множество B и открыто в A и, значит, совпадает с A (3.19).

Более сильные результаты можно получить с помощью (8.5.2). Например, если $E = \mathbb{R}$ и A — промежуток в $\mathbb{R}$, то для доказательства постоянства f достаточно предположить, что производная отображения f существует и равна 0 во всех точках, за исключением счетного множества.

(8.6.2) Пусть E, F — два банаховых пространства и f — дифференцируемое отображение в F некоторой открытой окрест-

ности A сегмента S , соединяющего две точки a и b . Тогда для каждой точки $x_0 \in A$ имеем

$$\|f(b) - f(a) - f'(x_0)(b - a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in S} \|f'(x) - f'(x_0)\|.$$

Достаточно применить (8.5.4) к отображению

$$x \rightarrow f(x) - f'(x_0) \cdot x,$$

производной которого в силу (8.2.2) и (8.1.3) является $t \rightarrow (f'(x) - f'(x_0)) \cdot t$.

(8.6.3) Пусть A — открытое связное множество в банаховом пространстве E и (f_n) — последовательность дифференцируемых отображений множества A в банахово пространство F . Предположим, что:

1°) существует по крайней мере одна такая точка $x_0 \in A$, что последовательность $(f_n(x_0))$ сходится в F ;

2°) для каждой точки $a \in A$ существует такой шар $B(a)$ с центром a , содержащийся в A , что в $B(a)$ последовательность (f'_n) сходится равномерно.

Тогда для каждой точки $a \in A$ последовательность (f_n) равномерно сходится в $B(a)$. Если, кроме того, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ и $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ для каждой точки $x \in A$, то и $g(x) = f'(x)$ для каждой точки $x \in A$.

Пусть r — радиус шара $B(a)$. Тогда в силу (8.5.4) для любой точки $x \in B(a)$ имеем

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\| &\leq \|x - a\| \cdot \sup_{z \in B(a)} \|f'_n(z) - f'_m(z)\| \leq \\ (8.6.3.1) \quad &\leq r \cdot \sup_{z \in B(a)} \|f'_n(z) - f'_m(z)\|. \end{aligned}$$

Так как последовательность (f'_n) равномерно сходится в $B(a)$, а F — полное пространство, то это доказывает, что если последовательность $(f_n(x))$ сходится в какой-нибудь точке шара $B(a)$, то она сходится и в каждой точке $B(a)$, а в действительности равномерно сходится в $B(a)$. Отсюда прежде всего следует, что множество U точек x , в которых последовательность $(f_n(x))$ сходится, одновременно открыто и замкнуто в A , а так как оно по предположению не пусто и A связно, то $U = A$.

Наконец, докажем, что g — производная отображения f . Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда, по предположению, существует такой номер n_0 , что при $n \geq n_0$ и $m \geq n_0$ для каждой точки $z \in B(a)$ имеет место неравенство $\|f'_n(z) - f'_m(z)\| \leq \varepsilon$ и, кроме того, неравенство $\|g(a) - f'_n(a)\| \leq \varepsilon$. Устремляя индекс m в (8.6.3.1) к $+\infty$, видим, что при $n \geq n_0$ и $x \in B(a)$

$$\|f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))\| \leq \varepsilon \|x - a\|.$$

С другой стороны, для произвольного $n \geq n_0$ существует такое $r' \leq r$, что неравенство $\|f_n(x) - f_n(a) - f'_n(a)(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|$ выполняется при $\|x - a\| \leq r'$. Пользуясь (5.7.4), при $\|x - a\| \leq r'$ находим

$$\|f(x) - f(a) - g(a)(x - a)\| \leq 3\varepsilon \|x - a\|,$$

тем самым доказывая, что производная $f'(a)$ существует и равна $g(a)$.

В случае когда $E = \mathbb{R}$ и A — промежуток в $\mathbb{R}$, мы можем снова установить более сильные результаты:

(8.6.4) Пусть (g_n) — последовательность отображений промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в F и пусть при каждом n для всех точек $\xi \in I$, за исключением точек счетного множества $D_n \subset I$, функция $g_n(\xi)$ есть производная непрерывной функции f_n . Предположим, кроме того, что:

1°) существует по крайней мере одна такая точка $\xi_0 \in I$, что последовательность $(f_n(\xi_0))$ сходится в F ;

2°) у каждой точки $\zeta \in I$ существует такая окрестность $B(\zeta)$ относительно I , что в $B(\zeta)$ последовательность (g_n) сходится равномерно.

Тогда для каждой точки $\zeta \in I$ последовательность (f_n) равномерно сходится в $B(\zeta)$, и если мы положим $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi)$ и $g(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi)$, то в каждой точке промежутка I , не принадлежащей $\bigcup_n D_n$, выполнено равенство $f'(\xi) = g(\xi)$.

Нужно повторить доказательство теоремы (8.6.3), воспользовавшись (8.5.2) вместо (8.5.4).

Из (8.6.3), в частности, получаем

(8.6.5) Пусть A — открытое связное множество в банаховом пространстве E и (u_n) — последовательность дифференцируемых отображений множества A в банахово пространство F . Если для каждой точки $a \in A$ существует такой шар $B(a)$ с центром a , содержащийся в A , что ряд (u'_n) равномерно сходится в $B(a)$, и если существует такая точка $x_0 \in A$, что ряд $(u_n(x_0))$ сходится, то для каждой точки $a \in A$ ряд (u_n) равномерно сходится в $B(a)$ и его сумма $s(x)$ в каждой точке $x \in A$ имеет производную, равную $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$.

Задачи

1. Пусть f и g — две действительные дифференцируемые функции в открытом промежутке $I \subset \mathbb{R}$. Предполагается, что в I выполнены неравенства $f(t) > 0$, $g(t) > 0$, $f'(t) > 0$ и $g'(t) > 0$. Покажите, что если функция f'/g' строго возрастает в I , то функция f/g либо строго возрастает в I , либо

строго убывает в I , либо же существует такая точка $c \in I$, что функция f/g при $t \leq c$ строго убывает, а при $t \geq c$ — строго возрастает.

[Докажите, что если $f'(s)/g'(s) < f(s)/g(s)$, то для любого $t < s$ имеем $f'(t)/g'(t) < f(t)/g(t)$.]

Примените это к отношению

$$\frac{\frac{\operatorname{tg} t}{t} - \frac{\operatorname{tg} a}{a}}{t \operatorname{tg} t - a \operatorname{tg} a}$$

в промежутке $]a, \pi/2[$, где $a > 0$.

2. а) Пусть I — открытый промежуток в $\mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ — один из его концов и f — непрерывное отображение промежутка I в банахово пространство E . Допустим, что существует такое счетное множество $D \subset I$, что в каждой точке множества $I \setminus D$ отображение f имеет правую производную. Докажите следующий критерий: для того чтобы производная $f'_d(t)$ имела предел, когда t стремится к x_0 по множеству $I \setminus D$, необходимо и достаточно, чтобы отношение $(f(t) - f(s))/(t - s)$ имело предел, когда пара (s, t) стремится к (x_0, x_0) по множеству, определяемому условиями $s \in I, t \in I, s \neq t$. Оба предела в этом случае совпадают. Покажите, что если c — их общее значение, то $f(t)$ имеет предел в E , когда t стремится к x_0 по I , и что если f продолжить по непрерывности на $I \cup \{x_0\}$ (3.15.5), то отношение $(f(t) - f(x_0))/(t - x_0)$ будет стремиться к c , когда t стремится к x_0 по I .

[Воспользуйтесь теоремой о среднем значении и критерием Коши.]

б) Покажите, что в каждой точке $t \in I \setminus D$, в которой производная f'_d непрерывна слева, отображение f имеет левую производную. Если в точке $t \in I \setminus D$ производная f'_d непрерывна, то f имеет производную в точке t .

[Примените а).]

3. Пусть f — дифференцируемое отображение открытого множества $A \subset E$ в F (E и F — банаховы пространства). Докажите:

а) Для непрерывности производной f' в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что из $\|s\| \leq \delta, \|t\| \leq \delta$ следует $\|f(x_0 + s) - f(x_0 + t) - f'(x_0)(s - t)\| \leq \varepsilon \|s - t\|$.

б) Для равномерной непрерывности производной f' в A необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что из $\|s\| \leq \delta, x \in A, x + \xi s \in A$ при $0 \leq \xi \leq 1$ следует $\|f(x + s) - f(x) - f'(x)s\| \leq \varepsilon \|s\|$.

4. Пусть f — непрерывное отображение компактного промежутка $I \subset \mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, имеющее в I непрерывную производную. Пусть S — множество точек $t \in I$, в которых $f'(t) = 0$. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность (r_n) чисел > 0 , что $\sum_{n=0}^{\infty} r_n \leq \varepsilon$ и что множество $f(S)$

содержится в объединении счетного числа промежутков J_n с диаметрами $\delta(J_n) \leq r_n$.

[Для любого $\alpha > 0$ рассмотрите открытое подмножество U_α промежутка I , состоящее из точек t , в которых $|f'(t)| < \alpha$; воспользуйтесь (3.19.6) и теоремой о среднем значении.]

5. Пусть f — такое непрерывное отображение промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$, что $f(t) \neq 0$ в I и что в дополнении счетного множества $D \subset I$ существует $f'_d(t)$. Покажите, что, для того чтобы функция $|f|$ была возрастающей в I , необходимо и достаточно, чтобы в $I \setminus D$ выполнялось неравенство $\Re(f'_d(t))/(f(t)) \geq 0$.

6. Пусть E, F — два банаховых пространства, A — открытое множество в E и B — замкнутое подмножество подпространства A , внутренность которого пуста и которое обладает тем свойством, что любой сегмент в E , не содержащийся в B , имеет с B не более чем счетное пересечение. Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение множества $A \setminus B$ в F , и предположим, что в каждой точке $b \in B$ существует предел $f'(x)$ по множеству $A \setminus B$. Покажите, что отображение f может быть продолжено по непрерывности в непрерывно дифференцируемое отображение $\bar{f}$ множества A в F .

[Тот же метод, что и в задаче 2, а).]

7. Первообразные и интегралы

Пусть f — отображение промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство F . Мы будем говорить, что непрерывное отображение g промежутка I в F есть *первообразная* отображения f в I , если существует такое счетное множество $D \subset I$, что g дифференцируемо в каждой точке $\xi \in I \setminus D$ и $g'(\xi) = f(\xi)$.

(8.7.1) Если g_1 и g_2 — две первообразные отображения f в I , то отображение $g_1 - g_2$ постоянно.

Это сразу следует из обобщения теоремы (8.6.1).

Замечание. Любой промежуток I в $\mathbb{R}$ (не состоящий из одной точки) является объединением возрастающей последовательности компактных промежутков J_n . Чтобы убедиться в том, что функция f , определенная в I , имеет первообразную, нужно только проверить это для сужения отображения f на каждом из этих промежутков J_n . В самом деле, если ξ_0 — внутренняя точка промежутка J_1 и если g_n для каждого n — такая первообразная в J_n сужения f на J_n , что $g_n(\xi_0) = 0$ [в силу (8.7.1) однозначно определенная], то сужение отображения g_{n+1} на J_n является первообразной отображения f в J_n , обращающейся в 0 в точке ξ_0 , и, значит, равно g_n . Мы можем поэтому определить отображение g промежутка I в F , полагая g равным g_n в J_n , и очевидно, что g является первообразной отображения f в I .

(8.7.2) Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$. Любое простое отображение промежутка I в банахово пространство F (7.6) (в частности, любое непрерывное отображение в F и, — в слу-

чае, когда $F = \mathbb{R}$, — любая монотонная функция) имеет первообразную в I .

Из предыдущего замечания следует, что промежуток I мы можем считать компактным. Тогда из (8.6.4) и (7.6.1) вытекает, что нам нужно доказать теорему только для ступенчатых функций. Пусть f — ступенчатая функция и $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ — возрастающая последовательность таких точек в промежутке $I = [\alpha, \beta]$, что $\lambda_0 = \alpha$, $\lambda_n = \beta$ и отображение $f(\xi)$ в промежутке $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ равно постоянной c_i ($0 \leq i \leq n-1$). Если тогда отображение g определить так, чтобы в каждом промежутке $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ ($0 \leq i \leq n-1$) выполнялось равенство $g(\xi) = c_i(\xi - \lambda_i) + \sum_{k=0}^{i-1} c_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$, то легко проверить, что g является первообразной отображения f .

Первообразная ступенчатой функции называется также *кусочно линейной функцией*.

Для непрерывной функции далее имеем

(8.7.3) Если g — первообразная непрерывного отображения f промежутка I в F , то в каждой точке $\xi \in I$ отображение g имеет производную относительно I , равную $f(\xi)$.

В самом деле, из (8.5.2) следует, что в каждом промежутке $[\xi, \xi + \zeta] \subset I$

$$\|g(\xi + \zeta) - g(\xi) - f(\xi)\zeta\| \leq \zeta \sup_{0 \leq \eta \leq \lambda} \|f(\xi + \eta) - f(\xi)\|,$$

где $0 \leq \zeta \leq \lambda$, а верхняя грань $\sup_{0 \leq \eta \leq \lambda} \|f(\xi + \eta) - f(\xi)\|$ по предположению сколь угодно мала вместе с λ .

Если g — произвольная первообразная простой функции f , то разность $g(\beta) - g(\alpha)$ для любых двух точек промежутка I ввиду (8.7.1) не зависит от выбора рассматриваемой первообразной g . Эта

разность обозначается символом $\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi$ и называется *интегралом от функции f от α до β* .

Любое формальное правило дифференцирования можно перевести на язык этих обозначений и получить соответствующую формулу „интегрального исчисления“. Мы выпишем в явном виде лишь три наиболее важные формулы. При этом, если g — первообразная простой функции f , мы будем писать g' вместо f , хотя g , вообще говоря, имеет производную не всюду, и, даже когда эта производная существует, она может быть не равна f (в точках счетного множества).

(8.7.4) (Замена переменных) Пусть φ — действительная первообразная некоторой простой функции, определенная в промежутке I ; пусть f — произвольная простая функция,

определенная в промежутке $I \supset \varphi(I)$. Тогда если f непрерывна или φ монотонна, то для любых двух точек α и β промежутка I

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi) d\xi = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\zeta) d\zeta.$$

Единственное, что нужно проверить — это что $f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$ есть простая функция. Но это сразу следует из предположений и из определения простой функции (7.6). Тогда, если g — первообразная функции f , обе части написанного равенства ввиду (8.4.1) равны $g(\varphi(\beta)) - g(\varphi(\alpha))$.

(8.7.5) (Интегрирование по частям) Пусть f и g — первообразные некоторых простых функций, определенные в промежутке I и принимающие значения соответственно в двух банаховых пространствах E и F , и пусть $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $E \times F$ в банахово пространство G . Тогда для любых двух точек α и β промежутка I

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\xi) \cdot g'(\xi)] d\xi = [f(\beta) \cdot g(\beta)] - [f(\alpha) \cdot g(\alpha)] - \int_{\alpha}^{\beta} [f'(\xi) \cdot g(\xi)] d\xi.$$

Снова нужно лишь проверить, что $[f \cdot g']$ и $[f' \cdot g]$ — простые функции, и тогда утверждение следует из (8.1.4) и (8.4.1).

(8.7.6) Пусть f — простое отображение промежутка I в банахово пространство F и u — непрерывное линейное отображение пространства F в банахово пространство G . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(f(\xi)) d\xi = u\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi\right).$$

Это следует из (8.4.1) и (8.1.3).

Перевод на язык интегралов теоремы о среднем значении выглядит так:

(8.7.7) Для любой простой функции f в компактном промежутке I

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|f(\xi)\| d\xi \leq (\beta - \alpha) \sup_{\xi \in I} \|f(\xi)\|.$$

И здесь, чтобы применить (8.5.1), нужно только проверить, что функция $\xi \rightarrow \|f(\xi)\|$ проста.

В заключение выразим на языке интегралов результаты, соответствующие теоремам (8.6.4) и (8.6.5):

(8.7.8) Если последовательность (g_n) простых функций, определенных в компактном промежутке $I = [\alpha, \beta]$, равномерно сходится в I к функции g , то последовательность $\left(\int_{\alpha}^{\beta} g_n(\xi) d\xi \right)$ сходится к $\int_{\alpha}^{\beta} g(\xi) d\xi$.

Напомним, что в силу (7.6.1) функция g проста.

(8.7.9) Если ряд (u_n) простых функций, определенных в компактном промежутке $I = [\alpha, \beta]$, нормально сходится в I (7.1), то ряд с общим членом $\int_{\alpha}^{\beta} u_n(\xi) d\xi$ абсолютно сходится и $\int_{\alpha}^{\beta} u(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(\xi) d\xi$, где $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Абсолютная сходимость сразу следует из предположения и из теоремы о среднем значении (8.7.7).

Задачи

1. Пусть f — простая функция, определенная в компактном промежутке $I \subset \mathbb{R}$. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой возрастающей последовательности $x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq t_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq x_n$ точек промежутка I , удовлетворяющих условию $x_{k+1} - x_k \leq \delta$, выполняется неравенство

$$\left\| \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) (x_{k+1} - x_k) \right\| \leq \varepsilon.$$

(Римановы суммы; рассмотрите сначала случай, когда f — ступенчатая функция.)

2. а) Пусть f — простая функция, определенная в компактном промежутке $I = [a, b]$. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция g , непрерывная в I , что $\int_a^b \|f(t) - g(t)\| dt \leq \varepsilon$.

б) Пусть f принимает значения в E , пусть h — простая функция, определенная в I и принимающая значения в F , и пусть $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $E \times F$ в G (E, F и G —

банаховы пространства). Покажите, что

$$\lim_{s \rightarrow 0, s > 0} \int_a^b [f(t) \cdot h(t+s)] dt = \int_a^b [f(t) \cdot h(t)] dt.$$

с) Покажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin nt dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos nt dt = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) |\sin nt| dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt.$$

д) Пусть u — первообразная функции f , и предположим, что $u(I)$ содержится в шаре $B \subset E$. Покажите, что если g — монотонная функция в I , то

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = (u(b) - c) g(b) + (c - u(a)) g(a),$$

где $c \in B$. В частности, если f — действительная функция, то существует такая точка $s \in I$, что

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = g(a) \int_a^s f(t) dt + g(b) \int_s^b f(t) dt$$

(вторая теорема о среднем значении).

[Во всех этих задачах воспользуйтесь тем же методом, что и в задаче 1.]

3. Пусть f — простая функция, определенная в компактном промежутке $I = [a, b]$. Для любого целого $n > 0$ и любого целого k , удовлетворяющего условию $0 \leq k \leq n$, положим $x_k = a + k(b-a)/n$. Пусть

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \int_a^b f(t) dt.$$

а) Пусть f имеет в I непрерывную производную. Покажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nr(n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

[Запишите $r(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_{k+1}) - f(t)) dt$; примените теорему о

среднем значении и задачу 1.]

б) Пусть f — возрастающая действительная функция в промежутке I . Покажите, что

$$0 \leq r(n) \leq \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

с) Приведите пример возрастающей непрерывной функции f в I , для которой произведение $nr(n)$ не стремится к $\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$, когда n стремится к $+\infty$.

[В качестве f возьмите предел последовательности (f_n) возрастающих непрерывных кусочно-линейных функций, удовлетворяющих условиям

$$(b-a) \sum_{k=1}^{2^n} f_n\left(a+k \frac{b-a}{2^n}\right) - 2^n \int_a^b f_n(t) dt \geq \frac{3}{4}(b-a)(f_n(b)-f_n(a))$$

и

$$f_{n+1}\left(a+k \frac{b-a}{2^n}\right)=f_n\left(a+k \frac{b-a}{2^n}\right) \quad \text{при } 0 \leq k \leq 2^n.]$$

4. Покажите, что при n , стремящемся к $+\infty$, многочлен

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}$$

на любом промежутке $[-1, -\varepsilon]$ равномерно сходится к -1 , а на любом промежутке $[\varepsilon, +1]$ равномерно сходится к $+1$ (ε — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < 1$).

$$\left[\text{Воспользуйтесь неравенством } \int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq \int_0^1 (1-t)^n dt. \right]$$

Пусть $g_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$. Покажите, что многочлены g_n равномерно

сходятся в промежутке $[-1, +1]$ к функции $|x|$, получив тем самым новое доказательство утверждения (7.3.13).

5. Пусть f — непрерывное отображение промежутка $[x_0, +\infty[$ в банахово пространство E , обладающее тем свойством, что при каждом $\lambda > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+\lambda) - f(x)) = 0.$$

а) Покажите, что $f(x+\lambda) - f(x)$ равномерно стремится к 0, когда x стремится к $+\infty$, а λ принадлежит компактному промежутку $K = [a, b] \subset \subset [0, +\infty[$ (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $A > 0$, что из $x \geq A$ следует справедливость неравенства $\|f(x+\lambda) - f(x)\| \leq \varepsilon$ при любом $\lambda \in K$).

[Проведите доказательство от противного. Допустим, что существует такая последовательность (x_n) , что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, и такая последователь-

ность (λ_n) точек промежутка K , что при каждом n выполняется неравенство $\|f(x_n + \lambda_n) - f(x_n)\| > \alpha > 0$. Заметим, что у λ_n существует такая окрестность J_n в K , что неравенство $\|f(x_n + \lambda) - f(x_n)\| > \alpha$ выполняется

для любой точки $\lambda \in J_n$. По индукции определим убывающую последовательность замкнутых промежутков $I_k \subset K$ и подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n) так, чтобы $\|f(x_{n_k} + \mu) - f(x_{n_k})\| \geq a/3$ при каждом $\mu \in I_k$. Чтобы определить I_{k+1} , когда промежуток I_k уже построен, заметим, что если δ_k — длина промежутка I_k и q — целое число, для которого $q\delta_k > b - a$, то при достаточно большом x имеет место неравенство $\|f(x + \delta_k) - f(x)\| \leq a/3q$.

б) Выведите из а), что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{x+1} f(t) dt - f(x) \right) = 0$, и заключите отсюда, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = 0$.

6. а) Покажите, что существует дифференцируемая действительная функция f (соответственно g) в $\mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что $f'(t) = \sin(1/t)$ (соответственно $g'(t) = \cos(1/t)$) при $t \neq 0$ и $f'(0) = 0$ (соответственно $g'(0) = 0$). Функции f' и g' не являются простыми.

[Рассмотрите производные функций $t^2 \cos(1/t)$ и $t^2 \sin(1/t)$.]

б) Пусть $P(t, u, v)$ — многочлен относительно u и v , коэффициенты которого являются непрерывными действительными функциями от t в открытом промежутке $I \subset \mathbb{R}$, содержащем 0. Покажите, что существует такая дифференцируемая функция f в I , что $f'(t) = P(t, \sin(1/t), \cos(1/t))$ при $t \neq 0$.

[Выразите одночлены относительно $\sin(1/t)$ и $\cos(1/t)$ как линейные комбинации членов вида $\sin(k/t)$ и $\cos(k/t)$ и примените а).]

Каково значение $f'(0)$? Покажите, что можно получить $f'(0) \neq P(0, 0, 0)$.

с) Покажите, что существует такая дифференцируемая функция f в промежутке $[-1, +1]$, что $f'(t) = \sin(1/\sin(1/t))$ в каждой точке t , отличной от 0 и от точек $1/n\pi$ (n — целое число, положительное или отрицательное).

[В окрестности точки $t = 1/n\pi$ возьмите $t = 1/(n\pi + \arcsin u)$ и с помощью б) докажите, что существует $f'(1/n\pi)$. Далее, покажите, что существует такая константа $a > 0$, не зависящая от n , что

$$\left| \int_{2/(2n+1)\pi}^{2/(2n-1)\pi} \sin \frac{1}{\sin \frac{1}{t}} dt \right| < \frac{a}{n^3}$$

при любом целом $n > 0$. Затем рассмотрите функцию

$$g(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^t \sin \frac{1}{\sin \frac{1}{s}} ds$$

при $t > 0$ и подобным же образом определите f при $t < 0$.]

7. Пусть $I = [0, 1[$ и пусть E — векторное пространство простых комплексных функций, определенных в I , ограниченных и непрерывных справа (т. е. $f(t+) = f(t)$ при $t \in I$).

а) Покажите, что $(f|g) = \int_{-1}^{+1} f(t) \overline{g(t)} dt$ есть невырождающаяся положительная эрмитова форма в E [см. (8.5.3)]. Докажите, что таким образом определенное предгильбертово пространство E не является полным.

[Используйте тот факт, что функция, равная $\sin(1/t)$ при $t > 0$ и 0 при $t = 0$, не принадлежит E .]

б) Определим последовательность (f_n) элементов пространства E следующим образом:

1°) f_0 есть постоянная функция 1;

2°) пусть m для каждого целого $n > 0$ — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $2^m \leq n$, и пусть $n = 2^m + k$; тогда функция f_n равна $2^{m/2}$ при $2k/2^{m+1} \leq t < (2k+1)/2^{m+1}$, $-2^{m/2}$ при $(2k+1)/2^{m+1} \leq t < (2k+2)/2^{m+1}$ и 0 при всех остальных значениях t в I . Докажите, что в предгильбертовом пространстве E последовательность (f_n) является ортонормальной системой (ортонормальной системой Хаара).

с) Для каждого $n \geq 0$ пусть V_n — подпространство пространства E , порожденное функциями f_k с индексами $k \leq n$. Покажите, что существует такое разложение промежутка I на $n+1$ промежутков вида $[\alpha, \beta[$ без общих точек, что на каждом из этих промежутков всякая функция, принадлежащая V_n , постоянна. Наоборот, всякая функция, обладающая этим свойством, принадлежит V_n .

[Рассмотрите размерность векторного подпространства пространства E , порожденного этими функциями.]

д) Пусть g — произвольная функция из E и h — ее ортогональная проекция в V_n (6.3). Покажите, что $h(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(u) du$ в каждом из промежутков $[\alpha, \beta[$, на которых все функции, принадлежащие V_n , постоянны.

е) Пользуясь д), покажите, что для всякой непрерывной в I функции $g \in E$ ряд с общим членом $(g|f_n) f_n(t)$ равномерно сходится в I и что его сумма равна $g(t)$. Заключите из этого результата, что (f_n) есть тотальная ортонормальная система в E .

8. Пусть f — простая действительная функция в компактном промежутке $I = [a, b]$ и пусть $\int_a^b |f(t)| dt = c$. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая действительная непрерывная функция g в I , что $|g(t)| \leq 1$ в I и что $\int_a^b f(t) g(t) dt \geq c - \varepsilon$.

[Сведите задачу к случаю, когда f — ступенчатая функция.]

8. Приложение: число e

Каково бы ни было число $a > 0$, функция $x \rightarrow a^x$ непрерывна в $\mathbf{R}$ (4.3). Поэтому функция $g(x) = \int_0^x a^t dt$ определена и дифференцируема в $\mathbf{R}$ и всюду $g'(x) = a^x$. Очевидно, что $g(x+1) = \int_0^{x+1} a^t dt = \int_0^x a^t dt + \int_x^{x+1} a^t dt$. Но в силу (8.7.4) $\int_x^{x+1} a^t dt = \int_0^1 a^{x+u} du = a^x \int_0^1 a^u du$, и так как $a^x \geq \inf(a, 1)$ при $0 \leq x \leq 1$, то в силу (8.5.3) число $c = \int_0^1 a^u du > 0$. Таким образом, мы можем записать

$$a^x = \frac{1}{c} (g(x+1) - g(x)),$$

и, следовательно, функция a^x дифференцируема в $\mathbf{R}$ и $D(a^x) = \varphi(a) \cdot a^x$, где $\varphi(a) \neq 0$, если $a \neq 1$. Пусть $a \neq 1$ и пусть b — любое число > 0 . Мы можем написать

$$b^x = a^{x \log_a b},$$

и, следовательно, в силу (8.4.1)

$$\varphi(b) \cdot b^x = \log_a b \cdot \varphi(a) \cdot b^x;$$

иными словами,

$$\varphi(b) = \varphi(a) \log_a b.$$

Таким образом, существует одно и только одно такое число $e > 0$, что $\varphi(e) = 1$, именно число $e = a^{1/\varphi(a)}$. Так как $D(e^x) = e^x > 0$, то e^x — строго возрастающая функция [ввиду (8.5.3)], и поэтому $e = e^1 > e^0 = 1$. Функцию e^x обозначают также символом $\exp(x)$ или $\exp x$. Функция $\log_e x$ обозначается символом $\ln x$, и из (8.2.3) и (4.2.2) следует, что $D(\ln x) = 1/x$ при $x > 0$. Далее, $D(a^x) = a^x \ln a$.

Задача

Изучите изменение функций

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+p}, \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-p}, \quad \left(1 + \frac{p}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \left(1 + \frac{p}{x}\right)^{x+1}$$

при $x > 0$, где p — произвольное фиксированное положительное число. Найдите их пределы при x , стремящемся к $+\infty$.

9. Частные производные

Пусть f — дифференцируемое отображение открытого множества A банахова пространства E в банахово пространство F ; Df есть тогда отображение множества A в пространство $\mathcal{L}(E; F)$. Мы будем говорить, что f непрерывно дифференцируемо в A , если отображение Df непрерывно в A .

Предположим теперь, что $E = E_1 \times E_2$. Для каждой точки $(a_1, a_2) \in A$ мы можем рассмотреть частные отображения $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$ и $x_2 \rightarrow f(a_1, x_2)$ открытых подмножеств пространств E_1 и E_2 в F . Будем говорить, что отображение f в точке (a_1, a_2) дифференцируемо по первой (соответственно по второй) переменной, если частное отображение $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$ (соответственно $x_2 \rightarrow f(a_1, x_2)$) дифференцируемо в точке a_1 (соответственно a_2). Производная этого отображения, являющаяся элементом пространства $\mathcal{L}(E_1; F)$ (соответственно пространства $\mathcal{L}(E_2; F)$), называется *частной производной* отображения f в точке (a_1, a_2) по первой (соответственно по второй) переменной и обозначается символом $D_1 f(a_1, a_2)$ (соответственно $D_2 f(a_1, a_2)$).

(8.9.1) Пусть f — непрерывное отображение открытого множества A пространства $E_1 \times E_2$ в F . Для того чтобы f было непрерывно дифференцируемо в A , необходимо и достаточно, чтобы f было дифференцируемо в каждой точке A и по первой и по второй переменной и чтобы отображения $(x_1, x_2) \rightarrow D_1 f(x_1, x_2)$ и $(x_1, x_2) \rightarrow D_2 f(x_1, x_2)$ (множества A в $\mathcal{L}(E_1; F)$ и в $\mathcal{L}(E_2; F)$) были непрерывны в A . В этом случае производная f в каждой точке (x_1, x_2) множества A равна

$$(8.9.1.1) \quad Df(x_1, x_2) \cdot (t_1, t_2) = D_1 f(x_1, x_2) \cdot t_1 + D_2 f(x_1, x_2) \cdot t_2.$$

Необходимость. Отображение $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$ является композицией отображения f и отображения $x_1 \rightarrow (x_1, a_2)$ пространства E_1 в $E_1 \times E_2$, причем производная этого второго отображения в силу (8.1.2), (8.1.3) и (8.1.5) есть $t_1 \rightarrow (t_1, 0)$. Тогда в силу (8.2.1) отображение $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$ имеет в точке (a_1, a_2) производную, равную $t_1 \rightarrow Df(a_1, a_2) \cdot (t_1, 0)$. Если мы обозначим через i_1 (соответственно i_2) естественное вложение $t_1 \rightarrow (t_1, 0)$ (соответственно $t_2 \rightarrow (0, t_2)$), являющееся постоянным элементом $\mathcal{L}(E_1; E_1 \times E_2)$ (соответственно $\mathcal{L}(E_2; E_1 \times E_2)$), то мы, таким образом, увидим, что $D_1 f(a_1, a_2) = Df(a_1, a_2) \circ i_1$ и $D_2 f(a_1, a_2) = Df(a_1, a_2) \circ i_2$ (все это справедливо, если отображение f предполагается просто дифференцируемым в A). Так как отображение $(v, u) \rightarrow v \circ u$ пространства $\mathcal{L}(E_1 \times E_2; F) \times \mathcal{L}(E_1; E_1 \times E_2)$ в $\mathcal{L}(E_1; F)$ непрерывно [(5.7.5) и (5.5.1)], то непрерывность отображений $D_1 f$ и $D_2 f$ следует из непрерывности Df . Наконец, так как $(t_1, t_2) = i_1(t_1) + i_2(t_2)$, мы получаем формулу (8.9.1.1).

Достаточность. Запишем

$$\begin{aligned} f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1, a_2) &= \\ &= (f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2)) + (f(a_1 + t_1, a_2) - f(a_1, a_2)). \end{aligned}$$

Если задано $\varepsilon > 0$, то по предположению существует такое $r > 0$, что при $\|t_1\| \leq r$

$$\|f(a_1 + t_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2) \cdot t_1\| \leq \varepsilon \|t_1\|.$$

С другой стороны, в шаре B с центром (a_1, a_2) , содержащемся в A , в силу (8.6.2) имеем

$$\begin{aligned} \|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) - D_2 f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2\| &\leq \\ &\leq \|t_2\| \cdot \sup_{\|z\| \leq \|t_2\|} \|D_2 f(a_1 + t_1, a_2 + z) - D_2 f(a_1 + t_1, a_2)\|. \end{aligned}$$

Из непрерывности отображения $D_2 f$, таким образом, следует, что существует такое $r' > 0$, что при $\|t_2\| \leq r'$ и $\|t_1\| \leq r'$

$$\|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) - D_2 f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2\| \leq \varepsilon \|t_2\|,$$

и, кроме того,

$$\|D_2 f(a_1 + t_1, a_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| \leq \varepsilon;$$

поэтому в силу (5.7.4)

$$\|D_2 f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2 - D_2 f(a_1, a_2) \cdot t_2\| \leq \varepsilon \|t_2\|.$$

Наконец, при $\sup(\|t_1\|, \|t_2\|) \leq \inf(r, r')$ имеем

$$\begin{aligned} \|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2) \cdot t_1 - D_2 f(a_1, a_2) \cdot t_2\| &\leq \\ &\leq 4\varepsilon \sup(\|t_1\|, \|t_2\|), \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (8.9.1.1). Непрерывность отображения Df следует из того факта, что формулу (8.9.1.1) можно записать в виде $Df = D_1 f \circ i_1 + D_2 f \circ i_2$, и из (5.7.5).

Теорема (8.9.1) с помощью индукции по n может быть немедленно обобщена на произведение n банаховых пространств. Сопоставляя этот результат с (8.2.1), получаем

(8.9.2) Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение

открытого множества A произведения $E = \prod_{i=1}^n E_i$ в F и пусть g_i для каждого i есть непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества B банахова пространства G в E_i , причем для любой точки $z \in B$ точка $(g_1(z), \dots, g_n(z)) \in A$. Тогда сложное отображение $f \circ (g_1, \dots, g_n)$ непрерывно дифференцируемо в B и

$$D(f \circ (g_1, \dots, g_n)) = \sum_{k=1}^n (D_k f) \circ (g_1, \dots, g_n) \circ Dg_k.$$

Задачи

1. Пусть E и F — два банаховых пространства и f — непрерывное отображение открытого множества $A \subset E$ в F . Предположим, что для любой точки $x \in A$ существует такой элемент $u(x) \in \mathcal{L}(E; F)$, что для всякого вектора $y \in E$ предел отношения $(f(x+ty) - f(x))/t$, когда $t \neq 0$ стремится в $\mathbb{R}$ к 0, существует и равен $u(x) \cdot y$. Предположим, кроме того, что $x \rightarrow u(x)$ есть непрерывное отображение множества A в $\mathcal{L}(E; F)$. Покажите, что тогда f непрерывно дифференцируемо в A и что $u(x) = Df(x)$ для каждой точки $x \in A$.

[Примените теорему о среднем значении к функции $t \rightarrow f(x+ty)$ при $t \in [0, 1]$.]

2. Пусть E — пространство (c_0) Банаха (задача 5 § 5.3). Пусть F — комплексное банахово пространство $(c_0) + i(c_0)$ (состоящее из всех последовательностей $z = (\zeta_n)_{n \geq 0}$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0$) с нормой $\|z\| = \sup_n |\zeta_n|$. Обозначим через F_0 действительное банахово пространство, базисное для F (5.1). Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый промежуток, содержащий 0, и для каждого целого $n \geq 0$ пусть f_n — такое непрерывное отображение промежутка I в $\mathbb{C}$, что из $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ следует $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t_n) = 0$. Тем самым определено отображение $f: (\xi_n) \rightarrow (f_n(\xi_n))$ пространства E в F_0 .

а) Пусть f непрерывно в некоторой окрестности точки 0. Для того чтобы f было квазидифференцируемо в точке 0 (задача 4 § 8.4), необходимо и достаточно, чтобы при каждом n существовала производная $f'_n(0)$ и чтобы $\sup_n |f'_n(0)| < +\infty$.

б) Для того чтобы f было дифференцируемо в точке 0, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, чтобы из $|t| \leq \delta$ при каждом n следовало $|f_n(t) - f_n(0) - f'_n(0)t| \leq \varepsilon |t|$.

с) Для того чтобы производная f' существовала в некоторой окрестности точки 0 в E и была непрерывна в 0, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность $J \subset I$ точки 0 в $\mathbb{R}$, чтобы 1°) каждая производная f'_n существовала в J ; 2°) $\sup_n |f'_n(0)| < +\infty$; 3°) последовательность (f'_n) была равномерно непрерывна в точке 0 (7.5).

[См. задачу 3 § 8.6.]

д) Пусть $f_n(t) = e^{nit}/n$ для каждого $n \geq 1$ и $f_0(t) = 1$. Покажите, что отображение f квазидифференцируемо в каждой точке $x \in E$. Покажите, что если $u(x)$ — квазипроизводная отображения f в точке x , то отображение $(x, y) \rightarrow u(x) \cdot y$ пространства $E \times E$ в F_0 непрерывно, но f не дифференцируемо ни в одной точке пространства E .

3. Пусть f — непрерывное отображение открытого множества A банахова пространства E в банахово пространство F . Допустим, что для любой

точки $x \in A$ и любой точки $y \in E$ предел $\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} (f(x + ty) - f(x))/t = g(x, y)$

существует в E . Покажите, что если для $y_i \in E$, $1 \leq i \leq n$ и $x_0 \in A$ каждое из отображений $x \rightarrow g(x, y_i)$ непрерывно в точке x_0 , то

$$g(x_0, y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \sum_{i=1}^n g(x_0, y_i).$$

[Примените теорему о среднем значении.]

4. Пусть E_1, E_2 и F — три банаховых пространства и f — непрерывное отображение открытого множества A пространства $E_1 \times E_2$ в F . Для того чтобы f было дифференцируемо в точке $(a_1, a_2) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы: 1°) существовали производные $D_1f(a_1, a_2)$ и $D_2f(a_1, a_2)$; 2°) для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, чтобы из $\|t_1\| \leq \delta$ и $\|t_2\| \leq \delta$ следовало

$$\|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) - f(a_1, a_2 + t_2) + f(a_1, a_2)\| \leq \varepsilon (\|t_1\| + \|t_2\|).$$

Покажите, что второе условие будет выполнено, если существует производная $D_1f(a_1, a_2)$ и если найдется такая окрестность V точки (a_1, a_2) в $E_1 \times E_2$, что в V существует производная D_2f и отображение $(x_1, x_2) \rightarrow D_2f(x_1, x_2)$ окрестности V в $\mathcal{L}(E_2, F)$ непрерывно.

5. Пусть f — действительная функция, определенная в $\mathbb{R}^2$ условиями $f(x, y) = (xy/r) \sin(1/r)$ при $(x, y) \neq (0, 0)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и $f(0, 0) = 0$. Покажите, что частные производные D_1f и D_2f существуют в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и что четыре отображения $x \rightarrow D_1f(x, b)$, $y \rightarrow D_1f(a, y)$, $x \rightarrow D_2f(x, b)$ и $y \rightarrow D_2f(a, y)$ непрерывны в $\mathbb{R}$ для любой точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, но отображение f не дифференцируемо в точке $(0, 0)$.

6. Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$ и f — такое отображение пространства I^p в действительное банахово пространство E , что для любой точки $(a_1, \dots, a_p) \in I^p$ каждое из отображений $x_j \rightarrow f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p)$ ($1 \leq j \leq p$) непрерывно и дифференцируемо в I и, кроме того, p функций D_jf ($1 \leq j \leq p$) ограничены в I^p . Покажите, что f непрерывно в I^p .

[Примените теорему о среднем значении.]

10. Якобианы

Общую теорему (8.9.1) рассмотрим теперь для наиболее важных частных случаев.

А) $E = \mathbb{R}^n$ (соответственно $E = \mathbb{C}^n$). Если f — дифференцируемое отображение открытого множества $A \subset E$ в F , то частная производная $D_kf(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ отождествляется с вектором пространства F (8.4), а производная отображения f есть отображение

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \rightarrow \sum_{k=1}^n D_kf(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \zeta_k.$$

Если непрерывна производная Df , то непрерывна и каждая из частных производных $D_k f$. Наоборот, если каждое из отображений $D_k f$ существует и непрерывно в A , то f непрерывно дифференцируемо в A .

В) $E = \mathbb{R}^n$ и $F = \mathbb{R}^m$ (соответственно $E = \mathbb{C}^n$ и $F = \mathbb{C}^m$). В этом случае мы можем написать, что $f = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, где φ_i — скалярные функции, определенные в E , и в силу (8.1.5) отображение f непрерывно дифференцируемо в том и только в том случае, если непрерывно дифференцируема каждая из функций φ_i . Но в силу А) функция φ_i непрерывно дифференцируема в том и только в том случае, если каждая из частных производных $D_j \varphi_i$ (являющаяся теперь скалярной функцией) существует и непрерывна. Далее, (полная) производная отображения f есть линейное отображение

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \rightarrow (\eta_1, \dots, \eta_m),$$

где

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n (D_j \varphi_i(a_1, \dots, a_n)) \zeta_j.$$

Иными словами, производной f' , являющейся линейным отображением пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ (соответственно $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$), соответствует матрица $(D_j \varphi_i(a_1, \dots, a_n))$, называемая *матрицей Якоби* отображения f (или функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$) в точке $(a_1, \dots, a_n)$. Когда $m = n$, определитель (квадратной) матрицы Якоби отображения f называется *якобианом* отображения f (или функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$). Теорема (8.9.2) в этом случае превращается в

(8.10.1) Пусть φ_j ($1 \leq j \leq m$) — m скалярных функций, непрерывно дифференцируемых в открытом множестве A пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$). Пусть ψ_i ($1 \leq i \leq p$) — p скалярных функций, непрерывно дифференцируемых в открытом множестве B пространства $\mathbb{R}^m$ (соответственно $\mathbb{C}^m$), содержащем образ множества A при отображении $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Если тогда $\theta_i(x) = \psi_i(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ при $x \in A$ и $1 \leq i \leq p$, то имеет место соотношение

$$(D_k \theta_i) = (D_j \psi_i)(D_k \varphi_j)$$

между матрицами Якоби. В частности, при $m = n = p$ имеет место соотношение

$$\det(D_k \theta_i) = \det(D_j \psi_i) \det(D_k \varphi_j)$$

между якобианами.

Упомянем здесь об обычных обозначениях $f'_{\xi_i}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ частной производной $D_i f(\xi_1, \dots, \xi_n)$, которые, к сожалению, приводят к безнадёжной путанице, когда делается подстановка (что, например, означают символы $f'_y(y, x)$ или

$f'_x(x, x)?$). Якобиан $\det(D_j \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_n))$ обозначается также символом $D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)/D(\xi_1, \dots, \xi_n)$ или $\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)/\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

11. Производная интеграла, зависящего от параметра

(8.11.1) Пусть $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ — компактный промежуток, E и F — банаховы пространства, f — непрерывное отображение произведения $I \times A$ в F (A — открытое множество пространства E). Тогда отображение $g(z) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi, z) d\xi$ непрерывно в A .

Пусть заданы точка $z_0 \in A$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для любой точки $\xi \in I$ существует такая ее окрестность $V(\xi)$ в I и такое число $r(\xi) > 0$, что при $\eta \in V(\xi)$ и $\|z - z_0\| \leq r(\xi)$ выполняется неравенство $\|f(\eta, z) - f(\xi, z_0)\| \leq \varepsilon$. Покроем I конечным числом окрестностей $V(\xi_i)$ и положим $r = \inf(r(\xi_i))$. Тогда при $\|z - z_0\| \leq r$ для любой точки $\xi \in I$ выполняется неравенство $\|f(\xi, z) - f(\xi, z_0)\| \leq \varepsilon$. Поэтому в силу (8.7.7) $\|g(z) - g(z_0)\| \leq \varepsilon(\beta - \alpha)$ при $\|z - z_0\| \leq r$, ч. т. д.

(8.11.2) (Правило Лейбница). Пусть выполняются предположения теоремы (8.11.1) и пусть, кроме того, частная производная $D_2 f$ по второй переменной существует и непрерывна в $I \times A$. Тогда отображение g непрерывно дифференцируемо в A и

$$Dg(z) = \int_{\alpha}^{\beta} D_2 f(\xi, z) d\xi.$$

[Заметим, что обе части этого равенства принадлежат $\mathcal{L}(E, F)$.]

Те же рассуждения, что и в (8.11.1), в применении к $D_2 f$ показывают, что для заданного $\varepsilon > 0$ и точки $z_0 \in A$ существует такое $r > 0$, что при $\|z - z_0\| \leq r$ для любой точки $\xi \in I$ выполняется неравенство $\|D_2 f(\xi, z) - D_2 f(\xi, z_0)\| \leq \varepsilon$. Поэтому в силу (8.6.2)

$$\|f(\xi, z_0 + t) - f(\xi, z_0) - D_2 f(\xi, z_0) \cdot t\| \leq \varepsilon \|t\|$$

для любой точки $\xi \in I$ и любого t , удовлетворяющего неравенству $\|t\| \leq r$. На основании (8.7.7) мы, таким образом, имеем

$$\left\| g(z_0 + t) - g(z_0) - \int_{\alpha}^{\beta} (D_2 f(\xi, z_0) \cdot t) d\xi \right\| \leq \varepsilon(\beta - \alpha) \|t\|.$$

Но в силу (8.7.6) и (5.7.4) $\int_{\alpha}^{\beta} (D_2 f(\xi, z_0) \cdot t) d\xi = \left(\int_{\alpha}^{\beta} D_2 f(\xi, z_0) d\xi \right) \cdot t$

для любого t , и это завершает доказательство.

Задачи

1. Пусть $J \subset \mathbb{R}$ — открытый промежуток, E и F — два банаховых пространства, A — открытое множество пространства E , f — непрерывное отображение произведения $J \times A$ в F , для которого частная производная $D_2 f$ существует и непрерывна в $J \times A$, α и β — два непрерывно дифференцируемых отображения множества A в J . Пусть

$$g(z) = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} f(\xi, z) d\xi.$$

Покажите, что отображение g непрерывно дифференцируемо в A и что $g'(z)$ есть линейное отображение

$$t \rightarrow \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} D_2 f(\xi, z) d\xi \right) \cdot t + \{\beta'(z) \cdot t\} f(\beta(z), z) - \{\alpha'(z) \cdot t\} f(\alpha(z), z).$$

[Примените (8.9.1) и (8.11.2).]

2. Пусть f и g — две действительные простые функции в компактном промежутке $[a, b]$, причем f убывает на $[a, b]$, а $0 \leq g(t) \leq 1$. Покажите, что

$$\int_{b-\lambda}^b f(t) dt \leq \int_a^b f(t) g(t) dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t) dt,$$

где $\lambda = \int_a^b g(t) dt$. В каком случае имеют место равенства?

[Рассмотрите интегралы $\int_a^y f(t) g(t) dt$ и $\int_a^{a+h(y)} f(t) dt$, где $h(y) =$

$= \int_a^y g(t) dt$, как функции от y и аналогичные интегралы для второго равенства.]

3. Пусть выполняются предположения задачи 1 с тем лишь отличием, что α и β непрерывны, а не обязательно дифференцируемы, и, кроме того, предполагается, что $f(\alpha(z), z) = 0$ и $f(\beta(z), z) = 0$ для любой точки $z \in A$. Покажите, что отображение $g(z)$ непрерывно дифференцируемо в A и что

$$g'(z) = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} D_2 f(\xi, z) d\xi.$$

[С помощью теоремы Больцано (3.19.8) докажите, что если ξ принадлежит промежутку с концами $\beta(z_0)$ и $\beta(z)$, то существует такая точка $z' \in A$, что $\|z' - z_0\| \leq \|z - z_0\|$ и $\xi = \beta(z')$. С помощью теоремы о среднем значении покажите, что если M — верхняя грань нормы $\|D_2 f\|$ в произвольной окрестности точки $(\beta(z_0), z_0)$, то $\|f(\xi, z)\| \leq M \|z - z_0\|$.]

4. Пусть $I = [a, b]$, $A = [c, d]$ — два компактных промежутка в $\mathbb{R}$ и f — такое отображение произведения $I \times A$ в банахово пространство E , что: 1°) для каждой точки $y \in A$ функция $x \rightarrow f(x, y)$ проста в I и для каждой точки $x \in I$ функция $y \rightarrow f(x, y)$ проста в A ; 2°) отображение f ограничено в $I \times A$; 3°) если D — подмножество произведения $I \times A$, состоящее из точек (x, y) , в которых f не является непрерывным, то для каждой точки $x_0 \in I$ (соответственно $y_0 \in A$) множество тех y (соответственно x), для которых $(x_0, y) \in D$ (соответственно $(x, y_0) \in D$), конечно.

а) Покажите, что функция $g(y) = \int_a^b f(t, y) dt$ непрерывна в A .

[Если заданы $y_0 \in A$ и $\varepsilon > 0$, то покажите, что существуют такая окрестность V точки y_0 в A и конечное число промежутков $J_k \subset I$ ($1 \leq k \leq n$), что сумма длин промежутков J_k не превосходит ε и что отображение f непрерывно в $W \times V$, где $W = I \setminus \bigcup_{k=1}^n J_k$. Для доказательства этого утверждения примените теорему Бореля — Лебега (3.17.6).]

б) Выведите из а), что

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

[Рассмотрите две функции

$$z \rightarrow \int_c^z dy \int_a^b f(x, y) dx \quad \text{и} \quad z \rightarrow \int_a^b dx \int_c^z f(x, y) dy$$

при $z \in A$.]

5. а) Пусть f — строго возрастающая непрерывная функция на промежутке $[0, a]$, причем $f(0) = 0$; пусть g — обратная функция, являющаяся непрерывной и строго возрастающей на промежутке $[0, f(a)]$. Покажите,

что $\int_0^a f(t) dt = \int_0^{f(a)} (a - g(u)) du$.

[Примените задачу 4 к функции, равной 1 при $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq f(x)$ и 0 при $0 \leq x \leq a$, $f(x) < y \leq f(a)$.]

б) Покажите, что при $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq f(a)$ имеет место следующее неравенство:

$$xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y g(u) du,$$

причем правая и левая части равны в том и только в том случае, если $y = f(x)$.

с) Выведите из б) неравенства:

$$xy \leq x \cdot \log x + e^{y-1} \quad \text{при } x > 0, y \in \mathbb{R};$$

$$xy \leq ax^p + by^q \quad \text{при } x \geq 0, y \geq 0, p > 1, q > 1,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a > 0, b > 0 \text{ и } (pa)^q (qb)^p \geq 1.$$

12. Производные высшего порядка

Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества A банахова пространства E в банахово пространство F . Тогда производная Df является непрерывным отображением множества A в банахово пространство $\mathcal{L}(E; F)$. Если это отображение дифференцируемо в точке $x_0 \in A$ (соответственно в A), то мы будем говорить, что f *дважды дифференцируемо* в точке x_0 (соответственно в A), а производную отображения Df в точке x_0 будем называть *второй производной* отображения f в точке x_0 и обозначать символом $f''(x_0)$ или $D^2f(x_0)$. Эта производная является элементом пространства $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$, но мы знаем (5.7.8), что это последнее пространство естественным образом отождествляется с пространством $\mathcal{L}(E, E; F)$ (обозначаемым символом $\mathcal{L}_2(E; F)$) непрерывных билинейных отображений произведения $E \times E$ в F . Напомним, что такое отождествление осуществляется, если каждому элементу $u \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ поставить в соответствие билинейное отображение $(s, t) \rightarrow (u \cdot s) \cdot t$. Этот последний элемент записывается также в виде $u \cdot (s, t)$.

(8.12.1) Пусть f дважды дифференцируемо в точке x_0 . Тогда при любом фиксированном $t \in E$ производная отображения $x \rightarrow Df(x) \cdot t$ множества A в F в точке x_0 равна $s \rightarrow D^2f(x_0) \cdot (s, t)$.

Если мы заметим, что отображение $x \rightarrow Df(x) \cdot t$ является композицией линейного отображения $u \rightarrow u \cdot t$ пространства $\mathcal{L}(E; F)$ в F и отображения $x \rightarrow Df(x)$ пространства E в $\mathcal{L}(E; F)$, то результат будет следовать из (8.2.1) и (8.1.3).

(8.12.2) Если отображение f дважды дифференцируемо в точке x_0 , то билинейное отображение $(s, t) \rightarrow D^2f(x_0) \cdot (s, t)$ симметрично; иными словами,

$$D^2f(x_0) \cdot (s, t) = D^2f(x_0) \cdot (t, s).$$

Рассмотрим функцию

$$g(\xi) = f(x_0 + \xi s + t) - f(x_0 + \xi s)$$

действительной переменной ξ в промежутке $[0, 1]$, где s и t удовлетворяют условиям $\|s\| \leq r/2$, $\|t\| \leq r/2$ и шар с центром x_0 и

радиусом r содержится в A . Из (8.6.2) получаем

$$\|g(1) - g(0) - g'(0)\| \leq \sup_{0 \leq \xi \leq 1} \|g'(\xi) - g'(0)\|.$$

В силу (8.4.1)

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= (f'(x_0 + \xi s + t) - f'(x_0 + \xi s)) \cdot s = \\ &= ((f'(x_0 + \xi s + t) - f'(x_0)) - (f'(x_0 + \xi s) - f'(x_0))) \cdot s. \end{aligned}$$

По предположению, для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $r' \leq r$, что при $\|s\| \leq r'/2$ и $\|t\| \leq r'/2$ имеем

$$\|f'(x_0 + \xi s + t) - f'(x_0) - f''(x_0) \cdot (\xi s + t)\| \leq \varepsilon (\|s\| + \|t\|)$$

и

$$\|f'(x_0 + \xi s) - f'(x_0) - f''(x_0) \cdot (\xi s)\| \leq \varepsilon \|s\|;$$

поэтому

$$\|g'(\xi) - (f''(x_0) \cdot t) \cdot s\| \leq 2\varepsilon \|s\| (\|s\| + \|t\|)$$

и, следовательно,

$$\|g(1) - g(0) - (f''(x_0) \cdot t) \cdot s\| \leq 6\varepsilon \|s\| (\|s\| + \|t\|).$$

Но разность $g(1) - g(0) = f(x_0 + s + t) - f(x_0 + t) - f(x_0 + s) + f(x_0)$ симметрична относительно s и t ; поэтому, меняя s и t местами, находим

$$\|(f''(x_0) \cdot t) \cdot s - (f''(x_0) \cdot s) \cdot t\| \leq 6\varepsilon (\|s\| + \|t\|)^2.$$

Это неравенство доказано пока при $\|s\| \leq r'/2$ и $\|t\| \leq r'/2$. Но если мы заменим s и t на λs и λt , то обе части неравенства будут иметь множителем $|\lambda|^2$. Поэтому оно справедливо при всех s и t , принадлежащих E , и, в частности, при $\|s\| = \|t\| = 1$, откуда [в силу (5.7.7)] следует, что

$$\|f''(x_0) \cdot (t, s) - f''(x_0) \cdot (s, t)\| \leq 24\varepsilon \|s\| \|t\|$$

при всех s и t . Так как ε произвольно, то теорема доказана.

В частности,

(8.12.3) Пусть A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ (соответственно в $\mathbb{C}^n$). Если отображение f множества A в банахово пространство F дважды дифференцируемо в точке x_0 , то частные производные $D_i f$ дифференцируемы в точке x_0 и

$$D_i D_j f(x_0) = D_j D_i f(x_0), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Нам нужно только применить (8.12.1), специальным образом выбрав значения t , и заметить, что при $s = (\xi_i)$ и $t = (\eta_i)$ значение производной $D^2 f(x_0) \cdot (s, t) = (D^2 f(x_0) \cdot s) \cdot t$ равно $\sum_{i,j} (D_i D_j f(x_0)) \xi_i \eta_j$ (см. 8.10).

Определим теперь по индукции p раз дифференцируемое отображение f открытого множества $A \subseteq E$ в F как $(p-1)$ раз дифференцируемое отображение, $(p-1)$ -я производная $D^{p-1}f$ которого дифференцируема в A . Производная $D(D^{p-1}f)$ называется p -й производной отображения f и обозначается символом $D^p f$ или $f^{(p)}$. Производная $D^p f(x_0)$ отождествляется с элементом пространства $\mathcal{L}_p(E; F)$ непрерывных p -линейных отображений произведения E^p в F , и соответствующее отображение обозначается символом

$$(t_1, t_2, \dots, t_p) \rightarrow D^p f(x_0) \cdot (t_1, \dots, t_p).$$

Как и в (8.12.1), видим, что отображение

$$t_1 \rightarrow D^p f(x_0) \cdot (t_1, t_2, \dots, t_p)$$

является производной в точке x_0 отображения

$$x \rightarrow D^{p-1} f(x) \cdot (t_2, \dots, t_p).$$

Теорема (8.12.2) обобщается следующим образом:

(8.12.4) Если отображение f является p раз дифференцируемым в A , то полилинейное отображение $D^p f(x)$ для каждой точки $x \in A$ симметрично.

Доказательство проводится индукцией по p . Фиксируем $t_3, \dots, t_p$ и рассмотрим отображение $x \rightarrow g(x) = D^{p-2} f(x) \cdot (t_3, \dots, t_p)$. Тогда ясно, что вторая производная отображения g в точке x равна

$$(t_1, t_2) \rightarrow D^2 g(x) \cdot (t_1, t_2, t_3, \dots, t_p).$$

Поэтому в силу (8.12.2)

$$(8.12.4.1) \quad D^2 g(x) \cdot (t_2, t_1, t_3, \dots, t_p) = D^2 g(x) \cdot (t_1, t_2, t_3, \dots, t_p).$$

С другой стороны, для любой перестановки σ множества индексов $\{2, 3, \dots, p\}$ индукционное предположение дает

$$D^{p-1} f(x) \cdot (t_{\sigma(2)}, t_{\sigma(3)}, \dots, t_{\sigma(p)}) = D^{p-1} f(x) \cdot (t_2, t_3, \dots, t_p)$$

и, взяв первую производную от обеих частей (где t_i фиксированы), получаем

$$(8.12.4.2) \quad D^p f(x) \cdot (t_1, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(p)}) = D^p f(x) \cdot (t_1, t_2, \dots, t_p).$$

Сопоставляя (8.12.4.1) и (8.12.4.2), прежде всего видим, что $D^p f(x) \cdot (t_1, t_2, \dots, t_p)$ не изменится, если индекс 1 переставить с любым другим индексом, а также если переставить любые два индекса ≥ 2 . Но такого рода транспозиции порождают любую перестановку из индексов $1, 2, \dots, p$, ч. т. д.

(8.12.5) Если отображение f является m раз дифференцируемым, а производная $D^m f$, кроме того, n раз дифференцируема в A , то f будет $m+n$ раз дифференцируемо в A и $D^{m+n} f = D^n (D^m f)$.

При $n=1$ это просто определение, а при $n > 1$ это сразу доказывается индукцией по n с помощью определения.

(8.12.6) Пусть $f = (f_1, \dots, f_m)$ — непрерывное отображение открытого множества $A \subset E$ в произведение $F_1 \times \dots \times F_m$ банаховых пространств. Для того чтобы f было p раз дифференцируемо в A , необходимо и достаточно, чтобы каждое из отображений f_i было p раз дифференцируемо в A , и в этом случае $D^p f = (D^p f_1, \dots, D^p f_m)$.

Это следует из (8.1.5) с помощью индукции по p .

(8.12.7) Пусть A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ (соответственно в $\mathbb{C}^n$). Если отображение f множества A в банахово пространство F является p раз дифференцируемым, то для $t_i = (\xi_{ij})$ ($1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$) имеет место формула

$$D^p f(x) \cdot (t_1, \dots, t_p) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_p)} D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_p} f(x) \xi_{1, j_1} \xi_{2, j_2} \dots \xi_{p, j_p},$$

где сумма распространяется на все p^p различных последовательностей $(j_k)_{1 \leq k \leq p}$ целых чисел, принадлежащих $\{1, n\}$.

Это немедленно доказывается индукцией по p , исходя из (8.10).

Элементы $D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_p} f(x)$ называются частными производными порядка p отображения f в точке x ; их всего p^p . Любые две частные производные, отличающиеся только перестановкой индексов, в силу (8.12.4) равны.

Мы будем говорить, что отображение f является p раз непрерывно дифференцируемым в A , если производная $D^p f$ существует и непрерывна в A .

(8.12.8) Пусть A — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) и f — непрерывное отображение множества A в банахово пространство F . Если все p^p частных производных отображения f существуют и непрерывны в A , то f p раз непрерывно дифференцируемо в A .

При $p=1$ это просто теорема (8.9.1) (распространенная на произведение n пространств). В общем случае нам нужно только провести индукцию по p и воспользоваться формулой (8.12.7).

Мы будем говорить, что отображение f бесконечно дифференцируемо в A , если оно p раз дифференцируемо в A при любом p . Все производные $D^p f$ в этом случае бесконечно дифференцируемы в A .

Пример. (8.12.9) Любое непрерывное билинейное отображение бесконечно дифференцируемо, и все его производные порядка ≥ 3 равны 0.

Из (8.1.4) следует, что производная билинейного непрерывного отображения в точке (x, y) равна $(s, t) \rightarrow [x \cdot t] + [s \cdot y]$. Если обозначить это линейное отображение через $g(x, y) \in \mathcal{L}(E \times F; G)$, то по предположению и в силу (5.5.1) существует такое $c > 0$, что в $E \times F$ выполняется неравенство $\|[x \cdot y]\| \leq c \|x\| \cdot \|y\|$. По определению нормы в пространстве $\mathcal{L}(E \times F; G)$ (5.7.1) имеем

$$\|g(x, y)\| \leq c(\|x\| + \|y\|) \leq 2c \sup(\|x\|, \|y\|).$$

Поэтому g есть непрерывное линейное отображение пространства $E \times F$ в $\mathcal{L}(E \times F; G)$ и, следовательно, отображение $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$ дважды дифференцируемо, а его вторая производная в точке (x, y) [в силу (8.1.3) и (8.12.1)] равна

$$((s_1, t_1), (s_2, t_2)) \rightarrow [s_1 \cdot t_2] + [s_2 \cdot t_1].$$

Так как это отображение не зависит от (x, y) , то отсюда следует наше утверждение.

(8.12.10) Пусть E, F и G — три банаховых пространства, A — открытое множество в E и B — открытое множество в F . Если отображение f множества A в B и отображение g множества B в G p раз непрерывно дифференцируемы, то $h = g \circ f$ есть p раз непрерывно дифференцируемое отображение множества A в G .

При $p=1$ утверждение следует из (8.2.1) и того факта, что в силу (5.7.5) $(u, v) \rightarrow v \circ u$ есть билинейное непрерывное отображение пространства $\mathcal{L}(E; F) \times \mathcal{L}(F; G)$ в $\mathcal{L}(E; G)$. Теперь проведем индукцию по p . Так как $h'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$ и так как f' и g' являются $p-1$ раз непрерывно дифференцируемыми, то индукционное предположение показывает, что $p-1$ раз непрерывно дифференцируемо отображение $g' \circ f'$. Из (8.12.6) и (8.12.9) тогда следует, что h' непрерывно дифференцируемо $p-1$ раз, и поэтому в силу (8.12.5) h непрерывно дифференцируемо p раз.

Пример. (8.12.11) Допустим, что существует по крайней мере один линейный гомеоморфизм банахова пространства E в банахово пространство F и что $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(E; F) \rightarrow$ открытое множество таких гомеоморфизмов в $\mathcal{L}(E; F)$ (8.3.2). Тогда отображение $u \rightarrow u^{-1}$ множества $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^{-1}$ бесконечно дифференцируемо.

Индукцией по p мы докажем, что отображение $u \rightarrow u^{-1}$ дифференцируемо p раз, причем при $p=1$ в силу (8.3.2) это утверждение верно. Для данных элементов v и w пространства $\mathcal{L}(F; E) = M$ пусть $f(v, w)$ — линейное отображение $t \rightarrow v \circ t \circ w$ пространства

$L = \mathcal{L}(E; F)$ в M . Ясно, что f билинейно [и отображает $M \times M$ в $\mathcal{L}(L; M)$], а теорема (5.7.5) показывает, что $\|f(v, w)\| \leq \|v\| \cdot \|w\|$; поэтому f непрерывно и, значит, в силу (8.12.9) бесконечно дифференцируемо. Теперь первой производной отображения $u \rightarrow u^{-1}$ ввиду (8.3.2) является отображение $u \rightarrow f(u^{-1}, u^{-1})$. На основании (8.12.6) и (8.12.10) отсюда следует, что если p раз дифференцируемо отображение $u \rightarrow u^{-1}$, то p раз дифференцируемо отображение $u \rightarrow f(u^{-1}, u^{-1})$ и, следовательно, в силу (8.12.5) $p+1$ раз дифференцируемо отображение $u \rightarrow u^{-1}$.

В случае когда f есть отображение промежутка $J \subset \mathbb{R}$ в действительное банахово пространство F , мы ранее определили (§ 8.4) понятие производной отображения f в точке $\xi_0 \in J$ относительно J . С помощью индукции по p определим p -ю производную отображения f в точке ξ_0 относительно J как производную в точке ξ_0 относительно J от $(p-1)$ -й производной отображения f (которая, таким образом, предполагается существующей в некоторой окрестности точки ξ_0 в J). Эта производная является элементом пространства F и здесь обозначается символом $D^p f(\xi_0)$ или $f^{(p)}(\xi_0)$. Если ξ_0 принадлежит внутренности промежутка J , то p -я производная, как она определена для общих отображений, совпадает с полилинейным отображением $(\zeta_1, \dots, \zeta_p) \rightarrow f^{(p)}(\xi_0) \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_p$ пространства $\mathbb{R}^p$ в F .

Задачи

1. Пусть f — дифференцируемое p раз отображение промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство E . Покажите, что при любом $x \in I$, для которого $\frac{1}{x} \in I$,

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n D^n \left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

[Проведите индукцию по n .]

2. а) Пусть ρ — функция, определяемая в $\mathbb{R}$ условиями

$$\rho(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1-t)^2}\right) & \text{при } -1 < t < 1, \\ 0 & \text{при } t \leq -1 \text{ или } t \geq 1. \end{cases}$$

Покажите, что функция ρ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}$.

[Воспользуйтесь тем, что при любом $n > 0$ предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$.]

б) В этой задаче мы условимся любую простую функцию f , определенную в компактном промежутке $[a, b]$ пространства $\mathbb{R}$, продолжать на все $\mathbb{R}$, полагая ее равной 0 при $t < a$ и при $t > b$. Мы будем при этом писать $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ вместо интеграла $\int_a^b f(t) dt$, который равен также

интегралы $\int_c^d f(t) dt$ при $c \leq a$ и $d \geq b$. Для любой такой функции f положим

$$f_n(t) = nc \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \rho(n(t-s)) ds = nc \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) \rho(ns) ds,$$

где $1/c = \int_{-1}^{+1} \rho(t) dt$ (регуляризация функции f с помощью ρ ; мы

пишем $\rho_n(t) = \rho(nt)$ и $f_n = f * \rho_n$). Покажите, что функция f_n бесконечно дифференцируема и обращается в 0 на дополнении к некоторому компактному промежутку [см. (8.11.2)]. Если функция f действительна и возрастает (соответственно строго возрастает) на $[a, b]$, то и функция f_n возрастает (соответственно строго возрастает) на промежутке $\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$. Если функция f (продолженная на $\mathbf{R}$) p раз непрерывно дифференцируема, то

$$D^p f_n(t) = nc \int_{-\infty}^{+\infty} (D^p f(s)) \rho(n(t-s)) ds = nc \int_{-\infty}^{+\infty} (D^p f(t-s)) \rho(ns) ds.$$

с) Покажите, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ при любом n .

д) Если функция f (продолженная на $\mathbf{R}$) непрерывна (соответственно p раз непрерывно дифференцируема), то последовательность (f_n) (соответственно $D^p f_n$) равномерно сходится в $\mathbf{R}$ к f (соответственно к $D^p f$).

е) К какому пределу стремится $f_n(t_0)$ (где $t_0 \in \mathbf{R}$), когда функция f предполагается только простой в $[a, b]$?

[Сначала рассмотрите случай, когда f является ступенчатой функцией; затем примените (7.6.1).]

ф) Покажите, что для любой простой функции f в $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)| dt = 0.$$

3. Пусть f — действительная функция, определенная на $] -1, 1 [$, n раз дифференцируемая на этом промежутке и удовлетворяющая на нем условию $|f(t)| \leq 1$.

а) Пусть $m_k(J)$ — наименьшее значение $|f^{(k)}(t)|$ в промежутке J , содержащемся в $] -1, 1 [$. Покажите, что если J разлагается на три последовательных промежутка J_1, J_2 и J_3 и если J_2 имеет длину μ , то

$$m_k(J) \leq \frac{1}{\mu} (m_{k-1}(J_1) + m_{k-1}(J_3)).$$

[Примените теорему о среднем значении.]

Выведите из этого неравенства, что если J имеет длину λ , то

$$m_k(J) \leq \frac{2^k (k+1)^{1/2} k^k}{\lambda^k}.$$

[Проведите индукцию по k .]

б) Выведите из а), что существует такое число α_n , зависящее только от n , что если $|f'(0)| \geq \alpha_n$, то уравнение $f^{(n)}(t) = 0$ имеет в $] -1, 1[$ по крайней мере $n-1$ различных корней.

[Индукцией по k покажите, что существует такая строго возрастающая последовательность $x_{k,1} < x_{k,2} < \dots < x_{k,k}$ точек промежутка $] -1, 1[$, что $f^{(k)}(x_{k,i}) f^{(k)}(x_{k,i+1}) < 0$ при $1 \leq i \leq k-1$; примените теорему Ролля.]

4. Пусть E, F — два банаховых пространства, A — открытое множество в E и f — дифференцируемое n раз отображение множества A в F . Пусть $x_0 \in A$ и $h_i \in E$ ($1 \leq i \leq n$) таковы, что $x_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i h_i \in A$ при $0 \leq \xi_i \leq 1$,

$1 \leq i \leq n$. С помощью индукции по k ($1 \leq k \leq n$) определим

$$\Delta^1 f(x_0; h_1) = f(x_0 + h_1) - f(x_0),$$

$$\Delta^k f(x_0; h_1, \dots, h_k) = \Delta^{k-1} g_k(x_0; h_1, \dots, h_{k-1}),$$

где

$$g_k(x) = f(x + h_k) - f(x).$$

а) Покажите, что

$$\|\Delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n)\| \leq \|h_1\| \cdot \|h_2\| \cdot \dots \cdot \|h_n\| \sup_{z \in P} \|D^n f(z)\|,$$

где P — множество точек $x_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i h_i$, $0 \leq \xi_i \leq 1$.

[Проведите индукцию по n .]

б) Выведите из а), что

$$\begin{aligned} \|\Delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n) - D^n f(x_0) \cdot (h_1, \dots, h_n)\| &\leq \\ &\leq \|h_1\| \cdot \|h_2\| \cdot \dots \cdot \|h_n\| \sup_{z \in P} \|D^n f(z) - D^n f(x_0)\|. \end{aligned}$$

5. Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества A пространства $\mathbb{R}^2$ в банахово пространство E , и пусть в окрестности V точки $(a, b) \in A$ производная $D_2(D_1 f)$ существует и непрерывна.

а) Пусть $(x, y) \in V$. Покажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|h| \leq \delta$ и $|k| \leq \delta$ следует неравенство¹⁾

$$\|\Delta^2 f(x, y; h, k) - D_2 D_1 f(x, y) h k\| \leq \varepsilon |h k|.$$

[К функции $g(t) = f(x+t, y+k) - f(x+t, y) - D_2 D_1 f(x, y) t k$ примените теорему о среднем значении и воспользуйтесь (8.6.2).]

б) Докажите, что производная $D_1(D_2 f)$ существует в V и равна $D_2(D_1 f)$.

[Воспользуйтесь а).]

¹⁾ Здесь $\Delta^2 f(x, y, h, k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$. — Прим. перев.

с) Приведите пример функции, удовлетворяющей предыдущим предположениям, для которой обе производные $D_1(D_1f)$ и $D_2(D_2f)$ не существуют ни в одной точке (см. задачу 1 § 8.4).

6. Пусть f — действительная функция, определяемая в $\mathbb{R}^2$ условиями $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ при $(x, y) \neq (0, 0)$. Покажите, что все четыре производные $D_1(D_1f)$, $D_1(D_2f)$, $D_2(D_1f)$ и $D_2(D_2f)$ существуют всюду в $\mathbb{R}^2$, но что $D_1(D_2f) \neq D_2(D_1f)$ в точке $(0, 0)$.

7. Обозначения те же, что и в задаче 2 § 8.9. Пусть $g_n(t) = t/(1 + n|t|)$ и $f_n(t) = \int_0^t g_n(u) du$ для каждого $t \in \mathbb{R}$. Покажите, что функция $f: (\xi_n) \rightarrow$

$\rightarrow (f_n(\xi_n))$ непрерывно дифференцируема в E и что для каждой точки $y = (\eta_n) \in E$ отображение $x \rightarrow f'(x) \cdot y$ дифференцируемо в точке $x = 0$, но отображение f' не дифференцируемо в этой точке [ср. (8.12.1)].

8. Пусть E и F — два банаховых пространства, A — открытое множество в E и $\mathcal{D}_F^{(p)}(A)$ — векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых отображений множества A в F , таких, что f и все его производные $D^k f$ ($1 \leq k \leq p$) ограничены в A . Для любого отображения $f \in \mathcal{D}_F^{(p)}(A)$ пусть

$$\|f\|_p = \sup_{x \in A} (\|f(x)\| + \|Df(x)\| + \dots + \|D^p f(x)\|).$$

Покажите, что $\|f\|_p$ есть норма в $\mathcal{D}_F^{(p)}(A)$, при которой это пространство становится банаховым пространством.

[Воспользуйтесь (8.6.3).]

Отображение $f \rightarrow Df$ является непрерывным линейным отображением пространства $\mathcal{D}_F^{(p)}(A)$ в $\mathcal{D}_F^{(p-1)}(A)$ (соответственно в $\mathcal{C}_F^\infty(E; F)$ при $p=1$).

9. Пусть E, F, G — три банаховых пространства и L, M, N — соответственно банаховы пространства $\mathcal{D}_F^{(p)}(E)$, $\mathcal{D}_G^{(p)}(F)$, $\mathcal{D}_G^{(p)}(E)$. При $f \in L$, $g \in M$ пусть $\Phi(f, g) = g \circ f \in N$.

а) Пусть $(f_0, g_0) \in L \times M$. Покажите, что если отображение $D^p g_0$ равномерно непрерывно в F , то отображение Φ непрерывно в (f_0, g_0) .

[Проведите индукцию по p .]

Если E, F и G конечномерны, то Φ непрерывно в $L \times M$.

[Примените (3.16.5).]

б) Пусть $N_k = \mathcal{D}_G^{(p-k)}(E)$ при $1 \leq k \leq p$, где $\mathcal{D}_G^{(0)}(E) = \mathcal{C}_G^\infty(E)$. Покажите: что как отображение произведения $L \times M$ в N_1 отображение Φ непрерывно в каждой точке; для того чтобы Φ (как отображение произведения $L \times M$ в N_1) было дифференцируемо в точке (f_0, g_0) , достаточно, чтобы отображение $D^p g_0$ было равномерно непрерывно; что производная $D\Phi$ есть линейное отображение

$$(u, v) \rightarrow ((Dg_0) \circ f_0) \cdot u + v \circ f_0.$$

с) Пусть U_f — линейное отображение $g \rightarrow g \circ f$ пространства M в N . Покажите, что U_f непрерывно. Мы можем также U_f рассматривать как элемент пространства $\mathcal{L}(M; N_k)$ при любом $k \leq p$. Покажите, что отображе-

ние $f \rightarrow U_f$ пространства L в $\mathcal{L}(M; N_1)$ непрерывно и что отображение $f \rightarrow U_f$ пространства L в $\mathcal{L}(M; N_2)$ дифференцируемо, причем элемент $DU_f \in \mathcal{L}(L; \mathcal{L}(M; N_2))$ есть билинейное отображение $(u, v) \rightarrow ((Dv) \circ f) \cdot u$.

d) Выведите из b) и c), что как отображение произведения $L \times M$ в N_k отображение Φ дифференцируемо $k-1$ раз.

10. Пусть f — действительная дважды дифференцируемая функция, определенная в открытом множестве A банахова пространства E . Допустим, что в точке $x_0 \in E$ производная $Df(x_0) = 0$ и что существует такое число $c > 0$, что $D^2f(x_0) \cdot (t, t) \leq -c\|t\|^2$ для каждой точки $t \in E$. Покажите, что в точке x_0 функция f достигает строгого относительного максимума (задача 6 § 3.9). Если E конечномерно, то предыдущее условие можно заменить условием $D^2f(x_0) \cdot (t, t) < 0$ для любой точки $t \neq 0$ в E .

[Используйте компактность сферы $\|t\| = 1$ в E .]

11. a) Пусть f — действительная функция, определенная в открытом промежутке $I \subset \mathbb{R}$ и дифференцируемая в I . Пусть $[a, b] \subset I$, и предположим, что f'' существует в открытом промежутке $]a, b[$, но f' может и не быть непрерывной в точках a и b (см. задачу 6 § 8.7). Покажите, что существует такая точка $c \in]a, b[$, что $f'(b) - f'(a) = (b-a)f''(c)$.

[Воспользуйтесь задачей 3 § 8.5.]

b) Каково соответствующее свойство для функций, определенных в I и принимающих значения в гильбертовом пространстве (см. задачу 6 § 8.5)?

13. Дифференциальные операторы

Пусть A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ (соответственно в $\mathbb{C}^n$) и F — действительное (соответственно комплексное) банахово пространство. Обозначим через $\mathcal{E}_F^{(p)}(A)$ множество всех p раз непрерывно дифференцируемых отображений множества A в F . Из (8.12.10) ясно, что $\mathcal{E}_F^{(p)}(A)$ есть действительное (соответственно комплексное) векторное пространство. Теорема (8.12.10) показывает, что верно и более общее утверждение: $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{(p)}(A)$ (соответственно $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{(p)}(A)$) есть кольцо, а $\mathcal{E}_F^{(p)}(A)$ — модуль над этим кольцом.

Для любой системы $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha$ целых чисел ≥ 0 , удовлетворяющей условию $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq p$, положим $M_\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$ и определим D^α или D_{M_α} как отображение $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$ пространства $\mathcal{E}_F^{(p)}(A)$ в $\mathcal{E}_F^{(p-|\alpha|)}(A)$. *Линейный дифференциальный оператор* есть линейная комбинация $D = \sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}$, где $|\alpha| \leq p$ и a_{α} — непрерывные скалярные функции, определенные в A . Если $a_{\alpha} = 0$ при $|\alpha| > k$ и каждая из функций a_{α} непрерывно дифференцируема $(p-k)$ раз, то D линейно отображает пространство $\mathcal{E}_F^{(p)}(A)$ в $\mathcal{E}_F^{(p-k)}(A)$.

(8.13.1) Если оператор $\sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}$ тождественно равен 0, то каждая из функций a_{α} тождественно равна 0 в A .

Запишем, что $Df = 0$ для $f(x) = c \cdot \exp(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)$, где $c \neq 0$ принадлежит F , а λ_i — произвольные константы. На основании 8.8 и (8.4.1) получим:

$$c \cdot \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) M_{\alpha}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right) \exp(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n) = 0$$

тождественно в A . Но это условие эквивалентно условию $\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) M_{\alpha}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$. Поскольку λ_i произвольны, отсюда следует, что для каждого α в любой точке $x \in A$ функция $a_{\alpha}(x) = 0$.

Коэффициенты a_{α} линейного дифференциального оператора, таким образом, определены однозначно. Наибольшее значение $|\alpha|$, для которого $a_{\alpha} \neq 0$, называется *порядком* оператора D .

Каждому многочлену $P = \sum_{\alpha} b_{\alpha} M_{\alpha}$ степени $\leq p$ с постоянными коэффициентами можно поставить в соответствие линейный оператор $D_P = \sum_{\alpha} b_{\alpha} D^{\alpha}$ порядка $\leq p$. Ясно, что $D_{P_1+P_2} = D_{P_1} + D_{P_2}$, а из (8.12.3) следует, что если многочлен $P_1 P_2$ имеет полную степень $\leq p$, то $D_{P_1 P_2} = D_{P_1} D_{P_2}$. В частности, из (8.12.7) следует, что при фиксированных ξ_{ij} оператор $f \rightarrow Df$, где

$$Df(x) = D^p f(x) \cdot (t_1, \dots, t_p)$$

может быть записан в виде

$$\prod_{i=1}^p (\xi_{i1} D_1 + \dots + \xi_{in} D_n).$$

(8.13.2) (Формула Лейбница) Пусть $P(X_1, \dots, X_n)$ — многочлен степени $\leq p$ и предположим, что $P(X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n) = \sum_k \gamma_k M'_k(X_1, \dots, X_n) M''_k(Y_1, \dots, Y_n)$, где M'_k и M''_k — одночлены.

Пусть $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$ — билинейное непрерывное отображение произведения $E \times F$ в G . Тогда для любого отображения $f \in \mathcal{E}_E^{(p)}(A)$ и любого отображения $g \in \mathcal{E}_F^{(p)}(A)$ отображение $[f \cdot g]$ принадлежит $\mathcal{E}_G^{(p)}(A)$ и имеет место формула

$$D_P [f \cdot g] = \sum_k \gamma_k [D_{M'_k} f \cdot D_{M''_k} g].$$

Достаточно доказать формулу для случая, когда P есть одночлен M . Проводя индукцию по полной степени P , мы можем допустить, что $P = X_i M$, и, значит, $D_P = D_i D_M$. По предположению,

имеем

$$D_M[f \cdot g] = \sum_k \gamma_k [D_{M'_k} f \cdot D_{M''_k} g].$$

Поэтому в силу (8.1.4)

$$D_P[f \cdot g] = \sum_k \gamma_k ([D_i D_{M'_k} f \cdot D_{M''_k} g] + [D_{M'_k} f \cdot D_i D_{M''_k} g]).$$

Правую часть мы можем записать в виде

$$\sum_h \gamma'_h [D_{N'_h} f \cdot D_{N''_h} g],$$

где суммирование распространяется на все пары одночленов

$$(N'_k(X_1, \dots, X_n), N''_k(Y_1, \dots, Y_n)),$$

такие, что либо $N'_h = X_i M'_k$ и $N''_h = M''_k$ для некоторого индекса k , либо же $N'_h = M'_k$ и $N''_h = Y_i M''_k$ для некоторого индекса k . Для каждого из рассматриваемых индексов h существует в точности один такой индекс k , и мы имеем $\gamma'_h = \gamma_k$. После этого наше утверждение очевидно.

Задачи

1. Пусть A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, E, F, G — три банаховых пространства и $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $E \times F$ в G . Покажите, что отображение $(f, g) \rightarrow [f \cdot g]$ произведения $\mathcal{D}_E^{(p)}(A) \times \mathcal{D}_F^{(p)}(A)$ в $\mathcal{D}_G^{(p)}(A)$ (задача 8 § 8.12) непрерывно.

2. Пусть I — компактный промежуток в $\mathbb{R}$, J — открытая окрестность промежутка I . Покажите, что существует бесконечно дифференцируемое отображение f пространства $\mathbb{R}$ в промежуток $[0, 1]$, равное 1 на I и 0 на дополнении J .

[Рассмотрите функции $g \cdot \rho_n$ (задача 2, b § 8.12), где g равно 1 на таком компактном промежутке K , что $I \subset K \subset J$, и 0 на $\mathbb{R} \setminus K$.]

Покажите, что если u — бесконечно дифференцируемое отображение пространства $\mathbb{R}$ в банахово пространство E , то существует такое бесконечно дифференцируемое отображение v пространства $\mathbb{R}$ в E , что $v(t) = u(t)$ на I и $v(t) = 0$ на $\mathbb{R} \setminus J$.

14. Формула Тейлора

(8.14.1) Пусть I — открытый промежуток в $\mathbb{R}$, f и g — две функции, принадлежащие соответственно $\mathcal{E}_E^{(p)}(I)$ и $\mathcal{E}_F^{(p)}(I)$, и $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $E \times F$ в G . Тогда

$$[f \cdot D^p g] - (-1)^p [D^p f \cdot g] = D([f \cdot D^{p-1} g] - [Df \cdot D^{p-2} g] + \dots + (-1)^{p-1} [D^{p-1} f \cdot g]).$$

Это немедленно проверяется с помощью (8.1.4).

(8.14.2) Пусть I — открытый промежуток в $\mathbf{R}$, f — функция, принадлежащая $\mathcal{E}_E^{(p)}(I)$. Тогда для любой пары α, ξ точек промежутка I

$$f(\xi) = f(\alpha) + \frac{\xi - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(\xi - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \dots \\ \dots + \frac{(\xi - \alpha)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\alpha) + \int_{\alpha}^{\xi} \frac{(\xi - \zeta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(\zeta) d\zeta.$$

Применим (8.14.1) к билинейному отображению $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ и к функции $g(\zeta) = (\xi - \zeta)^{p-1}/(p-1)!$ и проинтегрируем обе части от α до ξ .

(8.14.3) Пусть E и F — два банаховых пространства, A — открытое множество пространства E и f — p раз непрерывно дифференцируемое отображение множества A в F . Тогда если сегмент, соединяющий точки x и $x+t$, содержится в A , то

$$f(x+t) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x) \cdot t + \frac{1}{2!} f''(x) \cdot t^{(2)} + \dots \\ \dots + \frac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(x) \cdot t^{(p-1)} + \left(\int_0^1 \frac{(1-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x + \zeta t) d\zeta \right) \cdot t^{(p)},$$

где $t^{(k)}$ обозначает $(t, t, \dots, t)$ (k раз). В частности, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что при $\|t\| \leq r$

$$\left\| f(x+t) - f(x) - \frac{1}{1!} f'(x) \cdot t - \frac{1}{2!} f''(x) \cdot t^{(2)} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{1}{p!} f^{(p)}(x) \cdot t^{(p)} \right\| \leq \varepsilon \|t\|^p.$$

Чтобы получить первую формулу, применим (8.14.2) к функции $g(\xi) = f(x + \xi t)$ на промежутке $[0, 1]$. В силу (8.12.10) функция g непрерывно дифференцируема p раз, и с помощью индукции по k , пользуясь (8.4.1) и (8.1.3), сразу видим, что $g^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(x + \xi t) \cdot t^{(k)}$. Чтобы получить вторую формулу, заметим, что ввиду непрерывности $f^{(p)}$ число r можно выбрать так, чтобы при $0 \leq \zeta \leq 1$ и $\|t\| \leq r$ выполнялось неравенство $\|f^{(p)}(x + \zeta t) - f^{(p)}(x)\| \leq p! \varepsilon$. Тогда теорема о среднем значении (8.7.7) дает

$$\left\| \int_0^1 \frac{(1-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x + \zeta t) d\zeta - \frac{1}{p!} f^{(p)}(x) \right\| \leq \varepsilon,$$

и наше утверждение следует из (5.5.1).

Задачи

1. Полином Лежандра n -го порядка определяется формулой

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} D^n (t^2 - 1)^n.$$

а) Покажите, что с точностью до положительного множителя P_n является n -м элементом последовательности, получаемой путем ортонормализации в предгильбертовом пространстве $\mathcal{C}_c(I)$, где $I = [-1, +1]$, из последовательности (t^n) (6.6).

[Для доказательства того, что скалярное произведение $P_n(t)$ и t^m при $m < n$ равно 0, воспользуйтесь (8.14.1).]

б) Покажите, что $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$.

[Воспользуйтесь (8.13.2).]

с) Покажите, что между тремя последовательными полиномами Лежандра имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$nP_n(t) - (2n-1)tP_{n-1}(t) + (n-1)P_{n-2}(t) = 0.$$

[Заметьте, что если число c_n выбрано так, чтобы разность $P_n(t) - c_n t P_{n-1}(t)$ имела степень $\leq n-1$, то эта разность ортогональна всем t^k при $k \leq n-3$ и поэтому должна быть линейной комбинацией P_{n-2} и P_{n-1} ; воспользуйтесь также б).]

д) Покажите, что все корни P_n являются действительными и простыми и содержатся в промежутке $] -1, 1 [$.

[Если бы полином P_n менял знак в промежутке $] -1, 1 [$ только в $k \leq n-1$ точках, то существовал бы такой многочлен $g(t)$ степени k , что при $-1 \leq t \leq 1$ выполнялось бы неравенство $P_n(t)g(t) \geq 0$. Покажите, что это приводит к противоречию с тем фактом, что полином $P_n(t)$ при $k < n$ ортогонален t^k .]

е) Покажите, что полином P_n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0.$$

[Покажите, что при $k < n$ производная $D((1-t^2)P_n'(t))$ ортогональна t^k .]

2. а) Пусть f — дважды дифференцируемое отображение промежутка $I = [-a, a]$ в банахово пространство E ; пусть $M_0 = \sup_{t \in I} \|f(t)\|$ и $M_2 = \sup_{t \in I} \|f''(t)\|$. Покажите, что для каждого $t \in I$

$$\|f'(t)\| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{t^2 + a^2}{2a} M_2.$$

[Пользуясь формулой Тейлора, оцените каждую из разностей $f(a) - f(t)$ и $f(-a) - f(t)$.]

б) Пусть f — дважды дифференцируемое отображение промежутка J (ограниченного или нет) в E . Покажите, что если верхние грани $M_0 = \sup_{t \in J} \|f(t)\|$ и $M_2 = \sup_{t \in J} \|f''(t)\|$ конечны, то конечна и верхняя грань

$M_1 = \sup_{t \in J} \|f'(t)\|$, и что

$$(*) \quad \begin{cases} M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}, & \text{если длина } J \geq 2\sqrt{M_0/M_2}, \\ M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}, & \text{если } J = \mathbf{R}. \end{cases}$$

[Воспользуйтесь а).]

Докажите, что в этих двух неравенствах числа 2 и $\sqrt{2}$ не могут быть заменены меньшими.

[Если предположить, что f' имеет в J только правую производную f'_d , то неравенства (*) могут фактически превратиться в равенства, если в качестве f' взять кусочно-линейное отображение. Затем нужно применить задачу 2, d) § 8.12.]

с) Выведите из б), что если отображение f является p раз дифференцируемым в $\mathbf{R}$ и если верхние грани $M_0 = \sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t)\|$ и $M_p = \sup_{t \in \mathbf{R}} \|f^{(p)}(t)\|$ конечны, то при $1 \leq k \leq p-1$ конечна и верхняя грань $M_k = \sup_{t \in \mathbf{R}} \|f^{(k)}(t)\|$, и

$$(**) \quad M_k \leq 2^{k(p-k)/2} M_0^{1-k/p} M_p^{k/p}$$

[Проведите индукцию по p . Сначала, применяя индукционное предположение и первое из неравенств (*), покажите, что верхняя грань нормы $\|f''(t)\|$ на большом промежутке не может быть слишком велика; при этом нужно также воспользоваться задачей 2 § 8.12. Затем, пользуясь вторым из неравенств (*), по индукции докажите неравенство (**).]

3. Пусть E, F — два банаховых пространства и A — открытый шар в E (или все пространство E). Покажите, что норма

$$\sup_{x \in A} (\|f(x)\| + \|D^p f(x)\|)$$

в пространстве $\mathcal{D}_F^{(p)}(A)$ эквивалентна (5.6) норме $\|f\|_p$, определенной в задаче 8 § 8.12.

[Воспользуйтесь результатом, полученным в задаче 2, с).]

4. Пусть E — банахово пространство и (c_n) — произвольная последовательность элементов пространства E .

а) Покажите, что существуют строго убывающая последовательность (a_n) чисел, сходящаяся к 0, и последовательность (u_n) бесконечно дифференцируемых отображений пространства $\mathbf{R}$ в E , обладающие следующими свойствами: 1°) $u_n(t) = 0$ при $|t| > a_n$; 2°) $\|u_n^{(k)}(t)\| \leq 2^{-n}$ при $|t| \leq a_{n+1}$ и $0 \leq k \leq n-1$; 3°) $u_n^{(k)}(t) = 0$ при $|t| \leq a_{n+1}$ и $k \geq n+1$; 4°) $u_n^{(n)}(0) = c_n$.

[Воспользуйтесь задачей 2, § 8.12.]

б) Выведите из а), что существует такое бесконечно дифференцируемое отображение f пространства $\mathbf{R}$ в E , что $f^{(n)}(0) = c_n$ для каждого n .

с) Таким же способом докажите, что если задано произвольное семейство (c_α) элементов пространства E , где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ пробегает все системы, состоящие из p целых чисел $\alpha_i \geq 0$, то существует такое бесконечно

дифференцируемое отображение f пространства $\mathbb{R}^p$ в E , что $D^\alpha f(0) = c_\alpha$ для каждого α .

д) Выведите из б), что если g — бесконечно дифференцируемое отображение замкнутого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в E и J — открытый промежуток, содержащий I , то существует бесконечно дифференцируемое отображение f пространства $\mathbb{R}$ в E , совпадающее с g на I и равное 0 на $\mathbb{R} \setminus J$.

5. Пусть f — отображение промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство E , и предположим, что f n раз дифференцируемо в точке $\alpha \in I$. Покажите, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \alpha, \xi \neq \alpha, \xi \in I} \frac{f(\xi) - f(\alpha) - f'(\alpha) \frac{\xi - \alpha}{1!} - \dots - f^{(n)}(\alpha) \frac{(\xi - \alpha)^n}{n!}}{(\xi - \alpha)^n} = 0.$$

[Проведите индукцию по n и воспользуйтесь (8.5.1), взяв $\varphi(\xi) = (\xi - \alpha)^{n-1}$.]

6. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, содержащий 0, а f является $n-1$ раз дифференцируемым отображением промежутка I в банахово пространство E . Запишем равенство

$$f(t) = f(0) + f'(0) \frac{t}{1!} + \dots + f^{(n-1)}(0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \tilde{f}_n(t) t^n,$$

определяющее $\tilde{f}_n$ в $I \setminus \{0\}$.

а) Покажите, что если f дифференцируемо $n+p$ раз в точке $t=0$, то отображение $\tilde{f}_n$ может быть непрерывно продолжено на I и при таком продолжении превращается в функцию, $n+p-1$ раз непрерывно дифференцируемую во всех точках $t \neq 0$ некоторой окрестности V точки 0 в I и p раз дифференцируемую в точке $t=0$. Далее,

$$\tilde{f}_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{(n+k)!} f^{(n+k)}(0) \quad \text{при } 0 \leq k \leq p$$

и

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0, t \in V} \tilde{f}_n^{(p+k)}(t) t^k = 0 \quad \text{при } 1 \leq k \leq n-1.$$

[Выразите производные $\tilde{f}_n$ с помощью тейлоровских разложений (задача 5) производных отображения f и воспользуйтесь задачей 2 § 8.6.]

б) Наоборот, пусть g является $n+p-1$ раз дифференцируемым отображением множества $I \setminus \{0\}$ в E , для которого при $0 \leq k \leq n-1$ существуют пределы $\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0, t \in I} g^{(p+k)}(t) t^k$. Покажите, что отображение g

может быть продолжено в $p-1$ раз дифференцируемое отображение промежутка I в E и что отображение $g(t) t^n$ дифференцируемо $n+p$ раз в I . Если, кроме того, существует $g^{(p)}(0)$, то $g(t) t^n$ дифференцируемо $n+p$ раз в точке 0.

с) Предположим, что $I =]-1, 1[$ и что отображение f четно в I , т. е. что выполняется условие $f(-t) = f(t)$. Пользуясь а) и б), покажите, что если f дифференцируемо $2n$ раз в I , то существует n раз дифференцируемое отображение h промежутка I в E , для которого $f(t) = h(t^2)$.

7. а) Пусть f — бесконечно дифференцируемое отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в банахово пространство E . Покажите, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0, \dots, 0) + x_1 f_1(x_1, \dots, x_n) + x_2 f_2(x_2, \dots, x_n) + \dots + x_n f_n(x_n),$$

где f_k бесконечно дифференцируемо в $\mathbb{R}^{n-k+1}$ ($1 \leq k \leq n$).

[Запишите $f(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1, \dots, x_n) - f(0, x_2, \dots, x_n)) + f(0, x_2, \dots, x_n)$ и к первому слагаемому, рассматриваемому как функция от x_1 , примените (8.14.2); при подходящем выборе значения p (зависящем от k) это докажет, что отображение $(f(x_1, \dots, x_n) - f(0, x_2, \dots, x_n))/x_1$ дифференцируемо k -раз в точке $(0, \dots, 0)$. В заключение проведите индукцию по n .]

б) Выведите из а), что при любом $p > 0$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} f_\alpha(x),$$

где все f_α бесконечно дифференцируемы.

8. а) Пусть S — метрическое пространство, A и B — непустые множества в S , M — векторное подпространство пространства $\mathcal{C}_\mathbb{R}(S)$ действительных непрерывных функций в S , N — векторное подпространство пространства M и $u \rightarrow L(u)$ — линейное отображение пространства M в пространство $\mathbb{R}^A$ всех отображений множества A в $\mathbb{R}$. Предположим, что: 1°) существует такая функция $u_0 \in N$, что $L(u_0)$ есть тождественная 1 на A ; 2°) если $u \in N$ и существует такая точка $t \in B$, что $u(t) = 0$, то существует такая точка $x \in A$, в которой $(L(u))(x) = 0$. Пусть функция $v \in M$ такова, что $L(v) = 0$. Покажите, что для любой функции $u \in M$, для которой $u - v \in N$, и любой точки $t \in B$ существует такая точка $\theta \in A$ (зависящая от t), что $u(t) = v(t) + u_0(t)(L(u))(\theta)$.

[Заметьте, что $u_0(t) \neq 0$ и что, следовательно, существует такая константа c (зависящая от t), что $u(t) - v(t) - cu_0(t) = 0$.]

б) Допустим, что S компактно, A связно и плотно в S и что все функции $u \in N$ обращаются в 0 на $S \setminus B$. Допустим, что $L(u)$ непрерывно в A для каждой функции $u \in M$ и что если функция $u \in N$ обладает тем свойством, что $(L(u))(t) > 0$ для любого $t \in A$, то u не имеет в B строгого максимума. Покажите, что в таком случае условие 2° задачи а) также выполняется.

9. а) Пусть f есть n раз дифференцируемая действительная функция, определенная на промежутке I ; пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ — точки промежутка I и n_i ($1 \leq i \leq p$) — целые числа > 0 , такие, что $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$. Допустим, что в каждой из точек x_i при $0 \leq k \leq n_i - 1$ производная $f^{(k)}(x_i) = 0$. Покажите, что в промежутке $]x_1, x_p[$ существует такая точка ξ , что $f^{(n-1)}(\xi) = 0$.

[Несколько раз примените теорему Ролля.]

б) Пусть g есть n раз дифференцируемая действительная функция, определенная в I , и пусть P — действительный многочлен степени $n-1$,

такой, что $g^{(k)}(x_i) = P^{(k)}(x_i)$ при $0 \leq k \leq n_i - 1$, $1 \leq i \leq p$. Покажите, что внутри наименьшего промежутка, содержащего x и точки x_i ($1 \leq i \leq p$), существует такая точка ξ , что

$$g(x) = P(x) + \frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2} \dots (x-x_p)^{n_p}}{n!} g^{(n)}(\xi).$$

[Примените задачу 8, а) или же дайте прямое доказательство; в обоих случаях воспользуйтесь а).]

10. Пусть g — действительная нечетная функция, определенная и пять раз дифференцируемая в симметричной окрестности I точки 0 в $\mathbb{R}$. Покажите, что для каждой точки $x \in I$

$$g(x) = \frac{x}{3} (g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi),$$

где ξ — точка, принадлежащая открытому промежутку с концами 0 и x . Выведите из этого результата, что если f — действительная функция, определенная и пять раз дифференцируемая в $[a, b]$, то

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6} \left[f'(a) + f'(b) + 4f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi),$$

где $a < \xi < b$ (формула Симпсона).

11. Пусть $I = [a, b]$ — компактный промежуток и пусть M_0 — векторное пространство действительных непрерывных функций, определенных в I и обладающих тем свойством, что предел

$$(L(f))(t) = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2}$$

существует в $\mathbb{R}$ для любой точки $t \in]a, b[$. Покажите, что все действительные функции, дважды дифференцируемые в I , принадлежат M_0 .

а) Пусть M — векторное подпространство пространства M_0 , состоящее из функций f , для которых предел $L(f)$ непрерывен в $]a, b[$. Покажите, что любая из функций $f \in M$ дважды дифференцируема в $]a, b[$ и что $L(f) = f''$.

[Примените задачи 8, а) и б), положив $S = I$, $A = B =]a, b[$ и взяв в качестве N подпространство пространства M , состоящее из функций f , для которых $f(a) = f(b) = 0$.]

б) Покажите, что функция $f(t)$, равная $t \cos(1/t)$ при $t \neq 0$ и 0 при $t = 0$, принадлежит M_0 , несмотря на то, что она недифференцируема в точке $t = 0$.

12. Какие свойства функций с значениями в гильбертовом пространстве соответствуют свойствам действительных функций, рассмотренным в задачах 9, б), 10 и 11? (См. задачу 6 § 8.5.)

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этой главе мы попытались собрать наиболее общие факты, относящиеся к теории аналитических функций, и, в частности, установить как можно больше результатов для аналитических функций любого числа переменных. До 9.13 теоремы, касающиеся только функций одной переменной, помещены в такой контекст, в котором они выглядят лишь как подготовка к общим утверждениям. Только в 9.14—9.17 и во многих задачах речь пойдет о свойствах, специально относящихся к случаю одной переменной. Далее, до тех пор, пока это возможно (т. е. до 9.5), мы одновременно рассматриваем аналитические функции действительных переменных и аналитические функции комплексных переменных. Наконец, всюду последовательно проведен наш общий принцип, состоящий в том, чтобы с самого начала рассматривать функции, принимающие векторные значения. Это не требует никаких изменений в доказательствах, и в гл. 11 читатель увидит, насколько полезным является изучение таких функций.

Конечно, здесь можно найти только наиболее элементарную часть чрезвычайно обширной теории аналитических функций. Определение таких функций дается исходя из локального существования степенного ряда, определяющего функцию, дифференциальные свойства аналитических функций устанавливаются с помощью аппарата степенных рядов (9.3.5). Обычное определение аналитических функций, использующее существование непрерывных производных, приложимо, конечно, только к функциям комплексных переменных, и поэтому такое рассмотрение откладывается до 9.10. Основными результатами относительно степенных рядов являются лемма Абеля (9.1.2), из которой выводится чрезвычайно существенная возможность подстановки степенного ряда в степенной ряд (9.2.2), и принцип изолированности нулей (9.1.5), наиболее важным следствием которого является принцип аналитического продолжения (9.4.2), выражающий „единство“ значений аналитической функции в точках области ее определения.

Начиная с этого момента мы предполагаем, что переменные комплексны. За исключением принципа максимума (9.5.9), все основные свойства аналитических функций комплексных переменных выводятся из единственной новой идеи — идеи „комплексного интегрирования“ и ее фундаментальных следствий: теоремы Коши (9.6.3), формулы Коши (9.9.1) и ее обобщения — теоремы о вычетах. Формулировка теоремы Коши, которую мы здесь приводим, не является наилучшей. Она утверждает, что интеграл вдоль контура есть инвариант гомотопического класса этого контура, тогда как на самом деле этот интеграл является инвариантом его гомо-

логического класса. В большинстве случаев такая формулировка не вызывает никаких неудобств, однако в то время, как доказательство этой слабой формы теоремы Коши почти не нуждается в топологической подготовке, доказательство полной теоремы потребовало бы привлечения алгебраической топологии в объеме, который, как мы считаем, превышает уровень настоящего курса. Интересующийся читатель найдет полную теорему Коши вместе со всеми необходимыми предпосылками у Альфорса [1] и Спрингера [21].

Мы думаем, что, вместо того чтобы, пользуясь дополнительными результатами из алгебраической топологии, получить эти уточнения теоремы Коши, читателям будет интересно увидеть, как с помощью простого метода, предложенного С. Эйленбергом, можно получить очень глубокую информацию о топологии действительной плоскости (включая теорему Жордана о кривых), пользуясь только элементарными фактами, относящимися к комплексному интегрированию. Метод Эйленберга изложен в добавлении к главе (которое, кстати сказать, не используется нигде в дальнейших главах и может быть, таким образом, пропущено без какого бы то ни было ущерба).

Как было отмечено уже в гл. 1, читатель не найдет ниже никакого упоминания о так называемых „многозначных“ функциях. Конечно, очень неприятно, что в поле $\mathbb{C}$ нельзя определить настоящую непрерывную функцию $\sqrt{z}$, которая удовлетворяла бы уравнению $(\sqrt{z})^2 = z$. Но разрешение этой трудности, несомненно, нельзя искать в намеренном извращении общего понятия отображения, внезапно объявив, что в конечном счете такая „функция“ имеется; однако она обладает необыкновенным свойством: для каждого $z \neq 0$ она имеет два различных „значения“. Расплата за это глупое „нововведение“ наступает немедленно: над такими „функциями“ невозможно хоть с какой-нибудь разумной уверенностью производить даже простейшие алгебраические операции. Например, соотношение $2\sqrt{z} = \sqrt{z} + \sqrt{z}$, очевидно, неверно; в самом деле, если мы будем следовать „определению“ $\sqrt{z}$, то при $z \neq 0$ мы будем вынуждены левой части приписать два, а правой — три различных значения.

К счастью, существует разрешение этой трудности, не имеющей ничего общего с такого рода бессмыслицами. Оно было указано более ста лет назад Риманом и состоит в восстановлении единственности значения $\sqrt{z}$ с помощью, так сказать, „удвоения“ области изменения переменной z , так что два значения $\sqrt{z}$ вместо единственной точки z соответствуют двум различным точкам. Если вообще бывают гениальные открытия, то это было одним из них, и оно положило начало обширной теории *римановых поверхностей* и их современного обобщения — *комплексных многообразий*. Читателя, который пожелает познакомиться с этими красивыми и активно развивающимися теориями, мы отсылаем к классической книге Г. Вейля [25] и современному изложению Спрингера [21] по теории римановых поверхностей, материалам семинара А. Картана [8] и недавней книге А. Вейля [24] о комплексных многообразиях.

1. Степенные ряды

Во всем последующем K будет обозначать или действительное поле $\mathbb{R}$, или же комплексное поле $\mathbb{C}$; его элементы будут называться *скалярами*. *Открытый* (соответственно *замкнутый*) *полицилиндр* в векторном пространстве K^p над полем K есть произведение p открытых (соответственно замкнутых) шаров. Иными словами, это есть множество P точек $z = (z_1, \dots, z_p)$, удовлетворяющих условиям вида $|z_i - a_i| < r_i$ (соответственно $|z_i - a_i| \leq r_i$), $1 \leq i \leq p$, причем для любого индекса $r_i > 0$. Точка $a = (a_1, \dots, a_p)$ есть *центр* полицилиндра P , а $r_1, \dots, r_p$ — его *радиусы* (таким образом, шар в K^p является полицилиндром, все радиусы которого равны между собой).

(9.1.1) Пусть P и Q — два открытых полицилиндра в K^p , для которых $P \cap Q \neq \emptyset$. Тогда сегмент (8.5), соединяющий любые две точки x и y пересечения $P \cap Q$, содержится в $P \cap Q$; в частности, пересечение $P \cap Q$ связно.

В самом деле, если $|x_i - a_i| < r_i$ и $|y_i - a_i| < r_i$, то при $0 \leq t \leq 1$ имеем $|tx_i + (1-t)y_i - a_i| \leq t|x_i - a_i| + (1-t)|y_i - a_i| < r_i$. Последнее утверждение следует из того факта, что [в силу (3.19.1) и (3.19.7)] сегмент связан, и из (3.19.3).

Введем следующие обозначения: для любого элемента $v = (n_1, \dots, n_p)$ множества $\mathbb{N}^p$ (n_i — целые числа ≥ 0) и любого $z = (z_1, \dots, z_p) \in K^p$ мы будем писать $z^v = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_p^{n_p}$ и $|v| = n_1 + n_2 + \dots + n_p$. Если E — банахово пространство (над K) и $(c_v)_{v \in \mathbb{N}^p}$ — семейство элементов пространства E , имеющее $\mathbb{N}^p$ множеством индексов, то мы будем говорить, что семейство $(c_v z^v)_{v \in \mathbb{N}^p}$ элементов пространства E есть *степенной ряд* относительно p переменных z_i ($1 \leq i \leq p$) с коэффициентами c_v .

(9.1.2) (Лемма Абеля) Пусть точка $b = (b_1, \dots, b_p) \in K^p$ такова, что $b_i \neq 0$ при $1 \leq i \leq p$ и что семейство $(c_v b^v)$ ограничено в E . Тогда для любой системы радиусов (r_i) , удовлетворяющей условию $0 < r_i < |b_i|$ (где $1 \leq i \leq p$), степенной ряд $(c_v z^v)$ нормально сходится в полицилиндре с центром 0 и радиусами r_i .

В самом деле, если для любого $v \in \mathbb{N}^p$ выполняется неравенство $\|c_v b^v\| \leq A$, то из определения нормы в K^p следует, что при $|z_i| \leq r_i < |b_i|$ ($1 \leq i \leq p$) имеем $\|c_v z^v\| \leq A q^v$, где $q = (q_1, \dots, q_p)$, $q_i = r_i / |b_i| < 1$. Из (5.5.3) следует, что семейство $(q^v)_{v \in \mathbb{N}^p}$ положительных чисел абсолютно суммируемо, откуда на основании (5.3.1) вытекает требуемый результат.

(9.1.3) При предположениях (9.1.2) сумма степенного ряда $(c_\nu z^\nu)$ непрерывна в открытом полицилиндре с центром 0 и радиусами $|b_i|$.

Так как каждая точка этого полицилиндра является внутренней для некоторого замкнутого полицилиндра с радиусами $r_i < |b_i|$, то утверждение следует из (7.2.1).

Пусть q — целое число, удовлетворяющее условию $1 \leq q \leq p$. Для любого $\nu = (n_1, \dots, n_p)$ положим $\nu' = (n_1, \dots, n_q)$, $\nu'' = (n_{q+1}, \dots, n_p)$. Будем рассматривать K^p как пространство, тождественное с произведением $K^q \times K^{p-q}$, и для $z = (z_1, \dots, z_p) \in K^p$ писать $z' = (z_1, \dots, z_q)$, $z'' = (z_{q+1}, \dots, z_p)$. При этих обозначениях справедливо утверждение

(9.1.4) Пусть степенной ряд $(c_\nu z^\nu)$ абсолютно суммируем в полицилиндре $P \subset K^p$ с радиусами r_i и центром 0. Тогда для любого $\nu' \in \mathbb{N}^{p-q}$ ряд $(c_{(\nu', \nu'')} z^{\nu'})$ абсолютно суммируем в полицилиндре P' , являющемся проекцией полицилиндра P в K^q . Если обозначить сумму этого ряда через $g_{\nu'}(z')$, то для любой точки $z' \in P'$ степенной ряд $(g_{\nu'}(z') z^{\nu''})$ абсолютно суммируем в полицилиндре P'' , являющемся проекцией P в K^{p-q} , и его сумма равна сумме ряда $(c_\nu z^\nu)$.

Так как $z^\nu = z^{\nu'} z^{\nu''}$, то тот факт, что каждый из рядов $(c_{(\nu', \nu'')} z^{\nu'} z^{\nu''})$ (ν' фиксировано) абсолютно суммируем и что $\sum_{\nu''} g_{\nu'}(z') z^{\nu''} = \sum_{\nu} c_\nu z^\nu$, следует из (5.3.5) и из теоремы ассоциативности (5.3.6) для абсолютно суммируемых семейств. Если мы возьмем точку $z'' \in P''$ так, чтобы при $q+1 \leq i \leq p$ было $z_i \neq 0$, то отсюда будет следовать абсолютная суммируемость ряда $(c_{(\nu', \nu'')} z^{\nu'})$.

(9.1.5) (Принцип изолированности нулей) Пусть $(c_n z^n)$ — степенной ряд относительно одной переменной, сходящийся в открытом шаре P радиуса r , и пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Тогда если не все c_n равны 0, то существует такое $r' < r$, что $f(z) \neq 0$ при $0 < |z| < r'$.

Пусть h — наименьший номер, для которого $c_h \neq 0$. Тогда мы можем написать $f(z) = z^h (c_h + c_{h+1}z + \dots + c_{h+m}z^m + \dots)$, причем ряд $(c_{h+m}z^m)$ сходится в P . Если $g(z) = c_h + c_{h+1}z + \dots + c_{h+m}z^m + \dots$, то в силу (9.1.3) функция g непрерывна в P и, так как $g(0) = c_h \neq 0$, существует такое $r' > 0$, что при $|z| < r'$ функция $g(z) \neq 0$. Отсюда следует требуемый результат.

(9.1.6) Пусть два степенных ряда $(a_\nu z^\nu)$ и $(b_\nu z^\nu)$ абсолютно суммируемы и имеют в полицилиндре P одну и ту же сумму. Тогда для каждого $\nu \in \mathbb{N}^p$ коэффициенты $a_\nu = b_\nu$.

Проведем индукцию по p . При $p=1$ результат сразу следует из (9.1.5). Переходя, если потребуется, к разности двух рассматриваемых рядов, можем считать, что $b_\nu = 0$ для каждого ν . Применяя

теорему (9.1.4) при $q = p - 1$, имеем $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z') z_p^n = 0$; поэтому

$g_n(z') = 0$ для каждого n и каждой точки z' проекции P' полицилиндра P в K^{p-1} . Применяя к каждой функции g_n предположение индукции, получаем, что при любом ν коэффициент $a_\nu = 0$.

Задачи

1. Пусть $(c_\nu z^\nu)$ — степенной ряд относительно p переменных z_i ($1 \leq i \leq p$) и пусть $a = (a_1, \dots, a_p) \in K$. Для того чтобы действительное число $r > 0$ обладало тем свойством, что для любого числа $t \in K$, удовлетворяющего условию $|t| < r$, ряд $(c_\nu (ta_1)^{n_1} \dots (ta_p)^{n_p})$ абсолютно суммируем, необходимо и достаточно, чтобы для всех индексов $\nu = (n_1, \dots, n_p)$, исключая, быть может, конечное их число, выполнялось неравенство

$$\ln r + \frac{1}{|\nu|} \left(\ln \|c_\nu\| + \sum_{i=1}^p n_i \ln |a_i| \right) \leq 0.$$

[Примените (9.1.2).]

В частности, при $p=1$ существует наибольшее число $R \geq 0$ (радиус сходимости, который может также быть равен $+\infty$), такое, что ряд $(c_n z^n)$ сходится при $|z| < R$; это число определяется формулой

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq 0} (\|c_{n+k}\|)^{1/(n+k)} \right),$$

причем правая часть обозначается также символом $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|c_n\|^{1/n}$. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n\|^{1/n}$, то он равен $1/R$.

2. Приведите примеры степенных рядов относительно одной комплексной переменной, имеющих радиус сходимости $R=1$ (задача 1) и таких, что:

- ряд нормально сходится при $|z|=R$;
- ряд сходится в некоторой точке z окружности $|z|=R$, но не сходится в остальных точках этой окружности;
- ряд не сходится ни в одной точке окружности $|z|=R$.

3. Приведите пример степенного ряда относительно двух переменных, абсолютно суммируемого в точках (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , но не в точке $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2} \right)$.

[В степенном ряде с одной переменной замените z на $z_1 z_2$.]

4. Пусть $(c_n z^n)$ и $(d_n z^n)$ — два степенных ряда относительно одной переменной со скалярными коэффициентами. Если их радиусы сходимости (задача 1)

R и R' и если ни R , ни R' не равны 0, то радиус сходимости R'' степенного ряда $(c_n d_n z^n)$ не меньше RR' (это произведение считается равным $+\infty$, если R или R' равно $+\infty$). Приведите пример, когда $R'' > RR'$.

2. Подстановка степенных рядов в степенной ряд

Пусть Q — полицилиндр в K^q с центром 0; предположим, что p степенных рядов $(b_\mu^{(k)} u^\mu)$ относительно q переменных со скалярными коэффициентами абсолютно суммируемы в Q [здесь $\mu = (m_1, \dots, m_q)$, $u = (u_1, \dots, u_q)$ и $u^\mu = (u_1^{m_1} \dots u_q^{m_q})$]. Положим $g_k(u) = \sum_\mu b_\mu^{(k)} u^\mu$, $G_k(u) = \sum_\mu |b_\mu^{(k)}| u^\mu$. Пусть, с другой стороны, $(a_\nu z^\nu)$ — степенной ряд относительно p переменных с коэффициентами из E , абсолютно суммируемый в полицилиндре P пространства K^p с центром 0 и радиусами r_k ($1 \leq k \leq p$). Если мы „формально“ заменим в члене $z^\nu = z_1^{\nu_1} \dots z_p^{\nu_p}$ каждое z_k степенным рядом $g_k(u)$, то нам придется взять формальное „произведение“ $n_1 + n_2 + \dots + n_p$ рядов, т. е. выбрать по члену в каждом из $n_1 + \dots + n_p$ множителей, составить их произведение и затем „просуммировать“ все полученные таким путем члены. Таким образом, для каждого $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_p)$ нам нужно рассмотреть множество A_ν всех конечных семейств $(\mu_{kj}) = \rho$, где $\mu_{kj} \in \mathbb{N}^q$; k пробегает от 1 до p и при каждом k индекс j меняется от 1 до n_k . Такому ρ мы ставим в соответствие член

$$t_\rho(u) = a_\nu \prod_{k=1}^p \prod_{j=1}^{n_k} b_{\mu_{kj}}^{(k)} u^{\mu_{kj}}.$$

При этих обозначениях имеет место теорема

(9.2.1) Пусть $s_1, \dots, s_q$ — q чисел > 0 , удовлетворяющих условиям $G_k(s_1, \dots, s_q) < r_k$, где $1 \leq k \leq p$. Тогда для каждой точки u , принадлежащей открытому полицилиндру $S \subset K^q$ с центром 0 и радиусами s_i ($1 \leq i \leq q$) семейство $(t_\rho(u))$ (где ρ пробегает все счетное множество индексов $A = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}^p} A_\nu$) абсолютно суммируемо, и, если $f(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu$, его сумма равна

$f(g_1(u), g_2(u), \dots, g_p(u))$.

Иными словами, при условиях $G_k(s_1, \dots, s_q) < r_k$ ($1 \leq k \leq p$) „подстановка“ рядов $g_k(u)$ вместо z_k ($1 \leq k \leq p$) в ряд f дает абсолютно суммируемое семейство даже прежде, чем все члены $t_\rho(u)$, имеющие относительно $u_1, \dots, u_q$ одинаковые степени, будут собраны вместе.

Чтобы доказать (9.2.1), нужно лишь убедиться в том, что семейство $(t_p(u))$ абсолютно суммируемо; то, что его сумма равна $f(g_1(u), \dots, g_p(u))$, следует из применения теоремы ассоциативности (5.3.6) к подмножествам A_v множества A и из теоремы (5.5.3), которая показывает, что сумма $\sum_{p \in A_v} t_p(u)$ равна $a_v (g_1(u))^{n_1} \dots (g_p(u))^{n_p}$.

Для доказательства того, что семейство $(t_p(u))_{p \in A}$ абсолютно суммируемо, воспользуемся теоремой (5.3.4). Для любого конечного подмножества $B \subset A$ в силу (5.3.5) и (5.5.3) имеем

$$\sum_{p \in B \cap A_v} \|t_p(u)\| \leq \|a_v\| \cdot (G_1(s_1, \dots, s_q))^{n_1} \dots (G_p(s_1, \dots, s_q))^{n_p},$$

и, по предположению, правая часть этого неравенства есть член с индексом v абсолютно суммируемого семейства; отсюда следует наше утверждение.

Запишем $t_p(u) = c_p u^\lambda$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, $\lambda_i = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{n_k} m_{kji}$ (если $\mu_{kj} = (m_{kji}, \dots, m_{kjq})$). Из (9.2.1) и (5.3.5) (в предположении, что все $u_i \neq 0$, $u \in S$) следует, что для каждого λ семейство всех c_p , где p пробегает все элементы множества A , соответствующие одному и тому же λ , абсолютно суммируемо в E . Если d_λ — его сумма, то по теореме ассоциативности (5.3.6) мы видим, что

$$(9.2.1.1) \quad f(g_1(u), \dots, g_p(u)) = \sum_{\lambda} d_{\lambda} u^{\lambda},$$

где ряд в правой части равенства абсолютно суммируем в полицилиндре S . По определению этот степенной ряд называется *степенным рядом, полученным в результате подстановки рядов $g_k(u)$ вместо z_k при $1 \leq k \leq p$ в степенной ряд (a, z^p)* .

(9.2.2) Если точка $(g_1(0), \dots, g_p(0))$ пространства K^p принадлежит полицилиндру P , то в пространстве K^q существует такой открытый полицилиндр S , что при $u \in S$ ряды $g_k(u)$ можно подставить вместо z_k ($1 \leq k \leq p$) в степенной ряд (a, z^p) .

Заметим, что, по определению, $G_k(0) = |g_k(0)|$ при $1 \leq k \leq p$. Так как функции G_k в силу (9.1.3) непрерывны в точке 0, то существование таких чисел $s_l > 0$ ($1 \leq l \leq q$), что $G_k(s_1, \dots, s_q) < r_k$ при $1 \leq k \leq p$, сразу следует из предположения.

3. Аналитические функции

Пусть D — открытое множество в пространстве K^p . Мы будем говорить, что отображение f множества D в банахово пространство E над K является *аналитическим*, если для каждой точки $a \in D$

существует такой открытый полицилиндр $P \subset D$ с центром a , что в P отображение $f(z)$ равно сумме абсолютно суммируемого степенного ряда относительно p переменных $z_k - a_k$ ($1 \leq k \leq p$) [в силу (9.1.6) этот ряд необходимо единственен]. Предположим, что $K = \mathbb{C}$; пусть b — точка множества D и B — прообраз множества D при отображении $x \rightarrow b + x$ пространства $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{C}^p$. Тогда из определений сразу следует, что отображение $x \rightarrow f(b + x)$ является аналитическим в открытом множестве B пространства $\mathbb{R}^p$.

(9.3.1) Пусть (a, z^v) — абсолютно суммируемый степенной ряд в открытом полицилиндре $P \subset K^p$. Тогда сумма ряда $f(z) = \sum_v a_v z^v$ является аналитической в P ; точнее, если r_i ($1 \leq i \leq p$) — радиусы полицилиндра P , то для любой точки $b = (b_i) \in P$ отображение $f(z)$ равно сумме абсолютно суммируемого ряда относительно $z_k - b_k$ в открытом полицилиндре с центром b и радиусами $r_i - |b_i|$ ($1 \leq i \leq p$).

Это сразу следует из теоремы (9.2.1), в которой следует взять $q = p$, $g_k(u) = b_k + u_k$. В этом случае $G_k(u) = |b_k| + u_k$, и условия $G_k(s_1, \dots, s_p) < r_k$ ($1 \leq k \leq p$) превращаются в условия $s_k < r_k - |b_k|$ ($1 \leq k \leq p$).

Целая функция p переменных есть отображение f пространства K^p в E , равное сумме степенного ряда, абсолютно суммируемого во всем пространстве K^p [ср. (9.9.6)]. В силу (9.3.1) для любой точки $b \in K^p$ в этом случае $f(z)$ равно сумме степенного ряда относительно $z_k - b_k$, который абсолютно суммируем во всем K^p .

(9.3.2) Пусть A — открытое множество пространства K^p , B — открытое множество пространства K^q , g_k ($1 \leq k \leq p$) — p скалярных функций, определенных и аналитических в B , и предположим, что образ множества B при отображении $(g_1, \dots, g_p)$ содержится в A . Тогда для любого аналитического отображения f множества A в E отображение $f(g_1, \dots, g_p)$ является аналитическим в B .

Это сразу следует из определения и из (9.2.2). В частности, если отображение f является аналитическим в $A \subset K^p$, то для любой системы $(a_{q+1}, \dots, a_p)$, состоящей из $p - q$ скаляров, отображение $(z_1, \dots, z_q) \rightarrow f(z_1, \dots, z_q, a_{q+1}, \dots, a_p)$ является аналитическим в открытом множестве $A(a_{q+1}, \dots, a_p)$ пространства K^q .

(9.3.3) Для того чтобы отображение $f = (f_1, \dots, f_q)$ открытого множества $A \subset K^p$ в K^q было аналитическим, необходимо и достаточно, чтобы каждая из скалярных функций f_i ($1 \leq i \leq q$) была аналитической в A .

Очевидно из определения.

(9.3.4) Пусть $z_k = x_k + iy_k$ при $1 \leq k \leq p$, где x_k и y_k — действительные числа. Если отображение f является аналитическим в открытом множестве $A \subset \mathbb{C}^p$, то отображение $(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p) \rightarrow f(x_1 + iy_1, \dots, x_p + iy_p)$ является аналитическим в множестве A , рассматриваемом как открытое множество в $\mathbb{R}^{2p}$.

В самом деле, в силу (9.3.2) эта функция является аналитической в открытом множестве $B \subset \mathbb{C}^{2p}$, являющемся прообразом множества A при отображении $(u_1, v_1, \dots, u_p, v_p) \rightarrow (u_1 + iv_1, \dots, u_p + iv_p)$ пространства $\mathbb{C}^{2p}$ в $\mathbb{C}^p$. Поэтому она будет аналитической в пересечении $A = B \cap \mathbb{R}^{2p}$, когда A рассматривается как подмножество пространства $\mathbb{R}^{2p}$.

(9.3.5) Пусть $(c_{n_1 n_2 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p})$ — степенной ряд, абсолютно суммируемый в открытом полицилиндре P с центром 0, и $f(z)$ — его сумма. Тогда степенной ряд

$$(n_k c_{n_1 n_2 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k-1} \dots z_p^{n_p})$$

абсолютно суммируем в P , и его сумма есть частная производная $D_k f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} \right)$.

Для любого $z \in P$ мы можем в рассматриваемый ряд вместо z_i при $i \neq k$ подставить само z_i , а вместо z_k — сумму $z_k + u_k$ и таким образом получить степенной ряд относительно $p+1$ переменных $z_1, \dots, z_p, u_k$, который в силу (9.2.1) будет абсолютно суммируемым при $|z_i| < r_i (i \neq k)$ и $|z_k| + |u_k| < r_k$ (где $r_1, \dots, r_p$ — радиусы полицилиндра P). На основании (9.1.4) мы можем, следовательно, написать $f(z_1, \dots, z_k + u_k, \dots, z_p) = f(z) + u_k f_1(z) + \dots + u_k^n f_n(z) + \dots$, где каждое из f_n является степенным рядом, абсолютно суммируемым в P , и правая часть при каждом $z \in P$ является степенным рядом относительно u_k , абсолютно суммируемым в некотором открытом шаре B (зависящем от z) с центром 0. Кроме того, из формулы бинорма Ньютона следует, что

$$f_1(z) = \sum_{n_1} n_k c_{n_1 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k-1} \dots z_p^{n_p},$$

и так как

$$(f(z_1, \dots, z_k + u_k, \dots, z_p) - f(z))/u_k = f_1(z) + \dots + u_k^{n-1} f_n(z) + \dots,$$

в силу (9.1.4) есть абсолютно суммируемый степенной ряд (относительно u_k) в B (при фиксированном z), то из (9.1.3) мы заключаем, что $f_1(z) = D_k f(z)$ при любом $z \in P$. Из этого результата и из (9.1.3) получаются выражения коэффициентов c_v через производные отображения f , а именно

$$(9.3.5.1) \quad v! c_v = D^v f(0),$$

где $D^v = D_1^{v_1} \dots D_p^{v_p}$ и $v! = v_1! v_2! \dots v_p!$. Эта формула сразу выводится индукцией по $|v| = v_1 + \dots + v_p$.

(9.3.6) Функция, аналитическая в открытом множестве $A \subset K^p$, бесконечно дифференцируема, и все ее производные являются аналитическими в A .

Это — очевидное следствие теорем (9.3.5) и (8.12.8).

При $p = 1$ имеем теорему, „обратную“ (9.3.5):

(9.3.7) Пусть $(c_n z^n)$ — степенной ряд, сходящийся в шаре $P: |z| < r$ пространства K , и пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ в P . Тогда степенной ряд $c_n z^{n+1}/(n+1)$ сходится в P , и его сумма является первообразной отображения f .

Ввиду (9.3.5) нам нужно только убедиться в сходимости ряда $c_n z^{n+1}/(n+1)$, но она сразу следует из неравенства

$$\left\| \frac{1}{n+1} c_n z^{n+1} \right\| \leq \|c_n\| \cdot |z|^{n+1}$$

и из (9.1.2).

Задачи

1. Пусть $(a_n z^n)$ и $(b_n z^n)$ — два степенных ряда относительно одной переменной, причем b_n — действительные числа > 0 . Допустим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = s$.

а) Предположим, что ряд $(b_n z^n)$ сходится при $|z| < 1$, но не сходится при $z = 1$ (это значит, что $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = +\infty$, где $c_k = \sum_{n=0}^k b_n$). Покажите, что ряд $(a_n z^n)$ абсолютно сходится при $|z| < 1$ и что

$$\lim_{z \rightarrow 1, z \in I} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = s,$$

где $I = [0, 1[$.

[Заметьте, что $\lim_{z \rightarrow 1, z \in I} \left(\sum_{n \geq k} b_n z^n \right) = +\infty$ при любом данном k .]

б) Предположим, что ряд $(b_n z^n)$ сходится при каждом z . Покажите, что ряд $(a_n z^n)$ абсолютно сходится при каждом z и что

$$\lim_{z \rightarrow +\infty, z \in J} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = s,$$

где J — промежуток $[0, +\infty]$ в $\bar{\mathbb{R}}$.

с) Покажите, что если ряд (a_n) сходится и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, то ряд $(a_n z^n)$

при $|z| < 1$ абсолютно сходится и $\lim_{z \rightarrow 1, z \in I} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = s$ (теорема Абеля).

[Примените а), взяв $b_n = 1$ при каждом n .]

d) Степенной ряд $((-1)^n z^n)$ имеет радиус сходимости 1, и его сумма $1/(1+z)$ стремится к пределу, когда z стремится к 1 по I , но ряд $((-1)^n)$ расходится (см. задачу 2).

2. Пусть $(a_n z^n)$ — степенной ряд относительно одной переменной, имеющий радиус сходимости, равный 1. Пусть $f(z)$ — его сумма; предположим, что существует предел $f(1-)$. Покажите, что если, сверх того, $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, то ряд (a_n) сходится и его сумма равна $f(1-)$ (теорема Таубера).

[Заметьте, что если при $n \geq k$ выполняется неравенство $|n a_n| \leq \varepsilon$, то для любого $N > k$ и $0 < x < 1$

$$\left\| \sum_{n=k}^N a_n (1-x^n) \right\| \leq \varepsilon N (1-x) \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{n \geq N} a_n x^n \right\| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Пусть $(a_n z^n)$ — степенной ряд относительно одной переменной, имеющий радиус сходимости $r > 0$, и пусть (b_n) — такая последовательность скаляров $\neq 0$, что $q = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n/b_{n+1})$ существует и $|q| < r$. Покажите, что если $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$, то предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n/b_n)$ существует и равен $f(q)$.

4. Пусть $(p_n z^n)$ и $(q_n z^n)$ — два степенных ряда с комплексными коэффициентами и радиусами сходимости $\neq 0$ и пусть $f(z) = \sum_n p_n z^n$ и $g(z) = \sum_n q_n z^n$ в окрестности U точки 0, в которой оба ряда абсолютно сходятся.

Предположим, что $q_0 = g(0) \neq 0$. Тогда существует степенной ряд $\sum_n c_n z^n$, абсолютно сходящийся в окрестности $V \subset U$ точки 0 и имеющий сумму, равную $f(z)/g(z)$ в V .

[Заметьте, что ряд (z^n) при $|z| < 1$ сходится, и примените (9.2.2).]

Покажите, что если все $q_n > 0$, последовательность q_{n+1}/q_n возрастает, коэффициенты p_n действительны и таковы, что последовательность p_n/q_n возрастает (соответственно убывает), то $c_n \leq 0$ (соответственно $c_n \leq 0$) при каждом $n \geq 1$.

[Выразите разность $p_n/q_n - p_{n-1}/q_{n-1}$ через q_k и c_k и проведите индукцию по n .]

Выведите из этого результата, что все производные функции $x/\ln(1-x)$ при $0 < x < 1$ будут > 0 .

5. Пусть g_k ($1 \leq k \leq p$) — p скалярных целых функций, определенных в K^p . Если f — целая функция, определенная в K^p , то $f(g_1, \dots, g_p)$ есть целая функция в K^q .

4. Принцип аналитического продолжения

(9.4.1) Пусть P и Q — два открытых полицилиндра в пространстве K^p с центрами a и b , причем $P \cap Q \neq \emptyset$. Пусть $(c_{n_1} \dots c_{n_p} (x_1 - a_1)^{n_1} \dots (x_p - a_p)^{n_p})$ — степенной ряд относительно $x_i - a_i$, абсолютно суммируемый в P , и пусть $f(x)$ — его сумма. Пусть $(d_{n_1} \dots d_{n_p} (x_1 - b_1)^{n_1} \dots (x_p - b_p)^{n_p})$ — степенной ряд относительно $x_i - b_i$, абсолютно суммируемый в Q , и пусть $g(x)$ — его сумма. Если существует такое непустое открытое подмножество U пересечения $P \cap Q$, что $f(x) = g(x)$ в любой точке $x \in U$, то $f(x) = g(x)$ в любой точке $x \in P \cap Q$.

Пусть $u \in U$ и пусть v — произвольная точка пересечения $P \cap Q$. Тогда сегмент, соединяющий u и v , в силу (9.1.1) содержится в $P \cap Q$. Пусть $h(t) = f(u + t(v - u)) - g(u + t(v - u))$, где t — действительное число; ввиду (9.3.2) это — аналитическая функция от t в некотором открытом промежутке I , содержащем $[0, 1]$. Пусть A — замкнутое подмножество промежутка $[0, 1]$, состоящее из тех t , для которых $h(s) = 0$ при $0 \leq s \leq t$. По предположению существует открытая окрестность точки 0 в промежутке $[0, 1]$, содержащаяся в A ; поэтому верхняя грань ρ множества A , естественно, > 0 .

Мы докажем, что $\rho = 1$, и тем самым теорема (9.4.1) будет доказана. Прежде всего заметим, что $h(t) = 0$ при $0 \leq t < \rho$, следовательно, по непрерывности $h(\rho) = 0$. Так как h — аналитическая функция в точке ρ , существует степенной ряд относительно $t - \rho$, сходящийся при $|t - \rho| < \alpha$, где $\alpha > 0$, сумма которого при $|t - \rho| < \alpha$ равна $h(t)$. Но при $0 \leq t \leq \rho$, по предположению, $h(t) = 0$. Из принципа изолированности нулей (9.1.5) тогда следует, что $h(t) = 0$ при $|t - \rho| < \alpha$, и, если бы ρ было < 1 , это противоречило бы определению ρ .

(9.4.2) (Принцип аналитического продолжения). Пусть $A \subset K^p$ — открытое связное множество, f и g — две аналитические функции в A с значениями в E . Если существует такое непустое открытое подмножество U множества A , что $f(x) = g(x)$ в U , то $f(x) = g(x)$ в каждой точке $x \in A$.

Пусть B — внутренность множества точек $x \in A$, в которых $f(x) = g(x)$. Ясно, что B открыто и, по предположению, не пусто. Мы докажем, что B замкнуто в A и, следовательно, равно A , так как A связно [см. 3.19]. Пусть $a \in A$ — точка прикосновения множества B . Поскольку f и g — аналитические функции, существует такой открытый полицилиндр P с центром a , содержащийся в A , что $f(x)$ и $g(x)$ в P равны суммам двух степенных рядов относительно $x_i - a_i$, абсолютно суммируемых в P . Но по определению пересечение $P \cap B$ содержит открытый полицилиндр, в котором

$f(x) = g(x)$. Применяя (9.4.1) к $P = Q$, заключаем, что $f(x) = g(x)$ в P ; иными словами, $P \subset B$ и, в частности, $a \in B$, ч. т. д.

При $p = 1$ мы можем следующим образом усилить предыдущую теорему:

(9.4.3) Пусть $A \subset K$ — открытое связное множество в K , f и g — две аналитические функции в A с значениями в E . Допустим, что существует такое компактное подмножество $H \subset A$, что множество M точек $x \in H$, в которых $f(x) = g(x)$, бесконечно. Тогда $f(x) = g(x)$ в каждой точке $x \in A$.

Пусть (z_n) — бесконечная последовательность различных точек множества M . Так как H компактно, последовательность (z_n) имеет предельную точку $b \in H$ и, значит, любой шар P с центром b , содержащийся в A , содержит бесконечное множество точек из M . Но мы можем считать, что в шаре $P \subset A$ с центром b функции f и g равны суммам сходящихся степенных рядов относительно $z - b$. Принцип изолированности нулей (9.1.5) тогда показывает, что $f(x) = g(x)$ в P , и мы можем теперь применить (9.4.2).

При $K = \mathbb{C}$ мы также можем усилить теорему (9.4.2):

(9.4.4) Пусть $A \subset \mathbb{C}^p$ — открытое связное множество, f и g — две аналитические функции в A с значениями в комплексном банаховом пространстве E , U — открытое подмножество A , b — точка множества U . Предположим, что $f(x) = g(x)$ в пересечении $U \cap (b + \mathbb{R}^p)$. Тогда $f(x) = g(x)$ в каждой точке $x \in A$.

Производя, если потребуется, перенос, можем считать, что $b = 0$. Пусть $h = f - g$ и пусть P — полицилиндр в $\mathbb{C}^p$ с центром 0, содержащийся в U и такой, что в P функция $h(z)$ равна сумме абсолютно суммируемого степенного ряда $(c_\nu z^\nu)$. Множество $P \cap \mathbb{R}^p$ является полицилиндром в $\mathbb{R}^p$, и в $P \cap \mathbb{R}^p$ функция $h(x) = 0$. Это на основании (9.1.5) показывает, что $c_\nu = 0$ при каждом ν , поэтому $h(z) = 0$ в P , и мы можем применить (9.4.2).

Пусть $A \subset K^p$ — открытое связное множество. Мы будем говорить, что подмножество $M \subset A$ есть множество единственности в A , если любые две функции, определенные и аналитические в A , совпадают в A , коль скоро они совпадают в M . Теоремы (9.4.2) — (9.4.4) показывают, что непустое открытое подмножество $U \subset A$, или же пересечение $U \cap (b + \mathbb{R}^p)$ (если оно не пусто), или, при $p = 1$, компактное бесконечное подмножество A являются множествами единственности. В (9.9) для $K = \mathbb{C}$ мы встретим еще один пример.

Последняя теорема показывает, что если открытое связное множество $A \subset \mathbb{C}^p$ обладает тем свойством, что $A \cap \mathbb{R}^p \neq \emptyset$, то любая функция f , аналитическая в A , вполне определяется своими значениями в $A \cap \mathbb{R}^p$. Сужение функции f на $A \cap \mathbb{R}^p$ является аналитической функцией, но, вообще говоря, функция, аналитическая в $A \cap \mathbb{R}^p$,

не может быть продолжена в функцию, аналитическую в A . Мы имеем, однако, более слабый результат:

(9.4.5) Пусть E — комплексное банахово пространство, A — открытое множество в $\mathbb{R}^p$ и f — аналитическое отображение множества A в E . Тогда существуют открытое множество $B \subset \mathbb{C}^p$, для которого $B \cap \mathbb{R}^p = A$, и аналитическое отображение g множества B в E , являющееся продолжением f .

В самом деле, для каждой точки $a = (a_1, \dots, a_p) \in A$ существует открытый полицилиндр P_a в $\mathbb{R}^p$, определяемый условиями $|x_i - a_i| < r_i$ ($1 \leq i \leq p$), содержащийся в множестве A и такой, что в P_a отображение $f(x)$ равно сумме абсолютно суммируемого степенного ряда $(c_{n_1 \dots n_p} (x_1 - a_1)^{n_1} \dots (x_p - a_p)^{n_p})$. Пусть Q_a — открытый полицилиндр в $\mathbb{C}^p$ с центром a и радиусами r_i . Тогда в силу (9.1.2) степенной ряд $(c_{n_1 \dots n_p} (z_1 - a_1)^{n_1} \dots (z_p - a_p)^{n_p})$ абсолютно суммируем в Q_a ; пусть $g_a(z)$ — его сумма. Если a и b — две точки множества A , для которых $Q_a \cap Q_b \neq \emptyset$, то пересечение $P_a \cap P_b = (Q_a \cap Q_b) \cap \mathbb{R}^p$ не пусто, и в $P_a \cap P_b$ мы имеем $g_a(x) = g_b(x) = f(x)$. Кроме того, ввиду (9.9.1) пересечение $Q_a \cap Q_b$ связно. Из (9.4.4) следует, что $g_a(z) = g_b(z)$ в $Q_a \cap Q_b$. Мы можем теперь взять $B = \bigcup_{a \in A} Q_a$ и определить g как отображение, равное g_a на каждом Q_a ; аналитичность отображения g следует из (9.3.1).

Доказательство теоремы (9.4.5) показывает, что если f — целая функция, определенная в $\mathbb{R}^p$, то она может быть продолжена в целую функцию, определенную в $\mathbb{C}^p$, и что эта функция в силу (9.4.4) единственна.

Задачи

1. а) Пусть $P(u_1, \dots, u_{r+1})$ — многочлен с коэффициентами из K и $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — элементы K , удовлетворяющие условию $|\alpha_i| < 1$, $1 \leq i \leq r$. Предположим, что в K существуют шар B с центром 0 и скалярная функция f , аналитическая в B и такая, что для каждого $z \in B$ справедливо равенство $f(z) = P(z, f(\alpha_1 z), \dots, f(\alpha_r z))$. Покажите, что функцию f можно продолжить в функцию g , аналитическую во всем пространстве K и удовлетворяющую в K тому же самому функциональному уравнению.

[Воспользуйтесь (9.4.2).]

б) Пусть $K = \mathbb{C}$, и предположим, что существуют действительное число β и скалярная функция f , аналитическая при $\Re z > \beta$ и удовлетворяющая на этом множестве уравнению $f(z) = P(z, f(z + \alpha_1), \dots, f(z + \alpha_r))$, где α_i — комплексные числа с $\Re \alpha_i > 0$. Покажите, что функция f может быть продолжена в функцию g , аналитическую в $\mathbb{C}$ и удовлетворяющую тому же самому функциональному уравнению.

с) Обобщите предыдущий результат на случай функций любого числа переменных.

2. Пусть D — связное открытое множество в $\mathbb{C}^p$ и D' — образ множества D при отображении $(z_1, \dots, z_p) \rightarrow (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_p)$. Пусть f — комплексная функция, аналитическая в D , и предположим, что пересечение $D \cap \mathbb{R}^p$ не пусто и что f принимает в $D \cap \mathbb{R}^p$ действительные значения. Покажите, что функция f может быть продолжена в функцию g , аналитическую в $D \cup D'$.

[Рассмотрите в D' функцию $(z_1, \dots, z_p) \rightarrow f(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_p)$ и примените (9.4.4).]

5. Примеры аналитических функций; показательная функция. Число π

(9.5.1) Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ — два многочлена в K^p , причем Q не равен тождественно 0. Тогда частное $P(z)/Q(z)$ является аналитической функцией в (открытом) множестве точек z , в которых $Q(z) \neq 0$ (т. е. в множестве точек, на котором это частное определено).

Очевидно, что любой многочлен является целой функцией. На основании (9.3.2) нам нужно лишь показать, что функция $1/z$ является аналитической при $z \neq 0$. Но если $z_0 \neq 0$, то можно написать

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)} = \frac{1}{z_0} - \frac{z - z_0}{z_0^2} + \frac{(z - z_0)^2}{z_0^3} - \dots \\ \dots + (-1)^n \frac{(z - z_0)^n}{z_0^{n+1}} + \dots,$$

где степенной ряд абсолютно суммируем при $|z - z_0| < |z_0|$, ч. т. д.

Рассмотрим теперь функцию e^x действительной переменной x ; докажем, что она является целой функцией. Из формулы Тейлора (8.14.3), пользуясь (8.8), для любого n получаем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Так как e^x в силу (8.5.3) является возрастающей функцией, то при

$$|t| \leq |x| \text{ мы имеем } |e^t| \leq e^{|x|}, \text{ следовательно, } \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}. \text{ Но если } n_0 \text{ — целое число } > |x|, \text{ то при } n > n_0 \text{ вы-}$$

полняется неравенство $\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \left| \frac{x}{n_0} \right|^{n-n_0} \frac{|x|^{n_0}}{n_0!}$, и, таким образом, для

любого $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

причем в силу (9.1.2) этот ряд нормально сходится во всяком компактном промежутке.

Пользуясь замечанием, следующим после доказательства теоремы (9.4.5), мы можем определить в $\mathbb{C}$ целую функцию e^z (обозначаемую также символом $\exp z$) как функцию, равную сумме степенного ряда $(z^n/n!)$. Имеем

$$(9.5.2) \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'},$$

ибо обе части равенства являются целыми функциями в $\mathbb{C}^2$, совпадающими в $\mathbb{R}^2$ ввиду (9.4.4).

Для действительного x комплексное число e^{-ix} является сопряженным с e^{ix} , поскольку $(-ix)^n$ есть число, сопряженное с $(ix)^n$. Из (9.5.2) следует, что $|e^{ix}| = 1$. По определению для действительного x имеем: $\cos x = \Re e^{ix}$ и $\sin x = \Im e^{ix}$.

В силу (9.3.3) эти функции являются целыми функциями действительной переменной x , а соотношение $|e^{ix}| = 1$ эквивалентно соотношению $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, откуда следует, что $|\cos x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq 1$ для любого действительного x . Кроме того, имеем

$$(9.5.3) \quad D(e^z) = e^z,$$

так как обе части равенства являются [в силу (9.3.5)] целыми функциями в $\mathbb{C}$, совпадающими в $\mathbb{R}$. В частности [см. замечание, следующее за (8.4.1)], для действительного x имеем $D(e^{ix}) = ie^{ix}$; поэтому

$$(9.5.4) \quad D(\cos x) = -\sin x, \quad D(\sin x) = \cos x.$$

Формулы, определяющие $\cos x$ и $\sin x$ для действительного x , можно также записать в виде $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ и $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Эти формулы можно использовать для определения $\cos z$ и $\sin z$ для комплексного z , заменяя в правой части этих формул x на z . При этом определении формулы (9.5.4) остаются справедливыми и для комплексных значений аргумента.

(9.5.5) Существует такое число $\pi > 0$, что решениями уравнения $e^z = 1$ являются числа $2\pi i$ (n — положительные или отрицательные целые числа).

Если $z = x + iy$, то мы имеем $|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x$; поэтому из $e^z = 1$ следует, что $x = 0$, $z = iy$. Сначала докажем:

(9.5.5.1) Множество точек $x \geq 0$, в которых $\cos x = 0$, не пусто.

Допустим противное. Тогда, так как $\cos 0 = 1$, для любого $x \geq 0$ мы должны были бы иметь $\cos x > 0$, поэтому в силу (9.5.4) и (8.5.3)

$\sin x$ был бы строго возрастающей функцией, значит, при любом $x > 0$ он был бы > 0 и в силу (9.5.4) и (8.5.3) $\cos x$ при $x \geq 0$ был бы строго убывающей функцией. Прежде всего заметим, что невозможно, чтобы при всех $x \geq 0$ выполнялось неравенство $\cos x \geq 1/2$. В самом деле, отсюда по теореме о среднем значении (8.5.3) следовало бы, что $\sin x \geq x/2$ при всех $x \geq 0$, и это при $|x| > 2$ нарушало бы неравенство $|\sin x| \leq 1$. Допустим поэтому, что $\cos a < 1/2$. Тогда при $x \geq a$ также $\cos x < 1/2$, и отсюда следует, что $\sin x \geq 1/2$ при $x \geq a$. Но тогда теорема о среднем значении снова дает

$$\cos x - \cos a \leq -\frac{x-a}{2},$$

и это показывает, что $\cos x \leq 0$ при достаточно большом x , ч. т. д.

Так как $\cos x$ — непрерывная функция, множество D корней уравнения $\cos x = 0$, удовлетворяющих условию $x \geq 0$, замкнуто (3.15.1) и не содержит 0, следовательно, оно имеет наименьший элемент, который мы обозначим через $\pi/2$. Тогда мы имеем $\sin^2 \pi/2 = 1$ и, так как $\sin x$ при $0 \leq x \leq \pi/2$ возрастает, $\sin \pi/2 = 1$, а $e^{i\pi/2} = i$. Это уже показывает, что $e^{2\pi i} = 1$; поэтому $e^{2n\pi i} = 1$ для любого целого n и в силу (9.5.2)

$$(9.5.6) \quad e^{z+2n\pi i} = e^z.$$

Чтобы завершить доказательство утверждения (9.5.5), нам остается только показать, что в промежутке $]0, 2\pi[$ нет корней уравнения $e^{ix} = 1$. Но из (9.5.2) получаем $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$, следовательно, $\cos x \leq 0$ при $\pi/2 \leq x \leq \pi$, и, так как $\cos(x + \pi) = -\cos x$, мы видим, что $\cos x < 1$ при $0 < x < 2\pi$, и доказательство закончено.

(9.5.7) *Отображение $x \rightarrow e^{ix}$ есть непрерывное биективное отображение любого промежутка $]a, a + 2\pi[$ на „единичную окружность“ $U: |z| = 1$ в $\mathbb{C}$ и гомеоморфизм промежутка $]a, a + 2\pi[$ на дополнение точки e^{ia} в U .*

Рассматриваемое отображение, очевидно, непрерывно и в силу (9.5.2) и (9.5.5) инъективно. Чтобы доказать, что оно является сюръективным отображением промежутка $]a, a + 2\pi[$ на U , мы можем, очевидно, предполагать, что $a = 0$, потому что если $\zeta \in U$, то и ζe^{-ia} также принадлежит U . Пусть $\zeta = \alpha + i\beta$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Так как $|\alpha| \leq 1$ и $\cos x$ в промежутке $[0, \pi]$ непрерывен, а $\cos 0 = 1$ и $\cos \pi = -1$, то по теореме Больцано (3.19.8) существует такое $y \in [0, \pi]$, что $\cos y = \alpha$. Тогда $\sin y = \pm \beta$. Если $\sin y = \beta$, то все в порядке; если же это не так, то $\cos(2\pi - y) = \cos y = \alpha$ и $\sin(2\pi - y) = -\sin y = \beta$. Пусть V — дополнение точки e^{ia} в U и $\zeta_0 = e^{ib} \in V$, где $a < b < a + 2\pi$. Если бы отображение, обратное сужению отображения $x \rightarrow e^{ix}$ на промежутке $]a, a + 2\pi[$, было не непрерывно в точке ζ_0 , то в $]a, a + 2\pi[$ существовала бы последо-

вательность (x_n) , элементы которой принадлежали бы дополнению некоторой окрестности точки b и вместе с тем $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{ix_n} = \zeta_0$. Но тогда в силу (3.16.1) в компактном множестве $[a, a + 2\pi]$ нашлась бы подпоследовательность (x_{n_k}) , сходящаяся к точке $c \neq b$, и, так как $e^{ic} \neq e^{ib}$, мы пришли бы к противоречию. [Существует другое доказательство, использующее (10.3.1).]

(9.5.8) Единичная окружность U связна.

Это следует из (9.5.7), (3.19.1) и (3.19.7).

(9.5.9) (Принцип максимума) Пусть $(c_\nu z^\nu)$ — степенной ряд с комплексными коэффициентами, абсолютно суммируемый в открытом цилиндре $P \subset \mathbb{C}^p$ с центром 0, и пусть $f(z)$ — его сумма. Допустим, что существует такой открытый шар $B \subset P$ с центром 0, что $|f(z)| \leq |f(0)|$ для каждой точки $z \in B$. Тогда для каждого индекса $\nu \neq (0, \dots, 0)$ коэффициент $c_\nu = 0$; иными словами, функция f постоянна.

Докажем сначала, что если теорема верна для $p=1$, то она верна и для любого p . В самом деле, для любой точки $z = (z_1, \dots, z_p) \in P$ рассмотрим функцию $g(t) = f(tz_1, \dots, tz_p)$ одной комплексной переменной, аналитическую при $|t| < 1 + \epsilon$, где ϵ достаточно мало. Так как при достаточно малых значениях t выполняется неравенство $|g(t)| \leq |g(0)|$, то, по предположению, $g(t) = g(0)$ и, в частности, $f(z_1, \dots, z_p) = g(1) = f(0)$. При $p=1$ мы можем считать, что $c_0 \neq 0$, так как в противном случае утверждение очевидно в силу (9.1.6). Допустим, что существуют индексы $n > 0$, для которых $c_n \neq 0$, и пусть m — наименьший из таких индексов. Мы можем написать

$$f(z) = c_0(1 + b_m z^m + z^m h(z)),$$

где $b_m \neq 0$, h — функция, аналитическая в P , и $h(0) = 0$. Пусть $r > 0$ выбрано так, что круг $|z| \leq r$ содержится в B и что при $|z| \leq r$ имеет место неравенство $|h(z)| \leq \frac{1}{2} |b_m|$ (9.1.3). Запишем $b_m = |b_m| \zeta$, где $|\zeta| = 1$. В силу (9.5.7) существует такое действительное число t , что $e^{mit} = \zeta^{-1}$. Для $z = re^{it}$ мы, таким образом, имеем

$$|1 + b_m z^m + z^m h(z)| = |1 + |b_m| r^m + z^m h(z)| \geq 1 + \frac{1}{2} |b_m| r^m,$$

что противоречит предположению о том, что $|f(z)| \leq |c_0|$ в B .

Теорема (9.5.9) не будет верна, если в ней $\mathbb{C}^p$ заменить на $\mathbb{R}^p$, как показывает пример степенного ряда $1/(1+z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ (при $|z| < 1$).

(9.5.10) Пусть f — комплексная функция, аналитическая в открытом множестве $A \subset \mathbb{C}^p$, не постоянная ни в какой компоненте связности множества A . Для любого компактного подмножества $H \subset A$ точки $z \in H$, в которых $|f(z)| = \sup_{x \in H} |f(x)|$ [такие точки в силу (3.17.10) обязательно существуют] являются граничными точками множества H .

Это сразу следует из (9.5.9) и из принципа аналитического продолжения (9.4.2).

Задачи

1. Покажите, что если $\Re z \leq 0$, то для любого целого $n \geq 0$

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} \right) \right| \leq \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

[Формулу Тейлора (8.14.2) примените к функции $t \rightarrow e^{zt}$.]

2. Докажите, что для любого действительного x

$$\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

и разность слева под знаком абсолютной величины имеет тот же знак, что и $(-1)^{n+1}$; точно так же

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и разность слева под знаком абсолютной величины имеет тот же знак, что и $(-1)^n x$.

[Проведите индукцию по n .]

3. а) Пусть U — относительно компактное открытое множество в $\mathbb{C}^p$ и f — комплексная аналитическая функция в U , не постоянная ни в какой компоненте связности множества U . Предположим, что существует такое число $M > 0$, что для каждой граничной точки x множества U и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность V точки x , что для любой точки $z \in U \cap V$ выполняется неравенство $|f(z)| \leq M + \varepsilon$. Покажите, что $|f(z)| \leq M$ для любой точки $z \in U$, причем равенство не может достигаться ни в одной точке множества U .

[Воспользуйтесь (9.5.10) и компактностью границы множества U .]

б) Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}$, определяемое условиями $\Re z > 0$ и $-\pi/2 < \Im z < \pi/2$. Покажите, что целая функция $\exp(z)$ ограничена на границе множества U , но не ограничена в U .

4. а) Пусть E — банахово пространство $\mathbb{C}^2$ с нормой $\|(z_1, z_2)\| = \sup(|z_1|, |z_2|)$. Функция $z \rightarrow f(z) = (1, 0) + (0, 1)z$ есть аналитическое отображение пространства $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^2$, обладающее тем свойством, что норма $\|f(z)\|$ при $|z| < 1$ постоянна.

б) Распространите теорему (9.5.10) на функции, определенные в открытом множестве $A \subset \mathbb{C}^p$ и принимающие значения в комплексном гильбертовом пространстве.

[Если норма $\|f(z)\|$ достигает максимума в точке $z_0 \in A$, то рассмотрите комплексную функцию $z \rightarrow (f(z)|f(z_0))$; сравните с а).]

5. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}^p$ и $P \subset U$ — замкнутый цилиндр с центром $a = (a_1, \dots, a_p)$ и радиусами r_k ($1 \leq k \leq p$). Пусть f — комплексная функция, аналитическая в U ; предположим, что на множестве $S = \{(z_i) | |z_i - a_i| = r_i \text{ при } 1 \leq i \leq p\}$ (т. е. на произведении окружностей $|z_i - a_i| = r_i$) имеется оценка $|f(z)| \leq M$. Покажите, что $|f(z)| \leq M$ для любой точки $z \in P$.

[Рассмотрите функцию $(z_2, \dots, z_p) \rightarrow f(b_1, z_2, \dots, z_p)$, где $|b_1 - a_1| = r_1$, и проведите индукцию по p .]

6. Пусть $P(x, y)$ — многочлен от двух комплексных переменных с комплексными коэффициентами максимальной степени m по x и n по y . Предположим, что для действительных x и y , удовлетворяющих условию $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$, выполняется неравенство $|P(x, y)| \leq M$. Покажите, что $|P(x, y)| \leq M(|x| + \sqrt{x^2 - 1})^m (|y| + \sqrt{y^2 - 1})^n$ для действительных x и y , для которых $|x| \geq 1$ и $|y| \geq 1$.

[Примените задачу 5 к функции $s^m t^n P(s + s^{-1}, t + t^{-1})$ при $|s| < 1, |t| < 1$.]

Распространите это утверждение на случай многочленов от любого числа переменных.

7. а) Пусть $f(z)$ — комплексная аналитическая функция одной комплексной переменной в круге $B: |z| < 1$; пусть $|f(z)| < M$ в B и $f(0) = 0$. Покажите, что $|f(z)| \leq M|z|$ в B (лемма Шварца).

[Рассмотрите функцию $f(z)/z$, являющуюся аналитической в B .]

б) Рассмотрим в $\mathbb{C}^p$ норму $\|z\| = (|z_1|^2 + \dots + |z_p|^2)^{1/2}$, где $z = (z_1, \dots, z_p)$ (называемую эрмитовой нормой). Пусть B — шар $\|z\| < 1$ при этой норме и пусть f — комплексная аналитическая в B функция, такая, что $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq M$ в B . Покажите, что $|f(z)| \leq M\|z\|$ в B .

[Рассмотрите функцию $t \rightarrow f(z_1 t, \dots, z_p t)$ одной комплексной переменной и примените а).]

8. а) Пусть R_- (отрицательная действительная полупрямая) — подмножество комплексного поля $\mathbb{C}$, определяемое условиями $\Im z = 0, \Re z \leq 0$; пусть F — дополнение множества R_- в $\mathbb{C}$. Пусть, с другой стороны, S — множество, определяемое условием $-\pi < \Im z < \pi$. Покажите, что отображение $z \rightarrow e^z$ есть гомеоморфизм S на F .

[Воспользуйтесь (9.5.7).]

Обратное отображение обозначается символом $z \rightarrow \ln z$ и называется главным значением логарифма z . Имеем $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, где $\arg z$ — единственное число θ , удовлетворяющее условиям $-\pi < \theta < \pi$ и $z = |z|e^{i\theta}$ (аргумент z). Покажите, что если все три числа $z, z',$ и zz' принадлежат F , то разность $\ln zz' - \ln z - \ln z'$ равна 0, $2\pi i$ или $-2\pi i$.

б) Степенной ряд $((-1)^n z^n/n)_{n \geq 1}$ абсолютно сходится в шаре $B: |z| < 1$; пусть $f(z)$ — его сумма. Покажите, что $f(z) = \ln(1+z)$. Из этого результата заключаем, что $\ln z$ есть функция, аналитическая в F .

[Заметив, что при $z \in B$ имеем $1+z \in F$, покажите, что $f'(z) = 1/(1+z)$, и выведите отсюда, что $f(z) = \ln(1+z)$, когда z — действительное число и

$-1 < z < 1$; в заключение рассмотрите аналитическую функцию $e^{f(z)}$ и примените (9.4.4).]

с) Для любого комплексного числа t и любого целого числа $n > 0$ пусть

$$\binom{t}{n} = t(t-1) \dots (t-n+1)/n! = \sum_{k=0}^n c_{kn} t^k, \text{ где } c_{kn} \text{ — рациональные числа}$$

(мы полагаем $\binom{t}{0} = 1$). Покажите, что степенной ряд $(c_{kn} z^n t^k)$ абсолютно суммируем в $B \times C$.

[Заметьте, что для любого числа $r > 0$

$$\left(1 + \frac{r}{1}\right) \left(1 + \frac{r}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{r}{n}\right) \leq \exp\left(r\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right) \leq a \cdot n^r,$$

где a — константа.]

Докажите, что сумма этого ряда равна $\exp(t \ln(1+z))$.

[Сначала рассмотрите случай, когда z и t — действительные числа, и к функции $z \rightarrow (1+z)^t$ примените формулу Тейлора (8.14.2). Затем воспользуйтесь (9.4.4).]

Функция $\exp(t \ln(1+z))$ обозначается также символом $(1+z)^t$; покажите, что $|(1+z)^t| = |1+z|^t$ для действительных значений t .

d) Покажите, что при $t > 0$ функция $z \rightarrow (1+z)^t$ может быть по непрерывности продолжена на замкнутый круг $|z| \leq 1$.

[Заметив, что $1-s < e^{-s}$ при $s > 0$, воспользуйтесь оценкой для $\left|\binom{t}{n}\right|$,

аналогичной оценке, полученной в с).]

9. а) Пусть f_{jk} ($1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$) — скалярные аналитические функции в открытом связном множестве $A \subset \mathbb{C}^p$ и α_{jk} — действительные числа ≥ 0 . Покажите, что непрерывная функция

$$u(z) = \sum_{k=1}^n |f_{1k}(z)|^{\alpha_{1k}} |f_{2k}(z)|^{\alpha_{2k}} \dots |f_{mk}(z)|^{\alpha_{mk}}$$

не может достигать относительного максимума ни в одной точке множества A , если каждое из произведений $|f_{1k}(z)|^{\alpha_{1k}} \dots |f_{mk}(z)|^{\alpha_{mk}}$ ($1 \leq k \leq n$) не постоянно в A .

[Заметим, что если $f(z)$ — функция, аналитическая в A , и $f(z_0) \neq 0$, то для каждого действительного числа λ существует такая функция $g_\lambda(z)$, аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 , что $|g_\lambda(z)| = |f(z)|^\lambda$ в этой окрестности; для доказательства этого воспользуйтесь задачей 8, с).]

Распространите этот результат на случай, когда α_{jk} — произвольные действительные числа, предполагая, что ни одна из функций f_{jk} не обращается в A в 0.

b) Обобщите на функции $u(z)$ утверждение задачи 3, а).

10. Пусть $f(z)$ — комплексная функция одной комплексной переменной, аналитическая в открытом множестве A , определяемом условиями $R_1 < |z| < R_2$ (где $0 \leq R_1 \leq R_2$). Для любого r , такого, что $R_1 < r < R_2$, пусть $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Покажите, что если $R_1 < r_1 < r_2 < r_3 < R_2$, то

$$\ln M(r_2) \leq \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1} \ln M(r_3) + \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} \ln M(r_1).$$

(теорема Адамара о трех окружностях). Когда может иметь место равенство?

[Примените задачу 9 к функции $|z|^a \cdot |f(z)|$, где действительное число a выбрано подходящим образом и функция $|z|^a \cdot |f(z)|$ рассматривается на множестве $r_1 < |z| < r_3$.]

11. Введем в C^p и C^q эрмитовы нормы (задача 7). Пусть f — аналитическое отображение шара $B: \|z\| < 1$ в пространство C^p в C^q ; мы имеем $f = (f_1, \dots, f_q)$, где f_k — комплексные функции, аналитические в B . Предположим, что $f(0) = 0$. Покажите, что если при $z \in B$ выполняется неравенство $\|f(z)\| \leq M$, то при $z \in B$ выполняется и неравенство $\|f(z)\| \leq M \cdot \|z\|$. Когда имеет место равенство?

[Для каждой точки $z \in B$ рассмотрите функции $t \rightarrow f_k(tz)/t$ и примените задачи 9 и 3.]

12. Введем в C^p эрмитову норму (задача 7). Пусть F и G — два аналитических отображения шара $B: \|z\| < 1$ в пространство C^p , являющиеся гомеоморфизмами шара B соответственно на открытые множества $U = F(B)$ и $V = G(B)$, и пусть обратные отображения являются аналитическими соответственно в $F(B)$ и $G(B)$ (последнее условие в действительности следует из остальных; см. задачу 2 § 10.3). Для любого r , удовлетворяющего условию $0 < r < 1$, пусть B_r — шар $\|z\| < r$ и пусть $U_r = F(B_r)$ и $V_r = G(B_r)$ (U_r и V_r являются открытыми подмножествами соответственно U и V). Покажите, что если аналитическое отображение u множества U в V обладает тем свойством, что $u(F(0)) = G(0)$, то $u(U_r) \subset V_r$ для каждого r , удовлетворяющего условию $0 < r < 1$.

[Воспользуйтесь задачей 11.]

13. Пусть f — комплексная аналитическая функция одной комплексной переменной в шаре $B: |z| < R$. Для любого r , удовлетворяющего условию $0 \leq r < R$, пусть $A(r) = \sup_{|z|=r} \Re f(z)$.

а) Покажите, что если функция f непостоянна, то функция $r \rightarrow A(r)$ строго возрастает.

[Рассмотрите $\exp(f(z))$.]

б) Покажите, что при $A(R-) < +\infty$

$$A(r) \leq \frac{R-r}{R+r} A(0) + \frac{2r}{R+r} A(R-).$$

[Примените задачу 12, взяв $F(z) = Rz$, а в качестве $G(z)$ — функцию вида $(az+b)/(cz+d)$, где константы a, b, c, d выбраны так, чтобы множество $G(B)$ было полуплоскостью, определяемой условием $\Re z < A(R-)$.]

14 а) Пусть A — относительно компактное открытое множество в $\mathbb{C}^p$ и E — замкнутое подмножество границы множества A . Предположим, что существует комплексная функция g , аналитическая в некоторой окрестности замыкания $\bar{A}$, равная 0 в E и не тождественно равная 0 в A . Пусть f — комплексная функция, аналитическая и ограниченная в A . Допустим, что существует такое число M , что для каждой граничной точки $x \in E$ множества A и всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V точки x в $\mathbb{C}^p$, обладающая тем свойством, что $|f(z)| \leq M + \varepsilon$ при $z \in A \cap V$. Покажите, что $|f(z)| \leq M$ для каждой точки $z \in A$. Можно считать, что $|g(z)| \leq 1$ при $z \in A$.

[Рассмотрите функцию $|f(z)| \cdot |g(z)|^\alpha$, где $\alpha > 0$ произвольно, и примените к этой функции утверждение из задачи 9, б).]

б) Покажите, что утверждение задачи а) не останется верным, если отбросить предположение о том, что функция f ограничена в A .

[Рассмотрите функцию $\exp(\exp((1-z)/z))$ и воспользуйтесь задачей 3, б).]

15. Пусть $\omega(x)$ — действительная функция, определенная в промежутке $[0, +\infty[$ и удовлетворяющая условиям $\omega(x) > 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) = +\infty$. Пока-

жите, что если комплексная функция f является аналитической в некоторой окрестности полуплоскости $A: \Re z \geq 0$, то существует по крайней мере одна такая точка $\zeta \in A$, что $|f(\zeta)| < \exp(\omega(|\zeta|)\zeta)$.

[Проведите доказательство от противного: с помощью задачи 9, а) покажите, что если бы заключение было неверно, то функция $|e^z| \cdot |f(z)|^{-a}$ для каждого значения $\varepsilon > 0$ была бы ≤ 1 в A .]

16. Пусть A — открытое относительно компактное множество в пространстве $\mathbb{C}^p$ и f — комплексная функция, аналитическая в A . Предположим, что существуют такое число $M > 0$ и такая комплексная функция g , аналитическая в A , что в любой точке $z \in A$ функция $g(z) \neq 0$ и что выполняется следующее условие: для каждой точки x границы множества A и каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V точки x , что при $z \in A \cap V$ имеет место неравенство $|f(z)| \leq M |g(z)|^\varepsilon$. Покажите, что $|f(z)| \leq M$ в A (принцип Фрагмена — Линделефа).

[Воспользуйтесь задачей 9, б).]

17. Пусть U — открытое множество, определенное в задаче 3, б), и пусть f — комплексная функция, аналитическая в некоторой окрестности A замыкания $\bar{U}$ и обладающая следующими свойствами: 1°) $|f(z)| \leq 1$ на границе множества U ; 2°) существует такая константа a , что $0 < a < 1$ и что при $z \in U$ выполняется неравенство $|f(z)| \leq \exp(\exp(a \Re z))$. Докажите, что $|f(z)| \leq 1$ в U .

[Заметьте, что отображение $z \rightarrow 1/(z+1)$ переводит U в относительно компактное множество, и примените принцип Фрагмена — Линделефа (задача 16), взяв функцию $g(z)$ вида $\exp(\exp(bz))$.]

6. Интегрирование вдоль пути

Траектория в $\mathbb{C}$ есть непрерывное отображение γ компактного промежутка $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, состоящего более чем из одной точки, в $\mathbb{C}$. Если $\gamma(I) \subset A \subset \mathbb{C}$, то мы будем говорить, что γ есть *траектория в A* . Точка $\gamma(a)$ (соответственно $\gamma(b)$) называется *началом* (соответственно *концом*) траектории; обе эти точки называются также *концами* траектории γ . Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то γ называется *петлей*; если отображение γ постоянно в I , то мы будем также говорить, что траектория γ *сводится к точке*. Отображение γ° промежутка I в $\mathbb{C}$, удовлетворяющее условию $\gamma^\circ(t) = \gamma(a + b - t)$ есть траектория, называемая *противоположной* траектории γ .

Пусть $I_1 = [b, c]$ — компактный промежуток в $\mathbb{R}$, начало которого служит концом промежутка I , и пусть $I_2 = I \cup I_1 = [a, c]$. Если γ_1 — траектория, определенная в I_1 и такая, что $\gamma_1(b) = \gamma(b)$, и если мы определим отображение γ_2 , равное γ в I и γ_1 в I_1 , то γ_2 будет траекторией, которую мы будем обозначать символом $\gamma \vee \gamma_1$ и называть *соединением* траекторий γ и γ_1 .

Мы будем говорить, что траектория γ , определенная в $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, есть *путь*, если γ является первообразной некоторой простой функции (8.7.2); если, кроме того, $\gamma(a) = \gamma(b)$, то мы будем говорить, что γ есть *контур*. Ясно, что траектория, противоположная пути, есть путь и что соединение двух путей есть путь.

Пусть γ и γ_1 — два пути, определенные соответственно в промежутках I и I_1 . Мы будем говорить, что γ и γ_1 *эквивалентны*, если существует такое биективное отображение φ промежутка I на I_1 , что φ и φ^{-1} являются первообразными некоторых простых функций и что $\gamma = \gamma_1 \circ \varphi$ (и, следовательно, $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi^{-1}$). Из (8.4.1) сразу следует, что это действительно есть отношение эквивалентности между путями.

Если путь γ определен в $I = [a, b]$, то существует путь γ_1 , эквивалентный пути γ и определенный в любом другом промежутке $J = [c, d]$. В самом деле, существует линейное биективное отображение $t \rightarrow \varphi(t) = at + \beta$ промежутка J на промежуток I , и требуемыми свойствами обладает путь $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$.

Пусть γ — путь, определенный в $I = [a, b]$, а f — непрерывное отображение компактного множества $\gamma(I)$ в комплексное банахово пространство E . Функция $t \rightarrow f(\gamma(t))$ тогда непрерывна в I , и поэтому $t \rightarrow f(\gamma(t))\gamma'(t)$ есть простая функция. Интеграл

$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ называется *интегралом от отображения f*

вдоль пути γ и обозначается символом $\int_\gamma f(z)dz$. Из (8.7.4) сразу

следует, что если γ_1 — путь, эквивалентный пути γ , то $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$. Кроме того, из определения сразу следует, что

$$(9.6.1) \quad \int_{\gamma^0} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz;$$

$$(9.6.2) \quad \int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz,$$

если определено соединение $\gamma_1 \vee \gamma_2$.

Пусть γ — контур, определенный в $I = [a, b]$. Для любой точки $c \in I$ рассмотрим отображение γ_1 промежутка $J = [c, c + b - a]$, определяемое следующим образом: $\gamma_1(t) = \gamma(t)$, если $c \leq t \leq b$, и $\gamma_1(t) = \bar{\gamma}(t - b + a)$, если $b \leq t \leq c + b - a$. Немедленно проверяется, что γ_1 есть контур, для которого $\gamma_1(J) = \gamma(I)$, и что для любого непрерывного отображения f множества $\gamma(I)$ в E выполняется равенство $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$. Иными словами, интеграл от f вдоль контура не зависит от начала этого контура.

Пусть γ_0 и γ_1 — две траектории, определенные в одном и том же промежутке I , и пусть A — такое открытое множество в $\mathbb{C}$, что $\gamma_0(I) \subset A$ и $\gamma_1(I) \subset A$. *Гомотопия траектории γ_0 в γ_1 в множестве A* есть непрерывное отображение φ произведения $I \times [\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$ в $\mathbb{R}$) в множество A , обладающее тем свойством, что $\varphi(t, \alpha) = \gamma_0(t)$ и $\varphi(t, \beta) = \gamma_1(t)$ в I . Говорят, что траектория γ_1 *гомотопна траектории γ_0 в A* , если существует гомотопия траектории γ_0 в траекторию γ_1 в A . Ясно, что для любой точки $\xi \in [\alpha, \beta]$ отображение $t \rightarrow \varphi(t, \xi)$ есть траектория в A . Если γ_0 и γ_1 — петли, то мы будем говорить, что φ есть *петельная гомотопия* петли γ_0 в петлю γ_1 в A , если отображение $t \rightarrow \varphi(t, \xi)$ для любой точки $\xi \in [\alpha, \beta]$ есть петля. Когда мы будем говорить, что две петли γ_0 и γ_1 гомотопны в A , мы будем подразумевать, что существует петельная гомотопия (а не просто гомотопия) петли γ_0 в петлю γ_1 в A .

• Если φ — гомотопия траектории γ_0 в γ_1 в A , определенная в $I \times [\alpha, \beta]$, то отображение $(t, \xi) \rightarrow \varphi(t, \alpha + \beta - \xi)$ является гомотопией траектории γ_1 в γ_0 в A ; с другой стороны, если ψ — гомотопия траектории γ_1 в γ_2 в A , определенная в произведении $I \times [\alpha', \beta']$, то мы можем следующим образом определить гомотопию θ траектории γ_0 в γ_2 в A : берем $\theta = \varphi$ в $I \times [\alpha, \beta]$ и, полагая $\beta'' = \beta' + \beta - \alpha'$, берем $\theta(t, \xi) = \psi(t, \xi + \alpha' - \beta)$ в $I \times [\beta, \beta']$. Это разумно, поскольку обе формулы по предположению дают $\theta(t, \beta) = \gamma_1(t)$, и немедленно проверяется, что отображение θ непрерывно

в $I \times [\alpha, \beta'']$, принимает значения в A и что, кроме того, $\theta(t, \alpha) = \gamma_0(t)$ и $\theta(t, \beta'') = \gamma_2(t)$. Это показывает, что отношение „траектория γ_1 гомотопна траектории γ_0 в A'' является отношением эквивалентности между траекториями в A ; оно является также отношением эквивалентности между петлями в A , потому что в случае, когда φ и ψ являются петельными гомотопиями, петельной гомотопией будет и отображение, определенное выше.

(9.6.3) (Теорема Коши) Пусть $A \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и f — аналитическое отображение множества A в комплексное банахово пространство E . Если Γ_1 и Γ_2 — два контура в A , гомотопные в A , то $\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$.

Предположим, что Γ_1 и Γ_2 определены в $I = [a, b]$, и пусть φ — гомотопия контура Γ_1 в контур Γ_2 в A , определенная в $I \times [\alpha, \beta]$. Отметим, что не предполагается, что при $\xi \neq \alpha$ и $\xi \neq \beta$ петля $t \rightarrow \varphi(t, \xi)$ является контуром. Так как отображение φ непрерывно, $L = \varphi(I \times [\alpha, \beta])$ есть компактное множество, содержащееся в A . По определению и по аксиоме Бореля — Лебега в L существуют конечное число точек a_k ($1 \leq k \leq m$) и для каждого k открытый шар $P_k \subset A$ с центром a_k , такие, что: 1° шары P_k образуют покрытие множества L ; 2° в каждом шаре P_k функция $f(z)$ равна сумме степенного ряда относительно $z - a_k$, сходящегося в P_k . Существует такое число $\rho > 0$, что для каждой точки $x \in L$ открытый шар с центром x и радиусом ρ содержится по крайней мере в одном из шаров P_k ¹⁾. Чтобы это доказать, допустив противное, извлечем из L сходящуюся последовательность (x_n) таких точек, что шар B_n с центром x_n и радиусом $1/n$ не содержится ни в одном из P_k . Так как предел x последовательности (x_n) принадлежит некоторому шару P_k , то существует шар $B \subset P_k$ с центром x и радиусом r . Но тогда, если точка x_n выбрана так, что $|x_n - x| + 1/n < r$, шар B_n содержится в P_k , что противоречит допущению. Из (9.3.1) следует, что для каждой точки $x \in L$ отображение $f(z)$ равно в шаре $B(x; \rho)$ сумме сходящегося степенного ряда относительно $z - x$.

Поскольку отображение φ равномерно непрерывно в $I \times [\alpha, \beta]$ (3.16.5), существует такое $\varepsilon > 0$, что из $|t - t'| \leq \varepsilon$ и $|\xi - \xi'| \leq \varepsilon$ следует $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t', \xi')| \leq \rho/4$. Пусть $(t_i)_{0 \leq i \leq r}$ — возрастающая последовательность в I , такая, что $t_0 = a$, $t_r = b$ и $t_{i+1} - t_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $0 \leq i \leq r-1$, и $(\xi_j)_{0 \leq j \leq s}$ — возрастающая последовательность в $[\alpha, \beta]$, такая, что $\xi_0 = \alpha$, $\xi_s = \beta$ и $\xi_{j+1} - \xi_j \leq \varepsilon$ при $0 \leq j \leq s-1$. Определим γ_j следующим образом:

$$\gamma_j(t) = \varphi(t_i, \xi_j) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (\varphi(t_{i+1}, \xi_j) - \varphi(t_i, \xi_j))$$

¹⁾ См. задачу 1, а) § 16 гл. 3. — Прим. перев.

при $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $0 \leq t \leq r-1$ и $1 \leq j \leq s-1$; кроме того, пусть $\gamma_0 = \Gamma_1$ и $\gamma_s = \Gamma_2$. Тогда γ_j при $0 \leq j \leq s$ есть контур в A , и нам остается только доказать, что $\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_{\gamma_{j+1}} f(z) dz$ при $0 \leq j \leq s-1$. Заметим, что ввиду выбора t_i и t_{j+1} все точки $\gamma_j(t)$ и $\gamma_{j+1}(t)$, где $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, принадлежат открытому шару Q_{ij} с центром $\varphi(t_i, \xi_j)$ и радиусом ρ . В силу (9.3.7) и (9.3.1) существует функция g_{ij} , аналитическая в Q_{ij} и такая, что $g'_{ij}(z) = f(z)$ в Q_{ij} . Так как пересечение $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ не пусто и в силу (9.1.1) связно, то разность $g_{i-1,j} - g_{ij}$ в пересечении $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ ввиду (8.6.1) постоянна. Теперь по определению

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} f(z) dz &= \sum_{i=0}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma_j(t)) \gamma'_j(t) dt = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g'_{ij}(\gamma_j(t)) \gamma'_j(t) dt = \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} [g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i))]. \end{aligned}$$

Таким образом, нам нужно доказать соотношение

$$\sum_{i=0}^{r-1} [g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i))] = \sum_{i=0}^{r-1} [g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i))],$$

которое можно также записать в виде

$$(9.6.3.1) \quad \sum_{i=0}^{r-1} [g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)) + \\ + g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i))] = 0.$$

Но $\gamma_j(t_i)$ и $\gamma_{j+1}(t_i)$ при $1 \leq i \leq r$ принадлежат $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$, поэтому, как мы видели выше,

$$g_{ij}(\gamma_j(t_i)) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i)) = g_{i-1,j}(\gamma_j(t_i)) - g_{i-1,j}(\gamma_{j+1}(t_i))$$

и, значит, левая часть (9.6.3.1) сводится к

$$g_{r-1,j}(\gamma_j(t_r)) - g_{r-1,j}(\gamma_{j+1}(t_r)) - g_{0j}(\gamma_j(t_0)) + g_{0j}(\gamma_{j+1}(t_0)).$$

Так как γ_j и γ_{j+1} — контуры, мы имеем $\gamma_j(t_0) = \gamma_j(t_r)$ и $\gamma_{j+1}(t_0) = \gamma_{j+1}(t_r)$. Кроме того, эти две точки принадлежат пересечению $Q_{0j} \cap Q_{r-1,j}$, которое связно; таким образом, в силу (8.6.1) разность $g_{r-1,j} - g_{0j}$ на этом множестве постоянна, и это завершает доказательство.

(9.6.4) Пусть γ_1 и γ_2 — два пути в открытом множестве $A \subset \mathbb{C}$, имеющие одно и то же начало u и один и тот же конец v и такие, что существует гомотопия φ пути γ_1 в путь γ_2 в A , оставляющая неподвижными u и v (это означает, что если отображение φ определено в $[a, b] \times [\alpha, \beta]$, то $\varphi(a, \xi) = u$ и $\varphi(b, \xi) = v$ для любой точки $\xi \in [\alpha, \beta]$). Тогда для каждой функции f , аналитической в A , имеем $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$.

Пусть γ_1° — путь, противоположный γ_1 , и пусть $\gamma_3(t) = \gamma_1^\circ(t - b + a)$ для $b \leq t \leq 2b - a$; γ_3 есть путь, эквивалентный пути γ_1° . По определению, соединения $\gamma_1 \vee \gamma_3$ и $\gamma_2 \vee \gamma_3$ являются контурами. Кроме того, эти контуры гомотопны в A , потому что если мы определим отображение $\psi(t, \xi)$ так, чтобы оно было равно $\varphi(t, \xi)$ при $a \leq t \leq b$ и $\gamma_3(t)$ при $b \leq t \leq 2b - a$, то ψ будет петлевой гомотопией в A . Применяя (9.6.3), получаем $\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz$, ч. т. д.

7. Первообразная аналитической функции в односвязной области

Односвязная область $A \subset \mathbb{C}$ есть открытое связное множество, обладающее тем свойством, что любая петля в A гомотопна в A петле, сводящейся к точке. Ясно, что любое открытое множество в $\mathbb{C}$, гомеоморфное области A , есть односвязная область.

(9.7.1) Пример. Звездообразная область $A \subset \mathbb{C}$ относительно точки $a \in A$ есть открытое множество, такое, что для любой точки $z \in A$ сегмент, соединяющий a и z , содержится в A . Такое множество, очевидно, связно [(3.19.1) и (3.19.3)]. Если γ — произвольная петля в A , то можно записать $\varphi(t, \xi) = a + (1 - \xi)(\gamma(t) - a)$ при $0 \leq \xi \leq 1$; тогда φ будет петлевой гомотопией петли γ в петлю, сводящуюся к точке a . Открытый шар является звездообразной областью относительно любой из своих точек.

(9.7.2) Если $A \subset \mathbb{C}$ — открытое связное множество, то для любых двух точек u и v множества A существует путь с началом u и концом v .

Нам нужно только доказать, что подмножество $B \subset A$, состоящее из всех концов путей в A , имеющих началом u , одновременно замкнуто и открыто в A (3.19). Если $x \in A \cap \bar{B}$, то существует шар S с центром x , содержащийся в A , и, по предположению,

S содержит конец v некоторого пути γ с началом u . Сегмент с концами v и x содержится в S , и если путь γ определен в $[a, b]$, то путь γ_1 , равный γ в $[a, b]$ и $\gamma_1(t) = v + (t - b)(x - v)$ в $[b, b + 1]$, содержится в A и имеет началом u , а концом x ; следовательно, $x \in B$. С другой стороны, если $u \in B$, то существует шар S с центром u , содержащийся в A . Для любой точки $v \in S$ сегмент с концами u и v содержится в S , и мы можем точно таким же способом определить путь с началом u и концом v , содержащийся в A ; следовательно, $S \subset B$, ч. т. д.

(9.7.3) Если $A \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, то любая функция f , аналитическая в A , имеет первообразную, аналитическую в A .

Пусть a и z — две точки области A , а γ_1 и γ_2 — два пути в A с началом a и концом z . Тогда $\int_{\gamma_1} f(x) dx = \int_{\gamma_2} f(x) dx$. Действи-

тельно, заменив, если нужно, γ_2 эквивалентным путем, мы можем считать, что путь γ_1 определен в $[b, c]$, а γ_2 — в $[c, d]$. Тогда соединение $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ есть контур в A , который, таким образом, гомотопен в A точке. Следовательно, по теореме Коши $\int_{\gamma} f(x) dx = 0$,

и это доказывает наше утверждение. Поэтому мы можем в качестве $g(z)$ взять значение интеграла $\int_{\gamma} f(x) dx$ по любому пути γ

в A , имеющему началом a и концом z , и тогда в силу (9.7.2) функция g будет определена в A . Теперь для любой точки $z_0 \in A$ существует открытый шар $B \subset A$ с центром z_0 , в котором функция $f(z)$ равна сумме сходящегося степенного ряда относительно $z - z_0$. Поэтому в силу (9.3.7) существует первообразная h функции f в B , которая является аналитической и обладает тем свойством, что $h(z_0) = g(z_0)$. Следовательно, при $z \in B$ мы имеем

$$h(z) - h(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt.$$

Но правая часть есть, по определению, интеграл $\int_{\sigma} f(x) dx$, где

σ — путь $t \rightarrow z_0 + t(z - z_0)$, определенный в промежутке $[0, 1]$. Так как этот путь содержится в $B \subset A$, то по определению функции g мы имеем $g(z) - g(z_0) = \int_{\sigma} f(x) dx$, и, следовательно, $g(z) = h(z)$

в B , ч. т. д.

8. Индекс точки относительно контура

(9.8.1) Любая траектория γ , определенная в промежутке $I=[a, b]$ и такая, что $\gamma(I)$ содержится в единичной окружности $U=\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$, имеет вид $t \rightarrow e^{i\psi(t)}$, где ψ — непрерывное отображение промежутка I в $\mathbb{R}$. Если γ — путь, то ψ есть первообразная некоторой простой функции.

Так как отображение γ равномерно непрерывно в I , существует такая возрастающая последовательность точек t_k ($0 \leq k \leq p$) в I , что $t_0=a$, $t_p=b$ и что колебание (3.14) функции γ в каждом из промежутков $I_k=[t_k, t_{k+1}]$ ($0 \leq k \leq p-1$) будет ≤ 1 . Отсюда следует, что $\gamma(I_k) \neq U$. Если точка $\theta_k \in \mathbb{R}$ такова, что $e^{i\theta_k} \notin \gamma(I_k)$ (9.5.7), то отображение $x \rightarrow e^{i(x+\theta_k)}$ есть гомеоморфизм промежутка $]0, 2\pi[$ на дополнение точки $e^{i\theta_k}$ в U (9.5.7). Если φ_k — обратный гомеоморфизм, то при $t \in I_k$ мы можем, таким образом, написать $\gamma(t) = e^{i\psi_k(t)}$, где отображение $\psi_k(t) = \varphi_k(\gamma(t)) + \theta_k$ непрерывно в I_k . В силу (9.5.5) имеем $\psi_{k+1}(t_{k+1}) = \psi_k(t_{k+1}) + 2n_k\pi$, где n_k — некоторое целое число ($0 \leq k \leq p-2$).

Определим теперь отображение ψ в промежутке I следующим образом: при $t \in I_0$ $\psi(t) = \psi_0(t)$, а при $t_k < t \leq t_{k+1}$ определим $\psi(t)$ по индукции по k , полагая $\psi(t) = \psi_k(t) + \psi(t_k) - \psi_k(t_k)$. По индукции немедленно убеждаемся в том, что разность $\psi(t_k) - \psi_k(t_k)$ при $0 \leq k \leq p-1$ есть целочисленное кратное 2π . Следовательно, $\gamma(t) = e^{i\psi(t)}$ при $t \in I$ и отображение ψ , очевидно, непрерывно в I . Кроме того, если $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, то мы имеем $\alpha(t) = \cos \psi(t)$, $\beta(t) = \sin \psi(t)$ и одно из чисел $\cos \psi(t)$ и $\sin \psi(t)$ не равно 0. Из (9.5.4) и (8.2.3), применяя их к одной из функций $\cos x$ и $\sin x$ в точке, где эта функция имеет производную $\neq 0$, заключаем, что если γ имеет производную в точке t , то ее имеет и ψ , и $i\psi'(t) = \gamma'(t)/\gamma(t)$, что и завершает наше доказательство.

(9.8.2) Для любой точки $a \in \mathbb{C}$ и любого контура γ , совершающегося в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, интеграл $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ равен $2\pi i n$, где n — положительное или отрицательное целое число.

Произведя, если нужно, перенос, можем считать, что $a=0$. Допустим, что отображение γ определено в $I=[b, c]$; функция $\varphi(t, \xi) = \xi \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} + (1-\xi)\gamma(t)$ непрерывна в $I \times [0, 1]$ и является петельной гомотопией (в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$) контура γ в контур $\gamma_1(t) = \gamma(t)/|\gamma(t)|$, удовлетворяющий условию $\gamma_1(I) \subset U$. Так как функция $1/z$ является аналитической в $\mathbb{C}^*$, то теорема Коши (9.6.3) показывает, что $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}$. Но в силу (9.8.1) $\gamma_1(t) = e^{i\psi(t)}$, где

ψ — первообразная некоторой простой функции, поэтому по определению $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = i \int_b^c \psi'(t) dt = i(\psi(c) - \psi(b))$. Так как, по пред-

положению, $\gamma_1(b) = \gamma_1(c)$, то требуемое заключение следует из (9.5.5).

З а м е ч а н и е. Более простое доказательство теоремы (9.8.2), не опирающееся на (9.8.1), можно провести следующим образом

(Л. Альфорс). Пусть $h(t) = \int_b^t \frac{\gamma'(s) ds}{\gamma(s) - a}$. Эта функция всюду в I , за

исключением точек не более чем счетного множества, имеет производную, равную $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$. Поэтому если $g(t) = e^{-h(t)}(\gamma(t) - a)$, то мы видим, что всюду в I , за исключением не более чем счетного множества, $g'(t) = 0$. Отсюда мы заключаем (8.6.1), что функция g постоянна; следовательно, $e^{h(t)} = \frac{\gamma(t) - a}{\gamma(b) - a}$. Но мы имеем $\gamma(c) = \gamma(b)$, и, значит, $e^{h(c)} = 1$, откуда в силу (9.5.5) следует, что $h(c) = 2\pi i n$, где n — некоторое целое число.

Мы будем говорить, что число n есть *индекс точки a относительно контура γ* (или же *индекс контура γ относительно точки a*), и писать $n = j(a; \gamma)$. Из теоремы Коши следует, что если γ_1 и γ_2 — контуры в множестве $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, гомотопные в этом множестве, то они имеют относительно точки a один и тот же индекс.

(9.8.3) *Индекс $j(x; \gamma)$ является постоянным в каждой компоненте связности дополнения A компактного множества $\gamma(I)$.*

В самом деле, заметим, что отображение $x \rightarrow j(x; \gamma)$ непрерывно в открытом множестве A . Действительно, по определению, индекс точки $x + h$ относительно контура γ (если $x + h \notin \gamma(I)$) равен индексу точки x относительно контура $\gamma_1: t \rightarrow \gamma(t) - h$. Но если B — шар с центром x и радиусом r , содержащийся в A , то отображение $\varphi(t, \xi) = \gamma(t) - \xi h$ (определенное в произведении $I \times [0, 1]$) является при $|h| < r$ петельной гомотопией в $\mathbb{C} \setminus \{x\}$ контура γ в контур γ_1 и, следовательно, по теореме Коши $j(x + h; \gamma) = j(x; \gamma)$. Так как множество $\mathbb{Z}$ целых чисел является дискретным пространством, заключение следует из (3.19.7).

(9.8.4) *Пример.* Пусть ϵ_n — контур $t \rightarrow e^{nit}$, определенный в промежутке $I = [0, 2\pi]$, где n — положительное или отрицательное целое число. Имеем $\epsilon_n(I) = U$. Контур ϵ_n называется *единичной*

окружностью, обойденной n раз. Заметим, что открытое множество $C \setminus U$ имеет две компоненты связности, а именно шар $B: |z| < 1$ и множество E внешних точек шара B , определяемое условием $|z| > 1$. Действительно, шар B связан как звездообразная область (9.7.1), а в силу 4.4 и (9.5.7) множество E является образом произведения $]1, +\infty[\times [0, 2\pi]$ при непрерывном отображении $(x, t) \rightarrow xe^{it}$, и поэтому наше утверждение следует из (3.19.1), (3.20.16) и (3.19.7) (точно такое же рассуждение доказывает также связность шара B и множества $B \setminus \{0\}$). Наконец, множества B и E одновременно открыты и замкнуты в $C \setminus U$, так как B открыто в C и $B = (C \setminus U) \cap \bar{B}$ и, кроме того, $B \cap E = \emptyset$. Из определения и из (9.5.3) следует, что $j(0; \varepsilon_n) = n$, и, значит, $j(z; \varepsilon_n) = n$ для любой точки z шара B . Покажем, что $j(z; \varepsilon_n) = 0$ для любой точки множества E . Имеет место более общее утверждение.

(9.8.5) Если контур γ содержится в замкнутом шаре $D: |z - a| \leq r$, то $j(z; \gamma) = 0$ для любой точки z , внешней для D .

Действительно, допустим, что контур γ определен в промежутке $I = [b, c]$ и что в этом промежутке $|\gamma'(t)| \leq M$. По определению

$$2\pi i j(z; \gamma) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z} = \int_b^c \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t) - z} \quad \text{при } |z - a| > r. \quad \text{Но так как}$$

$|\gamma(t) - a| \leq r$, то для любой точки $t \in I$ имеем $|\gamma(t) - z| \geq |z - a| - r$ и, следовательно, по теореме о среднем значении $2\pi |j(z; \gamma)| \leq$

$$\leq \frac{M(c-b)}{|z-a|-r}. \quad \text{Когда } |z-a| \text{ достаточно велико, правая часть ста-}$$

новится $< 2\pi$, и, так как $j(z; \gamma)$ — целое число, отсюда следует, что $j(z; \gamma) = 0$. Но множество внешних точек шара D , как мы видели выше, связано и, таким образом, требуемое заключение следует из (9.8.3).

(9.8.6) Для любого контура γ в C , определенного в I , множество точек $x \in C \setminus \gamma(I)$, для которых $j(x; \gamma) \neq 0$, относительно компактно в C .

Действительно, в силу (9.8.5) это множество содержится в любом замкнутом шаре, содержащем $\gamma(I)$.

(9.8.7) Пусть $A \subset C$ — односвязная область (9.7) и γ — контур в A . Для любой точки $x \in C \setminus A$ индекс $j(x; \gamma) = 0$.

По предположению в A существует определенная в $I \times J$ петельная гомотопия φ контура γ в контур, сводящийся к точке. Так как

$$x \notin \varphi(I \times J), \quad \text{то теорема Коши показывает, что } \int_{\gamma} \frac{dz}{z - x} = 0.$$

9. Формула Коши

(9.9.1) Пусть $A \subset \mathbb{C}$ — односвязная область (9.7) и f — аналитическое отображение области A в банахово пространство E . Для любого контура γ в A , определенного в I , и любой точки $x \in A \setminus \gamma(I)$ имеет место следующая формула:

$$j(x; \gamma) f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-x}$$

(формула Коши).

Рассмотрим функцию $g(z)$, определенную в A , равную $\frac{f(z) - f(x)}{z-x}$ при $z \neq x$ и $f'(x)$ в точке x . Функция g является аналитической в A , потому что в силу (9.3.2) и (9.5.1) она, очевидно, аналитична в $A \setminus \{x\}$; с другой стороны, существует такой шар $B \subset A$ с центром x , что $f(z) = f(x) + (z-x)f'(x) + \dots + \frac{(z-x)^n f^{(n)}(x)}{n!} + \dots$ при $z \in B$, где ряд сходится в B ; отсюда следует, что для любой точки $z \in B$ функция $g(z)$ равна сумме сходящегося ряда

$$f'(x) + \frac{1}{2}(z-x)f''(x) + \dots + \frac{(z-x)^{n-1} f^{(n)}(x)}{n!} + \dots$$

и поэтому является аналитической в x . По теореме Коши (9.6.3) имеем $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$ и, записав $g(z) = \frac{f(z)}{z-x} - f(x) \cdot \frac{1}{z-x}$, полу-

чаем формулу (9.9.1) из определения индекса,

Обратно:

(9.9.2) Пусть γ — путь в $\mathbb{C}$, определенный в промежутке $I = [b, c]$, пусть g — непрерывное отображение множества $\gamma(I)$ в комплексное банахово пространство E . Тогда функция $f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(x) dx}{x-z}$ определена и является аналитической в дополнении множества $\gamma(I)$. Точнее, если мы положим $c_k = \int_{\gamma} \frac{g(x) dx}{(x-a)^{k+1}}$ для любой точки $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, то степенной ряд $(c_n(z-a)^n)$ будет сходиться в некотором открытом шаре B с центром a , содержащемся в $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, и его сумма в B будет равна $f(z)$.

В самом деле, допустим, что $|z-a| \leq q \cdot d(a, \gamma(I))$, где $0 < q < 1$. Тогда для любой точки $x \in \gamma(I)$ имеем $\frac{1}{x-z} =$

$$= \frac{1}{(x-a) \left(1 - \frac{z-a}{x-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}}, \quad \text{причем} \quad \left| \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{q} q^n.$$

где $\delta = d(a, \gamma(I))$. Если $\|g(x)\| \leq M$ в $\gamma(I)$ и $|\gamma'(t)| \leq m$ в I , то для любой точки $t \in I$ выполняется неравенство $\left\| \frac{\gamma'(t) g(\gamma(t)) (z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} \right\| \leq \frac{Mm}{\delta} q^n$. Поэтому ряд с общим членом $\frac{\gamma'(t) g(\gamma(t)) (z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}$ нормально сходится в I . Из (8.7.9) следует, что ряд $(c_n (z-a)^n)$ сходится в шаре $|z-a| \leq q\delta$ и его сумма в этом шаре равна $f(z)$.

(9.9.3) При предположениях теоремы (9.9.1) для каждой точки $x \in A \setminus \gamma(I)$ и каждого целого $k > 0$ имеет место формула

$$j(x; \gamma) f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-x)^{k+1}}.$$

Это сразу следует из формулы Коши, единственности коэффициентов степенного ряда с данной суммой (9.1.6), соотношений (9.3.5) между этими коэффициентами и производными и, наконец, из (9.9.2).

(9.9.4) Пусть $A \subset \mathbb{C}^p$ — открытое множество и f — непрерывное отображение множества A в комплексное банахово пространство E , такое, что для $1 \leq k \leq p$ и любой точки $(a_k) \in \mathbb{C}^p$ отображение $z_k \rightarrow f(a_1, \dots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$ является аналитическим в открытом множестве

$$A(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p) \subset \mathbb{C},$$

если это множество не пусто (3.20.12). Тогда отображение f является аналитическим в A . Точнее, пусть $a = (a_k)$ — точка множества A и P — замкнутый полицилиндр с центром a и радиусами r_k ($1 \leq k \leq p$), содержащийся в A . Для каждого k пусть γ_k — контур $t \rightarrow a_k + r_k e^{it}$ в $\mathbb{C}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и пусть

$$c_{n_1 n_2 \dots n_p} = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\gamma_1} dx_1 \int_{\gamma_2} dx_2 \dots \int_{\gamma_p} \frac{f(x_1, \dots, x_p) dx_p}{(x_1 - a_1)^{n_1+1} \dots (x_p - a_p)^{n_p+1}}.$$

Тогда степенной ряд $(c_v (z-a)^v)$ абсолютно суммируем в $\bar{P}$, и его сумма равна $f(z)$.

Пользуясь формулой Коши и тем фактом, что $j(0; \varepsilon_1) = 1$ [см. (9.8.4)], по индукции по $p-k$ получаем

$$\begin{aligned} (9.9.4.1) \quad & f(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_p) = \\ & = \frac{1}{(2\pi i)^{p-k}} \int_{\gamma_{k+1}} dx_{k+1} \int_{\gamma_{k+2}} dx_{k+2} \dots \int_{\gamma_p} \frac{f(x_1, \dots, x_p) dx_p}{(x_{k+1} - z_{k+1}) \dots (x_p - z_p)}. \end{aligned}$$

при $|x_j - a_j| = r_j$ ($1 \leq j \leq k$) и $|z_j - a_j| < r_j$ ($k+1 \leq j \leq p$). С другой стороны, при $|z_k - a_k| < r_k$ ($1 \leq k \leq p$) мы можем написать

$$\frac{1}{(x_1 - z_1) \dots (x_p - z_p)} = \sum \frac{(z_1 - a_1)^{n_1} \dots (z_p - a_p)^{n_p}}{(x_1 - a_1)^{n_1+1} \dots (x_p - a_p)^{n_p+1}},$$

где $|x_k - a_k| = r_k$. Степенной ряд в правой части равенства в силу (5.5.3) нормально суммируем на множестве F , определяемом условиями $|x_k - a_k| = r_k$. Если мы напишем

$$\begin{aligned} g_{n_{k+1} \dots n_p}(x_1, \dots, x_k) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^{p-k}} \int_{\gamma_{k+1}} dx_{k+1} \dots \int_{\gamma_p} \frac{f(x_1, \dots, x_p) dx_p}{(x_{k+1} - a_{k+1})^{n_{k+1}+1} \dots (x_p - a_p)^{n_p+1}}, \end{aligned}$$

то с помощью индукции по $p - k$, пользуясь теоремой о среднем значении, получим

$$(9.9.4.2) \quad \|g_{n_{k+1} \dots n_p}(x_1, \dots, x_k)\| \leq \frac{M}{r_{k+1}^{n_{k+1}+1} \dots r_p^{n_p+1}},$$

если $\|f(x_1, \dots, x_p)\| \leq M$ в F . Отсюда следует, что степенной ряд $(g_{n_{k+1} \dots n_p}(x_1, \dots, x_k)(z_{k+1} - a_{k+1})^{n_{k+1}+1} \dots (z_p - a_p)^{n_p+1})$ относительно $z_j - a_j$ абсолютно суммируем в $\dot{P}$. Проводя индукцию по $p - k$ и применяя (5.3.5) и (8.7.9), видим, что сумма этого ряда равна $f(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_p)$. Требуемое заключение получается при $k=0$.

Кроме того, неравенство (9.9.4.2) при $k=0$ доказывает [при тех же предположениях и обозначениях, что и в (9.9.4)], что

$$(9.9.5) \quad \|c_{n_1 n_2 \dots n_p}\| \leq \frac{M}{r_1^{n_1+1} \dots r_p^{n_p+1}},$$

если $\|f(x)\| \leq M$ в произведении окружностей $|x_k - a_k| = r_k$ ($1 \leq k \leq p$) (неравенства Коши).

Если в (9.9.4) мы возьмем $A = \mathbb{C}^p$, то увидим, что

(9.9.6) Аналитическое отображение пространства $\mathbb{C}^p$ в комплексное банахово пространство есть целая функция.

Заметим, что этот последний результат не верен для аналитических функций действительных переменных (противоречащий пример дает функция $1/(1+x^2)$). Далее, непрерывная функция $f(x, y)$

двух действительных переменных может быть аналитической по каждой из переменных, но не аналитической в $\mathbb{R}^2$. Пример дает функция $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$.

Замечание. Из (9.9.4) следует, что множество F — произведение окружностей $|x_k - a_k| = r_k$ ($1 \leq k \leq p$) — есть множество единственности в A (если A связно). В самом деле, степенной ряд $(c, (z - a)^n)$ полностью определяется значениями отображения f на F . Поэтому если две аналитические функции в A совпадают в F , то они совпадают в P , и наше утверждение следует из (9.4.2).

Задачи

1. Пусть A — относительно компактное открытое связное множество в $\mathbb{C}$. Пусть φ — такое непрерывное отображение произведения $[a, b] \times [0, 1]$ в $\bar{A}$, что отображение $t \rightarrow \varphi(t, \xi) = \gamma_\xi(t)$ при $0 \leq \xi \leq 1$ есть контур, содержащийся в A , а отображение $t \rightarrow \gamma_0(t) = \varphi(t, 0)$ — контур, содержащийся в $\bar{A}$ (который может содержать граничные точки множества A). Предположим, кроме того, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|\lambda - \mu| \leq \delta$ при $t \in [a, b] \setminus D$ следует $|\gamma'_\lambda(t) - \gamma'_\mu(t)| \leq \varepsilon$, где D — некоторое счетное множество. Пусть теперь f — непрерывное отображение множества $\bar{A}$ в комплексное банахово пространство E , сужение которого на A является аналитическим. Покажите, что теорема Коши $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$ сохраняет силу.

[Воспользуйтесь (8.7.8).]

2. Пусть A — открытое множество в $\mathbb{C}$ и f — непрерывное отображение множества A в комплексное банахово пространство E , аналитическое в $A \cap D_+$ и в $A \cap D_-$, где D_+ (соответственно D_-) определяется условием $\Im z > 0$ (соответственно $\Im z < 0$). Покажите, что отображение f является аналитическим в A .

[Предположим, что круг $|z| \leq r$ содержится в A . Пусть γ_+ (соответственно γ_-) — контур, определенный в промежутке $[-1, +1]$ формулой $\gamma_+(t) = (2t+1)r$ при $-1 \leq t \leq 0$ и формулой $\gamma_+(t) = re^{it}$ при $0 \leq t \leq 1$ (соответственно $\gamma_-(t) = re^{it}$ при $-1 \leq t \leq 0$ и $\gamma_-(t) = (1-2t)r$ при $0 \leq t \leq 1$). Покажите, пользуясь задачей 1, что если $|z| < r$ и $\Im z > 0$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} \frac{f(x) dx}{x-z}, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} \frac{f(x) dx}{x-z}.$$

Поэтому если γ — контур $t \rightarrow re^{it}$, определенный в $[-1, +1]$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x) dx}{x-z}.$$

Затем примените (9.9.2).]

3. Покажите, что заключение теоремы (9.9.4) остается верным, если отображение f предполагается только ограниченным в каждом ограниченном полицилиндре, содержащемся в A , а не обязательно непрерывным.

[Воспользуйтесь задачей 6 § 8.9. В действительности одна глубокая теорема Хартога показывает, что даже эти ослабленные предположения не необходимы. Иными словами, функция, аналитическая в отдельности по каждой из p комплексных переменных z_i , является аналитической в A .]

4. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — аналитическая комплексная функция в круге $|z| < R$. Покажите, что при $0 \leq r < R$

$$M_2^2(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Выведите из этого результата другое доказательство неравенств Коши.

5. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — аналитическая функция в круге $|z| < R$ и пусть

$$M_1(r; f) = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| r^n.$$

Пусть также $M(r; f) = \sup_{|z|=r} \|f(z)\|$.

а) Покажите, что при $0 \leq r < r + \delta < R$

$$M(r; f) \leq M_1(r; f) \leq \frac{r + \delta}{\delta} M(r + \delta; f).$$

[Примените неравенства Коши.]

б) Покажите, что если, кроме того, f — комплексная функция, то (в обозначениях задачи 4)

$$\frac{\sqrt{\delta(2r + \delta)}}{r + \delta} M_1(r; f) \leq M_2(r + \delta; f) \leq M(r + \delta; f).$$

[Примените неравенство Коши — Шварца (6.2.1).]

с) Покажите, что при тех же предположениях

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_1(r; f^n))^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (M_2(r; f^n))^{1/n} = M(r; f).$$

[Воспользуйтесь неравенствами, доказанными в а) и б), тем фактом, что $M(r; f^n) = (M(r; f))^n$, и непрерывностью отображения $r \rightarrow M(r; f)$.]

6. Предположим, что степенной ряд $(c_n z^n)$ относительно одной комплексной переменной с комплексными коэффициентами сходится при $|z| < R$, и пусть $f(z) = \sum_n c_n z^n$. Для любого r , удовлетворяющего условию $0 < r < R$ пусть $A(r) = \sup_{|z|=r} \Re f(z)$. Покажите, что для каждого $n \geq 0$

$$|c_n| r^n + 2\Re f(0) \leq \sup (4A(r), 0).$$

[Докажите, что при $n \geq 0$

$$|c_n| r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} \Re f(re^{i\theta}) d\theta.]$$

7. а) Пусть A — открытое множество в пространстве K^p и f — бесконечно дифференцируемое отображение множества A в банахово пространство E . Для того чтобы отображение f было аналитическим в A , необходимо и достаточно, чтобы для каждого компактного подмножества $L \subset A$ существовали такие целое число $r \geq 0$ и число $a > 0$, что для любого индекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ верхняя грань $\sup_{x \in L} \|D^\alpha f(x)\| \leq a(|\alpha| + r)$.

[Чтобы доказать, что это условие необходимо в случае, когда $K = \mathbb{C}$, примените неравенства Коши к шарам фиксированного радиуса, содержащимся в A и имеющим центры в L ; в случае когда $K = \mathbb{R}$, воспользуйтесь (9.4.5). Чтобы доказать, что это условие достаточно, воспользуйтесь формулой Тейлора (8.14.3) и докажите, что последний член этой формулы равномерно стремится к 0 в любом замкнутом шаре, содержащемся в A и имеющем центром x .]

б) Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции в $\mathbb{R}$, которая не является аналитической (см. задачу 2 § 8.12).

с) Предположим, что отображение f действительно и бесконечно дифференцируемо в открытом промежутке $I \subset \mathbb{R}$. Пусть, кроме того, существует такое целое число $p \geq 0$, что $f^{(n)}$ при любом $n > 0$ обращается в 0 не более чем в p точках промежутка I . Покажите, что f является аналитическим в I .

[Воспользуйтесь а) и задачами 3, б) § 8.12.]

10. Критерии аналитичности функций комплексных переменных

(9.10.1) Непрерывно дифференцируемое отображение f открытого множества $A \subset \mathbb{C}^p$ в банахово пространство является аналитическим.

Применяя (9.9.4), мы немедленно сводим эту теорему к случаю $p = 1$. Чтобы доказать, что f аналитично в точке $a \in A$, мы можем (произведя, если потребуется, перенос и гомотетическое отображение) считать, что $a = 0$ и что A содержит единичный шар $B: |z| \leq 1$. Для любой точки $z \in \overset{\circ}{B}$ и любого λ , удовлетворяющего условию $0 \leq \lambda \leq 1$, имеем $|(1 - \lambda)z + \lambda e^{it}| \leq 1 - \lambda + \lambda = 1$. Рассмотрим интеграл

$$(9.10.1.1) \quad g(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \lambda(e^{it} - z)) - f(z)}{e^{it} - z} e^{it} dt.$$

В силу (8.11.1) и правила Лейбница (8.11.2) функция g непрерывна в промежутке $[0, 1]$ и имеет в каждой точке промежутка $]0, 1[$ произ-

водную, равную

$$g'(\lambda) = \int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(e^{it} - z)) e^{it} dt$$

[см. замечание после (8.4.1)]. Но $\lambda f'(z + \lambda(e^{it} - z)) e^{it}$ есть производная отображения $t \rightarrow -if(z + \lambda(e^{it} - z))$; поэтому $g'(\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ и, следовательно [см. замечание, следующее за (8.6.1)], функция g постоянна в $[0, 1]$. Так как $g(0) = 0$, то $g(\lambda) = 0$ при $0 \leq \lambda \leq 1$. В частности, отсюда при $\lambda = 1$ следует, что $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon_1} \frac{f(x) dx}{x - z}$ для любой точки $z \in \overset{\circ}{B}$ [в силу (9.8.4)], и требуемое заключение следует из (9.9.2).

(9.10.2) (Условия Коши—Римана) Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $A \subset \mathbb{R}^{2p}$ в комплексное банахово пространство. Для того чтобы функция g , определенная в A (рассматриваемом как подмножество пространства $\mathbb{C}^p$) равенством $f(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) = g(x_1 + iy_1, \dots, x_p + iy_p)$, была аналитической в A , необходимо и достаточно, чтобы при $1 \leq k \leq p$ в A выполнялись соотношения $\frac{\partial f}{\partial x_k} + i \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0$.

Снова с помощью (8.9.1) сразу сводим доказательство к случаю $p = 1$. Пусть (x, y) — точка множества A ; положим $a = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $b = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Выражая тот факт, что пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + iy + h) - g(x + iy)}{h} \quad \text{и} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + iy + ih) - g(x + iy)}{ih}$$

(h — действительное число $\neq 0$) совпадают, получаем $a + ib = 0$.

Если, напротив, это условие выполняется, то в силу (8.9.1.1) для любого $\epsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что при $\sqrt{h^2 + k^2} \leq r$ имеет место неравенство $\|g(x + iy + h + ik) - g(x + iy) - a(h + ik)\| \leq \epsilon \sqrt{h^2 + k^2}$, и это доказывает, что отображение $z \rightarrow g(z)$ имеет в точке $z = x + iy$ производную a . Требуемое утверждение следует тогда из (9.10.1).

Задачи

1. Покажите, что дифференцируемое отображение f открытого множества $A \subset \mathbb{C}^p$ в комплексное банахово пространство является аналитическим в A (Теорема Гурса; производная f' не предполагается непрерывной.)

[Пусть λ — произвольная точка из промежутка $]0, 1[$. Докажите [в обозначениях доказательства теоремы (9.10.1)], что производная $g'(\lambda)$ существует

и равна 0. Сначала покажите, что для заданного $\varepsilon > 0$ существуют точки $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi$, число $\rho > 0$ и по точке θ_k в каждом из промежутков $[t_k, t_{k+1}]$, такие, что если $\zeta_k = z + \lambda(e^{i\theta_k} - z)$ и $\zeta_k + x = z + (\lambda + h)(e^{it} - z)$, то $|f(\zeta_k + x) - f(\zeta_k) - f'(\zeta_k)x| \leq \varepsilon|x|$, как только $|h| \leq \rho$ и $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ (докажите это от противного, пользуясь компактностью промежутка $[0, 2\pi]$ и существованием производной f' в каждой точке). Затем каждый интеграл

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{f(z + (\lambda + h)(e^{it} - z)) - f(z + \lambda(e^{it} - z))}{e^{it} - z} e^{it} dt$$

сравните с выражением

$$\frac{h}{i\lambda} (f(z + \lambda(e^{it_{k+1}} - z)) - f(z + \lambda(e^{it_k} - z)))$$

при $|h| \leq \rho$.

2. Пусть A — открытое односвязное множество в $\mathbb{C}$. Покажите, что если f — непрерывное отображение множества A в комплексное банахово пространство E , такое, что $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ для любого контура γ в A , то ото-

бражение f является аналитическим в A (теорема Морера).

[Покажите, что f имеет в A первообразную.]

3. Пусть A — открытое множество в $\mathbb{C}^p$, γ — путь, определенный в промежутке $I = [a, b]$, и f — непрерывное отображение произведения $\gamma(I) \times A$ в комплексное банахово пространство E . Предположим, что для каждой точки $x \in \gamma(I)$ функция $(z_1, \dots, z_p) \rightarrow f(x, z_1, \dots, z_p)$ является аналитической в A и что каждая из функций $\frac{\partial f}{\partial z_k}(x, z_1, \dots, z_p)$ непрерывна в $\gamma(I) \times A$ ($1 \leq k \leq p$). Покажите, что при этих условиях функция $g(z_1, \dots, z_p) = \int_{\gamma} f(x, z_1, \dots, z_p) dx$ является аналитической в A .

[Воспользуйтесь (9.10.2). Так как производная $\gamma'(t)$ является только простой функцией и может не быть непрерывной, правило Лейбница (8.11.2) непосредственно неприменимо, но его доказательство с небольшими изменениями сохраняет силу.]

4. Пусть A — открытое связное множество в пространстве $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 2$) и f — аналитическое отображение множества A в комплексное банахово пространство E . Предположим, что существует открытый полицилиндр $P \subset A$ с центром $b = (b_k)_{1 \leq k \leq p}$ и радиусами r_k ($1 \leq k \leq p$), такой, что для каждой точки (c_k) полицилиндра P существует такое число $\rho < \inf(r_1, r_2)$, что функция $x_1 + ix_2 \rightarrow f(x_1, x_2, c_3, \dots, c_p)$ является аналитической в открытом множестве $|x_1 + ix_2 - (c_1 + ic_2)| < \rho$ пространства $\mathbb{C}$ (отождествленного с $\mathbb{R}^2$). Покажите, что тем же свойством обладает каждая точка $(c_k) \in A$.

[Воспользуйтесь (9.10.2) и (9.4.2).]

5. Пусть S — шаровой слой в $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 3$), определяемый условием

$$(R - \varepsilon)^2 < x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 < (R + \varepsilon)^2 \quad (0 < \varepsilon < R).$$

Предположим, что f — аналитическое отображение S в комплексное банахово пространство E , и пусть для любой точки $u = (x_3, \dots, x_p)$ отображение $x_1 + ix_2 \rightarrow f(x_1, x_2, u)$ является аналитическим в некоторой окрестности (в $\mathbb{C}$) каждой точки множества $S(u)$ [если $S(u)$ не пусто].

а) Для любой точки $u = (x_3, \dots, x_p)$, удовлетворяющей условию $\|u\|^2 = x_3^2 + \dots + x_p^2 < R^2$, пусть $\gamma(u)$ — путь в $\mathbb{C}$, определяемый отображением $t \rightarrow (R^2 - \|u\|^2)^{1/2} e^{it}$ при $-\pi \leq t \leq \pi$. Пусть

$$g(z, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(u)} \frac{f(y, u) dy}{y - z},$$

где $y = x_1 + ix_2$ и $f(y, u) = f(x_1, x_2, u)$; g определено при $|z|^2 + \|u\|^2 < R^2$, и отображение $z \rightarrow g(z, u)$ является аналитическим при $|z| < (R^2 - \|u\|^2)^{1/2}$. Пусть, далее, для любой точки $v = (x'_3, \dots, x'_p)$, такой, что $\|v\| < R$, построена функция

$$h_v(z, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(v)} \frac{f(y, u) dy}{y - z}.$$

Покажите, что $h_v(z, u) = g(z, u)$ при $\|v\| < \|u\| < \|v\| + \varepsilon$ и $|z| < (R^2 - \|v\|^2)^{1/2}$.

[Примените теорему Коши (9.6.3).]

Покажите, что, с другой стороны, $g(z, u) = f(z, u)$ при $R - \varepsilon < \|u\| < R$ и $|z| < (R^2 - \|u\|^2)^{1/2}$. Заключите отсюда, что f может быть продолжено в отображение $\tilde{f}$, аналитическое во всем шаре $B: x_1^2 + \dots + x_p^2 < (R + \varepsilon)^2$. Остается ли эта теорема верной при $p = 2$?

[Примените (9.4.2) и задачу 3.]

б) Покажите, что если $E = \mathbb{C}$, то $\tilde{f}(B) \subset f(S)$.

[Результат из задачи а) примените к функции $1/(f - c)$, где $c \notin f(S)$.]

В частности, если отображение f ограничено в S , то отображение $\tilde{f}$ ограничено в B . Распространите это последнее свойство на случай, когда E есть комплексное гильбертово пространство.

[Используйте метод задачи 6 § 8.5.]

11. Теорема Лиувилля

(9.11.1) (Теорема Лиувилля) Пусть f — целая функция в $\mathbb{C}^p$ с значениями в комплексном банаховом пространстве E . Предположим, что существуют такие p целых чисел t_k ($1 \leq k \leq p$) и такое число $a > 0$, что для любой точки $z \in \mathbb{C}^p$

выполняется неравенство $\|f(z)\| \leq a \cdot |z_1|^{m_1} |z_2|^{m_2} \dots |z_p|^{m_p}$. Тогда $f(z)$ есть сумма конечного числа „одночленов“

$c_{n_1 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$, где $c_{n_1 \dots n_p} \in E$ и $n_k \leq m_k$ при $1 \leq k \leq p$.

Пусть $f(z) = \sum_v c_v z^v$ в C^p , причем степенной ряд всюду абсолютно суммируем. Неравенства Коши (9.9.5), примененные к цилиндру с центром 0 и радиусами r_k ($1 \leq k \leq p$), для любого индекса $v = (n_1, \dots, n_p)$ дают

$$\|c_{n_1 \dots n_p}\| \leq a \cdot r_1^{m_1 - n_1} \dots r_p^{m_p - n_p}.$$

Так как радиусы r_k произвольны, это показывает, что $c_{n_1 \dots n_p} = 0$, если n_k не $\leq m_k$ при $1 \leq k \leq p$.

(9.11.2) (Основная теорема алгебры) Любой многочлен $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_0 \neq 0$, $n \geq 1$) с комплексными коэффициентами имеет в C по крайней мере один корень.

В противном случае функция $1/f$ была бы аналитической в C (9.3.2) и, значит, целой функцией (9.9.6). Пусть r — такое действительное число, что при $1 \leq k \leq n$ выполняется неравенство $r^k \geq (n+1) |a_k/a_0|$. Тогда при $|z| \geq r$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_0 z^n| \cdot \left| 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \dots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \right| \geq \\ &\geq |a_0 z^n| \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \geq \frac{|a_0| r^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Иными словами, функция $1/f$ при $|z| \geq r$ ограничена. С другой стороны, она непрерывна в компактном множестве $|z| \leq r$ и поэтому ограничена и на этом множестве (3.17.10). Таким образом, функция $1/f$ ограничена в C . Из теоремы Лиувилля тогда следует, что функция $1/f$ постоянна; значит и функция f постоянна, что противоречит предположению, так как при $|z| \geq r$ выполняется неравенство $|f(z)| \geq \frac{|a_0| \cdot |z|^n}{n+1}$.

Задачи

1. Покажите, что при $p \geq 2$ функция, аналитическая в дополнении некоторого компактного множества в C^p , является целой функцией. Поэтому если она вдобавок и ограничена в дополнении некоторого компактного множества в C^p , то она постоянна. Верен ли этот результат при $p = 1$?

[Воспользуйтесь (9.11.1) и задачами 4 и 5 § 9.10.]

2. Пусть f — комплексная целая функция в $\mathbb{C}^p$. Покажите, что заключение теоремы (9.11.1) останется справедливым, если предположить, что

$$\Re f(z) \leq a \cdot |z_1|^{m_1} \dots |z_p|^{m_p}$$

для любой точки $z \in \mathbb{C}^p$.

[Воспользуйтесь задачей 6 § 9.9.]

3. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция. Для любого $r > 0$ пусть $\mu(r) = \sup_n \|a_n\| r^n$ и $M(r) = \sup_{|z|=r} \|f(z)\|$, так что $\mu(r) \leq M(r)$. По теореме Лиувилля $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu(r) = +\infty$. Допустим, что существуют такие две константы $a > 0$ и $\alpha > 0$, что $\mu(r) \leq a \cdot \exp(r^\alpha)$. Покажите, что существуют также положительные константы b и c , что $M(r) \leq br^\alpha \mu(r) + c$.

$$\left[\text{Заметьте, что } \|a_n\| \leq \left(\frac{ea}{n} \right)^{n/\alpha}. \right]$$

12. Сходящиеся последовательности аналитических функций

(9.12.1) Пусть (f_n) — последовательность аналитических отображений открытого множества $A \subset \mathbb{C}^p$ в комплексное банахово пространство E . Предположим, что для каждой точки $z \in A$ последовательность $(f_n(z))$ сходится к пределу $g(z)$ и что сходимость равномерна на каждом компактном подмножестве множества A . Тогда g — аналитическое отображение в A , и для каждого индекса $\nu = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ последовательность $(D^\nu f_n(z))$ для каждой точки $z \in A$ сходится к $D^\nu g(z)$, причем сходимость равномерна на каждом компактном подмножестве множества A .

Так как отображение g непрерывно в A (7.2.1), то, чтобы доказать, что g аналитично в A , нам нужно только в силу (9.9.4) убедиться в том, что каждое отображение $z_k \rightarrow g(a_1, \dots, z_k, \dots, a_p)$ аналитично в множестве $A(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p)$. Иными словами, задача сводится к случаю $p = 1$.

Для каждой точки $a \in A \subset \mathbb{C}$ пусть B — замкнутый шар с центром a и радиусом r , содержащийся в A , и пусть γ — контур $t \rightarrow a + re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Тогда для каждой точки $z \in B$ и каждого n по формуле Коши (9.9.1) имеем $f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(x)}{x-z} dx$. Но по пред-

положению последовательность $(f_n(x))$ при $|x-a| = r$ равномерно сходится к $g(x)$, а так как $|z-x| \geq r - |z|$, то и последовательность $\frac{f_n(x)}{x-z}$ (z фиксировано) при $|x-a| = r$ равномерно

сходится к $\frac{g(z)}{x-z}$. Поэтому в силу (8.7.8) $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(x) dx}{x-z}$; откуда в силу (9.9.2) следует, что отображение g аналитично в $\mathring{B}$. Кроме того, так как в силу (9.9.3) $f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_n(x) dx}{(x-z)^2}$, точно такое же рассуждение [и теорема (9.9.3), примененная к g] показывает, что последовательность $f'_n(z)$ для каждой точки $z \in \mathring{B}$ сходится к $g'(z)$. Далее, по теореме о среднем значении

$$(9.12.1.1) \quad \|g'(a) - f'_n(a)\| \leq \frac{1}{r} \sup_{|x-a|=r} \|g(x) - f_n(x)\|.$$

Возвращаясь к общему случаю (p произвольно), покажем теперь, что последовательность $(D_k f_n(z))$ равномерно сходится к $D_k g(z)$ на любом компактном множестве $M \subset A$. Существует число $r > 0$ и компактная окрестность V множества M , содержащаяся в A и содержащая все точки множества A , находящиеся от M на расстоянии $\leq r$ (3.18.2). Для произвольного $\varepsilon > 0$ пусть n_0 выбрано так, что для каждого $n \geq n_0$ и каждой точки $z \in V$ выполняется неравенство $\|g(z) - f_n(z)\| \leq \varepsilon$. Тогда, применяя (9.12.1.1) к последовательности функций $z_k \rightarrow f_n(a_1, \dots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$, для каждой точки $z \in M$ получаем $\|D_k g(z) - D_k f_n(z)\| \leq \varepsilon/r$, как только $n \geq n_0$. Это завершает доказательство теоремы в случае, когда $n_1 + \dots + n_p = 1$. После этого доказательство в общем случае проводится с помощью индукции по $n_1 + \dots + n_p$.

Отметим здесь снова, что теорема не остается верной для аналитических функций действительных переменных, так как по теореме Вейерштрасса об аппроксимации (7.4.1) последовательность многочленов может иметь пределом произвольную (например, недифференцируемую) непрерывную функцию на компактном множестве.

Задачи

1. а) Пусть $(a_k)_{1 \leq k \leq p}$ — конечная последовательность комплексных чисел, для которой $\sum_{k=1}^p |a_k| = \alpha < 1$. Покажите, что

$$\left| \prod_{k=1}^p (1 + a_k) - 1 - \sum_{k=1}^p a_k \right| \leq \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}.$$

б) Целые функции $E(z, 0) = 1 - z$,

$$E(z, p) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right)$$

называются *первичными множителями*. Покажите, что при $|z| \leq 1/2$

$$|E(z, p) - 1| \leq 4|z|^{p+1}.$$

[Заметьте, что при $|z| \leq 1/2$

$$\left| \ln(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p} \right| \leq \frac{2|z|^{p+1}}{p+1}$$

и что $|e^z - 1| \leq 2|z|$ при $|z| \leq 1$.]

с) Пусть (a_n) — такая последовательность комплексных чисел $\neq 0$, что последовательность $(|a_n|)$ возрастает и $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$. Покажите, что для

любой точки $z \in \mathbb{C}$ ряд с общим членом $\left(\frac{z}{a_n}\right)^n$ абсолютно сходится.

д) Выведите из а), б) и с), что последовательность целых функций

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^n E\left(\frac{z}{a_k}, k-1\right)$$

равномерно сходится на каждом компактном множестве пространства $\mathbb{C}$.

[Примените критерий Коши и оцените, пользуясь а) и б), разность

$$1 - \frac{p_m(z)}{p_n(z)} \text{ при } m > n; \text{ затем примените с).}]$$

Таким образом, предел $f(z)$ последовательности $(p_n(z))$ является целой

функцией, которую записывают в виде $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, n-1\right)$. Пока-

жите, что единственными точками, в которых $f(z) = 0$, являются точки a_n .

е) Допустим, что существует такое целое число $p > 0$, что ряд с общим членом $|a_n|^{-p}$ сходится. Подобным же образом покажите, что последовательность целых функций

$$q_n(z) = \prod_{k=1}^n E\left(\frac{z}{a_k}, p-1\right)$$

равномерно сходится на каждом компактном множестве в $\mathbb{C}$. Ее предел

снова обозначим через $g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p-1\right)$. Докажите, что суще-

ствует такая константа $c > 0$, что

$$|g(z)| \leq \exp(c|z|^p).$$

[Для любой данной точки z рассмотрите отдельно произведение множителей, для которых $|a_n| \geq 2|z|$, и остальных множителей. Первое произведение оцените с помощью б). С другой стороны, докажите, что существует такая константа b , что для любой точки $z \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство $|E(z, p-1)| \leq \exp(b|z|^{p-1})$.]

2. Покажите, что последовательность целых функций

$$(*) \quad f_n(z) = \frac{z(z+1) \dots (z+n)}{n^z \cdot n!}$$

(где, по определению, $n^z = \exp(z \ln n)$) равномерно сходится на каждом компактном множестве в $\mathbb{C}$ к целой функции

$$(**) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

где $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ (постоянная Эйлера).

[Чтобы сравнить (*) и (**), воспользуйтесь результатом задачи 1, е), запишите $\ln n = \sum_{k=2}^n \ln \frac{k}{k-1}$ и с помощью теоремы о среднем значении мажорируйте $\left| \frac{1}{k} - \ln \frac{k}{k-1} \right|$]

Докажите, что, если z не есть целое число $-n \leq 0$, гамма-функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

и что $\Gamma(n) = (n-1)!$ для целых $n > 0$.

3. Бесконечный путь в открытом множестве $A \subset \mathbb{C}$ есть непрерывное отображение γ пространства $\mathbb{R}$ в A , в каждом компактном промежутке $I \subset \mathbb{R}$ являющееся первообразной некоторой простой функции. Если f — непрерывное отображение множества $\gamma(\mathbb{R})$ в комплексное банахово пространство E , то f называется *несобственно интегрируемым* вдоль пути γ , если в E

существует *несобственный интеграл* $\int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ (т. е. если в E

существуют оба предела $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ и $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$).

Значение этого интеграла называется в этом случае *интегралом от отображения f вдоль пути γ* и обозначается символом $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Пусть B — открытое множество в $\mathbb{C}^p$ и g — непрерывное отображение произведения $\gamma(\mathbb{R}) \times B$ в E . Допустим, что для каждой точки $x \in \gamma(\mathbb{R})$ функция $(z_1, \dots, z_p) \rightarrow g(x, z_1, \dots, z_p)$ является аналитической в B и что каждая из функций $\frac{\partial g}{\partial z_k}(x, z_1, \dots, z_p)$ непрерывна в произведении $\gamma(\mathbb{R}) \times B$. Допустим, наконец, что для каждой точки $(z_1, \dots, z_p) \in B$ функция $x \rightarrow g(x, z_1, \dots, z_p)$ несобственно интегрируема вдоль γ и что интеграл

$\int_{-\pi}^{\pi} g(\gamma(t), z_1, \dots, z_p) \gamma'(t) dt$, когда точка $(z_1, \dots, z_p)$ остается в некотором компактном подмножестве множества B и n стремится к $+\infty$, равномерно стремится к интегралу $\int_{\gamma} g(x, z_1, \dots, z_p) dx$. Покажите, что при этих предположениях функция $(z_1, \dots, z_p) \rightarrow \int_{\gamma} g(x, z_1, \dots, z_p) dx$ является аналитической в B .

4. Распространите утверждение из задачи 2 § 9.9 на функции p комплексных переменных, причем множество D_+ (соответственно D_-) определяется условиями $\mathcal{E}z_p > 0$ (соответственно $\mathcal{E}z_p < 0$).

[Заметьте, что в силу (9.12.1) для каждой точки z_p , для которой $\mathcal{E}z_p = 0$ и пересечение B множества A с множеством $\mathbb{C}^{p-1} \times \{z_p\}$ не пусто, функция $(z_1, \dots, z_{p-1}) \rightarrow f(z_1, \dots, z_{p-1}, z_p)$ является аналитической в B .]

5. Пусть Q — квадрат с центром 0 на плоскости $\mathbb{C}$, определяемый условиями $|\Re z| < 1$, $|\Im z| < 1$. Пусть Q_0, Q_1, Q_2 и Q_3 — образы квадрата Q при отображениях $z \rightarrow \frac{1+i}{2} + \frac{z}{2}$, $z \rightarrow \frac{-1+i}{2} + \frac{z}{2}$, $z \rightarrow \frac{-1-i}{2} + \frac{z}{2}$ и $z \rightarrow \frac{1-i}{2} + \frac{z}{2}$. Пусть $m_0 = 0$ и $m_h = 4 + 4^2 + \dots + 4^h$ для любого $h \geq 1$. Если $n = m_h + 4k + j$, где $h \geq 1$, $0 \leq k \leq 4^h - 1$ и $0 \leq j \leq 3$, то по индукции определяем квадрат Q_n следующим образом. Пусть $n_1 = m_{h-1} + k$, и z_{n_1} — центр квадрата Q_{n_1} . Тогда полагаем $\varphi_{n_1}(z) = z_{n_1} + z/2^h$ и $Q_n = \varphi_{n_1}(Q_j)$.

а) Пусть B — единичный круг $|z| \leq 1$ и U — единичная окружность $|z| = 1$. С помощью индукции по n покажите, что существуют три последовательности чисел (a_n) , (c_n) и (t_n) , определенные при $n \geq 4$ и обладающие следующими свойствами: 1°) $0 < a_n < 1$, $|t_n| = 1$, $c_n \in \mathbb{C}$; 2°) если $g_n(z) = c_n \left(1 - \left(1 - \frac{z}{t_n}\right)^{a_n}\right)$ при $z \in B$ (определение см. в задаче 8 § 9.5) и $f_n(z) = z + \sum_{q=4}^n g_q(z)$, то $f_n(B) \subset \bar{Q}$ и $f_n(t_k) \in Q_k$ при $k \leq n$; 3°) ряд $\sum_n |c_n|$ сходится.

[Заметьте, что $g_n(t_n) = c_n$, но что для любой заданной окрестности V_n точки t_n в B число a_n можно взять столь малым, чтобы $g_n(z)$ было в $B \setminus V_n$ произвольно малым. Выберите t_n близким к t_{n_1} (в обозначениях введенных выше), где все t_n различны, и возьмите окрестность V_n так, чтобы она не содержала ни одной из точек t_k с номером $k < n$.]

б) При предыдущих условиях предел $f(z)$ последовательности $(f_n(z))$ существует для любой точки $z \in B$, отображение f непрерывно в B и аналитично в $\bar{B}$ и $f(U) = Q$ (кривая Пеано, см. задачу 5 § 4.2).

13. Равностепенно непрерывные множества аналитических функций

(9.13.1) Пусть A — открытое множество в $\mathbb{C}^p$ и Φ — некоторое множество аналитических отображений множества A в комплексное банахово пространство E . Предположим, что для каждого компактного подмножества $L \subset A$ существует такое число $m_L > 0$, что $\|f(z)\| \leq m_L$ для всех $f \in \Phi$ и каждой точки $z \in L$. Тогда Φ равностепенно непрерывно в A (7.5). Если E , кроме того, конечномерно, то для каждого компактного подмножества $L \subset A$ множество Φ_L сужений на L отображений $f \in \Phi$ относительно компактно в пространстве $\mathcal{C}_E(L)$ (7.2).

Пусть $a \in A$. Существует замкнутый шар $P \subset A$ с центром a и радиусом r , и так как шар P компактен, $\|f(z)\| \leq m_P$ для всех $z \in P$ и всех $f \in \Phi$. Пусть Q — замкнутый шар с центром a и радиусом $r/2$. Для любой точки $z \in Q$ и любого $f \in \Phi$ мы можем написать

$$f(z) - f(a) = \sum_{k=1}^p (f(z_1, \dots, z_k, a_{k+1}, \dots, a_p) - f(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_p)).$$

Теперь

$$\begin{aligned} & f(z_1, \dots, z_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \dots, a_p) - \\ & \quad - f(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_p) = \\ & = \int_0^1 D_k f(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k + t(z_k - a_k), a_{k+1}, \dots, a_p) (z_k - a_k) dt. \end{aligned}$$

Положим $g_k(u) = f(z_1, \dots, z_{k-1}, u, a_{k+1}, \dots, a_p)$. Отображение g_k является аналитическим в некотором открытом множестве пространства $\mathbb{C}$, содержащем шар $|u - a_k| \leq r$ и $\|g_k(u)\| \leq m_P$ в этом шаре. Применяя (9.9.3) к g_k и к контуру $t \rightarrow a_k + r e^{it}$, определенному в промежутке $[0, 2\pi]$, получаем

$$\|g'_k(u)\| \leq \frac{4m_P}{r}$$

при $|u - a_k| \leq r/2$. Следовательно, для любой точки $z \in Q$ и любого $f \in \Phi$ имеем

$$\|f(z) - f(a)\| \leq \frac{4pm_P}{r} |z - a|,$$

что доказывает равностепенную непрерывность множества Φ в точке a . Последнее утверждение теоремы (9.13.1) следует из того факта, что любое ограниченное множество в конечномерном пространстве относительно компактно [(3.17.6) и (3.20.17)], и из теоремы Асколи (7.5.7).

(9.13.2) Пусть A — открытое связное множество в $\mathbb{C}^p$ и Φ — некоторое множество аналитических отображений множества A в комплексное банахово пространство E . Предположим, что для каждого компактного подмножества $L \subset A$ множество Φ_L сужений на L отображений $f \in \Phi$ относительно компактно в $\mathcal{E}_E(L)$. Если M — множество единственности (9.4) в A и если последовательность (f_n) отображений из Φ сходится в M просто, то последовательность (f_n) сходится равномерно (к некоторой аналитической функции) на любом компактном подмножестве A .

Из (3.16.4) следует, что нам нужно только доказать, что для каждого компактного множества $L \subset A$ последовательность сужений отображений f_n на L имеет в $\mathcal{E}_E(L)$ только одну предельную точку. Допустим противное и пусть (g_n) и (h_n) — две подпоследовательности последовательности (f_n) , каждая из которых равномерно сходится в L и пределы которых различны. Так как A локально компактно (3.18.4) и сепарабельно, существует возрастающая последовательность (U_n) открытых подмножеств множества A , для которых $\bar{U}_n$ (замыкание в $\mathbb{C}^p$) компактно и содержится в U_{n+1} , и $A = \bigcup_n U_n$ (3.18.3). По индукции по k определим такую последовательность $(g_{kn})_{n=1, 2, \dots}$, что (g_{kn}) есть подпоследовательность последовательности $(g_{k-1, n})$, причем $g_{0n} = g_n$, и что (g_{kn}) равномерно сходится в $\bar{U}_k$; это возможно ввиду предположения относительно Φ . Тогда „диагональная“ подпоследовательность (g_{nn}) равномерно сходится в каждом из U_n и поэтому в силу (9.12.1) ее предел g является аналитическим в A . Точно таким же образом из последовательности (h_n) можно выделить подпоследовательность (h_{nn}) , сходящуюся в A к аналитической функции h . Но по предположению $g(z) = h(z)$ для $z \in M$ и по определению мы должны иметь $g = h$, что противоречит определению подпоследовательностей (g_n) и (h_n) , ч. т. д.

14. Ряд Лорана

(9.14.1) Пусть A — открытое множество в $\mathbb{C}$ и r_0 и r_1 — два числа, удовлетворяющие условию $0 < r_0 < r_1$, и предположим, что „открытое кольцо“ S , определяемое условиями $r_0 < |z| < r_1$, таково, что его замыкание $\bar{S}$ в $\mathbb{C}$ (т. е. „замкнутое кольцо“ $r_0 \leq |z| \leq r_1$) содержится в A . Для любого аналитического отображения f множества A в комплексное банахово пространство E имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z) dz}{z - x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(z) dz}{z - x}$$

для любой точки $x \in S$, где γ_0 (соответственно γ_1) есть контур $t \rightarrow r_0 e^{it}$ (соответственно $t \rightarrow r_1 e^{it}$), $0 \leq t \leq 2\pi$.

Как и в доказательстве теоремы (9.9.1), прежде всего отметим, что функция $g(z)$, равная $f'(x)$ в точке x и $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ при $z \neq x$, $z \in A$, является аналитической в A . Далее, отображение $\varphi(t, \xi) = \xi r_0 e^{it} + (1 - \xi) r_1 e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq \xi \leq 1$) является петлевой гомотопией в A контура γ_0 в контур γ_1 , поэтому по теореме Коши (9.6.3) $\int_{\gamma_0} g(z) dz = \int_{\gamma_1} g(z) dz$. Но при $r_0 < |x| < r_1$ мы имеем $j(x; \gamma_0) = 0$ и $j(x; \gamma_1) = 1$ [см. (9.8.4) и (9.8.5)], откуда и следует наше утверждение.

(9.14.2) При тех же предположениях, что и в (9.14.1), существует степенной ряд $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, сходящийся при $|z| < r_1$, и степенной ряд относительно $1/z$ и без постоянного члена $g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$, сходящийся при $|z| > r_0$, такие, что $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ в S (ряд Лорана отображения f). Кроме того, степенные ряды g_1 и g_2 , обладающие этими свойствами, единственны, и для каждого контура γ в $\bar{S}$ имеем

$$j(0; \gamma) c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x) dx}{x^{n+1}}, \quad j(0; \gamma) d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} x^{n-1} f(x) dx.$$

В силу (9.9.4) при $|z| < r_1$ мы имеем $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(x) dx}{x - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(x) dx}{x^{n+1}}$ и ряд сходится при $|z| < r_1$. С другой стороны, при $|z| > r_0$ и $|x| = r_0$ имеем

$$\frac{1}{z - x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{z^n},$$

где ряд в правой части равенства нормально сходится при $|x| = r_0$ (z фиксировано). По теореме (8.7.9) получаем $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(x) dx}{z - x} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$, где $d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} x^{n-1} f(x) dx$ и ряд сходится при $|z| > r_0$. Это доказывает первую часть теоремы (9.14.2).

Допустим, далее, что мы имеем в S

$$(9.14.2.1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n},$$

где оба ряда сходятся в S . Пусть сначала γ — контур в S , определенный в I . Существуют такие точки t и t' в I , что $\gamma(t) = \inf_{s \in I} \gamma(s) = r$ и $\gamma(t') = \sup_{s \in I} \gamma(s) = r'$ (3.17.10); поэтому для любой точки $s \in I$ $r_0 < r \leq \gamma(s) \leq r' < r_1$. Но при $r \leq |z| \leq r'$ оба ряда в (9.14.2.1) нормально сходятся (9.1.2), поэтому в силу (8.7.9) для любого положительного или отрицательного целого числа m

$$\int_{\gamma} z^{m-1} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} z^{n+m-1} dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\gamma} z^{m-n-1} dz.$$

Так как $z^{k+1}/(k+1)$ — первообразная функции z^k при $k \neq -1$, то для любого контура σ мы имеем $\int_{\sigma} z^k dz = 0$. Формулы в (9.14.2),

таким образом, следуют из определения индекса.

Если теперь γ лежит в $\bar{S}$, то заметим, что существует открытое кольцо S_1 : $(1-\varepsilon)r_0 < |z| < (1+\varepsilon)r_1$, содержащееся в A (3.17.11), и мы вновь возвращаемся к предыдущему случаю.

15. Изолированные особые точки; полюсы; нули; вычеты

Пусть F — множество в метрическом пространстве E . *Изолированная точка* множества F есть точка $x_0 \in F$, у которой существует такая окрестность V , что $V \cap F = \{x_0\}$. Если каждая точка множества F изолирована, то топология подпространства F является дискретной [т. е. совпадает с топологией, определяемой расстоянием (3.2.5)], и наоборот, так как это означает, что каждое одноточечное множество $\{x\}$ в F открыто.

(9.15.1) Пусть A — открытое множество в $\mathbb{C}$, a — изолированная точка множества $\mathbb{C} \setminus A$, r — число > 0 , обладающее тем свойством, что все точки шара $|z - a| \leq r$, исключая a , принадлежат A . Если f — аналитическое отображение множества A в комплексное банахово пространство E , то при $0 < |z - a| < r$ имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z - a)^{-n},$$

причем оба ряда сходятся при $0 < |z - a| < r$ и

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x) dx}{(x-a)^{n+1}}, \quad d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (x-a)^{n-1} f(x) dx,$$

где γ — контур $t \rightarrow a + re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Это сразу следует из теоремы (9.14.2), примененной к кольцу $\rho \leq |z - a| \leq r$, где ρ сколь угодно мало.

Заметим, что ряд $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ является целой функцией и

$u(0) = 0$. Функция $u\left(\frac{1}{z-a}\right)$ называется *главной частью* функции f в окрестности точки a (или в точке a). Если $u = 0$, функция f в открытом множестве $U: 0 < |z - a| < r$ совпадает с функ-

цией $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, аналитической при $|z - a| < r$. Наоборот, если f есть сужение на U аналитической функции f_1 , определенной при $|z - a| < r$, то в силу (9.9.4) и (9.15.1) $f_1 = g$ и, значит, $u = 0$. В случае когда $u \neq 0$, мы будем говорить, что a есть *изолированная особая точка* функции f . Если u — многочлен степени $n \geq 1$, мы будем говорить, что a есть *полюс порядка n* функции f . Если это не так (т. е. если $d_m \neq 0$ для бесконечного числа номеров m), мы будем говорить, что a есть *существенная особая точка* (или *существенная особенность*) функции f . Вообще определим *порядок* $\omega(a; f)$ или $\omega(a)$ функции f в точке a следующим образом: $\omega(a) = -\infty$, если a — существенная особенность; $\omega(a) = -n$, если a — полюс порядка $n \geq 1$; $\omega(a) = m$, если $f \neq 0$,

$u = 0$ и если в степенном ряде $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, равном $f(z)$ при $0 < |z - a| < r$, m есть наименьший номер, для которого $c_m \neq 0$; наконец, $\omega(a; 0) = +\infty$. В случае когда $\omega(a; f) = m > 0$, мы будем также говорить, что a есть *нуль порядка m* функции f .

Заметим, что если обе функции f и g являются аналитическими в открытом множестве $U: 0 < |z - a| < r$ и если они принимают значения в одном и том же пространстве, то $\omega(a; f+g) = \min(\omega(a; f), \omega(a; g))$. Если одна из функций f и g комплексна, то, предполагая, что одно из чисел $\omega(a; f)$ и $\omega(a; g)$ конечно, имеем $\omega(a; fg) = \omega(a; f) + \omega(a; g)$. Любая функция f , аналитическая в U и имеющая конечный порядок n (положительный или отрицательный), единственным образом может быть записана в виде $(z-a)^n f_1$, где f_1 — функция, аналитическая в U и имеющая в точке a порядок 0. Наконец, если f — комплексная функция, аналитическая в U и имеющая конечный порядок m , то из принципа изолированности нулей и из (9.3.2) следует, что существует такое число r' , что

$0 < r' < r$ и что функция $1/f$ является аналитической в открытом множестве $0 < |z - a| < r'$. В этом случае мы имеем $\omega(a; 1/f) = -\omega(a; f)$.

(9.15.2) Пусть f — аналитическая функция в открытом множестве $U: 0 < |z - a| < r$. Для того чтобы $\omega(a; f) \geq n$, где n — положительное или отрицательное целое число, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность V точки a в $\mathbb{C}$, чтобы функция $(z - a)^{-n} f(z)$ была ограничена в $V \cap U$.

Условие, очевидно, необходимо, так как функция, имеющая в точке a порядок ≥ 0 , является сужением функции, аналитической в шаре $|z - a| < r$. Рассматривая теперь, наоборот, функцию $(z - a)^{-n} f(z)$, мы можем считать, что $n = 0$. Тогда из (9.15.1) и теоремы о среднем значении следует, что если $\|f(z)\| \leq M$ в U , то для любого ρ , удовлетворяющего условию $0 < \rho < r$, при любом $m \geq 1$ выполняется неравенство $\|d_m\| \leq M\rho^m$. Так как ρ произвольно, отсюда следует, что для каждого $m \geq 1$ коэффициент $d_m = 0$, ч. т. д.

Коэффициент d_1 в (9.15.1) называется *вычетом* отображения f в точке a .

Задачи

1. Покажите, что у аналитических функций $p \geq 2$ комплексных переменных не существует изолированных особых точек (иными словами, если A — открытое множество в $\mathbb{C}^p$, $a \in A$ и f — аналитическое отображение множества $A \setminus \{a\}$ в комплексное банахово пространство E , то оно является сужением некоторого аналитического отображения множества A в E).

[Воспользуйтесь задачей 5 § 9.10.]

2. Пусть f — комплексная аналитическая функция одной комплексной переменной, имеющая в точке $a \in \mathbb{C}$ существенную особенность. Покажите, что, каково бы ни было комплексное число λ , функция $1/(f - \lambda)$ не может быть определена и ограничена ни в каком открытом множестве вида $V \setminus \{a\}$, где V — открытая окрестность.

[Воспользуйтесь (9.15.2).]

Заключите отсюда, что для любой окрестности V точки a , для которой функция f аналитична в $V \setminus \{a\}$, множество $f(V \setminus \{a\})$ плотно в $\mathbb{C}$. (Теорема Вейерштрасса; см. задачу 8 § 10.3.)

3. Целая функция, не являющаяся многочленом, называется *трансцендентной* целой функцией. Пусть f — комплексная целая трансцендентная функция одной комплексной переменной.

а) Покажите, что для любого целого $n > 0$ открытое множество $D(n) \subset \mathbb{C}$, состоящее из всех точек $z \in \mathbb{C}$, для которых $|f(z)| > n$, не пусто и не может содержать множества внешних точек никакого шара.

[Примените задачу 2 к функции $f(1/z)$.]

б) Пусть $K(n)$ — компонента связности (3.19.5) множества $D(n)$. Покажите, что множество $K(n)$ не ограничено и что функция $|f(z)|$ неограничена в $K(n)$.

[Если $a \notin K(n)$, то рассмотрите функцию $f\left(\frac{1}{z-a}\right)$ и воспользуйтесь задачей 14 § 9.5.]

с) Покажите, что существует такое непрерывное отображение γ промежутка $[0, +\infty[$ в $\mathbb{C}$, что γ в каждом промежутке $[0, \alpha]$ является первообразной некоторой простой функции и что $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\gamma(t)| = +\infty$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(\gamma(t))| = +\infty$.

[Рассмотрите последовательность таких открытых множеств $L_n \subset \mathbb{C}$, что L_n есть компонента связности множества $D(n)$ и что $L_{n+1} \subset L_n$ при каждом n ; существование такой последовательности вытекает из б). Затем воспользуйтесь (9.7.2).]

д) Распространите предыдущие результаты на комплексные целые трансцендентные функции произвольного числа комплексных переменных.

[Если $f(z_1, \dots, z_p) = \sum a_{n_1 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$, то существует по крайней мере один такой индекс k , что есть бесконечно много членов с ненулевым коэффициентом $a_{n_1 \dots n_p}$ и сколь угодно большим n_k . С другой стороны, докажите, что если (g_m) — счетное семейство целых комплексных функций p комплексных переменных, никакая из которых не равна тождественно 0, то существуют точки $(c_1, \dots, c_p)$, в которых $g_m(c_1, \dots, c_p) \neq 0$ при каждом m . Чтобы это доказать, проведите индукцию по p и воспользуйтесь тем фактом, что для функции $h(z)$ одной комплексной переменной, аналитической в $A \subset \mathbb{C}$ и не равной тождественно 0, множество решений z уравнения $h(z) = 0$ не более чем счетно (см. (9.1.5).]

4. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная возрастающая и положительная действительная функция в промежутке $[0, +\infty[$. Пусть (k_n) — такая строго возрастающая последовательность целых чисел, что $k_1 = 1$ и $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{k_n} > \varphi(n+1)$ при $n > 1$. Покажите, что степенной ряд

$$f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{z}{n-1}\right)^{k_n}$$

сходится при всех $z \in \mathbb{C}$ и что для каждого действительного числа $x \geq 2$ выполняется неравенство $f(x) \geq \varphi(x)$ (иными словами, существуют целые функции, стремящиеся к бесконечности „быстрее“, чем любая заданная действительная функция).

5. Для любых действительных чисел α и β , где $\beta > 0$, пусть $L_{\alpha, \beta}$ — бесконечный путь (задача 3 § 9.12), определяемый следующим образом:

$L_{\alpha, \beta}(t) = \alpha - i\beta - t - 1$ при $t \leq -1$; $L_{\alpha, \beta}(t) = \alpha + i\beta t$ при $-1 \leq t \leq 1$ и $L_{\alpha, \beta}(t) = \alpha + i\beta + t - 1$ при $t \geq 1$. Пусть $G_{\alpha, \beta} = L_{\alpha, \beta}(\mathbb{R})$.

а) Покажите, что если $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$ и если $x \notin G_{\alpha, \beta}$, то функция $z \rightarrow \frac{\exp(\exp z)}{z-x}$ несобственно интегрируема вдоль $L_{\alpha, \beta}$. Далее, если числа β_1 и β_2 таковы, что $|\Im x| < \beta_1 < \beta_2$, или $|\Im x| > \beta_2 > \beta_1$, или $\Re x < \alpha$, то интегралы вдоль L_{α, β_1} и вдоль L_{α, β_2} совпадают. Точно так же, если $\Re x < \alpha_1 < \alpha_2$, или $\alpha_1 < \alpha_2 < \Re x$, или $|\Im x| > \beta$, то интегралы вдоль $L_{\alpha_1, \beta}$ и вдоль $L_{\alpha_2, \beta}$ совпадают.

[Воспользуйтесь теоремой Коши.]

б) Выведите из а), что если $L = L_{0, \pi}$, то функция

$$E(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp(\exp z)}{z-x} dz$$

может быть продолжена в целую функцию.

с) Покажите, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \exp(\exp z) dz = 1.$$

[Докажите, что интеграл вдоль $L_{\alpha, \beta}$ от функции $\exp(\exp z)$, если $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$, не зависит от α и β .]

д) Покажите, что если точка x принадлежит открытому множеству A , определяемому условиями $\Re x < 0$ или $|\Im x| > \pi$, то

$$E(x) = -\frac{1}{x} + \frac{F(x)}{x^2}.$$

где функция $F(x)$ ограничена в A .

[Выразите $F(x)$ через интеграл вдоль $L_{0, \beta}$, где $\beta < \pi$, пользуясь а) и с).]

е) Покажите, что если точка x принадлежит открытому множеству B , определяемому условиями $\Re x > 0$ и $|\Im x| < \pi$, то

$$E(x) = \exp(\exp x) - \frac{1}{x} + \frac{G(x)}{x^2},$$

где функция $G(x)$ ограничена в B .

[Пользуясь формулой Коши, докажите сначала, что если $-1 < \Re x < 0$ и $|\Im x| < \pi$, то

$$E(x) = \exp(\exp x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\exp(\exp z)}{z-x} dz,$$

где $L' = L_{-1, \pi}$. Затем, пользуясь (9.4.2), покажите, что эта формула остается справедливой при $x \in B$, и выразите $G(x)$ через интеграл вдоль $L_{-1, \beta}$, где $\beta > \pi$.]

ф) Пусть $H(x) = E(x)e^{-E(x)}$. Покажите, что H есть целая трансцендентная функция, обладающая тем свойством, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} H(re^{i\theta}) = 0$ для каждого действительного числа θ .

[Воспользуйтесь d) и e); сравните с результатом задачи 3.]

6. Пусть f — комплексная целая функция $p \geq 2$ комплексных переменных. Покажите, что если $f(a_1, \dots, a_p) = b$, то для каждого $r > 0$ существует такая точка $z = (z_1, \dots, z_p)$, что $\sum_k |z_k - a_k|^2 = r^2$ и $f(z_1, \dots, z_p) = b$.

[Воспользуйтесь задачей 5, b) § 9.10.]

7. Пусть f — аналитическое отображение открытого множества $A \subset \mathbb{C}^p$ в комплексное банахово пространство E . Граничная точка z_0 множества A называется *правильной* точкой отображения f , если существует открытая окрестность V точки z_0 и аналитическое отображение объединения $A \cup V$ в E на A , совпадающее с f . Граничная точка множества A называется *особой* для f , если она не правильная.

а) Пусть $R < +\infty$ — радиус сходимости (задача 1 § 9.1) степенного ряда $f(z) = \sum_n a_n z^n$, от одной комплексной переменной. Существует по крайней мере одна точка z_0 , для которой $|z_0| = R$ и которая является особой точкой для f .

[В противном случае окружность $|z| = R$ можно было бы покрыть конечным числом открытых шаров B_k , центры b_k которых лежат на этой окружности и которые обладают тем свойством, что в каждом открытом множестве $B(0; R) \cup B_k$ существует аналитическая функция f_k , совпадающая с f в $B(0; R)$. Пользуясь (9.4.2), покажите, что тогда для любых двух индексов h и k , для которых $B_h \cap B_k \neq \emptyset$, функции f_h и f_k совпадали бы в $B_h \cap B_k$, и заключите из (9.9.1) и (9.9.2), что радиус сходимости ряда $\sum_n a_n z^n$ был бы $> R$.]

б) Допустим, что в обозначениях а) коэффициенты $a_n \geq 0$ при каждом n . Покажите, что точка $z = R$ является особой точкой функции f .

[Можно считать, что $R = 1$. Пусть e^{ia} — особая точка функции f . Тогда при $0 < r < 1$ радиус сходимости степенного ряда $\sum_n f^{(n)}(re^{ia}) \frac{z^n}{n!}$ в точности равен $1 - r$ (9.9.1). Заметьте, что $|f^{(n)}(re^{ia})| \leq f^{(n)}(r)$, и воспользуйтесь (9.1.2).]

с) Допустим, что в обозначениях а) радиус сходимости $R = 1$. Пусть b и c — два действительных числа, удовлетворяющих условиям $0 < b < 1$ и $c = 1 - b$, и пусть p — целое число ≥ 1 . Для того чтобы точка $z = 1$ была особой точкой функции f , необходимо и достаточно, чтобы ряд Тейлора $\sum_n g^{(n)}(0) \frac{u^n}{n!}$ функции $g(u) = f(bu^p + cu^{p+1})$ имел радиус сходимости 1.

[Заметьте, что при $|u| \leq 1$ и $|bu^p + cu^{p+1}| \leq 1$ и что обе части последнего неравенства могут быть равны только при $u = 1$. В доказательстве

необходимости воспользуйтесь (10.2.5), для того чтобы показать, что в некоторой окрестности точки $z=1$ существует такая аналитическая функция $h(z)$, что $z=g(h(z))$ в этой окрестности.]

d) Допустим [в обозначениях а)], что коэффициенты $a_n=0$ для всех n , исключая последовательность (n_k) номеров, удовлетворяющих условию $n_{k+1} > (1+\theta)n_k$ при каждом k , где $\theta > 0$ — некоторое фиксированное число. Покажите, что каждая точка z_0 окружности $|z|=1$ является особой точкой функции f (теорема Адамара о лакунах; окружность $|z|=R$ называется *естественной границей* функции f).

[Можно считать, что $R=1$. Воспользуйтесь критерием из с), взяв $p_1 > 1/\theta$.

Пусть $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n u^n$ — тейлоровское разложение функции g в точке $u=0$.

По предположению, для данного $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность (m_j) номеров, что $|a_{m_j}| \geq (1-\varepsilon)^{m_j}$ (задача 1 § 9.1). С другой стороны, функция $F(u) = \sum_j (bu^p + cu^{p+1})^{m_j} = \sum_n e_n u^n$ в силу b) имеет точку $u=1$ своей особой точкой. Поэтому существует такая последовательность (q_l) номеров, что $|e_{q_l}| \geq (1-\varepsilon)^{q_l}$. Докажите, что $|d_{q_l}| \geq (1-\varepsilon)^{2q_l}$.

16. Теорема о вычетах

Прежде всего заметим, что любое множество $S \subset \mathbb{C}$, состоящее из изолированных точек, не более чем счетно. В самом деле, подпространство S пространства $\mathbb{C}$ в этом случае дискретно и сепарабельно [в силу (3.9.2), (3.20.16) и (3.10.9)] и поэтому является единственным своим плотным подмножеством (3.8.4).

(9.16.1) (Теорема о вычетах) Пусть $A \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, (a_n) — (конечная или бесконечная) последовательность различных точек области A и S — множество точек этой последовательности. Предположим, что все точки S изолированы в S . Пусть f — аналитическое отображение множества $A \setminus S$ в комплексное банахово пространство E и пусть γ — контур в $A \setminus S$. Тогда имеет место формула

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_n j(a_n; \gamma) R(a_n),$$

где $R(a_n)$ — вычет отображения f в точке a_n и в правой части равенства только конечное число членов $\neq 0$.

Очевидно, мы можем считать, что каждая точка a_n является особой точкой отображения f . Действительно, мы можем по непрерывности продолжить отображение f на все неособые точки a_n , не изменяя обеих частей формулы (так как если точка a_n не

является особой, то $R(a_n) = 0$). При этом предположении для любого компактного множества $L \subset A$ пересечение $L \cap S$ конечно. В самом деле, поскольку, по определению, множество $A \setminus S$ открыто в $\mathbb{C}$, пересечение $L \cap S$ замкнуто в L . Таким образом, это пересечение, являясь компактным и дискретным, конечно (3.16.3).

Пусть I — промежуток, в котором определен контур γ , и пусть P — множество точек $x \in A$, для которых $j(x; \gamma) \neq 0$. Мы знаем (9.8.6.), что замыкание $\bar{P}$ множества P в $\mathbb{C}$ компактно и что $\bar{P}$ не содержит ни одной граничной точки множества A . Действительно, такая точка не может ни принадлежать множеству $\gamma(I)$, ни иметь индекс $\neq 0$ относительно γ [в силу (9.8.7)]. Так как множество точек $x \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, в которых индекс $j(x; \gamma)$ принимает произвольное данное значение, открыто (9.8.3), то любая точка замыкания $\bar{P}$, не принадлежащая $\gamma(I)$, содержится в P , и поэтому $\bar{P} \subset A$. С другой стороны, пусть $\varphi(t, \xi)$ — петельная гомотопия в A контура γ в одноточечный контур ($t \in I, \xi \in J$, где J — некоторый компактный промежуток). Тогда $M = \varphi(I \times J)$ есть компактное подмножество области A . Пусть $H \subset \mathbb{N}$ — конечное множество тех номеров n , для которых $a_n \in M \cup \bar{P}$. Для каждого $n \in H$ пусть $u_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$ — главная часть отображения f в точке a_n . Пусть B — дополнение в A множества точек a_n с номерами $n \notin H$. Тогда множество B открыто, потому что любая компактная окрестность произвольной точки из B , содержащаяся в A , имеет с S конечное пересечение.

По определению главной части существует функция g , аналитическая в B и равная в каждой точке $z \neq a_n$ ($n \in H$) разности $f(z) - \sum_{n \in H} u_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$. Так как по определению $M \subset B$, контур γ гомотопен в B одноточечному контуру. Поэтому по теореме Коши $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$, или, иначе, $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n \in H} \int_{\gamma} u_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) dz$. Требуемый результат следует теперь из теоремы (9.14.2), примененной к каждой из функций $u_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$ в открытом «кольце» с центром a_n , содержащем $\gamma(I)$.

17. Мероморфные функции

Пусть A — открытое множество в $\mathbb{C}$ и S — подмножество A , состоящее из изолированных точек. Отображение f множества $A \setminus S$ в комплексное банахово пространство E называется *мероморфным в A* (в нарушение принятого словоупотребления),

если оно является аналитическим в $A \setminus S$ и имеет порядок $> -\infty$ в каждой точке множества S . Несколько нарушая терминологию, мы будем всегда отождествлять отображение f с его продолжением по непрерывности на все точки множества S , не являющиеся полюсами f . Рассуждение, проведенное в доказательстве теоремы (9.16.1), тогда показывает, что мы можем всегда считать, что для любого компактного множества $L \subset A$ пересечение $L \cap S$ конечно.

Если f и g — две мероморфные функции в A , принимающие значения в одном и том же пространстве, и если S и S' — соответственно множества их полюсов в A , то в силу предыдущего замечания все точки объединения $S \cup S'$ изолированы в нем. Функция $f+g$ определена и аналитична в множестве $A \setminus (S \cup S')$ и имеет порядок $> -\infty$ в каждой точке множества $S \cup S'$. Поэтому она мероморфна в A (заметим, что некоторые из точек объединения $S \cup S'$ могут оказаться не особыми для $f+g$). Подобным же образом, если f и g мероморфны в A и g принимает комплексные значения, то произведение fg мероморфно в A .

Если отображение f мероморфно в A , S — множество его полюсов и T — множество его нулей, то все точки множества $S \cup T$ являются изолированными. В самом деле, если $a \in A$ и $\omega(a) = h$, то $f(z) = (z-a)^h f_1(z)$ на множестве $0 < |z-a| < r$, где отображение f_1 аналитично в $|z-a| < r$ и $f_1(a) \neq 0$. Принцип изолированности нулей (9.1.5) показывает, что существует такое число r' , что $0 < r' < r$ и что $f(z) \neq 0$ при $0 < |z-a| < r'$. Это доказывает наше утверждение и, кроме того, показывает, что для любого компактного подмножества $L \subset A$ пересечение $L \cap (S \cup T)$ конечно [то же рассуждение, что и в (9.16.1)].

В частности, если f принимает комплексные значения, то отображение $1/f$ в A мероморфно, S есть множество его нулей, а T — множество его полюсов. Сверх того, при тех же обозначениях, что и выше, мы имеем $f'(z) = h(z-a)^{h-1} f_1(z) + (z-a)^h f_1'(z)$ при $0 < |z-a| < r$. Поэтому функция f'/f , являющаяся аналитической при $0 < |z-a| < r'$, имеет в точке a порядок 0, если $h=0$, и порядок -1 и вычет h , если $h \neq 0$.

(9.17.1) Пусть A — односвязная область в $\mathbb{C}$, f — комплексная мероморфная функция в A , S (соответственно T) — множество полюсов (соответственно нулей) этой функции и g — аналитическая функция в A . Тогда для любого контура γ в $A \setminus (S \cup T)$ имеет место формула

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{a \in S \cup T} J(a; \gamma) g(a) \omega(a; f),$$

причем в правой части равенства только конечное число членов $\neq 0$.

Это сразу следует из теоремы о вычетах, потому что вычет функции $\frac{gf'}{f}$ в точке $a \in S \cup T$ равен произведению $g(a)$ на вычет функции $\frac{f'}{f}$ в этой точке.

(9.17.2) Пусть в предположениях теоремы (9.17.1) $t \rightarrow \gamma(t)$ ($t \in I$) есть контур в $A \setminus (S \cup T)$. Если Γ — контур $t \rightarrow f(\gamma(t))$, то

$$j(0; \Gamma) = \sum_{a \in S \cup T} j(a; \gamma) \omega(a; f).$$

В самом деле, из (8.7.4) сразу следует, что $\int_{\Gamma} \frac{du}{u} = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Поэтому требуемый результат является частным случаем теоремы (9.17.1), получающимся при $g=1$.

(9.17.3) (Теорема Руше) Пусть $A \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и f и g — две аналитические комплексные функции в A . Пусть T — (не более чем счетное) множество нулей функции f , T' — множество нулей функции $f+g$ в A и γ — контур в $A \setminus T$, определенный в промежутке I . Тогда если $|g(z)| < |f(z)|$ в $\gamma(I)$, то функция $f+g$ не имеет нулей в $\gamma(I)$ и

$$\sum_{a \in T} j(a; \gamma) \omega(a; f) = \sum_{b \in T'} j(b; \gamma) \omega(b; f+g).$$

Первое утверждение очевидно, так как из $f(z) + g(z) = 0$ следует $|f(z)| = |g(z)|$. Функция $h = \frac{f+g}{f}$ определена в $A \setminus T$ и мероморфна в A . Имеем $\frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h}$ в $A \setminus (T \cup T')$. Ввиду

(9.17.2) нам нужно только доказать, что индекс точки 0 относительно контура $\Gamma: t \rightarrow h(\gamma(t))$ равен 0. Так как функция g/f непрерывна и конечна в компактном множестве $\gamma(I)$, то из (3.17.10) и предположения следует, что $r = \sup_{z \in \gamma(I)} \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$. Иными словами, контур

Γ содержится в шаре $|z-1| < r$, и, так как точка 0 лежит вне этого шара, требуемый результат следует из (9.8.5).

(9.17.4) (Непрерывность корней уравнения как функций от параметров) Пусть A — открытое множество в $\mathbb{C}$, F — метрическое пространство и f — такая непрерывная комплексная функция в $A \times F$, что для каждой точки $a \in F$ функция $z \rightarrow f(z, a)$ является аналитической в A . Пусть B — открытое подмножество множества A , замыкание $\bar{B}$ которого

в S компактно и содержится в A , и пусть точка $\alpha_0 \in F$ обладает тем свойством, что ни один нуль функции $f(z, \alpha_0)$ не принадлежит границе множества B . Тогда существует такая окрестность W точки α_0 в F , что:

1°) для любой точки $\alpha \in W$ функция $f(z, \alpha)$ не имеет нулей, принадлежащих границе множества B ;

2°) для любой точки $\alpha \in W$ сумма порядков нулей функции $f(z, \alpha)$, принадлежащих B , не зависит от α .

Число различных нулей функции $f(z, \alpha_0)$ в B конечно; пусть $a_1, \dots, a_n$ — эти точки. У каждой граничной точки x множества B существует компактная окрестность U_x , содержащаяся в A , такая, что функция $f(z, \alpha_0)$ не имеет в этой окрестности нулей (9.1.5). Если мы покроем (компактную) границу множества B конечным числом множеств U_{x_j} , то объединение U замыкания $\bar{B}$ и этих множеств U_{x_j} будет компактной окрестностью замыкания $\bar{B}$, содержащейся в A и такой, что функция $f(z, \alpha_0)$ не имеет нулей в $U \cap (A \setminus \bar{B})$. Пусть r — наименьшее из чисел $|a_k - a_j|$ ($k \neq j$), и для каждого k ($1 \leq k \leq n$) пусть D_k — открытый шар $|z - a_k| < r_k$ радиуса $r_k < r/2$, содержащийся в B ; тогда $D_k \cap D_j = \emptyset$ при $k \neq j$. Пусть $H = U \setminus (\bigcup_k D_k)$.

Это — компактное множество; пусть m — наименьшее значение функции $|f(z, \alpha_0)|$ в H ; в силу (3.17.10) $m > 0$.

Теперь для каждой точки $x \in \bar{B}$ существуют такая окрестность V_x точки x , содержащаяся в A , и такая окрестность W_x точки α_0 в F , что при $y \in V_x$ и $\alpha \in W_x$ выполняется неравенство $|f(y, \alpha) - f(y, \alpha_0)| < m/2$. Так как множество B компактно, его можно покрыть конечным числом множеств V_{x_l} ($1 \leq l \leq p$). Пусть $W = \bigcap_l W_{x_l}$;

это — окрестность точки α_0 в F , и по определению этого множества для любой точки $\alpha \in W$ и любой точки $y \in \bar{B}$ выполняется неравенство $|f(y, \alpha) - f(y, \alpha_0)| < m$. Отсюда прежде всего следует, что $f(y, \alpha) \neq 0$ при $y \in H$ и $\alpha \in W$. С другой стороны, так как $|f(z, \alpha) - f(z, \alpha_0)| < |f(z, \alpha_0)|$ в H , то, применяя теорему Руше к каждому из контуров $t \rightarrow a_k + r_k e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), видим, что сумма порядков нулей функции $f(z, \alpha)$ в D_k не зависит от $\alpha \in W$. Теорема доказана.

Задачи

1. Пусть $A \subset \mathbb{C}$ — открытое односвязное множество и f — комплексная мероморфная функция в A , обладающая тем свойством, что каждый ее полюс является простым и что ее вычет в каждом из этих полюсов есть положительное или отрицательное целое число. Покажите, что в A существует такая мероморфная функция g , что $f = g'/g$.

[Покажите, что если точка z_0 не является полюсом функции f , то для любой точки $z_1 \in A$, не являющейся полюсом функции f , и любого пути γ

в A , определенного в $I \subset \mathbb{R}$, с началом z_0 и концом z_1 и такого, что множество $\gamma(I)$ не содержит никакого полюса функции f , число $\exp\left(\int_{\gamma} f(x) dx\right)$ зависит только от z_0 и z_1 и не зависит от пути γ , удовлетворяющего предыдущим условиям. Воспользуйтесь теоремой о вычетах.]

2. Пусть f — целая функция одной комплексной переменной, для любых действительных чисел x и y удовлетворяющая условию $|f(x + iy)| \leq e^{|y|}$. Покажите, что для любого числа $z \neq n\pi$ имеет место представление

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{f(z)}{\sin z} \right) = - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n f(n\pi)}{(z - n\pi)^2},$$

где ряд в правой части равенства нормально сходится на любом компактном множестве в $\mathbb{C}$, не содержащем ни одной из точек $n\pi$ (n — целое число).

[Рассмотрите интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(x)}{\sin x} \frac{dx}{(x - z)^2},$$

где γ_n есть контур $t \rightarrow (n + 1/2)\pi e^{it}$ при $-\pi \leq t \leq \pi$. Заметьте, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что из того, что для каждого целого $n \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|z - n\pi| \geq \varepsilon$, следует, что $|\sin z| \geq c(\varepsilon) e^{|z|}$, и воспользуйтесь теоремой о вычетах.]

3. а) Покажите, что если $z \neq n\pi$ (n — целое число), то

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

где ряд в правой части равенства нормально сходится на любом компактном множестве в $\mathbb{C}$, не содержащем ни одной из точек $n\pi$.

[Воспользуйтесь задачей 2 и соотношением $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right) = 0$.]

б) Выведите из а), что

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right),$$

где произведение определяется как предел произведения $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right)$, равномерно сходящегося на каждом компактном множестве в $\mathbb{C}$.

[Рассмотрите целую функцию $f(z) = \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{-z/n\pi}$ (§ 9.12, за-

дача 1) и с помощью а) докажите, что функция $(\sin z)/zf(z)$ постоянна.]

с) Выведите из б) тождество (см. задачу 2 § 9.12)

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\pi} \sin \pi z.$$

4. Пусть f — комплексная функция, аналитическая в открытой окрестности A точки 0 в $\mathbb{C}^p$; для удобства будем писать w вместо z_p и z вместо $(z_1, \dots, z_{p-1})$. Предположим, что $f(0, 0) = 0$ и что функция $f(0, w)$, являющаяся аналитической в некоторой окрестности точки $w = 0$ в $\mathbb{C}$, не тождественно равна 0. Тогда существуют целое число $r > 0$, r функций $h_j(z)$, аналитических в некоторой окрестности точки 0 в $\mathbb{C}^{p-1}$, и функция $g(z, w)$, аналитическая в некоторой окрестности $B \subset A$ точки 0 в $\mathbb{C}^p$ и $\neq 0$ в этой окрестности, такие, что

$$f(z, w) = (w^r + h_1(z)w^{r-1} + \dots + h_r(z))g(z, w)$$

в некоторой окрестности точки 0 в $\mathbb{C}^p$ (подготовительная теорема Вейерштрасса).

[Если функция $f(0, w)$ имеет в точке $w = 0$ нуль порядка r , то с помощью (9.17.4) докажите, что существуют такое число $\varepsilon > 0$ и такая окрестность V точки 0 в $\mathbb{C}^{p-1}$, что для любой точки $z \in V$ функция $w \rightarrow f(z, w)$ имеет в круге $|w| < \varepsilon$ точно r нулей и не имеет нулей на окружности $|w| = \varepsilon$. Пусть γ — контур $t \rightarrow \varepsilon e^{it}$ при $-\pi \leq t \leq \pi$. Покажите, что существуют функции $h_j(z)$ ($1 \leq j \leq r$), аналитические в V и такие, что член $F(z, w) = w^r + h_1(z)w^{r-1} + \dots + h_r(z)$ при $z \in V$ и $|w| > \varepsilon$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{F'_w(z, w)}{F(z, w)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_u(z, u)}{f(z, u)} \frac{1}{w - u} du.]$$

5. Пусть (f_n) — последовательность комплексных аналитических функций в связном открытом множестве $A \subset \mathbb{C}$. Предположим, что для каждой точки $z \in A$ последовательность $(f_n(z))$ сходится к пределу $g(z)$ и что эта сходимость равномерна на каждом компактном подмножестве множества A . Предположим, кроме того, что каждое отображение $z \rightarrow f_n(z)$ множества A в $\mathbb{C}$ инъективно. Покажите, что отображение g или постоянно в A или же является инъективным.

[Для любой точки $z_0 \in A$ рассмотрите последовательность $(f_n(z) - f_n(z_0))$ и примените теорему (9.17.4) и принцип изолированности нулей.]

6. Пусть φ — действительная дважды дифференцируемая функция в промежутке $[0, 1]$. Предположим, что $|\varphi(0)| < |\varphi(1)|$, и пусть x_0 — один

из корней уравнения $\varphi(0) - \varphi(1) \cos x = 0$ в промежутке $]-\pi, \pi[$. Покажите, что целая функция

$$F(z) = \int_0^1 \varphi(t) \sin zt \, dt$$

имеет счетное множество нулей. Далее, можно определить сюръективное отображение $n \rightarrow z_n$ множества $\mathbb{Z}$ на множество нулей функции $zF(z)$, такое, что в каждый нуль отображается столько целых чисел, каков его порядок, и что

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} (z_{2n} - x_0 - 2n\pi) = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} (z_{2n+1} + x_0 - 2n\pi) = 0.$$

[Дважды проинтегрировав по частям, покажите, что можно написать $zF(z) = \varphi(0) - \varphi(1) \cos z + G(z)$, где $|G(z)| \leq ae^{|z|}/|z|$. Оцените функцию $|\varphi(0) - \varphi(1) \cos z|$ снизу вне окружностей, имеющих центры в нулях этой функции таким же образом, как в задаче 2 был оценен $|\sin z|$, и подходящим образом воспользуйтесь теоремой Руше.]

Аналогично рассмотрите случаи, когда $|\varphi(0)| > |\varphi(1)|$ или же $|\varphi(0)| = |\varphi(1)|$.

ПРИЛОЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ТОПОЛОГИИ ПЛОСКОСТИ

(Метод Эйленберга)

1. Индекс точки относительно петли

(Д.1.1) Если $t \rightarrow \gamma(t)$ ($a \leq t \leq b$) — траектория в открытом множестве $A \subset \mathbb{C}$, то в A существует гомотопия φ траектории γ в некоторый путь γ_1 , такая, что отображение φ определено в $[a, b] \times [0, 1]$ и для каждой точки $\xi \in [0, 1]$ выполняются равенства $\varphi(a, \xi) = \gamma(a)$ и $\varphi(b, \xi) = \gamma(b)$.

Пусть $I = [a, b]$. Так как множество $\gamma(I)$ компактно, расстояние $d(\gamma(I), \mathbb{C} \setminus A) = \rho > 0$ (3.17.11). Поскольку отображение γ равномерно непрерывно в I (3.16.5), существует такая строго возрастающая последовательность $(t_k)_{0 \leq k \leq m}$ точек промежутка I , что $t_0 = a$, $t_m = b$ и колебание (3.14) отображения γ на каждом из промежутков $[t_k, t_{k+1}]$ ($0 \leq k \leq m-1$) меньше ρ . Отображение γ_1 определим в I следующим образом: при $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ полагаем $\gamma_1(t) = \gamma(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} (\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k))$ ($0 \leq k \leq m-1$). Ясно, что γ_1 есть путь, причем $\gamma_1(a) = \gamma(a)$ и $\gamma_1(b) = \gamma(b)$, и, поскольку $\gamma_1([t_k, t_{k+1}])$ содержится в открытом шаре с центром $\gamma(t_k)$ и радиусом ρ , множество $\gamma_1(I)$ содержится в A . Тогда положим $\varphi(t, \xi) = \xi \gamma_1(t) + (1 - \xi) \gamma(t)$. Легко проверить, что при $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ ($0 \leq k \leq m-1$) и $0 \leq \xi \leq 1$ точка $\varphi(t, \xi)$ содержится в открытом шаре с центром $\gamma(t_k)$ и радиусом ρ . Поэтому φ удовлетворяет требуемым условиям.

В частности, если γ — петля, то мы видим, что φ есть петельная гомотопия в A петли γ в контур γ_1 .

Рассмотрим теперь произвольную петлю γ в $\mathbb{C}$, определенную в I , и любую точку $a \notin \gamma(I)$. Так как в силу (Д.1.1) существует контур, гомотопный γ в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, то мы можем определить индекс $j(a; \gamma)$ как число, равное индексу $j(a; \gamma_1)$ для любого контура γ_1 , гомотопного γ в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. По теореме Коши (9.6.3) этот индекс не зависит от выбора контура γ_1 , гомотопного γ в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Пользуясь (Д.1.1), легко убедиться в том, что индекс точки относительно петли не зависит от начала петли (9.6) и что если в формулировках свойств (9.8.3) и (9.8.5) — (9.8.7) слово „контур“ заменить словом „петля“, то все эти свойства останутся справедливыми.

2. Существенные отображения в единичную окрестность

Пусть E — метрическое пространство. Мы будем говорить, что отображение f пространства E в единичную окрестность $U: |z| = 1$ *несущественно*, если найдется такое непрерывное отображение g пространства E в $\mathbb{R}$, что $f(x) = e^{ig(x)}$ для каждой точки $x \in E$. Непрерывное отображение f пространства E в U называется *существенным*, если оно не является несущественным.

(Д.2.1) Если f_1 и f_2 — несущественные отображения пространства E в U , то и отображения $f_1 f_2$ и $1/f_1 = \bar{f}_1$ несущественны. Если f_1 существенно, а f_2 — несущественно, то отображения $f_1 f_2$ и $f_1/\bar{f}_2$ существенны.

(Д.2.2) Если f — несущественное отображение пространства E в U и g — непрерывное отображение метрического пространства F в E , то отображение $f \circ g$ несущественно.

Эти свойства являются очевидными следствиями определения.

(Д.2.3) Любое непрерывное отображение f метрического пространства E в U , удовлетворяющее условию $f(E) \neq U$, несущественно.

Пусть $\zeta_0 \in U \setminus f(E)$. Существует такая точка $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\zeta_0 = e^{i\alpha}$, и сужение отображения $t \rightarrow e^{it}$ на открытом промежутке $|\alpha, \alpha + 2\pi|$ является гомеоморфизмом этого промежутка на $U \setminus \{\zeta_0\}$ (9.5.7). Если ψ — обратный гомеоморфизм, то для каждой точки $x \in E$ мы имеем $f(x) = e^{i\psi(f(x))}$, ч. т. д.

(Д.2.4) Если f_1 и f_2 — два непрерывных отображения метрического пространства E в U , для каждой точки $x \in E$ удовлетворяющих условию $f_1(x) \neq -f_2(x)$, и если f_1 существенно (соответственно несущественно), то и f_2 существенно (соответственно несущественно).

В самом деле, $f = f_1/f_2$ есть непрерывное отображение пространства E в U , не принимающее значения -1 и поэтому в силу (Д.2.3) несущественное.

(Д.2.5) Пусть E — компактное метрическое пространство, $I = [0, 1]$ и f — непрерывное отображение произведения $E \times I$ в U . Если отображение $x \rightarrow f(x, 0)$ существенно (соответственно несущественно), то и отображение $x \rightarrow f(x, 1)$ существенно (соответственно несущественно).

Так как отображение f равномерно непрерывно в $E \times I$ (3.16.5), то найдется такое целое число $n \geq 1$, что из $|s - t| \leq 1/n$ для любой точки $x \in E$ следует $|f(x, s) - f(x, t)| \leq 1$. Пусть $f_k(x) = f(x, k/n)$ при $0 \leq k \leq n$. Таким образом, для любой точки $x \in E$ при

$0 \leq k \leq n-1$ имеем $|f_k(x) - f_{k+1}(x)| \leq 1$, и так как $|f_k(x)| = |f_{k+1}(x)| = 1$ для любой точки $x \in E$, то $f_k(x) \neq -f_{k+1}(x)$ при $x \in E$. Отсюда на основании (Д.2.4) следует наше утверждение.

(Д.2.6) Любое непрерывное отображение f замкнутого шара (в $\mathbb{R}^n$) в окружность U несущественно.

Пусть E — шар $d(x, a) \leq r$. Положим $g(x, t) = f(a + t(x - a))$. Тогда отображение g непрерывно в $E \times [0, 1]$, $g(x, 1) = f(x)$ и $g(x, 0) = f(a)$. Так как отображение $x \rightarrow g(x, 0)$ несущественно (Д.2.3), то несущественно и отображение f (Д.2.5).

(Д.2.7) Пусть A и B — два замкнутых множества в метрическом пространстве E , такие, что $E = A \cup B$ и что пересечение $A \cap B$ связно. Пусть f — непрерывное отображение пространства E в U . Если сужения отображения f на A и на B несущественны, то и f несущественно.

По предположению существуют такие непрерывные отображения g и h множеств A и B в $\mathbb{R}$, что $f(x) = e^{ig(x)}$ в A и $f(x) = e^{ih(x)}$ в B . При $x \in A \cap B$ мы, таким образом, имеем $e^{ig(x)} = e^{ih(x)}$. Поэтому (9.5.5) $(g(x) - h(x))/2\pi$ есть целое число. Но (поскольку отображение $g - h$ непрерывно в связном множестве $A \cap B$) отсюда в силу (3.19.7) следует, что разность $g - h$ на $A \cap B$ есть постоянная $2n\pi$. Пусть тогда $u(x) = g(x)$ в A и $u(x) = h(x) + 2n\pi$ в B . Ясно, что $f(x) = e^{iu(x)}$ в E , а так как g и $h + 2n\pi$ на $A \cap B$ совпадают, то отображение u непрерывно в E , ч. т. д.

(Д.2.8) Для того чтобы непрерывное отображение f окружности U в себя было существенным, необходимо и достаточно, чтобы индекс $j(0; \gamma)$ петли $\gamma: t \rightarrow f(e^{it})$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) относительно точки 0 был $\neq 0$.

В силу (9.8.1) мы можем написать $f(e^{it}) = e^{i\psi(t)}$, где функция ψ непрерывна в промежутке $[0, 2\pi]$ и ввиду (9.5.5), $\psi(2\pi) - \psi(0) = 2n\pi$, где n — индекс $j(0; \gamma)$. Пусть $\omega(t, \xi) = \psi(t) + \xi(nt + \psi(0) - \psi(t))$. Если для $\zeta = e^{it}$ ($0 < t < 2\pi$) и $0 \leq \xi \leq 1$ положить $g(\zeta, \xi) = e^{i\omega(t, \xi)}$, то отображение g на основании (9.5.7) будет непрерывно в $(U \setminus \{1\}) \times [0, 1]$, и, так как $e^{i\omega(2\pi, \xi)} = e^{i\omega(0, \xi)} = f(1)$ для любой точки ξ , отображение g можно по непрерывности продолжить на $U \times [0, 1]$. В силу (Д.2.5) доказательство теоремы сведено к случаю отображения $f: \zeta \rightarrow \zeta^n$.

Ясно, что при $n = 0$ отображение f несущественно. Предположим, что $n \neq 0$, и докажем, что отображение f не может быть несущественным. В противном случае существовало бы непостоянное непрерывное отображение h окружности U в $\mathbb{R}$, для которого $\zeta^n = e^{ih(\zeta)}$ в U . Так как образ $h(U)$ есть компактное (3.17.9) и связное [(9.5.8) и (3.19.7)] множество в $\mathbb{R}$, то $h(U)$ есть компактный промежуток $[a, b]$, где $a < b$ (3.19.1). Пусть точка $\zeta_0 \in U$ выбрана так,

что $h(\zeta_0) = a$. Таким образом, мы имеем $\zeta_0^n = e^{ia}$. Существует окрестность V точки ζ_0 в U , колебание (3.14) отображения h в которой $< \pi$. С другой стороны, применяя к промежутку $]a - \pi/n, a + \pi/n[$ теорему (9.5.7), видим, что существует такая точка $\zeta \in V$, что $\zeta^n = e^{i(a-\epsilon)}$, где $\epsilon > 0$ достаточно мало. В силу (9.5.5) $h(\zeta) = (a - \epsilon)$ есть число, кратное 2π , а из выбора окрестности V следует, что это число при $\epsilon < \pi$ может быть только равно 0. Но это противоречит определению a .

(Д.2.9) Тождественное отображение $\zeta \rightarrow \zeta$ окружности U на себя существенно.

3. Разрезы плоскости

Мы будем говорить, что множество A в метрическом пространстве E отделяет две точки x и y множества $E \setminus A$, если компоненты связности (3.19) точек x и y в $E \setminus A$ различны. Мы будем говорить, что A разрезает пространство E (или является *разрезом* пространства E), если множество $E \setminus A$ несвязно.

Для любых двух точек a и b , $a \neq b$, в $\mathbb{C}$ рассмотрим функцию $s_{a,b}(z): z \rightarrow (z-a)/(z-b)$, определенную в $\mathbb{C} \setminus \{b\}$. Легко проверить, что $s_{a,b}$ есть гомеоморфизм множества $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(Д.3.1) (Критерий Эйлера) Пусть H — компактное множество в $\mathbb{C}$. Для того чтобы H отделяло две различные точки a и b множества $\mathbb{C} \setminus H$, необходимо и достаточно, чтобы отображение $z \rightarrow s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ множества H в U было существенно.

Достаточность. Допустим, что a и b принадлежат одной и той же компоненте связности A множества $\mathbb{C} \setminus H$. Так как множество $\mathbb{C} \setminus H$ открыто в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}$ локально связно [(3.19.1) и (3.20.16)], то множество A открыто в $\mathbb{C}$ (3.19.5). В силу (9.7.2) в A существует траектория $t \rightarrow \gamma(t)$, определенная в $I = [0, 1]$ и такая, что $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$. Так как $\gamma(t) \notin H$ при любом значении t , то отображение $(z, t) \rightarrow f(z, t) = s_{a,\gamma(t)}(z)/|s_{a,\gamma(t)}(z)|$ непрерывно в $H \times I$, и, кроме того, $f(z, 0) = 1$ и $f(z, 1) = s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$. Наше утверждение следует из (Д.2.5).

Необходимость. Пусть A — компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus H$, содержащая точку a . Множество A открыто в $\mathbb{C}$, и все его граничные точки принадлежат H (они не могут принадлежать другой компоненте множества $\mathbb{C} \setminus H$, ибо тогда A имело бы с этой открытой компонентой общие точки). Так как $b \notin A \cup H$, то $d(b, A \cup H) > 0$. Пусть A' и H' — образы множеств A и H при гомеоморфизме $z \rightarrow s_{a,b}(z)$ множества $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ на множество $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Множество H' компактно, а A' есть связное открытое

подмножество множества $C \setminus H'$, ограниченное и содержащее точку 0. Кроме того, граничными точками множества A' в C являются точки из множества H' и (возможно) точка 1. Поэтому множества $\bar{A}'$ и $\bar{A}' \cup H'$ компактны. Если при этом точка 1 принадлежит границе множества A' , то это означает, что множество A неограничено и поэтому содержит точку, внешнюю по отношению к некоторому шару, содержащему H . Но множество внешних точек этого шара связно (9.8.4) и, значит, по определению компоненты связности (§ 3.19) оно содержится в A . Это показывает, что существует такой шар V с центром 1, что $V \setminus \{1\} \subset A'$. Следовательно, 1 не является граничной точкой множества $C \setminus \bar{A}'$, и, таким образом, доказано, что граница этого множества всегда содержится в H' .

Нам нужно показать, что отображение $u \rightarrow u/|u|$ множества H' в U существенно (Д.2.2). Допустим противное. Тогда существует такое непрерывное отображение f множества H' в R , что $u/|u| = e^{if(u)}$ при $u \in H'$. По теореме Титце — Урысона (4.5.1) f может быть продолжено в непрерывное отображение g множества $\bar{A}' \cup H'$ в R . Определим отображение h пространства C в U , полагая $h(u) = u/|u|$ при $u \in C \setminus \bar{A}'$ и $h(u) = e^{ig(u)}$ при $u \in \bar{A}'$. Из определения g сразу следует, что отображение h непрерывно в C . Пусть число $r > 0$ выбрано так, что $\bar{A}'$ содержится в шаре $B: |z| \leq r$. Сужение отображения h на B несущественно (Д.2.6); поэтому несущественно и сужение отображения h и на $S: |z| = r$. Но тождественное отображение $\zeta \rightarrow \zeta$ окружности U на себя может быть записано в виде $h_1 \circ g_1$, где h_1 — отображение $z \rightarrow z/|z|$ окружности S на U , а g_1 — отображение $\zeta \rightarrow r\zeta$ окружности U на S . Однако отображение h_1 есть сужение отображения h на S и потому несущественно. Следовательно, должно быть несущественно и отображение $h_1 \circ g_1$ (Д.2.2). Но это противоречит (Д.2.9).

(Д.3.2) (Теорема Янишевского) Пусть A и B — два компактных множества в C , и a, b — две различные точки множества $C \setminus (A \cup B)$. Если ни A , ни B не отделяют точки a и b и если пересечение $A \cap B$ связно, то и объединение $A \cup B$ не отделяет точки a и b .

Из предположения и из (Д.3.1) следует, что сужения отображения $z \rightarrow s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ на A и на B несущественны. В силу (Д.2.7) сужение этого отображения на $A \cup B$ также несущественно. Поэтому требуемое заключение вытекает из (Д.3.1).

4. Простые дуги и простые замкнутые кривые

Траектория $t \rightarrow \gamma(t)$ в C , определенная в промежутке $I = [\alpha, \beta]$ и являющаяся инъективным отображением I в C , называется *простой траекторией*. Множество в C называется *простой дугой*, если оно

является множеством точек $\gamma(I)$ некоторой простой траектории. Петля γ , определенная в I , называется *простой петлей*, если для всякой пары (s, t) различных точек промежутка I , хотя бы одна из которых не является его концом, $\gamma(s) \neq \gamma(t)$. Множество в $\mathbb{C}$ называется *простой замкнутой кривой*, если оно является множеством точек некоторой простой петли. Эквивалентные определения: *простая дуга* есть множество, гомеоморфное промежутку $[0, 1]$, а *простая замкнутая кривая* есть множество, гомеоморфное единичной окружности U (9.5.7).

(Д.4.1) Дополнение в $\mathbb{C}$ произвольной простой дуги связно (иными словами, простая дуга не разрезает плоскость).

Пусть γ — простая траектория, определенная в I , и пусть f — непрерывное отображение множества $\gamma(I)$ на I , обратное γ . Пусть a и b — две различные точки множества $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$. В силу (Д.3.1) нам нужно доказать, что сужение φ отображения $z \rightarrow s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ на $\gamma(I)$ несущественно. Но мы можем написать $\varphi = (\varphi \circ \gamma) \circ f$. Непрерывное отображение $\varphi \circ \gamma$ промежутка I в U несущественно (Д.2.6); поэтому ввиду (Д.2.2) несущественно и φ .

(Д.4.2) (Теорема Жордана о кривых) Пусть H — простая замкнутая кривая в $\mathbb{C}$. Тогда:

а) Множество $\mathbb{C} \setminus H$ имеет точно две компоненты связности, одна из которых ограничена, а другая не ограничена.

б) Границей каждой компоненты связности множества $\mathbb{C} \setminus H$ является H .

в) Если γ — простая петля, определенная в I и такая, что $\gamma(I) = H$, то $j(x; \gamma) = 0$, если точка x принадлежит неограниченной компоненте множества $\mathbb{C} \setminus H$, и $j(x; \gamma) = \pm 1$, если x принадлежит ограниченной компоненте множества $\mathbb{C} \setminus H$.

Доказательство проводится в несколько шагов.

(Д.4.2.1) Сначала докажем б) без какого бы то ни было предположения относительно числа компонент множества $\mathbb{C} \setminus H$.

Пусть A — компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus H$. Так как множество $\mathbb{C} \setminus H$ открыто, то, как мы видели в (Д.3.1), граница множества A содержится в H . Пусть $z \in H$ и пусть f — гомеоморфизм окружности U на H . Пусть точка $\zeta = e^{i\theta} \in U$ выбрана так, что $f(\zeta) = z$. Пусть W — произвольная открытая окрестность точки z в $\mathbb{C}$ и $V \subset W$ — замкнутый шар с центром z . Тогда существует такое число ω , что $0 < \omega < \pi$ и что $f(e^{it}) \in V$ при $\theta - \omega < t < \theta + \omega$. Пусть J — образ этого промежутка при отображении $t \rightarrow f(e^{it})$. Тогда дополнение L множества J в H является образом при отображении $t \rightarrow f(e^{it})$ компактного промежутка $[\theta + \omega - 2\pi, \theta - \omega]$ (9.5.7) и в силу (9.5.7) — простой дугой. Из (Д.4.1) следует, что открытое множество $\mathbb{C} \setminus L \supset \mathbb{C} \setminus H$ связно.

Поэтому (9.7.2) для любой точки $x \in \dot{A} \subset \mathbb{C} \setminus L$ в $\mathbb{C} \setminus L$ существует траектория γ , определенная в $I = [a, b]$ и такая, что $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = z$. Множество $\gamma(I) \cap \bar{J}$ компактно и содержится в V . Пусть M — его прообраз при γ . Тогда M есть компактное подмножество промежутка I и $a \notin M$. Пусть $c = \inf M > a$. Тогда образ при γ промежутка $[a, c]$ есть связное множество P [(3.19.7) и (3.19.1)], не пересекающее ни J , ни L и поэтому содержащееся в $\mathbb{C} \setminus (J \cup L) = \mathbb{C} \setminus H$. Так как множество P содержит x , оно в соответствии с определением компоненты связности содержится в A . Но когда $t < c$ стремится к c , точка $\gamma(t) \in A$ стремится к $\gamma(c) \in V$. Поэтому $\gamma(t) \in W$, если разность $c - t$ достаточно мала, и это доказывает, что $z \in \bar{A}$, ч. т. д.

(Д.4.2.2) *Докажем затем теорему при дополнительном предположении, что H содержит некоторый сегмент S с различными концами.*

Совершая, если нужно, в $\mathbb{C}$ гомеоморфизм $z \rightarrow \lambda z + \mu$, мы можем считать, что S есть промежуток $[-a, a]$ действительной оси $\mathbb{R}$. Пусть $\rho = d(0, H \setminus S)$. Рассмотрим открытый шар $D: |z| < r$, где $r < \rho$. Тогда $D \cap (\mathbb{C} \setminus H) = D \cap (\mathbb{C} \setminus S)$ и ясно, что пересечение $D \cap (\mathbb{C} \setminus S)$ есть объединение двух множеств $D_1: |z| < r, \Im z > 0$ и $D_2: |z| < r, \Im z < 0$, не имеющих общих точек. Немедленно проверяется, что сегмент, соединяющий две точки множества D_1 (соответственно D_2), содержится в D_1 (соответственно в D_2). Поэтому множества D_1 и D_2 связны. С другой стороны, в (Д.4.2.1) мы видели, что каждая компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus H$ пересекается с D и, значит, с D_1 или с D_2 . Но если две компоненты связности множества $\mathbb{C} \setminus H$ пересекаются с D_1 (соответственно с D_2), то они непременно совпадают, так как множество D_1 (соответственно D_2) связно и содержится в $\mathbb{C} \setminus H$ (3.19.4). Это доказывает, что множество $\mathbb{C} \setminus H$ имеет не более двух компонент связности.

Докажем, далее, что множество $\mathbb{C} \setminus H$ несвязно и поэтому имеет точно две компоненты. Допустим противное, и пусть $x \in D_1$ и $y \in D_2$. Так как шар D связен, множество $\mathbb{C} \setminus D$ не отделяет точек x и y . С другой стороны, если $\mathbb{C} \setminus H$ связно, то множество H не отделяет x и y . Но пересечение $H \cap (\mathbb{C} \setminus D)$ есть дополнение в H открытого промежутка $]-r, r[$. В силу (9.5.7) это дополнение является, таким образом, простой дугой и поэтому связно. По теореме Янишевского (Д.3.2) объединение $H \cup (\mathbb{C} \setminus D)$ не отделяет точек x и y . Но это невозможно, так как дополнение множества $H \cup (\mathbb{C} \setminus D)$ в $\mathbb{C}$ есть $D_1 \cup D_2$, а D_1 и D_2 являются открытыми множествами без общих точек и, значит, их объединение несвязно.

Так как множество H компактно, оно содержится в некотором шаре с центром 0, дополнение которого в $\mathbb{C}$ связно и потому содержится в некоторой компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus H$. Это показывает, что одна из этих компонент A не ограничена, а другая

B ограничена. Кроме того, ясно, что при $x \in A$ индекс $j(x; \gamma) = 0$ (9.8.5). С другой стороны, множество D_1 содержится в одной из компонент множества $C \setminus H$, а множество D_2 — в другой. Таким образом, все, что нам нужно доказать, это то, что $j(x_1; \gamma) = -j(x_2; \gamma) = \pm 1$ для какой-нибудь одной точки $x_1 \in D_1$ и какой-нибудь одной точки $x_2 \in D_2$ (9.8.3).

Предположим, что начало петли γ есть точка $a \in S$. Пусть $J \subset I$ — прообраз при γ множества $H \setminus \overset{\circ}{S}$ (где $\overset{\circ}{S}$ — внутренность множества S в H), являющийся компактным промежутком $[\alpha, \beta]$, и пусть γ_1 — траектория $t \rightarrow \gamma(t)$, определенная в J , с концами — a и a . В силу (Д.1.1) в $C \setminus \bar{D}$ существует гомотопия φ_1 траектории γ_1 в траекторию γ_2 , такая, что отображение φ_1 определено в $J \times [0, 1]$, $\varphi_1(\alpha, \xi) = \gamma(\alpha)$ и $\varphi_1(\beta, \xi) = \gamma(\beta)$ при любом ξ . Определим φ в $I \times [0, 1]$, как отображение в $J \times [0, 1]$, равное φ_1 , а для любой точки $(t, \xi) \in (I \setminus J) \times [0, 1]$ равное $\gamma(t)$. Тогда для любой точки $x_1 \in D_1$ (соответственно $x_2 \in D_2$) φ есть петельная гомотопия в $C \setminus \{x_1\}$ (соответственно в $C \setminus \{x_2\}$) петли γ в некоторый контур γ_3 .

Таким образом, мы можем ограничиться доказательством того, что $j(x_1; \gamma) - j(x_2; \gamma) = \pm 1$ в случае, когда γ есть контур, определенный в промежутке I и обладающий следующими свойствами:

1°) $S \subset \gamma(I)$, и если T — прообраз $\gamma^{-1}(S)$, то T есть частичный промежуток промежутка I , и сужение отображения γ на T есть гомеоморфизм T на S ;

2°) образ $\gamma(I \setminus T)$ содержится в $C \setminus \bar{D}$ (заметим, что не исключено, что этот новый контур γ не является простой петлей).

Тогда прообраз при γ промежутка $[-r, r]$ есть частичный промежуток $[\lambda, \mu]$ промежутка T . Допустим, например, что $\gamma(\lambda) = -r$, $\gamma(\mu) = r$. Мы можем считать (заменяя γ эквивалентным контуром), что $\lambda = -\pi$ и $\mu = 0$ и, кроме того, что $-r$ есть начало контура γ , так что $I = [-\pi, \omega]$, где $\omega > 0$. Возьмем $x_1 = i\xi$ и $x_2 = -i\xi$, где $0 < \xi < r$. Пусть σ — путь $t \rightarrow \gamma(t)$, $-\pi \leq t \leq 0$, δ_2 — путь $t \rightarrow re^{it}$, $-\pi \leq t \leq 0$ и δ_1 — путь $t \rightarrow re^{-it}$, $-\pi \leq t \leq 0$. Тогда, применяя теорему Коши к полуплоскости $\Im z < \xi$ (соответственно $\Im z > -\xi$), являющейся звездообразной областью (9.7.1), получаем

$$\int_{\sigma} \frac{dz}{z - i\xi} = \int_{\delta_2} \frac{dz}{z - i\xi} \quad \text{и} \quad \int_{\sigma} \frac{dz}{z + i\xi} = \int_{\delta_1} \frac{dz}{z + i\xi}$$

Поэтому

$$2\pi i(j(x_1; \gamma) - j(x_2; \gamma)) = \int_{\delta_2} \frac{dz}{z - i\xi} - \int_{\delta_1} \frac{dz}{z + i\xi} + \int_0^{\omega} \frac{2i\xi\gamma'(t) dt}{(\gamma(t))^2 + \xi^2}.$$

Левая часть этого равенства не зависит от ξ . Пользуясь же тем, что $|\gamma(t)| \geq r$ при $0 \leq t \leq \omega$, и теоремой о среднем значении для

оценки последнего интеграла и теоремой (8.11.1), видим, что, когда ξ стремится к 0, правая часть этого равенства стремится к $2\pi i$.

(Д.4.2.3) *Обратимся теперь к случаю, когда H не содержит ни одного сегмента с различными концами.*

Пусть a и b — две различные точки множества H и S — сегмент с концами a и b . Мы снова можем считать, что S есть замкнутый промежуток в $\mathbb{R}$. По предположению, существует по крайней мере одна точка $x \in S \cap (C \setminus H)$. Пусть J — компонента связности точки x в $S \cap (C \setminus H)$, являющаяся открытым промежутком $]y, z[$, поскольку множество $S \cap (C \setminus H)$ открыто в $\mathbb{R}$ [(3.19.1) и (3.19.5)]. При этом его концы y и z принадлежат H . Пусть g — гомеоморфизм множества H на единичную окружность U и пусть $g(y) = e^{ic}$ и $g(z) = e^{id}$, причем мы можем считать, что $c < d < c + 2\pi$ (9.5.7). Пусть U_1 и U_2 — две простые дуги, являющиеся образами при отображении $t \rightarrow e^{it}$ промежутков $c \leq t \leq d$ и $d \leq t \leq c + 2\pi$, и пусть H_1 и H_2 — образы этих дуг при гомеоморфизме f окружности U на H , обратном g . Пользуясь (9.5.7), немедленно видим, что существует гомеоморфизм f_1 (соответственно f_2) множества U_1 (соответственно U_2) на замкнутый промежуток $\bar{J} = [y, z]$, такой, что $f_1(e^{ic}) = f_2(e^{ic}) = y$ и $f_1(e^{id}) = f_2(e^{id}) = z$.

Пусть h_1 (соответственно h_2) — отображение окружности U в C на U_1 (соответственно на U_2), равное f , а на U_2 (соответственно на U_1), равное f_2 (соответственно f_1). Из определения J следует, что h_1 и h_2 являются гомеоморфизмами окружности U на две простые замкнутые кривые $G_1 = H_1 \cup J$ и $G_2 = H_2 \cup J$, каждая из которых содержит сегмент $\bar{J}$. Пусть $w \in H_1$ — точка, отличная от y и z . Существует открытый шар D с центром w , не пересекающийся с компактным множеством G_2 . В силу (Д.4.2.1) каждая компонента связности множества $C \setminus G_1$ имеет точки в D .

Далее, если w' и w'' — две точки шара D , принадлежащие одной и той же компоненте связности множества $C \setminus G_1$, то точки w' и w'' не отделяются множеством G_1 . Они не отделяются и множеством G_2 , так как принадлежат шару $D \subset C \setminus G_2$, который связан. Но пересечение $G_1 \cap G_2 = \bar{J}$ связно. Поэтому по теореме Янишевского (Д.3.2) точки w' и w'' не отделяются ни объединением $G_1 \cup G_2$, ни тем более множеством $H \subset G_1 \cup G_2$. Иными словами, точки w' и w'' принадлежат одной и той же компоненте связности множества $C \setminus H$. Но так как множество $C \setminus G_1$ имеет точно две компоненты связности, а каждая из компонент множества $C \setminus H$ в силу (Д.4.2.1) имеет точки в D , то отсюда следует, что $C \setminus H$ имеет не более двух компонент связности.

С другой стороны, из (Д.4.2.2) следует, что в D существуют две точки w' и w'' , отделяемые множеством G_1 . Мы покажем, что они отделяются и множеством H . В противном случае, так как они

не отделяются множеством G_2 , а пересечение $G_2 \cap H = H_2$ связно, они не отделялись бы и объединением $G_2 \cup H \supset G_1$ (Д.3.2), что противоречит предположению. Итак, мы показали, что множество $C \setminus H$ имеет точно две компоненты связности. Точно такое же рассуждение, как в (Д.4.2.2), показывает, что одна из них, A , не ограничена, а другая, B , ограничена.

Наконец, мы можем считать, что у есть начало петли γ , и, если $I = [\alpha, \beta]$, что $H_1 = \gamma([\alpha, \lambda])$ и $H_2 = \gamma([\lambda, \beta])$. Определим петли γ_1 и γ_2 следующим образом: $\gamma_1(t) = (t - \alpha + 1)(y - z) + z$, при $\alpha - 1 \leq t \leq \alpha$ и $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ при $\alpha \leq t \leq \lambda$; $\gamma_2(t) = \gamma(t)$ при $\lambda \leq t \leq \beta$ и $\gamma_2(t) = y + (t - \beta)(z - y)$ при $\beta \leq t \leq \beta + 1$. Пользуясь (Д.1.1), немедленно проверяем, что для любой точки $x \notin G_1 \cup G_2$ индекс $j(x; \gamma) = j(x; \gamma_1) + j(x; \gamma_2)$. Пусть D — шар, рассмотренный выше, и пусть снова w' и w'' — две точки шара D , отделяемые множеством G_1 . Тогда мы имеем равенство $j(w'; \gamma_2) = j(w''; \gamma_2)$, так как точки w' и w'' не отделяются множеством G_2 (9.8.3), и $j(w'; \gamma_1) - j(w''; \gamma_1) = \pm 1$ в силу (Д.4.2.2). Отсюда следует, что $j(w'; \gamma) - j(w''; \gamma) = \pm 1$, и теорема доказана.

(Д.4.3) Пусть H — простая замкнутая кривая в C и D — ограниченная компонента связности множества $C \setminus H$. Тогда для любой петли γ в D индекс $j(x; \gamma) = 0$, какова бы ни была точка $x \in H$.

Пусть U — открытый шар с центром x , не имеющий общих точек с множеством $\gamma(I)$ точек петли γ . В U найдется точка $z \in C \setminus (D \cup H) = C \setminus \bar{D}$ (Д.4.2), и, так как шар U связен, $j(x; \gamma) = j(z; \gamma)$ (9.8.3). Но $j(z; \gamma) = j(y; \gamma)$ для всех точек y неограниченной компоненты связности $C \setminus \bar{D}$ множества $C \setminus H$ (9.8.3), а в этой компоненте существуют точки y , внешние для замкнутого шара, содержащего $\gamma(I)$. Для таких точек $j(y; \gamma) = 0$ (9.8.5), откуда и следует наше утверждение.

Задачи

1. Пусть A — связное открытое множество в C . Покажите, что для любых двух точек a и b множества A существует простая траектория γ , содержащаяся в A и имеющая точки a и b своими концами, множество точек которой есть ломаная линия (задача 4 § 5.1; иначе можно сказать, что отображение γ кусочно линейно).

[Проведите рассуждение, похожее на рассуждение в (9.7.2). Если „квадрат“ $Q = I \times I \subset A$ (где I — замкнутый промежуток в $\mathbb{R}$, имеющий внутренние точки) не содержит точку a и если существует простая траектория $t \rightarrow \gamma_1(t)$ в A , определенная в $J \subset \mathbb{R}$, с началом a и концом $c \in Q$, то рассмотрите наименьшее значение $t_0 \in J$, для которого $\gamma_1(t_0) \in Q$, и заметьте, что сегмент с концами $\gamma_1(t_0)$ и произвольной точкой из Q содержится в Q .]

2. Будет ли верна теорема Янишевского, если A и B предполагаются только замкнутыми множествами в C , даже если пересечение $A \cap B$ компактно (и связно)? Покажите, что утверждение этой теоремы остается верным в следующих двух случаях: 1°) A и B — два замкнутых множества, одно из которых компактно; 2°) A и B — два замкнутых множества без общих точек.

[Если c — точка, достаточно близкая к a , то рассмотрите отображение $z \rightarrow 1/(z - c)$ и образы a , b , A и B при этом отображении.]

3. Для любой простой замкнутой кривой H в C обозначим через $\beta(H)$ ограниченную компоненту множества $C \setminus H$.

а) Пусть A — связное открытое множество в C и H — простая замкнутая кривая, содержащаяся в A . Покажите, что множество $A \setminus H$ имеет точно две компоненты связности, являющиеся пересечениями A и компонент связности множества $C \setminus H$.

[Воспользуйтесь задачей 2.]

б) Более общее утверждение: если H_i ($1 \leq i \leq r$) — r простых замкнутых кривых, содержащихся в A и попарно не имеющих общих точек, то дополнение в A объединения $\bigcup_i H_i$ имеет точно $r + 1$ компоненту.

[Проведите индукцию по r .]

с) Покажите, что если H и H' — две простые замкнутые кривые в C без общих точек, то либо $\beta(H) \cap \beta(H') = \emptyset$, либо же замыкание одного из множеств $\beta(H)$ и $\beta(H')$ содержится в другом.

[Пользуясь (3.19.9), покажите, что если $H \subset \beta(H')$, то неограниченная компонента множества $C \setminus H'$ не имеет общих точек с $\beta(H)$.]

д) Предположим, что связное открытое множество T в C имеет границу, являющуюся объединением r попарно не пересекающихся простых замкнутых кривых H_i ($1 \leq i \leq r$). Покажите, что существуют только две возможности: 1°) T неограничено, множества $\beta(H_i)$ попарно не пересекаются и их объединение является дополнением замыкания $\overline{T}$; 2°) существует одно из множеств H_i , скажем, H_r , такое, что замыкания $\overline{\beta(H_i)}$ при $1 \leq i \leq r - 1$ содержатся в $\beta(H_r)$, множества $\beta(H_i)$ ($1 \leq i \leq r - 1$) попарно не пересекаются и T является дополнением в $\beta(H_r)$ объединения замыканий $\overline{\beta(H_i)}$ при $1 \leq i \leq r - 1$.

[Заметьте, что если γ_i — простая петля, множество точек которой есть H_i ($1 \leq i \leq r$), то индексы $j(x; \gamma_i)$ при $x \in T$ постоянны, и что не более чем один из них может быть $\neq 0$. Пользуясь с), покажите, что в противном случае по крайней мере одна из кривых H_i не содержалась бы в границе множества T .]

4. Пусть A — ограниченное открытое связное множество в C , обладающее тем свойством, что для любой петли γ в A и любой точки $z \in C \setminus A$ индекс $j(z; \gamma) = 0$.

а) Покажите, что для любой простой замкнутой кривой $H \subset A$ ограниченная компонента $\beta(H)$ содержится в A .

[Пользуясь (3.19.9) и утверждением б) из теоремы Жордана о кривых, покажите, что в противном случае эта кривая содержала бы точки из $C \setminus A$.]

б) Решетка с шагом $\alpha > 0$ в C есть множество точек вида $(m + in)\alpha$, где m и n — произвольные целые числа; эти точки называются *вершинами* решетки. Для каждой вершины $(m + in)\alpha$ четыре вершины $((m \pm 1) + i(n \pm 1))\alpha$ называются *соседними* с вершиной $(m + in)\alpha$. Множество Q_{mn} , состоящее из точек $x + iy$, где $m\alpha < x < (m + 1)\alpha$ и $n\alpha < y < (n + 1)\alpha$ называется *открытым квадратом решетки* с индексами m, n . Его замыкание $\bar{Q}_{mn}$ называется *замкнутым квадратом решетки* с индексами m, n . Граница квадрата Q_{mn} содержит четыре вершины и является объединением сегментов, соединяющих те из этих вершин, которые являются соседними (сторонами квадрата Q_{mn} или квадрата $\bar{Q}_{mn}$).

Пусть B — объединение конечного числа замкнутых квадратов решетки. Покажите, что если некоторая вершина решетки принадлежит $\text{Fr}(B)$, то число соседних с ней вершин, принадлежащих $\text{Fr}(B)$, равно 2 или 4. Покажите, что если нет ни одной вершины решетки, принадлежащей $\text{Fr}(B)$ и такой, что все четыре соседние с ней вершины принадлежат $\text{Fr}(B)$, то $\text{Fr}(B)$ есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся простых замкнутых кривых, каждая из которых является объединением сторон квадратов решетки.

[Начав с каких-нибудь двух соседних вершин a_1 и a_2 решетки, принадлежащих $\text{Fr}(B)$, покажите, что можно по индукции определить последовательность (a_n) вершин решетки, принадлежащих $\text{Fr}(B)$ и таких, что a_n и a_{n+1} являются соседними вершинами.]

с) Пусть B — объединение конечного числа замкнутых квадратов решетки с шагом α , обладающее тем свойством, что в границе $\text{Fr}(B)$ нет вершины, все соседние с которой четыре вершины принадлежат $\text{Fr}(B)$, и что $\text{Fr}(B)$ есть простая замкнутая кривая (объединение сторон квадратов решетки). Пусть a и b — две соседние вершины, принадлежащие $\text{Fr}(B)$. Покажите, что существует такое непрерывное отображение $(z, t) \rightarrow \varphi(z, t)$ произведения $B \times [0, 1]$ в B , что: 1°) $\varphi(z, 0) = z$ в B ; 2°) $\varphi(z, t) = z$ для любой точки $t \in [0, 1]$ и любой точки z сегмента S с концами a и b ; 3°) $\varphi(z, 1) \in S$ для любой точки $z \in B$.

[Проведите индукцию по числу N квадратов, объединением которых является B . Пусть m — наибольшее целое число, для которого существует $Q_{mn} \subset B$, и для этого m пусть n — наибольшее целое число, для которого $Q_{mn} \subset B$. Следует различать два случая в соответствии с тем, принадлежит ли точка $(m + in)\alpha$ границе $\text{Fr}(B)$ или нет, и в каждом из этих случаев нужно рассмотреть B как объединение двух аналогичных множеств, каждое из которых является объединением менее чем N квадратов решетки.]

Заключите отсюда, что внутренность множества B односвязна.

д) Пусть B — объединение всех замкнутых квадратов решетки с шагом α , содержащихся в A ; число α предполагается настолько малым, чтобы B было не пусто. Пусть D — одна из (открытых) компонент связности множества $\bar{B}$. Покажите, что в $\text{Fr}(D)$ нет ни одной вершины решетки, все соседние с которой четыре вершины принадлежат $\text{Fr}(D)$.

[Допустим противное и для простоты предположим, что эта вершина есть 0. В таком случае, например, Q_{00} и $Q_{-1, -1}$ входят в D и существуют точка $z_1 \in \bar{Q}_{-1, 0}$ и точка $z_2 \in \bar{Q}_{0, -1}$, принадлежащие $\text{Fr}(A)$. С помощью задачи 1 покажите, что найдется простая петля Γ , содержащаяся в $D \cup \{0\}$ и содержащая сегмент с концами $(1+i)\alpha/2$ и $-(1+i)\alpha/2$. Рассуждая, как в (Д.4.2.2), покажите, что индексы $j(z_1; \Gamma)$ и $j(z_2; \Gamma)$ не могут быть равны, что и приводит к противоречию.]

е) В обозначениях задачи d) покажите, что граница $\text{Fr}(D)$ есть простая замкнутая кривая.

[Пользуясь b) и задачей 3, d), докажите, что если бы граница $\text{Fr}(D)$ была объединением более чем одной простой замкнутой кривой, то нашлись бы простая петля γ в A и точка $z \in \text{Fr}(A)$, для которых выполнялось бы равенство $j(z; \gamma) = 1$.]

г) Заключите из доказанного, что A односвязно и что оно является объединением возрастающей последовательности (D_n) открытых односвязных множеств, каждое из которых есть ограниченная компонента дополнения некоторой простой замкнутой кривой.

[Воспользуйтесь c) и e).]

Наоборот, такое объединение всегда односвязно.

г) Распространите утверждение из f) на произвольные односвязные открытые множества в $\mathbb{C}$.

[Для каждого n рассмотрите замкнутые квадраты решетки с шагом $1/n$, содержащиеся в пересечении множества A с шаром $B(0; n)$.]

h) Пусть A — открытое связное множество в $\mathbb{C}$, дополнение $\mathbb{C} \setminus A$ которого не имеет ограниченной компоненты. Покажите, что в этом случае множество A односвязно.

[Воспользуйтесь (9.8.5).]

5. Покажите, что следующие открытые в $\mathbb{C}$ множества односвязны, но их граница не является простой замкнутой кривой:

1°) множество A_1 точек $x+iy$, где $0 < x < 1$ и $-2 < y < \sin(1/x)$;

2°) множество A_2 точек $x+iy$, где $-1 < x < 0$ и $-1 < y < 1$, или $0 \leq x < 1$ и $0 < |y| < 1$.

[В каждом из этих случаев постройте возрастающую последовательность ограниченных компонент $\beta(H_n)$, где H_n — простая замкнутая кривая, такую, что объединение всех $\beta(H_n)$ есть данное открытое множество. Чтобы доказать, что граница $\text{Fr}(A_1)$ не гомеоморфна U , покажите, пользуясь (3.19.1), что она не локально связна. Чтобы доказать аналогичное свойство для $\text{Fr}(A_2)$, рассмотрите дополнение точки $z=1$ в этой границе.]

Гомеоморфны ли множества $\text{Fr}(A_1)$ и $\text{Fr}(A_2)$?

6. Пусть A — односвязное открытое множество в $\mathbb{C}$, отличное от $\mathbb{C}$. Покажите, что граница множества A содержит по крайней мере две различные точки.

[Покажите, что в противном случае $A = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. При этом, чтобы доказать, что точек, внешних для A , не существует, воспользуйтесь теоремой (3.19.9) и тем фактом, что множество $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ связно. С помощью (9.8.4) и (9.8.7) придите к требуемому заключению.]

7. Пусть γ — простая петля, определенная в промежутке $I = [0, 2]$, и пусть $H = \gamma(I)$ — соответствующая простая замкнутая кривая. Пусть α — простая траектория, определенная в промежутке $I_2 = [1, 2]$ и такая, что: $1^\circ) \alpha(1) = \gamma(1)$, $\alpha(2) = \gamma(0)$; $2^\circ) \alpha(t) \in \beta(H)$ для каждой точки $t \in]1, 2[$. Пусть $L = \alpha(I_2)$. Определим простые петли γ_1 и γ_2 в I условиями:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \gamma(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, & \gamma_1(t) = \alpha(t) & \text{при } 1 \leq t \leq 2; \\ \gamma_2(t) &= \alpha(2-t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, & \gamma_2(t) = \gamma(t) & \text{при } 1 \leq t \leq 2. \end{aligned}$$

Пусть $H_1 = \gamma_1(I)$ и $H_2 = \gamma_2(I)$.

а) Покажите, что для любой точки $z \in C$, не принадлежащей $H_1 \cup H_2$, индекс $j(z; \gamma) = j(z; \gamma_1) + j(z; \gamma_2)$.

[Воспользуйтесь (Д. 1.1).]

б) Докажите, что существуют точка $z_1 \in \beta(H)$, для которой $j(z_1; \gamma_1) = 0$, и точка $z_2 \in \beta(H)$, для которой $j(z_2; \gamma_2) = 0$.

[Воспользуйтесь утверждением б) теоремы Жордана о кривых (Д. 4.2).]

с) Выведите из а) и б), что $\beta(H)$ есть объединение множеств $\beta(H_1)$, $\beta(H_2)$ и $L \cap \beta(H)$, причем никакие два из этих множеств не имеют общей точки.

8. а) Пусть H — простая замкнутая кривая, L_k ($1 \leq k \leq n$) — n простых дуг, таких, что их концы принадлежат H , а остальные точки, отличные от концов, содержатся в $\beta(H)$. Предположим, кроме того, что никакие две из дуг L_k не имеют общих точек, принадлежащих $\beta(H)$. Тогда внутренность дополнения множества $\bigcup_{k=1}^n L_k$ имеет в $\beta(H)$ $n+1$ компоненту связности, каждая из которых является ограниченной компонентой дополнения некоторой простой замкнутой кривой в C .

[Проведите индукцию по n и воспользуйтесь задачей 7.]

б) Пусть H_1 и H_2 — две простые замкнутые кривые в C , пересечение $H_1 \cap H_2$ которых конечно. Покажите, что каждая компонента связности пересечения $\beta(H_1) \cap \beta(H_2)$ является ограниченной компонентой дополнения в C некоторой простой замкнутой кривой.

[Воспользуйтесь а).]

9. Пусть γ — простая петля в C , определенная в промежутке $I = [-1, 1]$, пусть $H = \gamma(I)$, и (для простоты) предположим, что $\gamma(0) = 0$ и что диаметр множества $H > 2$. Определим по индукции две убывающие последовательности чисел (α_n) и (ρ_n) , стремящиеся к 0, такие, что $\rho_1 = 1$, α_n есть наибольшее число > 0 , для которого выполняется неравенство $|\gamma(t)| < \rho_n$ при $|t| < \alpha_n$, и $\rho_{n+1} = \inf(1/(n+1), \delta_n)$, где δ_n — расстояние от точки 0 до множества точек $\gamma(t)$, у которых $|t| \geq \alpha_n$.

а) Докажите, что если z и z' — две точки компоненты $\beta(H)$, удовлетворяющие условию $|z| < \rho_{n+1}$ и $|z'| < \rho_{n+1}$, то существует траектория с концами z и z' , содержащаяся в пересечении $\beta(H)$ и замкнутого круга с центром 0 и радиусом ρ_n .

[Пусть L — простая ломаная линия с концами z и z' , содержащаяся в $\beta(H)$ (задача 1). Предположим сначала, что сегмент S с концами z и z' не имеет с L общих точек, отличных от z и z' . Тогда $R = L \cup S$ есть простая замк-

нутая кривая. Докажите, что если точка $t \in I$ такова, что $\gamma(t) \in \beta(R)$, то $|t| < \alpha_n$; заметьте, что пересечение $R \cap H$ содержится в S , и покажите, что если бы нашлась точка $t \in I$, для которой $\gamma(t) \in \beta(R)$ и $|t| \geq \alpha_n$, то нашлась бы и другая точка $t' \in I$, для которой $\gamma(t') \in S$ и $|t'| \geq \alpha_n$ в противоречии с определением ρ_{n+1} . Завершите доказательство в рассматриваемом случае, взяв компоненту связности пересечения множества $\beta(R)$ и открытого круга с центром 0 и радиусом ρ_n , содержащую точки, сколь угодно близкие к S , и применив к границе этой компоненты задачу 8, б). В общем случае, когда L и S имеют больше чем две общие точки, проведите индукцию по числу этих точек.]

б) Докажите, что для любой точки $x \in \beta(H)$ существует простая дуга с концами 0 и x , все точки которой, отличные от 0, содержатся в $\beta(H)$ (Теорема Шенфлиса).

[Рассмотрите последовательность (z_n) точек множества $\beta(H)$, удовлетворяющих условию $|z_n| < \rho_{n+1}$, и к двум соседним точкам этой последовательности примените а).]

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

В математике, разумеется, встречаются теоремы существования многих видов, однако в этой главе мы будем иметь дело лишь с теоремами одного вида, именно с теми, которые связаны с понятием полноты. Наиболее интуитивный результат (10.1.3) утверждает, говоря грубо, что если тождественное отображение в банаховом пространстве „слегка“ возмущено в окрестности некоторой точки дополнительным членом, то вблизи этой точки оно еще остается гомеоморфизмом. Слово „слегка“ понимается здесь во вполне определенном смысле, означаящем нечто большее, чем одну лишь „малость“ возмущающей функции (см. задачу 2 § 10.2), известные ограничения, обычно называемые условиями „липшицевского“ типа, накладываются и на скорость изменения этой функции. Ввиду этого естественное поле приложения теорем этого вида состоит из уравнений, для которых известны некоторые ограничения на производные рассматриваемых функций. Кроме того, теоремы существования, получаемые таким путем, имеют локальный характер. В следующей главе мы встретимся с теоремами существования другого типа, которые могут быть применены к глобальным задачам.

Главными приложениями общих теорем существования из 10.1 являются:

1. Теорема о неявной функции (10.2.1) вместе с ее следствием — теоремой о ранге (10.3.1), которая (локально) приводит непрерывно дифференцируемые отображения постоянного ранга в конечномерных пространствах к канонической форме.

2. Теорема существования Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (10.4.5) с различными ее усилениями и следствиями.

Обе эти теоремы входят в число наиболее полезных орудий и классического и современного анализа.

Конечно, то, что в этой и следующей главах говорится о дифференциальных уравнениях, составляет лишь очень небольшую часть этой обширной теории. Читателя, который захотел бы продвинуться дальше в этом направлении, мы отсылаем к книгам Коддингтона и Левинсона [10], Айнса [15] и Камке [17].

В качестве последнего приложения мы приводим теорему Фробениуса (10.9.4), которая в том виде, в каком она у нас высказана, возникает как естественное обобщение теоремы существования Коши на случай функций нескольких переменных. Обычно ее формулируют более геометрически: как теорему существования многообразия, имеющего в каждой точке данное „касательное пространство“. Такую формулировку и важные приложения, которые

она имеет в дифференциальной геометрии и в теории групп Ли, читатель найдет в книгах Э. Картана [7] и Шевалле [9].

Нет необходимости еще раз напоминать, что все результаты мы формулируем для функций с векторными значениями, так что, например, мы практически никогда не говорим о „системах уравнений“. Одно из достоинств „метода векторных пространств“ как раз и состоит в том, что никогда не нужно рассматривать больше, чем одно уравнение, по крайней мере при доказательстве общих теорем.

1. Метод последовательных приближений

Как и в гл. 9, K будет обозначать поле действительных или комплексных чисел, и предполагается, что в любом высказывании относительно банаховых пространств, в котором не говорится, каково поле K , речь идет всегда о банаховых пространствах над одним и тем же полем.

(10.1.1) Пусть E и F — два банаховых пространства и U (соответственно V) — открытый шар в E (соответственно в F) с центром 0 и радиусом α (соответственно β). Пусть v — непрерывное отображение произведения $U \times V$ в F , обладающее тем свойством, что при $x \in U$, $y_1 \in V$ и $y_2 \in V$ выполняется неравенство $\|v(x, y_1) - v(x, y_2)\| \leq k \cdot \|y_1 - y_2\|$, где k — константа, удовлетворяющая условию $0 \leq k < 1$. Тогда если $\|v(x, 0)\| < \beta(1 - k)$ для любой точки $x \in U$, то существует единственное такое отображение f шара U в V , что

$$(10.1.1.1) \quad f(x) = v(x, f(x))$$

для любой точки $x \in U$, и f непрерывно в U .

Покажем, что для любой точки $x \in U$ существует последовательность (y_n) точек шара V , такая, что $y_0 = 0$ и $y_n = v(x, y_{n-1})$ при любом $n \geq 1$. Нам нужно показать, что если точки y_p определены при $1 \leq p \leq n$ и принадлежат V , то $v(x, y_n) \in V$. Но тогда при $2 \leq p \leq n$ мы имеем $y_p - y_{p-1} = v(x, y_{p-1}) - v(x, y_{p-2})$, следовательно, $\|y_p - y_{p-1}\| \leq k \cdot \|y_{p-1} - y_{p-2}\|$, и индукцией по p мы заключаем, что $\|y_p - y_{p-1}\| \leq k^{p-1} \|y_1\|$. Поэтому

$$(10.1.1.2) \quad \|y_p\| \leq (1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1}) \|y_1\| \leq \frac{\|y_1\|}{1 - k} < \beta,$$

и наше утверждение доказано. Кроме того, пользуясь индукцией по n , мы можем написать $y_n = f_n(x)$, где f_n — непрерывное отображение шара U в V (3.11.5). Далее, мы имеем $\|f_n(x) - f_{n-1}(x)\| \leq k^{n-1} \beta(1 - k)$ при $x \in U$, и, значит, ряд $(f_n - f_{n-1})$ нормально сходится (7.1) в $\mathcal{F}_F(U)$.

Так как F — полное пространство, ряд $(f_n(x) - f_{n-1}(x))$ сходится для любой точки $x \in U$ и, если $f(x)$ — его сумма, отображение f непрерывно в U (7.2.1). Кроме того, применяя принцип продолжения неравенств к (10.1.1.2), получаем, что $\|f(x)\| \leq \|v(x, 0)\|/(1-k) < \beta$ для любой точки $x \in U$; поэтому f есть отображение шара U в V . Из соотношения $f_n(x) = v(x, f_{n-1}(x))$ для любой точки $x \in U$, переходя к пределу, выводим соотношение (10.1.1.1). Наконец, пусть g — другое отображение шара U в V , такое, что $g(x) = v(x, g(x))$ для любой точки $x \in U$. Тогда из этого соотношения и из (10.1.1.1) получаем

$$\|g(x) - f(x)\| = \|v(x, g(x)) - v(x, f(x))\| \leq k \cdot \|g(x) - f(x)\|$$

и, так как $k < 1$, отсюда следует, что $g(x) = f(x)$.

(10.1.2) (Теорема о неподвижной точке) Пусть F — банахово пространство и V — открытый шар в F с центром y_0 и радиусом β . Пусть v — отображение шара V в F , обладающее тем свойством, что для любой пары точек y_1, y_2 шара V выполняется неравенство $\|v(y_1) - v(y_2)\| \leq k \cdot \|y_1 - y_2\|$, где k — константа, удовлетворяющая условию $0 \leq k < 1$. Тогда если $\|v(y_0) - y_0\| < \beta(1-k)$, то существует одна и только одна такая точка $z \in V$, что $z = v(z)$.

Замечаем, что отображение v непрерывно в V , и применяем теорему (10.1.1) к отображению $(x, y) \rightarrow v(y + y_0) - y_0$, которое не зависит от x .

(10.1.3) Пусть F — банахово пространство и V — открытый шар в F с центром 0 и радиусом β . Пусть w — отображение шара V в F , обладающее тем свойством, что для любой пары точек y_1, y_2 шара V выполняется неравенство $\|w(y_1) - w(y_2)\| \leq k \cdot \|y_1 - y_2\|$, где k — константа и $0 \leq k < 1$. Тогда если $\|w(0)\| < \beta(1-k)/2$, то существует такая открытая окрестность $W \subset V$ точки 0 , что сужение на W отображения $y \rightarrow g(y) = y + w(y)$ есть гомеоморфизм окрестности W на некоторую открытую окрестность точки 0 в F .

Применим теорему (10.1.1) к $E = F$, где U — открытый шар с центром 0 и радиусом $\alpha = \beta(1-k)/2$, и к отображению $(x, y) \rightarrow v(x, y) = x - w(y)$. Условия теоремы (10.1.1) в этом случае выполняются, и поэтому существует такое непрерывное отображение f шара U в V , что $f(x) = x - w(f(x))$; иными словами, $g(f(x)) = x$ при $x \in U$. Чтобы доказать, что f есть гомеоморфизм шара U на $f(U)$, нам нужно только показать, что g есть инъективное отображение V в $g(V)$ (так как f , очевидно, инъективное отображение шара U). Но из $g(y_1) = g(y_2)$ следует $\|y_1 - y_2\| = \|w(y_1) - w(y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$, и, так как $k < 1$, $y_1 = y_2$. Следовательно, g есть гомеоморфизм множества $W = f(U)$ на U , обрат-

ный f ; при этом множество $W = g^{-1}(U)$ открыто в F , поскольку U открыто в F (3.11.4). Наконец, мы имеем $0 \in W$, ибо это условие эквивалентно условию $g(0) \in U$, которое означает, что $\|\omega(0)\| < \alpha$, а последнее неравенство эквивалентно неравенству $\|\omega(0)\| < \beta(1-k)/2$.

Задачи

1. Пусть A — компактное метрическое пространство, α — расстояние в A и v — отображение пространства A в себя, обладающее тем свойством, что для каждой пары (x, y) различных точек пространства A расстояние $d(v(x), v(y)) < d(x, y)$. Покажите, что существует такая точка $z \in A$, что $v(z) = z$.

[Проведите доказательство от противного. Рассмотрите число

$$c = \inf_{x \in A} d(x, v(x))$$

и докажете, что существует точка $y \in A$, для которой $d(y, v(y)) = c$.]

2. Пусть B — шар $\|x\| \leq 1$ в пространстве (c_0) Банаха (задача 5 § 5.3). Пусть u — непрерывное линейное отображение пространства (c_0) в себя, такое, что $u(e_n) = (1 - 1/2^{n+1})e_{n+1}$ ($n \geq 0$), и пусть $v(x) = (1/2)(1 + \|x\|)e_0 + u(x)$. Покажите, что v есть непрерывное отображение шара B в себя, обладающее тем свойством, что для любой пары (x, y) различных точек шара B норма $\|v(x) - v(y)\| < \|x - y\|$, но что не существует точки $z \in B$, для которой $v(z) = z$.

[Воспользуйтесь неравенством $\prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$ при $0 \leq \alpha_i \leq 1$.]

3. Пусть E и F — два нормированных пространства и u — линейный гомеоморфизм пространства E на подпространство $u(E)$ пространства F . Пусть $v: u(E) \rightarrow E$ — отображение, обратное u , и пусть $m = \|v\|$.

а) Пусть A — открытое множество в E и w — отображение множества A в F , обладающее тем свойством, что $\|w(x_1) - w(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$ для любых точек x_1, x_2 множества A . Покажите, что если константа k такова, что $km < 1$, то отображение $x \rightarrow f(x) = u(x) + w(x)$ есть гомеоморфизм множества A на $f(A)$. Покажите, что если вдобавок E и F являются банаховыми пространствами и $u(E) = F$, то $f(A)$ есть множество, открытое в F .

[Воспользуйтесь (10.1.3).]

б) Предположим, что w есть непрерывное линейное отображение пространства E в F , такое, что $\|w\| < 1/m$. Покажите, что в этом случае f есть линейный гомеоморфизм пространства E на $f(E)$. Далее, покажите, что для любой точки $y_0 \in u(E)$, для которой $\|y_0\| = 1$, существует такая точка $y \in f(E)$, что $\|y - y_0\| \leq m\|w\|$. Наоборот, для любой точки $y \in f(E)$, для которой $\|y\| = 1$, существует такая точка $y_0 \in u(E)$, что

$$\|y - y_0\| \leq m\|w\| / (1 - m\|w\|).$$

4. Пусть E и F — нормированные пространства и u — непрерывное линейное отображение пространства E в F , такое, что $N = u^{-1}(0)$ есть

конечномерное подпространство и что существует ¹⁾ замкнутое топологическое дополнение M подпространства N (5.4), для которого сужение отображения u на M есть гомеоморфизм M на $u(M) = u(E)$. Пусть w — непрерывное линейное отображение пространства E в F . Покажите, что если норма $\|w\|$ достаточно мала и $f = u + w$, то $f^{-1}(0)$ имеет конечную размерность, не превосходящую размерности $u^{-1}(0)$, и что существует замкнутое топологическое дополнение P подпространства $f^{-1}(0)$, для которого сужение отображения f на P есть гомеоморфизм P на $f(P) = f(E)$.

[Воспользуйтесь задачей 3, б).]

5. Пусть E — банахово пространство, F — нормированное пространство и u — линейный гомеоморфизм пространства E на такое подпространство $u(E)$, что существует топологическое дополнение Q подпространства $u(E)$ в F . Покажите, что если w — непрерывное линейное отображение пространства E в F с достаточно малой нормой $\|w\|$ и $f = u + w$, то Q является топологическим дополнением подпространства $f(E)$ в F .

[Пользуясь задачей 3, покажите, что если норма $\|w\|$ достаточно мала, то проекция пространства F на $u(E)$, если ее рассмотреть только на $f(E)$, является линейным отображением на $u(E)$.]

6. Пусть E и F — два банаховых пространства и u — такое непрерывное линейное отображение пространства E на F , что $N = u^{-1}(0)$ имеет конечную размерность p и топологическое дополнение M , для которого сужение отображения u на M есть гомеоморфизм M на $u(M) = u(E)$. Предположим, кроме того, что $u(E)$ имеет конечную коразмерность q в F . Пусть w — непрерывное линейное отображение пространства E в F . Покажите, что если норма $\|w\|$ достаточно мала, то отображение $f = u + w$ обладает тем свойством, что размерность r подпространства $f^{-1}(0)$ удовлетворяет неравенствам $p - q \leq r \leq p$ и что коразмерность подпространства $f(E)$ в F равна $q - p + r$.

[Воспользуйтесь задачами 4 и 5, а также (5.9.3).]

7. Пусть $I = [0, 1]$ и пусть P — подпространство банахова пространства $\mathcal{C}_R(I)$ (7.2), состоящее из сужений на I многочленов $x(t)$ с действительными коэффициентами. Пусть u — тождественное отображение $x \rightarrow x$ в нормированном пространстве P и пусть w — линейное отображение пространства P , ставящее каждому многочлену $x(t)$ (рассматриваемому только на I) в соответствие многочлен $x(t^2)$, рассматриваемый на I . Для любого ε , удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < 1$, линейное отображение $f = u + \varepsilon w$ есть линейный гомеоморфизм P на подпространстве $f(P)$, но коразмерность подпространства $f(P)$ в P бесконечна (ср. с задачей 6).

8. Пусть E и F — два банаховых пространства и u — непрерывное линейное отображение пространства E в F , такое, что $u(E) = F$ и что существует ¹⁾ такое число $m > 0$, что для любой точки $y \in F$ найдется точка $x \in E$, для которой $u(x) = y$ и $\|x\| \leq m \|y\|$. Пусть w — непрерывное отображение открытого шара $U = B(a; r) \subset E$ в F , обладающее тем свойством, что $\|w(x_1) - w(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|$ для любых двух точек x_1, x_2 в U . Дока-

¹⁾ Можно показать, что это последнее условие является следствием остальных (см. Н. Бурбаки [6]).

жите, что если k и $\|\varpi(a)\|$ достаточно малы, то образ $f(U)$ при непрерывном отображении $x \rightarrow f(x) = u(x) + \varpi(x)$ содержит некоторый открытый шар с центром $u(a)$.

[Воспользуйтесь тем же методом, что и в доказательстве теоремы (10.1.1)]

9. Допустим, что E, F, U, V и v удовлетворяют предположениям теоремы (10.1.1). Пусть, кроме того, φ — непрерывное отображение шара U в себя, для любой точки $x \in U$ удовлетворяющее условию $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$. Покажите, что [при условии, что $\|v(x, 0)\| < \beta(1-k)$ при $x \in U$] существует единственное такое отображение f шара U в V , что $f(x) = v(x, f(\varphi(x)))$ и что f непрерывно в U . Обобщите это утверждение на уравнения вида

$$f(x) = v(x, f(\varphi_1(x)), \dots, f(\varphi_p(x))).$$

10. Пусть E, F, U и V имеют тот же смысл, что и в (10.1.1). Предположим, что непрерывное отображение v произведения $U \times V$ в F удовлетворяет следующим условиям:

$$1^\circ) \|v(x, y_1) - v(x, y_2)\| \leq c(\|x\|^{2\mu} + \|y_1\|^{2\mu} + \|y_2\|^{2\mu}) \|y_1 - y_2\|;$$

$$2^\circ) \|v(x, 0)\| \leq c\|x\|^{1+2\mu}, \text{ где } c \text{ и } \mu \text{ — константы } > 0.$$

Пусть λ — элемент поля K , для которого $|\lambda| > 1$. Пусть, наконец, $x \rightarrow L(x)$ — непрерывное линейное отображение пространства E в F и $x \rightarrow \varphi(x)$ — непрерывное отображение шара U в себя, для которого $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$. Покажите, что существует отображение f окрестности $W \subset U$ точки 0 в V , обладающее следующими свойствами:

$$1^\circ) f \text{ удовлетворяет в } W \text{ уравнению } f(x) - \lambda f(x/\lambda) = v(x, f(\varphi(x)));$$

$$2^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - L(x)) / \|x\| = 0.$$

Далее, любые два отображения, обладающие этими свойствами, совпадают в некоторой окрестности точки 0 .

[Сведите задачу к случаю, когда $L(x) = 0$. Заметьте, что если f удовлетворяет предыдущим условиям, то в некоторой окрестности точки 0 мы должны иметь

$$(*) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v\left(\frac{x}{\lambda^n}, f\left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda^n}\right)\right)\right),$$

где ряд нормально сходится в этой окрестности. Затем, пользуясь методом доказательства теоремы (10.1.1), покажите, что в достаточно малой окрестности точки 0 существует решение уравнения (*). С помощью индукции по n покажите существование такого $r > 0$, что при $\|x\| \leq r$ выполняются неравенства $\|f_n(x)\| \leq \|x\|^{1+\mu}$ и $\|f_n(x) - f_{n-1}(x)\| \leq \|x\|^{1+n\mu}$.]

11. а) Пусть $F(x_1, \dots, x_p, y)$ — целая функция в K^{p+1} , обладающая тем свойством, что в степенном ряде, равном $F(x_1, \dots, x_p, y)$, все члены имеют полную степень ≥ 2 . Пусть φ — такое линейное отображение пространства K^p в себя, что для любой точки $x = (x_1, \dots, x_p) \in K^p$ выпол-

няется неравенство $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$. Пусть, наконец, $L(x)$ — произвольная линейная форма в K^p . Покажите, что существует единственное решение f уравнения

$$f(x) - \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = F(x, f(\varphi(x))) \quad (|\lambda| > 1),$$

определенное в некоторой окрестности точки 0 и такое, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - L(x)) / \|x\| = 0.$$

Покажите, далее, что это решение есть целая функция в K^p .

[Примените задачу 10 к окрестности точки 0; сведите задачу к случаю $K = \mathbb{C}$ и, чтобы доказать, что f — целая функция, воспользуйтесь (9.12.1) и (9.4.2).]

б) Покажите, что не существует решения уравнения $f(x) - \lambda f(x/\lambda) = x$ ($\lambda > 1$), определенного в некоторой окрестности точки 0 в $\mathbb{R}$ и такого, что частное $f(x)/x$ ограничено в окрестности точки 0.

12. Пусть $I = [0, a]$, $H = [-b, b]$ и пусть f — действительная непрерывная функция в $I \times H$. Положим

$$M = \sup_{(x, y) \in I \times H} |f(x, y)|; \quad J = [0, \inf(a, b/M)].$$

а) Для любой точки $x \in J$ пусть $E(x)$ есть множество таких точек $y \in H$, для которых $y = xf(x, y)$. Покажите, что $E(x)$ есть непустое замкнутое множество. Покажите, что если $g_1(x) = \inf(E(x))$ и $g_2(x) = \sup(E(x))$, то $g_1(0) = g_2(0) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g_1(x)/x = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g_2(x)/x = f(0, 0)$.

Если $g_1 = g_2 = g$ в J , то функция g непрерывна (ср. с задачей 5 § 3.20).

б) Предположим, что $a = b = 1$. Пусть E — объединение семейства сегментов $S_n: x = 1/2^n$, $1/4^{n+1} \leq y \leq 1/4^n$ ($n \geq 0$), сегментов $S'_n: y = 1/4^n$, $1/2^n \leq x \leq 1/2^{n-1}$ ($n \geq 1$) и точки $(0, 0)$. Определим функцию $f(x, y)$ следующим образом: $f(0, y) = 0$; при $1/2^n < x \leq 1/2^{n-1}$ и $y \leq 1/4^n$ полагаем $f(x, y) = (y/x + d((x, y), E))^+$; при $1/2^n < x \leq 1/2^{n-1}$ и $1/4^n \leq y \leq x^2$ полагаем $f(x, y) = y/x - d((x, y), E)$ и, наконец, при $1/2^n < x \leq 1/2^{n-1}$ и $y \geq x^2$ полагаем $f(x, y) = x - d((x, x^2), E)$, $n \geq 1$. Покажите, что функция f непрерывна, но что не существует функции g , непрерывной в некоторой окрестности точки 0 в I и такой, что $g(x) = xf(x, g(x))$ в этой окрестности.

с) Пусть u_0 — непрерывное отображение промежутка J в H . По индукции определим отображения $u_n(x) = xf(x, u_{n-1}(x))$ при $n \geq 1$; u_n являются непрерывными отображениями промежутка J в H . Допустим, в обозначениях задачи а), что в промежутке $[0, c] \subseteq J$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}(x) - u_n(x)) = 0$ для каждой точки x и $g_1(x) = g_2(x)$. Покажите, что при $0 \leq x \leq c$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = g_1(x)$. Примените этот критерий к двум следующим случаям:

1°) существует такое $k > 0$, что при $x \in I$, $z_1 \in H$ и $z_2 \in H$ выполняется неравенство $|f(x, z_1) - f(x, z_2)| \leq k|z_1 - z_2|$ [ср. с (10.1.1)];

2°) при $0 < x \leq \gamma \leq a$, $z_1 \in H$ и $z_2 \in H$ выполняется неравенство $|f(x, z_1) - f(x, z_2)| < |z_1 - z_2|/x$.

д) Если f — функция, определенная в б), то последовательность $(u_n(x))$ сходится в каждой точке $x \in I$ к предельной функции, которая не непрерывна.

е) Положим $a = b = 1$; $f(x, y) = y/x$ при $0 < x \leq 1$, $|y| \leq x^2$; $f(x, y) = x$ при $0 \leq x \leq 1$, $y \geq x^2$; $f(x, y) = -x$ при $0 \leq x \leq 1$, $y \leq -x^2$. Любая функция g , непрерывная в I и удовлетворяющая условию $|g(x)| \leq x^2$, является решением уравнения $g(x) = xf(x, g(x))$, хотя при $0 < x \leq 1$, $z_1 \in H$ и $z_2 \in H$ выполняется неравенство $|f(x, z_1) - f(x, z_2)| \leq |z_1 - z_2|/x$. При любом выборе u_0 последовательность (u_n) равномерно сходится к такому решению.

ф) Определим f , как и в е), и пусть $f_1(x, y) = -f(x, y)$. Функция 0 есть единственное решение уравнения $g(x) = xf_1(x, g(x))$, но существует непрерывная функция u_0 , для которой последовательность $(u_n(x))$ не сходится ни для какой точки $x \neq 0$, несмотря на то, что при $0 < x \leq 1$, $z_1 \in H$ и $z_2 \in H$ выполняется неравенство $|f_1(x, z_1) - f_1(x, z_2)| \leq |z_1 - z_2|/x$.

13. Обобщите результаты задач 12, а) и с) на случай, когда промежуток H заменяется кругом с центром $(0, 0)$ в $\mathbb{R}^2$.

[Воспользуйтесь результатом задачи 3 § 10.2.]

2. Неявные функции

(10.2.1) (Теорема о неявной функции) Пусть E , F и G — три банаховых пространства и f — непрерывно дифференцируемое отображение (8.9) открытого подмножества A произведения $E \times F$ в G . Пусть (x_0, y_0) — такая точка множества A , что $f(x_0, y_0) = 0$ и что частная производная $D_2f(x_0, y_0)$ есть линейный гомеоморфизм пространства F на G . Тогда существует такая открытая окрестность U_0 точки x_0 в E , что для каждой открытой связной окрестности U точки x_0 , содержащейся в U_0 , существует единственное непрерывное отображение u окрестности U в F , такое, что $u(x_0) = y_0$, $(x, u(x)) \in A$ и $f(x, u(x)) = 0$ для любой точки $x \in U$. Кроме того, отображение u непрерывно дифференцируемо в U и его производная определяется формулой

$$(10.2.1.1) \quad u'(x) = -(D_2f(x, u(x)))^{-1} \circ (D_1f(x, u(x))).$$

Пусть T_0 — линейный гомеоморфизм $D_2f(x_0, y_0)$ пространства F на G и T_0^{-1} — обратный линейный гомеоморфизм. Запишем соотношение $f(x, u) = 0$ в эквивалентной форме

$$(10.2.1.2) \quad u = y - T_0^{-1} \cdot f(x, u)$$

и обозначим через $g(x, y)$ правую часть (10.2.1.2). Докажем, что к отображению

$$(x', y') \rightarrow g(x_0 + x', y_0 + y') - y_0$$

произведения $E \times F$ в F в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$ можно применить теорему (10.1.1). Так как, по определению, $T_0^{-1} \circ T_0 = 1$, то для любых двух точек (x, y_1) и (x, y_2) в A мы можем написать

$$\begin{aligned} g(x, y_1) - g(x, y_2) &= \\ &= T_0^{-1} \cdot (D_2 f(x_0, y_0) \cdot (y_1 - y_2) - (f(x, y_1) - f(x, y_2))), \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $\|T_0^{-1}\| \leq 1/2$. Так как отображение f непрерывно дифференцируемо в A , то из (8.6.2) и (8.9.1) следует, что существует такой шар U_0 (соответственно V_0) с центром x_0 (соответственно y_0) и радиусом α (соответственно β) в E (соответственно в F), что при $x \in U_0$, $y_1 \in V_0$ и $y_2 \in V_0$ выполняется неравенство

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2) - D_2 f(x_0, y_0) \cdot (y_1 - y_2)\| \leq \varepsilon \|y_1 - y_2\|;$$

поэтому для любых точек $x \in U_0$, $y_1 \in V_0$ и $y_2 \in V_0$ выполняется неравенство $\|g(x, y_1) - g(x, y_2)\| \leq \varepsilon \|T_0^{-1}\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|/2$. С другой стороны, $g(x, y_0) - y_0 = -T_0^{-1} \cdot f(x, y_0)$ и, так как $f(x_0, y_0) = 0$ и f непрерывно, мы можем взять α столь малым, чтобы при $x \in U_0$ выполнялось неравенство $\|g(x, y_0) - y_0\| \leq \beta/2$. Таким образом, мы можем применить теорему (10.1.1), из которой следует существование и единственность такого отображения u окрестности U_0 в V_0 , что $f(x, u(x)) = 0$ для каждой точки $x \in U_0$. Поскольку $f(x_0, y_0) = 0$, это, в частности, дает $u(x_0) = y_0$. Наконец, отображение u непрерывно в U_0 .

Докажем, далее, что если $U \subset U_0$ — связная открытая окрестность точки x_0 , то u есть единственное непрерывное отображение окрестности U в F , для которого $u(x_0) = y_0$, $(x, u(x)) \in A$ и $f(x, u(x)) = 0$. Пусть v — второе отображение, удовлетворяющее этим условиям; рассмотрим множество $M \subset U$ точек x , в которых $u(x) = v(x)$. Это множество, по определению, содержит x_0 и замкнуто (3.15.1). Нам нужно, таким образом, только доказать, что M открыто (3.19). Но, по предположению, отображение $x \rightarrow D_2 f(x, u(x))$ непрерывно в U_0 , поэтому (заменяя, если требуется, U_0 меньшей окрестностью) мы можем считать в силу (8.3.2), что $D_2 f(x, u(x))$ при $x \in U_0$ есть линейный гомеоморфизм пространства F на G . Пусть $a \in M$. Первая часть доказательства показывает, что существуют такая открытая окрестность $U_a \subset U$ точки a и такая открытая окрестность $V_a \subset V$ точки $b = u(a)$, что $u(x)$ для любой точки $x \in U_a$ есть единственное решение y уравнения $f(x, y) = 0$, для которого $y \in V_a$. Однако, так как отображение v

непрерывно в точке a и $v(a) = u(a)$, существует такая окрестность W точки a , содержащаяся в U_a , что при $x \in W$ имеем $v(x) \in V_a$. Предыдущее замечание тогда показывает, что $v(x) = u(x)$ при $x \in W$, а это доказывает, что M открыто, и, значит, $u = v$ в U .

Покажем, наконец, что если α взято достаточно малым, то отображение u непрерывно дифференцируемо в U_0 . Положим $t = u(x+s) - u(x)$, где x и $x+s$ принадлежат U_0 . По предположению, $f(x+s, u(x)+t) = 0$ и t стремится к 0, когда s стремится к 0. Поэтому для данной точки $x \in U_0$ и для любого $\delta > 0$ существует такое $r > 0$, что из $\|s\| \leq r$ следует

$$\|f(x+s, u(x)+t) - f(x, u(x)) - S(x) \cdot s - T(x) \cdot t\| \leq \delta(\|s\| + \|t\|),$$

где $S(x) = D_1 f(x, u(x))$ и $T(x) = D_2 f(x, u(x))$ (8.9.1). По определению, это эквивалентно неравенству

$$\|S(x) \cdot s + T(x) \cdot t\| \leq \delta(\|s\| + \|t\|),$$

и так как $T(x)$ есть линейный гомеоморфизм пространства F на G , то из последнего неравенства получаем

$$(10.2.1.3) \quad \|(T^{-1}(x) \circ S(x)) \cdot s + t\| \leq \delta \|T^{-1}(x)\|(\|s\| + \|t\|).$$

Допустим, что δ выбрано так, что $\delta \|T^{-1}(x)\| \leq 1/2$. Тогда, если мы положим $a = 2 \|T^{-1}(x) \circ S(x)\| + 1$, то из (10.2.1.3) будет следовать, что

$$\|t\| - \frac{a-1}{2} \|s\| \leq \frac{1}{2} (\|t\| + \|s\|),$$

т. е. $\|t\| \leq a \|s\|$, и, следовательно,

$$\|t + (T^{-1}(x) \circ S(x)) \cdot s\| \leq \delta(a+1) \|T^{-1}(x)\| \cdot \|s\|,$$

как только $\|s\| \leq r$. По определению t это доказывает, что u дифференцируемо в точке x и имеет производную, определяемую формулой (10.2.1.1). Ввиду (8.3.2) и (8.3.1) формула (10.2.1.1) тогда доказывает, что отображение u непрерывно дифференцируемо в U_0 .

Сформулируем в явном виде наиболее важный частный случай теоремы (10.2.1), т. е. случай, когда $E = K^m$ и $F = G = K^n$ — конечномерные пространства.

(10.2.2) Пусть мы имеем n скалярных функций f_i , определенных и непрерывно дифференцируемых в окрестности $U \times V$ точки $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$ произведения $E \times F$, таких, что $f_i(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) = 0$ при $1 \leq i \leq n$ и что якобиан $\partial(f_1, \dots, f_n)/\partial(y_1, \dots, y_n)$ не равен 0 в этой точке. Тогда существует такая открытая окрестность $W_0 \subset U$ точки $(a_1, \dots, a_m)$, что для любой связной открытой окрестно-

сти $W \subset W_0$ точки $(a_1, \dots, a_m)$ существует единственная система n скалярных функций g_i ($1 \leq i \leq n$), определенных и непрерывных в W и таких, что $g_i(a_1, \dots, a_m) = b_i$ при $1 \leq i \leq n$ и

$$f_i(x_1, \dots, x_m, g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)) = 0$$

для $1 \leq i \leq n$ и любой точки $(x_1, \dots, x_m) \in W$. Кроме того, функции g_i непрерывно дифференцируемы в W и матрица Якоби $(D_j g_i(x))$ равна $-B^{-1}A$, где A (соответственно B) получается из матрицы Якоби $(\partial f_i / \partial x_k)$ (соответственно $\partial f_i / \partial y_j$) при замене y_i на $g_i(x_1, \dots, x_m)$ ($1 \leq i \leq n$).

(10.2.3) Если выполняются предположения теоремы (10.2.1) и если, кроме того, отображение f непрерывно дифференцируемо p раз в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , то отображение и непрерывно дифференцируемо p раз в некоторой окрестности точки x_0 .

Индукцией по k докажем, что при $1 \leq k \leq p$ отображение и непрерывно дифференцируемо k раз. При $k=1$ это следует из (10.2.1). Кроме того, $u'(x) = F(x, u(x))$, где отображение $F(x, y) = -(D_2 f(x, y))^{-1} \circ (D_1 f(x, y))$ в силу (8.12.9), (8.12.11) и (8.12.10) $p-1$ раз непрерывно дифференцируемо. В силу (8.12.10) отсюда следует, что производная u' непрерывно дифференцируема $k-1$ раз (при $k \leq p$), и это на основании (8.12.5) означает, что отображение u непрерывно дифференцируемо k раз.

(10.2.4) Предположим, что пространства E , F и G конечномерны и что отображение f аналитично в A . Тогда отображение и является аналитическим в некоторой окрестности точки x_0 .

Если поле скаляров K есть $\mathbb{C}$, то утверждение следует из (10.2.1) и из (9.10.1).

Предположим теперь, что $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^m$ и $F = G = \mathbb{R}^n$. Тогда существует такое открытое множество $B \subset \mathbb{C}^{m+n}$, что $B \cap \mathbb{R}^{m+n} = A$, и аналитическое отображение g множества B в $\mathbb{C}^n$, являющееся продолжением f (9.4.5). Отождествляя $D_2 f$ и $D_2 g$ с матрицами Якоби, видим, что $D_2 g(x_0, y_0)$ преобразует базис пространства $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ в базис пространства $\mathbb{R}^n$, и эти базисы являются также базисами пространства $\mathbb{C}^n$ над $\mathbb{C}$. Поэтому $D_2 g(x_0, y_0)$ есть линейный гомеоморфизм пространства $\mathbb{C}^n$ на себя. Таким образом, мы можем применить к g теорему (10.2.1), и из нее будет следовать существование и единственность такого аналитического отображения v окрестности W точки x_0 в $\mathbb{C}^m$, что $g(z, v(z)) = 0$ и $v(x_0) = y_0$. Кроме того, из формулы (10.2.1.1) с помощью индукции по $|v|$ следует, что все производные $D^k v$ в точке x_0 отображают пространство $\mathbb{R}^m$ в про-

пространство $\mathbb{R}^n$ [так как все производные отображения g в точке (x_0, y_0) равны соответствующим производным отображения f]. Поэтому в силу (9.3.5.1) v отображает окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$, и та часть теоремы (10.2.1), которая относится к единственности, таким образом, доказывает, что сужение отображения v на $W \cap \mathbb{R}^m$ тождественно с u , ч. т. д.

Одним из наиболее важных приложений теоремы (10.2.1) является следующая теорема:

(10.2.5) Пусть E и F — два банаховых пространства и f — непрерывно дифференцируемое отображение окрестности V точки $x_0 \in E$ в F . Если $f'(x_0)$ есть линейный гомеоморфизм пространства E на F , то существует такая открытая окрестность $U \subset V$ точки x_0 , что сужение отображения f на U есть гомеоморфизм окрестности U на некоторую открытую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$ в F . Далее, если f непрерывно дифференцируемо в U p раз (соответственно аналитично в U , причем E и F конечномерны), то обратное отображение g окрестности $f(U)$ на U непрерывно дифференцируемо p раз (соответственно аналитично) в $f(U)$.

Применим теорему (10.2.1) к функции $h(x, y) = f(x) - y$, поменяв роли x и y . Так как $D_1 h(x_0, y_0) = f'(x_0)$, мы заключаем, что существуют открытый шар W с центром y_0 в F и такое непрерывное отображение g шара W в E , что $g(W) \subset U$, $f(g(y)) = y$ в W и $g(y_0) = x_0$. Далее, в силу (10.2.3) [соответственно (10.2.4)], если отображение f непрерывно дифференцируемо p раз (соответственно аналитично), то и отображение g непрерывно дифференцируемо p раз (соответственно аналитично). Из тождества $f(g(y)) = y$ следует, что отображение g на W взаимно однозначно и, значит, является биективным отображением шара W на $A = g(W) \subset U$. Кроме того, множество $g(W) = f^{-1}(W)$ открыто в E и f является гомеоморфизмом множества $A = g(W)$ на W , что и завершает доказательство.

Задачи

1. Пусть E и F — два банаховых пространства, A — открытая окрестность точки $x_0 \in E$ и f — непрерывное отображение окрестности A в F , дифференцируемое в точке x_0 (но не обязательно дифференцируемое в остальных точках окрестности A). Предположим, что $f'(x_0)$ есть линейный гомеоморфизм пространства E на его образ в F . Покажите, что существует такая окрестность $U \subset A$ точки x_0 , что $f(x) \neq f(x_0)$ для каждой точки $x \in U$, отличной от x_0 .

[Заметьте, что из предположения следует существование такой константы $c > 0$, что $\|f'(x_0) \cdot s\| \geq c \|s\|$ для всех точек $s \in E$ (5.5.1).]

2. Пусть $f = (f_1, f_2)$ — отображение пространства $\mathbb{R}^2$ в себя, определяемое следующим образом: $f_1(x_1, x_2) = x_1$; $f_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ при $x_1^2 \leq x_2$;

$f_2(x_1, x_2) = (x_2^2 - x_1^2 x_2)/x_1^2$ при $0 \leq x_2 \leq x_1^2$ и, наконец, $f_2(x_1, -x_2) = -f_2(x_1, x_2)$ при $x_2 \geq 0$. Покажите, что отображение f дифференцируемо в каждой точке пространства $\mathbb{R}^2$. В точке $(0,0)$ производная Df есть тождественное отображение пространства $\mathbb{R}^2$ на себя, но производная Df не непрерывна. Покажите, что в каждой окрестности точки $(0,0)$ существует такая пара различных точек x' и x'' , что $f(x') = f(x'')$ [ср. с (10.2.5)].

3. Пусть B — единичный круг $\|z\| \leq 1$ в $\mathbb{C}$ и пусть $z \rightarrow f(z) = z + g(z)$ — непрерывное отображение круга B в $\mathbb{C}$, для каждой точки z , для которой $|z| = 1$, удовлетворяющее условию $|g(z)| < |z|$. Покажите, что $f(B)$ есть окрестность точки 0 в $\mathbb{C}$ (теорема Брауэра для плоскости¹⁾).

[Пусть γ — петля $t \rightarrow f(e^{it})$, определенная в промежутке $[0, 2\pi]$. Покажите, что для всех точек x некоторой окрестности V точки 0 индекс $j(x; \gamma) = 1$ (см. доказательство теоремы (9.8.3)). Пользуясь тем фактом, что в B петля γ гомотопна 0, заключите, что в V не существует точки, принадлежащей дополнению множества $f(B)$.]

4. Пусть E и F — два банаховых пространства и B — единичный открытый шар $\|x\| < 1$ в E . Пусть u_0 — непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм шара B на некоторую окрестность точки 0 в F , для которого $u_0(0) = 0$. Предположим, что обратный гомеоморфизм u_0^{-1} непрерывно дифференцируем в шаре $V_0: \|u\| < r$, содержащемся в $u_0(B)$, и что производная Du_0 ограничена в B , а производная Du_0^{-1} ограничена в V_0 . Пусть V — шар $\|u\| < \beta$, где $\beta < r$.

а) Покажите, что для любого $\alpha < 1$ существует такая окрестность H отображения u_0 в пространстве $\mathcal{D}_F^{(1)}(B)$ (задача 8 § 8.12), что для любого отображения $u \in H$ сужение этого отображения на $U: \|x\| < \alpha$ есть гомеоморфизм шара U на открытое множество пространства F , содержащее V , такой, что сужение гомеоморфизма u^{-1} на V есть непрерывно дифференцируемое отображение $\Phi(u)$ шара V в E .

[Воспользуйтесь (10.1.1).]

б) Покажите, что отображение $u \rightarrow \Phi(u)$ окрестности H в пространство $\mathcal{D}_E^{(1)}(V)$ дифференцируемо в точке u_0 и что его производная в точке u_0 есть линейное отображение $s \rightarrow -(u_0' \circ \Phi(u_0))^{-1} \cdot (s \circ \Phi(u_0))$.

5. Пусть E и F — два банаховых пространства и f — непрерывно дифференцируемое отображение окрестности V точки $x_0 \in E$ в F . Предположим, что существуют такие два числа $\beta > 0$ и $\lambda > 0$, что: 1°) $\|f(x_0)\| < \beta/2\lambda$; 2°) колебание производной f' в шаре $U: \|x - x_0\| < \beta$ не превосходит $1/2\lambda$; 3°) для каждой точки $x \in U$ производная $f'(x)$ есть линейный гомеоморфизм пространства E на пространство F , удовлетворяющий условию $\|(f'(x))^{-1}\| \leq \lambda$. Пусть (z_n) — произвольная последовательность точек шара U . Покажите, что существует такая последовательность $(x_n)_{n \geq 0}$ точек шара U , что $x_{n+1} = x_n - (f'(z_n))^{-1} \cdot f(x_n)$ при $n \geq 0$. Докажите, что эта последователь-

¹⁾ Можно показать, что тот же результат будет верен и для любого пространства $\mathbb{R}^n$, причем B — евклидов шар $\|x\| \leq 1$, и условие, налагаемое на g , имеет вид $\|g(x)\| < \|x\|$ при $\|x\| = 1$.

ность (x_n) сходится к точке $u \in U$, являющейся единственным решением уравнения $f(x) = 0$ в U (метод приближений Ньютона).

[С помощью (8.6.2) докажите индукцией по n , что $\|x_n - x_{n-1}\| < 2^{-n}\beta$ и $\|f(x_n)\| < \beta/2^{n+1}\lambda$.]

6. Пусть E и F — два конечномерных векторных пространства над K , A — связное открытое множество в E и f — непрерывно дифференцируемое отображение произведения $A \times F$ в F . Предположим, что множество Γ пар $(x, y) \in A \times F$, для которых $f(x, y) = 0$, не пусто и что для любой пары $(x, y) \in \Gamma$ частная производная $D_2 f(x, y)$ есть обратимое линейное отображение пространства F на себя.

а) Покажите, что для каждой точки $(x_0, y_0) \in \Gamma$ существует такая открытая окрестность V этой точки в Γ , что сужение проекции pr_1 на V есть гомеоморфизм окрестности V на некоторый шар с центром x_0 , содержащийся в A .

[Воспользуйтесь тем фактом, что существуют такой открытый шар U с центром x_0 в A и такой открытый шар W с центром y_0 в F , что для каждой точки $x \in U$ уравнение $f(x, y) = 0$ имеет единственное решение $y \in W$, и примените теорему (10.2.1).]

б) Выведите из а), что каждая компонента связности G множества Γ (3.19) открыта в Γ и что множество $\text{pr}_1(G)$ открыто в A . Не обязательно должно быть $\text{pr}_1(\Gamma) = A$ [как показывает пример $A = E = F = \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^2 - 1$]. Не обязательно также в случае, когда $\text{pr}_1(\Gamma) = A$, должно быть $\text{pr}_1(G) = A$ для каждой компоненты связности G множества Γ [как показывает пример $A = E = F = \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^2 - y$]. Докажите, что если множество $\text{pr}_2(\Gamma)$ ограничено в F , то $\text{pr}_1(G) = A$ для каждой компоненты связности G множества Γ .

[Покажите, что если x_0 — точка прикосновения множества $\text{pr}_1(G)$ в A , то существует такая последовательность (x_n, y_n) точек множества G , что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ и что в F существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$; затем примените а).]

с) Понятия *траектории, петли, гомотопии и петлевой гомотопии* в A определяются так же, как в 9.6, только C заменяется пространством E . Предположим, что существует такая компонента связности G множества Γ , что $\text{pr}_1(G) = A$. Покажите, что если γ — траектория в A , определенная в промежутке $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, то существует такое непрерывное отображение u промежутка I в G , что $\text{pr}_1(u(t)) = \gamma(t)$ для каждой точки $t \in I$.

[Рассмотрите в I нижнюю грань s множества тех точек ξ , для которых существует непрерывное отображение u_ξ промежутка $[a, \xi]$ в G , обладающее тем свойством, что $\text{pr}_1(u_\xi(t)) = \gamma(t)$ при $a \leq t \leq \xi$, и воспользуйтесь а).]

Всегда ли это отображение единственно?

[Рассмотрите случай $E = F = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C} - \{0\}$ и $f(x, y) = y^2 - x$.]

Покажите, что если два непрерывных отображения u и v промежутка I в G обладают тем свойством, что $\text{pr}_1(u(t)) = \text{pr}_1(v(t)) = \gamma(t)$ для каждой точки $t \in I$, и если они равны для одного значения $t \in I$, то $u = v$.

д) Пусть при тех же предположениях, что и в с), φ — непрерывное отображение произведения $I \times J$ в A , где $J = [c, d] \subset \mathbb{R}$. Пусть v — такое непре-

рывное отображение промежутка J в G , что $\text{pr}_1(v(\xi)) = \varphi(a, \xi)$ при $\xi \in J$, и пусть для каждой точки $\xi \in J$ u_ξ есть единственное непрерывное отображение промежутка I в G , такое, что $\text{pr}_1(u_\xi(t)) = \varphi(t, \xi)$ при $t \in I$ и $u_\xi(a) = v(\xi)$. Покажите, что отображение $(t, \xi) \rightarrow u_\xi(t)$ непрерывно в $I \times J$.

[Для данной точки $\xi \in J$ существует такое число $r > 0$, что для любой точки $t \in I$ пересечение V_t множества Γ с замкнутым шаром в $E \times F$ с центром $u_\xi(t)$ и радиусом r содержится в G и обладает тем свойством, что проекция pr_1 есть гомеоморфизм V_t на замкнутый шар в E с центром $\gamma(t)$ и радиусом r . Если $L = u_\xi(I)$, то пусть M означает верхнюю грань нормы $\|(D_2 f(x, y))^{-1} \circ (D_1 f(x, y))\|$ для всех точек $(x, y) \in G$, находящихся на расстоянии $\leq r$ от L . Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $\varepsilon < r/4$ и $\varepsilon M < r/4$. Покажите, что если δ таково, что из $|\xi - \zeta| \leq \delta$ следует $\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \zeta)\| \leq \varepsilon$ при $t \in I$, то из $|\xi - \zeta| \leq \delta$ при $t \in I$ следует $\|u_\xi(t) - u_\zeta(t)\| \leq r/4$. Докажите это, рассмотрев верхнюю грань точек $t \in I$, для которых имеет место это неравенство, и применив (10.2.1).]

е) Заключите из d), что если петля γ , определенная в промежутке $I = [a, b]$, петельно гомотопна в A точке, то любое непрерывное отображение u промежутка I в G , для которого $\text{pr}_1(u(t)) = \gamma(t)$ при $t \in I$, обладает тем свойством, что $u(b) = u(a)$. В частности, если A односвязно (т. е. если любая петля в A гомотопна в A точке), то проекция pr_1 есть гомеоморфизм G на A , т. е. существует единственное непрерывно дифференцируемое отображение g множества A в F , такое, что $f(x, g(x)) = 0$ в A и что точка $(x, g(x))$ принадлежит G для по крайней мере одной точки $x \in A$.

7. Покажите, что в обозначениях задачи 6 условие $\text{pr}_1(G) = A$ удовлетворяется для каждой компоненты связности G множества Γ в каждом из следующих случаев:

1°) $f(x, y) = f_1(y) - f_2(x, y)$ и существуют такие числа $R > 0$, $k > 0$ и $h > 0$ и такая положительная непрерывная функция $x \rightarrow H(x)$ в A , что при $\|y\| \geq R$ выполняются неравенства $\|f_1(y)\| \geq \|y\|^k$ и $\|f_2(x, y)\| \leq H(x)\|y\|^{k-h}$.

2°) $F = \mathbb{C}$, E — векторное пространство над $\mathbb{C}$ и $f(x, y) = e^y - g(x)$, где g — аналитично в A и $g(x) \neq 0$ в A .

[Это последнее условие уже обеспечивает, что $\text{pr}_1(\Gamma) = A$. Заметим, что из $f(x, y) = f(x, y')$ следует, что число $y' - y$ является кратным числа $2\pi i$; поэтому для любой точки $x \in A$ существует такой открытый шар U с центром x , содержащийся в A , что для любой компоненты связности V пересечения $\text{pr}_1^{-1}(U) \cap \Gamma$ проекция pr_1 есть гомеоморфизм множества V на U . Если x — точка прикосновения множества $\text{pr}_1(G)$, то множество G должно иметь общую точку с одной из этих компонент V и, значит, содержать V .]

8. а) Покажите, что если f — комплексная целая функция в $\mathbb{C}^p$, такая, что $f(x) \neq 0$ для каждой точки $x \in \mathbb{C}^p$, то существует такая комплексная целая функция g в $\mathbb{C}^p$, что $f(x) = e^{g(x)}$ (ср. с задачей 7).

б) Пусть f — произвольная комплексная целая функция в $\mathbb{C}$, не равная тождественно 0. Существует такая конечная или бесконечная последовательность (a_n) (где $n \geq 1$) комплексных чисел (которая может оказаться и пустой),

что $|a_n| \leq |a_{n+1}|$, $f(a_n) = 0$ для каждой точки $c \in C$, для которой $f(c) = 0$, и число номеров n , при которых $a_n = c$, равно порядку $\omega(c; f)$; в случае когда эта последовательность (a_n) бесконечна, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ (9.1.5). Пока-

жите (в обозначениях задачи 1 § 9.12), что существует такая целая функция g ,

$$\text{что } f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E(z/a_n, n-1).$$

9. Пусть A и B — две открытые окрестности точки 0 в пространстве $E = C^p$, причем окрестность A связна. Пусть $(x, y) \rightarrow U(x, y)$ — аналитическое отображение произведения $A \times B$ в пространство $\mathcal{L}(E; E)$ (отождествленное с пространством матриц размера $p \times p$ с комплексными коэффициентами).

а) Предположим, что существует такая последовательность (u_n) аналитических отображений окрестности A в B , что $u_0(x) = 0$ в A и $u_n(x) = U(x, u_{n-1}(x)) \cdot x$ в A при $n \geq 1$. Предположим также, что для каждого компактного множества $L \subset A$ сужения отображений u_n на L образуют относительно компактное подмножество пространства $\mathcal{E}_E(L)$. Докажите, что последовательность (u_n) равномерно сходится на любом компактном подмножестве окрестности A к такому аналитическому отображению v окрестности A в B , что $v(x) = U(x, v(x)) \cdot x$ в A . Кроме того, v есть единственное отображение, удовлетворяющее этому уравнению.

[Воспользуйтесь (10.2.1) и (9.13.2).]

б) Предположим, что A и B — открытые шары в E с центром 0 и радиусами a и b . Пусть φ — такое непрерывное отображение произведения $[0, a[\times]0, b[$ в $\mathbb{R}$, что функция $\eta \rightarrow \varphi(\xi, \eta)$ для каждой точки $\xi \in [0, a[$ является возрастающей на промежутке $]0, b[$, и предположим, что $\|U(x, y)\| \leq \varphi(\|x\|, \|y\|)$ в $A \times B$. Предположим, кроме того, что существует такое непрерывное отображение θ промежутка $[0, a[$ в промежуток $[0, b[$, что $\theta(\xi) = \varphi(\xi, \theta(\xi)) \xi$ в $[0, a[$. Докажите, что при этих условиях существует единственное аналитическое отображение v шара A в B , такое, что $v(x) = U(x, v(x)) \cdot x$ в A и что $\|v(x)\| \leq \theta(\|x\|)$ в A .

[Воспользуйтесь а); существование отображений u_n докажите индукцией по n .]

с) Предположим, что шары A и B определены, как в б). Пусть $\psi(\eta)$ — верхняя грань нормы $\|U(x, y)\|$ при $\|x\| < a$ и $\|y\| < \eta$, где $\eta > 0$, и положим $\psi(0) = \psi(0+)$. Допустим, что $\psi(0) > 0$ и что функция $\eta \rightarrow \eta/\psi(\eta)$ возрастает в некотором промежутке $[0, \gamma]$, где $\gamma \leq b$ и $\gamma/\psi(\gamma) \leq a$. Тогда существует единственное аналитическое отображение v открытого шара P с центром 0 и радиусом $\gamma/\psi(\gamma)$ в B , такое, что $v(x) = U(x, v(x)) \cdot x$ в P .

10. Пусть f и g — две комплексные аналитические функции в некоторой окрестности замкнутого цилиндра $P \subset \mathbb{C}^2$ с центром $(0, 0)$ и радиусами a и b . Пусть M (соответственно N) — верхняя грань $|f(x, y)|$ (соответственно $|g(x, y)|$) при $|x| = a$ и $|y| \leq b$ (соответственно при $|x| \leq a$ и $|y| = b$). Тогда существуют две однозначно определенные функции $u(s, t)$ и $v(s, t)$, аналитические при $|s| < a/M$ и $|t| < b/N$ и такие, что $(u(s, t), v(s, t)) \in P$,

когда точка (s, t) принадлежит полицилиндру Q , определяемому предыдущими неравенствами, и что

$$u(s, t) - sf(u(s, t), v(s, t)) = 0 \quad \text{и} \quad v(s, t) - tg(u(s, t), v(s, t)) = 0$$

в Q . Пусть, далее,

$$\Delta(x, y, s, t) = \begin{vmatrix} 1 - s \frac{\partial f}{\partial x} & -s \frac{\partial f}{\partial y} \\ -t \frac{\partial g}{\partial x} & 1 - t \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

и пусть $h(x, y, s, t)$ — произвольная аналитическая функция в $P \times Q$. Покажите, что

$$\frac{h(u(s, t), v(s, t), s, t)}{\Delta(u(s, t), v(s, t), s, t)} = \sum_{m \geq 0, n \geq 0} c_{mn} s^m t^n$$

при $(s, t) \in Q$, где c_{mn} — значение функции

$$\frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [h(x, y, s, t) (f(x, y))^m (g(x, y))^n]$$

при $x = y = 0$ и ряд в правой части равенства сходится в Q . Заметим, что коэффициенты c_{mn} зависят от s и t , если от них зависит h (формула обращения Лагранжа).

[Сначала примените теорему Руше (9.17.3) к функции $x - sf(x, y)$, рассматриваемой как функция от x ; в силу (10.2.4) она определит аналитическую функцию $w(s, y)$, для которой $w(s, y) - sf(w(s, y), y) = 0$. Затем подобным же образом примените теорему Руше к функции $y - tg(w(s, y), y)$, рассматриваемой как функция от y . Пусть, наконец, γ и δ — контуры $\theta \rightarrow ae^{i\theta}$ и $\theta \rightarrow be^{i\theta}$ в $\mathbb{C}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Рассмотрите повторный интеграл

$$\int_{\delta} dy \int_{\gamma} \frac{h(x, y, s, t) dx}{(x - sf(x, y))(y - tg(x, y))}.$$

С одной стороны, найдите значение этого интеграла повторным применением теоремы о вычетах (9.16.1), а с другой — рассмотрите степенной ряд, являющийся разложением функции $(1 - \xi)^{-1} (1 - \eta)^{-1}$, в котором ξ заменено на $sf(x, y)/x$, а η — на $tg(x, y)/y$.]

Обобщите это утверждение на случай любого числа комплексных переменных. Из формулы обращения для одной переменной выведите формулу

$$h(u(s)) = h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} D^{n-1} (h'(0) (f(0))^n),$$

где $u(s) - sf(u(s)) = 0$, $|s| < a/M$ (здесь $M = \sup_{|x| \leq a} |f(x)|$), а h — функция, аналитическая при $|x| < a$.

3. Теорема о ранге

Пусть E и F — два конечномерных векторных пространства размерностей n и m , A — открытое множество в E и f — непрерывно дифференцируемое отображение множества A в F . Ранг линейного отображения $f'(x)$ в точке $x \in A$ есть наибольшее число p , такое, что в матрице отображения $f'(x)$ относительно некоторых двух базисов пространств E и F существует по крайней мере один минор порядка p , отличный от 0. Такие миноры являются непрерывными функциями от x ; поэтому если ранг отображения $f'(x_0)$ равен p , то у точки x_0 существует окрестность, в которой ранг отображения $f'(x)$ не меньше p . Но он может быть $> p$ в каждой точке $x \neq x_0$ этой окрестности, как показывает пример отображения $(x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, xy)$ в точке $(0, 0)$.

(10.3.1) (Теорема о ранге) Пусть E — n -мерное пространство, F — m -мерное пространство, A — открытая окрестность точки $a \in E$ и f — непрерывно дифференцируемое отображение (соответственно q раз непрерывно дифференцируемое отображение, аналитическое отображение) окрестности A в F , для которого ранг $f'(x)$ в A есть постоянное число p . Тогда существуют:

1°) открытая окрестность $U \subset A$ точки a и гомеоморфизм ψ окрестности U на единичный шар $I^n: |x_i| < 1 (1 \leq i \leq n)$ в K^n , непрерывно дифференцируемый (соответственно q раз непрерывно дифференцируемый, аналитический) вместе с обратным гомеоморфизмом;

2°) открытая окрестность $V \supset f(U)$ точки $b = f(a)$ и гомеоморфизм φ единичного шара $I^m: |y_i| < 1 (1 \leq i \leq m)$ пространства K^m на V , непрерывно дифференцируемый (соответственно q раз непрерывно дифференцируемый, аналитический) вместе с обратным ему гомеоморфизмом,

— причем гомеоморфизмы ψ и φ удовлетворяют соотношению $f = \varphi \circ f_0 \circ \psi$, где f_0 — отображение

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$$

шара I^n в шар I^m .

Мы проведем доказательство для случая непрерывно дифференцируемых отображений; изменения, нужные для других случаев, очевидны.

Заменяя, если это необходимо, отображение f отображением $x \rightarrow f(a+x) - b$, мы можем считать, что $a = 0$ и $b = 0$. Пусть M — ядро линейного отображения $f'(0)$, являющееся $(n-p)$ -мерным подпространством пространства E , и пусть N — $(p$ -мерное) алгебраическое дополнение подпространства M в E . В качестве базиса пространства E возьмем систему $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$, состоящую из таких n векторов, что $c_1, \dots, c_p$ образуют базис N , а $c_{p+1}, \dots, c_n$ — базис подпространства M , и для любого элемента $x \in E$ будем писать

$x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) c_i$, где φ_i — линейные формы. Если $e_1, \dots, e_n$ — канонический базис пространства K^n , то обозначим через $x \rightarrow G(x)$ линейное отображение $x \rightarrow \sum_{i=p+1}^n \varphi_i(x) e_i$ пространства E на подпространство K^{n-p} пространства K^n , порожденное элементами e_i с номерами $i > p$.

Пусть P — образ пространства E (и подпространства N) при линейном отображении $f'(0)$. Очевидно, P есть p -мерное подпространство пространства F , имеющее в качестве базиса элементы $d_i = f'(0) \cdot c_i$ ($1 \leq i \leq p$). Возьмем базис $(d_j)_{1 \leq j \leq m}$ пространства F , в котором первые p элементов образуют указанный базис подпространства P , и для любого элемента $y \in F$ будем писать $y =$

$$= \sum_{j=1}^m \psi_j(y) d_j, \text{ где } \psi_j \text{ — линейные формы. Обозначим через } y \rightarrow H(y)$$

линейное отображение $y \rightarrow \sum_{j=1}^p \psi_j(y) e_j$ пространства F на подпространство K^p пространства K^n , порожденное элементами e_i с номерами $i \leq p$.

Рассмотрим теперь отображение $x \rightarrow g(x) = H(f(x)) + G(x)$ окрестности A в K^n . Это отображение непрерывно дифференцируемо. Кроме того, для любой точки $s \in E$ мы в силу (8.1.3) и (8.2.1) имеем $g'(x) \cdot s = H(f'(x)) \cdot s + G(s)$; поэтому $g'(0) \cdot c_i = e_i$ при $1 \leq i \leq n$ [т. е. отображение $g'(0)$ представляется единичной матрицей относительно базисов (c_i) и (e_i)]. Пользуясь теоремой (10.2.5), заключаем, что существует такая открытая окрестность $U_0 \subset A$ точки 0, что сужение отображения g на U_0 есть гомеоморфизм окрестности U_0 на некоторую окрестность точки 0 в K^n и что обратный гомеоморфизм g^{-1} непрерывно дифференцируем в $g(U_0)$. Пусть $r > 0$ выбрано так, что шар $|x_i| < r$ ($1 \leq i \leq n$) содержится в $g(U_0)$, и пусть U — прообраз этого шара при гомеоморфизме g , являющийся открытой окрестностью точки 0. Наше отображение u будет сужением на U отображения $x \rightarrow g(x)/r$.

До этого момента мы не пользовались предположением о том, что ранг отображения $f'(x)$ постоянен в A . Из этого предположения следует, что образ P_x пространства E при отображении $f'(x)$ для любой точки $x \in A$ имеет размерность p . Теперь мы можем предположить, что окрестность U_0 взята столь малой, что $g'(x)$ при $x \in U_0$ есть линейное биективное отображение пространства E на K^n (8.3.2). Так как при $s \in N$ мы имеем $g'(x) \cdot s = H(f'(x) \cdot s)$, то сужение отображения $f'(x)$ на N должно быть биективным отображением этого p -мерного пространства на P_x , а сужение отображения H на P_x — биективным отображением пространства P_x на K^p . Обозначим через L_x биективное отображение пространства K^p на P_x ,

обратное предыдущему отображению. Тогда мы можем написать $f'(x) = L_x \circ H \circ f'(x)$.

Рассмотрим теперь пространство K^n как произведение $E_1 \times E_2$, где $E_1 = K^p$ и $E_2 = K^{n-p}$. Перейдем к доказательству того, что отображение $(z_1, z_2) \rightarrow f_1(z_1, z_2) = f(u^{-1}(z_1, z_2))$ шара I^n в F не зависит от z_2 , т. е. что $D_2 f_1(z_1, z_2) = 0$ в I^n (8.6.1). По определению мы можем написать $f(x) = f_1(H(f(x))/r, G(x)/r)$. Поэтому в силу (8.9.2) для любой точки $t \in E$

$$rf'(x) \cdot t = D_1 f_1 \left(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x) \right) \cdot H(f'(x) \cdot t) + \\ + D_2 f_1 \left(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x) \right) \cdot G(t).$$

Это дает

$$(10.3.1.1) \quad D_2 f_1 \left(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x) \right) \cdot G(t) = S_x \cdot H(f'(x) \cdot t),$$

где $S_x = rL_x - D_1 f_1(H(f(x))/r, G(x)/r)$ есть линейное отображение пространства $K^p = E_1$ в F . Докажем, что $S_x = 0$ для любой точки $x \in U_0$. Действительно, если $t \in N$, то по определению $G(t) = 0$ и, значит, в силу (10.3.1.1) $S_x \cdot H(f'(x) \cdot t) = 0$. Но отображение $t \rightarrow H(f'(x) \cdot t) = g'(x) \cdot t$ при $x \in U_0$ есть биективное отображение пространства N на E_1 , и это доказывает, что $S_x = 0$. Из (10.3.1.1) мы тогда заключаем, что справедливо равенство $D_2 f_1(H(f(x))/r, G(x)/r) \cdot G(t) = 0$ для любой точки $t \in E$. Но G отображает пространство E на E_2 , поэтому по определению производная $D_2 f_1(H(f(x))/r, G(x)/r)$, являющаяся линейным отображением пространства E_2 в F , для любой точки $x \in U_0$ равна 0. Соотношение $D_2 f_1(z_1, z_2) = 0$ в I^n тогда следует из того факта, что отображение $x \rightarrow (H(f(x))/r, G(x)/r)$ есть гомеоморфизм окрестности U_0 на некоторое открытое множество, содержащее I^n .

Мы можем теперь вместо $f_1(z_1, z_2)$ писать $f_1(z_1)$ и рассматривать f_1 как непрерывно дифференцируемое отображение пространства $E_1 = K^p$ в F . Тогда мы имеем $f(x) = f_1(H(f(x))/r)$ при $x \in U$, иными словами, $y = f_1(H(y)/r)$ при $y \in f(U)$. Это доказывает, что отображение $y \rightarrow H(y)/r$ есть гомеоморфизм множества $f(U)$ на $I^p \subset E_1$ и что $z_1 \rightarrow f_1(z_1)$ есть обратный ему гомеоморфизм.

Рассмотрим теперь пространство K^m как произведение $E_1 \times E_3$, где $E_3 = K^{m-p}$. Пусть T — линейное биективное отображение пространства E_3 на дополнение Q подпространства P в F , порождаемое элементами $d_{p+1}, \dots, d_m$, отображающее канонический базис пространства K^{m-p} на элементы $d_{p+1}, \dots, d_m$. Положим $v(z_1, z_3) = f_1(z_1) + T(z_3)$ при $z_1 \in I^p$ и $z_3 \in I^{m-p}$. Очевидно (8.9.1) $v(z_1, z_3)$ есть непрерывно дифференцируемое отображение. По определению имеем $H(v(z_1, z_3)) = H(f_1(z_1)) = rz_1$. Поэтому из соотношения $v(z_1, z_3) = v(z'_1, z'_3)$ следует $z'_1 = z_1$, и, значит, оно сводится

к соотношению $T(z_3) = T(z'_3)$, которое дает $z'_3 = z_3$. Следовательно, отображение v инъективно. Доказанное выше соотношение $S_x = 0$ показывает, что $f'_1(z_1) = rL_x$ для любой точки $z_1 \in I^p$, где x — произвольная точка из U , для которой $f(x) = f_1(z_1)$. Производная отображения v в точке (z_1, z_3) есть, таким образом, линейное отображение $(t_1, t_3) \rightarrow rL_x \cdot t_1 + T(t_3)$ (8.9.1) и (8.1.3). Но так как сужение отображения H на P_x взаимно однозначно, P_x — алгебраическое дополнение подпространства Q в F и $v'(z_1, z_3)$ — линейный гомеоморфизм пространства K^m на F . Для любой точки $(z_1, z_3) \in I^m$, таким образом, в силу (10.2.5) существует такая открытая окрестность W этой точки в I^m , что сужение отображения v на W есть гомеоморфизм окрестности W на открытое множество $v(W)$ пространства F . Так как, кроме того, отображение v взаимно однозначно, то оно является гомеоморфизмом шара I^m на открытое множество $V = v(I^m)$, для которого обратный гомеоморфизм непрерывно дифференцируем в V . Соотношение $f = v \circ f_0 \circ u$ следует тогда из определений.

Задачи

1. Пусть E и F — два банаховых пространства, A — открытая окрестность точки $x_0 \in E$ и f — непрерывно дифференцируемое отображение окрестности A в F .

а) Предположим, что $f'(x_0)$ есть линейный гомеоморфизм пространства E на его образ в F . Покажите, что существует такая окрестность $U \subset A$ точки x_0 , что f есть гомеоморфизм окрестности U на $f(U)$.

[Воспользуйтесь задачей 3 § 10.1.]

б) Предположим, что отображение $f'(x_0)$ сюръективно и что существует такое $a > 0$, что для любой точки $s \in E$ выполняется неравенство $\|f'(x_0) \cdot s\| \geq a \|s\|$ ¹⁾. Покажите, что существует такая окрестность $V \subset A$ точки x_0 , что $f(V)$ есть окрестность точки $f(x_0)$ в F .

[Воспользуйтесь задачей 8 § 10.1.]

2. Пусть A — открытое множество в $\mathbb{C}^p$ и f — аналитическое отображение множества A в $\mathbb{C}^p$. Покажите, что если f инъективно, то ранг отображения $Df(x)$ для каждой точки $x \in A$ равен p .

[Проведите доказательство от противного и индукцию по p . При $p = 1$ применяем теорему Руше (9.17.3). Предположим, что $Df(a)$ для некоторой точки $a \in A$ имеет ранг $< p$. Покажите сначала, что (произведя, если потребуется, линейное преобразование в F) можно считать, что если $f(z) = (f_1(z), \dots, f_p(z))$, то $D_1 f_1(a) = 0$, и если $g(z) = (f_2(z), \dots, f_p(z))$, то ранг $Dg(a)$ в точности равен $p - 1$; тогда существует такая окрестность $U \subset A$ точки a , что $Dg(x)$ при $x \in U$ имеет ранг $p - 1$. Пользуясь теоремой

¹⁾ Можно показать, что это последнее свойство является следствием того факта, что отображение $f'(x_0)$ непрерывно и сюръективно; см. Н. Бурбаки [6].

о ранге (10.3.1), сведите доказательство к случаю, когда $a = 0$ и $f_k(z) = z_k$ при $2 \leq k \leq p$.]

Остается ли утверждение верным, если C заменить на R ?

3. а) Пусть A — односвязное открытое множество в C , отличное от C , и пусть a и b — две различные точки границы $\text{Fr}(A)$ (задача 6 § 9Д.4). Покажите, что существует такая комплексная аналитическая в A функция h , что $(h(z))^2 = (z - a)/(z - b)$ (задача 7 § 10.2). Далее, h есть аналитический гомеоморфизм множества A на некоторое односвязное открытое множество $B \subset C$ [задача 2 и (10.3.1)]. Наконец, $B \cap (-B) = \emptyset$; поэтому существуют точки пространства C , внешние для B .

б) Выведите из а), что существует аналитический гомеоморфизм множества A на односвязное открытое в C множество, содержащееся в круге $U: |z| < 1$ и содержащее точку 0.

4. а) Пусть A — односвязное открытое множество в C , содержащееся в единичном круге $U: |z| < 1$ и содержащее точку 0, и пусть H — множество всех комплексных аналитических в A функций g , дающих инъективное отображение A в C и удовлетворяющих следующим условиям: $|g(z)| < 1$ в A , $g(0) = 0$ и $g'(0)$ есть действительное число > 0 . Для каждого компактного подмножества $L \subset A$ множество H_L сужений на L функций из H относительно компактно в $\mathcal{C}(L)$ (9.13.2). Покажите, что множество всех действительных чисел $g'(0)$ (для $g \in H$) ограничено [ср. доказательство теоремы (9.13.1)]. Пусть λ — верхняя грань этого множества. Покажите, что существует функция $g_0 \in H$, для которой $g'_0(0) = \lambda$.

[Воспользуйтесь утверждением из задачи 5 § 9.17.]

б) Предположим, что функция $g \in H$ такова, что $g(A) \neq U$, и пусть $c \in U \setminus g(A)$. Заменяя, если потребуется, функцию g функцией g_1 , определяемой соотношением $g_1(z) = e^{-i\theta} g(ze^{i\theta})$ при подходящем выборе θ , можем считать, что число c действительно и > 0 . Существует функция h , аналитическая в A и такая, что

$$(h(z))^2 = \frac{c - g(z)}{1 - cg(z)}$$

и $h(0) = \sqrt{c} > 0$.

[То же рассуждение, что и в задаче 3, а).]

Покажите, что функция g_2 , определяемая соотношением

$$h(z) = \frac{\sqrt{c} - g_2(z)}{1 - \sqrt{c} g_2(z)},$$

принадлежит H и что $g'_2(0) > g'_0(0)$.

с) Заключите из а) и б), что функция g_0 , определенная в а), является аналитическим гомеоморфизмом множества A на U . На основании задачи 3, б) отсюда следует, что для любого односвязного и открытого множества $D \subset C$, отличного от C , существует аналитический гомеоморфизм множества D на U (теорема о конформном отображении).

5. а) Пусть f — комплексная аналитическая функция в единичном круге $U: |z| < 1$, такая, что $f(0) = 1$ и $|f(z)| < M$ в U . Покажите, что при $|z| \leq 1/M$ выполняется неравенство $|f(z) - 1| \leq M|z|$.

[К функции $g(z) = M(f(z) - 1)/(M^2 - f(z))$ примените лемму Шварца (задача 7 § 9.5).]

б) Пусть f — комплексная аналитическая функция в U , такая, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и $|f'(z)| \leq M$ в U . Покажите, что при $|z| \leq 1/M$ выполняется неравенство $|f(z) - z| \leq M|z|^2/2$.

[Примените а) к f' .]

с) Покажите, что при предположениях б) сужение функции f на круге $B(0; 1/M)$ есть аналитический гомеоморфизм этого круга на открытое множество, содержащее круг $B(0; 1/2M)$.

[Примените теорему Руше (9.17.3), воспользовавшись результатом задачи б).]

д) Для любого комплексного числа $a \in U$ пусть $u(z) = (z - a)/(\bar{a}z - 1)$. Покажите, что для любой комплексной функции f , аналитической в U , если $g(z) = f(u(z))$, то $|g'(z)|(1 - |z|^2) = |f'(u(z))|(1 - |u(z)|^2)$ для любой точки $z \in U$.

е) Покажите, что существует действительное число $b > 1/3\sqrt{3}$ (постоянная Блòха), обладающее следующим свойством: для любой комплексной функции f , аналитической в U и такой, что $f'(0) = 1$, существует такая точка $z_0 \in U$, что открытый круг B с центром x_0 , где $x_0 = f(z_0)$, и радиусом b содержится в $f(U)$, и существует функция g , аналитическая в B и такая, что $g(B) \subset U$ и $f(g(z)) = z$ при $z \in B$.

[Рассмотрите сначала случай, когда функция f аналитична в некоторой окрестности множества $\bar{U}$, и возьмите в качестве z_0 точку, в которой достигает максимума функция $|f'(z)|(1 - |z|^2)$. Затем, пользуясь д), сведите задачу к случаю, когда $z_0 = 0$, и затем примените результат из задачи с) к функции вида $a + f(Rz)$, где a и R — подходящим образом подобранные комплексные числа. В общем случае рассмотрите функцию $f((1 - \varepsilon)z)/(1 - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.]

6. а) Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех комплексных функций f , аналитических в единичном круге $U: |z| < 1$, для которых $f(U)$ не содержит точек 0 и 1. Для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ существует такая единственная аналитическая в U функция g , что $\exp(2\pi i g(z)) = f(z)$ в U и что $|\mathcal{G}g(0)| < \pi$ (задача 7 § 10.2); множество $g(U)$ не содержит никакого положительного или отрицательного целого числа. Далее (та же ссылка), существует такая функция h , аналитическая в U , что $g(z)/(g(z) - 1) = ((1 + h(z))/(1 - h(z)))^2$; множество $h(U)$ не содержит ни одной из точек 0, 1, $c'_n = (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2$ и $c''_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2$ (n — целое число ≥ 1). Наконец, существует такая функция φ , аналитическая в U , что $\exp(\varphi(z)) = h(z)$; множество $\varphi(U)$ не содержит ни одной из точек $\ln c'_n + 2k\pi i$ и $\ln c''_n + 2k\pi i$ (k — положительное или отрицательное целое число, $n \geq 1$). Покажите, что никакой круг радиуса > 4 не может содержаться в $\varphi(U)$. Пользуясь задачей 5, е), выведите

из этого результата, что при $|x| < 1$

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{4}{b(1-|x|)}.$$

[Рассмотрите функцию $t \rightarrow c\varphi(x + (1-|x|)t)$ для подходящим образом выбранной постоянной c .]

Заключите отсюда, что существует такая функция $F(u, v)$, конечная и непрерывная в произведении $(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \times [0, 1]$, что для каждой функции $f \in \mathfrak{M}$ при любом $|z| \leq r < 1$ выполняется неравенство $\ln|f(z)| \leq F(f(0), r)$.

б) Пусть функция $f \in \mathfrak{M}$ такова, что $|f(0)| < 1/2$ или $|f(0) - 1| < 1/2$. Покажите, что для данного r , удовлетворяющего условию $0 \leq r < 1$: или при $|z| \leq r$ выполняется неравенство $|f(z)| \leq 5/2$, или же существует такая точка x , $|x| < r$, что $|f(x)| \geq 1/2$, $|f(x) - 1| \geq 1/2$ и $|1/f(x)| \geq 1/2$. Применяя результат из задачи а) к функции $f((z-x)/(\bar{x}z-1))$, заключите, что существует такая функция $F_1(u, v)$, конечная и непрерывная в произведении $[0, +\infty] \times [0, 1]$, что для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ из $|f(0)| \leq s$ и $|z| \leq r$ следует $|f(z)| \leq F_1(s, r)$ (теорема Шоттки).

7. Пусть A — открытое связное множество в $\mathbb{C}$ и (f_n) — последовательность функций из множества $\mathfrak{M}$ (задача 6). Покажите, что для любого компактного подмножества $L \subset A$ существует такая подпоследовательность (f_{n_k}) , что или эта подпоследовательность равномерно сходится в L , или же последовательность $(1/f_{n_k})$ равномерно сходится в L к 0.

[Докажите, пользуясь теоремой Шоттки, что точки $x \in A$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/f_n(x)) = 0$, образуют открытое и замкнутое подмножество множества A , таким образом, равное A или пустое. Во втором случае покажите, пользуясь компактностью множества L , что существует подпоследовательность последовательности (f_n) , ограниченная в некоторой компактной окрестности множества L , и примените (9.13.1). В первом случае подобным же образом воспользуйтесь теоремой (9.13.1), примененной к последовательности $(1/f_n)$.]

8. а) Пусть f — комплексная функция, аналитическая в открытом множестве V : $0 < |z - a| < r$, и пусть a — существенная особенность функции f (9.15). Покажите, что множество $\mathbb{C} \setminus f(V)$ или пусто, или сводится к одной точке (теорема Пикара).

[Пусть W — открытое подмножество множества V , определяемое условиями $r/2 < |z - a| < r$. Рассмотрите в W семейство аналитических функций $f_n(z) = f(z/2^n)$. Если множество $\mathbb{C} \setminus f(V)$ содержит по крайней мере две различные точки, то примените к последовательности (f_n) задачу 7 и, пользуясь (9.15.2), придите к противоречию с задачей 2 § 9.15.]

б) Выведите из а), что если g — целая функция в $\mathbb{C}$, не являющаяся постоянной, то множество $\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{C})$ пусто или сводится к одной точке.

[Рассмотрите функцию $g(1/z)$ на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.]

9. а) Покажите, что существует целая функция $f(x, y)$ в $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющая тождеству

$$f(4x, 4y) - 4f(x, y) = -5(f(2x, -2y))^2 + 2(f(2x, -2y))^5$$

и такая, что члены степени ≤ 1 в тейлоровском разложении функции f в точке $(0, 0)$ суть $x + y$ (задача 11 § 10.1).

б) Пусть $g(x, y) = f(2x, -2y)$ и пусть $J(x, y) = \partial(f, g)/\partial(x, y)$. Покажите, что $J(2x, -2y) = J(x, y)$, и заключите отсюда, что $J(x, y) = -4$ в $\mathbb{C}^2$.

[Выразите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ через $f(2x, -2y)$ и $g(2x, -2y)$.]

Докажите, что аналитическое отображение $u: (x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$ пространства $\mathbb{C}^2$ в себя инъективно.

[Если бы это было не так, то из предыдущих выражений следовало бы, что оно не взаимно однозначно в некоторой окрестности точки $(0, 0)$.]

с) Покажите, что существует окрестность точки $(1, 1)$, не содержащаяся в множестве $u(\mathbb{C}^2)$.

[Заметьте, что существует такое число ε , что $0 < \varepsilon < 1$ и что из $|f(2x, -2y) - 1| \leq \varepsilon$ и $|g(2x, -2y) - 1| \leq \varepsilon$ следует $|f(x, y) - 1| \leq \varepsilon$ и $|g(x, y) - 1| \leq \varepsilon$. Покажите далее, что из последних двух неравенств следовало бы $|f(0, 0) - 1| \leq \varepsilon$ и $|g(0, 0) - 1| \leq \varepsilon$, что невозможно; ср. с задачей 8, б).]

4. Дифференциальные уравнения

Пусть E — банахово пространство, I — открытое множество в поле K , H — открытое множество в пространстве E и f — непрерывно дифференцируемое отображение произведения $I \times H$ в E . Дифференцируемое отображение u открытого шара $J \subset I$ в H называется *решением дифференциального уравнения*

$$(10.4.1) \quad x' = f(t, x),$$

если для любой точки $t \in J$

$$(10.4.2) \quad u'(t) = f(t, u(t)).$$

Из (10.4.2) сразу следует, что в этом случае отображение u непрерывно дифференцируемо в J [и, значит, в силу (9.10.1) аналитично, если $K = \mathbb{C}$].

(10.4.3) Для того чтобы в шаре $J \subset I$ с центром t_0 отображение u шара J в H было решением уравнения (10.4.1), удовлетворяющим условию $u(t_0) = x_0 \in H$, необходимо и достаточно, чтобы отображение u было непрерывно (соответственно аналитично) в J , если $K = \mathbb{R}$ (соответственно $K = \mathbb{C}$), и чтобы

$$(10.4.4) \quad u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

[где, если $K = \mathbb{C}$, интеграл берется вдоль прямолинейной траектории $\xi \rightarrow t_0 + \xi(t - t_0)$, $0 \leq \xi \leq 1$].

Из определения первообразной следует, что если отображения f и u являются аналитическими, то аналитическим будет и отображение $s \rightarrow f(s, u(s))$ (9.3.2).

(10.4.5) (Теорема существования Коши) Если отображение f непрерывно дифференцируемо в $I \times H$, то для любой точки $t_0 \in I$ и любой точки $x_0 \in H$ существует такой открытый шар $J \subset I$ с центром t_0 , что в J существует одно и только одно решение и уравнения (10.4.1), удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$.

Сначала докажем лемму:

(10.4.5.1) Пусть A — компактное метрическое пространство, F — метрическое пространство, B — компактное множество в F и g — непрерывное отображение произведения $A \times F$ в метрическое пространство E . Тогда существует такая окрестность V множества B в F , что множество $g(A \times V)$ ограничено в E .

Так как отображение g непрерывно, то для любой точки $t \in A$ и любой точки $z \in B$ существуют шар $S_{t,z}$ с центром t в A и шар $U_{t,z}$ с центром z в B , такие, что множество $g(S_{t,z} \times U_{t,z})$ ограничено. Для любой точки $z \in B$ покроем пространство A конечным числом шаров $S_{t_i,z}$, и пусть V_z — шар $U_{t_i,z}$ наименьшего радиуса. Тогда множество $g(A \times V_z)$ ограничено (3.4.4). Покроем теперь множество B конечным числом шаров V_{z_j} ; объединение V этих шаров V_{z_j} удовлетворяет нужным требованиям (3.4.4).

Докажем теперь теорему (10.4.5) в случае, когда $K = \mathbb{R}$. Пусть J_a — компактный шар с центром t_0 и радиусом a , содержащийся в I . В силу (10.4.5.1) существует такой открытый шар B с центром x_0 и радиусом b , содержащийся в H , что верхние грани $M = \sup_{(t,x) \in J_a \times B} \|f(t, x)\|$ и $k = \sup_{(t,x) \in J_a \times B} \|D_2 f(t, x)\|$ конечны.

Пусть J_r , где $r < a$, есть замкнутый шар с центром t_0 и радиусом r и пусть F_r — пространство непрерывных отображений у шара J_r в пространство E , являющееся банаховым пространством с нормой $\|u\| = \sup_{t \in J_r} \|u(t)\|$ (7.2.1). Пусть V_r — открытый шар в F_r , имеющий центр x_0 (отождествленный с постоянным отображением $t \rightarrow x_0$), и

радиус b . Для любого $u \in V_r$ отображение $t \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$

определено и непрерывно в J_r , так как по определению при $u \in V_r$ имеем $u(s) \in B$. Пусть $g(u)$ — это отображение; таким образом g есть отображение шара V_r в F_r . Мы докажем, что при достаточно малом r отображение g удовлетворяет условиям теоремы

(10.1.2). Тогда, применяя эту теорему и теорему (10.4.3), мы закончим доказательство нашей теоремы, причем J будет совпадать с $\dot{J}_r$.

Для любых двух точек y_1 и y_2 из шара V_r мы в силу (8.5.4) имеем

$$\|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| \leq k \cdot \|y_1(s) - y_2(s)\| \leq k \cdot \|y_1 - y_2\|$$

для любой точки $s \in J_r$. Следовательно, в силу (8.7.7) для любой точки $t \in J_r$

$$\left\| \int_{t_0}^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))) ds \right\| \leq kr \|y_1 - y_2\|,$$

поэтому $\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq kr \|y_1 - y_2\|$. С другой стороны, для любого отображения $y \in V_r$ и для любой точки $s \in J_r$ выполняется неравенство $\|f(s, y(s))\| \leq M$, а значит — в силу (8.7.7) — неравенство

$$\left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right\| \leq Mr \text{ и, следовательно, } \|g(x_0) - x_0\| \leq Mr. \text{ Таким}$$

образом, мы видим, что для того, чтобы иметь возможность применить теорему (10.1.2), мы должны иметь $kr < 1$ и $Mr < b(1 - kr)$, и оба эти неравенства будут удовлетворяться, если взять $r < b/(M + kb)$.

Предположим теперь, что $K = \mathbb{C}$. Определим J_a , J_r , B , M и k так же, как и выше, и обозначим через F_r пространство отображений u шара J_r в пространство E , непрерывных в J_r и аналитических в $\dot{J}_r$. В силу (7.2.1) и (9.12.1) это снова банахово пространство с нормой $\|u\| = \sup_{t \in J_r} \|u(t)\|$. Для $u \in V_r$ (шар V_r определен выше) ото-

бражение $t \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$ и на этот раз принадлежит F_r .

В самом деле, оно аналитично в $\dot{J}_r$, поскольку в $\dot{J}_r$ аналитично отображение $s \rightarrow f(s, u(s))$ (9.7.3), а его непрерывность в J_r сразу следует из (8.11.1). Итак, мы определили отображение g шара V_r в F_r , и доказательство заканчивается так же, как и выше.

(10.4.6) Замечание. Доказательство теоремы (10.4.5) показывает, что результат остается в силе, если $K = \mathbb{R}$ и если f удовлетворяет следующим более слабым предположениям:

а) для каждого непрерывного отображения $t \rightarrow w(t)$ множества I в H отображение $t \rightarrow f(t, w(t))$ является простой функцией в I (7.6);

б) для любой точки $(t, x) \in I \times H$ существуют такой шар J с центром t в I и такой шар B с центром x в H , что отображение f ограничено в $J \times B$ и что существует такая константа

$k \geq 0$ (зависящая от J и от B), что для любой точки $s \in J$ и любых y_1 и y_2 из B выполняется неравенство $\|f(s, y_1) - f(s, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$. Такая функция f называется *локально липшицевской* в $I \times H$. В этом случае имеется в виду, что уравнение (10.4.2) удовлетворяется только на дополнении не более чем счетного подмножества шара J . Это последнее замечание позволяет также заменить открытые промежутки I и J промежутками любого вида в $\mathbb{R}$.

5. Сравнение решений дифференциальных уравнений

Мы будем говорить, что дифференцируемое отображение u открытого шара $J \subset I$ в H есть *приближенное решение уравнения* (10.4.1) *с точностью ε* (или, короче, *ε -решение*), если для любой точки $t \in J$ выполняется неравенство

$$\|u'(t) - f(t, u(t))\| \leq \varepsilon.$$

(10.5.1) *Предположим, что $\|D_2 f(t, x)\| \leq k$ в $I \times H$. Если u и v — два приближенных решения уравнения (10.4.1) в открытом шаре J с центром t_0 с точностью ε_1 и ε_2 , то для любой точки $t \in J$*

$$(10.5.1.1) \quad \|u(t) - v(t)\| \leq \|u(t_0) - v(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

[При $k = 0$ отношение $\frac{1}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1)$ нужно заменить на $|t - t_0|$.]

Полагая $t = t_0 + a\xi$, $|a| = 1$, $\xi \geq 0$, немедленно сводим теорему к случаю $K = \mathbb{R}$, $t_0 = 0$ и $t \geq 0$. В самом деле, тогда $u_1(\xi) = u(t_0 + a\xi)$ и $v_1(\xi) = v(t_0 + a\xi)$ являются приближенными решениями уравнения $x' = af(t_0 + a\xi, x/a)$.

Из неравенства $\|u'(s) - f(s, u(s))\| \leq \varepsilon_1$ в промежутке $0 \leq s \leq t$ на основании (8.7.7) получаем

$$\left\| u(t) - u(0) - \int_0^t f(s, u(s)) ds \right\| \leq \varepsilon_1 t$$

и аналогично

$$\left\| v(t) - v(0) - \int_0^t f(s, v(s)) ds \right\| \leq \varepsilon_2 t.$$

откуда

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \|u(0) - v(0)\| + \\ &+ \left\| \int_0^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t. \end{aligned}$$

На основании предположения относительно $D_2 f$ и ввиду (8.5.4) и (8.7.7) это дает

$$(10.5.1.2) \quad w(t) \leq w(0) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)t + k \int_0^t w(s) ds,$$

где $w(t) = \|u(t) - v(t)\|$. Теорема (10.5.1) вытекает теперь из следующей леммы:

(10.5.1.3) Если φ и ψ — две простые функции ≥ 0 в промежутке $[0, c]$, то для любой простой функции $w \geq 0$ в промежутке $[0, c]$, удовлетворяющей неравенству

$$(10.5.1.4) \quad w(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s) w(s) ds,$$

в $[0, c]$ справедлива оценка

$$(10.5.1.5) \quad w(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\xi) d\xi\right) ds.$$

Положим $y(t) = \int_0^t \psi(s) w(s) ds$. Функция y непрерывна, и из (10.5.1.5) следует, что на дополнении некоторого счетного подмножества промежутка $[0, c]$ имеем

$$(10.5.1.6) \quad y'(t) = \psi(t) y(t) \leq \varphi(t) \psi(t)$$

в силу (8.7). Положим $z(t) = y(t) \exp\left(-\int_0^t \psi(s) ds\right)$; неравенство (10.5.1.6) эквивалентно неравенству

$$z'(t) \leq \varphi(t) \psi(t) \exp\left(-\int_0^t \psi(s) ds\right).$$

Используя условие $z(0) = 0$ при $t \in [0, c]$, получаем на основании (8.5.3)

$$z(t) \leq \int_0^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(-\int_0^s \psi(\xi) d\xi\right) ds,$$

откуда по определению

$$y(t) \leq \int_0^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\xi) d\xi\right) ds,$$

и неравенство (10.5.1.5) следует теперь из исходного неравенства $w(t) \leq \varphi(t) + y(t)$.

(10.5.2) *Предположим, что отображение f непрерывно дифференцируемо в $I \times H$. Если u и v — два решения уравнения (10.4.1), определенные в открытом шаре J с центром t_0 и такие, что $u(t_0) = v(t_0)$, то $u = v$ в J .*

Достаточно доказать, что u и v совпадают на каждом компактном шаре L с центром t_0 , содержащемся в J . А это следует из теоремы (10.5.1), примененной к u и v , если только мы будем знать, что производная $D_2 f$ ограничена на некотором множестве $L \times H'$, где H' — открытое подмножество множества H , содержащее и $u(L)$ и $v(L)$. Но существование такого множества сразу вытекает из (10.4.5.1).

(10.5.3) *Предположим, что E конечномерно, а f аналитично в $I \times H$. Тогда любое решение уравнения (10.4.1) в открытом шаре $J \subset I$ является аналитическим.*

Если $K = \mathbb{C}$, то это немедленно следует из определения.

Предположим, что $K = \mathbb{R}$, и пусть $E = \mathbb{R}^m$. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in I \times H$ существуют такой шар $L_0 \subset \mathbb{C}$ с центром t_0 и такой шар $P \subset \mathbb{C}^m$ с центром x_0 , что $L_0 \cap \mathbb{R} \subset I$ и $P \cap \mathbb{R}^m \subset H$ и существует аналитическое отображение g произведения $L_0 \times P$ в $\mathbb{C}^m$, сужение которого на $(L_0 \cap \mathbb{R}) \times (P \cap \mathbb{R}^m)$ совпадает с f (9.4.5). В силу (10.4.5) найдется такой открытый шар $L \subset L_0$ с центром t_0 в $\mathbb{C}$, что существует единственное решение v дифференциального уравнения $z' = g(t, z)$, принимающее в точке t_0 значение x_0 , и отображение v является аналитическим в L . Пользуясь соотношением $v'(t) = g(t, v(t))$ и определением g и v , немедленно индукцией по n проверяем, что все производные $v^{(n)}(t_0)$ принадлежат $\mathbb{R}^m$. Поэтому (см. (9.3.5.1)) значение $v(t)$ при $t \in L \cap \mathbb{R}$ принадлежит $\mathbb{R}^m$. Это доказывает, что сужение u отображения v на множестве $L \cap \mathbb{R}$ является решением уравнения (10.4.1) [см. 8.4, замечание], удовлетворяющим условию $u(t_0) = x_0$. Но в силу (10.5.2) любое решение w уравнения (10.4.1) в шаре M с центром t_0 , удовлетворяющее условию $w(t_0) = x_0$, в пересечении $L \cap M$ совпадает с u и поэтому является аналитическим в точке t_0 , ч.т.д.

(10.5.4) *Замечание.* Доказательство теоремы (10.5.1) показывает, что, если $K = \mathbb{R}$, неравенство (10.5.1.1) сохраняет силу в случае, когда отображение f является *липшицевским* в $I \times H$ с константой $k \geq 0$ (т. е. удовлетворяет условию а) замечания (10.4.6) и для любых точек $t \in I$, $x_1 \in H$ и $x_2 \in H$ имеем $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \cdot \|x_1 - x_2\|$). В качестве J можно взять промежуток с началом (или концом) t_0 , содержащий t_0 , а в качестве u и v — первообразные некоторых простых функций в J , и можно предполагать, что неравенства $\|u'(t) - f(t, u(t))\| \leq \varepsilon_1$ и $\|v'(t) - f(t, v(t))\| \leq \varepsilon_2$ выполняются только на дополнении некоторого не более чем счетного

подмножества промежутка J . Теорема единственности (10.5.2) так же остается в силе (в случае, когда $K = \mathbb{R}$) при единственном предположении, что отображение f является *локально липшицевским* (10.4.6) в $I \times H$.

(10.5.5) Пусть f — аналитическое отображение в $I \times H$, если $K = \mathbb{C}$, и локально липшицевское отображение в $I \times H$, если $K = \mathbb{R}$. Предположим, что v — решение уравнения (10.4.1), определенное в открытом шаре $J: |t - t_0| < r$, для которого $\bar{J} \subset I$ и $\bar{v}(J) \subset H$, и что отображение $t \rightarrow f(t, v(t))$ ограничено в J . Тогда существуют шар $J': |t - t_0| < r', r' > r$, содержащийся в I , и решение уравнения (10.4.1), определенное в J' и совпадающее в J с v .

$K = \mathbb{R}$. По предположению, при $t \in J$ мы имеем $\|f(t, v(t))\| \leq M$, поэтому $\|v'(t)\| \leq M$ на дополнении некоторого не более чем счетного подмножества шара J . Отсюда по теореме о среднем значении (8.5.2) следует, что при $s \in J$ и $t \in J$ выполняется неравенство $\|v(s) - v(t)\| \leq M|s - t|$. На основании критерия сходимости Коши (3.14.6) заключаем, что пределы $v((t_0 - r)+)$ и $v((t_0 + r)-)$ существуют и принадлежат множеству $\bar{v}(J) \subset H$. В силу (10.4.6) существует решение w_1 (соответственно w_2) уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в некотором открытом шаре U_1 (соответственно U_2) с центром $t_0 + r$ (соответственно $t_0 - r$), содержащемся в I , и принимающее в этой точке значение $v((t_0 + r)-)$ (соответственно $v((t_0 - r)+)$). Из (10.5.2), кроме того, следует, что отображение w_1 (соответственно w_2) в пересечении $U_1 \cap J$ (соответственно $U_2 \cap J$) совпадает с v , и теорема, таким образом, доказана.

$K = \mathbb{C}$. Для любого комплексного числа ζ , для которого $|\zeta| = 1$, положим $t = t_0 + \zeta s$, где $s \geq 0$, и $v_\zeta(s) = v(t_0 + \zeta s)$. Тогда то же рассуждение, что и выше, доказывает, что в H существует предел $v_\zeta(r-)$. Поэтому существует решение w_ζ уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в некотором открытом шаре V_ζ с центром $t_0 + \zeta r$, содержащемся в I , удовлетворяющее условию $w_\zeta(t_0 + \zeta r) = v_\zeta(r-)$. Из (10.5.2) следует, что w_ζ и v совпадают на пересечении множества $J \cap V_\zeta$ с сегментом с концами t_0 и $t_0 + \zeta r$. Так как эти функции являются аналитическими в $J \cap V_\zeta$, они в силу (9.4.4) совпадают на множестве $J \cap V_\zeta$. Теперь покроем компактное множество $|t - t_0| = r$ конечным числом шаров V_{ζ_i} ($1 \leq i \leq m$). Если $V_{\zeta_i} \cap V_{\zeta_j} \neq \emptyset$, то функции w_{ζ_i} и w_{ζ_j} совпадают в $V_{\zeta_i} \cap V_{\zeta_j}$. В самом деле, обе они совпадают с v на непустом открытом множестве $J \cap V_{\zeta_i} \cap V_{\zeta_j}$, и нам остается только применить теорему (9.4.2). [Чтобы доказать, что предыдущее пересечение не пусто, заметим, что (как следует из предположения) $r|\zeta_i - \zeta_j| < \rho_i + \rho_j$, где ρ_i и ρ_j — радиусы шаров V_{ζ_i} и V_{ζ_j} . Поэтому существует такое число $\lambda \in [0, 1]$, что $r\lambda|\zeta_i - \zeta_j| <$

$< \rho_i$ и $r(1-\lambda)|\zeta_i - \zeta_j| < \rho_j$. Отсюда следует, что точка $t_0 + r((1-\lambda)\zeta_i + \lambda\zeta_j)$ принадлежит пересечению $J \cap V_{\zeta_i} \cap V_{\zeta_j}$. Таким образом, существует решение уравнения $x' = f(t, x)$, равное v в J и ω_{ζ_i} в каждом из V_{ζ_i} , и найдется открытый шар с центром t_0 и радиусом $r' > r$, содержащийся в объединении этих множеств (3.17.11). Теорема доказана.

(10.5.6) Пусть f и g — два непрерывно дифференцируемых отображения произведения $I \times H$ в E ; предположим, что в $I \times H$ выполняются неравенства $\|f(t, x) - g(t, x)\| \leq \alpha$ и $\|D_x g(t, x)\| \leq k$. Пусть (t_0, x_0) — некоторая точка произведения $I \times H$, $\mu > 0$, $\varepsilon \geq 0$ и $\varphi(\xi) = \mu e^{k\xi} + (\alpha + \varepsilon)(e^{k\xi} - 1)/k$ при $\xi \geq 0$. Пусть u есть ε -решение уравнения $x' = g(t, x)$, определенное в открытом шаре J : $|t - t_0| < b$, содержащемся в I , и такое, что для любой точки $t \in J$ замкнутый шар с центром $u(t)$ и радиусом $\varphi(|t - t_0|)$ содержится в H . Тогда для любой точки $y \in H$, для которой $\|y - x_0\| \leq \mu$, существует единственное решение v уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в J , принимающее значения в H и удовлетворяющее условию $v(t_0) = y$. Кроме того, при $t \in J$ выполняется неравенство $\|u(t) - v(t)\| \leq \varphi(|t - t_0|)$.

Пусть A — множество чисел r , таких, что $0 < r \leq b$ и что существует решение v_r уравнения $x' = f(t, x)$, принимающее значения в H , определенное в шаре J_r : $|t - t_0| < r$ и удовлетворяющее условию $v_r(t_0) = y$. По теореме существования Коши (10.4.5) множество A не пусто. Кроме того, в J_r мы имеем $\|v_r(t) - g(t, v_r(t))\| \leq \alpha$; иными словами, v_r есть α -решение уравнения $x' = g(t, x)$, и на основании (10.5.1.1) мы заключаем, что $\|u(t) - v_r(t)\| \leq \varphi(|t - t_0|)$ в J_r . Если числа r и r' принадлежат A и если $r < r'$, то в силу (10.5.2) v_r и $v_{r'}$ совпадают в J_r .

Пусть c — верхняя грань множества A . Нам нужно доказать, что $c = b$. Допустим противное. Тогда существует единственное решение v уравнения $x' = f(t, x)$ в J_c , равное v_r в каждом из шаров J_r при $r < c$, принимающее свои значения в H и такое, что в J_c $\|u(t) - v(t)\| \leq \varphi(|t - t_0|)$. Таким образом, имеем в J_c : $\|g(t, v(t))\| \leq \|g(t, u(t))\| + k\varphi(|t - t_0|)$, и так как отображение $t \rightarrow g(t, u(t))$ непрерывно в J_c , то оно ограничено в этом компактном шаре, откуда следует, что отображение $t \rightarrow g(t, v(t))$ ограничено в J_c . С другой стороны, любая точка прикосновения z множества $v(J_c)$ является пределом последовательности $(v(t_n))$, где $t_n \in J_c$ и t_n стремится к точке $t_0 + c\zeta$, $|\zeta| \leq 1$. В силу непрерывности мы имеем $\|z - u(t_0 + c\zeta)\| \leq \varphi(c|\zeta|)$, поэтому по предположению $z \in H$. Таким образом, мы можем применить теорему (10.5.5) и получить решение уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в некотором шаре $J_{r'}$, где $r' > c$,

и принимающее в точке t_0 значение y , что противоречит определению c .

Снова заметим, что, если $K = \mathbb{R}$, мы можем ослабить предположения относительно отображений f и g , потребовав только, чтобы g было липшицевским с константой k , а f — локально липшицевским в $I \times H$.

Задачи

1. Пусть $f(t, x)$ — действительная непрерывная функция в шаре $|t| \leq a$, $|x| \leq b$ в $\mathbb{R}^2$, обладающая тем свойством, что $f(t, x) < 0$ при $tx > 0$ и $f(t, x) > 0$ при $tx < 0$. Покажите, что $x = 0$ есть единственное решение дифференциального уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в некоторой окрестности точки 0 и удовлетворяющее условию $x(0) = 0$.

[Допустите противное и рассмотрите в некотором компактном промежутке, содержащем 0, точки, в которых решение достигает максимума и минимума.]

2. Пусть $f(t, x)$ — действительная непрерывная функция, определенная в $\mathbb{R}^2$ следующими условиями: $f(t, x) = -2t$ при $x \geq t^2$, $f(t, x) = -2x/t$ при $|x| < t^2$ и $f(t, x) = 2t$ при $x \leq -t^2$. Пусть (y_n) — последовательность

функций, определяемая соотношениями $y_0(t) = t^2$, $y_n(t) = \int_0^t f(u, y_{n-1}(u)) du$

при $n \geq 1$. Покажите, что последовательность $(y_n(t))$ не сходится ни в одной точке $t \in \mathbb{R}$, несмотря на то, что дифференциальное уравнение $x' = f(t, x)$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x(0) = 0$ (задача 1).

3. Для любой пары действительных чисел $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ функция, равная $-(t - \alpha)^2$ при $t < \alpha$, 0 при $\alpha \leq t \leq \beta$ и $(t - \beta)^2$ при $t > \beta$, является решением дифференциального уравнения $x' = 2|x|^{1/2}$, удовлетворяющим условию $x(0) = 0$. Пусть u_0 — произвольная непрерывная функция в компактном проме-

жутке $[a, b]$, и определим по индукции функции $u_n(t) = 2 \int_0^t |u_{n-1}(s)|^{1/2} ds$

при $t \in [a, b]$. Покажите, что если γ есть наибольшее число в промежутке $[a, b]$, для которого $u_0(t) = 0$ в $[a, \gamma]$, то последовательность (u_n) равномерно сходится на $[a, b]$ к решению уравнения $x' = 2|x|^{1/2}$, равному 0 при $a \leq t \leq \gamma$ и $(t - \gamma)^2$ при $\gamma \leq t \leq b$.

[Рассмотрите сначала случай, когда $u_0(t) = 0$ при $t \leq \gamma$ и $u_0(t) = k(t - \gamma)^2$ при $\gamma \leq t \leq b$. Затем заметьте, что, заменив, если потребуется, u_0 на u_1 , можно считать, что функция u_0 возрастает на $[a, b]$. Убедитесь в том, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие два числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, что в промежутке $[a, b]$ имеем $k_1 v_0(t - \gamma - \varepsilon) \leq u_0(t) \leq k_2 v_0(t - \gamma + \varepsilon)$, где $v_0(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $v_0(t) = t^2$ при $t \geq 0$.]

4. Обозначения те же, что и в 10.4. Предположим, что $K = \mathbb{R}$, отображение f непрерывно и ограничено в $I \times H$, и пусть $M = \sup_{(t, x) \in I \times H} \|f(t, x)\|$.

Пусть x_0 — точка множества H и S — открытый шар с центром x_0 и радиусом r , содержащийся в H .

а) Предположим вдобавок, что f равномерно непрерывно в $I \times S$ (это условие автоматически выполняется, если E конечномерно и I содержится в таком компактном промежутке I_0 , что отображение f непрерывно в $I_0 \times H$). Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого компактного промежутка $[t_0, t_0 + h]$ (соответственно $[t_0 - h, t_0]$), содержащегося в I и такого, что $h < r/(M + \varepsilon)$, в этом промежутке существует приближенное решение уравнения $x' = f(t, x)$ с точностью ε , принимающее при $t = t_0$ значение x_0 .

[Предположим, что $\delta > 0$ выбрано так, что из $|t_1 - t_2| \leq \delta$ и $\|x_1 - x_2\| \leq \delta$ следует $\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq \varepsilon$. Рассмотрите подразделение промежутка $[t_0, t_0 + h]$ на промежутки длины, не превосходящей $\inf(\delta, \delta/M)$, и последовательно определите приближенное решение в каждом из этих маленьких промежутков, начиная с t_0 .]

б) Предположим, что E конечномерно и что $I =]t_0 - a, t_0 + a[$: Докажите, что существует решение уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в промежутке $[t_0, t_0 + c]$ (соответственно $[t_0 - c, t_0]$), где $c = \inf(a, r/M)$, принимающее значения в S и равное x_0 при $t = t_0$ (теорема Писано).

[Для каждого n пусть u_n есть $1/n$ -решение (определенное в промежутке $J_n = [t_0, t_0 + c - \frac{1}{n}]$), существование которого доказано в а). Заметьте, что для каждого m сужения функций u_n (при $n \geq m$) на промежутке J_m образуют относительно компактное множество в нормированном пространстве $\mathcal{C}_E(J_m)$ (7.5.7), и воспользуйтесь «диагональным процессом», как в доказательстве теоремы (9.13.2). В заключение примените (10.4.3) и (8.7.8).]

5. Пусть f — отображение пространства (c_0) Банаха (задача 5 § 5.3) в себя, такое, что если $x = (x_n)$, то $f(x) = (y_n)$, где $y_n = |x_n|^{1/2} + 1/(n+1)$. Покажите, что отображение f непрерывно в (c_0) , но не существует решения дифференциального уравнения $x' = f(x)$, определенного в некоторой окрестности точки 0 в $\mathbb{R}$, принимающего значения в (c_0) и равного 0 при $t = 0$.

[Допустив, что такое решение $u(t) = (u_n(t))$ существует, вычислите значения каждой из функций $u_n(t)$ с помощью непосредственного интегрирования и покажите, что при $t \neq 0$ последовательность $(u_n(t))_{n \geq 0}$ не стремится к 0.]

6. а) Обозначения те же, что и в 10.4. Пусть отображение f является аналитическим в $I \times H$, если $K = \mathbb{C}$, и локально липшицевским в $I \times H$, если $K = \mathbb{R}$. Пусть I_0 — открытый шар с центром t_0 и радиусом a , содержащийся в I , и S — открытый шар с центром x_0 и радиусом r , содержащийся в H . Пусть $h(s, z)$ — непрерывная функция, определенная в произведении $[0, a] \times [0, r] \subset \mathbb{R}^2$, такая, что $h(s, z) \geq 0$ и что для каждого $s \in [0, a]$ функция $z \rightarrow h(s, z)$ возрастает на промежутке $[0, r]$. Предположим, что: 1°) $\|f(t, x)\| \leq h(|t - t_0|, \|x - x_0\|)$ в $I_0 \times S$; 2°) существуют такой промежуток $[0, \alpha]$, где $\alpha < a$, и такая функция φ , являющаяся в промежутке $[0, \alpha]$ первообразной некоторой простой функции φ' , что $\varphi(0) = 0$,

$\varphi(s) \in [0, r[$ и $\varphi'(s) > h(s, \varphi(s))$ в промежутке $[0, a]$, за исключением не более чем счетного множества значений s . Покажите, что существует решение u уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в открытом шаре J с центром t_0 и радиусом a , принимающее значения в S и удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$. При этом $\|u(t) - x_0\| \leq \varphi(|t - t_0|)$ в J .

[С помощью (10.5.5) докажите, что найдется наибольший открытый шар J_0 с центром t_0 , содержащийся в I_0 , в котором существует решение v уравнения $x' = f(t, x)$, принимающее значения в S и удовлетворяющее в J_0 условию $\|v(t) - x_0\| \leq \varphi(|t - t_0|)$, и, кроме того, что это решение единственно. Затем, пользуясь теоремой о среднем значении, от противного докажите, что $J \subset J_0$.]

б) Предположим, что $H = E$ и что существует функция $h(z) > 0$, определенная, непрерывная и возрастающая в промежутке $[0, +\infty[$ и такая, что

$\int_0^{+\infty} dz/h(z) = +\infty$ и что $\|f(t, x)\| \leq h(\|x\|)$ в $I_0 \times E$. Покажите, что каж-

дое решение уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в некоторой окрестности точки t_0 , определено в I_0 .

[Воспользуйтесь а).]

с) Если $\|f(t, x)\| \leq M$ в $I_0 \times S$, то существует решение u уравнения $x' = f(t, x)$ в шаре J с центром t_0 и радиусом $\min(a, r/M)$, принимающее значения в S и удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$ (возьмите $h(s, z) = M$). Предположим, что $K = E = C$ и $a \geq r/M$. Покажите, что если отображение f не постоянно, то существует такой открытый шар $J' \supset J$, что u может быть продолжено в решение уравнения $x' = f(t, x)$ в шаре J' , принимающее значения в S .

[Заметьте, что на основании принципа максимума (9.5.9) при $t \in J$ выполняется неравенство $|u'(t)| \leq M$. Для любой точки ζ , для которой $|\zeta| = 1$, рассмотрите функцию $u_\zeta(s) = u(t_0 + \zeta s)$ и, рассуждая как в (10.5.5), покажите, что выполняются условия теоремы (10.5.5).]

Как показывает пример функции $f(t, x) = ((1+x)/2)^{1/n}$ (задача 8 § 9.5) $t_0 = x_0 = 0$ и $a = r = M = 1$ (n — произвольное целое число > 1), в качестве радиуса шара J' нельзя взять число, зависящее только от a , r и M и не зависящее от самого отображения f .

7. Пусть f — действительная ограниченная непрерывная функция в открытом цилиндре $P: |t - t_0| < a, |x - x_0| < b$ в $\mathbb{R}^2$ и пусть $M = \sup_{(t, x) \in P} |f(t, x)|$. Пусть $r = \min(a, b/M)$ и пусть $I =]t_0 - r, t_0 + r[$. Пусть Φ — множество всех решений u уравнения $x' = f(t, x)$, определенных в I , принимающих значения в открытом промежутке $]x_0 - b, x_0 + b[$ и при $t = t_0$ равных x_0 ; множество Φ не пусто (задача 4, б)). Для каждой точки $t \in I$ пусть $v(t, t_0, x_0) = \inf_{u \in \Phi} u(t)$ и $w(t, t_0, x_0) = \sup_{u \in \Phi} u(t)$. Покажите, что функции v и w принадлежат Φ (задача 11 § 7.5); v (соответственно w) называется *минимальным* (соответственно *максимальным*) *решением* уравнения $x' = f(t, x)$ в I , соответствующим точке (t_0, x_0) .

Для каждой точки $\tau \in I$ положим $\xi = v(\tau, t_0, x_0)$. Покажите, что $v(t, \tau, \xi) = v(t, t_0, x_0)$ в некотором промежутке вида $[\tau, \tau + h[$, если $\tau > t_0$,

и вида $]t-h, t]$, если $t < t_0$ (где $h > 0$). Заключите отсюда, что существует наибольший открытый промежуток $]t_1, t_2[$, содержащийся в промежутке $]t_0-a, t_0+a[$, содержащий точку t_0 и обладающий тем свойством, что функция $v(t, t_0, x_0)$ может быть продолжена в непрерывную функцию g , определенную в промежутке $]t_1, t_2[$, принимающую значения в промежутке $]x_0-b, x_0+b[$ и такую, что $g(s) = v(s, t, g(t))$ для каждой точки $t \in]t_1, t_2[$ на некотором промежутке вида $]t, t+h[$, если $t > t_0$, и вида $]t-h, t]$, если $t < t_0$ (где $h > 0$).

[Покажите, что если g_1 — другое такое продолжение функции $v(t, t_0, x_0)$ на промежуток $]t'_1, t'_2[$, то g и g_1 совпадают на пересечении промежутков $]t_1, t_2[$ и $]t'_1, t'_2[$. Для этого рассмотрите верхнюю (соответственно нижнюю) грань множества точек s этого пересечения, для которых g и g_1 совпадают на $[t_0, s[$ (соответственно на $]s, t_0]$). Покажите далее, что либо $t_1 = t_0 - a$ (соответственно, $t_2 = t_0 + a$), либо же $g(t_1+) = x_0 \pm b$ (соответственно $g(t_2-) = x_0 \pm b$).

6. Линейные дифференциальные уравнения

Теорема существования (10.4.5) в частных случаях может быть усилена:

(10.6.1) Пусть $I \subset K$ — открытый шар с центром t_0 и радиусом r . Пусть f — отображение, непрерывное в $I \times E$, если $K = \mathbb{R}$, и аналитическое в $I \times E$, если $K = \mathbb{C}$, и пусть при всевозможных $t \in I$, $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$ выполняется неравенство $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k(|t - t_0|) \cdot \|x_1 - x_2\|$, где $\xi \rightarrow k(\xi)$ — некоторая простая функция в промежутке $[0, r]$. Тогда для каждой точки $x_0 \in E$ существует единственное решение и уравнения (10.4.1), определенное в I и удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$.

Пусть c — верхняя грань таких чисел ρ , $0 < \rho < r$, что существует решение уравнения (10.4.1), определенное при $|t - t_0| < \rho$ и принимающее в точке t_0 значение x_0 . Нам нужно только доказать [в силу (10.5.2)], что $c = r$. Допустим противное. Тогда в силу (10.5.2) существует решение v уравнения (10.4.1), определенное в шаре J : $|t - t_0| < c$ и удовлетворяющее условию $v(t_0) = x_0$. Мы собираемся показать, что выполняются предположения теоремы (10.5.5). Тогда, применяя теорему (10.5.5), мы приходим к противоречию.

Так как в нашем случае $H = E$, то условие $\overline{v(J)} \subset H$ выполняется тривиально. Таким образом, нам нужно только проверить, что отображение $t \rightarrow f(t, v(t))$ ограничено в J . Но функция k ограничена на компактном промежутке $[0, c]$; точно так же непрерывная функция $t \rightarrow \|f(t, x_0)\|$ ограничена на компактном множестве $\bar{J}$. Поэтому

существуют такие два числа $m > 0$ и $h > 0$, что $\|f(t, x)\| \leq m\|x\| + h$ при $t \in J$ и $x \in E$. Отсюда следует, что $\|v'(t)\| \leq m\|v(t)\| + h$ при $t \in J$. Если мы положим $w(\xi) = \|v(t_0 + \lambda\xi)\|$, где $|\lambda| = 1$, то по

теореме о среднем значении получим $w(\xi) \leq \|x_0\| + hc + m \int_0^\xi w(\zeta) d\zeta$.

Следовательно, мы можем применить лемму (10.5.1.3), которая показывает, что $\|v(t)\| \leq ae^{m|t-t_0|} + b$ в J (a и b — константы). Поэтому отображение v ограничено в J , а значит, и $\|f(t, v(t))\| \leq m\|v(t)\| + h$.

В случае когда $K = \mathbb{R}$, условие непрерывности, налагаемое на f , можно ослабить, заменив условием а) замечания (10.4.6).

Линейное дифференциальное уравнение есть уравнение (10.4.1) специального вида

$$(10.6.2) \quad x' = A(t) \cdot x + b(t) \quad (\text{т. е. } f(t, x) = A(t) \cdot x + b(t)),$$

где A — отображение множества I в банахово пространство $\mathcal{L}(E; E)$ непрерывных линейных отображений пространства E в себя (5.7), а b — отображение множества I в E . Мы имеем здесь $H = E$, и в силу (5.7.4) $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x_1 - x_2\|$ для всех $t \in I$, $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$. Применяя теорему (10.6.1) и следующее за ней замечание, мы, таким образом, получаем

(10.6.3) Пусть $I \subset K$ — открытый шар с центром t_0 . Предположим, что функции A и b просты в I , если $K = \mathbb{R}$, и аналитичны в I , если $K = \mathbb{C}$. Тогда для каждой точки $x_0 \in E$ существует единственное решение u уравнения (10.6.2), определенное в I и удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$.

Заметим, что если $b = 0$ и $x_0 = 0$, то решение u уравнения (10.6.2) равно 0.

Из (10.6.3) легко выводим более общий результат:

(10.6.4) При тех же предположениях, что и в теореме (10.6.3), для каждой точки $s \in I$ и каждой точки $x_0 \in E$ существует единственное решение u уравнения (10.6.2), определенное в I и удовлетворяющее условию $u(s) = x_0$.

Заменяя, если нужно, t на $t - t_0$, можем считать, что $t_0 = 0$. Предположим, что I — шар радиуса r . Легко проверить, что отображение $t \rightarrow r^2 \frac{t-s}{st-r^2}$ есть аналитический гомеоморфизм шара I на себя, переводящий точку s в точку 0 (нужно только написать $r^2 \frac{t-s}{st-r^2} = \frac{r^2}{s} \left(1 - \frac{r^2 - |s|^2}{r^2 - st}\right)$, чтобы оценить верхнюю грань абсолютной величины правой части при $|t| \leq r$ и убедиться, что она

равна r). Очевидно, что если теперь

$$A_1(t) = \frac{(\bar{s}t - r^2)^2}{r^2(|s|^2 - r^2)} A\left(r^2 \frac{t-s}{\bar{s}t - r^2}\right) \text{ и } b_1(t) = \frac{(\bar{s}t - r^2)^2}{r^2(|s|^2 - r^2)} b\left(r^2 \frac{t-s}{\bar{s}t - r^2}\right)$$

и если v есть единственное решение дифференциального уравнения

$$x' = A_1(t) \cdot x + b_1(t),$$

определенное в I и удовлетворяющее условию $v(0) = x_0$, то $u(t) = v\left(r^2 \frac{t-s}{\bar{s}t - r^2}\right)$ есть единственное решение уравнения (10.6.2), определенное в I и удовлетворяющее условию $u(s) = x_0$.

В случае когда $E = K^n$, $A(t) = (a_{ij}(t))$ есть квадратная матрица порядка n , а $b(t) = (b_i(t))$ — вектор, причем функции $a_{ij}(t)$ и $b_i(t)$ просты в I , если $K = \mathbb{R}$, и аналитичны, если $K = \mathbb{C}$. Если $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, то уравнение (10.6.2) эквивалентно системе скалярных линейных дифференциальных уравнений

$$(10.6.5) \quad x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Линейное скалярное дифференциальное уравнение порядка $n > 1$

$$(10.6.6) \quad D^n x - a_1(t) D^{n-1} x - \dots - a_{n-1}(t) Dx - a_n(t) x = b(t)$$

эквивалентно системе вида (10.6.5): положим $x_1 = x$, $x_p = D^{p-1}x$ при $2 \leq p \leq n$, и тогда уравнение (10.6.6) превратится в систему

$$(10.6.7) \quad \begin{cases} x'_k = x_{k+1} & \text{при } 1 \leq k \leq n-1; \\ x'_n = a_1(t) x_n + a_2(t) x_{n-1} + \dots + a_n(t) x_1 + b(t). \end{cases}$$

7. Зависимость решения от параметров

(10.7.1) Пусть E — банахово пространство над полем K , I — открытое множество в K , H — открытое множество в E , P — метрическое пространство и f — отображение произведения $I \times H \times P$ в E . Предположим, что: 1°) $(t, x) \rightarrow f(t, x, z)$ есть непрерывно дифференцируемое отображение произведения $I \times H$ в E для любой точки $z \in P$; 2°) f и $D_2 f$ непрерывны в $I \times H \times P$. Тогда для любой точки $(t_0, x_0, z_0) \in I \times H \times P$ существуют такой открытый шар $J \subset I$ с центром t_0 и такой открытый шар $T \subset P$ с центром z_0 , что для каждой точки $z \in T$ в J существует одно и только одно решение $t \rightarrow u(t, z)$ уравнения $x' = f(t, x, z)$, удовлетворяющее условию $u(t_0, z) = x_0$.

Кроме того, отображение $(t, z) \rightarrow u(t, z)$ ограничено и непрерывно в $J \times T$.

Доказательство очень похоже на доказательство теоремы (10.4.5). Пусть J_a — компактный шар с центром t_0 и радиусом a , содержащийся в I . В силу (10.4.5.1) существуют такой открытый шар B с центром x_0 и радиусом b , содержащийся в H , и такой открытый шар T с центром z_0 в P , что $\|f(t, x, z)\| \leq M$ и $\|D_z f(t, x, z)\| \leq k$ в $J_a \times B \times T$. Пусть J_r — замкнутый шар с центром t_0 и радиусом r , где $r < a$. Если $K = \mathbb{R}$, то определим F_r как пространство ограниченных непрерывных отображений u произведения $J_r \times T$ в E , являющееся банаховым пространством. Если $K = \mathbb{C}$, то определим F_r как пространство отображений u произведения $J_r \times T$ в E , ограниченных и непрерывных в $J_r \times T$ и таких, что для каждой точки $z \in T$ отображение $t \rightarrow u(t, z)$ является аналитическим в J_r ; это снова в силу (9.12.1) банахово пространство. Остающаяся после этого часть доказательства теоремы (10.4.5) не изменяется.

(10.7.2) Пусть $I \subset K$ — открытый шар с центром t_0 . Предположим, что A и b непрерывны в $I \times P$ и, если $K = \mathbb{C}$, обладают тем свойством, что для каждой точки $z \in P$ отображения $t \rightarrow A(t, z)$ и $t \rightarrow b(t, z)$ являются аналитическими в I . Для любой точки $x \in E$ пусть $t \rightarrow u(t, z)$ есть решение уравнения $x' = A(t, z) \cdot x + b(t, z)$, определенное в I и удовлетворяющее условию $u(t_0, z) = x_0$. Тогда u непрерывно в $I \times P$.

Пусть $z_0 \in P$; рассмотрим произвольный компактный шар $J \subset I$ с центром t_0 и радиусом r . Достаточно доказать, что u непрерывно в каждой точке (t, z_0) , где $t \in J$. Так как отображение $u(t, z_0)$ непрерывно в J , то оно ограничено на этом компактном множестве; пусть $\|u(t, z_0)\| \leq M$ в J . В силу (10.4.5.1) существует такая окрестность U точки z_0 в P , что $\|A(t, z)\| \leq k$ при $z \in U$ и $t \in J$. Покажем теперь, что если задано произвольное $\varepsilon > 0$, то существует такая окрестность $V \subset U$ точки z_0 в P , что при $t \in J$ и $z \in V$ выполняются неравенства $\|A(t, z) - A(t, z_0)\| \leq \varepsilon$ и $\|b(t, z) - b(t, z_0)\| \leq \varepsilon$. Нужно только заметить, что для любой точки $s \in J$ существуют окрестность W_s точки s в J и окрестность $V_s \subset U$ точки z_0 в P , для которых предыдущие неравенства выполняются в $W_s \times V_s$. Покроем тогда шар J конечным числом окрестностей W_{s_i} и в качестве V возьмем пересечение окрестностей V_{s_i} . Мы можем теперь написать

$$\begin{aligned} u'(t, z) - u'(t, z_0) &= A(t, z) \cdot (u(t, z) - u(t, z_0)) + \\ &+ (A(t, z) - A(t, z_0)) \cdot u(t, z_0) + b(t, z) - b(t, z_0). \end{aligned}$$

Поэтому при $t \in J$ и $z \in V$

$$\|u'(t, z) - u'(t, z_0)\| \leq k \cdot \|u(t, z) - u(t, z_0)\| + \varepsilon(M + 1).$$

Положим $t = t_0 + \lambda \xi$, где $|\lambda| = 1$ и $0 \leq \xi \leq r$, и введем функцию $w(\xi) = \|u(t_0 + \lambda \xi, z) - u(t_0 + \lambda \xi, z_0)\|$. Тогда по теореме о среднем значении $w(\xi) \leq \varepsilon(M+1)r + k \int_0^\xi w(\zeta) d\zeta$ при $0 \leq \xi \leq r$ и, пользуясь (10.5.1.3), получим $w(\xi) \leq \varepsilon(M+1)re^{kr}$ при $0 \leq \xi \leq r$. Иными словами, при $t \in J$ и $z \in V$ мы имеем $\|u(t, z) - u(t, z_0)\| \leq \varepsilon(M+1)re^{kr}$. Так как ε произвольно, это завершает доказательство (поскольку отображение $\xi \rightarrow u(t, z_0)$ непрерывно в J).

(10.7.3) В добавление к предположениям теоремы (10.7.1) допустим, что P есть открытое множество в банаховом пространстве G и что f непрерывно дифференцируемо в $I \times H \times P$. Пусть $J \subset I$ — открытый шар с центром t_0 и $T_1 \subset P$ — открытый шар с центром z_0 , такие, что для каждой точки $z \in T_1$ существует решение $t \rightarrow u(t, z)$ уравнения $x' = f(t, x, z)$ [в силу (10.5.2) необходимо единственное], определенное в J_1 и удовлетворяющее условию $u(t_0, z) = x_0$. Тогда для любого открытого шара J с центром t_0 , для которого $\bar{J} \subset J_1$, существует такой открытый шар $T \subset T_1$ с центром z_0 , что отображение $(t, z) \rightarrow u(t, z)$ непрерывно дифференцируемо в $J \times T$. Далее, для любой точки $z \in T$ отображение $t \rightarrow D_2 u(t, z)$ равно в J решению $U(t, z)$ линейного дифференциального уравнения

$$(10.7.3.1) \quad U' = A(t, z) \circ U + B(t, z),$$

удовлетворяющему условию $U(t_0, z) = 0$, где

$$A(t, z) = D_2 f(t, u(t, z), z) \quad \text{и} \quad B(t, z) = D_3 f(t, u(t, z), z).$$

Пусть J — открытый шар с центром t_0 и радиусом r , для которого $\bar{J} \subset J_1$. В силу (10.4.5.1) существуют такой открытый шар $S \subset H$ с центром x_0 и такой открытый шар $T \subset T_1$ с центром z_0 , что частные производные $D_2 f$ и $D_3 f$ ограничены в $J \times S \times T$; пусть $\|D_2 f(t, x, z)\| \leq a$ и $\|D_3 f(t, x, z)\| \leq b$. Тогда в силу (8.5.2) и (8.9.1)

$$(10.7.3.2) \quad \|f(t, x_1, z_1) - f(t, x_2, z_2)\| \leq a\|x_1 - x_2\| + b\|z_1 - z_2\|$$

при $t \in J$, x_1 и x_2 в S и z_1 и z_2 в T . Принимая во внимание (10.7.3.2), видим, что в силу (10.5.1) при $t \in J$, $z_1 \in T$ и $z_2 \in T$ имеет место неравенство

$$(10.7.3.3) \quad \|u(t, z_1) - u(t, z_2)\| \leq c\|z_1 - z_2\|,$$

где $c = b(e^{ar} - 1)/a$. Докажем теперь, что если заданы точка $z \in T$ и $\varepsilon > 0$, то существует такое $\rho > 0$, что для любой точки $w \in P$,

для которой $z + w \in T$ и $\|w\| \leq \rho$, и для любой точки $t \in \bar{J}$ выполняется неравенство

$$(10.7.3.4) \quad \|f(t, u(t, z + w), z + w) - f(t, u(t, z), z) - \\ - A(t, z) \cdot (u(t, z + w) - u(t, z)) - B(t, z) \cdot w\| \leq \varepsilon \|w\|.$$

В самом деле [на основании (8.6.2), (8.9.1), непрерывности производных D_2f и D_3f в $I \times H \times P$ и неравенства (10.7.3.3)], для каждой точки $s \in \bar{J}$ существует такая окрестность W_s точки s в J_1 и такое число $\rho(s) > 0$, что неравенство (10.7.3.4) выполняется при $t \in W_s$ и $\|w\| \leq \rho(s)$. Если теперь покрыть $\bar{J}$ конечным числом окрестностей W_{s_i} , то, чтобы иметь (10.7.3.4), достаточно только в качестве ρ взять наименьшее из $\rho(s_i)$. Учитывая определение отображения $u(t, z)$, мы можем неравенство (10.7.3.4) переписать также в виде

$$(10.7.3.5) \quad \|D_1u(t, z + w) - D_1u(t, z) - \\ - A(t, z) \cdot (u(t, z + w) - u(t, z)) - B(t, z) \cdot w\| \leq \varepsilon \|w\|.$$

Теперь существование решения $U(t, z)$ в $J \times T$ гарантируется теоремой (10.6.1). Положим $v(t, z, w) = u(t, z + w) - u(t, z) - U(t, z) \cdot w$. Эта функция имеет производную по t , в силу (10.7.3.1) равную

$$D_1v(t, z, w) = D_1u(t, z + w) - D_1u(t, z) - \\ - A(t, z) \cdot (U(t, z) \cdot w) - B(t, z) \cdot w.$$

Неравенство (10.7.3.5), таким образом, можно записать в виде

$$\|D_1v(t, z, w) - A(t, z) \cdot v(t, z, w)\| \leq \varepsilon \|w\|$$

для любой точки $t \in J$ и для любой точки w , для которой $z + w \in T$ и $\|w\| \leq \rho$. Иными словами, $v(t, z, w)$ есть приближенное решение с точностью $\varepsilon \|w\|$ линейного дифференциального уравнения

$$(10.7.3.6) \quad y' = A(t, z) \cdot y.$$

Далее, по определению мы имеем $v(t_0, z, w) = 0$. Так как $\|A(t, z)\| \leq a$ в $J \times T$, то из (10.5.1) мы заключаем [поскольку 0 является решением уравнения (10.7.3.6)], что

$$\|v(t, z, w)\| \leq c_0 \varepsilon \|w\|,$$

где $c_0 = (e^{ar} - 1)/a$. Это неравенство справедливо для любой точки $t \in J$ и любой точки w , для которой $z + w \in T$ и $\|w\| \leq \rho$. Так как ε произвольно, определение производной показывает, что отображение u дифференцируемо по z в любой точке $(t, z) \in J \times T$ и что $D_2u(t, z) = U(t, z)$.

Наконец, из предположений и из (10.7.2) следует, что U непрерывно в $J \times T$. С другой стороны, производная $D_1u(t, z) =$

$= f(t, u(t, z), z)$ непрерывна в $J \times T$ в силу (10.7.1). Следовательно, по теореме (8.9.1) отображение u непрерывно дифференцируемо в $J \times T$, и это завершает доказательство.

(10.7.4) В добавление к предположениям теоремы (10.7.3) допустим, что отображение f непрерывно дифференцируемо в $I \times N \times P$ p раз. Тогда для любого открытого шара J с центром t_0 , для которого $\bar{J} \subset J_1$, шар T можно выбрать так, чтобы отображение u было p раз непрерывно дифференцируемо в $J \times T$.

В случае $p=1$ это теорема (10.7.3). Проведем индукцию по p . Допустим, что утверждение уже доказано для $(p-1)$ раз непрерывно дифференцируемых отображений. Тогда A и B в правой части уравнения (10.7.3.1) являются в $J \times T$ [в силу (8.12.10)] $p-1$ раз непрерывно дифференцируемыми отображениями. Следовательно, по теореме (10.7.3) (примененной к $U(t, z)$) производная $D_2 u(t, z)$ непрерывно дифференцируема в $J \times T$ $p-1$ раз (если T выбрано подходящим образом). С другой стороны, производная $D_1 u(t, z) = f(t, u(t, z), z)$ непрерывно дифференцируема в $J \times T$ $p-1$ раз по предположению индукции и (8.12.10). Таким образом, в силу (8.9.1), (8.12.9) и (8.12.10) производная $Du(t, z)$ непрерывно дифференцируема в $J \times T$ $p-1$ раз. Но отсюда ввиду (8.12.5) следует, что отображение u непрерывно дифференцируемо в $J \times T$ p раз.

(10.7.5) Предположим, что банаховы пространства E и G конечномерны и что отображение f аналитично в $I \times N \times P$. Тогда для любого открытого шара J с центром t_0 , для которого $\bar{J} \subset J_1$, шар T можно выбрать так, чтобы отображение u было аналитическим в $J \times T$.

Если $K=\mathbb{C}$, то это сразу следует из (10.7.1), (10.7.3), (9.10.1) и (9.9.4). Если $K=\mathbb{R}$, то проводим рассуждение, в точности похожее на доказательство теоремы (10.5.3).

(10.7.6) Замечания. Существует несколько усилений и вариантов предыдущих теорем. Например, в теореме (10.7.3) в случае, когда $K=\mathbb{R}$, для того чтобы обеспечить существование производной $D_2 u(t, z)$, существование производной $D_1 f$ не требуется. Нужны только непрерывность производных $D_2 f$ и $D_3 f$ как функций от (x, z) и их ограниченность в $J \times S \times T$, а также тот факт, что отображение $t \rightarrow f(t, h(t), z)$ простое в I для любой функции h , непрерывной в I , и аналогичные требования относительно $D_2 f$ и $D_3 f$.

Можно также рассмотреть случай, когда I есть открытое множество в $\mathbb{R}$ и E — действительное банахово пространство, а G — комплексное банахово пространство. Для любой точки $t \in J_1$ отображение $z \rightarrow u(t, z)$ является тогда аналитическим в T .

Задачи

1. Обозначения те же, что и в 10.4. Пусть I — открытый шар в K с центром t_0 и радиусом a , S — открытый шар в E с центром x_0 и радиусом r и G — нормированное пространство $\mathcal{C}_E^\infty(I \times S)$ (7.2). Для каждого $M > 0$ пусть G_M — шар $\|f\| \leq M$ в G . Пусть L — множество в G , состоящее из всех непрерывных липшицевских отображений произведения $I \times S$ в E (10.5.4). Для каждого $M > 0$ пусть J_M — открытый шар в K с центром t_0 и радиусом $\min(a, r/M)$. Для каждой функции $f \in L \cap G_M$ существует единственное решение $u = U(f)$ уравнения $x' = f(t, x)$, принимающее значения в S , определенное в J_M и удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$ (задача 6, с) § 10.5).

а) Пусть (f_n) — последовательность функций, принадлежащих $L \cap G_{M'}$ и предположим, что последовательность f_n равномерно сходится в $I \times S$ к функции f . Покажите, что каждая предельная точка последовательности функций $u_n = U(f_n)$ в пространстве $\mathcal{C}_E^\infty(J_M)$ является решением уравнения $x' = f(t, x)$, принимающим значения в S и при $t = t_0$ равным x_0 .

[Воспользуйтесь (10.4.3) и (8.7.8).]

Приведите пример, когда последовательность (u_n) не имеет в $\mathcal{C}_E^\infty(J_M)$ ни одной предельной точки (см. задачу 5 § 10.5).

б) Предположим, кроме того, что E конечномерно. Пользуясь результатом задачи а), дайте новое доказательство теоремы Пеано (задача 4, б) § 10.5).

[Воспользуйтесь теоремой Асколи (7.5.7) и теоремой Вейерштрасса об аппроксимации.]

2. а) Пусть g и h — две действительные непрерывные функции в цилиндре P : $|t - t_0| < a$, $|x - x_0| < b$ в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие в P неравенству $g(t, x) < h(t, x)$. Пусть u (соответственно v) — решение уравнения $x' = g(t, x)$ (соответственно $x' = h(t, x)$), определенное в промежутке $[t_0, t_0 + c]$, принимающее значения в промежутке $]x_0 - b, x_0 + b[$ и удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$ (соответственно $v(t_0) = x_0$). Покажите, что при $t_0 < t < t_0 + c$ имеет место неравенство $u(t) < v(t)$.

[Рассмотрите верхнюю грань таких точек s промежутка $[t_0, t_0 + c]$, для которых при $t_0 < t < s$ имеет место неравенство $u(t) < v(t)$.]

б) Пусть g — непрерывная действительная функция в P и u — максимальное решение уравнения $x' = g(t, x)$, соответствующее точке (t_0, x_0) (задача 7 § 10.5). Предположим, что u определено (по крайней мере) в промежутке $[t_0, t_0 + c]$ и принимает значения в промежутке $]x_0 - b, x_0 + b[$. Покажите, что в каждом компактном промежутке $[t_0, t_0 + d]$, содержащемся в $[t_0, t_0 + c]$, при достаточно малом $\epsilon > 0$ определены максимальное и минимальное решения уравнения $x' = g(t, x) \pm \epsilon$; они принимают значения в промежутке $]x_0 - b, x_0 + b[$ и равномерно сходятся к u , когда ϵ стремится к 0.

[Если задано $\epsilon_0 > 0$, то существует такое $s > t_0$, что максимальные и минимальные решения всех уравнений $x' = g(t, x) \pm \epsilon$ при $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, соот-

ветствующие точке (t_0, x_0) , определены в промежутке $[t_0, s]$ и принимают на нем значения в промежутке $x_0 - b, x_0 + b$ [Заметьте, что все эти функции образуют на промежутке $[t_0, s]$ равностепенно непрерывное множество и, применяя результат задачи а), теорему Асколи и теоремы (10.4.3) и (8.7.8), докажите равномерную сходимость к u на промежутке $[t_0, s]$. Наконец, пользуясь, в частности, последним утверждением задачи 7 § 10.5, покажите, что верхняя грань чисел d , обладающих указанным свойством, необходимо равняется c .]

с) Пусть g и h — две непрерывные действительные функции в цилиндре P , удовлетворяющие в P неравенству $g(t, x) \leq h(t, x)$. Пусть $[t_0, t_0 + c]$ — промежуток, в котором определены и принимают значения в промежутке $x_0 - b, x_0 + b$ [решение u уравнения $x' = g(t, x)$, удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$, и максимальное решение v уравнения $x' = h(t, x)$, соответствующее точке (t_0, x_0)]. Покажите, что при $t_0 \leq t \leq t_0 + c$ имеет место неравенство $u(t) \leq v(t)$.

[Примените а) и б).]

3. а) Покажите, что заключения задачи 6, а) § 10.5 остаются справедливыми, если E конечномерно и если предположения изменены следующим образом: 1°) отображение f предполагается непрерывным в $I \times H$ (в случае когда $K = \mathbb{R}$), но не обязательно локально липшицевским; 2°) функция φ является максимальным решением (задача 7 § 10.5) уравнения $z' = h(s, z)$ в промежутке $[0, a]$, соответствующим точке $(0, 0)$.

[Воспользуйтесь результатами задач 1, а) и 2, б) и примените диагональный процесс, как в задаче 4, б) § 10.5.]

б) Предположим, кроме того, что существует последовательность $(Y_n)_{n \geq 0}$ действительных функций, непрерывных в промежутке $[0, a]$, принимающих

значения в промежутке $[0, r]$ и таких, что для $n \geq 1$ $Y_n(s) = \int_0^s h(\xi, Y_{n-1}(\xi)) d\xi$

при $0 \leq s \leq a$. Пусть отображение y_0 непрерывно в J , если $K = \mathbb{R}$, и аналитично в J , если $K = \mathbb{C}$, принимает значения в S и удовлетворяет в J условию $\|y_0(t) - x_0\| \leq Y_0(|t - t_0|)$. Покажите, что существует последовательность $(y_n)_{n \geq 1}$ отображений шара J в S , непрерывных, если $K = \mathbb{R}$, аналитических, если $K = \mathbb{C}$, и таких, что $y_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\theta, y_{n-1}(\theta)) d\theta$ и что

$\|y_n(t) - x_0\| \leq Y_n(|t - t_0|)$ в J при каждом $n \geq 1$. В случае когда $K = \mathbb{C}$, заключите отсюда, что последовательность (y_n) сходится в J (равномерно на каждом компактном подмножестве шара J) к единственному решению u уравнения $x' = f(t, x)$.

[Воспользуйтесь (9.13.2) и доказательством теоремы (10.4.5).]

Справедливо ли последнее утверждение в случае, когда $K = \mathbb{R}$ и отображение f не предполагается локально липшицевским (ср. с задачей 2 § 10.5)?

4. а) Пусть $I = [t_0, t_0 + c] \subset \mathbb{R}$ и пусть ω — действительная непрерывная функция ≥ 0 , определенная в $I \times \mathbb{R}$. Пусть S — открытый шар с цент-

ром x_0 в E и пусть f — непрерывное отображение произведения $I \times S$ в E , для которого при всевозможных $t \in I$, $x_1 \in S$ и $x_2 \in S$ выполняется неравенство $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \omega(t, \|x_1 - x_2\|)$. Пусть u и v — два решения уравнения $x' = f(t, x)$, определенные в I , принимающие значения в S и удовлетворяющие условиям $u(t_0) = x_1$ и $v(t_0) = x_2$. Пусть w — максимальное решение (задача 7 § 10.5) уравнения $z' = \omega(t, z)$, соответствующее точке $(t_0, \|x_1 - x_2\|)$, и предположим, что w определено в I . Покажите, что в I имеет место неравенство $\|u(t) - v(t)\| \leq w(t)$.

[Рассмотрите для достаточно малого $\varepsilon > 0$ максимальное решение $w(t, \varepsilon)$ уравнения $z' = \omega(t, z) + \varepsilon$, соответствующее точке $(t_0, \|x_1 - x_2\|)$, определенное в промежутке $[t_0, t_0 + d]$, где $d < c$ (задача 2). Покажите, допустив противное, что при $t_0 \leq t \leq t_0 + d$ имеет место неравенство $\|u(t) - v(t)\| \leq w(t, \varepsilon)$. Рассмотрите верхнюю грань t_1 точек t , в которых $\|u(t) - v(t)\| > w(t, \varepsilon)$, где $y(t) = u(t) - v(t)$, и заметьте, что при $t > t_1$

$$\|y(t)\| - \|y(t_1)\| \leq \|y(t) - y(t_1)\| \leq \sup_{t_1 < s < t} \|y'(s)\| \cdot (t - t_1).$$

b) Пусть $I' =]t_0 - c, t_0]$, и предположим, что выполняются предположения задачи а), если I заменить на I' . Пусть теперь w — минимальное решение уравнения $z' = \omega(t, z)$, соответствующее точке $(t_0, \|x_1 - x_2\|)$, и предположим, что оно определено в I' . Покажите, что в I' имеет место неравенство $\|u(t) - v(t)\| \geq w(t)$.

[Тот же метод.]

5. а) Пусть I — открытый промежуток $]0, a[$ в $\mathbf{R}$ и пусть ω — такая непрерывная функция в произведении $I \times [0, +\infty[$, что $\omega(t, z) \geq 0$ и $\omega(t, 0) = 0$ при $t \in I$. Функция ω может быть продолжена на $I \times \mathbf{R}$, условием $\omega(t, z) = \omega(t, -z)$ при $z < 0$. Пусть, далее, w — решение уравнения $z' = \omega(t, z)$, определенное в открытом промежутке $]0, a[\subset I$, которое, полагая $w(0) = 0$, можно по непрерывности продолжить на полуоткрытый промежуток $[0, a[$. Допустим, что если, вдобавок, в этом случае производная $w'(0)$ будет определена и равна 0, то необходимо $w(t) = 0$ тождественно на промежутке $]0, a[$. Пусть теперь S — открытый шар с центром x_0 в действительном банаховом пространстве E и f — непрерывное отображение произведения $[0, a[\times S$ в E , для которого при $0 < t < a$, $x_1 \in S$ и $x_2 \in S$ выполняется неравенство $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \omega(t, \|x_1 - x_2\|)$. Покажите, что в промежутке $[0, a[$, где $a < a$, существует не более одного решения u уравнения $x' = f(t, x)$, удовлетворяющего условию $u(0) = x_0$.

[Проведите доказательство от противного: если v — второе решение, удовлетворяющее условию $v(0) = x_0$, то оцените $\|u(t) - v(t)\|$ в $]0, a[$ снизу, пользуясь результатом задачи 4, b).]

b) Пусть $\theta(t)$ — непрерывная функция, определенная в промежутке $]0, a[$ и такая, что $\theta(t) \geq 0$. Покажите, что если интеграл $\int_0^a \frac{\theta(t)}{t} dt$ сходится, то результат задачи а) применим к функции $\omega(t, z) = (1 + \theta(t))z/t$.

Если, напротив, $\int_0^a \frac{\theta(t)}{t} dt = +\infty$, то приведите пример непрерывной действительной функции f в произведении $[0, a[\times \mathbb{R}$, для которой выполняется неравенство $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \frac{1+\theta(t)}{t} |x_1 - x_2|$, а уравнение $x' = f(t, x)$ имеет в промежутке $[0, a[$ бесконечное множество решений, равных 0 при $t=0$.

[Пусть $\varphi(t) = \exp\left(-\int_t^a \frac{1+\theta(s)}{s} ds\right)$. Определите $f(t, x)$ как функцию, равную $(1+\theta(t))x/t$ при $|x| \leq \varphi(t)$ и не зависящую от x при $|x| > \varphi(t)$.]

6. Пусть I — открытый промежуток в $\mathbb{R}$ и H — открытое множество в банаховом пространстве E над $\mathbb{R}$. Пусть t_0 — точка промежутка I .

а) Предположим, что отображение f непрерывно в $I \times H$ и существует такое число k , $0 < k < 1$, что при $t \neq t_0$ и произвольных $x_1 \in H$ и $x_2 \in H$ выполняется неравенство $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq (k/|t - t_0|)\|x_1 - x_2\|$. Тогда существует не более одного решения уравнения $x' = f(t, x)$, принимающего при $t = t_0$ данное значение $x_0 \in H$ и определенного в некоторой окрестности точки t_0 (задача 5, а)). Пусть, далее, u и v — два приближенных решения с точностью ε_1 и ε_2 уравнения $x' = f(t, x)$ в открытом промежутке J с центром t_0 , целиком содержащемся в I , удовлетворяющие условиям $u(t_0) = v(t_0) = x_0$. Тогда для любой точки $t \in J$

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 - k} |t - t_0|.$$

[Используйте тот же метод, что и в (10.5.1).]

б) Пусть $I =]-1, 1[$, $H = E = \mathbb{R}$ и пусть Φ — множество всех действительных функций f , непрерывных в $I \times H$ и таких, что для любой точки $t \neq 0$ промежутка I выполняется неравенство $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \|x_1 - x_2\|/|t|$. Тогда существует не более одного решения уравнения $x' = f(t, x)$, принимающего при $t = t_0$ данное значение и определенного в некоторой окрестности точки t_0 (задача 5, а)). Но докажите, что не существует ни одной такой функции $\varphi(t, \varepsilon) \geq 0$, чтобы для любой пары (u, v) приближенных решений с точностью ε любого уравнения $x' = f(t, x)$, где $f \in \Phi$, определенных в I и удовлетворяющих условию $u(t_0) = v(t_0)$, для каждой точки $t \in I$ выполнялось неравенство $\|u(t) - v(t)\| \leq \varphi(|t|, \varepsilon)$.

[Для любого $\alpha \in]0, 1[$ пусть f — непрерывная функция, равная x/t при $|x| \leq t^2/(\alpha - t)$, $0 \leq t < \alpha$, и при $t \geq \alpha$ и не зависящая от t при остальных значениях (t, x) , для которых $t \geq 0$. При $t \leq 0$ положим $f(t, x) = f(-t, x)$. Пусть $u = 0$ и $v(t) = \varepsilon t$ при $|t| \leq \alpha$, а при остальных значениях t в качестве v возьмите решение уравнения $x' = f(t, x)$.]

7. Обозначения те же, что и в 10.4. Предположим, что E конечномерно и f непрерывно в $I \times H$. Пусть (t_0, x_0) — точка произведения $I \times H$,

J — открытый шар с центром t_0 , содержащийся в I , и S — открытый шар с центром x_0 , для которого $\bar{S} \subset H$. Предположим, что отображение f ограничено в $J \times S$ и что выполняются следующие условия:

1°) существует не более одного решения уравнения $x' = f(t, x)$, определенного в некотором открытом промежутке, содержащемся в J и содержащем t_0 , и принимающего при $t = t_0$ значение x_0 ;

2°) существует такая последовательность $(u_n)_{n \geq 0}$ непрерывных отображений шара J в S , что $u_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_{n-1}(s)) ds$ при $n \geq 1$ и $t \in J$;

3°) для каждой точки $t \in J$ последовательность $(u_{n+1}(t) - u_n(t))$ при n , стремящемся к $+\infty$, сходится к 0.

Покажите, что последовательность (u_n) равномерно сходится на каждом компактном промежутке $J' \subset J$, содержащем t_0 , к такому решению уравнения $x' = f(t, x)$, которое при $t = t_0$ равно x_0 .

[Заметьте, что последовательность (u_n) равностепенно непрерывна; воспользуйтесь теоремой Асколи (7.5.7), а также теоремами (3.16.4) и (8.7.8).]

8. Предположим, что пространство E конечномерно, ω и f удовлетворяют условиям задачи 5 и, кроме того, для каждого $t \in]0, +\infty[$, а [функция $z \rightarrow \omega(t, z)$ возрастает на промежутке $[0, +\infty[$. Тогда существует не более одного решения уравнения $x' = f(t, x)$, определенного в промежутке $[0, \alpha[\subset [0, a[$ и принимающего при $t = 0$ значение x_0 (задача 5, а)). Предположим вдобавок, что в промежутке $J = [0, \alpha[\subset [0, a[$ существует последовательность $(u_n)_{n \geq 0}$ непрерывных отображений промежутка J в S , таких,

что $u_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, u_{n-1}(s)) ds$ при $n \geq 1$ и $t \in J$.

а) Для каждой точки $t \in J$ пусть $y_n(t) = \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|$, $z_n(t) = \sup_{k \geq 0} u_{n+k}(t)$ и $w(t) = \inf_{n \geq 0} z_n(t)$. Покажите, что функции z_n и w непрерывны в J .

[Воспользуйтесь задачей 11 § 7.5.]

б) Пусть t и $t-h$ — две точки промежутка J ($h > 0$). Покажите, что для каждого $\delta > 0$ существует такое N , что при $n \geq N$

$$|y_n(t) - y_n(t-h)| \leq \int_{t-h}^t \omega(s, w(s) + \delta) ds.$$

[Воспользуйтесь теоремой о среднем значении (8.5.1), а также теоремой (7.5.5).]

с) Выведите из б), что при $n \geq N$

$$|z_n(t) - z_n(t-h)| \leq \int_{t-h}^t \omega(s, w(s) + \delta) ds.$$

[Рассмотрите случаи $z_n(t) \leq z_n(t-h)$ и $z_n(t) \geq z_n(t-h)$.]

Поэтому $|\omega(t) - \omega(t-h)| \leq \int_{t-h}^t \omega(s, \omega(s)) ds$.

[Используйте (8.7.8)].

д) Заключите, что $\omega(t) = 0$ в J [то же рассуждение, что и в задачах 4, б) и 5, а)], и, пользуясь задачей 7, докажите, что последовательность (u_n) равномерно сходится в J к решению уравнения $x' = f(t, x)$, принимающему при $t = 0$ значение x_0 .

9. Обозначения те же, что и в 10.4. Предположим, что E конечномерно, а f непрерывно и ограничено в $I \times H$. Предположим, кроме того, что существует не более одного решения уравнения $x' = f(t, x)$, определенного в любом открытом промежутке $J \subset I$, содержащем t_0 , и при $t = t_0$ равного $x_0 \in H$. Предположим, что для любого целого $n > 0$ существует $1/n$ -решение u_n уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в I , принимающее значения в H и удовлетворяющее условию $u_n(t_0) = x_0$. Покажите, что на любом компактном промежутке, содержащемся в I , последовательность (u_n) равномерно сходится к решению u уравнения $x' = f(t, x)$, принимающему значения в H и удовлетворяющему условию $u(t_0) = x_0$.

[Проведите то же рассуждение, что и в задаче 7.]

8. Зависимость решения от начальных условий

(10.8.1) Пусть отображение f является локально липшицевским (10.5.4) в $I \times H$, если $K = \mathbb{R}$, и аналитическим в $I \times H$, если $K = \mathbb{C}$. Тогда для любой точки $(a, b) \in I \times H$:

1°. Найдутся открытый шар $J \subset I$ с центром a и открытый шар $V \subset H$ с центром b , такие, что для каждой точки $(t_0, x_0) \in J \times V$ существует единственное решение $t \rightarrow u(t, t_0, x_0)$ уравнения (10.4.1), определенное в J , принимающее значения в H и удовлетворяющее условию $u(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

2°. Отображение $(t, t_0, x_0) \rightarrow u(t, t_0, x_0)$ равномерно непрерывно в $J \times J \times V$.

3°. Существует такой открытый шар $W \subset V$ с центром b , что для любой точки $(t, t_0, x_0) \in J \times J \times W$ уравнение $x_0 = u(t_0, t, x)$ имеет в V единственное решение $x = u(t, t_0, x_0)$.

1°. По предположению существуют такой шар $J_0 \subset I$ с центром a и такой шар $B_0 \subset H$ с центром b и радиусом r , что в $J_0 \times B_0$ выполняется неравенство $\|f(t, x)\| \leq M$ и что при $t \in J_0$, $x_1 \in B_0$ и $x_2 \in B_0$ выполняется неравенство $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \cdot \|x_1 - x_2\|$. В силу (10.4.5) существуют открытый шар $J_1 \subset J_0$ с центром t_0 и единственное решение v уравнения (10.4.1), определенное в J_1 , принимающее значения в H и удовлетворяющее условию $v(a) = b$. Мы собираемся показать, что нашим требованиям отвечают, если только r достаточно мало, открытый шар V с центром b и радиусом $r/2$ и открытый шар J с центром a и радиусом r . Применим теорему (10.5.6)

к случаю $\alpha = \varepsilon = 0$. Она показывает, что если для каждой точки $t \in J$

$$(10.8.1.1) \quad \|v(t) - b\| + \|v(t_0) - x_0\| e^{k|t-t_0|} < r,$$

то существует решение уравнения (10.4.1), определенное в J , принимающее значения в B_0 и равное $x_0 \in V$ в точке $t_0 \in J$. Но по теореме о среднем значении для каждой точки $t \in J$ мы имеем $\|v(t) - b\| \leq M|t - a| \leq Mr$. Так как по предположению $\|x_0 - b\| \leq r/2$, то неравенство (10.8.1.1) будет удовлетворяться, если r выбрано так, что

$$(10.8.1.2) \quad Mr + \left(Mr + \frac{r}{2}\right) e^{2kr} < r,$$

что, конечно, будет выполнено при достаточно малых значениях $r > 0$.

2°. По теореме о среднем значении

$$(10.8.1.3) \quad \|u(t_1, t_0, x_0) - u(t_2, t_0, x_0)\| \leq M|t_2 - t_1|$$

при $t_0 \in J$, $t_1 \in J$, $t_2 \in J$ и $x_0 \in V$. В силу (10.5.1)

$$(10.8.1.4) \quad \|u(t, t_0, x_1) - u(t, t_0, x_2)\| \leq e^{2kr} |x_2 - x_1|$$

при $t \in J$, $t_0 \in J$, $x_1 \in V$ и $x_2 \in V$. Наконец, неравенство (10.8.1.3) дает по определению при $t_0 = t_2$

$$\|u(t_1, t_2, x_0) - x_0\| \leq M|t_2 - t_1|,$$

и [поскольку $t \rightarrow u(t, t_2, x_0)$ есть единственное решение уравнения (10.4.1) в J , которое в точке t_1 равно $u(t_1, t_2, x_0)$] мы в силу (10.5.1) имеем

$$(10.8.1.5) \quad \|u(t, t_1, x_0) - u(t, t_2, x_0)\| \leq Me^{2kr} |t_2 - t_1|$$

при $t \in J$, $t_1 \in J$, $t_2 \in J$ и $x_0 \in V$. Три неравенства — (10.8.1.3), (10.8.1.4) и (10.8.1.5) — доказывают, что отображение u равномерно непрерывно в $J \times J \times V$.

3°. В силу (10.8.1.3) в $J \times J \times V$ выполняется неравенство $\|u(t, t_0, x_0) - x_0\| \leq M|t - t_0| \leq 2Mr$. Предположим, что r удовлетворяет неравенству (10.8.1.2) и, кроме того, неравенству $2Mr < r/4$. Тогда если W — открытый шар с центром b и радиусом $r/4$, то при $t \in J$, $t_0 \in J$ и $x_0 \in W$ мы будем иметь $u(t, t_0, x_0) \in V$. Пусть $x = u(t, t_0, x_0)$ для таких значений t, t_0 и x_0 . Тогда отображение $s \rightarrow u(s, t, x)$ определено в J и является единственным решением уравнения (10.4.1), принимающим значения в H и равным x в точке t . Но так как отображение $s \rightarrow u(s, t_0, x_0)$ обладает этими свойствами, то при $s \in J$ мы имеем $u(s, t, x) = u(s, t_0, x_0)$. В частности, $x_0 = u(t_0, t_0, x_0) = u(t_0, t, x)$. Предположим теперь, что точка $y \in V$ такова, что $u(t_0, t, y) = x_0$. Тогда отображение $s \rightarrow u(s, t, y)$ является решением уравнения (10.4.1), определенным в J и при $s = t_0$,

принимая значение x_0 . Следовательно, $u(s, t, y) = u(s, t_0, x_0)$ для любой точки $s \in J$, и, в частности, $y = u(t, t_0, x_0) = x$ при $s = t$, что и завершает доказательство.

(10.8.2) *Предположим в обозначениях теоремы (10.8.1), что f непрерывно дифференцируемо [соответственно p раз непрерывно дифференцируемо, аналитично (если E конечномерно)] в $I \times H$. Тогда J и V можно выбрать так, что функция $(t, t_0, x_0) \rightarrow u(t, t_0, x_0)$ будет непрерывно дифференцируема (соответственно p раз непрерывно дифференцируема, аналитична) в $J \times J \times V$.*

Действительно, если мы положим $v(s, t_0, x_0) = u(t_0 + s, t_0, x_0) - x_0$, то мы увидим, что отображение $s \rightarrow v(s, t_0, x_0)$ является решением уравнения $z' = f(t_0 + s, x_0 + z)$, принимающим в точке $s = 0$ значение 0. Наше утверждение тогда следует из (10.7.3), (10.7.4) и (10.7.5).

Для линейных дифференциальных уравнений имеются значительно более точные результаты. Уравнение

$$(10.8.3) \quad x' = A(t) \cdot x$$

называется *однородным* линейным дифференциальным уравнением, соответствующим уравнению (10.6.2). Разность любых двух решений уравнения (10.6.2) в I является решением уравнения (10.8.3) в I , и решения уравнения (10.8.3) в I образуют векторное подпространство $\mathcal{H}$ пространства $\mathcal{C}_E(I)$ всех непрерывных отображений множества I в E .

(10.8.4) *Для каждой точки (s, x_0) пусть $t \rightarrow u(t, s, x_0)$ есть единственное решение уравнения (10.8.3), определенное в I и удовлетворяющее условию $u(s, s, x_0) = x_0$. Тогда:*

1°. *Для каждой точки $t \in I$ отображение $x_0 \rightarrow u(t, s, x_0)$ есть линейный гомеоморфизм $\mathcal{C}(t, s) \in \mathcal{L}(E)$ пространства E на себя.*

2°. *Отображение $t \rightarrow \mathcal{C}(t, s)$ шара $\hat{I}$ в банахово пространство $\mathcal{L}(E)$ есть решение линейного однородного дифференциального уравнения*

$$(10.8.4.1) \quad U' = A(t) \circ U,$$

при $t = s$ равное I_E (тождественному отображению пространства E).

3°. *Для любых трех точек r, s и t шара $\hat{I}$*

$$(10.8.4.2) \quad \mathcal{C}(r, t) = \mathcal{C}(r, s) \circ \mathcal{C}(s, t) \quad \text{и} \quad \mathcal{C}(s, t) = (\mathcal{C}(t, s))^{-1}.$$

Ясно, что отображение $u(t, s, x_1) + u(t, s, x_2)$ (соответственно $\lambda u(t, s, x_0)$) есть решение уравнения (10.8.3), при $t = s$ равное $x_1 + x_2$ (соответственно λx_0). Поэтому (10.6.4) оно равно $u(t, s, x_1 + x_2)$ (соответственно $u(t, s, \lambda x_0)$) в I . Тем самым доказано.

что отображение $x_0 \rightarrow u(t, s, x_0)$ линейно. Обозначим его символом $C(t, s)$ (мы еще не доказали, что это отображение непрерывно в E).

Билинейное отображение $(X, Y) \rightarrow X \circ Y$ произведения $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ в $\mathcal{L}(E)$ непрерывно дифференцируемо (8.1.4). Обозначим через $R(t)$ непрерывное линейное отображение $U \rightarrow A(t) \circ U$ пространства $\mathcal{L}(E)$ в себя. Из (5.7.5) сразу следует, что

$$\|R(t) - R(t')\| \leq \|A(t) - A(t')\|.$$

Поэтому в случае, когда $K = R$, если отображение $t \rightarrow A(t)$ простое, то и отображение $t \rightarrow R(t)$ простое. С другой стороны, если отображение $t \rightarrow A(t)$ дифференцируемо, то дифференцируемо и отображение $t \rightarrow R(t)$, и его производной [отождествленной (8.4) с элементом пространства $\mathcal{L}(E)$] является отображение $U \rightarrow A'(t) \circ U$ [(8.1.3) и (8.2.1)]. Поэтому если непрерывно отображение $t \rightarrow A'(t)$, то непрерывно и отображение $t \rightarrow R'(t)$.

Таким же образом мы можем заключить, что если $K = C$ и если отображение $t \rightarrow A(t)$ является аналитическим в I , то и отображение $t \rightarrow R(t)$ будет аналитическим (9.10.1).

В любом из случаев мы можем к уравнению (10.8.4.1) применить теорему (10.6.4). Пусть $V(t)$ — решение этого уравнения, которое при $t = s$ равно тождественному отображению. Для любой точки $t \in I$ имеем

$$D(V(t) \cdot x_0) = V'(t) \cdot x_0 = A(t) \cdot (V(t) \cdot x_0)$$

[(8.1.3) и (8.2.1)] и, кроме того, при $t = s$ имеем $V(s) \cdot x_0 = x_0$. Следовательно, применяя теорему (10.6.4) к уравнению (10.8.3), получаем, что $C(t, s) \cdot x_0 = V(t) \cdot x_0$ для любой точки $x_0 \in E$, и поэтому $C(t, s) = V(t)$ при $t \in I$. Это доказывает, что $C(t, s) \in \mathcal{L}(E)$ и что отображение $t \rightarrow C(t, s)$ есть решение уравнения (10.8.4.1), при $t = s$ равное тождественному отображению.

Наконец, функция $t \rightarrow C(t, r) \cdot x_0$ есть решение уравнения (10.8.3), при $t = s$ равное $C(s, r) \cdot x_0$. Поэтому по определению для любой точки $x_0 \in E$

$$C(t, r) \cdot x_0 = C(t, s) \cdot (C(s, r) \cdot x_0) = (C(t, s) \circ C(s, r)) \cdot x_0,$$

что доказывает первое из соотношений (10.8.4.2). Это соотношение дает $C(t, s) \circ C(s, t) = C(t, t)$, где $C(t, t)$ — тождественное отображение. Поэтому линейное отображение $C(s, t)$ является биективным отображением пространства E , обратным к которому является отображение $C(t, s)$ (таким образом, также принадлежащее пространству $\mathcal{L}(E)$). Этим мы завершили доказательство теоремы (10.8.4).

Оператор $C(t, s)$ называется *резольвентой* уравнения (10.8.3) [или уравнения (10.6.2)] в I .

(10.8.5) Отображение $(s, t) \rightarrow C(s, t)$ произведения $I \times I$ в $\mathcal{L}(E)$ непрерывно.

В самом деле, мы можем написать $C(s, t) = C(s, t_0) \circ (C(t, t_0))^{-1}$, и требуемый результат следует тогда из (10.8.4), (5.7.5) и (8.3.2).

Знание резольвенты $C(s, t)$ позволяет дать явное решение уравнения (10.6.2), принимающее при $t = t_0$ значение x_0 .

(10.8.6) Функция

$$u(t) = C(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t (C(t, s) \cdot b(s)) ds$$

есть решение уравнения (10.6.2) в I , при $t = t_0$ равное x_0 (если $K = \mathbb{C}$, то интеграл берется вдоль сегмента с началом t_0 и концом t).

В самом деле, в силу (10.8.4.2) мы можем написать, пользуясь (8.7.6),

$$\int_{t_0}^t (C(t, s) \cdot b(s)) ds = C(t, t_0) \cdot \left(\int_{t_0}^t (C(t_0, s) \cdot b(s)) ds \right).$$

Следовательно, мы имеем $u(t) = C(t, t_0) \cdot z(t)$, где

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (C(t_0, s) \cdot b(s)) ds.$$

Поэтому [(8.1.4) и (8.2.1)]

$$u'(t) = C'(t, t_0) \cdot z(t) + C(t, t_0) \cdot z'(t).$$

Но в силу (10.8.4.1) $C'(t, t_0) = A(t) \circ C(t, t_0)$ и, с другой стороны, по определению, $z'(t) = C(t_0, t) \cdot b(t)$. Таким образом,

$$u'(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t),$$

и, так как $u(t_0) = x_0$, это завершает доказательство.

В случае когда $E = K^n$ и уравнение (10.6.2) записывается как система скалярных линейных дифференциальных уравнений (10.6.5), резольвента¹⁾ $C(s, t)$ есть невырожденная квадратная матрица $(c_{ij}(s, t))$ порядка n , элементы которой непрерывны в $I \times I$, а функция $t \rightarrow c_{ij}(t, s)$ есть первообразная некоторой простой функции в I , если $K = \mathbb{R}$, и аналитическая функция в I , если $K = \mathbb{C}$.

¹⁾ Называемая в этом случае *фундаментальной матрицей решений*. — Прим. ред.

Задачи

а) Предположим, что A и b в линейном дифференциальном уравнении (10.6.2) являются аналитическими функциями в односвязном открытом множестве $H \subset \mathbb{C}$. Покажите, что для любой точки $t_0 \in H$ и любой точки $x_0 \in E$ существует единственное решение u уравнения (10.6.2), определенное в H и удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$.

[Проведите рассуждение такого же характера, как в (9.6.3): теорема (10.6.3) позволяет определить решение уравнения (10.6.2) вдоль ломаной линии (задача 4 § 5.1) в H , и рассуждение из (9.6.3) вместе с локальной единственностью приводит к требуемому результату.]

б) Покажите, что результат задачи а) несправедлив для скалярного дифференциального уравнения $x' = t/x$: если дано любое односвязное открытое множество $H \subset \mathbb{C}$ и любая точка $t_0 \in H$, то существует такая точка $x_0 \in E$, что $x_0 \neq 0$ и что не существует никакого решения этого уравнения, определенного в H и при $t = t_0$ равного x_0 .

9. Теорема Фробениуса

Пусть E и F — два банаховых пространства (над K). A (соответственно B) — открытое множество в E (соответственно в F) и U — отображение произведения $A \times B$ в банахово пространство $\mathcal{L}(E; F)$ (5.7). Дифференцируемое отображение u множества A в множество B является решением дифференциального уравнения

$$(10.9.1) \quad y' = U(x, y),$$

если для любой точки $x \in A$ мы имеем

$$(10.9.2) \quad u'(x) = U(x, u(x)).$$

В случае когда $E = K$, пространство $\mathcal{L}(E; F)$ отождествляется с F (5.7.6), и дифференциальное уравнение (10.9.1) является, таким образом, обыкновенным дифференциальным уравнением (10.4.1). В случае когда пространство $E = K^n$ конечномерно, линейное отображение U пространства E в F определяется своими значениями в каждом из n базисных векторов пространства E , и по определению уравнение (10.9.2), таким образом, эквивалентно системе n уравнений с частными производными

$$(10.9.3) \quad D_i y = f_i(x_1, \dots, x_n, y) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Вообще говоря, такая система при $n > 1$ не будет иметь решения, даже если f_i в правой части равенства являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Мы будем говорить, что уравнение (10.9.1) *вполне интегрируемо* в $A \times B$, если для каждой точки $(x_0, y_0) \in A \times B$ найдется такая открытая окрестность S точки x_0 в A , что существует единственное решение u уравне-

ния (10.9.1), определенное в S , принимающее значения в B и удовлетворяющее условию $u(x_0) = y_0$.

Во всем последующем мы будем предполагать, что отображение U непрерывно дифференцируемо в $A \times B$. Для каждой точки $(x, y) \in A \times B$ частная производная $D_1U(x, y)$ (соответственно $D_2U(x, y)$) является элементом пространства $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ (соответственно $\mathcal{L}(F; \mathcal{L}(E; F))$), который можно отождествить с непрерывным билинейным отображением $(s_1, s_2) \rightarrow (D_1U(x, y) \cdot s_1) \cdot s_2$ произведения $E \times E$ в F ; этот элемент обозначается символом $(s_1, s_2) \rightarrow D_1U(x, y) \cdot (s_1, s_2)$ (соответственно с непрерывным билинейным отображением $(t, s) \rightarrow (D_2U(x, y) \cdot t) \cdot s$ произведения $F \times E$ в F , обозначаемым символом $(t, s) \rightarrow D_2U(x, y) \cdot (t, s)$) (5.7.8). Далее, линейное отображение $s_1 \rightarrow (D_1U(x, y) \cdot s_1) \cdot s_2$ пространства E в F для каждой точки $s_2 \in E$ является в силу (8.2.1) и (8.1.3) производной в точке (x, y) отображения $x \rightarrow U(x, y) \cdot s_2$ пространства E в F ; точно так же линейное отображение $t \rightarrow (D_2U(x, y) \cdot t) \cdot s$ пространства F в F для каждой точки $s \in E$ является производной в точке (x, y) отображения $y \rightarrow U(x, y) \cdot s$ пространства F в F .

(10.9.4) (Теорема Фробениуса) *Предположим, что U непрерывно дифференцируемо в $A \times B$. Для того чтобы уравнение (10.9.1) было вполне интегрируемо в $A \times B$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $(x, y) \in A \times B$ и для любой пары (s_1, s_2) из $E \times E$ выполнялось следующее соотношение:*

$$(10.9.4.1) \quad D_1U(x, y) \cdot (s_1, s_2) + D_2U(x, y) \cdot (U(x, y) \cdot s_1, s_2) = \\ = D_1U(x, y) \cdot (s_2, s_1) + D_2U(x, y) \cdot (U(x, y) \cdot s_2, s_1).$$

Необходимость. Предположим, что u есть решение уравнения (10.9.1) в открытом шаре $S \subset A$ с центром x_0 , удовлетворяющее условию $u(x_0) = y_0$. Тогда из (10.9.2) и предположения следует, что производная $u'(x)$ дифференцируема в S . Далее, для любой точки $s_2 \in E$ производная в точке x_0 отображения $x \rightarrow u'(x) \cdot s_2$ в силу (8.12.1) есть отображение $s_1 \rightarrow u''(x_0) \cdot (s_1, s_2)$. Но на основании (10.9.2) эта производная [в силу (8.2.1), (8.1.3) и (8.9.1)] равна также отображению

$$s_1 \rightarrow (D_1U(x_0, y_0) \cdot s_1) \cdot s_2 + (D_2U(x_0, y_0) \cdot (u'(x_0) \cdot s_1)) \cdot s_2.$$

Вновь пользуясь соотношением (10.9.2) и выражая тот факт, что вторая производная отображения u в точке x_0 есть симметрическое билинейное отображение (8.12.2), получаем соотношение (10.9.4.1) в точке (x_0, y_0) . Но по предположению эта точка в $A \times B$ может быть выбрана произвольно, откуда и следует наше утверждение.

Достаточность. Пусть $S_0 \subset A$ — открытый шар с центром x_0 и радиусом α и $T_0 \subset B$ — открытый шар с центром y_0 и радиусом β , такие, что отображение U ограничено в $S_0 \times T_0$; пусть $\|U(x, y)\| \leq M$.

Для вектора $z \in E$ рассмотрим (обыкновенное) дифференциальное уравнение

$$(10.9.4.2) \quad w' = U(x_0 + \xi z, w) \cdot z = f(\xi, w, z)$$

(где $\xi \in K$) и заметим, что если отображение u в окрестности $\|x - x_0\| < \rho$ точки x_0 удовлетворяет условию (10.9.2) и при $x = x_0$ принимает значение y_0 , то отображение $\xi \rightarrow u(x_0 + \xi z)$ при $\|z\| < \rho$ является решением уравнения (10.9.4.2) в шаре $|\xi| < 1$ в K , принимающим при $\xi = 0$ значение y_0 [что в силу (10.5.2) уже доказывает единственность u]. Теперь правая часть уравнения (10.9.4.2) непрерывно дифференцируема при $|\xi| \leq 2$, $\|w - y_0\| \leq \beta$ и $\|z\| \leq \alpha/2$, и для таких значений мы имеем $\|f(\xi, w, z)\| \leq M\|z\|$. Применяя теорему (10.5.6) к f и к $g = 0$, заключаем, что для любой точки $z \in E$, для которой $\|z\| < \beta/(2M)$, существует единственное решение $\xi \rightarrow v(\xi, z)$ уравнения (10.9.4.2), определенное при $|\xi| < 2$, принимающее значения в H и удовлетворяющее условию $v(0, z) = y_0$. Мы собираемся доказать, что функция $u(x) = v(1, x - x_0)$ является решением уравнения (10.9.1) в шаре $\|x - x_0\| < \beta/(2M)$.

Мы знаем из (10.7.3), что при $\|z\| < \beta/(2M)$ и $|\xi| < 2$ отображение v непрерывно дифференцируемо и что отображение $\xi \rightarrow D_2 v(\xi, z)$ при $|\xi| < 2$ является решением дифференциального уравнения

$$V' = D_2 f(\xi, v(\xi, z), z) \circ V + D_3 f(\xi, v(\xi, z), z),$$

принимающим при $\xi = 0$ значение 0. Для любой точки $s_1 \in E$ положим $g(\xi) = D_2 v(\xi, z) \cdot s_1$. Мы имеем $g'(\xi) = D_2 f(\xi, v(\xi, z), z) \cdot g(\xi) + D_3 f(\xi, v(\xi, z), z) \cdot s_1$ и ввиду определения f это можно переписать в виде

$$g'(\xi) = A(\xi) \cdot (g(\xi), z) + B(\xi) \cdot s_1 + \xi C(\xi) \cdot (s_1, z),$$

где $A(\xi) = D_2 U(x_0 + \xi z, v(\xi, z))$, $B(\xi) = \dot{U}(x_0 + \xi z, v(\xi, z))$ и $C(\xi) = D_1 U(x_0 + \xi z, v(\xi, z))$. Мы хотим доказать, что $g(\xi) = \xi U(x_0 + \xi z, v(\xi, z)) \cdot s_1$ и по этой причине рассмотрим разность $h(\xi) = g(\xi) - \xi U(x_0 + \xi z, v(\xi, z)) \cdot s_1 = g(\xi) - \xi B(\xi) \cdot s_1$. Пользуясь тем, что $D_1 v(\xi, z) = U(x_0 + \xi z, v(\xi, z)) \cdot z = B(\xi) \cdot z$, находим

$$h'(\xi) = A(\xi) \cdot (g(\xi), z) + B(\xi) \cdot s_1 + \xi C(\xi) \cdot (s_1, z) - B(\xi) \cdot s_1 - \xi C(\xi) \cdot (z, s_1) - \xi A(\xi) \cdot (B(\xi) \cdot z, s_1).$$

Но соотношение (10.9.4.1), в частности, дает

$$C(\xi) \cdot (z, s_1) + A(\xi) \cdot (B(\xi) \cdot z, s_1) = C(\xi) \cdot (s_1, z) + A(\xi) \cdot (B(\xi) \cdot s_1, z),$$

поэтому

$$h'(\xi) = A(\xi) \cdot (g(\xi) - \xi B(\xi) \cdot s_1, z) = A(\xi) \cdot (h(\xi), z).$$

Кроме того, $h(0) = 0$. Но единственное решение линейного дифференциального уравнения $r' = A(\xi) \cdot (r, z)$, обращающееся в 0 при $\xi = 0$, есть $r(\xi) = 0$ (10.6.3). Следовательно, $h(\xi) = 0$ при $|\xi| < 2$, откуда

следует равенство

$$D_2 v(\xi, z) \cdot s_1 = \xi U(x_0 + \xi z, v(\xi, z)) \cdot s_1$$

для любой точки $s_1 \in E$, т. е. $D_2 v(\xi, z) = \xi U(x_0 + \xi z, v(\xi, z))$. Это верно при $|\xi| < 2$ и $\|z\| < \beta/(2M)$. В частности, при $\xi = 1$, полагая $x = x_0 + z$, получаем $u'(x) = U(x, u(x))$ при $\|x - x_0\| < \beta/(2M)$, что и завершает доказательство.

(10.9.5) *Предположим, что U непрерывно дифференцируемо в $A \times B$ и удовлетворяет условию Фробениуса (10.9.4.1). Тогда для каждой точки $(a, b) \in A \times B$ существуют открытый шар $S \subset A$ с центром a и открытый шар $T \subset B$ с центром b , обладающие следующими свойствами: 1°) для любой точки $(x_0, y_0) \in S \times T$ существует единственное решение $x \rightarrow u(x, x_0, y_0)$ уравнения (10.9.1), определенное в S и такое, что $(x_0, x_0, y_0) = y_0$; 2°) u непрерывно дифференцируемо в $S \times S \times T$. Если, кроме того, U непрерывно дифференцируемо p раз (соответственно аналитично, если E и F конечномерны) в $A \times B$, то u и непрерывно дифференцируемо p раз (соответственно аналитично) в $S \times S \times T$. Наконец, существует такой открытый шар $W \subset T$ с центром b , что для каждой точки $(x, x_0, y_0) \in S \times S \times W$ уравнение $y_0 = u(x_0, x, y)$ имеет в T единственное решение $y = u(x, x_0, y_0)$.*

Пусть $S_0 \subset A$ — открытый шар с центром a и радиусом α и $T_0 \subset B$ — открытый шар с центром b и радиусом β , такие, что в $S_0 \times T_0$ выполняется неравенство $\|U(x, y)\| \leq M$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(10.9.5.1) \quad w' = U(x_0 + \xi z, y_0 + w) \cdot z = f(\xi, w, z, x_0, y_0).$$

Как и в доказательстве теоремы (10.9.4), убеждаемся в том, что если $\|x_0 - a\| < \alpha/8$, $\|z\| < \min(\alpha/4, \beta/(2M))$ и $\|y_0 - b\| < \beta$, то существует единственное решение $\xi \rightarrow v(\xi, z, x_0, y_0)$ этого уравнения, определенное при $|\xi| < 2$ и такое, что $v(0, z, x_0, y_0) = 0$. Далее, теорема (10.7.3) показывает, что отображение v непрерывно дифференцируемо при этих значениях ξ, z, x_0 и y_0 , если только α и β выбраны так, чтобы производная отображения U была ограничена в $S_0 \times T_0$. Тогда теорема (10.9.4) показывает, что отображение $u(x, x_0, y_0) = y_0 + v(1, x - x_0, x_0, y_0)$ является единственным решением уравнения (10.9.1), определенным в шаре $S: \|x - a\| < \alpha/8$, принимающим при $x = x_0$ значение y_0 . Поэтому отображение $(x, x_0, y_0) \rightarrow u(x, x_0, y_0)$ непрерывно дифференцируемо в $S \times S \times T_0$. Доказательство того, что u непрерывно дифференцируемо p раз (соответственно аналитично) в случае, когда U обладает соответствующим свойством, проводится точно так же, только вместо теоремы (10.7.3) нужно воспользоваться теоремой (10.7.4) [соответственно теоремой (10.7.5)]. Наконец, последнее утверждение теоремы (10.9.5)

доказывается с помощью того же рассуждения, что и утверждение 3 теоремы (10.8.1).

В случае когда $E = K^n$, условие Фробениуса (10.9.4.1) полной интегрируемости эквивалентно для системы (10.9.3) соотношениям

$$\begin{aligned} (10.9.6) \quad & \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, \dots, x_n, y) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} f_i(x_1, \dots, x_n, y) \cdot f_j(x_1, \dots, x_n, y) = \\ = & \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1, \dots, x_n, y) + \frac{\partial}{\partial y} f_j(x_1, \dots, x_n, y) \cdot f_i(x_1, \dots, x_n, y) \end{aligned}$$

[где нужно вспомнить, что $\frac{\partial}{\partial y} f_i(x_1, \dots, x_n, y)$ является элементом пространства $\mathcal{L}(F; F)$ (матрицей, если F конечномерно), а $f_j(x_1, \dots, x_n, y)$ — элементом пространства F].

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Выбор содержания этой главы диктовался двумя соображениями: во-первых, излагаемая здесь теория представляет первый шаг в одном из главнейших разделов современного функционального анализа, так называемой „спектральной теории“, а, во-вторых, она черпает формулировки своих понятий и доказательства своих теорем практически в каждой из предыдущих глав и, таким образом, может убедить читателя, что „абстрактные“ рассуждения этих глав не были бесполезными обобщениями.

Общая спектральная теория, будучи тесно связанной с общей теорией интегрирования, остается за пределами этой книги, и читатель не найдет в настоящей главе никаких результатов этой теории, за исключением доказательства существования спектра (11.1.3) и нескольких простейших свойств сопряженного оператора (11.5).

Мы сосредоточили внимание лишь на теории линейных *вполне непрерывных* операторов, которые снова можно рассматривать как „легкие“ возмущения общих операторов, хотя и совсем не в том смысле, который преобладал в гл. 10. Здесь в качестве „пренебрежимого“ рассматривается то, что происходит в конечномерных подпространствах. Сущность центральной теоремы (11.3.3) о вполне непрерывных операторах состоит в том, что если мы прибавляем такой оператор к тождественному, то в результате снова получаем линейный гомеоморфизм, если только ограничиться рассмотрением подходящего подпространства конечной коразмерности.

Особый интерес представляют вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Дело не только в том, что об их спектре можно получить значительно более точную информацию (11.5.7), чем о спектре общих вполне непрерывных операторов, но главным образом в том, что их общая теория немедленно применяется к интегральному уравнению Фредгольма с эрмитовым ядром (11.6) и, в частности, в классической задаче Штурма — Лиувилля, которую мы выбрали в качестве особенно яркой иллюстрации силы методов функционального анализа (11.7).

Более полное представление о спектральной теории и об ее мощных приложениях читатель может найти в книгах ¹⁾ Тейлора [23], Данфорда и

¹⁾ См. также, например, Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, М.—Л., 1950. — *Прим. ред.*

Шварца [13] и Люмиса [20]. Мы также усиленно рекомендуем классический труд Куранта и Гильберта [11] — книгу, написанную великолепным стилем и содержащую богатую информацию.

1. Спектр непрерывного оператора

Пусть E — комплексное нормированное пространство. Линейное отображение u пространства E в себя часто называется *оператором* в E . Множество $\mathcal{L}(E; E)$ *непрерывных* операторов (которое мы будем просто обозначать символом $\mathcal{L}(E)$) есть комплексное нормированное пространство (5.7). Оно является также некоммутативной алгеброй над $\mathbb{C}$, в которой „произведение“ есть отображение $(u, v) \rightarrow u \circ v$, записываемое также в виде $(u, v) \rightarrow uv$. Тожественное отображение пространства E служит единичным элементом алгебры $\mathcal{L}(E)$, обозначаемым символом 1. Отображения $(u, v) \rightarrow u + v$ и $(u, v) \rightarrow u \circ v$ непрерывны в $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ (5.7.5).

Мы будем говорить, что комплексное число ζ является *регулярным* значением непрерывного оператора u , если оператор $u - \zeta \cdot 1$ имеет в $\mathcal{L}(E)$ обратный оператор v_ζ (т. е. является линейным гомеоморфизмом пространства E на себя). Комплексное число ζ , не являющееся регулярным значением оператора u , называется его *спектральным значением*, а множество всех спектральных значений оператора u называется его *спектром* $S(u)$.

Если число $\zeta \in \mathbb{C}$ обладает тем свойством, что ядро отображения $u - \zeta \cdot 1$ не сводится к 0, то ζ есть спектральное значение оператора u . Такие спектральные значения называются *собственными значениями* оператора u . Любой вектор $x \neq 0$, принадлежащий ядру отображения $u - \zeta \cdot 1$, т. е. вектор, для которого $u(x) = \zeta x$, называется *собственным вектором* оператора u , соответствующим собственному значению ζ . Собственные векторы и 0 образуют замкнутое векторное подпространство пространства E , ядро отображения $u - \zeta \cdot 1$, называемое также *собственным подпространством* оператора u , соответствующим собственному значению ζ , и обозначаемое символом $E(\zeta)$ или $E(\zeta; u)$.

В случае когда пространство E имеет конечную размерность n , элементарная линейная алгебра показывает, что любое спектральное значение оператора u является и его собственным значением. Спектр оператора u есть конечное множество, состоящее не более чем из n элементов, являющихся корнями *характеристического многочлена* $\det(u - \zeta \cdot 1)$ оператора u ; степень этого многочлена равна n . Но если E бесконечномерно, то могут существовать спектральные значения, не являющиеся собственными значениями.

(11.1.1) **Пример.** Пусть E — комплексное гильбертово пространство и (a_n) — полная ортонормальная система в E (6.6.1).

Каждому вектору $x = \sum_n \zeta_n a_n$ в E (где $\|x\|^2 = \sum_n |\zeta_n|^2$) поставим в соответствие вектор $u(x) = \sum_n \zeta_n a_{n+1}$. Легко проверить, что отображение u линейное и что $\|u(x)\| = \|x\|$; следовательно, отображение u непрерывно (5.5.1). Кроме того, $u(E)$ есть подпространство пространства E , ортогональное a_1 ; поэтому u не является отображением на все E , и это показывает, что $\zeta = 0$ является спектральным значением оператора u . Но из $u(x) = 0$ следует $x = 0$, и, значит, 0 не является собственным значением u .

(11.1.2). *Предположим, что E есть комплексное банахово пространство и u — непрерывный оператор в E . Множество R_u регулярных значений $\zeta \in \mathbb{C}$ оператора u открыто в $\mathbb{C}$, а отображение $\zeta \rightarrow (u - \zeta \cdot 1)^{-1}$ множества R_u в $\mathcal{L}(E)$ является аналитическим.*

Пусть $\zeta_0 \in R_u$ и пусть $v_0 = (u - \zeta_0 \cdot 1)^{-1}$. Для любого числа $\zeta \in \mathbb{C}$ мы можем в $\mathcal{L}(E)$ написать $u - \zeta \cdot 1 = u - \zeta_0 \cdot 1 - (\zeta - \zeta_0) \cdot 1 = (u - \zeta_0 \cdot 1)(1 - (\zeta - \zeta_0)v_0)$. Но в силу (8.3.2.1) при $|\zeta - \zeta_0| < \|\zeta - \zeta_0\|^{-1}$ оператор $1 - (\zeta - \zeta_0)v_0$ имеет в $\mathcal{L}(E)$ обратный оператор, равный сумме абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n v_0^n$. Поэтому для таких значений ζ оператор $u - \zeta \cdot 1$ обратим в $\mathcal{L}(E)$ и обратный ему оператор, равный $(1 - (\zeta - \zeta_0)v_0)^{-1}v_0$, может быть записан в виде $(u - \zeta \cdot 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n v_0^{n+1}$, причем ряд абсолютно сходится при $|\zeta - \zeta_0| \leq \|v_0\|^{-1}$, что и завершает доказательство.

(11.1.3) *Если E — комплексное банахово пространство, то спектр любого непрерывного оператора u в E есть непустое компактное множество в $\mathbb{C}$, содержащееся в шаре $|\zeta| \leq \|u\|$.*

Прежде всего заметим, что $u - \zeta \cdot 1 = -\zeta(1 - \zeta^{-1}u)$ при $\zeta \neq 0$ и, следовательно, в силу (8.3.2.1) оператор $u - \zeta \cdot 1$ при $|\zeta| > \|u\|$ обратим в $\mathcal{L}(E)$. Далее, при $|\zeta| > \|u\|$ имеем $(u - \zeta \cdot 1)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} u^n$, где ряд абсолютно сходится, и $\|(u - \zeta \cdot 1)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\zeta|^{-n-1} \|u\|^n = (|\zeta| - \|u\|)^{-1}$. Таким образом, при $|\zeta| \geq 2\|u\|$ мы имеем $\|(u - \zeta \cdot 1)^{-1}\| \leq \|u\|^{-1}$. Если бы теперь мы имели $R_u = \mathbb{C}$, то оператор $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$ был бы целой функцией (9.9.6), ограниченной в $\mathbb{C}$, поскольку он ограничен как на компактном множестве $|\zeta| \leq 2\|u\|$, так и на его дополнении. Тогда по теореме Лиувилля

(9.11.1) оператор $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$ был бы постоянным, значит, постоянным был бы и обратный ему оператор $u - \zeta \cdot 1$, что неверно. Первая часть этого доказательства, кроме того, показывает, что оператор $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$ существует и является аналитическим при $|\zeta| > \|u\|$. Следовательно, спектр оператора u , будучи замкнутым в $\mathbb{C}$, компактен и содержится в шаре $|\zeta| \leq \|u\|$.

Можно привести примеры операторов, спектр которых является произвольным компактным множеством в $\mathbb{C}$ (см. задачу 3).

Задачи

1. Пусть E — комплексное банахово пространство, u — элемент пространства $\mathcal{L}(E)$ и $S(u)$ — его спектр.

а) Покажите, что если комплексное число ζ обладает тем свойством, что для любого целого $p > 1$ выполняется неравенство $|\zeta|^p > \|u^p\|$, то ζ регулярен для u .

[Воспользуйтесь (11.1.3) и из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-np} u^{np}$ заключите, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n} u^n$ также сходится.]

б) Покажите, что число $\rho(u) = \inf_n \|u^n\|^{1/n}$ равно радиусу наименьшего круга с центром 0, содержащего $S(u)$, и, кроме того, что последовательность $(\|u^n\|^{1/n})$ имеет предел, равный $\rho(u)$.

[Воспользуйтесь задачами а), 1 § 9.1 и теоремой (9.9.4), Пример, когда $\rho(u) \neq \|u\|$, см. в задаче 4 § 11.4.]

2. Пусть u и v — два элемента пространства $\mathcal{L}(E)$, где E — комплексное банахово пространство. Покажите, что в обозначениях задачи 1 справедливо равенство: $S(vu) = S(uv)$.

[Заметьте, что если f и g — два элемента пространства $\mathcal{L}(E)$, для которых оператор $1 - fg$ обратим, и если $h = (1 - fg)^{-1}$, то оператор $1 + ghf$ является обратным оператору $1 - gf$.]

3. Пусть E — сепарабельное комплексное гильбертово пространство и $(e_n)_{n \geq 1}$ — ортонормальный базис пространства E . Пусть S — произвольное бесконечное компактное множество в $\mathbb{C}$ и пусть (ρ_n) — счетное множество точек из S , плотное в S (3.10.9). Покажите, что существует единственный элемент $u \in \mathcal{L}(E)$, такой, что $u(e_n) = \rho_n e_n$ при каждом $n \geq 1$. Докажите, что спектр оператора u совпадает с S , а собственными значениями оператора u являются числа ρ_n . Покажите, что если $\zeta \in S$ и ζ не равно ни одному из ρ_n и если $v_\zeta = u - \zeta \cdot 1$, то образ $v_\zeta(E)$ плотен в E , но не равен E .

[Для доказательства первого из этих утверждений воспользуйтесь (6.5.3).]

4. Покажите, что спектр оператора u , определенного в (11.1.1), есть круг $|\zeta| \leq 1$ в $\mathbb{C}$; u не имеет собственных значений. Покажите, что если

$v_\zeta = u - \zeta \cdot 1$, то при $|\zeta| < 1$ образ $v_\zeta(E)$ не плотен в E , но при $|\zeta| = 1$ образ $v_\zeta(E)$ плотен в E и отличен от E [ср. (6.5.3)].

5. Пусть E — комплексное банахово пространство и E_0 — плотное подпространство пространства E . Покажите, что для любого элемента $u \in \mathcal{S}(E_0)$ спектр оператора u совпадает со спектром единственного его непрерывного продолжения $\tilde{u}$ на E (5.5.4). Приведите пример такого оператора $u \in \mathcal{S}(E_0)$ и его спектрального значения ζ , чтобы $v_\zeta = u - \zeta \cdot 1$ было биективным отображением подпространства E_0 на себя¹⁾.

[Рассмотрите подпространство E_0 пространства E из задачи 3, состоящее из всех (конечных) линейных комбинаций векторов e_n .]

2. Вполне непрерывные операторы

Пусть E и F — два нормированных (действительных или комплексных) пространства. Мы будем говорить, что линейное отображение u пространства E в F *вполне непрерывно*, если образ $u(B)$ любого ограниченного множества $B \subset E$ относительно компактен в F . Эквивалентное условие состоит в том, чтобы у любой ограниченной последовательности (x_n) в E существовала такая подпоследовательность (x_{n_k}) , что последовательность $(u(x_{n_k}))$ сходилась бы в F . Так как любое относительно компактное множество ограничено в F (3.17.1), то из (5.5.1) следует, что вполне непрерывное отображение *н*епрерывно.

Примеры. (11.2.1) Если E или F конечномерно, то каждое непрерывное линейное отображение пространства E в F вполне непрерывно [в силу (5.5.1), (3.17.6), (3.20.16) и (3.17.9)].

(11.2.2) Если F — бесконечномерное нормированное пространство, то тождественный оператор в E в силу теоремы Рисса (5.9.4) не является вполне непрерывным.

(11.2.3) Пусть $I = [a, b]$ — компактный промежуток в $\mathbb{R}$, $E = \mathcal{C}_c(I)$ — банахово пространство непрерывных комплексных функций в I (7.2) и $(s, t) \rightarrow K(s, t)$ — некоторая непрерывная комплексная функция

в $I \times I$. Для любой функции $f \in E$ отображение $t \rightarrow \int_a^b K(s, t) f(s) ds$

в силу (8.11.1) непрерывно в I ; обозначим эту функцию через Uf . Тогда отображение $f \rightarrow Uf$ пространства E в себя линейно.

¹⁾ Можно показать, что в банаховом пространстве E это невозможно, так как любое взаимно однозначное непрерывное линейное отображение пространства E на себя является гомеоморфизмом; см. Н. Бурбаки [6].

Докажем, что оно вполне непрерывно. В самом деле, если $g = Uf$, то при $t_0 \in I$ и $t \in I$ мы можем написать

$$(11.2.3.1) \quad g(t) - g(t_0) = \int_a^b (K(s, t) - K(s, t_0)) f(s) ds.$$

Так как функция K равномерно непрерывна в $I \times I$ (3.16.5), то для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|t - t_0| \leq \delta$ следует $|K(s, t) - K(s, t_0)| \leq \epsilon$ для любой точки $s \in I$. Поэтому для любой функции $f \in E$ по теореме о среднем значении

$$(11.2.3.2) \quad |g(t) - g(t_0)| \leq \epsilon(b - a) \|f\|.$$

Это показывает, что образ $U(B)$ любого ограниченного множества $B \subset E$ равномерно непрерывен в каждой точке t_0 промежутка I (7.5). С другой стороны, для любой точки $t \in I$ мы подобным же образом имеем $|g(t)| \leq k \|f\|$, если $|K(s, t)| \leq k$ в $I \times I$. По теореме Асколи (7.5.7) множество $U(B)$ относительно компактно в E .

(11.2.4) При тех же обозначениях и при тех же предположениях относительно K , что и в (11.2.3), пусть теперь F — пространство комплексных простых функций в I (7.6), снова являющееся банаховым пространством, если его рассматривать как подпространство пространства $\mathcal{B}_C(I)$. В этом случае функция Uf определяется, как и в (11.2.3) для любой функции $f \in F$, и неравенство (11.2.3.2) остается в силе. Рассуждение, проведенное в (11.2.3), доказывает, что U и в этом случае является вполне непрерывным отображением пространства F в E .

(11.2.5) Если u и v — два вполне непрерывных отображения пространства E в F , то и сумма $u + v$ вполне непрерывна.

Пусть (x_n) — ограниченная последовательность в E . По предположению, существует такая подпоследовательность (x'_n) последовательности (x_n) , что последовательность $(u(x'_n))$ сходится в F . Так как последовательность (x'_n) ограничена в E , то у нее существует такая подпоследовательность (x''_n) , что последовательность $(v(x''_n))$ сходится в F . Тогда в силу (3.13.10) и (5.1.5) последовательность $(u(x''_n) + v(x''_n))$ сходится в F , ч. т. д.

(11.2.6.) Пусть E , F , E_1 и F_1 — нормированные пространства, f — непрерывное линейное отображение пространства E_1 в E и g — непрерывное линейное отображение пространства F в F_1 . Тогда для любого вполне непрерывного отображения u пространства E в F отображение $u_1 = g \circ u \circ f$ пространства E_1 в F_1 вполне непрерывно.

В самом деле, если множество B_1 ограничено в E_1 , то множество $f(B_1)$ в силу (5.5.1) ограничено в E , множество $u(f(B_1))$ относительно компактно в F по предположению и множество $g(u(f(B_1)))$ относительно компактно в F_1 в силу (3.17.9).

(11.2.7) Если u — вполне непрерывное отображение пространства E в F , то сужение u на любом векторном подпространстве E_1 пространства E является вполне непрерывным отображением E_1 в $\overline{u(E_1)}$.

В самом деле, в силу (11.2.6) это сужение является вполне непрерывным отображением подпространства E_1 в F . Если B — ограниченное подмножество E_1 , то $\overline{u(B)}$ является тогда компактным подмножеством пространства F и, так как $\overline{u(B)} \subset \overline{u(E_1)}$, множество $u(B)$ относительно компактно в $\overline{u(E_1)}$.

(11.2.8) Пример. Пусть теперь, при тех же обозначениях и тех же предположениях относительно функции K , что и в (11.2.3), G есть предгильбертово пространство, определяемое на множестве

$\mathcal{E}_C(I)$ скалярным произведением $(f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt$ (6.5.1). Норму

в этом пространстве будем обозначать символом $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$, чтобы отличить ее от нормы $\|f\| = \sup_{t \in I} |f(t)|$; обозначим через E

пространство $\mathcal{E}_C(I)$ с нормой $\|f\|$. Тождественное отображение $f \rightarrow f$ пространства E в G непрерывно, так как по теореме о среднем значении $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|$. Но оно не взаимно непрерывно и G не является банаховым пространством. Неравенство Коши — Шварца (6.2.1) записывается в виде

$$(11.2.8.1) \quad \left| \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right).$$

При тех же обозначениях, что и в (11.2.3), мы можем, таким образом, вывести из (11.2.3.1) и (11.2.8.1), что при $|t_1 - t_2| \leq \delta$

$$(11.2.8.2) \quad |g(t_1) - g(t_2)| \leq \varepsilon \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2$$

и аналогично $|g(t)| \leq k \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2$ для любой точки $t \in I$. Поэтому в силу точно такого же рассуждения, как и в (11.2.3), $f \rightarrow Uf$ есть вполне непрерывное отображение пространства G в E . А так как тождественное отображение E в G непрерывно, то отображение $f \rightarrow Uf$ в силу (11.2.6) есть также и вполне непрерывное отображение G в G .

(11.2.9) Пусть E и F — два банаховых пространства, E_0 (соответственно F_0) — подпространство, плотное в E (соответственно в F), u — вполне непрерывное отображение подпространства F_0 в F_0 и $\tilde{u}$ — единственное его непрерывное продолжение как отображение пространства E в F (5.5.4). Тогда $\tilde{u}(E) \subset F_0$ и $\tilde{u}$ есть вполне непрерывное отображение пространства E в F_0 .

Очевидно, что любой шар $\|x\| \leq r$ в E содержится в замыкании любого шара в E_0 с центром 0 и радиусом $> r$ (3.13.13). Поэтому любое множество, ограниченное в E , содержится в замыкании некоторого множества B , ограниченного в E_0 . Множество $\tilde{u}(\bar{B})$ в силу (3.11.4) содержится в замыкании в F множества $\tilde{u}(B) = u(B)$. Множество $u(B)$ относительно компактно в F_0 , т. е. его замыкание в F_0 компактно и, значит, замкнуто в F и, таким образом, совпадает со своим замыканием в F . Это показывает, что множество $\tilde{u}(\bar{B})$ содержится в F_0 и относительно компактно в этом пространстве, ч. т. д.

(11.2.10) Пусть E — нормированное пространство, F — банахово пространство и (u_n) — последовательность отображений, принадлежащих $\mathcal{L}(E; F)$ (5.7), сходящаяся в $\mathcal{L}(E; F)$ к u . Тогда если вполне непрерывно каждое из отображений u_n , то вполне непрерывно и отображение u .

Пусть B — произвольное ограниченное множество в E . Так как F — полное пространство, то нам нужно только доказать, что множество $u(B)$ вполне ограничено (3.17.5). Пусть множество B содержится в некотором шаре $\|x\| \leq a$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0 , что из $n \geq n_0$ будет следовать $\|u - u_n\| \leq \varepsilon/(2a)$ и, значит [в силу (5.7.4)], $\|u(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon/2$ для любой точки $x \in B$. Но, поскольку множество $u_{n_0}(B)$ вполне ограничено, оно может быть покрыто конечным числом шаров с центрами u_j ($1 \leq j \leq m$) и радиусом $\varepsilon/2$. Для любой точки $x \in B$, таким образом, существует такое j , что $\|u_{n_0}(x) - u_j\| \leq \varepsilon/2$ и, следовательно, $\|u(x) - u_j\| \leq \varepsilon$, и шары с центрами u_j и радиусом ε покрывают $u(B)$, ч. т. д.

В частности, любой предел в $\mathcal{L}(E; F)$ последовательности отображений конечного ранга в силу (11.2.1) и (11.2.10) вполне непрерывен. Вопрос о том, будет ли, напротив, любое вполне непрерывное отображение равно такому пределу, все еще остается открытым.

Задачи

1. Пусть E — банахово пространство, A — открытое множество в E и F — конечномерное векторное пространство. Покажите, что для любого $p \geq 1$ тождественное отображение $f \rightarrow f$ банахова пространства $\mathcal{B}_F^{(p)}(A)$ (задача 8, § 8, 12) в пространство $\mathcal{B}_F^{(p-1)}(A)$ [которое при $p=1$ нужно заменить на $\mathcal{C}_F^\infty(A)$] есть вполне непрерывный оператор.

[Воспользуйтесь теоремой о среднем значении и теоремой Асколи.]

2. Пусть u — вполне непрерывное отображение бесконечномерного банахова пространства E в нормированное пространство F . Покажите, что в E существует такая последовательность (x_n) , что $\|x_n\| = 1$ при каждом n и что $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = 0$.

[Заметьте, что существуют такое число $\alpha > 0$ и такая последовательность (y_n) точек пространства E , что $\|y_n\| = 1$ при каждом n и что $\|y_m - y_n\| \geq \alpha$ при $m \neq n$ (задача 3 § 5.9 и (3.16.1)), и рассмотрите последовательность $(u(y_n))$.]

Заклучите отсюда, что если образ при u сферы $S: \|x\| = 1$ замкнут в F , то он содержит 0.

3. Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство и (e_n) — ортонормальный базис в E . Покажите, что если u — вполне непрерывное отображение пространства E в нормированное пространство F , то последовательность $(u(e_n))$ сходится к 0.

[Допустите противное и покажите, что невозможно, чтобы последовательность $(u(e_n))$ имела в F предел $b \neq 0$.]

Покажите, обратно, что если F — банахово пространство и если ряд с общим членом $\|u(e_n)\|^2$ сходится, то отображение u вполне непрерывно.

[Для доказательства того, что образ шара $\|x\| \leq 1$ при u вполне ограничен, воспользуйтесь неравенством Коши — Шварца.]

4. Пусть F — нормированное пространство, обладающее следующим свойством: существует такая константа $c > 0$, что для любого конечного множества $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ в F и любого $\varepsilon > 0$ существует разложение $F = M \dot{+} N$ пространства F в прямую сумму двух замкнутых подпространств, такое, что M конечномерно, $d(a_i, M) \leq \varepsilon$ при $1 \leq i \leq n$ и что если для любого вектора $x \in F$ имеем $x = p(x) \dot{+} q(x)$, где $p(x) \in M$ и $q(x) \in N$, то $\|q(x)\| \leq c \cdot d(x, M)$. Покажите, что при этом предположении любое вполне непрерывное линейное отображение нормированного пространства E в F является в $\mathcal{L}(E; F)$ пределом некоторой последовательности линейных отображений конечного ранга.

[Воспользуйтесь определением вполне ограниченных пространств.]

Покажите, что любое гильбертово пространство, а также пространства (c_0) (задача 5 § 5.3) и l^1 (задача 1 § 5.7) удовлетворяют предыдущему условию.

5. Пусть $I = [a, b]$ — компактный промежуток в $\mathbb{R}$ и $K(s, t)$ — комплексная функция, непрерывная в $I \times I$ и удовлетворяющая предположениям задачи 4 § 8.11. Покажите, что если отображение U определено как в (11.2.3), то U остается и при этих предположениях вполне непрерывным отображением пространства $E = \mathcal{C}_c(I)$ в себя.

3. Теория Ф. Рисса

Нам многократно потребуется следующая лемма:

(11.3.1) Пусть u — непрерывный оператор в нормированном пространстве E , $v = 1 - u$, а L и M — два замкнутых

векторных подпространства пространства E , такие, что $M \subset L$, $M \neq L$ и $v(L) \subset M$. Тогда существует такая точка $a \in L \cap M$, что $\|a\| \leq 1$ и что для любой точки $x \in M$ выполняется неравенство $\|u(a) - u(x)\| \geq 1/2$.

По предположению, существует такая точка $b \in L$, что $b \notin M$ и, значит, $d(b, M) = \alpha > 0$. Пусть точка $y \in M$ выбрана так, что $\|b - y\| \leq 2\alpha$, и возьмем точку $a = (b - y)/\|b - y\|$. Тогда $\|a\| = 1$ и $a - z = (b - y - \|b - y\|z)/\|b - y\|$ для любой точки $z \in M$. Так как $y + \|b - y\|z \in M$, то $\|b - y - \|b - y\|z\| \geq \alpha$. Поэтому для любой точки $z \in M$ выполняется неравенство $\|a - z\| \geq 1/2$. Но при $x \in M$ имеем $u(a) - u(x) = a - (x + v(a) - v(x))$ и по предположению $x + v(a) - v(x) \in M$, откуда и следует наше заключение.

(11.3.2) Пусть u — вполне непрерывный оператор в нормированном пространстве E и пусть $v = 1 - u$. Тогда:

- 1°) ядро $v^{-1}(0)$ конечномерно;
- 2°) образ $v(E)$ замкнут в E ;
- 3°) $v(E)$ имеет в E конечную коразмерность;
- 4°) если $v^{-1}(0) = \{0\}$, то v есть линейный гомеоморфизм пространства E на $v(E)$ [ср. (11.3.4)].

1°. Для любой точки $x \in N = v^{-1}(0)$ мы имеем $u(x) = x$. Поэтому образ шара $B: \|x\| \leq 1$ в N при u есть сам шар B . По предположению множество $u(B)$ относительно компактно в E , а значит, и в N , поскольку N замкнуто в E . Но отсюда по теореме Рисса (5.9.4) следует, что N конечномерно.

2°. Пусть $y \in v(E)$. Тогда в E существует такая последовательность (x_n) , что $y = \lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n)$ (3.13.13). Предположим сначала, что последовательность $(d(x_n, N))$ не ограничена. Тогда (если потребуется, выделив подпоследовательность) мы можем считать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, N) = +\infty$. Пусть $z_n = x_n/d(x_n, N)$. Сразу видим, что $d(z_n, N) = 1$ и что, следовательно, существует такая точка $t_n \in N$, что $\|z_n - t_n\| \leq 2$. Пусть $s_n = z_n - t_n$. По определению $v(s_n) = v(z_n) = v(x_n)/d(x_n, N)$ и $d(s_n, N) = 1$. Из предположений сразу выводим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} v(s_n) = 0$.

Но последовательность (s_n) ограничена в E . Так как оператор u вполне непрерывен, то существует такая ее подпоследовательность (s_{n_k}) , что последовательность $(u(s_{n_k}))$ сходится к некоторой точке $a \in E$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - u(s_n)) = 0$, то мы также имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n_k} = a$, и, значит, поскольку отображение $x \rightarrow d(x, N)$ непрерывно, $d(a, N) = 1$. Но $v(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(s_{n_k}) = 0$, а это противоречит определению N .

Таким образом, мы можем предполагать, что последовательность $(d(x_n, N))$ ограничена некоторым числом $M > 1$. В таком случае существует такая последовательность (x'_n) , что $x_n - x'_n \in N$ и

$\|x'_n\| \leq M$. Так как $v(x'_n) = v(x_n)$, то мы можем считать, что $\|x_n\| \leq M$. Тогда, так как оператор u вполне непрерывен, существует подпоследовательность (x_{n_k}) , для которой последовательность $(u(x_{n_k}))$ сходится к некоторой точке $b \in E$. Поскольку последовательность $x_{n_k} - u(x_{n_k}) = v(x_{n_k})$ сходится к u , последовательность (x_{n_k}) сходится к $b + u$, и ввиду непрерывности, мы имеем $v(b + u) = u$. Это доказывает, что $u \in v(E)$ и что, следовательно, образ $v(E)$ замкнут.

3°. Сказать, что $v(E)$ имеет в E бесконечную коразмерность, значит сказать, что существует такая бесконечная последовательность (a_n) точек пространства E , что при каждом n точка a_n не принадлежит подпространству V_{n-1} , порожденному $v(E)$ и точками $a_1, \dots, a_{n-1}$. Так как подпространство $v(E)$ замкнуто, то [ввиду (5.9.2)] замкнуто и каждое из подпространств V_n . В силу (11.3.1) мы можем по индукции определить такую последовательность (b_n) , что $b_n \in V_n$, $b_n \notin V_{n-1}$, $\|b_n\| \leq 1$ и $\|u(b_n) - u(b_j)\| \geq 1/2$ при любом $j \leq n-1$. Отсюда следует, что последовательность $(u(b_n))$ не имеет предельных точек — в противоречии с предположением о том, что оператор u вполне непрерывен.

4°. Чтобы доказать, что в случае, когда $v^{-1}(0) = \{0\}$, отображение v есть гомеоморфизм пространства E на $v(E)$, нужно только показать, что образ $v(A)$ любого замкнутого множества $A \subseteq E$ замкнут в E [а потому и в $v(E)$] (3.11.4). Но это доказывается точно таким же рассуждением, как то, которое было проведено в 2°, только всюду E нужно заменить множеством A (а N — множеством $\{0\}$).

(11.3.3) При тех же предположениях, что и в (11.3.2), определим по индукции подпространства $N_1 = v^{-1}(0)$, $N_k = v^{-1}(N_{k-1})$ при $k > 1$, $F_1 = v(E)$ и $F_k = v(F_{k-1})$ при $k > 1$. Тогда:

1°. N_k образуют возрастающую последовательность конечномерных подпространств, а F_k — убывающую последовательность замкнутых подпространств конечной коразмерности.

2°. Существует такой наименьший номер n , что при $k \geq n$ имеет место равенство $N_{k+1} = N_k$. Тогда при $k \geq n$ справедливо равенство $F_{k+1} = F_k$, пространство E есть топологическая прямая сумма (5.4) подпространств F_n и N_n и сужение оператора v на F_n есть линейный гомеоморфизм подпространства F_n на себя.

1°. Определим по индукции $v_1 = v$, $v_k = v_{k-1} \circ v$. Убедимся, что $v_k = 1 - u_k$, где u_k — вполне непрерывный оператор. Это легко показать индукцией по k . Действительно, $v_k = (1 - u_{k-1}) \circ (1 - u) = 1 - u_{k-1} - u + u_{k-1} \circ u$, и поэтому наше утверждение сразу следует из индуктивного предположения и из (11.2.6) и (11.2.5). Тогда по определению $N_k = v_k^{-1}(0)$ и $F_k = v_k(E)$, и 1° следует из (11.3.2).

2°). Предположим, что $N_k \neq N_{k+1}$ при каждом k . При $k \geq 1$ мы имеем $v(N_{k+1}) \subset N_k$. В силу (11.3.1) существует бесконечная последовательность (x_k) точек пространства E , такая, что $x_k \in N_k$, $x_k \notin N_{k-1}$, $\|x_k\| \leq 1$ при $k > 1$ и $\|u(x_k) - u(x_j)\| \geq 1/2$ при любом $j < k$. Отсюда следует, что последовательность $(u(x_k))$ не имеет предельных точек — в противоречии с предположением о том, что оператор u вполне непрерывен.

Подобным же образом предположим, что $F_{k+1} \neq F_k$ при каждом k . При $k \geq 1$ имеем $v(F_k) \subset F_{k+1}$. В силу (11.3.1) существует бесконечная последовательность (x_k) точек пространства E , такая, что $x_k \in F_k$, $x_k \notin F_{k+1}$, $\|x_k\| \leq 1$ при $k \geq 1$ и $\|u(x_k) - u(x_j)\| \geq 1/2$ при любом $j > k$. Это снова приводит к противоречию, и поэтому существует наименьший такой номер m , что $F_{k+1} = F_k$ при $k \geq m$.

Докажем, далее, что $N_n \cap F_n = \{0\}$. Если $y \in F_n \cap N_n$, то существует такая точка $x \in E$, что $y = v_n(x)$, и, с другой стороны, $v_n(y) = 0$. Но — отсюда следует, что $v_{2n}(x) = 0$, поэтому $x \in N_{2n} = N_n$ и $y = v_n(x) = 0$.

По определению мы имеем $F_m \subset F_n$ и $v(F_m) = F_m$. Докажем, что $F_n = F_m$. В противном случае мы имели бы $m > n$. Пусть точка z выбрана так, что $z \in F_{m-1} \subset F_n$ и $z \notin F_m$. Так как $v(z) \in F_m = v(F_m)$, то существует точка $t \in F_m$, для которой $v(z) = v(t)$, т. е. $z - t \in N_1 \subset N_n$. Но поскольку $z - t \in F_n$, мы заключаем, что $z = t$, и наше исходное предположение мы привели к противоречию.

Для каждой точки $x \in E$ мы имеем $v_n(x) \in F_n = F_m$, и [так как по определению m $v_n(F_n) = F_n$] существует такая точка $y \in F_n$, что $v_n(x) = v_n(y)$, поэтому $x - y \in N_n$ и, следовательно, $E = F_n + N_n$. Эта последняя сумма является прямой, так как $F_n \cap N_n = \{0\}$. Подпространство F_n замкнуто, а N_n — конечномерно, следовательно, (5.9.3), E есть топологическая прямая сумма подпространств F_n и N_n . Наконец, сужение оператора v на F_n является отображением на все F_n , и его ядром является $F_n \cap N_1 \subset F_n \cap N_n = \{0\}$, значит, оно и взаимно однозначно. В силу (11.3.2.4°)) это сужение есть линейный гомеоморфизм подпространства F_n на себя, и это завершает доказательство.

(11.3.4) При тех же предположениях, что и в (11.3.2), если отображение v инъективно [т. е. если $v^{-1}(0) = \{0\}$], то v и сюръективно и, следовательно, представляет собой линейный гомеоморфизм пространства E на себя.

В самом деле, из предположений следует, что $N_k = \{0\}$ при каждом k . Следовательно, $n = 1$ и N_1 сводится к 0. Таким образом, в силу (11.3.3) $F_1 = E$, и требуемый результат следует из (11.3.3).

Задачи

1. Пусть E и F — два банаховых пространства и f — непрерывное линейное отображение пространства E в F , такое, что $f(E) = F$ и что ¹⁾ существует такое число $m > 0$, что для любой точки $y \in F$ найдется точка $x \in E$, для которой $f(x) = y$ и $\|x\| \leq m\|y\|$.

а) Покажите, что если (y_n) — последовательность точек пространства F , сходящаяся к точке b , то из нее можно выделить такую подпоследовательность (y_{n_k}) и найти такую последовательность (x_k) точек пространства E , сходящуюся к некоторой точке a , что при каждом k будет выполнено равенство $f(x_k) = y_{n_k}$.

[Выберите (y_{n_k}) таким образом, чтобы ряд с общим членом $\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\|$ сходиллся.]

б) Пусть u — вполне непрерывное отображение пространства E в F и пусть $v = f - u$. Покажите, что образ $v(E)$ замкнут в F и имеет в F конечную коразмерность.

[Доказательство должно следовать той же схеме, что и доказательство теоремы (11.3.2); нужно воспользоваться задачей а).]

с) Определим по индукции $F_1 = v(E)$ и $F_{k+1} = v(f^{-1}(F_k))$ при $k \geq 1$. Покажите, что существует такой номер n , что $F_{k+1} = F_k$ при $k \geq n$.

[Тот же метод.]

д) Предположим, что $E = F$ — сепарабельное гильбертово пространство, и пусть $(e_n)_{n \geq 1}$ — ортонормальный базис в E . Определим f и u так, чтобы $f(e_n) = e_{n-3}$ при $n \geq 4$, $f(e_n) = 0$ при $n \leq 3$, $u(e_n) = e_{n-2}/n$ при $n \geq 6$, $u(e_1) = u(e_3) = 0$, $u(e_2) = -e_2$, $u(e_4) = e_1$ и $u(e_5) = e_2 + (e_3/5)$. По индукции определим $N_1 = v^{-1}(0)$ и $N_{k+1} = v^{-1}(f(N_k))$ при $k \geq 1$. Покажите, что все подпространства N_k различны и конечномерны.

2. Пусть E и F — два нормированных пространства, f — линейный гомеоморфизм пространства E на замкнутое подпространство $f(E)$ пространства F и u — вполне непрерывное отображение пространства E в F и пусть $v = f - u$.

а) Покажите, что подпространство $v^{-1}(0)$ конечномерно, а $v(E)$ замкнуто в F . Кроме того, если $v^{-1}(0) = \{0\}$, то v есть линейный гомеоморфизм пространства E на $v(E)$.

[Нужно следовать тому же методу, что и в (11.3.2).]

б) Определим по индукции $N_1 = v^{-1}(0)$ и $N_{k+1} = v^{-1}(f(N_k))$ при $k \geq 1$. Покажите, что существует такой номер n , что $N_{k+1} = N_k$ при $k \geq n$.

с) Приведите пример, когда если $F_1 = v(E)$ и $F_{k+1} = v(f^{-1}(F_k))$ при $k \geq 1$, то все подпространства F_k различны.

[В качестве $E = F$ возьмите сепарабельное гильбертово пространство, а в качестве f и u отображения, сопряженные (11.5) отображениям, обозначенным буквами f и u в задаче 1, д).]

¹⁾ Можно показать, что это условие является следствием того, что $f(E) = F$, если E и F — банаховы пространства; см. Н. Бурбаки [6].

3. Пусть E — банахово пространство и g — непрерывное линейное отображение пространства E в себя, удовлетворяющее условию $\|g\| < 1/2$. Тогда $f = 1 - g$ есть линейный гомеоморфизм пространства E на себя (8.3.2.1). Пусть u — вполне непрерывный оператор в E и пусть $v = f - u$. Тогда все утверждения теорем (11.3.2) и (11.3.3) справедливы.

[Сначала докажите следующий результат, соответствующий лемме (11.3.1): если $M \subset L$, $M \neq L$ и $v(L) \subset M$, то существует такая точка $a \in L \cap \overline{SM}$, что $\|a\| \leq 1$ и что для любой точки $x \in M$, для которой $\|x\| \leq 1$, выполняется неравенство $\|u(a) - u(x)\| \geq (1 - 2\|g\|)/2$.]

4. Пусть f — автоморфизм пространства $E = l^1$ (задача 1 § 5.7; мы сохраняем обозначения этой задачи), такой, что $f(e_{2k}) = e_{2k+2}$ ($k \geq 0$), $f(e_1) = e_0$ и $f(e_{2k+1}) = e_{2k-1}$ при $k \geq 1$, и пусть u — вполне непрерывное отображение, такое, что $u(e_n) = 0$ при $n \neq 1$ и $u(e_1) = e_0$. Покажите, что если $v = f - u$ и F_k и N_k определены, как в (11.3.3), то $N_{k+1} \neq N_k$ и $F_{k+1} \neq F_k$ при каждом k .

4. Спектр вполне непрерывного оператора

(11.4.1) Пусть u — вполне непрерывный оператор в комплексном нормированном пространстве E . Тогда:

1°. Спектр S оператора u есть не более чем счетное компактное множество в $\mathbb{C}$, каждая точка которого (с возможным исключением точки 0) изолирована. Если E бесконечномерно, то 0 принадлежит S .

2°. Каждое число $\lambda \neq 0$, принадлежащее спектру, есть собственное значение оператора u .

3°. Для каждого $\lambda \neq 0$, принадлежащего спектру S , существует единственное разложение пространства E в топологическую прямую сумму двух подпространств $F(\lambda)$ и $N(\lambda)$ [обозначаемых также символами $F(\lambda; u)$ и $N(\lambda; u)$], такое, что:

(i) $F(\lambda)$ замкнуто, а $N(\lambda)$ конечномерно;

(ii) $u(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$ и сужение оператора $u - \lambda \cdot 1$ на $F(\lambda)$ есть линейный гомеоморфизм этого пространства на себя;

(iii) $u(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$, и существует такое наименьшее целое число $k = k(\lambda)$, называемое кратностью λ [u обозначаемое также символом $k(\lambda; u)$], что сужение оператора $(u - \lambda \cdot 1)^k$ на $N(\lambda)$ равно 0.

4°. Собственное пространство $E(\lambda)$ оператора u , соответствующее собственному значению $\lambda \neq 0$, содержится в $N(\lambda)$ (и поэтому конечномерно).

5°. Если λ и μ — две различные точки спектра S , отличные от 0, то $N(\mu) \subset F(\lambda)$.

6°. Если E — банахово пространство, то тогда функция $\zeta \rightarrow (u - \zeta \cdot 1)^{-1}$, которая определена и аналитична в $\mathbb{C} \setminus S$, имеет в каждой точке $\lambda \neq 0$ спектра S полюс порядка $k(\lambda)$.

Пусть $\lambda \neq 0$ — произвольное комплексное число. Так как оператор $\lambda^{-1}u$ вполне непрерывный, то к нему можно применить теорию Рисса (11.3). В силу (11.3.4) если λ не есть собственное значение оператора u , то оператор $1 - \lambda^{-1}u$ является линейным гомеоморфизмом пространства E на себя. Это же верно, конечно, для оператора $u - \lambda \cdot 1 = -\lambda(1 - \lambda^{-1}u)$, т. е. λ есть регулярное значение оператора u , что доказывает 2°).

Предположим, напротив, что λ — собственное значение оператора u . Тогда существование разложения $F(\lambda) + N(\lambda)$ пространства E со свойствами (i), (ii) и (iii) следует, как и утверждение 4°, из (11.3.3) [$E(\lambda)$ есть ядро, обозначаемое в (11.3.3) буквой N_1]. Чтобы закончить доказательство утверждения 3°, нам нужно только доказать единственность подпространств $F(\lambda)$ и $N(\lambda)$. Предположим, что существует второе разложение $E = F' + N'$, обладающее теми же свойствами, и положим $v = u - \lambda \cdot 1$. Тогда для любой точки $x \in N'$ мы можем написать $x = y + z$, где $y \in F(\lambda)$ и $z \in N(\lambda)$. По предположению существует такое $h > 0$, что $v^h(x) = 0$, и поэтому $v^h(y) = 0$. Так как сужение оператора v^h на $F(\lambda)$ есть, по предположению, гомеоморфизм, то $y = 0$ и $x \in N(\lambda)$. Это доказывает, что $N' \subset N(\lambda)$, и точно такое же рассуждение доказывает, что $N(\lambda) \subset N'$. Далее, если $x = y + z \in F'$, где $y \in F(\lambda)$ и $z \in N(\lambda)$, то мы имеем $v^k(x) = v^k(y)$; следовательно, $v^k(F') \subset F(\lambda)$. Но, поскольку $v(F') = F'$, отсюда вытекает, что $F' \subset F(\lambda)$, а включение $F(\lambda) \subset F'$ доказывается аналогично.

Обозначим через u_1 и u_2 сужения оператора u соответственно на $F(\lambda)$ и на $N(\lambda)$. Из соотношения $(u_2 - \lambda \cdot 1)^k = 0$ на основании линейной алгебры следует, что в $N(\lambda)$ существует такой базис, что матрица оператора $u_2 - \lambda \cdot 1$ по отношению к этому базису является треугольной, причем по диагонали стоят 0. Если $d = \dim(N(\lambda))$, то определитель оператора $u_2 - \zeta \cdot 1$, таким образом, равен $(\lambda - \zeta)^d$, и это доказывает, что оператор $u_2 - \zeta \cdot 1$ при $\zeta \neq \lambda$ обратим. Докажем, с другой стороны, что при достаточно малом $\zeta - \lambda$ обратим оператор $u_1 - \zeta \cdot 1$. Мы можем написать $u_1 - \zeta \cdot 1 = v_1 + (\lambda - \zeta) \cdot 1$, где $v_1 = u_1 - \lambda \cdot 1$. Из 3°) мы знаем, что оператор v_1 обратим. В силу (5.7.4) мы, таким образом, имеем $\|v_1^{-1}(x)\| \leq \|v_1^{-1}\| \cdot \|x\|$ в $F(\lambda)$, что можно также записать в виде $\|v_1(x)\| \geq c \cdot \|x\|$, где $c = \|v_1^{-1}\|^{-1}$. Если бы теперь было $\zeta \neq 0$ и оператор $u_1 - \zeta \cdot 1$ не был бы обратим, то в силу 2°) [примененного к подпространству $F(\lambda)$ и оператору u_1 с учетом (11.2.7)] в $F(\lambda)$ нашлась бы такая точка $x \neq 0$, что $u_1(x) = \zeta x$ и, следовательно, $|\zeta - \lambda| \cdot \|x\| = \|v_1(x)\| \geq c \cdot \|x\|$, что невозможно, если $|\zeta - \lambda| < c$. Это показывает, что если $\zeta \neq 0$, $\zeta \neq \lambda$ и $|\zeta - \lambda| < c$, то оператор $u - \zeta \cdot 1$ обратим (поскольку обратимы его

сужения на $F(\lambda)$ и на $N(\lambda)$), т. е. что ζ не принадлежит S . Таким образом, все точки $\lambda \neq 0$ спектра S изолированы, и спектр S не более чем счетен. В силу 2°) для каждого числа $\lambda \neq 0$, принадлежащего S , в E существует такая точка $x \neq 0$, что $u(x) = \lambda x$ и, значит, в силу (5.7.4) $|\lambda| \cdot \|x\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$ и $|\lambda| \leq \|u\|$, что доказывает, что множество S компактно. Предположим, чтобы закончить доказательство утверждения 1°), что E бесконечномерно. Если бы оператор u был гомеоморфизмом пространства E на себя, то образ $u(B)$ шара $B: \|x\| \leq 1$ был бы окрестностью точки 0 в E и, так как он относительно компактен в E , это нарушало бы теорему Рисса (5.9.4).

Если μ — точка множества S , отличная от 0 и от λ , и если $x \in N(\mu)$, то мы можем написать $x = y + z$, где $y = F(\lambda)x$ и $z \in N(\lambda)$. Мы уже видели выше, что сужение оператора $w = u - \mu \cdot 1$ на $N(\lambda)$ есть гомеоморфизм. Так как $w^h(x) = 0$ при достаточно большом h и $w^h(y) \in F(\lambda)$, а $w^h(z) \in N(\lambda)$, то мы должны иметь $w^h(y) = w^h(z) = 0$, что доказывает утверждение 5°).

Займемся теперь доказательством утверждения 6°). Если E — банахово пространство, то аналитичность функции $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$ в $S \setminus S$ следует из (11.1.2). При тех же обозначениях, что и выше, λ не принадлежит спектру оператора u_1 . Поэтому [в силу (11.2.7)] функция $(u_1 - \zeta \cdot 1)^{-1}$ является аналитической в некоторой окрестности точки λ . В частности, существуют такие числа $\rho > 0$ и $M > 0$, что при $x \in F(\lambda)$ и $|\zeta - \lambda| \leq \rho$ выполняется неравенство $\|(u_1 - \zeta \cdot 1)^{-1}(x)\| \leq M \cdot \|x\|$. С другой стороны, мы можем написать $u_2 - \zeta \cdot 1 = (\lambda - \zeta) \cdot 1 + v_2$, где $v_2 = u_2 - \lambda \cdot 1$, и мы знаем, что при $\zeta \neq \lambda$ оператор $u_2 - \zeta \cdot 1$ обратим. Кроме того, так как $v_2^k = 0$,

$$(11.4.1.1) \quad (u_2 - \zeta \cdot 1)^{-1} = - \sum_{h=1}^k (\zeta - \lambda)^{-h} v_2^{h-1}.$$

Отсюда следует существование такого числа $M' > 0$, что для любой точки $x \in N(\lambda)$ при $|\zeta - \lambda| < \rho$ и $\zeta \neq \lambda$ выполняется неравенство $|\zeta - \lambda|^k \cdot \|(u_2 - \zeta \cdot 1)^{-1}(x)\| \leq M' \cdot \|x\|$. Далее, для любой точки $x \in E$ мы можем написать $x = y + z$, где $y \in F(\lambda)$ и $z \in N(\lambda)$, и существует такая константа $a > 0$, что $\|y\| \leq a \|x\|$ и $\|z\| \leq a \|x\|$ (5.9.3). Таким образом, мы видим, что для любой точки $x \in E$ при $|\zeta - \lambda| \leq \rho$ и $\zeta \neq \lambda$ выполняется неравенство $|\zeta - \lambda|^k \|(u - \zeta \cdot 1)^{-1}(x)\| \leq a(M\rho^k + M')\|x\|$. Иными словами, мы имеем $|\zeta - \lambda|^k \cdot \|(u - \zeta \cdot 1)^{-1}\| \leq a(M\rho^k + M')$ при $\zeta \neq \lambda$ и $|\zeta - \lambda| \leq \rho$. На основании (9.15.2) отсюда следует, что λ есть полюс порядка $\leq k$ функции $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$. Но по определению существует такая точка $x \in N(\lambda)$, что $v_2^{k-1}(x) \neq 0$; следовательно, функция $(\zeta - \lambda)^{k-1} \cdot (u - \zeta \cdot 1)^{-1}(x)$, когда $\zeta \neq \lambda$ стремится к λ , не ограничена, и это доказывает, что λ есть полюс порядка k . Доказательство теоремы (11.4.1) завершено.

Мы будем называть размерность пространства $N(\lambda)$ *алгебраической кратностью* собственного значения λ оператора u , а размерность собственного пространства $E(\lambda)$ — его *геометрической кратностью*. Они совпадают в том и только в том случае, если $k(\lambda) = 1$; в случае, когда E — банахово пространство, это условие эквивалентно утверждению, что λ есть простой полюс функции $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$.

(11.4.2). Пусть E — банахово пространство, E_0 — подпространство, плотное в E , u — вполне непрерывный оператор в E_0 и $\tilde{u}$ — единственное его непрерывное продолжение на E . Тогда спектры операторов u и $\tilde{u}$ совпадают, а для каждого собственного значения $\lambda \neq 0$ оператора u имеют место равенства $N(\lambda; u) = N(\lambda; \tilde{u})$, $E(\lambda; u) = E(\lambda; \tilde{u})$ и $k(\lambda; u) = k(\lambda; \tilde{u})$.

Из (11.2.9) мы знаем, что оператор $\tilde{u}$ вполне непрерывен и что он отображает E в E_0 . Если $\lambda \neq 0$ — собственное значение оператора $\tilde{u}$, то любой собственный вектор x , соответствующий λ , обладает тем свойством, что $x = \lambda^{-1} \tilde{u}(x) \in E_0$; поэтому λ есть собственное значение оператора u и $E(\lambda; \tilde{u}) \subseteq E(\lambda; u)$. Так как обратное включение очевидно, то $S(\tilde{u}) = S(u)$ и $E(\lambda; u) = E(\lambda; \tilde{u}) \subseteq E_0$ для каждого собственного значения $\lambda \neq 0$. Аналогично, рассматривая ядра оператора $(u - \lambda \cdot 1)^k$ и его продолжения $(\tilde{u} - \lambda \cdot 1)^k$, убеждаемся, что они равны. Следовательно, $k(\lambda; u) = k(\lambda; \tilde{u})$ и $N(\lambda; u) = N(\lambda; \tilde{u}) \subseteq E_0$.

Задачи

1. Пусть E — комплексное банахово пространство и u — вполне непрерывный оператор в E . Сохраним обозначения теоремы (11.4.1) и, кроме того, обозначим через p_λ (или $p_{\lambda, u}$) и $q_\lambda = 1 - p_\lambda$ проекции пространства E на $N(\lambda)$ и на $F(\lambda)$ в разложении пространства E в прямую сумму $F(\lambda) + N(\lambda)$.

а) Покажите, что для каждого $\lambda \in S(u)$, такого, что $\lambda \neq 0$, вычет мероморфной функции $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$ в полюсе λ равен $-p_\lambda$.

б) Покажите, что если $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — различные точки спектра $S(u)$, то проекции p_{λ_j} ($1 \leq j \leq r$) коммутируют, и что $p_{\lambda_1} + \dots + p_{\lambda_r}$ есть проекция пространства E на $N(\lambda_1) + \dots + N(\lambda_r)$ в разложении пространства E в прямую сумму этого подпространства и подпространства $F(\lambda_1) \cap F(\lambda_2) \cap \dots \cap F(\lambda_r)$.

2. Пусть E — бесконечномерное комплексное банахово пространство, u — вполне непрерывный оператор в E и $(u_n)_{n \geq 1}$ — последовательность вполне непрерывных операторов в E , сходящаяся к u в банаховом пространстве $\mathcal{L}(E)$.

а) Докажите, что для любого ограниченного множества $B \subset E$ объединение $\bigcup_n u_n(B)$ относительно компактно в E .

[Покажите, что оно вполне ограничено.]

б) Покажите, что если $\lambda \in \mathbb{C}$ не принадлежит $S(u)$, то существуют такой открытый шар D с центром λ и такой номер n_0 , что при $n \geq n_0$ пересечение $S(u_n) \cap D = \emptyset$ [воспользуйтесь (8.3.2.1)] и что при $\zeta \in D$ последовательность $(u_n - \zeta \cdot 1)^{-1}$ равномерно сходится к $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$.

с) Пусть (μ_n) — последовательность комплексных чисел, для которой $\mu_n \in S(u_n)$ при каждом n ; такая последовательность всегда ограничена. Покажите, что если λ — предельная точка последовательности (μ_n) , то $\lambda \in S(u)$.

[Можно предполагать, что $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \neq 0$. Тогда существует такая точка $x_n \in E$, что $\|x_n\| = 1$ и $u_n(x_n) = \lambda_n x_n$; затем воспользуйтесь задачей а).]

д) Обратно, пусть $\lambda \neq 0$ принадлежит $S(u)$. Покажите, что для каждого n существует по крайней мере одно такое число $\mu_n \in S(u_n)$, что $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$.

[В противном случае можно считать (выделяя, если потребуется, из (u_n) подходящую подпоследовательность), что существует открытый шар D с центром λ и радиусом r , такой, что $D \cap S(u) = \{\lambda\}$ и $D \cap S(u_n) = \emptyset$. Пусть тогда γ — путь $t \rightarrow \lambda + re^{it}$, определенный в промежутке $[0, 2\pi]$. Рассмотрите интеграл $\int_{\gamma} (u_n - \zeta \cdot 1)^{-1} (\zeta - \lambda)^{-1} d\zeta = 0$ и с помощью задачи б) получите противоречие.]

е) Пусть $\lambda \neq 0$ принадлежит $S(u)$ и пусть D — открытый шар с центром λ и радиусом r , такой, что $D \cap S(u) = \{\lambda\}$. Существует такой номер n_0 , что при $n \geq n_0$ пересечение спектра $S(u_n)$ с окружностью $|\zeta - \lambda| = r$ пусто.

[Воспользуйтесь с).]

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_r$ — точки пересечения $D \cap S(u_n)$; положим $k_n = \sum_{j=1}^r k(\mu_j; u_n)$. Покажите, что существует такое n_1 , что $k_n \geq k(\lambda; u)$ при $n \geq n_1$.

[Используйте тот же метод, что и в задаче д), умножив $(u_n - \zeta \cdot 1)^{-1}$ на подходящий многочлен относительно ζ степени k_n .]

Приведите пример, когда $k_n > k(\lambda; u)$ при каждом n .

ф) Пусть, в обозначениях задачи е), $p = p_{\lambda, u}$ и $p_n = \sum_{j=1}^r p_{\mu_j, u_n}$. Покажите, что в банаховом пространстве $\mathcal{L}(E)$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$.

[Воспользуйтесь задачами б) и 1.]

Выведите из этого результата, что существует такое n_2 , что при $n \geq n_2$ подпространство $N_n = N(\mu_r; u_n) + \dots + N(\mu_r; u_n)$ есть алгебраическое дополнение в E подпространства $F(\lambda; u)$.

[Предположим, что $\|p - p_n\| \leq 1/2$. Если бы нашлась точка $x_n \in F(\lambda) \cap N_n$, для которой $\|x_n\| = 1$, то соотношения $p(x_n) = 0$ и $p_n(x_n) = x_n$ противоречили бы предыдущему неравенству. Подобным же образом докажите, что пересечение $N(\lambda; u)$ и подпространства $F(\mu_r; u_n) \cap \dots \cap F(\mu_r; u_n)$ сводится к 0.]

3. Пусть u — вполне непрерывный оператор в бесконечномерном комплексном банаховом пространстве E и пусть $P(\zeta)$ — многочлен без свободного члена; положим $v = P(u)$. Покажите, что спектр $S(v)$ тождествен с множеством чисел $P(\lambda)$, где $\lambda \in S(u)$. Далее, для каждого $\mu \in S(v)$ пространство $N(\mu; v)$ есть (прямая) сумма подпространств $N(\lambda_k; u)$, для которых $P(\lambda_k) = \mu$, а $F(\mu; v)$ — пересечение соответствующих подпространств $F(\lambda_k; u)$.

[Пусть V — замкнутое подпространство пространства E , такое, что $u(V) \subset V$, и пусть u_V — сужение оператора u на V . Покажите, что существует такая константа M , не зависящая ни от V , ни от n , что $\|(P(u_V))^n\| \leq M^n \|u_V^n\|$. Примените это замечание и задачу 1 § 11.1, взяв в качестве V подходящее пересечение конечного числа подпространств вида $F(\lambda; u)$.]

4. Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство и $(e_n)_{n \geq 0}$ — ортонормальный базис в E . Покажите, что оператор u , определенный условием $u(e_n) = e_{n+1}/(n+1)$ при $n \geq 0$, вполне непрерывен и что $S(u)$ сводится к 0 (точнее, u не имеет собственных значений).

5. Пусть u — непрерывный оператор в комплексном банаховом пространстве E . Риссовская точка оператора u есть точка λ , принадлежащая спектру $S(u)$ и такая, что: 1° точка λ изолирована в $S(u)$; 2° E есть прямая сумма замкнутого подпространства $F(\lambda)$ и конечномерного подпространства $N(\lambda)$, обладающих такими четырьмя свойствами: $u(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$; $u(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$; сужение оператора $u - \lambda \cdot 1$ на $F(\lambda)$ есть линейный гомеоморфизм; сужение оператора $u - \lambda \cdot 1$ на $N(\lambda)$ нильпотентно.

а) Покажите, что если λ и μ — две различные риссовские точки в $S(u)$, то $N(\mu) \subset F(\lambda)$ и $F(\lambda)$ есть прямая сумма $N(\mu)$ и $F(\lambda) \cap F(\mu)$.

б) Риссовский оператор u , по определению, есть непрерывный оператор, у которого все точки (исключая 0) спектра $S(u)$ являются риссовскими точками. Для любого $\varepsilon > 0$ множество точек $\lambda \in S(u)$, для которых $|\lambda| \geq \varepsilon$, есть тогда конечное множество $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$. Пусть p_i — проекция пространства E на $N(\mu_i)$ в разложении пространства E в прямую сумму

$N(\mu_i) + F(\mu_i)$ ($1 \leq i \leq r$), и пусть $v = u - \sum_{i=1}^r u \circ p_i$. Покажите, что $S(v)$ содержится в шаре $|\zeta| \leq \varepsilon$ и что поэтому (задача 1 § 11.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v^n\|^{1/n} \leq \varepsilon$.

с) Пусть $\mathcal{H}$ — замкнутое (11.2.10) подпространство банахова пространства $\mathcal{L}(E)$, состоящее из всех вполне непрерывных операторов. Покажите,

что для того, чтобы оператор $u \in \mathcal{L}(E)$ был риссовским, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} (d(u^n, \mathcal{K}))^{1/n} = 0$.

[Чтобы доказать, что условие необходимо, заметьте, что $u^n = v^n + w_n$, где w_n — оператор конечного ранга, и, значит, вполне непрерывный, и воспользуйтесь задачей б). Чтобы доказать, что условие достаточно, воспользуйтесь результатом задачи 3 § 11.3, который можно интерпретировать следующим образом: если $\|g\| < 1/2$, то либо точка $\lambda = 1$ не принадлежит $S(g + u)$, либо же является риссовской точкой для $g + u$.]

б. Вполне непрерывные операторы в гильбертовых пространствах

Пусть E — предгильбертово пространство и u — оператор в E . Мы будем говорить, что u имеет сопряженный оператор, если в E существует такой оператор u^* (он и называется сопряженным), что для любой пары x, y точек пространства E

$$(11.5.1) \quad (u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

Сразу видим, что оператор u^* является единственным (если он существует) и что [в силу 6.1(V)] в этом случае оператор $(u^*)^*$ существует и равен u . Подобным же образом убеждаемся в том, что если u и v имеют сопряженные операторы, то сопряженные операторы имеют $u + v$, λu и uv и они соответственно равны $u^* + v^*$, $\bar{\lambda}u^*$ и v^*u^* .

(11.5.2) Если оператор u непрерывен и имеет сопряженный оператор, то оператор u^* непрерывен и в $\mathcal{L}(E)$ выполняется равенство $\|u^*\| = \|u\|$. Если E — гильбертово пространство, то каждый непрерывный оператор в E имеет сопряженный оператор.

Из (11.5.1) и неравенства Коши — Шварца (6.2.4) заключаем, что для любой пары точек x и y

$$|(x|u^*(y))| \leq \|u(x)\| \cdot \|y\| \leq \|u\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Полагая $x = u^*(y)$, получаем $\|u^*(y)\| \leq \|u\| \cdot \|y\|$ для любой точки $y \in E$, откуда следует непрерывность оператора u^* и неравенство $\|u^*\| \leq \|u\|$.

Обратное неравенство будет доказано, если в рассуждении поменять местами u и u^* .

Если E — гильбертово пространство и оператор u непрерывен, то для любой точки $y \in E$ линейная форма $x \rightarrow (u(x)|y)$ непрерывна, и в силу (6.3.2) существует единственный такой вектор $u^*(y)$, для которого имеет место равенство (11.5.1). Из единственности $u^*(y)$

закключаем, что отображение u^* линейно, и потому u^* есть оператор, сопряженный u .

Второе утверждение теоремы (11.5.2) не переносится на предгильбертовы пространства.

Оператор u в предгильбертовом пространстве E называется *самосопряженным* (или *эрмитовым*), если он имеет сопряженный оператор и если $u^* = u$. Отображение $(x, y) \rightarrow (u(x)|y) = (u(y)|x)$ есть тогда эрмитова форма в E . Самосопряженный оператор u называется *положительным* (соответственно *невырождающимся*), если соответствующая эрмитова форма положительна (соответственно положительна и не вырождается). В этом случае пишут $u \geq 0$ (соответственно $u > 0$). Для любого оператора, имеющего сопряженный оператор, $u + u^*$ и $i(u - u^*)$ являются самосопряженными операторами.

Если P — ортогональная проекция пространства E на полное векторное подпространство F (6.3), то при $x \in E$ и $y \in F$ имеем $(Px|y - Py) = 0$, следовательно, $(Px|y) = (Px|Py) = (x|Py)$, и это доказывает, что P есть положительный эрмитов оператор.

(11.5.3) Если непрерывный оператор u в предгильбертовом пространстве E имеет сопряженный оператор, то u^* и uu^* являются самосопряженными положительными операторами и $\|u^*u\| = \|uu^*\| = \|u\|^2 = \|u^*\|^2$. В частности, если u — самосопряженный оператор, то $\|u^2\| = \|u\|^2$.

Тот факт, что операторы u^* и uu^* являются самосопряженными, следует из соотношений $(u^*)^* = u$ и $(uv)^* = v^*u^*$. Кроме того, $(u^*u(x)|x) = (u(x)|u(x)) \geq 0$ для любой точки $x \in E$, и точно так же доказывается, что положителен оператор uu^* . Далее, это последнее равенство в силу неравенства Коши — Шварца показывает, что $\|u(x)\|^2 \leq \|u^*u(x)\| \|x\|$. Поэтому [ввиду (5.7.4)] $\|u\|^2 \leq \|u^*u\|$. С другой стороны, в силу (5.7.5) и (11.5.2) $\|u^*u\| \leq \|u^*\| \cdot \|u\| = \|u\|^2$, и это завершает доказательство.

(11.5.4) Если E — гильбертово пространство, то оператор, сопряженный вполне непрерывному оператору u в E , сам является вполне непрерывным.

Так как E — полное пространство, достаточно доказать, что образ $u^*(B)$ шара $B: \|y\| \leq 1$ вполне ограничен. Пусть $F = u(B)$; тогда F — компактное множество в E . Рассмотрим в пространстве $\mathcal{E}(F)$ (7.2) множество H сужений на F линейных непрерывных отображений $x \rightarrow (x|y)$ пространства E в $\mathbb{C}$, где $y \in B$. Мы докажем, что H относительно компактно в $\mathcal{E}(F)$. Действительно, в силу неравенства Коши — Шварца мы имеем $|(x - x'|y)| \leq \|x - x'\|$, поскольку $\|y\| \leq 1$. Это показывает, что множество H равномерно непрерывно. С другой стороны, F содержится в шаре $\|x\| \leq \|u\|$; поэтому для любой точки $y \in B$ и любой точки $x \in F$ выполняется

неравенство $|(x|y)| \leq \|u\|$, и остается лишь воспользоваться теоремой Асколи (7.5.7).

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число таких точек u_j ($1 \leq j \leq m$) из B , что, какова бы ни была точка $u \in B$, существует такой номер j , что неравенство $|(u(x)|u - u_j)| \leq \varepsilon$ имеет место сразу для всех точек $x \in B$. Но в силу (11.5.1) это последнее неравенство можно записать в виде $|(x|u^*(u) - u^*(u_j))| \leq \varepsilon$, и потому либо $u^*(u) = u^*(u_j)$, либо же мы можем взять $x = z/\|z\|$, где $z = u^*(u) - u^*(u_j)$. Отсюда мы заключаем, что $\|u^*(u) - u^*(u_j)\| \leq \varepsilon$, и это завершает доказательство.

Заметим, что доказательство того, что образ $u^*(B)$ вполне ограничен, сохраняет силу и в случае, когда пространство E не является полным. Но может случиться, что вполне непрерывный оператор в предгильбертовом пространстве E имеет сопряженный оператор, не являющийся вполне непрерывным.

(11.5.5.) Пусть u — вполне непрерывный оператор в комплексном предгильбертовом пространстве E , имеющий вполне непрерывный сопряженный оператор u^* . Тогда:

1°. Спектр $S(u^*)$ является образом спектра $S(u)$ при отображении $\xi \rightarrow \bar{\xi}$.

2°. Для любого числа $\lambda \neq 0$, принадлежащего $S(u)$, имеем $k(\lambda; u) = k(\bar{\lambda}; u^*)$.

3°. Если $v = u - \lambda \cdot 1$, то $v^*(E)$ есть ортогональное дополнение (6.3) подпространства $v^{-1}(0) = E(\lambda; u)$ и размерности собственных пространств $E(\lambda; u)$ и $E(\bar{\lambda}; u^*)$ совпадают.

4°. Подпространство $F(\bar{\lambda}; u^*)$ является ортогональным дополнением подпространства $N(\lambda; u)$ и размерности подпространств $N(\lambda; u)$ и $N(\bar{\lambda}; u^*)$ совпадают.

Мы имеем $v^* = u^* - \bar{\lambda} \cdot 1$; поэтому в силу (11.5.1) $(v(x)|u) = (x|v^*(u))$, и, следовательно, из соотношения $v(x) = 0$ вытекает, что вектор x ортогонален подпространству $v^*(E)$. Применяя теорему (11.4.1) к оператору u^* , получаем, что $v^*(E)$ есть топологическая прямая сумма $F(\bar{\lambda}; u^*)$ и подпространства $v^*(N(\bar{\lambda}; u^*))$ пространства $N(\bar{\lambda}; u^*)$, а из линейной алгебры следует, что коразмерность подпространства $v^*(E)$ равна размерности подпространства $v^{*-1}(0) = E(\bar{\lambda}; u^*)$. Поэтому мы имеем $\dim E(\lambda; u) \leq \dim E(\bar{\lambda}; u^*)$. Но $u = (u^*)^*$, и, таким образом, мы имеем $\dim E(\lambda; u) = \dim E(\bar{\lambda}; u^*)$.

Далее, ортогональное дополнение подпространства $E(\lambda; u)$ содержит $v^*(E)$ и имеет ту же коразмерность, что и $v^*(E)$; значит, они совпадают, что доказывает утверждение 3°. Это также показывает, что для любого собственного значения $\lambda \neq 0$ оператора u

число $\bar{\lambda}$ является собственным значением оператора u^* , и так как обратное следует из равенства $u = (u^*)^*$, то мы доказали и 1°).

Точно такое же рассуждение можно применить к последовательным итерациям v^h оператора v . Оно покажет, что образ пространства E при $v^h = (v^h)^*$ является ортогональным дополнением ядра отображения v^h . Пользуясь (11.3.2), (11.4.1) и равенством $u = (u^*)^*$, тогда немедленно доказываем 2°) и 4°).

Теоремы (11.4.1) и (11.5.5) можно превратить в критерий для решения уравнения $u(x) - \lambda x = y$.

(11.5.6) При предположениях теоремы (11.5.5):

(i) если λ не принадлежит спектру оператора u , то уравнение $u(x) - \lambda x = y$ имеет в E для каждого вектора $y \in E$ единственное решение;

(ii) если λ принадлежит спектру оператора u , то, для того чтобы при $y \in E$ уравнение $u(x) - \lambda x = y$ имело в E решение, необходимо и достаточно, чтобы вектор y был ортогонален решениям уравнения $u^*(x) - \bar{\lambda}x = 0$.

Для конечномерного пространства этот критерий сводится к классическому критерию существования решения системы скалярных линейных алгебраических уравнений.

(11.5.7) Пусть u — вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве E . Тогда:

1°. Каждый элемент спектра $S(u)$ является действительным числом, и для каждого собственного значения $\lambda \neq 0$ оператора u имеем $k(\lambda) = 1$.

2°. Если λ и μ — два различных собственных значения оператора u , то собственные подпространства $E(\lambda)$ и $E(\mu)$ ортогональны.

3°. Пусть (μ_n) — строго убывающая (конечная или бесконечная) последовательность собственных значений > 0 , а (ν_n) — строго возрастающая (конечная или бесконечная) последовательность собственных значений < 0 . Для каждого k , для которого определено значение μ_k (соответственно ν_k), пусть F'_k (соответственно F''_k) — ортогональное дополнение подпространства $E(\mu_1) + \dots + E(\mu_{k-1})$ (соответственно $E(\nu_1) + \dots + E(\nu_{k-1})$). Тогда μ_k (соответственно ν_k) есть наибольшее (соответственно наименьшее) значение функции $x \rightarrow (u(x)|x)$ на сфере $\|x\| = 1$ в F'_k (соответственно F''_k), и точки этой сферы, в которых $(u(x)|x) = \mu_k$ (соответственно $(u(x)|x) = \nu_k$), суть точки, принадлежащие подпространству $E(\mu_k)$ (соответственно $E(\nu_k)$). Кроме того, $\|u\| = \sup(\mu_1, -\nu_1)$.

4°). Пространство E является гильбертовой суммой (6.4) подпространств $E(\mu_n)$, $E(\nu_n)$ и $E(0) = u^{-1}(0)$.

(Может случиться, что либо значения μ_n , либо значения ν_n отсутствуют. Но из 3°) следует, что единственный случай, когда нет отличных от нуля собственных значений, есть случай $u = 0$.)

Для любого собственного значения $\lambda \neq 0$ оператора u мы имеем $(u(x)|x) = \lambda(x|x)$, где x — собственный вектор, соответствующий λ . Но число $(u(x)|x) = (x|u(x)) = (u(x)|x)$ для любого $x \in E$ действительно. Поэтому, так как число $(x|x)$ действительно и $\neq 0$, λ действительно. Если $v = u - \lambda \cdot 1$, то мы, таким образом, имеем $v^* = v$ и, значит, в силу (11.5.4) $v(E)$ есть ортогональное дополнение подпространства $E(\lambda) = v^{-1}(0)$. Отсюда следует, что сужение оператора v на $v(E)$ взаимно однозначно. Поэтому по определению [см. (11.3.3)] $N(\lambda) = E(\lambda)$, $F(\lambda) = v(E)$ и, следовательно, $k(\lambda) = 1$. Это доказывает утверждение 1°, а так как для любого собственного значения $\mu \neq \lambda$ в силу (11.4.1) $E(\mu) = N(\mu) \subset F(\lambda)$, то мы доказали и 2°).

Сначала мы докажем последнюю часть утверждения 3°. Пусть $\rho = \sup(\mu_1, -\nu_1)$. Тогда в силу (11.1.2) отображение $\xi \rightarrow (u - \xi \cdot 1)^{-1}$ при $|\xi| > \rho$ является аналитическим, откуда сразу следует, что отображение $\xi \rightarrow (1 - \xi u)^{-1}$ является аналитическим при $|\xi| < 1/\rho$. Если теперь ξ принадлежит достаточно малой окрестности точки 0, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n u^n$ сходится в $\mathcal{L}(E)$ к $(1 - \xi u)^{-1}$ (8.3.2.1).

В силу (9.9.4) этот степенной ряд сходится при каждом ξ , для которого $|\xi| < 1/\rho$.

Далее, если M — максимум нормы $\|(1 - \xi u)^{-1}\|$ при $|\xi| = r$, где r — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < r < 1/\rho$, то неравенства Коши (9.9.5) дают $\|u^n\| \leq M/r^n \leq M\rho^n$. В частности, если мы воспользуемся (11.5.3), то мы отсюда получим $\|u\|^{2^n} \leq M\rho^{2^n}$ при каждом $n \geq 1$. Беря корень 2^n -й степени и устремляя n к $+\infty$, на основании (4.3) получаем $\|u\| \leq \rho$. С другой стороны, мы в силу (11.1.3) имеем $\rho \leq \|u\|$ и, значит, $\|u\| = \rho$.

Обозначим теперь через (ρ_n) строго возрастающую последовательность абсолютных величин собственных значений оператора u , так что $\rho_1 = \rho = \sup(\mu_1, -\nu_1)$, и пусть G_n равно сумме подпространств $E(\lambda)$, для которых $|\lambda| = \rho_n$ (конечно, существует только одно или же два таких собственных значения λ). Пусть, далее, F_n — ортогональное дополнение подпространства $G_1 + \dots + G_{n-1}$. В силу 1°) имеем $u(F_n) \subset F_n$. Докажем, что сужение u_n оператора u на F_n удовлетворяет условию $\|u_n\| < \rho_{n-1}$. В противном случае по только что доказанному [и по теореме (11.2.7)] в F_n нашелся бы такой собственный вектор x , что $u(x) = \lambda x$, где $|\lambda| \geq \rho_{n-1}$. Но это противоречит определению F_n .

Напишем теперь $x = y + z$ для каждого вектора $x \in F_n$, где $y \in F_{n+1}$ и $z \in G_n$. По неравенству Коши — Шварца

$$-\|u_{n+1}\| \cdot \|y\|^2 + (u(z)|z) \leq (u(x)|x) \leq \|u_{n+1}\| \cdot \|y\|^2 + (u(z)|z).$$

Допустим, что $\rho_n = \mu_h = -\nu_k$, и в соответствии с этим напомним $z = z_1 + z_2$, где $z_1 \in E(\mu_h)$ и $z_2 \in E(\nu_k)$. Это дает $(u(z)|z) = \rho_n(\|z_1\|^2 - \|z_2\|^2)$. Так как $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2$, то, пользуясь предыдущим неравенством и неравенством $\|u_{n+1}\| < \rho_n$, сразу видим, что наибольшее значение функции $(u(x)|x)$ на сфере $\|x\| = 1$ в F_n равно ρ_n и что оно достигается только в точках подпространства $E(\mu_h)$, а наименьшее значение равно $-\rho_n$ и оно достигается только в точках подпространства $E(\nu_k)$. Этот же результат получается аналогично и проще, если нет такого k , что $\rho_n = -\nu_k$, или же такого h , что $\rho_n = \mu_h$. Наконец, если мы заметим, что $F'_n = F_n + E(\nu_1) + \dots + E(\nu_s)$, если $\mu_h = \rho_n$ и s — наибольшее значение k , для которого $\rho_n < -\nu_k$, и точно так же $F''_n = F_n + E(\mu_1) + \dots + E(\mu_r)$, если $\nu_k = -\rho_n$ и r — наибольшее значение h , для которого $\rho_n < \mu_h$, то почти тождественное рассуждение завершает доказательство утверждения 3°).

Пусть теперь F_∞ — замкнутое подпространство, являющееся пересечением всех F_n . По определению $u(F_\infty) \subset F_\infty$, и у сужения оператора u на F_∞ не может быть собственных значений $\neq 0$. В силу 3°) отсюда следует, что $u(x) = 0$ в F_∞ . Далее, если вектор $x \in E$ ортогонален F_∞ и всем $E(\mu_k)$ и $E(\nu_k)$, то по определению он ортогонален всем G_n и поэтому принадлежит F_∞ . Поскольку он ортогонален и F_∞ , он равен 0. Это [на основании (6.3.1)] доказывает, что алгебраическая сумма подпространств $E(\mu_k)$, $E(\nu_k)$ и F_∞ плотна в E . Следовательно, в силу (6.4.2) E есть гильбертова сумма этих пространств. Любой вектор $x \in E$ может, таким образом, единственным способом быть записан в виде $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$, где x'_k , x''_k

и x_0 — ортогональные проекции вектора x соответственно на $E(\mu_k)$, $E(\nu_k)$ и F_∞ , а суммы, когда множество индексов бесконечно, представляют собой ряды, сходящиеся в E (каноническое разложение x). Отсюда мы заключаем, что $u(x) = \sum_k \mu_k x'_k + \sum_k \nu_k x''_k$,

и ввиду единственности этого представления мы видим, что из $u(x) = 0$ следует $x \in F_\infty$. Иными словами, $F_\infty = u^{-1}(0)$, и тем самым завершено доказательство последнего утверждения 4°) теоремы (11.5.7).

Замечания. (11.5.8) Пусть E_0 — предгильбертово пространство, являющееся плотным подпространством некоторого гильбертова пространства E . [Можно доказать, что для любого предгильбертова пространства E_0 существует гильбертово пространство E , обладающее этим свойством; в (6.6.2) мы доказали эту теорему в частном случае, когда E_0 сепарабельно.] Пусть u — вполне непрерывный самосопря-

женный оператор в E_0 . Тогда утверждения 1°), 2°) и 3°) теоремы (11.5.7) без изменения остаются справедливыми и для u .

В самом деле, из принципа продолжения тождеств следует, что единственное непрерывное продолжение $\tilde{u}$ оператора u на пространство E является самосопряженным, и легко проверить, что $\|\tilde{u}\| = \|u\|$. Наше утверждение тогда следует из (11.4.2) и из следующего факта: если F_0 — конечномерное подпространство пространства E_0 , G_0 — его ортогональное дополнение в E_0 и G — его ортогональное дополнение в E , то G_0 плотно в G . Этот факт вытекает из того, что если $v \doteq 1 - P_{F_0}$ в $\mathcal{L}(E)$ [обозначения см. в 6.3], то отображение v непрерывно, причем $v(E) = G$ и $v(E_0) = G_0$ [см. (3.11.3)].

Относительно же утверждения 4°) теоремы (11.5.7) можно сказать следующее. Ясно, что ядро оператора u является пересечением пространства E_0 с ядром оператора $\tilde{u}$, и поэтому оно есть подпространство векторов из E_0 , ортогональных всем собственным пространствам $E(\lambda)$ с $\lambda \neq 0$. Но если мы рассмотрим каноническое разложение $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$ элемента $x \in E_0$, то суммы в правой части и элемент x_0 не обязаны принадлежать E_0 .

(11.5.9) Если $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$ и $y = \sum_k y'_k + \sum_k y''_k + y_0$ — канонические разложения двух векторов x и y у пространства E , то

$$(u(x)|y) = \sum_k \mu_k(x'_k|y'_k) + \sum_k \nu_k(x''_k|y''_k),$$

причем ряды в правой части равенства абсолютно сходятся (6.4).

Эта формула показывает, что самосопряженный оператор u положителен в том и только в том случае, если у него нет отрицательных собственных значений ν_k , и что он не вырождается в том и только в том случае, если $u^{-1}(0) = \{0\}$. Если оператор u не вырождается и если в каждом собственном пространстве $E(\lambda)$ ($\lambda \neq 0$) мы возьмем некоторый ортонормальный базис B_λ (состоящий из конечного числа векторов), то объединение всех B_λ есть счетное множество, составляющее тотальную ортонормальную систему в E (6.5).

(11.5.10) Нужно заметить, что при предположениях, сделанных в (11.5.8), вполне может случиться, что самосопряженный оператор u в пространстве E_0 будет невырождающимся, а его непрерывное продолжение $\tilde{u}$ на пространство E будет вырождающимся (иными словами, ядро оператора u не обязательно плотно в ядре оператора $\tilde{u}$). Это возможно даже если u — положительный самосопряженный оператор.

Для вполне непрерывных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве E теорема (11.5.7) дает формулу для решения в E уравнения $u(x) - \lambda x = y$.

(11.5.11) Пусть $y = \sum_k y'_k + \sum_k y''_k + y_0$ — каноническое разложение вектора y в E . Тогда:

1°. Если λ не принадлежит спектру $S(u)$, то единственное решение x уравнения $u(x) - \lambda x = y$ дается его каноническим разложением

$$(11.5.11.1) \quad x = \sum_k \frac{1}{\mu_k - \lambda} y'_k + \sum_k \frac{1}{\nu_k - \lambda} y''_k - \frac{1}{\lambda} y_0.$$

2°. Если λ — одно из собственных значений μ_k (соответственно ν_k), то, для того чтобы уравнение $u(x) - \lambda x = y$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы было $y'_k = 0$ (соответственно $y''_k = 0$). В этом случае решения даются формулой (11.5.11.1), в которой член, соответствующий μ_k (соответственно ν_k), нужно заменить произвольным элементом пространства $E(\mu_k)$ (соответственно $E(\nu_k)$).

3°. Для того чтобы уравнение $u(x) = y$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы $y_0 = 0$ и чтобы ряды $\sum_k \|y'_k\|^2 / \mu_k^2$ и $\sum_k \|y''_k\|^2 / \nu_k^2$ были сходящимися. В этом случае решения даются формулой

$$(11.5.11.2) \quad x = \sum_k \frac{1}{\mu_k} y'_k + \sum_k \frac{1}{\nu_k} y''_k + x_0,$$

где x_0 — произвольный элемент пространства $u^{-1}(0)$.

Утверждения 1°) и 2°) сразу следуют из (11.5.7) и (11.5.6), причем формулы получаются, если воспользоваться единственностью канонического разложения. Точно такое же рассуждение доказывает, что если существуют решения уравнения $u(x) = y$, то они необходимо даются формулой (11.5.11.2), откуда следует необходимость условий. Если же эти условия выполняются, то правая часть формулы (11.5.11.2) является [в силу (6.4)] элементом пространства E , удовлетворяющим уравнению $u(x) = y$.

Задачи

1. Пусть E — векторное пространство всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций в промежутке $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ (8.12). С помощью эрмитовой формы

$$(x | y) = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} dt$$

E превращается в предгильбертово пространство. Пусть u — линейное отображение пространства E в себя, удовлетворяющее условию $u(x) = ix'$. Покажите, что u самосопряженно, но не непрерывно в E .

[Рассмотрите последовательность (x_n) , где $x_n(t) = (\sin nt)/n$.]

2. Пусть F — сепарабельное гильбертово пространство, $(e_n)_{n \geq 1}$ — ортонормальный базис в F и v — вполне непрерывный оператор в F , такой, что $v(e_n) = (e_1 + e_n)/n$ (задача 3 § 11.2). Пусть $E = v(F)$ и пусть u — сужение оператора v на F , удовлетворяющее условию $u(E) \subset E$. Покажите, что u — вполне непрерывный оператор в предгильбертовом пространстве E , не имеющий сопряженного.

3. а) Пусть E — комплексное гильбертово пространство и f — непрерывная эрмитова форма в $E \times E$. Покажите, что существует такая константа c , что $|f(x, y)| \leq c \|x\| \cdot \|y\|$ [ср. с (5.5.1)]. Покажите также, что существует единственный непрерывный эрмитов оператор U в E , для которого $f(x, y) = (Ux | y)$.

б) Предположим, что E сепарабельно, и пусть $(e_n)_{n \geq 1}$ — ортонормальный базис в E . Пусть V — непрерывный линейный оператор в E , определяемый условиями $Ve_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n/n$ и $Ve_i = 0$ при $i > 1$, и пусть $W = VV^*$.

Пусть E_0 — подпространство пространства E , состоящее из всех (конечных) линейных комбинаций элементов e_n , и пусть f — сужение на $E_0 \times E_0$ отображения $(x, y) \rightarrow (Wx | y)$. Покажите, что f есть непрерывная эрмитова форма в $E_0 \times E_0$, но что не существует линейного оператора U в E_0 , для которого в $E_0 \times E_0$ выполнялось бы равенство $f(x, y) = (Ux | y)$.

с) Покажите, что если u — оператор, определенный в задаче 1, то эрмитова форма $(x, y) \rightarrow (u(x) | y)$ не непрерывна в $E \times E$.

4. Пусть E — комплексное гильбертово пространство и u — эрмитов оператор в E . Докажите, что u обязательно непрерывен.

[Предположите противное и покажите, что тогда можно по индукции определить последовательность (x_n) точек пространства E , для которых $\|x_n\| = 1$ при каждом n , и ортонормальную последовательность (e_n) так, чтобы: 1°) элемент x_n был ортогонален $u(e_1), \dots, u(e_{n-1})$; 2°) если y_n — ортогональная проекция элемента $u(x_n)$ на подпространство V_n , ортогональное

элементам $e_1, \dots, e_{n-1}$, то $\|y_n\| \geq 2n^3$ и $\|y_n\| \geq 2n^2 \left| \left(u \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k/k^2 \right) \middle| e_n \right) \right|$;

3°) $e_n = y_n/\|y_n\|$. Затем рассмотрите точку $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/n^2$ в E и получите

противоречие, показав, что при каждом n имеет место неравенство $|(u(x) | e_n)| \geq n$. Для этого разложите x в сумму $x'_n + (x_n/n^2) + x''_n$, где

$x'_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k/k^2$ и $x''_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k/k^2$ и всюду используйте тождество $(u(y) | z) =$

$= (y | u(z))$ (метод скользящего горба). Ср. с задачей 3, с).]

5. Пусть E — комплексное предгильбертово пространство. Если U и V — два эрмитовых оператора в E , то мы пишем $U \geq V$, когда эрмитов оператор $U - V$ положителен, т. е. когда $(Ux|x) \geq (Vx|x)$ для любой точки $x \in E$.

а) Предположим, что E — гильбертово пространство и что существует такое число $m > 0$, что $U \geq m \cdot 1$. Покажите, что U есть линейный гомеоморфизм пространства E на себя.

[Сначала заметьте, что для любого элемента $x \in E$ выполняется неравенство $\|Ux\| \geq m\|x\|$, и поэтому (задача 4) U есть линейный гомеоморфизм пространства E на некоторое его замкнутое подпространство M . Затем убедитесь в том, что если $x \in E$ ортогонален M , то $x = 0$.]

б) Пусть F — подпространство предгильбертова пространства E , определенного в задаче 1, состоящее из сужений на промежутке $[0, 1]$ всех многочленов с комплексными коэффициентами. Пусть U — оператор, ставящий каждому многочлену $x \in F$ в соответствие многочлен $(1+t)x(t)$. Покажите, что U есть непрерывный эрмитов оператор в F , удовлетворяющий условию $U \geq 1$, но что образ $U(F)$ плотен в F и отличен от F .

6. а) Покажите, что если U — положительный эрмитов оператор в комплексном предгильбертовом пространстве E , то для любой точки $x \in E$

$$\|Ux\|^4 \leq (Ux|x)(U^2x|Ux).$$

[Рассмотрите положительную эрмитову форму $(x, y) \rightarrow (Ux|y)$ и воспользуйтесь (6.2.1).]

б) Предположим, кроме того, что оператор U непрерывен [ср. с задачами 3, с) и 4)]. Выведите из а), что $\|U\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (Ux|x)$.

7. Пусть F и G — два сепарабельных комплексных гильбертовых пространства, (a_n) (соответственно (b_n)) ($n \geq 1$) — ортонормальный базис в F (соответственно в G) и L — гильбертова сумма (6.4) пространств F и G . Пусть v — непрерывный оператор в L , определяемый условиями $v(a_n) = 0$ и $v(b_n) = a_n/n$, и пусть $E = v(G) + v^*(v(G))$. Пусть u — сужение оператора v на пространстве E . Покажите, что оператор u вполне непрерывен и имеет сопряженный оператор, но u^* не является вполне непрерывным.

[Заметьте, что образ $v(G)$ плотен в F , но не замкнут в F . Покажите, что если (x_n) — ограниченная последовательность точек из $v(G)$, сходящаяся к некоторой точке из F , но не из $v(G)$, то последовательность $(u^*(x_n))$ сходится к точке, принадлежащей L , но не принадлежащей E ; при этом воспользуйтесь тем фактом, что сужение оператора v^* на F взаимно однозначно.]

8. Обозначения и предположения те же, что и в (11.5.7). Пусть (λ_n) — убывающая последовательность чисел > 0 , такая, что для каждого k количество индексов n , для которых $\lambda_n = \mu_k$, равно $\dim(E(\mu_k))$. Пусть (a_n) — такая ортонормальная система в E , что для индексов n , для которых $\lambda_n = \mu_k$, элементы a_n образуют базис подпространства $E(\mu_k)$. Мы будем говорить, что (λ_n) есть *полная последовательность* строго положительных собственных значений оператора u .

а) Покажите, что λ_n есть максимальное значение функции $(u(x)|x)$, когда x меняется на подмножестве пространства E , определяемом условиями $\|x\|=1$ и $(x|a_k)=0$ при $1 \leq k \leq n-1$. Покажите, далее, что это максимальное значение достигается при $x = a_n$.

[Воспользуйтесь (11.5.7, 4°).]

б) Пусть $z_1, \dots, z_{n-1}$ — произвольные векторы в E , и обозначим через $\rho_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ верхнюю грань функции $(u(x)|x)$, когда x меняется в подмножестве пространства E , определяемом условиями $\|x\|=1$ и $(x|z_k)=0$ при $1 \leq k \leq n-1$. Покажите, что $\lambda_n = \rho_n(a_1, \dots, a_{n-1}) \leq \rho_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ (минимаксный принцип).

[Возьмите x в подпространстве, порожденном элементами $a_1, \dots, a_n$, так, чтобы при $1 \leq k \leq n-1$ выполнялись соотношения $(x|z_k)=0$.]

с) Пусть u' и u'' — два компактных самосопряженных оператора и пусть $u = u' + u''$. Пусть $(\lambda_n)'$ и $(\lambda_n)''$ — полные последовательности строго положительных собственных значений соответственно операторов u' и u'' , а $(a_n)'$ и $(a_n)''$ — соответствующие ортонормальные системы. Покажите, что если определены λ_p', λ_q'' и λ_{p+q-1} , то $\lambda_{p+q-1} \leq \lambda_p' + \lambda_q''$.

[Рассмотрите $\rho_u(a_1', \dots, a_{p-1}', a_1'', \dots, a_{q-1}'')$.]

Если последовательность $(\lambda_n)''$ конечна и имеет N элементов и если определены λ_p' и λ_{p+N} , то $\lambda_{p+N} \leq \lambda_p'$.

[Тот же метод; заметьте, что $(u''(x)|x) \leq 0$, если $(x|a_j'')=0$ при $1 \leq j \leq N$.]

д) При тех же предположениях, что и в с), покажите, что если определены λ_p' и λ_p , то $|\lambda_p - \lambda_p'| \leq \|u''\|$.

[Воспользуйтесь соотношением $\lambda_p = \rho_u(a_1, \dots, a_{p-1})$.]

Далее, если $u'' \geq 0$ (соответственно $u'' \leq 0$), то $\lambda_p \geq \lambda_p'$ (соответственно $\lambda_p \leq \lambda_p'$).

е) Для случая, когда E конечномерно, выскажите результаты задач б), с) и д) на языке эрмитовых форм на $E \times E$ (см. задачу 3). Примените их к следующей задаче. Пусть f_i ($1 \leq i \leq n$) — простые функции в компактном промежутке $I = [a, b]$ и пусть $I' = [c, d]$ — промежуток, содержащий

в I . Пусть $\Delta = \det \left(\int_a^b f_i \bar{f}_j dt \right)$ и $\Delta' = \det \left(\int_c^d f_i \bar{f}_j dt \right)$ — определители Грама, соответствующие I и I' . Покажите, что $\Delta' \leq \Delta$, выразив определители Грама как произведение собственных значений.

9. а) Пусть u — вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве E . Пусть H — замкнутое подпространство E и p — ортогональная проекция пространства E на H (6.3). Покажите, что сужение v оператора $p \circ u$ (или $p \circ u \circ p$) на H вполне непрерывно и что $(v(y)|y) = (u(y)|y)$ при $y \in H$.

[Воспользуйтесь соотношением $p^* = p$.]

Пусть (λ_n) и (μ_n) — полные последовательности строго положительных собственных значений соответственно операторов u и v . Покажите, что если определены λ_n и μ_n , то $\mu_n \leq \lambda_n$.

[Воспользуйтесь задачей 8, б).]

б) Предположим, кроме того, что оператор u положителен. Покажите, что для любой конечной последовательности $(x_n)_{1 \leq k \leq n}$ точек пространства E имеем $\det((u(x_i) | x_j)) \leq \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det((x_i | x_j))$

[Примените задачу а) к подпространству H , порожденному элементами $x_1, \dots, x_n$]

10. а) Пусть u — эрмитов оператор в комплексном предгильбертовом пространстве E . Покажите, что для любого целого $n > 0$ и любой точки $x \in E$ имеет место неравенство $\|u^n(x)\|^2 \leq \|u^{n-1}(x)\| \cdot \|u^{n+1}(x)\|$.

[Воспользуйтесь неравенством Коши — Шварца.]

б) Предположим, что E — гильбертово пространство, а u — вполне непрерывный самосопряженный оператор. Покажите, что если $u(x) \neq 0$, то $u^n(x) \neq 0$ для любого целого $n > 0$ и что последовательность положительных чисел $\alpha_n = \|u^{n+1}(x)\| / \|u^n(x)\|$ убывает и стремится к пределу, равному абсолютной величине некоторого собственного значения оператора u . Охарактеризуйте это собственное значение в терминах канонического разложения вектора x . Когда последовательность векторов $u^n(x) / \|u^n(x)\|$ имеет в E предел?

[Воспользуйтесь (11.5.7).]

11. Пусть u — вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве E и пусть f — комплексная функция, определенная и непрерывная на спектре $S(u)$. Покажите, что существует единственный непрерывный оператор v такой, что [в обозначениях теоремы (11.5.7)] сужение оператора v на $E(\mu_k)$ (соответственно на $E(\nu_k)$, на $E(0)$) есть гомотетическое отображение $u \rightarrow f(\mu_k)u$ (соответственно $u \rightarrow f(\nu_k)u$, $u \rightarrow 0$). Этот оператор обозначается символом $f(u)$. Имеем $(f(u))^* = \overline{f}(u)$.

Если g — вторая функция, непрерывная в $S(u)$, и $h = f + g$ (соответственно $h = fg$), то $h(u) = f(u) + g(u)$ (соответственно $h(u) = f(u)g(u)$). Покажите, что для того, чтобы оператор $f(u)$ был самосопряженным (соответственно положительным и самосопряженным), необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\zeta)$ была на $S(u)$ действительной (соответственно чтобы на $S(u)$ выполнялось неравенство $f(\zeta) \geq 0$). Для того чтобы оператор $f(u)$ был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $f(0) = 0$.

12. Пусть u — вполне непрерывный положительный эрмитов оператор в комплексном гильбертовом пространстве E . Покажите, что существует единственный вполне непрерывный положительный эрмитов оператор v в E , такой, что $v^2 = u$. Оператор v называется *квадратным корнем* из оператора u .

13. Пусть E — сепарабельное комплексное гильбертово пространство и $(e_n)_{n \geq 1}$ — ортонормальный базис в E . Пусть u — вполне непрерывный оператор в E , определяемый условиями $u(e_1) = 0$ и $u(e_n) = e_{n-1}/n$ при

$n > 1$. Покажите, что в E не существует непрерывного оператора v , такого, что $v^2 = u$.

[Заметьте сначала, что $H = \overline{u^*(E)}$ есть замкнутая гиперплоскость, ортогональная e_1 , и что она содержится в $H' = \overline{v^*(E)}$. Так как H' ортогонально $x_1 = v(e_1)$, то отсюда с необходимостью заключаем, что $x_1 = 0$. Затем рассмотрим элемент $x_2 = v(e_2)$ и заметьте, что $u(v(e_2)) = 0$, поэтому необходимо $x_2 = \lambda e_1$, где λ — скаляр. Но отсюда следует, что $x_2 = 0$, и, значит, $u(e_2) = 0$, что и приводит к противоречию.]

14. Пусть E — сепарабельное комплексное гильбертово пространство, $(e_n)_{n \geq 0}$ — ортонормальный базис и u — вполне непрерывный положительный эрмитов оператор в E , определяемый условиями $u(e_0) = 0$ и $u(e_n) = e_n/n$ при $n \geq 1$. Точка $a = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n/n)$ не принадлежит $u(E)$. Пусть E_0 — подпространство, плотное в E , являющееся прямой суммой подпространства $u(E)$ и одномерного подпространства $C(e_0 + a)$. Покажите, что сужение v оператора u на E_0 есть вполне непрерывный положительный эрмитов оператор, который не вырождается, хотя его непрерывное продолжение $\tilde{v} = u$ на E вырождается. Кроме того, покажите, что в каноническом разложении (11.5.8) вектора $(e_0 + a) \in E_0$ не-все слагаемые принадлежат E_0 .

15. а) Пусть U — вполне непрерывный оператор в комплексном гильбертовом пространстве E . Обозначим через R и L квадратные корни (задача 12) вполне непрерывных положительных эрмитовых операторов U^*U и UU^* . Покажите, что существует единственный непрерывный оператор V в пространстве E , сужение которого на подпространстве $F = \overline{R(E)}$ есть изометрия на подпространстве $\overline{U(E)}$, сужение которого на ортогональном дополнении F' подпространства F равно 0 и который обладает тем свойством, что $U = VR$.

[Заметьте, что $\|Ux\| = \|Rx\|$ для каждой точки $x \in E$.]

Докажите, что $R = V^*U = RV^*V$ и $L = VRV^*$.

б) Пусть (α_n) — полная последовательность строго положительных собственных значений оператора R и (a_n) — соответствующая ортонормальная система (задача 8). Покажите, что если $b = Va_n$, то (b_n) есть ортонормальная система, и что для любой точки $x \in E$ имеем $Ux = \sum_n \alpha_n (x | a_n) b_n$, где ряд в правой части сходится.

[Обозначив $R_n x = \sum_{k=1}^n \alpha_k (x | a_k) a_k$, покажите, пользуясь доказатель-

ством теоремы (11.5.7), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R - R_n\| = 0$, и примените а.)]

Выведите из этого результата, что (α_n) является также полной последовательностью строго положительных собственных значений оператора L и что (b_n) есть соответствующая ортонормальная система. Последовательность (α_n) называется также *полной последовательностью особых значений* оператора U .

с) Пусть (μ_n) — последовательность различных собственных значений $\neq 0$ оператора U , расположенных в таком порядке, что $|\mu_n| \geq |\mu_{n+1}|$ для каждого n , для которого определено μ_{n+1} . Пусть d_n — размерность пространства $N(\mu_n)$ и пусть (λ_n) — последовательность, такая, что $\lambda_1 = \mu_1$, $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ для каждого n , для которого определено λ_{n+1} , а для каждого k , для которого определено μ_k , индексы n , для которых $\lambda_n = \mu_k$, образуют промежутки в $\mathbb{N}$, имеющий d_k элементов. Покажите, что для каждого индекса n , для которого определены λ_n и α_n , выполняется неравенство $\prod_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \prod_{i=1}^n \alpha_i$.

[Пусть V — (прямая) сумма подпространств $N(\mu_k)$ при $1 \leq k \leq r$ и пусть U_V — сужение оператора U на V . Покажите, что в V существует такой ортонормальный базис $(e_j)_{1 \leq j \leq m}$, что $(U(e_j) | e_k) = 0$ при $k > j$. Пусть W_n — подпространство пространства V , имеющее своим базисом элементы $e_1, \dots, e_n$, где $n \leq m$, пусть U_n — сужение оператора U на W_n и пусть P_n — ортогональная проекция пространства E на W_n . Покажите, что произведение $\prod_{j=1}^n |\lambda_j|^2$ равно определителю оператора $U_n^* U_n = P_n U^* U P_n$, и примените задачу 9, а).]

д) Пусть T — произвольный непрерывный оператор в E и пусть (γ_n) (соответственно (δ_n)) — полная последовательность особых значений оператора UT (соответственно TU). Покажите, что $\gamma_n \leq \alpha_n \|T\|$ (соответственно $\delta_n \leq \alpha_n \|T\|$) для всех значений n , для которых определены α_n , γ_n и δ_n . [Заметьте, что если $S = TU$, то $S^* S \leq \|T\|^2 U^* U$, и воспользуйтесь задачей 8, d).]

е) Предположим, что оператор T , кроме того, вполне непрерывен, и пусть (β_n) — полная последовательность его особых значений. Покажите, что $\prod_{j=1}^n \gamma_j \leq \left(\prod_{j=1}^n \alpha_j \right) \left(\prod_{j=1}^n \beta_j \right)$ для всех значений n , для которых определены α_n , β_n и γ_n .

[Примените задачу 9, b).]

16. Пусть E — комплексное гильбертово пространство, (a_n) — последовательность точек пространства E и (λ_n) — последовательность действительных чисел. Покажите, что если ряд $u(x) = \sum_n \lambda_n (x | a_n) a_n$ сходится в E для каждой точки $x \in E$, то u есть эрмитов оператор в E . Условие сходимости всегда выполняется, если абсолютно сходится ряд с общим членом $\lambda_n \|a_n\|^2$. Если, вдобавок, (a_n) есть ортонормальная система, то условие сходимости выполняется, если последовательность (λ_n) ограничена. Если все $\lambda_n \geq 0$ и выполняется условие сходимости, то u есть положительный эрмитов оператор.

17. Пусть E — бесконечномерное комплексное гильбертово пространство. Для положительного эрмитова оператора T в пространстве E эквивалентны следующие условия: 1°) образ $T(E)$ плотен в E ; 2°) $T^{-1}(0) = \{0\}$;

3°) $(Tx|x) > 0$ для любой точки $x \neq 0$ [примените к $(Tx|y)$ неравенство Коши — Шварца]; 4°) оператор T не вырождается. Мы будем говорить, что вполне-непрерывный оператор U в E квазиэрмитов, если существует такой невырождающийся положительный эрмитов оператор T , что $TU = U^*T$.

а) Покажите, что если $U \neq 0$, то $TU^2 \neq 0$.

[Заметьте, что $(TU^2x|x) = (TUx|Ux)$.]

Покажите, далее, что для любого целого $p > 0$ справедливо неравенство $\|TU^{2p}\|^2 \leq \|TU^{2p-2}\| \|TU^{2p+2}\|$.

[Воспользуйтесь неравенством Коши — Шварца.]

Заклучите отсюда, что если $U \neq 0$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n TU^n$ не может сходиться для каждого числа $\zeta \in \mathbb{C}$ и, следовательно, спектр оператора U не может сводиться к 0.

б) Покажите, что если λ — собственное значение оператора U , то $T(N(\lambda; U)) \subset N(\lambda; U^*)$ и $T(E(\lambda; U)) \subset E(\lambda; U^*)$. Выведите из этих включений, что λ — действительное число и что $k(\lambda; U) = 1$, следовательно, $N(\lambda; U) = E(\lambda; U)$.

[Воспользуйтесь (11.5.5) и тем фактом, что из $(Tx|x)$ следует $x = 0$.]

Покажите, далее, что $T(E(\lambda; U)) = E(\lambda; U^*)$.

с) Пусть P — ортогональная проекция пространства E на $F(\lambda; U)$. Покажите, что PUP есть квазиэрмитов вполне непрерывный оператор в $F(\lambda; U)$.

[Заметьте, что $PUP = UP$ в $F(\lambda; U)$ и что PTP есть невырождающийся положительный эрмитов оператор в $F(\lambda; U)$.]

д) Пусть (λ_n) — последовательность различных собственных значений оператора U , такая, что $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ при каждом n , и предположим, что эта последовательность бесконечна. Покажите, что пересечение G замкнутых подпространств $F(\lambda_n; U)$ равно $U^{-1}(0)$.

[Заметьте, что если P — ортогональная проекция пространства E на G , то PUP есть квазиэрмитов компактный оператор в G , и воспользуйтесь а).]

Обозначим через P_n ортогональную проекцию пространства E на $F(\lambda_n; U)$. Покажите, что E есть гильбертова сумма G и подпространств $E(\lambda_n; P_n U^* P_n)$. Заклучите отсюда, что сумма G и подпространств $E(\lambda_n; U)$ (являющаяся прямой в алгебраическом смысле) плотна в E . Покажите, далее, что если H есть сумма подпространств $E(\lambda_n; U)$, то $G \cap \bar{H} = \{0\}$.

[Заметьте, что подпространство пространства E , ортогональное $\bar{H}$, есть ядро $G' = (U^*)^{-1}(0)$, и что $T(G) \subset G'$, и используйте тот факт, что из $(Tx|x) = 0$ следует $x = 0$.]

е) Обратно, пусть U — вполне непрерывный оператор в E , такой, что: 1°) все собственные значения λ_n оператора U действительны и $k(\lambda_n; U) = 1$ для каждого n ; 2°) если H есть сумма подпространств $E(\lambda_n; U)$, то сумма $G = U^{-1}(0)$ и $\bar{H}$ является прямой и плотной в E . Покажите, что в таком случае U и U^* — квазиэрмитовы вполне непрерывные операторы (и, следовательно, оператор, сопряженный квазиэрмитову оператору, квазиэрмитов).

[Так как $G' = (U^*)^{-1}(0)$ есть подпространство, ортогональное $\bar{H}$, а сумма H' подпространств $E(\lambda_n; U^*)$ такова, что $\bar{H}'$ есть подпространство,

ортогональное G , то U^* удовлетворяет тем же условиям, что и U . Рассмотрим эрмитов оператор T в E , такой, что $Tx = \sum_n \alpha_n (x | b_n) b_n$, где $\alpha_n > 0$, а (b_n) образуют тотальное подмножество пространства E (5.4) и являются собственными векторами оператора U^* ; ср. с задачей 16.]

6. Интегральное уравнение Фредгольма

Теперь мы применим предыдущую теорию к примеру (11.2.8). Мы рассмотрим здесь предгильбертово пространство G непрерывных комплексных функций в промежутке $I = [a, b]$ с скалярным произведением $(f | g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$ и оператор U , такой, что Uf есть функция

$$t \rightarrow \int_a^b K(s, t) f(s) ds.$$

Мы будем говорить, что оператор U определяется ядром K .

(11.6.1) Вполне непрерывный оператор U в G имеет вполне непрерывный сопряженный оператор, определяемый ядром K^* , где $K^*(s, t) = \overline{K(t, s)}$.

Докажем при $a \leq x \leq b$ тождество

$$(11.6.1.1) \quad \int_a^x \overline{g(t)} dt \int_a^b K(s, t) f(s) ds = \int_a^b f(s) ds \int_a^x \overline{K(s, t)} g(t) dt,$$

которое при $x = b$ в соответствии с определением даст требуемый результат. Обе части равенства (11.6.1.1) являются дифференцируемыми функциями от x в промежутке $[a, b]$ в силу (8.7.3) и правила Лейбница (8.11.2). Обе они обращаются в нуль при $x = a$, и их производные равны в силу (8.7.3) и (8.11.2) в каждой точке $x \in [a, b]$. Поэтому они равны всюду в $[a, b]$ (8.6.1).

Мы предоставляем читателю сформулировать критерий (11.5.6) для этого частного случая (альтернатива Фредгольма).

Если $\overline{K(t, s)} = K(s, t)$ (в этом случае ядро K называется *эрмитовым*), то вполне непрерывный оператор U является самосопряженным. Так как предгильбертово пространство G сепарабельно [(7.4.3) или (7.4.4)], то его можно рассматривать как плотное подпространство гильбертова пространства $\bar{G}$ (6.6.2) и, таким образом, мы можем применить к оператору U результаты, описанные в (11.5.8). Обозначим через (λ_n) последовательность (положительных или отрицательных) собственных значений оператора U , каждое из которых повто-

рено столько раз, какова его кратность, и которые упорядочены так, чтобы $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$. Обозначим, далее, через (φ_n) такую ортонормальную систему в G , что если значениями n , для которых $\lambda_n = \mu_k$ (соответственно $\lambda_n = \nu_k$) являются $m, m+1, \dots, m+r$, то функции $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_{m+r}$ составляют базис собственного пространства $E(\mu_k)$ (соответственно $E(\nu_k)$). Таким образом, $U(\varphi_n) = \lambda_n \varphi_n$ при каждом n . Функции φ_n называются *собственными функциями* ядра K .

(11.6.2) Если K — эрмитово ядро, то ряд $\sum_n \lambda_n^2$ сходится и

$$\sum_n \lambda_n^2 \leq \int_a^b dt \int_a^b |K(s, t)|^2 ds.$$

Действительно, если мы применим к функции $s \rightarrow K(s, t)$ и ортонормальной системе (φ_n) неравенство Бесселя (6.5.2), то получим для любого N

$$\sum_{n=1}^N \left| \int_a^b K(s, t) \varphi_n(s) ds \right|^2 \leq \int_a^b |K(s, t)|^2 ds,$$

т. е.

$$(11.6.2.1) \quad \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 |\varphi_n(t)|^2 \leq \int_a^b |K(s, t)|^2 ds$$

для каждой точки $t \in I$. Интегрируя обе части равенства на промежутке I и пользуясь равенствами $(\varphi_n | \varphi_n) = 1$ и (11.6.1.1), получаем требуемый результат.

Каноническое разложение в $\bar{G}$ любой функции $f \in G$ (11.5.7) может здесь быть записано в виде $f = \sum_n c_n \varphi_n + f_0$, где $c_n = (f | \varphi_n) =$

$= \int_a^b f(t) \overline{\varphi_n(t)} dt$. Но, как уже было замечено, f_0 может не принадлежать G . С другой стороны, ряд $\sum_n c_n \varphi_n$ сходится в гильбертовом пространстве $\bar{G}$, но, вообще говоря, не сходится в банаховом пространстве $E = \mathcal{C}_c(I)$ (иными словами, ряд $\sum_n c_n \varphi_n(t)$ не обяза-

тельно сходится в каждой точке $t \in I$). Однако

(11.6.3) Если K — эрмитово ядро и $f = Ug$ для некоторой функции $g \in G$ (т. е. $f(t) = \int_a^b K(s, t) g(s) ds$), то ряд $\sum_n c_n \varphi_n(t)$ сходится абсолютно и равномерно к $f(t)$ в промежутке I .

Мы имеем в $\bar{G}$ каноническое разложение $g = \sum_n d_n \varphi_n + g_0$. Так как U — непрерывное линейное отображение пространства G в $E = \mathcal{C}(I)$ (11.2.8) и так как $Ug_0 = 0$, то $f = Ug = \sum_n \lambda_n d_n \varphi_n$, где уже сходимость рассматривается в E , т. е. ряд $\sum_n \lambda_n d_n \varphi_n(t)$ равномерно сходится к $f(t)$ в промежутке I . Так как $c_n = (f | \varphi_n) = (Ug | \varphi_n) = (g | U\varphi_n) = \lambda_n (g | \varphi_n) = \lambda_n d_n$, то теорема (11.6.3) доказана, если не считать утверждения относительно абсолютной сходимости. Но для любого номера N по неравенству Коши — Шварца (для конечномерных пространств) имеем

$$\left(\sum_{n=1}^N |c_n \varphi_n(t)| \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N |d_n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^2 |\varphi_n(t)|^2 \right),$$

и правая часть в силу неравенства Бесселя (6.5.2) и неравенства (11.6.2.1) ограничена числом, не зависящим от N .

(11.6.4) Если ядро K эрмитово и число λ не принадлежит спектру оператора U , то единственным решением f уравнения $Uf - \lambda f = g$ для любой функции $g \in G$ является функция $f(t) = -\frac{1}{\lambda} g(t) + \sum_n (\lambda_n / (\lambda_n - \lambda)) d_n \varphi_n(t)$, где ряд абсолютно и равномерно сходится в промежутке I , а $d_n = (g | \varphi_n)$.

Мы знаем, что, поскольку $g \in G$, единственное решение уравнения $Uf - \lambda f = g$ в $\bar{G}$ принадлежит G (11.5.6), а в силу (11.5.11) мы имеем $c_n = (f | \varphi_n) = 1/(\lambda_n - \lambda)$. Так как $g + \lambda f = Uf$, то мы можем применить теорему (11.6.3), и это доказывает наше утверждение.

(11.6.5) При тех же предположениях, что и в (11.6.4), единственное решение уравнения $Uf - \lambda f = g$ может быть записано в виде $f(t) = -\frac{1}{\lambda} g(t) + \int_a^b R(s, t; \lambda) g(s) ds$, где $R(s, t; \lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} K(s, t) + \sum_n (\lambda_n^2 / (\lambda_n - \lambda)) \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$, и ряд абсолютно и равномерно сходится при $(s, t) \in I \times I$.

Из доказательства теоремы (11.6.3) следует, что $\sum_n \lambda_n d_n \varphi_n(t) = Ug(t)$, где ряд абсолютно и равномерно сходится в I . Так как

$$\frac{1}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)},$$

то формула из (11.6.4) дает

$$f(t) = -\frac{1}{\lambda} g(t) - \frac{1}{\lambda^2} \int_a^b K(s, t) g(s) ds + \\ + \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} \varphi_n(t) \int_a^b g(s) \overline{\varphi_n(s)} ds.$$

Наша теорема будет доказана, коль скоро будет установлена равномерная сходимость ряда $\sum_n \lambda_n^2 |\varphi_n(s)|^2$. Действительно, существует такое $\delta > 0$, что для всех n выполняется неравенство $|\lambda_n - \lambda| \geq \delta$. Поэтому в силу неравенства Коши — Шварца

$$\sum_{n=p}^q \frac{\lambda_n^2}{|\lambda| \cdot |\lambda_n - \lambda|} |\varphi_n(s) \varphi_n(t)| \leq \frac{1}{\delta |\lambda|} \sum_{n=p}^q \lambda_n^2 |\varphi_n(s) \varphi_n(t)| \leq \\ \leq \frac{1}{\delta |\lambda|} \sqrt{\left(\sum_{n=p}^q \lambda_n^2 |\varphi_n(s)|^2 \right) \left(\sum_{n=p}^q \lambda_n^2 |\varphi_n(t)|^2 \right)},$$

и это доказывает, что ряд $\sum_n (\lambda_n^2 / \lambda(\lambda_n - \lambda)) \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$ абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$. Требуемое заключение тогда следует из (8.7.8).

Рассмотрим теперь функцию $H(s, t) = \int_a^b K(u, s) K(t, u) du$. Для каждой фиксированной точки $t \in I$ мы можем применить к ней теорему (11.6.3). Мы видим, что $H(s, t) = \sum_n \lambda_n^2 \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$, где ряд сходится для любой пары $(s, t) \in I \times I$. В частности, $H(s, s) = \sum_n \lambda_n^2 |\varphi_n(s)|^2$ для всех $s \in I$ и функция $H(s, s)$ непрерывна. По теореме Дини (7.2.2) этот ряд равномерно сходится в промежутке I , ч. т. д.

(11.6.6) Если ядро K эрмитово, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| K(s, t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{\varphi_k(s)} \varphi_k(t) \right|^2 dt = 0$$

равномерно при $s \in I$.

В обозначениях доказательства теоремы (11.6.5) имеем

$$(11.6.6.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(H(s, s) - \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \overline{\varphi_k(s)} \varphi_k(s) \right) = 0$$

равномерно при $s \in I$. Если мы преобразуем интеграл, о котором говорится в (11.6.6), пользуясь тем, что φ_k являются собственными

функциями оператора U , и тем, что они ортогональны, то мы получим выражение, стоящее под знаком предела в левой части равенства (11.6.6.1), откуда и следует наше утверждение.

Вообще говоря, ряд $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$ не будет сходиться для всех пар $(s, t) \in I \times I$. Но имеется результат частного характера:

(11.6.7) (Теорема Мерсера) *Предположим, что вполне непрерывный оператор U , определяемый эрмитовым ядром $K(s, t)$, положителен. Тогда имеет место формула*

$$K(s, t) = \sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t),$$

где ряд абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$.

Напомним, что в нашем случае $\lambda_n > 0$ для каждого n (11.5.9). Докажем сначала, что для каждой точки $s \in I$ ряд $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$ сходится. Для любой точки $s \in I$ имеем $K(s, s) \geq 0$. Действительно, в противном случае нашлась бы такая окрестность V точки s в I , что при $(s, t) \in V \times V$ выполнялось бы неравенство $\Re K(s, t) \leq -\delta < 0$, где δ — некоторое число. Пусть φ — непрерывное отображение промежутка I в промежуток $[0, 1]$, равное 1 в точке s и 0 в $I \setminus V$ (4.5.2). Тогда мы имеем в силу (8.5.3)

$$\int_a^b \overline{\varphi(t)} dt \int_a^b K(s, t) \varphi(s) ds \leq -\delta \left(\int_a^b \varphi(t) dt \right)^2 < 0.$$

Но левая часть есть $(U\varphi | \varphi)$, и это неравенство противоречит предположению о том, что U — положительный оператор.

Заметим теперь, что для любого конечного числа собственных значений λ_k ($1 \leq k \leq n$) функция $K_n(s, t) = K(s, t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{\varphi_k(s)} \varphi_k(t)$ является ядром для положительного оператора U_n . В самом деле,

$$(U_n f | f) = (U f | f) - \sum_{k=1}^n \lambda_k |(f | \varphi_k)|^2.$$

Но правая часть этого равенства, как легко проверить, может быть записана в виде $(Ug | g)$, где $g = f - \sum_{k=1}^n (f | \varphi_k) \varphi_k$, и поэтому положительна по предположению. Из того, что $K_n(s, s) \geq 0$, на основании (5.3.1) тогда следует, что ряд $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$ сходится, и мы имеем $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2 \leq K(s, s)$ при всех $s \in I$.

В силу неравенства Коши — Шварца отсюда мы заключаем, что

$$(11.6.7.1) \quad \sum_{n=p}^q \lambda_n |\varphi_n(s) \varphi_n(t)| \leq \sqrt{\left(\sum_{n=p}^q \lambda_n |\varphi_n(s)|^2 \right) \left(\sum_{n=p}^q \lambda_n |\varphi_n(t)|^2 \right)} \leq \\ \leq \sqrt{K(t, t) \left(\sum_{n=p}^q \lambda_n |\varphi_n(s)|^2 \right)}$$

для всех $(s, t) \in I \times I$. Следовательно, так как функция $K(t, t)$ ограничена в I , при фиксированном $s \in I$ ряд $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$ равномерно сходится в I . Тогда из (11.6.6), (8.7.8) и (8.5.3) мы заключаем, что $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t) = K(s, t)$ для всех $(s, t) \in I \times I$, так как функция $t \rightarrow \left| K(s, t) - \sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t) \right|^2$ непрерывна в I , а интеграл от нее по промежутку I равен 0. В частности, имеем $K(s, s) = \sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$. Таким образом, по теореме Дини (7.2.2) ряд $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$ равномерно сходится в I , а неравенство (11.6.7.1) показывает, что ряд $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$ абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$, что и завершает доказательство.

Замечания. (11.6.8) Теорема (11.6.7) останется справедливой, если только предположить, что U имеет конечное число собственных значений $\nu_k < 0$ ($1 \leq k \leq m$). Действительно, утверждение (11.5.7, 3°)) показывает, что в этом случае сужение оператора U на подпространстве F'_{m+1} , являющемся ортогональным дополнением подпространства $E(\nu_1) + \dots + E(\nu_m)$ в G , положительно. Применяя тогда теорему (11.6.7) к этому оператору, соответствующему, как легко проверить, ядру $K(s, t) = \sum_h \lambda_h \overline{\varphi_h(s)} \varphi_h(t)$, где h пробегает все индексы (в конечном числе), для которых $\lambda_h < 0$, немедленно получаем требуемое заключение.

(11.6.9) Мы можем рассмотреть оператор U в большем предгильбертовом пространстве, именно пространстве F_+ простых функций (7.6), непрерывных справа (т. е. удовлетворяющих условию $f(t+) = f(t)$ при $a \leq t < b$) и таких, что $f(b) = 0$. Для таких

функций соотношение $\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$ влечет за собой $f(t) = 0$

всюду в промежутке $I = [a, b]$, ибо из него следует, что $f(t) = 0$ всюду, за исключением точек некоторого счетного множества D [в силу (8.5.3)], а каждая точка t промежутка $[a, b]$ является пределом убывающей последовательности точек из $I \setminus D$.

Пространство G можно отождествить с подпространством пространства F_+ , изменяя значение непрерывной функции $f \in G$ в точке b . Легко доказать [пользуясь (7.6.1)], что G плотно в F_+ . Рассуждение, проведенное в примере (11.2.8), тогда показывает, что U есть вполне непрерывное отображение пространства F_+ в банахово пространство $E = \mathcal{C}_c(I)$ (и тем более вполне непрерывное отображение предгильбертова пространства F_+ в себя). Все результаты, доказанные для оператора U в G , остаются справедливыми (вместе с их доказательствами), если G заменить на F_+ .

Задачи

1. Распространите результаты § 11.6 [за исключением теоремы (11.6.7)] на случай, когда $K(s, t)$ удовлетворяет предположениям задачи 4 § 8.11. [Воспользуйтесь этой задачей, а также задачей 5 § 11.2.]

2. Пусть (f_n) — тотальная ортонормальная система (6.5) в предгильбертовом пространстве G (11.6). Пусть $K_n(s, t) = \sum_{k=1}^n f_k(s) \overline{f_k(t)}$ и пусть

$H_n(s) = \int_a^b |K_n(s, t)| dt$ (n -я *лебегова* функция ортонормальной системы (f_n)). Для любой функции $g \in G$ пусть $s_n(g) = \sum_{k=1}^n (g | f_k) f_k$, так что

$s_n(g)(x) = \int_a^b K_n(x, t) g(t) dt$ для любой точки $x \in I$.

а) Докажите, что если для некоторой точки $x_0 \in I$ не ограничена последовательность $(H_n(x_0))$, то существует функция $g \in G$, для которой не ограничена последовательность $(s_n(g)(x_0))$.

[Допустите противное и покажите, что в этом случае можно определить строго возрастающую последовательность натуральных чисел (n_k) и последовательность (g_k) функции из G , обладающие следующими свойствами:

1°. Пусть $c_h = \sup_n \left| \int_a^b K_n(x_0, t) g_h(t) dt \right|$ (число, которое по предположению конечно), пусть $d_k = c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1}$, пусть $m_k = \int_a^b |K_{n_k}(x_0, t)| dt$ и пусть $q_k = \max(m_1, \dots, m_{k-1})$; тогда $m_k \geq 2^{k+1}(q_k + 1)(d_k + k)$.

2°. Пусть φ_k — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$, $|\varphi_k(t)| \leq 1$ в I и $\left| \int_a^b K_{n_k}(x_0, t) \varphi_k(t) dt \right| \geq m_k/2$ (см. задачу 8 § 8.7); тогда $g_k = \varphi_k/2^k (q_k + 1)$.

Затем покажите, что функция $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ непрерывна в I , что проти-

воречит предположению. Чтобы оценить интеграл $\int_a^b K_{n_k}(x_0, t) g(t) dt$, разложите функцию g в сумму $\sum_{i < k} g_i + g_k + \sum_{i > k} g_i$, проминорируйте второй интеграл и промажорируйте два других (метод скользящего горба.)

б) Покажите, что для тригонометрической системы (6.5) на промежутке $I = [-1, 1]$ n -я лебегова функция есть постоянная h_n и что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = +\infty$.

$$\left[\text{Заметьте, что } \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left| \frac{\sin n\pi t}{\sin \pi t} \right| dt \geq 2/k\pi \text{ при } 2 \leq k \leq n. \right]$$

Заключите отсюда, что для любой точки $x_0 \in I$ существует такая непрерывная функция g в промежутке I , что $g(-1) = g(1) = 0$ и что частичные суммы $\sum_{k=-n}^n \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 g(t) e^{-ik\pi t} dt \right) e^{ik\pi x}$ „ряда Фурье“ функции g при $x = x_0$ не ограничены.

3. Пусть g — непрерывная комплексная функция в промежутке $I = [-1, 1]$, удовлетворяющая условиям $g(-1) = g(1) = 0$. Функцию g можно продолжить в непрерывную функцию периода 2 в $\mathbf{R}$. Пусть $K(s, t)$ — сужение функции $g(s-t)$ на $I \times I$. Если $g(-t) = \overline{g(t)}$, то вполне непрерывный оператор U , определенный ядром $K(s, t)$, является самосопряженным. Покажите, что функции $\varphi_n(t) = e^{n\pi i t} / \sqrt{2}$ являются собственными векторами оператора U , причем соответствующее собственное значение есть „коэффициент Фурье“ $a_n = \int_{-1}^1 g(t) e^{-n\pi i t} dt$ функции g .

Пользуясь этим результатом и задачей 2, приведите пример эрмитова ядра K , для которого ряд с общим членом $\lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$ имеет частичные суммы, неограниченные при некоторых значениях s и t , и пример положительного эрмитова ядра K , для которого существует такая функция $f \in G$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (f | \varphi_n) \varphi_n(t)$ имеет частичные суммы, неограниченные при некоторых значениях t .

4. Пусть $I = [-2\pi, 2\pi]$ и пусть ядро $K(s, t)$ в $I \times I$ при $0 \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$ равно сумме абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin ns \cdot \sin nt$, а при остальных значениях $(s, t) \in I \times I$ равно 0. Приведите пример функ-

ции $f \in G$, в каноническом разложении которой функция f_0 не принадлежит G .

[Собственными функциями ядра K являются функции φ_n , определяемые следующим образом: $\varphi_n(t) = 0$ при $-2\pi \leq t \leq 0$ и $\varphi_n(t) = (\sin nt)/\sqrt{\pi}$ при $0 \leq t \leq 2\pi$. Возьмите в качестве f функцию, непрерывную в I и равную $2\pi - t$ в промежутке $[0, 2\pi]$, и покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (f | \varphi_n) \varphi_n(t)$ сходится всюду в I , но имеет разрывную сумму.]

5. Пусть в обозначениях 11.6 K есть эрмитово ядро, определенное в $I \times I$, и пусть U — соответствующий самосопряженный вполне непрерывный оператор в G . Покажите, что для каждого $h > 0$ оператор U^h соответствует эрмитову ядру K_h , которое индуктивно определяется условиями: $K_1 = K$ и

$$K_h(s, t) = \int_a^b K_{h-1}(s, u) K(u, t) du.$$

Докажите, что при $h \geq 2$ имеем $K_h(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^h \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$, где ряд абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$. Покажите, кроме того, что $A_h = \int_a^b ds \int_a^b |K_h(s, t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2h}$ и что последовательность (A_{h+1}/A_h) возрастает и имеет предел, равный $|\lambda_1|^2$, где λ_1 — собственное значение ядра K , имеющее максимальную абсолютную величину.

[Воспользуйтесь неравенством Коши — Шварца.]

6. Пусть в обозначениях 11.6 K — произвольное непрерывное ядро в $I \times I$ и пусть U — соответствующий вполне непрерывный оператор в G . Пусть M — конечномерное подпространство пространства G , для которого $U(M) \subset M$, и пусть $(\psi_h)_{1 \leq h \leq n}$ — ортонормальный базис пространства M .

Положим $U\psi_h = \sum_{k=1}^n a_{hk} \psi_k$. Покажите, что $\sum_{h,k} |a_{hk}|^2 \leq \int_a^b dt \int_a^b |K(s, t)|^2 ds$.

[Для каждой точки $t \in I$ примените к функции $s \rightarrow K(s, t)$ и ортонормальной системе (ψ_h) в G неравенство Бесселя (6.5.2).]

Пусть (λ_n) — последовательность, определенная (для оператора U) в задаче 15, с) § 11.5. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ сходится и что $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \leq \int_a^b dt \int_a^b |K(s, t)|^2 ds$.

[Примените предыдущий результат к любой сумме подпространств $N(\mu_k)$ в обозначениях задачи 15, с) § 11.5.]

7. Приведите пример такого эрмитова ядра $K(s, t)$, чтобы, если U — соответствующий вполне непрерывный оператор в G и V — квадратный

корень из U^2 (задача 12 § 11.5), не существовало эрмитова ядра, которому соответствует вполне непрерывный оператор V .

[Если бы такое ядро существовало, то к нему была бы применима теорема Мерсера (11.6.7). Возьмите тогда в качестве K ядро из первого примера задачи 3.]

8. Ядро $K(s, t)$, определенное в $I \times I$ (где $I = [a, b]$) и удовлетворяющее предположениям задачи 4 § 8.11, называется *ядром Вольтерра*, если $K(s, t) = 0$ при $s > t$. Пусть $M = \sup_{(s, t) \in I \times I} |K(s, t)|$. Покажите, что если U — вполне непрерывный оператор в G , соответствующий K (задача 1), то оператор U^n соответствует ядру Вольтерра K_n , удовлетворяющему условию $|K_n(s, t)| \leq M^n (t-s)^{n-1}/(n-1)!$ при $n > 1$ и $s \leq t$.

[Проведите индукцию по n .]

Выведите из этого утверждения, что спектр оператора U сводится к 0 и что для любого числа $\zeta \in \mathbb{C}$ имеем оценку $\|(1 - \zeta U)^{-1} - 1\| \leq M |\zeta| e^{M(b-a)|\zeta|}$.

7. Задача Штурма — Лиувилля

Рассмотрим в компактном промежутке $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(11.7.1) \quad y'' - q(x)y + \lambda y = f(x),$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная функция в I , $f(x)$ — комплексная простая функция в I , непрерывная всюду, за исключением конечного числа внутренних точек, и λ — комплексное число. Под *решением* уравнения (11.7.1) понимают непрерывно дифференцируемую комплексную функцию $y(x)$, производная $y'(x)$ которой является первообразной некоторой простой функции, имеющей лишь конечное число точек разрыва, и для которой соотношение

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = f(x)$$

выполняется в дополнении в $\dot{I}$ некоторого конечного подмножества $\dot{I}$.

Задача Штурма — Лиувилля состоит в нахождении решения, удовлетворяющего, кроме того, двум *граничным условиям*

$$(11.7.2) \quad h_1 y(a) + k_1 y'(a) = 0, \quad h_2 y(b) + k_2 y'(b) = 0,$$

где h_1, k_1, h_2 и k_2 — действительные числа, причем h_i и k_i одновременно не равны 0 ($i = 1, 2$).

Мы будем в дальнейшем предполагать известной элементарную теорию линейных дифференциальных уравнений [см. (10.8)]. Сначала

мы рассмотрим однородное уравнение, получающееся из (11.7.1) при $f(x) = 0$:

$$(11.7.3) \quad y'' - q(x)y + \lambda y = 0.$$

Заметим, что вторая производная y'' любого решения этого уравнения непрерывна в I .

(11.7.4) Существует такое число $r > 0$, что если число λ действительно и $\leq -r$, то единственное решение уравнения (11.7.3), удовлетворяющее граничным условиям (11.7.2), есть 0.

Так как q , λ и все h_i и k_i действительны, то ясно, что если какое-либо решение уравнения (11.7.3) удовлетворяет условиям (11.7.2), то его действительная и мнимая части также являются решениями, удовлетворяющими тем же граничным условиям. Таким образом, мы можем ограничиться действительными решениями.

Предположим сперва, что $k_1 k_2 \neq 0$, так что мы можем считать $k_1 = k_2 = -1$. Тогда можно считать, что $y(a) \neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $y'(a) = 0$, и в силу теоремы существования наша теорема была бы доказана. Умножая, если потребуется, y на подходящую константу, мы можем, таким образом, предполагать, что $y(a) = 1$ и $y'(a) = h_1$.

Если мы положим $z = y'/y$ при $y(x) \neq 0$, то получим уравнение

$$(11.7.4.1) \quad z' = q(x) - \lambda - z^2.$$

Пусть $M = \sup_{x \in I} |q(x)|$ и допустим, что $\lambda \leq -M - h_1^2 - 1$. Тогда

мы будем иметь $z'(a) = q(a) - \lambda - h_1^2 \geq 1$ и, следовательно, функция z строго возрастает в некоторой окрестности точки a в I . Убедимся, что $y(x) \neq 0$ в I и что $z(x) > h_1$ во всех точках $x > a$. Допустим сначала, что $y(x)$ обращается в промежутке I в 0, и пусть x_1 — наименьшее решение $> a$ уравнения $y(x) = 0$. Тогда $y(x) > 0$ при $a \leq x < x_1$, и поэтому производная $y'(x_1) < 0$ (она не может быть равна 0, так как иначе функция y была бы тождественно равна 0 в промежутке I). Поскольку при всех $x \in I$ выполняется неравенство $q(x) - \lambda > 0$ при $a \leq x < x_1$, мы в силу (11.7.3) имеем $y''(x) > 0$. Поэтому производная y' при $a \leq x < x_1$ убывает и, значит, на этом промежутке она < 0 . Отсюда следует, что когда $x < x_1$ стремится к x_1 , то $z(x)$ стремится к $-\infty$. Так как функция z при $a \leq x < x_1$ непрерывна, на этом промежутке должно найтись наименьшее такое число $x_2 > a$, что $z(x_2) = h_1$ и $h_1 < z(x)$ при $a < x < x_2$. Отсюда вытекает, что $z'(x_2) \leq 0$. Но $z'(x_2) = q(x_2) - \lambda - h_1^2 \geq 1$, и мы пришли к противоречию, которое доказывает оба наших утверждения. Точно так же мы убеждаемся в том, что если $\lambda \leq -M - h_2^2 - 1$, то $z(x) \leq h_2$ в I . Итак, функция z должна в I удовлетворять условию $|z(x)| \leq c = \max(|h_1|, |h_2|)$, где c не зависит от λ .

Теперь из (11.7.4.1) мы находим $z'(x) \geq -M - \lambda - c^2 = \mu$; поэтому по теореме о среднем значении $h_2 - h_1 = z(b) - z(a) \geq \mu(b-a)$. Если мы выберем λ так, чтобы

$$\lambda \leq -M - c^2 - \frac{|h_2 - h_1|}{b-a} - 1,$$

то мы приходим к противоречию, и это завершает доказательство теоремы (11.7.4) в случае, когда $k_1 k_2 \neq 0$.

Предположим теперь, что $k_1 = 0$, а $k_2 \neq 0$ (поэтому мы можем считать, что $k_2 = -1$). В этом случае (умножая, если потребуется, u на подходящую константу) мы можем предполагать, что $u(a) = 0$ и $u'(a) = 1$. Тогда если $x > a$ стремится к a , то z стремится к $+\infty$. Допустим, что $\lambda \leq -M - 2$. Прежде всего покажем, что $u'(x) \geq 1$ в I . Так как в силу (11.7.3) в некоторой окрестности точки a при $x > a$ выполняется неравенство $u''(x) > 0$, то в этой окрестности при $x > a$ мы будем иметь $u'(x) > 1$. Допустим, что $u'(x) = 1$ для некоторых $x > a$, и пусть x_1 — наименьшее решение этого уравнения. Тогда при $a < x \leq x_1$ будет $u'(x) \geq 1$. Следовательно, $u'(x) > 0$ на этом промежутке, и, значит, в силу (11.7.3) $u''(x) > 0$. Но, с другой стороны, мы должны иметь $u''(x_1) \leq 0$, что приводит к противоречию. Таким образом, мы видим, что функция u строго возрастает в промежутке I , и поэтому функция z при $a < x \leq b$ конечна.

Далее, убедимся, что $z(x) > \sqrt{-M - \lambda - 1}$. В противном случае нашлось бы наименьшее x_2 , для которого $z(x_2) = \sqrt{-M - \lambda - 1}$, и в этой точке мы должны были бы иметь $z'(x_2) \leq 0$. Но из (11.7.4.1) следует, что $z'(x_2) \geq -M - \lambda - z^2(x_2) \geq 1$, и мы снова приходим к противоречию. Если теперь мы предположим, что λ выбрано так, что $h_2^2 < -M - \lambda - 1$, то найдем, что равенство $z(b) = h_2$ будет невозможно. Поэтому теорема доказана.

Случай, когда $k_2 = 0$, а $k_1 \neq 0$, рассматривается аналогично. Наконец, если $k_1 = k_2 = 0$, то снова мы можем считать, что $u(a) = 0$ и $u'(a) = 1$, и только что проведенное рассуждение показывает, что при $\lambda \leq -M - 2$ функция u строго возрастает на промежутке I . Но это, конечно, находится в противоречии с условием $\dot{u}(b) = 0$. Теорема полностью доказана.

Заменяя, если необходимо, $q(x)$ на $q(x) + r$, а λ на $\lambda + r$, мы можем, начиная с этого момента, считать, что при $\lambda \leq 0$ не существует нетривиальных решений уравнения (11.7.3), удовлетворяющих обоим граничным условиям (11.7.2).

Мы будем пользоваться следующим тождеством:

$$(11.7.5) \quad \int_a^b (u''v - v''u) dt = (u'(b)v(b) - u(b)v'(b)) - \\ - (u'(a)v(a) - u(a)v'(a)),$$

немедленно вытекающим из частного случая $p = 2$ формулы (8.14.1) (предполагается, что u'' и v'' — простые функции в I).

(11.7.6) Для любого t , такого, что $a < t < b$, существует действительная функция $x \rightarrow K_t(x)$, непрерывная в промежутке I и обладающая следующими свойствами:

1°). В каждом из промежутков $a \leq x < t$ и $t < x \leq b$ функция K_t дважды непрерывно дифференцируема и является решением уравнения $y'' - q(x)y = 0$.

2°). Функция K_t удовлетворяет граничным условиям (11.7.2).

3°). В точке $x = t$ производная $K'_t(x)$ имеет предел справа и предел слева и $K'_t(t+) - K'_t(t-) = -1$.

На основании элементарной теории линейных дифференциальных уравнений существует решение $u_1 \neq 0$ (соответственно $u_2 \neq 0$) уравнения $y'' - q(x)y = 0$, удовлетворяющее условию $h_1 u_1(a) + k_1 u'_1(a) = 0$ (соответственно $h_2 u_2(b) + k_2 u'_2(b) = 0$), причем u_1 и u_2 не пропорциональны (в противном случае нашлось бы нетривиальное решение уравнения (11.7.3) при $\lambda = 0$, удовлетворяющее обоим граничным условиям (11.7.2)). Поэтому любое решение уравнения $y'' - q(x)y = 0$ единственным способом может быть записано в виде $y = c_1 u_1 + c_2 u_2$, где c_1 и c_2 — постоянные коэффициенты, а функция $u_1(x)u'_2(x) - u_2(x)u'_1(x)$ [в силу (8.14.1)] является постоянной $d \neq 0$. Нам нужно теперь только выбрать константы c_1 и c_2 так, чтобы функция K_t , равная $c_1 u_1$ при $a \leq x \leq t$ и $c_2 u_2$ при $t \leq x \leq b$, была определена и непрерывна в точке t и удовлетворяла условию 3°). Это дает нам соотношения

$$c_1 u_1(t) - c_2 u_2(t) = 0; \quad c_1 u'_1(t) - c_2 u'_2(t) = 1$$

и, следовательно, в качестве решения нашей задачи можно выбрать числа $c_1 = -u_2(t)/d$ и $c_2 = -u_1(t)/d$.

Мы будем говорить (нарушая принятое словоупотребление), что K_t есть *элементарное (фундаментальное) решение* уравнения $y'' - q(x)y = 0$, соответствующее особенности t . Функция $(t, x) \rightarrow K_t(x)$ обозначается также через $K(t, x)$ и называется *функцией Грина*, соответствующей рассматриваемой задаче Штурма — Лиувилля. Она определена только при $a < t < b$ и $a \leq x \leq b$ и равна $-u_2(t)u_1(x)/d$ при $x \leq t$ и $-u_1(t)u_2(x)/d$ при $x \geq t$, а поэтому непрерывна. Ее можно по непрерывности продолжить на $t = a$ и $t = b$, полагая $K(a, x) = -u_1(a)u_2(x)/d$ и $K(b, x) = -u_2(b)u_1(x)/d$. Кроме того, как сразу следует из определяющих ее формул, она обладает свойством симметрии

$$(11.7.7) \quad K(t, x) = K(x, t).$$

(11.7.8) Для того чтобы функция $y(x)$ была решением уравнения $y'' - q(x)y = f(x)$ и удовлетворяла граничным условиям (11.7.2), необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $y(x) = - \int_a^b K(t, x) f(t) dt$ (где f — комплексная простая функция в промежутке I , непрерывная всюду, за исключением конечного числа точек промежутка I).

Достаточность. Так как

$$y(x) = \frac{u_1(x)}{d} \int_x^b u_2(t) f(t) dt + \frac{u_2(x)}{d} \int_a^x u_1(t) f(t) dt,$$

то проверка того, что функция y удовлетворяет дифференциальному уравнению (в точках, в которых функция f непрерывна) и граничным условиям, сводится к простому вычислению производных [и применению теоремы (8.7.3)].

Необходимость. Применим тождество (11.7.5) к обоим промежуткам $a \leq t \leq x$ и $x \leq t \leq b$, взяв $u(t) = y(t)$ и $v(t) = K_x(t)$.

Тогда равенство $y(x) = - \int_a^b K(t, x) f(t) dt$ сразу будет следовать из свойств (11.7.6) функции Грина.

Из (11.7.8) следует, что любое решение задачи Штурма — Лиувилля является решением интегрального уравнения Фредгольма с эрмитовым ядром

$$(11.7.9) \quad y(x) - \lambda \int_a^b K(t, x) y(t) dt = g(x),$$

где

$$g(x) = - \int_a^b K(t, x) f(t) dt,$$

и обратно. Числа λ_n , обратные собственным значениям $\neq 0$ оператора U в предгильбертовом пространстве G [определенном в (11.2.8)], соответствующего ядру K , называются *собственными значениями* задачи Штурма — Лиувилля.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему, дающую решение задачи Штурма — Лиувилля в каждом из возможных случаев.

(11.7.10) Для любой действительной непрерывной функции $q(x)$ в компактном промежутке $I = [a, b]$:

1°). Задача Штурма — Лиувилля имеет бесконечную строго возрастающую последовательность (λ_n) собственных значений. Все собственные значения являются действительными числами, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ и ряд $\sum_n 1/\lambda_n^2$ сходится.

2°). Для каждого собственного значения λ_n однородная задача Штурма — Лиувилля имеет действительное решение $\varphi_n(x)$, удовлетворяющее условию $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1$, и всякое другое

решение получается из φ_n умножением на постоянное число.

3°). Последовательность (φ_n) является тотальной ортонормальной системой в предгильбертовом пространстве G (11.6).

4°). Пусть w — комплексная непрерывная функция в промежутке I , являющаяся первообразной простой функции w' , такая, что:

(i) функция w' непрерывна всюду в I , за исключением конечного числа внутренних точек;

(ii) функция w' в каждом промежутке, в котором она непрерывна, имеет непрерывную производную w'' ;

(iii) функция w удовлетворяет граничным условиям (11.7.2).

Тогда имеем $w(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$, где $c_n = (w | \varphi_n) = \int_a^b w(t) \varphi_n(t) dt$,

и ряд абсолютно и равномерно сходится в I .

5°). Если λ не есть ни одно из собственных значений λ_n , то для каждой простой функции f , непрерывной всюду в промежутке I , за исключением конечного числа точек, задача Штурма — Лиувилля имеет единственное решение w , коэффициенты $c_n = (w | \varphi_n)$ которого задаются формулой $c_n = d_n / (\lambda - \lambda_n)$.

где $d_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt$.

6°). При $\lambda = \lambda_n$ необходимое и достаточное условие того, чтобы задача Штурма — Лиувилля имела решение, состоит в том, чтобы $\int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt = 0$. В этом случае для любого ре-

шения w коэффициент $c_n = (w | \varphi_n)$ произволен, а при $m \neq n$ коэффициенты c_m задаются той же формулой, что и в 5°).

Однородная задача Штурма — Лиувилля не может иметь двух линейно независимых решений, так как в противном случае она имела бы решение u , у которого $u(a)$ и $u'(a)$ были бы произвольны, что невозможно; это доказывает 2°).

Тот факт, что все собственные значения λ_n действительны, следует из (11.7.7) и (11.7.5). Кроме того, из (11.7.4) следует, что

не более чем конечное число из λ_n отрицательно. По теореме Мерсера [(11.6.7) и (11.6.8)] для функции Грина имеем

$$(11.7.10.1) \quad K(t, x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(t) \varphi_n(x),$$

где ряд абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$ (предполагается, и это вполне законно, что 0 не есть ни одно из λ_n).

Заметим, что 4°) будет следовать из (11.6.3) и (11.7.8), если сделать дополнительное предположение, что w и w' непрерывны в I . Чтобы доказать 4°) в общем случае, обозначим через t_i ($1 \leq i \leq m$) точки промежутка I , в которых w' имеет разрыв, и пусть $\alpha_i =$

$$= w'(t_i+) - w'(t_i-). \text{ Тогда функция } v = w + \sum_{i=1}^m \alpha_i K_{t_i} \text{ удовлетво-}$$

ряет всем условиям 4°) и, кроме того, в силу (11.7.6) имеет непрерывную производную. Пользуясь (11.7.10.1), получаем доказательство 4°).

Из того, что тождественное отображение пространства $E = \mathcal{C}_c(I)$ в G непрерывно, следует, что для функций w , удовлетворяющих условиям 4°), мы можем также писать $w = \sum_n c_n \varphi_n$, где ряд схо-

дится в предгильбертовом пространстве G (11.2.8). Поэтому, чтобы доказать 3°), достаточно показать, что множество P таких функций w плотно в G . Для этой цели для любой функции $u \in G$ рассмотрим непрерывную функцию w_m , где m — целое число > 0 , равную u в промежутке $[a + (1/m), b - (1/m)]$, 0 в промежутках $[a, a + (1/2m)]$ и $[b - (1/2m), b]$ и линейной функции в каждом из промежутков $[a + (1/2m), a + (1/m)]$ и $[b - (1/m), b - (1/2m)]$. Тогда ясно, что в промежутках $[a, a + (1/m)]$ и $[b - (1/m), b]$ выполняется неравенство $|u(x) - w_m(x)| \leq 2\|u\|$ и, значит, в силу теоремы о среднем значении норма $\|u - w_m\|_2$ сколь угодно мала. Кроме того, функция w_m удовлетворяет граничным условиям (11.7.2). Взяв теперь, пользуясь равномерной непрерывностью функции u , кусочно линейную непрерывную в I функцию v , равную w_m на промежутках $[a, a + (1/m)]$ и $[b - (1/m), b]$ и достаточно мало отличающуюся по модулю от функции u на промежутке $[a + (1/m), b - (1/m)]$, получим, что норма $\|u - v\|_2$ произвольно мала, а функция v удовлетворяет всем условиям, перечисленным в 4°), что доказывает наше утверждение.

Поскольку 3°), таким образом, доказано, ясно, что тотальная последовательность (φ_n) должна быть бесконечной, и [учитывая (11.6.2)] полностью доказано и утверждение 1°).

Наконец, 5°) и 6°) сразу следуют из (11.5.11).

Замечание. Относительно φ_n и λ_n можно получить значительно более точную информацию и, в частности, доказать, что отношение λ_n/n^2 стремится к конечному пределу (см. задачи 3 и 4).

З а д а ч и

1. Пусть $I = [a, b]$ — компактный промежуток в $\mathbb{R}$ и пусть H_0 — действительное векторное пространство всех действительных непрерывно дифференцируемых функций в промежутке I . Вводя скалярное произведение

$$(x | y) = \int_a^b (x' y' + xy) dt,$$

превращаем H_0 в действительное предгильбертово пространство.

а) Покажите, что H_0 сепарабельно (производную функции $x \in H_0$ аппроксимируйте многочленами (7.4.1)). Таким образом, H_0 является всюду плотным подпространством некоторого сепарабельного гильбертова пространства H (6.6.2).

б) Покажите, что если (x_n) — последовательность Коши в предгильбертовом пространстве H_0 , то последовательность (x_n) равномерно сходится в I к некоторой непрерывной функции v , и что если (y_n) — другая последовательность Коши в H_0 , имеющая в H тот же самый предел, то последовательность (y_n) равномерно сходится в I к той же функции v . Элементы пространства H , таким образом, могут быть отождествлены с некоторыми непрерывными функциями в I , которые, однако, не обязаны быть дифференцируемыми в каждой точке промежутка I .

[Заметьте, что для каждой функции $x \in H_0$ в I выполняется неравенство

$$|x(t) - x(a)| \leq \sqrt{t-a} \left(\int_a^b x'^2 dt \right)^{1/2}.$$

Покажите, что для любой функции $z \in H_0$, дважды непрерывно дифференцируемой в I и удовлетворяющей условию $z'(a) = z'(b) = 0$, справедливо

$$\text{равенство } (v | z) = - \int_a^b v z'' dt + \int_a^b v z dt.$$

с) Пусть α и β — два действительных числа и q — непрерывная функция в I . Покажите, что в H_0 функция $x \rightarrow \Phi(x) = \int_a^b (x'^2 + qx^2) dt - \alpha(x(a))^2 - \beta(x(b))^2$ непрерывна. Пусть A — множество в H , состоящее из функций x , для которых $\int_a^b x^2 dt = 1$ (заметим, что A не является ограниченным множеством в гильбертовом пространстве H). Покажите, что нижняя грань функции $\Phi(x)$ на пересечении $A \cap H_0$ конечна.

{Нужно только рассмотреть случай, когда $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Предположим, что в $A \cap H_0$ существует такая последовательность (x_n) , что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = -\infty$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = +\infty$, где $\gamma_n = \left(\int_a^b x'^2 dt \right)^{1/2}$. Рассмотрите последовательность

функций $y_n = x_n / \gamma_n$ и приведите к противоречию тот факт, что, с одной стороны, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b y_n^2 dt = 0$, а, с другой, существуют такой промежуток $[a, c] \subset I$

и такое число $\rho > 0$, что $|y_n(t)| \geq \rho$ при каждом n и для каждой точки $t \in [a, c]$.

д) Пусть μ_1 — нижняя грань функции $\Phi(x)$ на $A \cap H_0$. Покажите, что если (x_n) — последовательность в $A \cap H_0$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \mu_1$, то

последовательность (x_n) ограничена в H .

[Тот же метод, что и в с).]

Выведите из этого результата, что, выделяя подходящую подпоследовательность, мы можем считать, что последовательность (x_n) равномерно сходится в I к некоторой функции u (которая, однако, *a priori* не обязана принадлежать H).

[Воспользуйтесь теоремой Асколи (7.5.7).]

е) Покажите, что $\Phi(x)$ есть квадратичная форма в H_0 , т. е. имеет место равенство $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) + 2\Psi(x, y)$, где функция Ψ билинейна. Для любой функции z , дважды непрерывно дифференцируемой в I и удовлетворяющей условию $z'(a) = z'(b) = z(a) = z(b) = 0$, имеем $\Psi(x, z) =$

$$= - \int_a^b x z'' dt + \int_a^b q x z dt. \text{ Этой же формулой функция } \Psi(v, z) \text{ может быть}$$

определена для любой функции v , непрерывной в I . Покажите, что для любой такой функции z и любого действительного числа ξ имеет место неравен-

$$\text{ство } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n + \xi z) \geq \mu_1 \int_a^b (x_n + \xi z)^2 dt, \text{ и выведите из этого результата, что}$$

$$\int_a^b (u z'' - q u z + \mu_1 u z) dt = 0.$$

Поэтому если w — дважды непрерывно дифференцируемая функция, для которой $w'' = qu - \mu_1 u$, то с помощью интегрирования по частям полу-

$$\text{чаем } \int_a^b (u - w) z'' dt = 0. \text{ Заключите отсюда, что } u - w \text{ есть многочлен}$$

степени ≤ 1 (заметьте, что если вычесть из $u - w$ подходящий многочлен p степени 1, то найдется такая функция z , что $z'' = u - w - p$ и $z(a) = z(b) = z'(a) = z'(b) = 0$). Следовательно, функция u дважды непрерывно диф-

ференцируема, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u'' - qu + \mu_1 u = 0$$

и условию $\int_a^b u^2 dt = 1$. Кроме того, $u'(a) = -\alpha u(a)$ и $u'(b) = \beta u(b)$.

[Чтобы доказать это последнее утверждение, выразите тот факт, что для любой функции $z \in H_0$, каково бы ни было действительное число ξ ,

выполняется неравенство $\Phi(u + \xi z) \geq \mu_1 \int_a^b (u + \xi z)^2 dt$.]

2. а) Предположим сначала [в обозначениях теоремы (11.7.10)], что $k_1 k_2 \neq 0$, и пусть $\alpha = h_1/k_1$ и $\beta = -h_2/k_2$. Покажите, что функции φ_n могут быть (вплоть до знака) определены следующими условиями: 1°) функция φ_1 такова, что на сфере A : $(y|y) = 1$ в G функция Φ (определенная в задаче 1, с)) достигает своего минимума при $y = \varphi_1$ и этот минимум равен λ_1 ; 2°) при $n > 1$ пусть A_n есть пересечение сферы A и гиперплоскостей $(y|\varphi_k) = 0$ для $1 \leq k \leq n-1$; тогда функция φ_n такова, что на A_n функция Φ достигает своего минимума при $y = \varphi_n$ и этот минимум равен λ_n .

[Это описание функции φ_1 сразу следует из результатов задачи 1; чтобы охарактеризовать функции φ_n , проведите рассуждение такого же характера.]

б) Докажите аналогичные утверждения для случая, когда $k_1 = 0$ и $k_2 \neq 0$, заменяя в определении функции Φ число α на 0, но заменяя и сферу A ее пересечением с гиперплоскостью в G , определяемой условием $u(a) = 0$. Подобным же образом поступите в случае, когда $k_1 \neq 0$ и $k_2 = 0$ или когда $k_1 = k_2 = 0$.

с) При предположениях задачи а) пусть $z_1, \dots, z_{n-1}$ есть $n-1$ произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция в I и пусть $B(z_1, \dots, z_{n-1})$ — пересечение сферы A и $n-1$ гиперплоскостей $(y|\varphi_k) = 0$ ($1 \leq k \leq n-1$). Покажите, что в некоторой точке множества $B(z_1, \dots, z_{n-1})$ функция Φ достигает своего минимума $\rho(z_1, \dots, z_{n-1})$ на этом множестве и что λ_n есть верхняя грань чисел $\rho(z_1, \dots, z_{n-1})$, когда z_i меняются на множестве дважды непрерывно дифференцируемых в промежутке I функций (минимаксный принцип).

[Для доказательства существования минимума примените метод задачи а); неравенство доказывается тем же методом, что и в задаче 8 § 11.5.]

Распространите этот результат на случай, когда $k_1 k_2 = 0$.

3. а) Рассмотрим на одном и том же промежутке I два линейных дифференциальных уравнения второго порядка $y'' - q_1 y + \lambda y = 0$ и $y'' - q_2 y + \lambda y = 0$ с одними и теми же граничными условиями (11.7.2). Пусть $(\lambda_n^{(1)})$ и $(\lambda_n^{(2)})$ — две строго возрастающие последовательности собственных значений этих двух задач Штурма — Лиувилля. Покажите, что если $q_1 \leq q_2$, то $\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(2)}$ при каждом n , а если $|q_1(t) - q_2(t)| \leq M$ в I , то $|\lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)}| \leq M$ при каждом n .

[Воспользуйтесь минимаксным принципом.]

б) Заключите из а), что существует такая константа c , что при каждом n

$$\left| \lambda_n - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right| \leq c,$$

где $l = b - a$.

[Изучите задачу Штурма — Лиувилля для частного случая, когда функция q постоянна.]

4. д) Пусть y — произвольное решение уравнения (11.7.3) в промежутке $I = [a, b]$ при $\lambda > 0$. Покажите, что существуют такие две постоянные A и ω , что y есть решение интегрального уравнения

$$(*) \quad y(t) = A \sin \sqrt{\lambda}(t + \omega) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^t q(s) y(s) \sin \sqrt{\lambda}(t - s) ds.$$

Покажите, что существует такая постоянная B , не зависящая от λ , что $A^2 \leq B(y|y)$.

[С помощью неравенства Коши — Шварца мажорируйте интеграл в правой части равенства (*).]

б) Выведите из а), что если в задаче Штурма — Лиувилля $k_1 k_2 \neq 0$ или же $k_1 = k_2 = 0$, то существуют такие две постоянные C_0 и C_1 , что для каждого n и каждой точки $t \in I$

$$\left| \varphi_n(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n} t \right| \leq \frac{C_0}{n}$$

и

$$\left| \varphi'_n(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} t \right| \leq C_1,$$

где $l = b - a$.

[Воспользуйтесь задачей а) и утверждением из задачи 3, б).]

Каков соответствующий результат, когда только одна из постоянных k_1 и k_2 равна 0?

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ahlfors L., Complex Analysis, New York, 1953.
- [2] Bachmann H., Transfinite Zahlen, Berlin, 1955.
- [3] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. I, Теория множеств, Мир, М., готовится к изданию.
- [4] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. II, Алгебра (Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра), Физматгиз, М., 1962.
- [5] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. III,
— Общая топология (Основные структуры), Физматгиз, М., 1958.
— Общая топология (Числа и связанные с ними группы и пространства), Физматгиз, М., 1959.
- [6] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. V, Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.
- [7] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, Изд-во МГУ, М., 1962.
- [8] Cartan H., Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure, 1951—1952. Fonctions analytiques et faisceaux analytiques.
- [9] Шевалле К., Теория групп Ли, ИЛ, М., т. 1, 1948, т. 2, 1958, т. 3, 1959.
- [10] Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1959.
- [11] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, М. — Л., 1951.
- [12] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
- [13] Данфорд Н. и Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.
- [14] Халмош П., Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.
- [15] Айнс Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИУ, Харьков, 1939.
- [16] Jacobson N., Lectures in Abstract Algebra: II, Linear Algebra, New York, 1953.
- [17] Kamke E., Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930.
- [18] Kelley J., General Topology, New York, 1955.
- [19] Ландау Э., Основы анализа, ИЛ, М., 1948.
- [20] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, М., 1956.

-
- [21] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, М., 1960.
- [22] Steenrod N., Colloquium Lectures, to appear.
- [23] Taylor A., Introduction to Functional Analysis, New York, 1958.
- [24] Вейль А., Введение в теорию кэллеровских многообразий, ИЛ, М. 1961.
- [25] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Stuttgart, 1955.
- [26] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа. Основные операции анализа, Физматгиз, М., ч. I, 1962, ч. II, 1963.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В нижеследующем указателе первая цифра указывает главу, в которой можно найти данный термин, а вторая — параграф в этой главе.

- Абеля лемма 9.1
- теорема 9.3, задача 1
- Абсолютная величина действительного числа 2.2
- Абсолютно суммируемое подмножество, семейство 5.3
- сходящийся ряд 5.3
- Адамара теорема о лакунах 9.15, задача 7
- — о трех окружностях 9.5, задача 10
- Аксиома Архимеда 2.1
- Бореля — Лебега 3.16
- выбора 1.4
- о вложенных промежутках 2.1
- Алгебраическая кратность собственнo-го значения 11.4
- Альтернатива Фредгольма 11.6
- Аналитическая функция 9.3
- —, вычет 9.15
- —, главная часть в точке 9.15
- —, естественная граница 9.15, задача 7
- — мероморфная 9.17
- —, множество единственности 9.4
- —, нуль 9.15
- —, особая граничная точка 9.15, задача 7
- —, особая изолированная точка 9.15
- —, полюс 9.15
- —, порядок в точке 9.15
- —, правильная граничная точка 9.15, задача 7
- —, теорема Коши 9.6
- —, условия Коши — Римана 9.10
- —, целая 9.3
- —, трансцендентная 9.15, задача 3
- Аналитическое отображение, см. Аналитическая функция
- продолжение 9.4
- Аргумент комплексного числа 9.5, задача 8
- Архимеда аксиома 2.1
- Архимедово упорядоченное поле 2.1
- Асколи теорема 7.5
- Ассоциативность абсолютно сходящихся рядов 5.3
- База открытых множеств метрического пространства 3.9
- Базис векторного пространства 5.9, задача 2
- ортонормальный 6.5
- Базисное действительное векторное пространство 5.1
- Банаха пространства 5.3, задача 5; 5.7, задача 1; 8.9, задача 2
- Банахово пространство 5.1
- Бесконечно дифференцируемое отображение 8.12
- Бесконечное произведение метрических пространств 3.20, задача 7; 8.9, задача 2
- Бесконечные точки 3.3
- Бесконечный путь 9.12, задача 3
- Бесселя неравенство 6.5
- Биективное отображение 1.6
- Билинейная симметричная форма 6.1
- Билинейное отображение 6.1
- Блoха постоянная 10.3, задача 5
- Более сильная норма 5.6
- — топология 3.12
- сильное расстояние 3.12
- Больцано теорема 3.19
- Бореля — Лебега аксиома 3.16
- — теорема 3.17
- Брауэра теорема 10.2, задача 3

Вейерштрасса подготовительная теорема 9.17, задача 4
 — теорема об аппроксимации 7.4
 — о существенных особенностях 9.15, задача 2
 Вектор изотропный 6.1
 — ортогональный множеству 6.1
 — собственный 11.1
 Векторное подпространство 5.4
 — пространство действительное, комплексное 5.1
 — —, его базис 5.9, задача 2
 Векторы ортогональные 6.1
 Верхняя грань множества, функции (отображения) 2.3
 Вершина решетки 9Д.4, задача 4
 Взаимно непрерывное отображение 3.12
 — однозначное отображение 1.6
 Включение 1.1
 Вложение 1.6
 — естественное 1.6
 Внешняя точка множества 3.7
 Внутренность множества 3.7
 Внутренняя точка множества 3.7
 Возрастающая справа (слева) функция 8.5, задача 1
 — функция 4.2
 Вольтерра ядро 11.6, задача 8
 Вполне интегрируемое уравнение 10.9
 — непрерывный оператор 11.2
 — несвязное множество 3.19
 — ограниченное множество 3.17
 — — пространство 3.16
 Всюду плотное множество 3.9
 Вторая теорема о среднем значении 8.7, задача 2
 Вырождающаяся эрмитова форма 6.1
 Вычет 9.15

Гамма-функция 9.12, задача 2
 Геометрическая кратность собственного значения 11.4
 Гильбертова сумма гильбертовых пространств 6.4
 Гильбертово пространство 6.2
 — — последовательностей 6.5
 Гиперплоскость 5.8
 — однородная, опорная, параллельная 5.8, задача 3
 Главная часть аналитической функции в точке 9.15
 Главное значение логарифма 9.5, задача 8
 Гомеоморфизм 3.12
 Гомеоморфные метрические пространства 3.12

Гомотетическое отображение 5.1
 Гомотопия 9.6; 10.2, задача 6
 Гомотопные траектории, петли 9.6; 10.2, задача 6
 Грама определитель 6.6, задача 3
 Граница множества 3.8
 Граничная точка множества 3.8
 — — особая для аналитической функции 9.15, задача 7
 — — правильная для аналитической функции 9.15, задача 7
 Граничные условия для задачи Штурма — Лиувилля 11.7
 Грань верхняя 2.3
 — нижняя 2.3
 График отношения 1.3
 — отображения 1.4
 — функциональный 1.4
 Грина функция 11.7
 Гурса теорема 9.10, задача 1

Действительная ограниченная функция 2.3
 — отрицательная полупрямая 9.5, задача 8
 — плоскость 3.2
 — прямая 3.2
 — — расширенная 3.3
 — часть комплексного числа 4.4
 Действительное векторное пространство 5.1
 — число 2.1
 — —, его абсолютная величина 2.2
 — —, его отрицательная и положительная части 2.2
 Декартово произведение множеств 1.3
 Диагональ 1.4
 Диагональная нумерация 1.9
 — подпоследовательность 9.13
 Диаметр множества 3.4
 Дини теорема 7.2
 Дирихле функция 3.11
 Дискретное метрическое пространство 3.2; 3.12
 Дистрибутивность 1.2
 Дифференциальное уравнение обыкновенное 10.4
 — — — линейное 10.6
 — — — —, резольвента 10.8
 — — — — однородное 10.8
 — — — —, максимальное, минимальное решение 10.5, задача 7
 — — —, приближенное ε -решение 10.5
 — — —, решение 10.4; 11.7
 — — с частными производными 10.9

- Дифференциальный линейный оператор 8.13
 Дифференцируемое отображение 8.1
 Длина промежутка 2.2
 Дополнение множества 1.2
 — ортогональное 6.3
 — топологическое 5.4
 Дуга простая 9Д.4

 Единичная окружность 9.5
 — —, обойденная n раз 9.8
 Естественная граница аналитической функции 9.15, задача 7
 Естественное вложение 1.6
 — упорядочение 2.2

Жордана теорема 9Д.4

 Задача Штурма — Лиувилля 11.7
 Замена переменных в интеграле 8.7
 Замкнутое кольцо 9.14
 — множество 3.8
 Замкнутый квадрат решетки 9Д.4, задача 4
 — цилиндр 9.1
 — промежутков 2.1
 — шар 3.4
 Замыкание множества 3.8
 Звездобразная область 9.7
 Значение графика отображения 1.4
 — непрерывного оператора 11.1

Изолированная особая точка 9.15
 — точка множества 3.9, задача 2; 9.15
 Изометрические пространства 3.3
 Изометрия 3.3
 Изоморфизм предгильбертовых пространств 6.2; 6.6
 Изотропный вектор 6.1
 Индекс точки относительно контура, контура относительно точки 9.8
 — — — петли 9Д.1
 Индуцированное расстояние 3.10
 Интеграл 8.7
 — вдоль пути 9.6
 —, замена переменных в нем 8.7
 — несобственный 9.12, задача 3
 Интегрирование по частям 8.7
 Инъективное отображение 1.6

 Каноническое разложение вектора относительно эрмитова вполне непрерывного оператора 11.5; 11.6
 Канторово трюичное множество 4.2, задача 2
 Касательные отображения 8.1
 Квадратный корень из положительно-эрмитова вполне непрерывного оператора 11.5, задача 12
 Квазидифференцируемая функция 8.4, задача 4
 Квазипроизводная 8.4, задача 4
 Квазиэрмитов оператор 11.5, задача 17
 Колесание функции 3.14
 Кольцо замкнутое, открытое 9.14
 Коммутативность абсолютно сходящихся рядов 5.3
 Коммутативно сходящийся ряд 5.3, задача 4
 Компактное множество 3.17
 — пространство 3.16
 Комплексное векторное пространство 5.1
 Комплексное число 4.4
 — —, аргумент 9.5, задача 8
 — —, действительная и мнимая части 4.4
 — —, модуль 4.4
 — —, сопряженное 4.4
 Конец промежутка 2.1
 — сегмента 5.1, задача 4
 — траектория 9.6
 Конечные элементы расширенной прямой 3.3
 Контур 9.6
 Координата (n -я) относительно ортонормальной системы 6.5
 Коразмерность линейного многообразия 5.1, задача 5
 Коши критерий для последовательностей 3.14
 — — для рядов 5.2
 — неравенства 9.9
 — последовательность 3.14
 Коши — Римана условия для аналитических функций 9.10
 Коши теорема об аналитических функциях 9.6
 — — существования 10.4
 — формула 9.9
 Коши — Шварца неравенство 6.2
 Коэффициент (n -й) относительно ортонормальной системы 6.5
 — (n -й) Фурье 6.5; 11.6, задача 3
 Кратность собственного значения 11.4
 Кривая 3.19
 — простая замкнутая 9Д.4
 Кривая Пеано 4.2, задача 5; 9.12, задача 5
 Круг 4.4
 Кусочно линейная функция 8.7

- Лагранжа формула 10.2, задача 10
 Лебега свойство 3.16, задача 1
 Лебегова функция (μ -я) 11.6, задача 2
 Левая производная 8.4
 Лежандра полиномы 6.6; 8.14, задача 1
 Лейбница правило 8.11
 — формула 8.13
 Лемма Абеля 9.1
 — Шварца 9.5, задача 7
 Линейная форма 5.8
 Линейное дифференциальное уравнение 10.6
 — многообразие 5.1, задача 5
 — —, коразмерность и размерность 5.1, задача 5
 — отображение 5.7
 Линейный дифференциальный оператор 8.13
 Липшица условие 8.4, задача 7; 10.5
 Липшицевская функция 10.5
 Ливуилля теорема 9.11
 Логарифм 4.3; 9.5, задача 8
 Локально замкнутое множество 3.10, задача 3
 — компактное пространство 3.18
 — липшицевская функция 10.4
 — связное пространство 3.19
 Ломаная линия 5.1, задача 4
 Лорана ряд 9.14
- Мажоранта 2.3**
 Мажорируемая функция (отображение), мажорируемое множество 2.3
 Максимальное решение дифференциального уравнения 10.5, задача 7
 Максимум относительный 3.9, задача 6
 — — строгий 3.9, задача 6
 Мероморфная функция 9.17
 Мерсера теорема 11.6
 Метод приближений Ньютона 10.2, задача 5
 — скользящего горба 11.5, задача 4; 11.6, задача 6
 Метрические пространства гомеоморфные 3.12
 — — изометрические 3.3
 — —, произведения 3.20
 Метрическое пространство 3.1
 — —, база открытых множеств в нем 3.9
 — — дискретное 3.2; 3.12
 — —, подпространство 3.10
 — — сепарабельное 3.9
 Минимаксный принцип 11.5, задача 8; 11.7, задача 2
- Минимальное решение дифференциального уравнения 10.5, задача 7
 Минковского неравенства 6.2
 Миноранта 2.3
 Минорируемая функция (отображение), минорируемое множество 2.3
 Мнимая часть комплексного числа 4.4
 Многообразие линейное 5.1, задача 5
 Многочлен тригонометрический 7.4
 — характеристический 11.1
 Множества, декартово произведение 1.3
 —, ортогональность 6.1
 —, пересечение их семейства 1.8
 —, равномошные 1.9
 —, разность 1.2
 Множество 1.1
 — внешних точек множества 3.7
 — внутренних точек множества 3.7
 — вполне несвязное 3.19
 — — ограниченное 3.17
 — всюду плотное 3.9
 —, граница 3.8
 —, диаметр 3.4
 —, дополнение 1.2
 — единственности для аналитических функций 9.4
 — замкнутое 3.8
 —, замыкание 3.8
 — индексов 1.8
 — канторова 4.2, задача 2
 — компактное 3.17
 — локально замкнутое 3.10, задача 3
 — мажорируемое, минорируемое 2.3
 — не более чем счетное 1.9
 — ограниченное в метрическом пространстве 3.4
 — — в $\mathbb{R}$ 2.3
 — — сверху, снизу 2.3
 — ограниченных отображений 3.2
 —, разделяющее две точки 9Д.3
 — открытое 3.5
 — относительно компактное 3.17
 — отображений 1.4
 — плотное в пространстве, в другом множестве 3.9
 — подмножество данного множества 1.1
 — пустое 1.1
 — равномерно равностепенно непрерывное 7.5, задача 5
 — равностепенно непрерывное 7.5
 — связное 3.19
 —, содержащееся в другом множестве, содержащее другое множество 1.1
 — счетное 1.9
 — тотальное 5.4

- Множество функций, отделяющее точки пространства 7.3
 Множитель первичный 9.12, задача 1
 Модуль комплексного числа 4.4
 Монотонная функция 4.2
 Морера теорема 9.10, задача 2
- Наложение 1.6
 Начало промежутка 2.1
 — траектории 9.6
 Не более чем счетное множество, семейство 1.9
 Невырождающийся эрмитов оператор 11.5
 Непрерывно дифференцируемое отображение 8.9
 Непрерывное продолжение оператора 11.1, задача 5
 Непрерывность корней уравнения как функций от параметров 3.20, задача 4; 9.17
 — отображения в пространстве, в точке 3.11
 — слева 8.5, задача 1
 — справа 11.6
 Неравенство Бесселя 6.5
 — Коши 9.9
 — Коши — Шварца 6.2
 — Минковского 6.2
 — треугольника 3.1
 — ультраметрическое 3.8, задача 4
 Несобственно интегрируемая функция вдоль бесконечного пути, несобственный интеграл 9.12, задача 3
 Несущественное отображение 9Д.2
 Нижняя грань множества, функции (отображения) 2.3
 Норма 5.1
 — более сильная 5.6
 — эрмитова 9.5, задача 7
 Нормально сходящийся ряд, нормально суммируемое семейство 7.1
 Нормированное пространство 5.1
 — —, подпространство 5.4
 Нормированные пространства, их произведения 5.4
 Нормы эквивалентные 5.6
 Нуль аналитической функции 9.15
 Ньютона метод приближений 10.2, задача 5
- Область звездообразная 9.7
 — односвязная 9.7; 10.2, задача 6
 Образ 1.5
 Обратное отображение 1.6
 Объединение двух множеств 1.2
- Объединение семейства множеств 1.8
 Обыкновенные дифференциальные уравнения 10.4; 10.9
 Ограниченная действительная функция 2.3
 Ограниченное множество в метрическом пространстве 3.4
 — множество в $\mathbb{R}$ 2.3
 — отображение 7.1
 — сверху множество, ограниченная сверху функция (отображение) 2.3
 — снизу множество, ограниченная снизу функция (отображение) 2.3
 Однородная гиперплоскость 5.8, задача 3
 Однородное линейное дифференциальное уравнение 10.8
 Односвязная область 9.7; 10.2, задача 6
 Односторонний предел 7.6
 Окрестность 3.6
 — открытая 3.6
 Оператор 11.1
 — вполне непрерывный 11.2
 — квази-эрмитов 11.5, задача 17
 — линейный дифференциальный 8.13
 —, непрерывное продолжение 11.1, задача 5
 —, регулярное значение 11.1
 — риссовский 11.4, задача 5
 — самосопряженный 11.5
 —, собственное значение 11.1
 —, собственный вектор 11.1
 —, сопряженный 11.5
 —, спектр 11.1
 —, спектральное значение 11.1
 — эрмитов, см. Эрмитов оператор
 Опорная гиперплоскость 5.8, задача 3
 Определитель Грама 6.6, задача 3
 Ортогональная проекция 6.3
 — система 6.5
 Ортогональное дополнение 6.3
 Ортогональные векторы 6.1
 — множества 6.1
 Ортонормализация 6.6
 Ортонормальная система 6.5
 — —, n -й коэффициент относительно нее 6.5
 — — Хаара 8.7, задача 7
 Ортонормальный базис 6.5
 Основная теорема алгебры 9.11
 Особая граничная точка аналитической функции 9.15, задача 7
 — изолированная точка 9.15
 Остаток (n -й) ряда 5.2
 Открытая окрестность 3.6

- Открытое кольцо 9.14
 — множество 3.5
 — покрытие 3.16
 — — точно-конечное 3.16, задача 2
 Открытый квадрат решетки 9Д.4, задача 4
 — цилиндр 9.1
 — промежуток 2.1
 — шар 3.4
 Относительно компактное множество 3.17
 Относительный максимум 3.9, задача 6
 — — строгий 3.9, задача 6
 Отношение 1.1
 —, его график 1.3
 — функциональное 1.4
 Отображение 1.4, см. Функция
 — аналитическое, см. Аналитическая функция
 — бесконечно дифференцируемое 8.12
 — биективное 1.6
 — билинейное 6.1
 — взаимно непрерывное 3.12
 — — однозначное 1.6
 — возрастающее 4.2
 — — слева, справа 8.5, задача 1
 — гомотетическое 5.1
 —, график 1.4
 —, дифференцируемое 8.1
 — — дважды, ..., p раз 8.12
 — — по n -й переменной 8.9
 —, значение 1.4
 — инъективное 1.6
 — касательное в точке 8.1
 — квазидифференцируемое 8.4, задача 4
 — кусочно-линейное 8.7
 — линейное 5.7
 — монотонное 4.2
 — непрерывно дифференцируемое 8.9
 — непрерывное 3.11
 — несущественное 9Д.2
 —, обратное к биективному 1.6
 — ограниченное 2.3, 7.1
 — — сверху, снизу 2.3
 — постоянное 1.4
 —, продолжение 1.4
 — равномерно непрерывное 3.11
 — симметрическое 6.1
 — сложное 1.7
 — строго убывающее, строго возрастающее, строго монотонное 4.2
 — существенное 9Д.2
 — сюръективное 1.4
 — тождественное 1.4
 — убывающее 4.2
 — четное 8.14, задача 6
 —, ядро 11.6
 Отрицательная действительная полу-
 прямая 9.5, задача 8
 — часть действительного числа 2.2
 Отрицательное число 2.2
 Параллельная гиперплоскость 5.8, задача 3
 Пара упорядоченная 1.3
 Парсеваля равенство 6.5
 — тождество 6.5
 Пеано кривая 4.2, задача 5; 9.12, задача 5
 Пеано теорема 10.5, задача 4
 Первичный множитель 9.12, задача 1
 Первообразная 8.7
 Перенесенное расстояние 3.3
 Пересечение двух множеств 1.2
 — семейства множеств 1.8
 Петельная гомотопия 9.6; 10.2, задача 6
 Петля 9.6; 10.2, задача 6
 — простая 9Д.4
 Пикара теорема 10.3, задача 8
 Пифагора теорема 6.2
 Подготовительная теорема Вейер-
 штрасса 9.17, задача 4
 Подмножество 1.1
 — абсолютно суммируемое 5.3
 —, отделяющее точки пространства 7.3; 9Д.3
 — пустое 1.1
 Подпоследовательность 3.13
 — диагональная 9.13
 — полная 11.5, задача 8
 Подпространство векторного про-
 странства 5.4
 — метрического пространства 3.10
 — нормированного пространства 5.4
 — собственное, соответствующее дан-
 ному собственному значению 11.1
 Подсемейство 1.8
 Подстановка степенного ряда в сте-
 пенной ряд 9.2
 Показательная функция 4.3; 9.5
 Покрытие множества 1.8
 — открытое 3.16
 — точно-конечное открытое 3.16, задача 2
 Поле 2.1
 — комплексных чисел 4.4
 — упорядоченное 2.1
 — — архимедово 2.1
 Полиномы Лежандра 6.6; 8.14, задача 1
 Цилиндр замкнутый, открытый 9.1
 — его центр, его радиус 9.1

- Полная последовательность 11.5, задача 8
 — — особых значений вполне непрерывного оператора 11.5, задача 15
 — — положительных собственных значений 11.5, задача 8
 — производная 8.1
 Полное пространство 3.14
 Положительная часть действительного числа 2.2
 — эрмитова форма 6.2
 Положительное число 2.2
 Положительно определенная эрмитова форма 6.2
 Положительный эрмитов оператор 11.5
 Полуоткрытый промежуток 2.1
 Полюс аналитической функции 9.15
 Порядок аналитической функции в точке 9.15
 — линейного дифференциального оператора 8.13
 — полюса 9.15
 Последовательность 1.8
 — Коши 3.14
 —, предел 3.13
 —, предельная точка 3.13
 — просто сходящаяся 7.1
 — равномерно сходящаяся 7.1
 — сходящаяся 3.13
 Постоянная Блэха 10.3, задача 5
 Постоянное отображение 1.4
 Правая производная 8.4
 Правило Лейбница 8.11
 Правильная граничная точка аналитической функции 9.15, задача 7
 Предгильбертово пространство 6.2
 Предел односторонний 7.6
 — слева, справа 7.6
 — функции, последовательности 3.13
 Предельная точка последовательности 3.13
 Приближенное ε -решение дифференциального уравнения 10.5
 Принадлежность 1.1
 Принцип аналитического продолжения 9.4
 — изолированности нулей 9.1
 — максимума 9.5
 — минимаксный 11.5, задача 8; 11.7, задача 2
 — продолжения неравенства 3.15
 — тождеств 3.15
 — Фрагмена — Линделефа 9.5, задача 16
 Продолжение аналитическое 9.4
 — непрерывного оператора 11.1, задача 5
 Продолжение отображения 1.4
 Проекция в произведении 1.4
 — в прямой сумме 5.4
 — ортогональная 6.3
 — первая, вторая, ..., n -я 1.3
 Произведение метрических пространств 3.20; 3.20, задача 7
 — множеств 1.3
 — нормированных пространств 5.4
 — скалярное 6.2
 Производная функции в открытом множестве, в точке 8.1; 8.4
 — — вторая, ..., p -я 8.12
 — — левая, правая 8.4
 — — относительно множества 8.4
 — — промежутка 8.12
 — — полная 8.1
 — — частная 8.9
 Промежуток, длина, конец, начало 2.1
 — замкнутый, открытый, полуоткрытый 2.1
 Пробраз 1.5
 Простая дуга, простая замкнутая кривая, простая петля, простая траектория 9Д.4
 — функция 7.6
 Просто сходящаяся последовательность, просто сходящийся ряд 7.1
 Пространство базисное 5.1
 — Банаха 5.3, задача 5; 5.7, задача 1; 8.9, задача 2
 — банахово 5.1
 — векторное, см. Векторное пространство
 — вполне ограниченное 3.16
 — гильбертово 6.2
 — компактное 3.16
 — локально компактное 3.18
 — — связное 3.19
 — метрическое, см. Метрическое пространство
 — непрерывных линейных отображений 5.7
 — нормированное 5.1
 — ограниченных отображений 6.1
 — полное 3.14
 — предгильбертово 6.2
 — связное 3.19
 — сепарабельное 3.9
 Противоположная траектория 9.6
 Процесс ортогонализации 6.6
 Прямоугольник 5.5, задача 4
 Пустое множество 1.1
 Путь 9.6
 — бесконечный 9.12, задача 3

- Равенство 1.1
 — Парсеваля 6.5
 Равномерно непрерывная функция (отображение) 3.11
 — равномерно непрерывное множество 7.5, задача 5
 — сходящаяся последовательность, равномерно сходящийся ряд 7.1
 — эквивалентные расстояния 3.14
 Равномощные множества 1.9
 Равностепенная непрерывность в точке, равностепенная непрерывность 7.5
 Радиус сходимости степенного ряда 9.1, задача 1
 — шара 3.4
 Радиусы полицилиндра 9.1
 Размерность линейного многообразия 5.1, задача 5
 Разность двух множеств 1.2
 Разрез плоскости 9Д.3
 Ранг линейного отображения 10.3
 Расстояние 3.1
 — более сильное 3.12
 — индуцированное 3.10
 — между двумя множествами 3.4
 — — — элементами множества 3.1
 — точкой и множеством 3.4
 — p -адическое 3.2
 — перенесенное 3.3
 — хаусдорфово 3.16, задача 3
 — эвклидово 3.2
 Расстояния равномерно эквивалентные 3.14
 — топологически эквивалентные 3.12
 — эквивалентные 3.12
 Расширенная действительная прямая 3.3
 Рациональное число 2.2
 Регуляризация 8.12, задача 2
 Регулярное значение оператора 11.1
 Резольвента линейного дифференциального уравнения 10.8
 Решение обыкновенного дифференциального уравнения 10.4; 11.7
 — — — линейного 10.8
 — — —, максимальное, минимальное 10.5, задача 7
 — — —, ε -приближенное 10.5
 — фундаментальное (элементарное) задачи Штурма — Лиувилля 11.7
 Решетка 9Д.4
 Римана суммы 8.7, задача 1
 Рисса теорема 5.9
 — теория 11.3
 Риссовская точка 11.4, задача 5
 Риссовский оператор 11.4, задача 5
 Роля теорема 8.2, задача 4
 Руше теорема 9.17
 Ряд 5.2
 — абсолютно сходящийся 5.3
 — — —, ассоциативность и коммутативность 5.3
 — — —, производная 5.3
 — коммутативно сходящийся 5.3, задача 4
 — Лорана 9.14
 —, n -я частичная сумма, n -й член, n -й остаток 5.2
 — просто сходящийся 7.1
 — равномерно сходящийся 7.1
 — степенной 9.1
 — —, радиус сходимости 9.1, задача 1
 —, сумма 5.2
 — сходящийся 5.2
 — — нормально 7.1
 — Фурье 11.6, задача 2
 Самосопряженный оператор 11.5
 Свойство Лебега 3.16, задача 1
 Связное множество, пространство 3.19
 Сдвиг 5.1
 Сегмент 5.1, задача 4; 8.5
 Семейство абсолютно суммируемое 1.8
 — не более чем счетное 1.9
 — нормально суммируемое 7.1
 — счетное 1.9
 — элементов 1.8
 Сепарабельное метрическое пространство 3.9
 Симметрическая билинейная форма 6.1
 Симметричное отображение 6.1
 Симпсона формула 8.14, задача 10
 Система линейных дифференциальных уравнений 10.6
 — окрестностей фундаментальная 3.6
 — ортогональная 6.5
 — ортонормальная 6.5
 — тригонометрическая 6.5
 Скаляр 9.1
 Скалярное произведение 6.2
 Сложное отображение 1.7
 Собственная функция ядра 11.6
 Собственное значение задачи Штурма — Лиувилля 11.7
 — — оператора 11.1
 — подпространство, соответствующее данному собственному значению 11.1
 Собственный вектор оператора 11.1
 Соединение двух траекторий 9.6
 Сопряженное комплексное число 4.4
 Сопряженный оператор 11.5
 Спектральное значение оператора 11.1

- Спектр оператора 11.1
- Степенная функция 4.3
- Степенной ряд 9.1
- Стоуна — Вейерштрасса теорема 7.3
- Строгий относительный максимум 3.9, задача 6
- Строго отрицательное, строго положительное число 2.2
- убывающее, строго возрастающее, строго монотонное отображение 4.2
- Ступенчатая функция 7.6
- Сужение отображения 1.4
- Сумма абсолютно суммируемого семейства 5.3
- гильбертова 6.4
- прямая 5.4
- Римана 8.7, задача 1
- ряда 5.2
- топологическая прямая 5.4
- Существенно особая точка, существенная особенность 9.15
- Существенное отображение 9Д.2
- Сфера 3.4
- Сходящаяся последовательность 3.13
- Сходящийся ряд 5.2
- Счетное множество, семейство 1.9
- Сюръективное отображение 1.6
- Таубера теорема 9.3, задача 2
- Тейлора формула 8.14
- Теорема Абеля 9.3, задача 1
- Адамара о лакунах 9.15, задача 7
- о трех окружностях 9.5, задача 10
- Асколи 7.5
- Больцано 3.19
- Бореля — Лебега 3.17
- Брауэра 10.2, задача 3
- Вейерштрасса об аппроксимации 7.4
- о существенных особенностях 9.15, задача 2
- о подготовительная 9.17, задача 4
- Гурса 9.10, задача 1
- Дини 7.2
- Жордана 9Д.4
- Коши 9.6
- Лиувилля 9.11
- Мерсера 11.6
- Морера 9.10, задача 2
- о вычетах 9.16
- о конформном отображении 10.3, задача 4
- о неподвижной точке 10.1
- о неявной функции 10.2
- о ранге 10.3
- о среднем значении 8.5
- Теорема о среднем значении вторая 8.7, задача 2
- Пеано 10.5, задача 4
- Пикара 10.3, задача 8
- Пифагора 6.2
- Рисса 5.9
- Ролля 8.2, задача 4
- Руше 9.17
- Стоуна — Вейерштрасса 7.3
- существование Коши 10.4
- Таубера 9.3, задача 2
- Титце — Урысона 4.5
- Фробениуса 10.9
- Хартогса 9.9, задача 3
- Шенфлиса 9Д.4, задача 9
- Шоттки 10.3, задача 6
- Янишевского 9Д.3
- Теория Рисса 11.3
- Титце — Урысона теорема о продолжении 4.5
- Тождественное отображение 1.4
- Тождество Парсеваля 6.5
- Топологическая прямая сумма, топологическое прямое слагаемое 5.4
- Топологически эквивалентные расстояния 3.12
- Топологическое дополнение 5.4
- понятие 3.12
- Топология 3.12
- более сильная 3.12
- Тотальное множество (семейство) 5.4
- Точечно-конечное открытое покрытие 3.16, задача 2
- Точка 3.4
- бесконечная 3.3
- внешняя 3.7
- внутренняя 3.7
- граничная 3.8
- изолированная 3.9, задача 2; 9.15
- конденсации 3.9, задача 4
- особая изолированная 9.15
- — граничная 9.15, задача 7
- правильная граничная 9.15, задача 7
- предельная 3.13
- прикосновения множества 3.8
- риссовская 11.4, задача 5
- существенно особая 9.15
- Точки, соединенные ломаной линией 5.1, задача 4
- Траектории гомотопные 9.6; 10.2, задача 6
- Траектория 9.6; 10.2, задача 6
- , ее конец, ее начало 9.6
- простая 9Д.4
- противоположная 9.6
- , сводящаяся к точке 9.6

- Трансцендентная целая функция 9.15, задача 3
 Тригонометрическая система 6.5
 Тригонометрические многочлены 7.4
- Убывающая функция 4.2
 Ультраметрическое неравенство 3.8, задача 4
 Упорядоченная пара 1.3
 Упорядоченное поле 2.1
 — архимедово поле 2.1
 Уравнение вполне интегрируемое 10.9
 — гиперплоскости 5.8
 — дифференциальное, см. Дифференциальное уравнение
 — с частными производными 10.9
 — Фредгольма 11.6
 Условие Липшица 8.4, задача 7; 10.5
 Условия Коши — Римана 9.10
- Фактор-размерность, см. Коразмерность
 Форма линейная 5.8
 — симметрическая билинейная 6.1
 — эрмитова, см. Эрмитова форма
 Формула Коши 9.9
 — Лагранжа 10.2, задача 10
 — Лейбница 8.13
 — Симпсона 8.14, задача 10
 — Тейлора 8.14
 Фрагмена — Линделёфа принцип 9.5, задача 16
 Фредгольма альтернатива 11.6
 — уравнение 11.6
 Фробениуса теорема 10.9
 Фундаментальная матрица решений 10.8
 — система окрестностей 3.6
 Фундаментальное решение 11.7
 Функции, совпадающие на подмножестве 1.4
 Функциональное отношение 1.4
 Функциональный график 1.4
 Функция, см. Отображение
 — Грина для задачи Штурма — Лиувилля 11.7
 — Дирихле 3.11
 —, ее колебание 3.14
 — Лебегова (n -я) 11.6, задача 2
 — липшицевская 10.5
 — локально липшицевская 10.4
 — мажорируемая 2.3
 — мероморфная 9.17
 — минорируемая 2.3
- Функция несобственно интегрируемая вдоль бесконечного пути 9.12
 задача 3
 — показательная 4.3, 9.5
 — простая 7.6
 — собственная 11.6
 — с ограниченной вариацией 7.6, задача 3
 — степенная 4.3
 — ступенчатая 7.6
 — трансцендентная целая 9.15, задача 3
 — целая 9.3
 Фурье коэффициент (n -й) 6.5; 11.6, задача 3
 — ряд 11.6, задача 2
- Хаара ортонормальная система 8.7, задача 7
 Характеристический многочлен 11.1
 Хартогса теорема 9.9, задача 3
 Хаусдорфово расстояние между двумя множествами 3.16, задача 3
- Целая функция 9.3
 — трансцендентная функция 9.15, задача 3
 Целое число 2.2
 Центр полицилиндра 9.1
 — шара 3.4
- Частичная сумма (n -я) ряда 5.2
 Частная производная 8.9
 Четное отображение 8.14, задача 6
 Число действительное, см. Действительное число
 — дробное, отрицательное, положительное 2.2
 — комплексное, см. Комплексное число
 — рациональное 2.2
 — строго отрицательное, строго положительное 2.2
 — целое 2.2
 — чисто мнимое 4.4
- Шаг решетки 9Д.4, задача 4
 Шар, его радиус, его центр 3.4
 — замкнутый, открытый 3.4
 Шаровой слой 9.11, задача 5
 Шварца лемма 9.5, задача 7
 Шенфлиса теорема 9Д.4, задача 9
 Шоттки теорема 10.3, задача 6
 Штурма — Лиувилля задача 11.7

- Эвклидово расстояние 3.2
Эйленберга критерий 9.3
Эйлера постоянная 9.12, задача 2
Эквивалентные нормы 5.6
— пути 9.6
— расстояния 3.12
Экспоненты 4.3
Элементарное (фундаментальное) решение задачи Штурма — Лиувилля 11.7
Элемент 1.1
— наибольший, наименьший 2.2
— принадлежащий множеству 1.1
- Эрмитов оператор 11.5
— — невырождающийся 11.5
— — положительный 11.5
Эрмитова норма 9.5, задача 7
— форма 6.1
— — вырождающаяся 6.1
— — положительная 6.2
— — положительно-определенная 6.2
- Ядро Вольтерра 11.6, задача 8
— отображения 11.6
Янишевского теорема 9Д.3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Обозначения	8
Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ	13
1. Элементы и множества. 2. Булевская алгебра. 3. Произведение двух множеств. 4. Отображения. 5. Образы и прообразы. 6. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. 7. Композиция отображений. 8. Семейства элементов. Объединение и пересечение семейств множеств. 9. Счетные множества.	
Глава 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА	28
1. Аксиомы действительных чисел. 2. Порядковые свойства действительных чисел. 3. Верхняя и нижняя грани.	
Глава 3. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА	40
1. Расстояния и метрические пространства. 2. Примеры расстояний. 3. Изометрия. 4. Шары, сферы, диаметр. 5. Открытые множества. 6. Окрестности. 7. Внутренность множества. 8. Замкнутые множества, точки прикосновения, замыкание множества. 9. Плотные подмножества; сепарабельные пространства. 10. Подпространства метрического пространства. 11. Непрерывные отображения. 12. Гомеоморфизмы. Эквивалентные расстояния. 13. Пределы. 14. Последовательности Коши. Полные пространства. 15. Элементарные теоремы о продолжении. 16. Компактные пространства. 17. Компактные множества. 18. Локально компактные пространства. 19. Связные пространства и связные множества. 20. Произведение двух метрических пространств.	
Глава 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ	94
1. Непрерывность алгебраических операций. 2. Монотонные функции. 3. Логарифмы и показательная функция. 4. Комплексные числа. 5. Теорема Титце — Урысона о продолжении.	

Глава 5. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА 108

1. Нормированные пространства и банаховы пространства. 2. Ряды в нормированном пространстве. 3. Абсолютно сходящиеся ряды.
4. Подпространства и конечные произведения нормированных пространств. 5. Критерий непрерывности полилинейного отображения.
6. Эквивалентные нормы. 7. Пространства непрерывных полилинейных отображений. 8. Замкнутые гиперплоскости и непрерывные линейные формы. 9. Конечномерные нормированные пространства.
10. Сепарабельные нормированные пространства.

Глава 6. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА 136

1. Эрмитовы формы. 2. Положительные эрмитовы формы. 3. Ортогональная проекция на полное подпространство. 4. Гильбертова сумма гильбертовых пространств. 5. Ортонормальные системы.
6. Ортонормализация.

Глава 7. ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ 152

1. Пространства ограниченных функций. 2. Пространства ограниченных непрерывных функций. 3. Теорема Стоуна — Вейерштрасса об аппроксимации. 4. Приложения. 5. Равностепенно непрерывные множества. 6. Простые функции.

Глава 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ 170

1. Производная непрерывного отображения. 2. Формальные правила дифференцирования. 3. Производные в пространствах непрерывных линейных функций. 4. Производные функций одной переменной. 5. Теорема о среднем значении. 6. Приложения теоремы о среднем значении. 7. Первообразные и интегралы. 8. Приложение: число e . 9. Частные производные. 10. Якобианы. 11. Производная интеграла, зависящего от параметра. 12. Производные высшего порядка. 13. Дифференциальные операторы. 14. Формула Тейлора.

Глава 9. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ 225

1. Степенные ряды. 2. Подстановка степенных рядов в степенной ряд. 3. Аналитические функции. 4. Принцип аналитического продолжения. 5. Примеры аналитических функций; показательная функция. Число π . 6. Интегрирование вдоль пути. 7. Первообразная аналитической функции в односвязной области. 8. Индекс точки относительно контура. 9. Формула Коши. 10. Критерий аналитичности функций комплексных переменных. 11. Теорема Лиувилля. 12. Сходящиеся последовательности аналитических функций.

13. Равностепенно непрерывные множества аналитических функций.
 14. Ряд Лорана. 15. Изолированные особые точки; полюсы; нули;
 вычеты. 16. Теорема о вычетах. 17. Мероморфные функции.

Д о б а в л е н и е к г л а в е 9. ПРИЛОЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ
 ФУНКЦИЙ К ТОПОЛОГИИ ПЛОСКОСТИ 289

1. Индекс точки относительно петли. 2. Существенные отображе-
 ния в единичную окружность. 3. Разрезы плоскости. 4. Простые
 дуги и простые замкнутые кривые.

Г л а в а 10. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ 304

1. Метод последовательных приближений. 2. Неявные функции.
 3. Теорема о ранге. 4. Дифференциальные уравнения. 5. Сравне-
 ние решений дифференциальных уравнений. 6. Линейные диффе-
 ренциальные уравнения. 7. Зависимость решения от параметров.
 8. Зависимость решения от начальных условий. 9. Теорема Фро-
 бениуса.

Г л а в а 11. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ 361

1. Спектр непрерывного оператора. 2. Вполне непрерывные опера-
 торы. 3. Теория Ф. Рисса. 4. Спектр вполне непрерывного опера-
 тора. 5. Вполне непрерывные операторы в гильбертовых простран-
 ствах. 6. Интегральное уравнение Фредгольма. 7. Задача Штурма —
 Лиувилля.

Л и т е р а т у р а 415

П р е д м е т н ы й у к а з а т е л ь 417